İNTEGRALLENEBİLİR G_2 YAPISINA SAHİP MANİFOLDLAR

Şirin SOLMAZ
Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Temmuz – 2008

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Şirin Solmaz'ın **"İntegrallenebilir G_2 Yapısına Sahip Manifoldlar"** başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 26.06.2008 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	**Yard. Doç. Dr. NİLÜFER ÖZDEMİR**	....
Üye	:	**Prof. Dr. ŞAHİN KOÇAK**	....
Üye	:	**Yard. Doç. Dr. HAKAN CEBECİ**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İNTEGRALLENEBİLİR G_2 YAPISINA SAHİP MANİFOLDLAR

Şirin SOLMAZ

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Nilüfer ÖZDEMİR

2008, 66 sayfa

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak bazı temel tanım ve teoremler sunulmuştur.

İkinci bölümde G_2 Lie grubu oktonyonlar cebrinin otomorfizmlerinin grubu olarak tanımlanmış ve bu tanıma denk ifadeler verilmiştir. Ardından G_2 grubunun bazı düşük boyutlu temsilleri kullanılarak, yapı grubu G_2 olan Riemann manifoldlarının sınıfları ifade edilmiştir.

Üçüncü ve son bölümde ise bir Riemann manifoldunun tanjant demeti üzerinde tanımlı metrik uyumlu kovaryant türevlerin varlığı incelenmiştir. Kovaryant türevlerin varlığı, çatı demetinin özel bir alt demeti üzerinde tanımlı bağlantı 1-formlarının varlığına denktir. Herhangi bir Riemann manifoldu için yapılanlar, özel olarak temel 3-formla donatılmış 7-boyutlu bir Riemann manifoldu için tekrarlanmış; bu manifoldun tanjant demeti üzerinde, torsiyonu tamamen anti-simetrik olan ve temel 3-formla uyumlu tek türlü belirli bir kovaryant türevin varlığı için gerek ve yeter koşulun manifoldun integrallenebilir G_2 yapısına sahip bir manifold olması olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Kovaryant türev, tamamen anti-simetrik torsiyon, G_2 grubu, G_2-manifold, integrallenebilir G_2-manifold

ABSTRACT

Master of Science Thesis

INTEGRABLE G_2 MANIFOLDS

Şirin SOLMAZ

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: **Assist. Prof. Dr. Nilüfer ÖZDEMİR**

2008, 66 pages

In the first part of this thesis consisting of three parts, basic definitions and theorems necessary for the rest of the work are presented.

In the second part, the Lie group G_2 is defined as the automorphism group of the octonion algebra together with two equivalent characterizations. Then the classification of Riemannian manifolds with structure group G_2 by means of some low dimensional representations of G_2 is stated.

In the third and last part, the conditions for the existence of metric covariant derivatives on the tangent bundle of a Riemannian manifold are dealt with. Studying the existence of covariant derivatives is equivalent to studying the existence of connection 1-forms on a special subbundle of the frame bundle of that manifold. In particular, the work done for an arbitrary Riemannian manifold is repeated for a 7-dimensional Riemannian manifold with the fundamental 3-form on its tangent bundle. It is shown that a G_2-manifold has a covariant derivative compatible with the fundamental 3-form if and only if the manifold is an integrable G_2-manifold. In this case, the covariant derivative is unique.

Keywords : Covariant derivative, totally skew-symmetric torsion, G_2, G_2-manifold, integrable G_2-manifold

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesi ve bu çalışmanın gerçekleştirilmesi sırasında benden zamanını, bilgisini, emeğini ve desteğini esirgemeyen tez danışmanım Yard. Doç. Dr. Nilüfer ÖZDEMİR'e; fikirlerinden yararlandığım Yard. Doç. Dr. Murat LİMONCU'ya; önerilerinden dolayı Prof. Dr. Şahin KOÇAK'a; Latex konusunda yardımcı olan arkadaşlarıma; bütün eğitim hayatım boyunca bana her türlü maddi manevi desteği sağlayan, bana güvenen ve sevgilerinden güç aldığım aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Şirin SOLMAZ

Temmuz 2008

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

C^∞ dönüşüm	:	Sürekli ve her mertebeden türevi olan dönüşüm
$Diff(F)$	:	C^∞ bir F manifoldunun diffeomorfizmlerinin grubu
id_M	:	M üzerinde birim dönüşüm
T_pM	:	M manifoldunun $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı
$GL(n,\mathbb{R})$	:	$n \times n$'lik terslenebilir matrislerin uzayı
M^n	:	n-boyutlu M manifoldu
$O(n)$	:	$O(n) := \{M \in GL(n,\mathbb{R}) \mid MM^t = M^tM = I_{n\times n}\}$
$SO(n)$	:	$SL(n,\mathbb{R}) := \{M \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$ olmak üzere,
		$SO(n) := O(n) \cap SO(n)$
∇	:	Bir vektör demeti üzerinde kovaryant türev
∇^g	:	Levi-Civita kovaryant türevi
$C^\infty(M)$	:	M manifoldundan $\mathbb{R}$'ye C^∞ dönüşümlerin uzayı
$\mathcal{X}(M)$	:	M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının uzayı
L_g	:	$g \in G$ ve $\forall h \in G$ için, $L_g(h) := g.h$ olarak tanımlı dönüşüm
boy$V$	:	V vektör uzayının boyutu
Çek$T$	:	T lineer dönüşümünün çekirdeği
GörT	:	T lineer dönüşümünün görüntüsü
P	:	2-katlı vektör çarpımı
φ	:	P vektör çarpımından elde edilen temel 3-form
$O(V)$	:	$(V, \langle , \rangle)$ bir iç çarpım uzayı olmak üzere,
		V'den V'ye iç çarpımı koruyan lineer dönüşümlerin uzayı
$GL(V)$	:	V vektör uzayından V'ye tersi olan lineer dönüşümlerin uzayı
$End(V)$	:	V vektör uzayından V'ye lineer dönüşümlerin uzayı
$\Lambda^k(V)$	:	V vektör uzayı üzerinde k-vektörlerin uzayı
$\Lambda^k(V^*)$	:	V vektör uzayı üzerinde k-formların uzayı
$Hom(V,W)$	:	V vektör uzayından W vektör uzayına lineer dönüşümlerin uzayı
$S^2(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}$'ye simetrik bilineer 2-formların uzayı
$S_0^2(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}$'ye izi 0 olan simetrik bilineer 2-formların uzayı

1 GİRİŞ

1.1 Lif Demetleri

Tanım 1.1.1 *E, M ve F C^∞ manifoldlar, $\pi : E \longrightarrow M$ örten ve C^∞ bir dönüşüm olmak üzere; $(E,\ M,\ F,\ \pi)$ dörtlüsü lokal trivyallik koşulunu sağlıyorsa, bu dörtlüye C^∞ bir* ***lif demeti*** *denir.*

Lokal trivyallik koşulu: Λ bir indeks kümesi olmak üzere, M manifoldunun en az bir $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık örtüsü için,

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & U_\alpha \times F \arrow[dl, "\mathrm{Pr}_1"] \\ U_\alpha & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan; $\forall\alpha \in \Lambda$ için tanımlı, $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F$ C^∞-diffeomorfizmleri vardır.

Lif demetindeki $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ikilisine demet kartı, lokal trivyallik koşulunu sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesine lif demetinin atlası denir. E manifolduna total manifold, M manifolduna taban manifoldu, F manifolduna ise lif demetinin standart lifi denir. $\forall x \in U_\alpha$ için, E total manifoldunun $E_x := \pi^{-1}(x)$ alt manifolduna E'nin x üzerindeki lifi denir. E_x alt manifoldu, F standart lifine diffeomorftur.

Çalışmanın bundan sonraki kısmında, C^∞ lif demetleri ele alınacaktır. Kısalık açısından "C^∞ lif demeti" yerine "lif demeti" kullanılacaktır.

Herhangi bir $(E,\ M,\ F,\ \pi)$ lif demeti verildiğinde lif demeti tanımından, bu lif demetinin $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ gibi bir demet atlası vardır. Bu demet atlası, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ özelliğindeki keyfi U_α, U_β açıkları için,

$$\begin{tikzcd} (U_\alpha \cap U_\beta)\times F \arrow[r, "\varphi_\alpha^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{Pr}_1"'] & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[r, "\varphi_\beta"] \arrow[d, "\pi"] & (U_\alpha \cap U_\beta)\times F \arrow[dl, "\mathrm{Pr}_1"] \\ & U_\alpha \cap U_\beta & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapar.

$\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ için, $(\varphi_\beta|_{\pi^{-1}(x)}) \circ (\varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(x)})^{-1} : F \longrightarrow F$ dönüşümleri C^∞-diffeomorfizmlerdir. Bu dönüşümlerden faydalanılarak,

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta &\longrightarrow Diff(F) \\ x &\longmapsto g_{\alpha\beta}(x) := (\varphi_\beta|_{\pi^{-1}(x)}) \circ (\varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(x)})^{-1} \end{aligned}$$

C^∞-diffeomorfizmleri tanımlanabilir. Bu diffeomorfizmlere lif demetinin geçiş fonksiyonları denir. Geçiş fonksiyonları değerlerini ya $Diff(F)$ grubunda yada $Diff(F)$ grubunun bir G alt grubunda alırlar. Yani,

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G \leqslant Diff(F)$$

olabilir.

Geçiş fonksiyonlarının değer aldıkları $Diff(F)$ grubunun G alt grubuna lif demetinin yapı grubu denir.

Tanım 1.1.2 *Verilen bir $(E,\ M,\ F,\ \pi)$ lif demeti için, $\pi \circ s = id_M$ koşulunu sağlayan bir $s : M \longrightarrow E$, C^∞ dönüşümüne, **lif demetinin bir kesiti** denir. Lif demetinin bütün kesitlerinin kümesi $\Gamma(M, E)$ ile gösterilir. U, M'nin bir açık kümesi olmak üzere $\pi \circ s = id_U$ koşulunu sağlayan $s : U \longrightarrow E$, C^∞ dönüşümüne de **lif demetinin lokal kesiti** denir.*

Tanım 1.1.3 *$(E,\ M,\ F,\ \pi)$ lif demeti için,*

1) F bir vektör uzayıdır.

2) $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ lif demetinin bir atlası olmak üzere, $\forall x \in U_\alpha$ için, $\varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(x)}$ dönüşümleri lineer izomorfizmlerdir.

*koşulları sağlanıyorsa, bu lif demetine bir **vektör demeti** denir.*

Örnek 1.1.4 *M, n-boyutlu C^∞ bir manifold olsun.*
*$TM := \bigcup_{p\in M} T_pM$ ve $\pi : TM \longrightarrow M$ dönüşümü $\forall X_p \in T_pM$ için, $\pi(X_p) := p$ olarak tanımlansın. Bu durumda, $(TM,\ M,\ \mathbb{R}^n,\ \pi)$ dörtlüsü bir vektör demetidir. Bu demete M manifoldunun **tanjant demeti** denir. Tanjant demetinde $\Gamma(M, E) = \mathcal{X}(M)$'dir.*

Tanım 1.1.5 *G bir Lie grubu olmak üzere, $(E,\ M,\ G,\ \pi)$ lif demeti verilsin. Verilen lif demetinde*

1) G grubu E manifolduna sağdan serbest etki eder.

2) $\forall p \in E$ ve $\forall g \in G$ için, $\pi(p.g) = \pi(p)$'dir.

3) Lif demetinin bir $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ demet atlası için, $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow U_\alpha \times G \\ p &\longmapsto \varphi_\alpha(p) = (\pi(p), \widetilde{\varphi}_\alpha(p)) \end{aligned}$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow G \\ p &\longmapsto \widetilde{\varphi}_\alpha(p) \end{aligned}$$

C^∞ dönüşümleri vardır ve $\forall g \in G$ için, $\widetilde{\varphi}_\alpha(p.g) = \widetilde{\varphi}_\alpha(p)g$ eşitliği geçerlidir.

koşulları sağlanıyorsa, bu lif demetine ***asli lif demeti*** *denir.*

Örnek 1.1.6 *$(E,\ M,\ \mathbb{R}^k,\ \pi)$ bir vektör demeti olsun.*

$F^E := \{(x, e_1, e_2, \ldots, e_k) | x \in M$ *ve* $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\},\ \pi^{-1}(x)$ *için bir tabandır.*$\}$,

$\pi_E : F^E \longrightarrow M$ *dönüşümü her* $(x, e_1, e_2, \ldots, e_k) \in F^E$ *için,*

$$\pi_E(x, e_1, e_2, \ldots, e_k) := x$$

ve $\rho_E : F^E \times GL(k, \mathbb{R}) \longrightarrow F^E$ *grup etkisi* $\forall A = (A_{ij}) \in GL(k, \mathbb{R})$ *ve* $\forall\ (x, e_1, e_2, \ldots, e_k) \in F^E$ *için,*

$$\rho_E((x, e_1, e_2, \ldots, e_k), A) := (x, {e_1}', {e_2}', \ldots, {e_k}') \text{ öyle ki } {e_i}' = \sum_{j=1}^{k} A_{ji} e_j$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(F^E,\ M,\ GL(k, \mathbb{R}),\ \pi_E)$ dörtlüsü bir asli lif demetidir. Bu demete E manifoldunun ***çatı demeti*** *denir.*

Özel olarak n-boyutlu bir M^n manifoldu için $E = TM$ alındığında $(F^{TM},\ M,\ GL(n, \mathbb{R}),\ \pi_{TM})$ asli lif demetine **M** manifoldunun çatı demeti denir [1-4]. Bu çalışmada n-boyutlu bir M manifoldunun çatı demetindeki F^{TM} total uzayı $\mathcal{F}(M^n)$ olarak gösterilecektir.

Tanım 1.1.7 $(\widetilde{E},\ \widetilde{M},\ \widetilde{G},\ \widetilde{\pi})$ *ve* $(E,\ M,\ G,\ \pi)$ *asli lif demetleri verilsin.* $f:\widetilde{E}\longrightarrow E$, *$C^{\infty}$ bir dönüşüm ve* $\widetilde{f}:\widetilde{G}\longrightarrow G$ *bir grup homomorfizmi olmak üzere,* $\forall u\in\widetilde{E}$ *ve* $\forall g\in\widetilde{G}$ *için,* $f(u.g)=f(u).\widetilde{f}(g)$ *oluyorsa, bu durumda* $(f,\widetilde{f})$ *ikilisine* $(\widetilde{E},\ \widetilde{M},\ \widetilde{G},\ \widetilde{\pi})$ *asli lif demetinden* $(E,\ M,\ G,\ \pi)$ *asli lif demetine bir homomorfizm denir.* $f:\widetilde{E}\longrightarrow E$ *bir gömme dönüşümü ve* $\widetilde{f}:\widetilde{G}\longrightarrow G$ *monomorfizm ise,* $(\widetilde{E},\ \widetilde{M},\ \widetilde{G},\ \widetilde{\pi})$ *lif demetine* $(E,\ M,\ G,\ \pi)$ *asli lif demetinin bir* ***alt demeti*** *denir.*

Tanım 1.1.8 $(E,\ M,\ F,\ \pi)$ *dörtlüsü, yapı grubu* G *olan bir lif demeti olsun. Eğer bu lif demetinin geçiş fonksiyonları* G *grubunun* H *gibi bir Lie alt grubunda değer alıyor ise, bu lif demetinin yapı grubu* H *grubuna* ***indirgenebilirdir*** *denir.*

Eğer n-boyutlu bir M manifoldunun tanjant demetinin yapı grubu, $GL(n,\mathbb{R})$ grubunun bir G alt grubuna indirgenebiliyorsa, M manifolduna G yapısına sahip bir manifold denir.

(M^n,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ise, bu manifoldun çatı demetinin yapı grubu $O(n)$ Lie grubuna indirgenebilirdir. Buna ek olarak, (M^n,g) yönlendirilmiş manifold ise, manifoldun çatı demetinin yapı grubu $SO(n)$ Lie grubuna indirgenebilirdir [2, 3].

1.2 Kovaryant Türev

Tanım 1.2.9 *$(E,\ M,\ \mathbb{R}^k,\ \pi)$ bir vektör demeti olsun.*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \Gamma(M,E) &\longrightarrow \Gamma(M,E) \\ (X,Y) &\longmapsto \nabla(X,Y) := \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü

1) Birinci bileşene göre $C^\infty(M)$-lineerdir.
Yani $\forall f,g \in C^\infty(M)$, $\forall X_1,\ X_2 \in \mathcal{X}(M)$ ve $\forall Y \in \Gamma(M,E)$ için,
$\nabla_{fX_1+gX_2}Y = f\nabla_{X_1}Y + g\nabla_{X_2}Y$'dir.

2) İkinci bileşene göre $\mathbb{R}$-lineerdir.
Yani $\forall a,\ b \in \mathbb{R}$, $\forall X \in \mathcal{X}(M)$ ve $\forall Y_1,\ Y_2 \in \Gamma(M,E)$için,
$\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2$'dir.

3) $\forall f \in C^\infty(M)$, $\forall X \in \mathcal{X}(M)$ ve $\forall Y \in \Gamma(M,E)$ için,
$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$'dir.

özelliklerine sahipse, bu dönüşüme $(E,\ M,\ \mathbb{R}^k,\ \pi)$ ***vektör demeti üzerinde bir kovaryant türev*** *denir. $\nabla_X Y$ kesitine de Y kesitinin X vektör alanı yönündeki kovaryant türevi denir.*

Özel olarak, vektör demeti manifoldun tanjant demeti olarak alınırsa, $\Gamma(M,E) = \mathcal{X}(M)$ olduğundan, ∇ dönüşümü M manifoldu üzerindeki

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X,Y) &\longmapsto \nabla(X,Y) := \nabla_X Y \end{aligned}$$

kovaryant türevi olur [5].

Teorem 1.2.10 *[6] (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, kovaryant türevin tanımındaki 3 özelliğe ek olarak*

1) $\forall X,Y \in \mathcal{X}(M)$ için, $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$'tir.

2) $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ *için,* $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$*'dir.*

özelliklerine sahip tek türlü belirli bir $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ *dönüşümü vardır.*

Tanjant demeti üzerinde tek türlü belirli bu kovaryant türeve **Levi-Civita** kovaryant türevi denir.

İkinci koşula metrik uyumluluk koşulu ve bu koşulu sağlayan bir kovaryant türeve de metrik uyumlu kovaryant türev denir.

Bu çalışmada tanjant demeti üzerindeki Levi-Civita kovaryant türevi ∇^g ile gösterilecektir.

(M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu manifoldun tanjant demeti üzerindeki tek türlü belirli Levi-Civita kovaryant türevine $(2,1)$ tipinde bir A tensör alanı eklenerek elde edilen

$$\nabla := \nabla^g + A$$

tensör alanı da bir kovaryant türevdir:

$\forall f, h \in C^\infty(M)$, $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned}
\nabla_{(fX_1+hX_2)}Y &= \nabla^g_{(fX_1+hX_2)}Y + A(fX_1 + hX_2, Y) \\
&= f\nabla^g_{X_1}Y + h\nabla^g_{X_2}Y + fA(X_1, Y) + hA(X_2, Y) \\
&= f(\nabla^g_{X_1}Y + A(X_1, Y)) + h(\nabla^g_{X_2}Y + A(X_2, Y)) \\
&= f\nabla_{X_1}Y + h\nabla_{X_2}Y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_X(aY_1 + bY_2) &= \nabla^g_X(aY_1 + bY_2) + A(X, aY_1 + bY_2) \\
&= a\nabla^g_X Y_1 + b\nabla^g_X Y_2 + aA(X, Y_1) + bA(X, Y_2) \\
&= a(\nabla^g_X Y_1 + A(X, Y_1)) + b(\nabla^g_X Y_2 + A(X, Y_2)) \\
&= a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_X fY &= \nabla^g_X fY + A(X, fY) \\
&= f\nabla^g_X Y + (Xf)Y + fA(X, Y) \\
&= f(\nabla^g_X Y + A(X, Y)) + (Xf)Y \\
&= f\nabla_X Y + (Xf)Y
\end{aligned}$$

eşitliklerinden, ∇ dönüşümü TM üzerinde bir kovaryant türev olur.

Tersine herhangi bir ∇ kovaryant türeviyle, Levi-Civita kovaryant türevi arasında $(2,1)$ tipinde bir tensör alanı kadar fark vardır:

$A : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ dönüşümü $A := \nabla - \nabla^g$ olarak tanımlansın.

A'nın $\mathbb{R}$-lineer olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} A(fX,Y) &= \nabla_{fX}Y - \nabla^g_{fX}Y = f\nabla_X Y - f\nabla^g_X Y \\ &= f(\nabla_X Y - \nabla^g_X Y) = fA(X,Y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} A(X,fY) &= \nabla_X fY - \nabla^g_X fY \\ &= f\nabla_X Y + (Xf)Y - f\nabla^g_X Y - (Xf)Y \\ &= f(\nabla_X Y - \nabla^g_X Y) \\ &= fA(X,Y), \end{aligned}$$

olduğundan, A dönüşümü $C^\infty(M)-$lineer olduğundan bir tensör alanıdır. Fakat

$$\begin{aligned} A(X,fY) &= \nabla_X fY - \nabla^g_X fY \\ &= f\nabla_X Y + (Xf)Y - f\nabla^g_X Y - (Xf)Y \\ &= f(\nabla_X Y - \nabla^g_X Y) \\ &= fA(X,Y) \\ &\neq fA(X,Y) + (Xf)Y \end{aligned}$$

olduğundan A bir kovaryant türev değildir.

Tanım 1.2.11 *Bir M manifoldunun tanjant demeti üzerinde tanımlı bir ∇ kovaryant türevi verilsin.* $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ *için,*

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

olarak tanımlı, $(2,1)$ *tipindeki* $T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ *tensör alanına* ∇ *kovaryant türevinin **torsiyonu** denir.*

Torsiyon tensörünün tanımından, bu tensörün anti-simetrik olduğu görülebilir.

Levi-Civita kovaryant türevinin torsiyon tensörü T^g ile; Levi-Civita kovaryant türevine $(2,1)$ tipinde bir tensör alanı eklenerek elde edilen kovaryant türevin torsiyon tensörü de T ile gösterilsin.

Önerme 1.2.12 *Levi-Civita kovaryant türevinin torsiyonu* T^g *için,* $T^g = 0$*'dır.*

Kanıt. $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ olsun.
$T^g(X,Y) = \nabla^g_X Y - \nabla^g_Y X - [X,Y] = [X,Y] - [X,Y] = 0.$ ■

Önerme 1.2.13 A*,* $(2,1)$*-tipinde bir tensör alanı ve* $\nabla = \nabla^g + A$ *olmak üzere,* $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ *için,* $T(X,Y) = A(X,Y) - A(Y,X)$*'dir.*

Kanıt.

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \\ &= \nabla^g_X Y + A(X,Y) - \nabla^g_Y X - A(Y,X) - [X,Y] \\ &= \nabla^g_X Y - \nabla^g_Y X - [X,Y] + A(X,Y) - A(Y,X) \\ &= A(X,Y) - A(Y,X). \end{aligned}$$

■

Önerme 1.2.14 A $(2,1)$ *tipinde anti-simetrik bir tensör alanı ve*

$$\nabla := \nabla^g + \frac{1}{2}A$$

olsun. Bu durumda $T = A$*'dır.*

Kanıt. Her $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= \tfrac{1}{2}(A(X,Y) - A(Y,X)) \\ &= \tfrac{1}{2}(A(X,Y) + A(X,Y)) \\ &= \tfrac{1}{2}(2A(X,Y)) \\ &= A(X,Y). \end{aligned}$$

■

Çalışmanın bundan sonraki kısmında, T dönüşümü $(2,1)$ tipinde anti-simetrik bir tensör alanı ve ∇ kovaryant türevi $\nabla := \nabla^g + \frac{1}{2}T$ olarak alınmıştır.

Önerme 1.2.15 *$\nabla = \nabla^g + \frac{1}{2}T$ kovaryant türevinin metrik uyumlu olması için gerek ve yeter koşul, her $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ için*

$$g(T(X,Y),Z) + g(T(X,Z),Y) = 0$$

olmasıdır.

Kanıt. ∇ kovaryant türevi metrik uyumlu ise $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

olur.

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z) &= g(\nabla^g_X Y + \tfrac{1}{2}T(X,Y), Z) + g(Y, \nabla^g_X Z + \tfrac{1}{2}T(X,Z)) \\ &= g(\nabla^g_X Y, Z) + g(Y, \nabla^g_X Z) + \tfrac{1}{2}g(T(X,Y),Z) + \tfrac{1}{2}g(T(X,Z),Y) \\ &= Xg(Y,Z) + \tfrac{1}{2}g(T(X,Y),Z) + \tfrac{1}{2}g(T(X,Z),Y) \end{aligned}$$

eşitliğinden, ∇ kovaryant türevinin metrik uyumlu olması için gerek ve yeter koşul $g(T(X,Y),Z) + g(T(X,Z),Y) = 0$ olmasıdır. ■

T, $(2,1)$-tipinde anti-simetrik bir tensör alanı ve $\nabla = \nabla^g + \frac{1}{2}T$ olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned} \widetilde{T} : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ X, Y, Z &\longmapsto \widetilde{T}(X,Y,Z) := g(T(X,Y),Z) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan $\widetilde{T}$ dönüşümü her bileşen çifti için anti-simetrik ise, yani bir 3-form ise bu dönüşüm $\nabla = \nabla^g + \frac{1}{2}T$ kovaryant türevinin **torsiyon 3-formu** ya da **tamamen anti-simetrik torsiyon** olarak adlandırılır.

Önerme 1.2.16 *$\nabla = \nabla^g + \frac{1}{2}T$ olsun. Bu durumda, ∇ kovaryant türevinin metrik uyumlu olması için gerek ve yeter koşul, $\widetilde{T}$ dönüşümünün bir 3-form olmasıdır.*

Kanıt. ∇ kovaryant türevi metrik uyumlu olsun. Önerme 1.2.15 gereğince, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ için, $g(T(X,Y),Z) + g(T(X,Z),Y) = 0$'dır. Bu durumda,

$\widetilde{T}$ bir 3-formdur :

$$\begin{aligned}\widetilde{T}(X,Y,Z) &= g(T(X,Y),Z)\\ &= g(-T(Y,X),Z)\\ &= -g(T(Y,X),Z)\\ &= -\widetilde{T}(Y,X,Z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(T(X,Y),Z)+g(T(X,Z),Y)=0 &\Rightarrow \widetilde{T}(X,Y,Z)+\widetilde{T}(X,Z,Y)=0\\ &\Rightarrow \widetilde{T}(X,Y,Z)=-\widetilde{T}(X,Z,Y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{T}(X,Y,Z) &= g(T(X,Y),Z)\\ &= g(-T(Y,X),Z)\\ &= -g(T(Y,X),Z)\\ &= g(T(Y,Z),X)\\ &= -g(T(Z,Y),X)\\ &= -\widetilde{T}(Z,Y,X).\end{aligned}$$

Tersine, $\widetilde{T}$ bir 3-form olsun. Bu durumda, $\widetilde{T}(X,Y,Z) = -\widetilde{T}(X,Z,Y)$ yani, $g(T(X,Y),Z) = -g(T(X,Z),Y)$'dir. Bir önceki önerme gereğince $\nabla = \nabla^g + \frac{1}{2}T$ kovaryant türevi metrik uyumludur. ∎

Özetle, $\nabla = \nabla^g + \frac{1}{2}T$ kovaryant türevinde, $(2,1)$ tipindeki T tensör alanı anti-simetrik ve $\widetilde{T}$ dönüşümü bir 3-form olarak alınırsa, ∇ kovaryant türevi $\forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$ için, $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ koşulunu sağlar. O halde, T torsiyonu bu kovaryant türevin Levi-Civita olmaktan ne kadar uzak olduğunu belirtmektedir.

Çalışmanın bundan sonrasında, torsiyonu tamamen anti-simetrik olan kovaryant türevler incelenecektir.

(M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇ bu manifoldun tanjant demeti üzerinde tanımlı bir kovaryant türev olmak üzere, $\forall Z \in \mathcal{X}(M)$ için, $\nabla_Z g$ ile g metriğinin Z vektör alanı yönündeki kovaryant türevi belirtilsin. $\nabla^g_Z g$ ile de g metriğinin Z vektör alanı yönündeki Levi-Civita kovaryant türevi gösterilsin.

Önerme 1.2.17 $\nabla^g_Z g = 0$*'dır.*

Kanıt. $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\nabla^g_Z g(X,Y) &= Zg(X,Y) - g(\nabla^g_Z X, Y) - g(X, \nabla^g_Z Y) \\
&= Zg(X,Y) - (g(\nabla^g_Z X, Y) + g(X, \nabla^g_Z Y)) \\
&= Zg(X,Y) - Zg(X,Y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Önerme 1.2.18 *T, $(2,1)$ tipinde bir tensör alanı ve $\nabla = \nabla^g + \frac{1}{2}T$ olmak üzere, $\nabla_Z g = \nabla^g_Z g = 0$'dır.*

Kanıt. $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ olsun. T'den elde edilen $\widetilde{T}$ dönüşümü bir 3-form olduğundan,

$$\begin{aligned}
\nabla_Z g(X,Y) &= Zg(X,Y) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\
&= Zg(X,Y) - g(\nabla^g_Z X + \tfrac{1}{2}T(Z,X), Y) \\
&\quad - g(X, \nabla^g_Z Y + \tfrac{1}{2}T(Z,Y)) \\
&= Zg(X,Y) - g(\nabla^g_Z X, Y) - \tfrac{1}{2}g(T(Z,X),Y) - g(X, \nabla^g_Z Y) \\
&\quad - \tfrac{1}{2}g(X, T(Z,Y)) \\
&= Zg(X,Y) - g(\nabla^g_Z X, Y) - \tfrac{1}{2}g(T(Z,X),Y) - g(X, \nabla^g_Z Y) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}g(T(Z,X),Y) \\
&= Zg(X,Y) - g(\nabla^g_Z X, Y) - g(X, \nabla^g_Z Y) \\
&= \nabla^g_Z g(X,Y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. ■

1.3 Bağlantı 1-Formu

Tanım 1.3.19 *G bir Lie grubu olsun. $\forall g, h \in G$ için, $(L_g)_{*,h}(V_h) = V_{gh}$ koşulunu sağlayan bir $V \in \mathcal{X}(G)$ vektör alanına sol-invaryant vektör alanı denir.*

G bir Lie grubu ve $\mathfrak{g}$ de TG üzerinde tanımlı sol-invaryant vektör alanlarının kümesi olsun. $\mathfrak{g}$ reel bir vektör uzayıdır. $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ için, $[X, Y] = XY - YX$ çarpımı tanımlansın. Bu çarpımla birlikte, $\mathfrak{g}$ vektör uzayı, bir Lie cebri yapısına sahiptir. Bu Lie cebrine, G Lie grubunun Lie cebri denir. Ayrıca, $T_{\mathbf{e}}G \cong \mathfrak{g}$'dir [7, 8].

G bir Lie grubu ve $g \in G$ olsun. $\forall h \in G$ için,

$$\begin{aligned} Ad_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto Ad_g(h) := ghg^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşümün G grubunun $\mathbf{e}$ birim elemanında türevi alınırsa,

$$ad_g := (Ad_g)_{*,\mathbf{e}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

dönüşümü elde edilir. Bu dönüşüm yardımıyla, G grubunun

$$\begin{aligned} ad : G &\longrightarrow End(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto ad_g \end{aligned}$$

temsili elde edilir. Bu temsile G grubunun adjoint temsili denir.

Önerme 1.3.20 *G bir matris Lie grubu olsun. $\forall A \in \mathfrak{g}$ için, $ad_g(A) = gAg^{-1}$'dir.*

Kanıt. $\mathfrak{g} \cong T_{\mathbf{e}}G$ olduğudan, $\forall A \in \mathfrak{g}$ için, $\alpha'(0) = A$ ve $\alpha(0) = \mathbf{e}$ olacak şekilde bir $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G$ eğrisi vardır. O halde, $ad_g(A) = ad_g(\alpha'(0)) = (Ad_g)_{*,\mathbf{e}}(\alpha'(0))$ olur. $t \in \mathbb{R}$ için, $(Ad_g \circ \alpha)(t) = Ad_g(\alpha(t)) = g\alpha(t)g^{-1}$ olduğundan, $(Ad_g \circ \alpha)'(0) = g\alpha'(0)g^{-1} = gAg^{-1}$ bulunur. ■

Tanım 1.3.21 *V reel bir vektör uzayı, M de C^∞ bir manifold olsun.*

$$\begin{aligned} \omega : M &\longrightarrow Hom(TM, V) \\ p &\longmapsto \omega_p : T_pM \longrightarrow V \end{aligned}$$

dönüşümüne, yani M'nin her p noktasına lineer bir $\omega_p : T_pM \longrightarrow V$ dönüşümü karşılık getiren dönüşüme V-değerli 1-form denir.

X, Y C^∞ manifoldlar, V reel bir vektör uzayı, $f : X \longrightarrow Y$ C^∞ bir dönüşüm ve ω, Y üzerinde V-değerli bir 1-form olsun. $\forall p \in X$ ve $v \in T_pX$ için,

$$\begin{aligned} f^*\omega : X \longrightarrow Hom(TX, V)& \\ p \longmapsto (f^*\omega)_p : T_pX &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto (f^*\omega)(v) := \omega_{f(p)}(f_{*,p}(v)) \end{aligned}$$

olarak tanımlı $f^*\omega$ dönüşümü, X üzerinde V-değerli bir 1-formdur.

P bir C^∞ manifold, G de P'ye sağdan etki eden bir Lie grubu olsun. G grubunun P üzerindeki etkisi

$$\begin{aligned} \sigma : P \times G &\longrightarrow P \\ (p, g) &\longmapsto \sigma(p, g) = p.g \end{aligned}$$

olsun.

$p \in P$ noktasında

$$\begin{aligned} \sigma_p : G &\longrightarrow P \\ g &\longmapsto \sigma_p(g) = p.g \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlanabilir.

σ_p dönüşümünün birimdeki türevi alınırsa, $(\sigma_p)_{*,\mathbf{e}} : \mathfrak{g} \longrightarrow T_pP$ dönüşümü elde edilir.

Böylece $\mathfrak{g}$ Lie cebrinin her A elemanı için,

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{X}(P)& \\ A \longmapsto \widetilde{\sigma}(A) \quad : \quad P &\longrightarrow TP \\ p &\longmapsto \widetilde{\sigma}(A)(p) := (\sigma_p)_{*,\mathbf{e}}(A) \end{aligned}$$

dönüşümüyle belirlenen bir $\widetilde{\sigma}(A) \in \mathcal{X}(P)$ vektör alanı elde edilir.

Eğer G bir matris Lie grubu ise, $p \in E$ için, $\widetilde{\sigma}(A)(p) \in T_pP$ tanjant vektörünün daha açık bir ifadesi şöyle yazılabilir:

$A \in \mathfrak{g}$ için,

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow G \\ t &\longmapsto \alpha(t) := \exp(tA) \end{aligned}$$

eğrisi tanımlansın.

$\alpha^{'}(0) = A$ ve $\alpha(0) = e$ olduğundan, $\widetilde{\sigma}(A)(p) = (\sigma_p)_{*,\mathbf{e}}(A) = (\sigma_p)_{*,\mathbf{e}}(\alpha^{'}(0)) = (\sigma_p \circ \alpha)^{'}(0)$ bulunur. $(\sigma_p \circ \alpha)(t) = \sigma_p(\alpha(t)) = \sigma_p(\exp(tA)) = p.\exp(tA)$ olduğundan, $\widetilde{\sigma}(A)(p) = (\sigma_p \circ \alpha)^{'}(0) = \frac{d}{dt}(p.\exp(tA))|_{t=0}$ elde edilir.

$\forall A \in \mathfrak{g}$ için, $\widetilde{\sigma}(A) \in \mathcal{X}(P)$ vektör alanı $A^{\sharp}$ ile gösterilir ve A'nın belirlediği P üzerindeki temel vektör alanı olarak adlandırılır.

Tanım 1.3.22 $(E,\ M,\ G,\ \pi)$ *asli lif demeti verildiğinde, aşağıdaki özelliklere sahip* $\mathfrak{g}$*-değerli bir* $\omega : TE \longrightarrow \mathfrak{g}$ 1*-formuna* E *üzerinde bir* ***bağlantı*** $\mathbf{1}$***-formu*** *denir.*

1) $\forall g \in G$ *için,* $(\sigma_g)^{*}\omega = ad_{g^{-1}} \circ \omega$*'dır. Yani, aşağıdaki diyagram değişmelidir.*

$$\begin{array}{ccc} T_pE & \xrightarrow{\omega_p} & \mathfrak{g} \\ {\scriptstyle (\sigma_g)_{*,p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle ad_{g^{-1}}} \\ T_{p.g}E & \xrightarrow[\omega_{p.g}]{} & \mathfrak{g} \end{array}$$

2) $\forall A \in \mathfrak{g}$ *için,* $\omega(A^{\sharp}) = A$*'dır. Yani,* $\forall A \in \mathfrak{g}$ *ve* $\forall p \in E$ *için,* $\omega_p(A^{\sharp}(p)) = A$*'dır.*

Tanım 1.3.23 $(E,\ M,\ G,\ \pi)$ *asli lif demeti verilsin.* $x \in M$ *için,* $p \in \pi^{-1}(x)$ *olsun.* $\pi^{-1}(x)$ *lifinin* p *noktasındaki tanjant uzayına* T_pE*'nin dikey altuzayı denir.* $T_p(\pi^{-1}(x)) = V_p$ *ile gösterilir.*

Önerme 1.3.24 *G bir matris Lie grubu olsun.* $(E,\ M,\ G,\ \pi)$ *lif demetinde* $\forall p \in E$ *için,* $V_p \cong \mathfrak{g}$*'dir.*

Kanıt. G'nin E üzerindeki etkisi $\pi^{-1}(x)$ lifine kısıtlanırsa, lif demeti tanımından $\forall p \in \pi^{-1}(x)$ ve $\forall g \in G$ için, $p.g \in \pi^{-1}(x)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \sigma|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \times G &\longrightarrow \pi^{-1}(x) \\ (p, g) &\longmapsto p.g \end{aligned}$$

olur. $\pi^{-1}(x)$'in bir p noktası seçilirse,

$$\begin{aligned} \sigma|_{\pi^{-1}(x),p} : G &\longrightarrow \pi^{-1}(x) \\ g &\longmapsto p.g \end{aligned}$$

dönüşümü bulunur. Bu dönüşümün G grubunun $\mathbf{e}$ birim elemanındaki türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} L := (\sigma|_{\pi^{-1}(x),p})_{*,\mathbf{e}} : \mathfrak{g} &\longrightarrow T_p(\pi^{-1}(x)) = V_p \\ A &\longmapsto (\sigma|_{\pi^{-1}(x),p})_{*,\mathbf{e}}(A) = A^\sharp(p) = \tfrac{d}{dt}(p.\exp(tA))|_{t=0} \end{aligned}$$

dönüşümü elde edilir. Bu dönüşüm bir lineer izomorfizmdir [7]. ■

Tanım 1.3.25 *E n-boyutlu C^∞ bir manifold olsun. E manifoldunun her p noktasına T_pE tanjant uzayının k-boyutlu bir $\mathcal{D}(p)$ alt uzayını karşılık getiren dönüşüme k-boyutlu bir dağılım denir.*

Bu dağılımın C^∞ olması ise, $\forall p \in E$ için, p'nin en az bir U komşuluğu ve $\forall q \in U$ için, $\{V_1(q), \ldots, V_k(q)\}$ kümesinin $\mathcal{D}(p)$ için bir taban olacak şekilde $V_1, \ldots, V_k \in \mathcal{X}(U)$ vektör alanlarının olması demektir.

Tanım 1.3.26 *Bir $(E,\ M,\ G,\ \pi)$ asli lif demeti verilsin. Eğer $\forall p \in E$ için, $T_p(E)$'nin aşağıdaki özellikleri sağlayan bir H_p alt uzayı varsa, her p noktasında $T_p(E)$ tanjant uzayının böyle bir H_p alt uzayının seçimine E üzerinde bir Γ bağlantısı denir.*

i) $T_p(E) = V_p \oplus H_p$

ii) $H_{pg} = (\sigma_g)_{*,p}(H_p)$

iii) $p \longmapsto H_p$ *dağılımı* C^∞*'dur.*

T_pE'nin H_p alt uzayına yatay alt uzay denir. $\forall u \in T_pE$ için, $u = u^v + u^h$ olacak şekilde tek türlü belirli $u^v \in V_p$, $u^h \in H_p$ vektörleri vardır. u^v vektörüne u'nun dikey bileşeni, u^h vektörüne de u'nun yatay bileşeni denir. $u \in V_p$ yani $u^h = 0$ ise u'ya dikey vektör, $u \in H_p$ yani $u^v = 0$ ise u'ya yatay vektör denir.

Teorem 1.3.27 *[3, 4] $(E,\ M,\ G,\ \pi)$ asli bir lif demeti olsun. M Riemann manifoldu ise, E üzerinde tanımlı en az bir Γ bağlantısı vardır.*

Bir $(E,\ M,\ G,\ \pi)$ asli lif demeti ve E üzerinde bir Γ bağlantısı verilsin. $\forall p \in E$ ve $\forall u \in T_pE$ için, $u = u^v + u^h$ olacak şekilde tek türlü belirli $u^v \in V_p$, $u^h \in H_p$ vektörleri vardır.

$$\begin{aligned} L : \mathfrak{g} &\longrightarrow V_p \\ A &\longmapsto A^\sharp(p) \end{aligned}$$

dönüşümü lineer izomorfizm ve $\forall u \in T_pE$ için, $u^v \in V_p$ olduğundan, $u^v = A^\sharp(p)$ olacak şekilde tek türlü belirli bir $A \in \mathfrak{g}$ vardır. Böylece E üzerindeki Γ bağlantısından faydalanılarak, E üzerinde $\mathfrak{g}$-değerli bir 1-form şöyle tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} \omega : E &\longrightarrow Hom(TE, \mathfrak{g}) \\ p &\longmapsto \omega_p : T_pE \longrightarrow \mathfrak{g} \\ &\qquad\qquad\quad u \longmapsto \omega(u) := A \end{aligned}$$

öyle ki $A^\sharp(p) = u^v$.

Bu şekilde tanımlanan 1-forma Γ bağlantısından elde edilen 1-form denir.

Önerme 1.3.28 *$(E,\ M,\ G,\ \pi)$ asli bir lif demeti olsun. Γ, E üzerinde bir bağlantı olsun. Bu durumda Γ'dan elde edilen 1-form bağlantı 1-formudur. Tersine, E üzerinde $\mathfrak{g}$ değerli bir ω bağlantı 1-formu verildiğinde, E üzerinde bu bağlantı 1-formuyla ilişkili tek bir Γ bağlantısı vardır.*

Kanıt. E üzerinde bir Γ bağlantısı verilsin. $\omega : E \longrightarrow \mathfrak{g}$, Γ'nın belirlediği 1-form olsun. Bu durumda ω bir bağlantı 1-formudur :

1) $p \in E$ ve $A \in \mathfrak{g}$ olsun. Bu durumda, ω'nın tanımı gereği, tek türlü belirli bir $B \in \mathfrak{g}$ için, $\omega_p(A^\sharp(p)) = B \in \mathfrak{g}$ ve $A^\sharp(p)^v = B^\sharp(p)$'dir. $A^\sharp(p) \in V_p$ olduğundan, $A^\sharp(p)^v = A^\sharp(p)$'dir. O halde, $\forall p \in E$ için, $A^\sharp(p) = B^\sharp(p)$, yani, $B = A$'dır. O halde, $\omega_p(A^\sharp(p)) = A$'dır.

2) $p \in E$ ve $u \in T_pE = V_p \oplus H_p$ olsun. Bu durumda, $u = u^v + u^h$ olacak şekilde tek türlü belirli $u^v \in V_p$, $u^h \in H_p$ vektörleri vardır. $u^h \in H_p$ olduğundan, bağlantının *ii)* özelliği gereğince, $(\sigma_g)_{*,p}(u^h) \in H_{pg}$'dir. Yani, $(\sigma_g)_{*,p}(u^h)$ vektörü de yatay bir vektördür. Bağlantıdan elde edilen 1-formun tanımı gereği, $\forall p \in E$ için, yatay bir vektörün ω_p altındaki görüntüsü 0'dır. O halde, $\omega_p(u^h) = 0$ ve $\omega_{pg}((\sigma_g)_{*,p}(u^h)) = 0$'dır. $ad_{g^{-1}}$ dönüşümü lineer olduğundan, $ad_{g^{-1}}(\omega_p(u^h)) = ad_{g^{-1}}(0) = 0$'dır. Böylece, $\omega_{pg}((\sigma_g)_{*,p}(u^h)) = ad_{g^{-1}}(\omega_p(u^h)) = 0$'dır. Yani u^h vektörü için bağlantı 1-form tanımındaki *i.* koşul sağlanmış olur.

Öte yandan, $u^v \in V_p$ için, $V_p \cong \mathfrak{g}$ olduğundan, $A^\sharp(p) = u^v$ olacak şekilde tek türlü belirli bir $A \in \mathfrak{g}$ vardır. Bu durumda, $\omega_p(A^\sharp(p)) = \omega_p(u^v) = A$'dır. Ayrıca, $\forall p \in E$ için, $(\sigma_g)_{*,p}(A^\sharp(p)) = (ad_{g-1}(A))^\sharp(pg)$'dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\omega_{pg}((\sigma_g)_{*,p}(u^v)) &= \omega_{pg}((\sigma_g)_{*,p}(A^\sharp(p))) \\
&= \omega_{pg}((ad_{g^{-1}}(A))^\sharp(pg)) \\
&= ad_{g^{-1}}(A) \\
&= ad_{g^{-1}}(\omega_p(u^v))
\end{aligned}$$

olur. Buradan, $\forall u \in T_pE$ için,

$$\begin{aligned}
\omega_{pg}((\sigma_g)_{*,p}(u)) &= \omega_{pg}((\sigma_g)_{*,p}(u^v + u^h)) \\
&= \omega_{pg}((\sigma_g)_{*,p}(u^v)) + \omega_{pg}((\sigma_g)_{*,p}(u^h)) \\
&= ad_{g^{-1}}(\omega_p(u^v)) + ad_{g^{-1}}(\omega_p(u^h)) \\
&= ad_{g^{-1}}(\omega_p(u))
\end{aligned}$$

bulunur. O halde, bir Γ bağlantısından elde edilen ω 1-formu bir bağlantı 1-formudur.

Tersine, ω, E total uzayı üzerinde bir bağlantı 1-formu olsun. $\forall p \in E$ için, $H_p := \{v \in T_p(E) | \omega_p(v) = 0\}$ olarak tanımlansın. H_p alt uzaylarının bu şekilde seçilmesiyle E üzerinde bir bağlantı elde edilir:

i) $v \in H_p \cap V_p$ olsun. $v \in V_p$ olduğundan, $v = A^\sharp(p)$ olacak şekilde bir tek $A \in \mathfrak{g}$ vardır. Ayrıca $v \in H_p$ olduğundan, $\omega_p(v) = \omega_p(A^\sharp(p)) = A = 0$, yani $v = 0$'dır. O halde, $\forall p \in E$ için, $H_p \cap V_p = \{0\}$'dır. Üstelik $boyH_p + boyV_p = boyT_p(E)$'dir:

$\omega_p : T_pE \longrightarrow \mathfrak{g}$ dönüşümü lineer olduğundan, boyT_pE =boyÇekω_p+boyIm ω_p olur. Tanım gereği, Çek$\omega_p = H_p$'dir. Ayrıca $\forall A \in \mathfrak{g}$ için, $\omega_p(A^\sharp(p)) = A$ olduğundan, ω_p örtendir. Yani, Im$\omega_p = \mathfrak{g}$'dir. $\mathfrak{g} \cong V_p$ olduğundan, $boyIm\omega_p = boy\mathfrak{g} = boyV_p$'dir. Buradan, boy$T_pE$ =boyÇekω_p+boyImω_p = boyH_p+boyV_p bulunur. O halde, V_p ve H_p uzayları T_pE uzayının alt uzayları olduklarından,

$$T_p(E) = V_p \oplus H_p$$

elde edilir.

ii) $\underline{(\sigma_g)_{*,p}(H_p) \subset H_{pg}}$: $v \in H_p$ olsun. Bu durumda $\omega_p(v) = 0$'dır. Buradan, $\omega_{pg}((\sigma_g)_{*,p}(v)) = ad_{g^{-1}}(\omega_p(v)) = ad_{g^{-1}}(0) = 0$'dır. O halde, $(\sigma_g)_{*,p}(v) \in H_{pg}$'dir.

$\underline{H_{pg} \subset (\sigma_g)_{*,p}(H_p)}$: $u \in H_{pg}$ olsun. $(\sigma_g)_{*,p} : T_p(E) \longrightarrow T_{pg}(E)$ dönüşümü lineer izomorfizm olduğundan, $(\sigma_g)_{*,p}(v) = u$ olacak şekilde tek bir $v \in T_p(E)$ vardır. Şimdi,

$$\begin{aligned} \omega_p(v) &= \omega_p((\sigma_{g^{-1}})_{*,pg}(u)) \\ &= ad_g(\omega_{pg}(u)) \\ &= ad_g(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $v \in H_p$, ya da $w = (\sigma_g)_{*,p}(v) \in (\sigma_g)_{*,p}(H_p)$'dir.

iii) $boyT_pE = boyE$, $boyV_p = boy\mathfrak{g} = boyG$, $boyH_p + boyV_p = boyT_p(E)$ ve boy$E$ =boy$M$+boy$G$ eşitliklerinden, boyH_p =boy$M$ elde edilir.

boy$M = n$, boy$G = k$ ve U kümesi E'nin açık bir alt kümesi olsun. $\forall p \in U$ için, $\{W_1(p), \ldots, W_{n+k}(p)\}$ kümesi T_pE'nin bir tabanı olacak şekilde, $W_1, \ldots, W_{n+k} \in \mathcal{X}(U)$ vektör alanları vardır. $\{A_1, \ldots, A_k\}$, $\mathfrak{g}$ için bir taban olsun. Bu durumda, $\forall v_p \in T_pE$ için $\omega_p(v_p) \in \mathfrak{g}$ olduğundan, $\omega_p(v_p) = \sum_{j=1}^{k} \omega^j(v_p)A_j$ olacak şekilde $\omega^j(v_p) \in \mathbb{R}$, yani $\mathbb{R}$-değerli C^∞ ω_j 1-formları vardır. $\forall i = 1, \ldots, n+k$ için, $V_i := W_i - \sum_{j=1}^{k} \omega^j(W_i)A_j^\sharp$ olsun. $V_i \in \mathcal{X}(U)$ olduğu açıktır. $p \in U$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \omega_p(V_i(p)) &= \omega_p(W_i(p)) - \textstyle\sum_{j=1}^{k} \omega^j(W_i(p))\omega_p(A_j^\sharp(p)) \\ &= \omega_p(W_i(p)) - \textstyle\sum_{j=1}^{k} \omega^j(W_i(p))A_j \\ &= \omega_p(W_i(p)) - \omega_p(W_i(p)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $V_i(p) \in H_p$'dir. Ayrıca $\{V_1(p), \ldots, V_{n+k}(p)\}$ kümesi H_p'yi gerer. O halde $p \longmapsto H_p$ dağılımı C^∞'dur.

■

Tanım 1.3.29 $(E,\ M,\ G,\ \pi)$ *bir asli lif demeti olsun.* $\omega : TE \longrightarrow \mathfrak{g}$ *dönüşümü* $\mathfrak{g}$*-değerli bir 1-form olsun. Eğer,*

1) u dikey bir vektör ise, $\omega_p(u) = 0$'dır.

2) $\forall g \in G$ için, $(\sigma_g^*)\omega = ad_{g^{-1}} \circ \omega$'dır.

*koşulları sağlanıyorsa, ω 1-formuna **ad-tipinde bir tensör 1-formu** denir [9].*

Önerme 1.3.30 $(E,\ M,\ G,\ \pi)$ *bir asli lif demeti olsun. E üzerinde $\mathfrak{g}$-değerli $\omega : TE \longrightarrow \mathfrak{g}$ ve $\widehat{\omega} : TE \longrightarrow \mathfrak{g}$ bağlantı 1-formları verilsin. Bu durumda $\omega - \widehat{\omega}$ dönüşümü ad-tipinde bir tensör 1-formudur.*

Tersine, $\omega : TE \longrightarrow \mathfrak{g}$ dönüşümü E üzerinde bir bağlantı 1-formu ve $\Sigma : TE \longrightarrow \mathfrak{g}$ dönüşümü ad-tipinde bir tensör 1-formu olsun. Bu durumda, $\omega + \Sigma : TE \longrightarrow \mathfrak{g}$ dönüşümü E üzerinde bir bağlantı 1-formudur.

Kanıt. $\omega, \widehat{\omega} : TE \longrightarrow \mathfrak{g}$ bağlantı 1-formları olsunlar. $\Sigma := \omega - \widehat{\omega}$ olarak tanımlansın. Bu durumda Σ, ad-tipinde bir tensör 1-formudur. $\forall p \in E$ için, Σ_p'nin lineer olduğu açıktır.

1) X dikey bir vektör olsun. Bu durumda $A^\sharp(p) = X$ olacak şekilde tek bir $A \in \mathfrak{g}$ vardır. $\forall p \in E$ için,
$\Sigma_p(A^\sharp(p)) = (\omega_p - \widehat{\omega}_p)(A^\sharp(p)) = \omega_p(A^\sharp(p)) - \widehat{\omega}_p(A^\sharp(p)) = A - A = 0.$

2) $\sigma_g^*\omega = ad_{g^{-1}} \circ \omega$ ve $\sigma_g^*\widehat{\omega} = ad_{g^{-1}} \circ \widehat{\omega}$ olduğundan,
$\sigma_g^*\omega - \sigma_g^*\widehat{\omega} = ad_{g^{-1}} \circ \omega - ad_{g^{-1}} \circ \widehat{\omega}$ olur. σ_g^* ve $ad_{g^{-1}}$ lineer oldukları için,
$\sigma_g^*(\omega - \widehat{\omega}) = ad_{g^{-1}} \circ (\omega - \widehat{\omega})$, yani $\sigma_g^*\Sigma = ad_{g^{-1}} \circ \Sigma$ sonucuna ulaşılır.

Tersine, $\omega : TE \longrightarrow \mathfrak{g}$ bağlantı 1-formu ve $\Sigma : TE \longrightarrow \mathfrak{g}$ ad-tipinde bir tensör 1-formu olsun. Bu durumda, $\widehat{\omega} = \omega + \Sigma$ biçiminde tanımlanan dönüşüm E üzerinde bir bağlantı 1-formudur: $p \in E$ olsun.

1) $\widehat{\omega}_p(A^\sharp(p)) = (\omega_p + \Sigma_p)(A^\sharp(p)) = \omega_p(A^\sharp(p)) + \Sigma_p(A^\sharp(p)) = A + 0 = A$

2) $\sigma_g^*\widehat{\omega} = \sigma_g^*(\omega + \Sigma) = \sigma_g^*\omega + \sigma_g^*\Sigma = ad_{g^{-1}} \circ \omega + ad_{g^{-1}} \circ \Sigma = ad_{g^{-1}} \circ (\omega + \Sigma) = ad_{g^{-1}} \circ \widehat{\omega}$.

■

Önerme 1.3.31 *H, G Lie grubunun bir Lie alt grubu, $\widetilde{E}$ manifoldu E manifoldunun bir alt manifoldu ve $(\widetilde{E}, M, H, \pi)$ lif demeti (E, M, G, π) lif demetinin bir alt demeti olsun. $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ sırasıyla G ve H Lie gruplarının Lie cebirlerini belirtsin. Eğer $\mathfrak{g}$ Lie cebrinin*

1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$

2) $ad_H(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$

özelliklerine sahip bir $\mathfrak{m}$ altuzayı varsa, bu durumda E üzerinde tanımlı her bir bağlantı 1-formunun $\widetilde{E}$ total manifolduna kısıtlanmışının $\mathfrak{h}$ uzayına izdüşümü, $\widetilde{E}$ alt demeti üzerinde $\mathfrak{h}$-değerli bir bağlantı 1-formudur.

Kanıt. $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ ve $ad_H(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$ olsun.

$$\begin{array}{rcccl} \omega & : & E & \longrightarrow & Hom(TE, \mathfrak{g}) \\ & & p & \longmapsto & \omega_p : T_pE \longrightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h} \end{array}$$

bağlantı 1-formu $\widetilde{E}$ manifolduna kısıtlanırsa,

$$\begin{array}{rcccl} \omega|_{\widetilde{E}} & : & \widetilde{E} & \longrightarrow & Hom(T\widetilde{E}, \mathfrak{g}) \\ & & p & \longmapsto & \omega|_{\widetilde{E},p} : T_p\widetilde{E} \longrightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h} \end{array}$$

dönüşümü elde edilir. $\forall v \in T_p\widetilde{E}$ için, $\omega|_{\widetilde{E},p}(v) \in \mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ olduğundan, $\omega|_{\widetilde{E},p}(v) = \omega_p^{\mathfrak{m}}(v) + \omega_p^{\mathfrak{h}}(v)$ olacak şekilde $\omega_p^{\mathfrak{m}}(v) \in \mathfrak{m}$ ve $\omega_p^{\mathfrak{h}}(v) \in \mathfrak{h}$ vardır.

O halde her $p \in \widetilde{E}$ noktasındaki $\omega|_{\widetilde{E},p}$ dönüşümü $\omega|_{\widetilde{E},p} = \omega_p^{\mathfrak{m}} + \omega_p^{\mathfrak{h}}$ şeklinde iki dönüşümün toplamı olarak düşünülebilir. Burada

$$\begin{array}{rcccl} \omega^{\mathfrak{h}} & : & \widetilde{E} & \longrightarrow & Hom(T\widetilde{E}, \mathfrak{h}) \\ & & p & \longmapsto & \omega_p^{\mathfrak{h}} : T_p\widetilde{E} \longrightarrow \mathfrak{h} \end{array}$$

dönüşümü $\widetilde{E}$ manifoldu üstünde $\mathfrak{h}$-değerli bir bağlantı 1-formudur:

1) $A \neq 0$ ve $A \in \mathfrak{h}$ olsun. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ olduğundan, $A \in \mathfrak{g}$'dir. ω dönüşümü E üzerinde bağlantı 1-formu olduğundan, $\forall p \in E$ için, $\omega_p(A^\sharp(p)) = A$'dır. Özel olarak, $\forall q \in \widetilde{E}$ için de $\omega_q(A^\sharp(q)) = A$'dır. Yani $\omega|_{\widetilde{E},q}(A^\sharp(q)) = \omega_q(A^\sharp(q)) = A$'dır. Şimdi, $\omega|_{\widetilde{E},q}(A^\sharp(q)) \in \mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ olduğundan, $\omega|_{\widetilde{E},q}(A^\sharp(q)) = \omega_q^{\mathfrak{m}}(A^\sharp(q)) + \omega^{\mathfrak{h}}(A^\sharp(q))$ olacak şekilde $\omega_q^{\mathfrak{m}}(A^\sharp(q)) \in \mathfrak{m}$ ve $\omega^{\mathfrak{h}}(A^\sharp(q)) \in \mathfrak{h}$ vardır. O halde,

$$\omega_q^{\mathfrak{m}}(A^\sharp(q)) + \omega^{\mathfrak{h}}(A^\sharp(q)) = A\text{'dır.}$$

$\omega_q^{\mathfrak{m}}(A^\sharp(q)) \in \mathfrak{m}$, $\omega^{\mathfrak{h}}(A^\sharp(q)) \in \mathfrak{h}$ ve $A \in \mathfrak{h}$ olduğundan, $\omega_q^{\mathfrak{m}}(A^\sharp(q)) = 0$, yani $\omega^{\mathfrak{h}}(A^\sharp(q)) = A \in \mathfrak{h}$ olmalıdır.

2) $g \in H$ ve $q \in \widetilde{E}$ olsun. ω, E üstündeki bağlantı 1-formu ve $v \in T_q\widetilde{E} \subset T_qE$ olsun.

$$\begin{aligned} ad_{g^{-1}}(\omega_q(v)) &= \omega_{qg}((\sigma_g)_{*,q}(v)), \\ ad_{g^{-1}}(\omega|_{\widetilde{E},q}(v)) &= \omega|_{\widetilde{E},qg}((\sigma_g)_{*,q}(v)), \\ ad_{g^{-1}}(\omega_q^{\mathfrak{m}}(v) + \omega^{\mathfrak{h}}(v)) &= \omega_{qg}^{\mathfrak{m}}((\sigma_g)_{*,q}(v)) + \omega_{qg}^{\mathfrak{h}}((\sigma_g)_{*,q}(v)), \\ ad_{g^{-1}}(\omega_q^{\mathfrak{m}}(v)) + ad_{g^{-1}}(\omega^{\mathfrak{h}}(v)) &= \omega_{qg}^{\mathfrak{m}}((\sigma_g)_{*,q}(v)) + \omega_{qg}^{\mathfrak{h}}((\sigma_g)_{*,q}(v)). \end{aligned}$$

$ad_{g^{-1}}(\omega_q^{\mathfrak{m}}(v)) \in \mathfrak{m}$, $ad_{g^{-1}}(\omega^{\mathfrak{h}}(v)) \in \mathfrak{h}$, $\omega_{qg}^{\mathfrak{m}}((\sigma_g)_{*,q}(v)) \in \mathfrak{m}$, $\omega_{qg}^{\mathfrak{h}}((\sigma_g)_{*,q}(v)) \in \mathfrak{h}$ ve dik toplamda yazılış tek türlü olduğundan,

$$ad_{g^{-1}}(\omega^{\mathfrak{h}}(v)) = \omega_{qg}^{\mathfrak{h}}((\sigma_g)_{*,q}(v))$$

elde edilir.

Sonuç olarak, $\omega^{\mathfrak{h}}$ dönüşümü bağlantı 1-formu tanımındaki iki koşulu sağlar, yani $\widetilde{E}$ üzerinde bir bağlantı 1-formudur.

Ayrıca $\omega^{\mathfrak{m}} : \widetilde{E} \longrightarrow Hom(T\widetilde{E}, \mathfrak{m})$ dönüşümünün ad-tipinde $\mathfrak{m}$-değerli bir tensör 1-formu olduğu görülebilir. ■

Önerme 1.3.32 *[10] (M^n, g) n-boyutlu yönlendirilmiş bir Riemann manifoldu ve $(\mathcal{F}(M^n),\ M,\ SO(n),\ \pi)$ bu manifoldun çatı demeti olsun. ω, $\mathcal{F}(M^n)$ üzerinde tanımlı $\mathfrak{so}(\mathfrak{n})$-değerli bir bağlantı 1-formu olsun. Bu durumda ω dönüşümü M manifoldunun tanjant demeti üzerinde aşağıdaki şekilde tek türlü bir kovaryant türev belirler:*

ε çatı demeti üzerinde bir kesit olsun. Yani $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tanjant demetinin ortonormal kesitlerinin bir kümesi olmak üzere,

$$\begin{aligned} \varepsilon : M &\longrightarrow \mathcal{F}(M^n) \\ x &\longmapsto \varepsilon(x) := (x, e_1, \ldots, e_n) \end{aligned}$$

olsun. $\forall V \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$\nabla_V e_i := \sum_{j=1}^{n} (\varepsilon^* \omega(V))_{ji} e_j$$

olarak tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan kovaryant türev metrik uyumludur.

Tersine, M manifoldunun tanjant demeti üzerinde metrik uyumlu bir ∇ kovaryant türevi, manifoldun çatı demeti üzerinde

$$\nabla_V e_i = \sum_{j=1}^{n} (\varepsilon^* \omega(V))_{ji} e_j$$

koşulunu sağlayan $\mathfrak{so}(\mathfrak{n})$-değerli tek bir ω bağlantı 1-formu belirler.

2 G_2 LIE GRUBU

2.1 G_2 Lie Grubunun Tanımı ve Özellikleri

Tanım 2.1.33 *A, reel sayılar cismi üzerinde sonlu boyutlu, birimli bir cebir ve $\langle .,. \rangle$ A cebri üzerinde bir iç çarpım olsun. Bu iç çarpım $\forall x, y \in A$ için,*

$$\langle xy, xy \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

şartını sağlıyorsa, A cebrine normlu cebir denir.

A cebrinin birimi 1_A ile gösterilsin.

$$ReA := span\{1_A\}$$

ve

$$ImA := (ReA)^{\perp} = \{x \in A | \forall y \in ReA \text{ için } \langle x, y \rangle = 0\}$$

olsun. $A = ReA \oplus ImA$ olduğundan, $\forall x \in A$ için, $x = Rex + Imx$ olacak şekilde tek türlü belirli $Rex \in ReA$, $Imx \in ImA$ vardır.
$\bar{x} := Rex - Imx$ olarak tanımlı $\bar{x} \in A$ elemanına x'in eşleniği denir. Ayrıca, $Rex = \frac{1}{2}(x + \bar{x})$ ve $Imx = \frac{1}{2}(x - \bar{x})$'tir.

A normlu bir cebir ve $boyA = n$ olsun. $A \times A = \{(a, b)| \ a, b \in A\}$ olmak üzere, her $(a, b), (c, d) \in A \times A$ için, aşağıdaki ikili işlemler verilsin.

$$\begin{aligned} \cdot : (A \times A) \times (A \times A) &\longrightarrow (A \times A) \\ (a, b)\ ,\ (c, d) &\longmapsto (a, b) \cdot (c, d) := (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet : (A \times A) \times (A \times A) &\longrightarrow (A \times A) \\ (a, b)\ ,\ (c, d) &\longmapsto (a, b) \bullet (c, d) := (ac + \bar{d}b, da + b\bar{c}) \end{aligned}$$

Bu durumda $(A \times A, \cdot)$ ve $(A \times A, \bullet)$ ikilileri birimli cebir yapısına sahiptir [11]. $(A \times A, \cdot)$ cebri $A(+)$ ile, $(A \times A, \bullet)$ cebri ise $A(-)$ ile gösterilir ve $boyA(+) = boyA(-) = 2n$'dir.

n-boyutlu bir A cebrinden bu şekilde $2n$-boyutlu $A(+)$ ve $A(-)$ cebirlerinin üretilmesi metoduna Cayley-Dickson metodu denir [11, 12].

$\forall a \in A$ için, $a \longmapsto (a, 0)$ dönüşümü cebir homomorfizmi olduğundan, A cebri, $A(+)$ ve $A(-)$ cebirlerinin alt cebri olarak alınabilir.

$\forall (a, b) \in A(+),\ A(-)$ için, (a, b)'nin eşleniği $\overline{(a, b)} = (\overline{a}, -b)$ şeklindedir [11].

Önerme 2.1.34 *[11] A normlu bir cebir ve $A(+)$, $A(-)$ cebirleri Cayley-Dickson metoduyla A'dan üretilmiş cebirler olsun. Bu durumda,*

1) $A(+)$, $A(-)$ değişmelidir $\Longleftrightarrow$ $A = \mathbb{R}$'dir.

2) $A(+)$, $A(-)$ birleşmelidir $\Longleftrightarrow$ A değişmeli ve birleşmelidir.

3) Aşağıdaki ifadeler denktir:

i) $A(+)$, $A(-)$ alterne cebirlerdir.

ii) $A(+)$, $A(-)$ normlu cebirlerdir.

iii) A birleşmeli cebirdir.

Cayley-Dickson metoduyla üretilen bazı cebirler şunlardır:

$\mathbb{C} = \mathbb{R}(+)$	Kompleks sayılar
$\mathbb{H} = \mathbb{C}(+)$	Kuaterniyonlar (Hamilton sayıları)
$\mathbb{O} = \mathbb{H}(+)$	Oktonyonlar (Cayley sayıları)
$\mathbb{L} = \mathbb{R}(-)$	Lorentz sayıları
$M_2(\mathbb{R}) = \mathbb{C}(-)$	2×2 tipinde reel matrisler
$\widetilde{\mathbb{O}} = \mathbb{H}(-)$	Split Oktonyonlar

Sonuç 2.1.35 *1) $\mathbb{C} = \mathbb{R}(+)$ ve $\mathbb{L} = \mathbb{R}(-)$ değişmeli, birleşmeli ve normlu cebirlerdir.*

2) $\mathbb{H} = \mathbb{C}(+)$ ve $M_2(\mathbb{R}) = \mathbb{C}(-)$ birleşmeli, normlu fakat değişmeli olmayan cebirlerdir.

3) $\mathbb{O} = \mathbb{H}(+)$ *ve* $\widetilde{\mathbb{O}} = \mathbb{H}(-)$ *normlu, fakat değişmeli veya birleşmeli olmayan cebirlerdir.*

Teorem 2.1.36 ***(Hurwitz teoremi)****[11, 12]* $\mathbb{R}$ *üzerinde tanımlanabilen mümkün bütün normlu cebirler şunlardır:*

$$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{L}, \mathbb{H}, M_2(\mathbb{R}), \mathbb{O}, \widetilde{\mathbb{O}}.$$

Tanım 2.1.37 *V, $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $\langle . \, , . \rangle$ da V üzerinde non-dejenere bir iç çarpım olsun. $\forall\ x, y \in V$ için,*

1) $\langle P(x,y), x \rangle = \langle P(x,y), y \rangle = 0$

2) $\langle P(x,y), P(x,y) \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2$

*koşullarını sağlayan bilineer bir $P : V \times V \longrightarrow V$ dönüşümüne $2-$**katlı bir vektör çarpımı** denir.*

Tanımdaki birinci özellikten, $\forall x, y \in V$ için, $\langle P(x, x+y), x+y \rangle = 0$'dır. İç çarpımın ve 2-katlı P vektör çarpımının bilineer dönüşümler oldukları kullanılarak $\forall x \in V$ için, $P(x,x) = 0$ olduğu görülebilir. Buradan $\forall x, y \in V$ için, $0 = P(x+y, x+y) = P(x,x) + P(x,y) + P(y,x) + P(y,y)$ olduğundan, $P(x,y) = -P(y,x)$ olur. Yani P dönüşümü anti-simetriktir.

V, $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $\langle . \, , . \rangle$ da V üzerinde non-dejenere bir iç çarpım olsun. V üzerinde tanımlı 2-katlı bir vektör çarpımı varsa, bu durumda boy$V = 3$ veya boy$V = 7$'dir [11,13,14].

P ve P' aynı V vektör uzayı üzerinde, aynı $\langle . \, , . \rangle$ iç çarpımına göre tanımlanmış, 2-katlı vektör çarpımları olsunlar. Eğer, $\forall x, y \in V$ için,

1) $\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

2) $\Phi(P(x,y)) = P'(\Phi(x), \Phi(y))$

özelliklerine sahip lineer bir $\Phi : V \longrightarrow V$ dönüşümü varsa, P ve P' vektör çarpımlarına izomorf vektör çarpımları denir.

7 boyutlu bir vektör uzayı üzerinde tanımlanan tüm 2-katlı vektör çarpımları izomorftur [13]. Bu çalışmada 7 boyutlu vektör uzayları üzerinde 2-katlı vektör çarpımları ele alınacaktır.

7 boyutlu bir vektör uzayında, 2-katlı vektör çarpımı oktonyonlar cebri kullanılarak tanımlanabilir:

Oktonyonlar, Cayley-Dickson metodu ile kuaterniyonlardan elde edilen 8 boyutlu normlu bir cebirdir. **1** ile bu cebrin birimi gösterilsin. $\{\mathbf{1}, e_1, \ldots, e_7\}$ bu cebrin ortonormal bir tabanı olsun. $V = span\{\mathbf{1}\}^{\perp} = Im\mathbb{O}$ olsun. Verilen tabana göre Cayley-Dickson çarpımı kullanılarak, $Im\mathbb{O}$'nun taban elemanları için çarpım tablosu oluşturulabilir:

.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_7	e_5	$-e_6$	$-e_3$	e_4	$-e_2$
e_2	$-e_7$	-1	$-e_6$	$-e_5$	e_4	e_3	e_1
e_3	$-e_5$	e_6	-1	e_7	e_1	$-e_2$	$-e_4$
e_4	e_6	e_5	$-e_7$	-1	$-e_2$	$-e_1$	e_3
e_5	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2	-1	e_7	$-e_6$
e_6	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1	$-e_7$	-1	e_5
e_7	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$	e_6	$-e_5$	-1

Tablo 2.1: Im$\mathbb{O}$'nun taban elemanlarının cebir çarpımı

$\forall x, y \in Im\mathbb{O}$ için,

$$\begin{aligned} P : Im\mathbb{O} \times Im\mathbb{O} &\longrightarrow Im\mathbb{O} \\ (x, y) &\longmapsto P(x, y) = xy + \langle x, y \rangle \mathbf{1} \end{aligned}$$

dönüşümü V üzerinde 2-katlı bir vektör çarpımıdır. Bu 2-katlı vektör çarpımına göre V üzerinde taban elemanlarının çarpımları aşağıdaki tabloda verilmiştir:

P	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	e_7	e_5	$-e_6$	$-e_3$	e_4	$-e_2$
e_2	$-e_7$	0	$-e_6$	$-e_5$	e_4	e_3	e_1
e_3	$-e_5$	e_6	0	e_7	e_1	$-e_2$	$-e_4$
e_4	e_6	e_5	$-e_7$	0	$-e_2$	$-e_1$	e_3
e_5	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2	0	e_7	$-e_6$
e_6	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1	$-e_7$	0	e_5
e_7	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$	e_6	$-e_5$	0

Tablo 2.2: Im$\mathbb{O}$'nun taban elemanlarının 2-katlı vektör çarpımı

Tanım 2.1.38 $\forall x, y, z \in Im\mathbb{O}$ *için,*

$$\begin{aligned} \varphi : Im\mathbb{O} \times Im\mathbb{O} \times Im\mathbb{O} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto \varphi(x, y, z) := \langle P(x, y), z \rangle \end{aligned}$$

olarak tanımlı dönüşüme ***temel 3-form*** *denir.*

φ dönüşümü her bir bileşene göre lineerdir ve bu dönüşüm anti-simetriktir:

$\forall x, y, z \in Im\mathbb{O}$ için, $\varphi(x, y, z) = \langle P(x, y), z \rangle = \langle -P(y, x), z \rangle = -\varphi(y, x, z)$'dir. Ayrıca, 2-katlı vektör çarpımın tanımından,

$0 = \langle P(x+z, y), x+z \rangle = \langle P(x, y), x \rangle + \langle P(x, y), z \rangle + \langle P(z, y), x \rangle + \langle P(z, y), z \rangle$ olduğundan,

$$\langle P(x, y), z \rangle = -\langle P(z, y), x \rangle$$

olur. O halde, $\varphi(x, y, z) = -\varphi(z, y, x)$'dir. Benzer şekilde

$0 = \langle P(x, y+z), y+z \rangle = \langle P(x, y), y \rangle + \langle P(x, y), z \rangle + \langle P(x, z), y \rangle + \langle P(x, z), z \rangle$ olduğundan, $\langle P(x, y), z \rangle = -\langle P(x, z), y \rangle$'dir. O halde, $\varphi(x, y, z) = -\varphi(x, z, y)$ bulunur. O halde φ dönüşümü gerçekten bir 3-formdur.

φ temel 3-formunun daha önce alınan taban elemanlarına ve bunların Tablo2.2 'de verilen 2-katlı vektör çarpımlarına bağlı ifadesi şu şekildedir:

$$\varphi = e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_7^* + e_1^* \wedge e_3^* \wedge e_5^* - e_1^* \wedge e_4^* \wedge e_6^* - e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_6^* - e_2^* \wedge e_4^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_7^* + e_5^* \wedge e_6^* \wedge e_7^*.$$

Yardımcı Teorem 2.1.39 $(A, .)$ *sonlu boyutlu, normlu bir cebir olsun.*

$$Aut(A) = \{g \in GL(A) | \forall x, y \in A \text{ } için, g(x.y) = g(x).g(y)\}$$

bu cebrin otomorfizmlerinin grubu olmak üzere

$$Aut(A) \subset O(ImA).$$

Kanıt. $g \in Aut(A)$ olsun.

1) 1_A, A'nın çarpmaya göre birim elemanı olmak üzere, $g(1_A) = 1_A$'dır:
$\forall x \in A$ için, $x.1_A = x$ olduğundan, $g(x.1_A) = g(x)$'dir. g bir cebir otomorfizmi olduğundan $g(x.1_A) = g(x).g(1_A)$'dir. O halde,

$$g(x.1_A) = g(x).g(1_A) = g(x)\text{'tir.}$$

Yani, $g(1_A)$ elemanı A'nın birim elemanıdır. Birim eleman tek olduğu için, $g(1_A) = 1_A$'dır.

2) $\forall x \in A$ için, $x^2 \in ReA$ olması için gerek ve yeter koşul, $x \in ReA$ veya $x \in ImA$ olmasıdır:
$A = ReA \oplus ImA$ olduğundan, $\forall x \in A$ için, $x = Rex + Imx$ olacak şekilde tek türlü belirli $Rex \in ReA$, $Imx \in ImA$ elemanları vardır.
$x^2 = (Rex + Imx)^2 = (Rex)^2 + 2Rex.Imx + (Imx)^2$'dir.
$Rex \in ReA$ olduğundan, $Rex = c1_A$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ vardır. O halde, $(Rex)^2 = (c1_A).(c1_A) = (c)^2.1_A \in ReA$'dır. Ayrıca,
$Re(Imx.\overline{Imx}) = \frac{1}{2}(Imx.\overline{Imx} + \overline{Imx.\overline{Imx}}) = Imx.\overline{Imx}$ olduğundan,
$Imx.\overline{Imx} = -(Imx)^2 \in ReA$'dır. O halde, $(Imx)^2 \in ReA$'dır. O halde, $x^2 = (Rex + Imx)^2 = (Rex)^2 + 2Rex.Imx + (Imx)^2 \in ReA$ olması için gerek ve yeter koşul, $Rex = 0$ veya $Imx = 0$ olması, yani $x \in ImA$ veya $x \in ReA$ olmasıdır.

3) $\forall x \in ReA$ için, $g(x) \in ReA$'dır:
$x \in ReA$ olsun. Bu durumda, $x = c1_A$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ vardır.
$g(x) = g(c1_A) = cg(1_A) = c1_A = x \in ReA$'dır.

4) $\forall x \in ImA$ için, $g(x) \in ImA$'dır:

$x \in ImA$ olsun. $x \in ImA$ olduğundan, $x^2 \in ReA$'dır. O halde, $g(x).g(x) = g(x^2) = x^2 \in ReA$'dir. Bu durumda, $x \in ImA$ için, $(g(x))^2 \in ReA$ olduğundan, $g(x) \in ReA$ veya $g(x) \in ImA$'dır.

Şimdi, $x \in ImA$ ve $g(x) \in ReA$ olsun. Bu durumda, $g(x) = c1_A$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ vardır. $g(x) = c1_A = cg(1_A) = g(c1_A)$ ve g birebir olduğundan, $x = c1_A$'dır. Bu bir çelişkidir, çünkü $x \in ImA$'dır. O halde $\forall x \in ImA$ için, $g(x) \in ImA$ olmalıdır.

3. ve 4. adımlardan görüldüğü gibi, $\forall g \in Aut(A)$ dönüşümü

$$g|_{ImA} : ImA \longrightarrow ImA$$

bir lineer dönüşüm olarak düşünülebilir. Yani, $g \in GL(ImA)$'dır. O halde, $Aut(A) \subset GL(ImA)$'dır.

5) $\forall x, y \in ImA$ için, $\langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle$'dir:

Öncelikle, $\forall x \in ImA$ için, $\overline{g(x)} = g(\overline{x})$'dir:
$x \in ImA \Longrightarrow g(x) \in ImA \Longrightarrow \overline{g(x)} = -g(x) = g(-x) = g(\overline{x})$'tir.

Şimdi, $\forall x \in ImA$ için, $\langle g(x), g(x) \rangle = g(x)\overline{g(x)} = g(x)g(\overline{x}) = g(x.\overline{x}) = \langle x, x \rangle\, g(1_A) = \langle x, x \rangle$'tir. Polarizasyonla, $\forall x, y \in ImA$ için, $\langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ elde edilir. O halde, $g \in O(ImA)$'dır. Yani, $Aut(A) \subset O(ImA)$'dır.

■

Tanım 2.1.40

$$G_2 := Aut(\mathbb{O}) = \{g \in GL(\mathbb{O}) \mid \forall x, y \in \mathbb{O} \ \textit{için} \ g(x.y) = g(x).g(y)\}$$

Önerme 2.1.41

$$G_2 = \{g \in GL(Im\mathbb{O}) | \forall x, y \in Im\mathbb{O} \ \textit{için,} \ g(P(x,y)) = P(g(x), g(y))\}$$

Kanıt. $B := \{g \in GL(Im\mathbb{O}) | \forall x, y \in Im\mathbb{O} \text{ için}, g(P(x,y)) = P(g(x), g(y))\}$ ve $g \in B$ olsun. $\mathbf{1}$ ile oktonyonların birimi gösterilsin. $g(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ olarak tanımlansın. Bu durumda, $\forall x \in Re\mathbb{O}$ için, $x = c\mathbf{1}$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ vardır. O halde $g(x) = g(c\mathbf{1}) = cg(\mathbf{1}) = c\mathbf{1} = x$ olur. O halde $g : Im\mathbb{O} \longrightarrow Im\mathbb{O}$ dönüşümü, $\mathbb{O}$'dan $\mathbb{O}$'ya bir lineer dönüşüme şu şekilde genişletilebilir:

$$g(x) = \begin{cases} g(x) & , x \in Im\mathbb{O} \text{ ise} \\ x & , x \in Re\mathbb{O} \text{ ise} \end{cases}$$

Bu şekilde ifade edilen $g : \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{O}$ dönüşümü $\forall x, y \in \mathbb{O}$ için, $g(x.y) = g(x).g(y)$ eşitliğini sağlar:

$\forall x, y \in \mathbb{O}$ için, $x = Rex + Imx$, $y = Rey + Imy$ olacak şekilde $Rex, Rey \in Re\mathbb{O}$, $Imx, Imy \in Im\mathbb{O}$ vardır.

$$\begin{aligned} g(x.y) &= g((Rex + Imx).(Rey + Imy)) \\ &= g(Rex.Rey + Rex.Imy + Imx.Rey + Imx.Imy) \\ &= g(Rex.Rey) + g(Rex.Imy) + g(Imx.Rey) + g(Imx.Imy) \\ &= Rex.Rey + g(Rex.Imy) + g(Imx.Rey) + g(Imx.Imy) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(x).g(y) &= g(Rex + Imx).g(Rey + Imy) \\ &= (g(Rex) + g(Imx)).(g(Rey) + g(Imy)) \\ &= (Rex + g(Imx)).(Rey + g(Imy)) \\ &= Rex.Rey + Rex.g(Imy) + g(Imx).Rey + g(Imx).g(Imy) \end{aligned}$$

olduğundan, $g(x.y) = g(x).g(y)$ eşitliğini göstermek için,

$$\begin{aligned} g(Rex.Imy) + g(Rey.Imx) + g(Imx.Imy) &= Rex.g(Imy) + Rey.g(Imx) \\ &\quad + g(Imx).g(Imy) \end{aligned}$$

gösterilmelidir.

$Rex \in Re\mathbb{O}$ için, $Rex = c\mathbf{1}$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ olduğundan, $g(Rex.Imy) = g((c\mathbf{1}).Imy) = g(c(\mathbf{1}.Imy)) = cg(Imy) = (c\mathbf{1}).g(Imy) = Rex.g(Imy)$'dir.

Benzer şekilde, $g(Imx.Rey) = g(Imx).Rey$ olur.

Üstelik, $\forall x, y \in Im\mathbb{O}$ için, $g(x.y) = g(x).g(y)$'dir:

$g \in B$ olduğundan, $\forall x, y \in Im\mathbb{O}$ için, $g(P(x,y)) = P(g(x), g(y))$'tir. O halde, $\forall z \in Im\mathbb{O}$ için, $\langle g(P(x,y)), z\rangle = \langle P(g(x), g(y)), z\rangle$ olur.

$$P(x,y) = x.y + \langle x, y\rangle \mathbf{1}$$

kullanılırsa, $\forall z \in Im\mathbb{O}$ için, $\langle g(x.y) - g(x).g(y), z\rangle = 0$ bulunur. İç çarpım non-dejenere olduğundan, $\forall x, y \in Im\mathbb{O}$ için, $g(x.y) = g(x).g(y)$ elde edilir. O halde $\forall x, y \in \mathbb{O}$ için, $g(Imx.Imy) = g(Imx).g(Imy)$ olur. Dolayısıyla, $g \in G_2$, yani $B \subset G_2$'dur.

Tersine $g \in G_2$ olsun. $\forall x, y \in \mathbb{O}$ için, $g(x.y) = g(x).g(y)$ olduğundan, özel olarak $\forall x, y \in Im\mathbb{O}$ için de $g(x,y) = g(x).g(y)$'dir. Buradan $z \in Im\mathbb{O}$ için,

$$\begin{aligned}
\langle g(x.y), z\rangle &= \langle g(x).g(y), z\rangle \text{ eşitliğinden} \\
\langle g(x.y), z\rangle + 0 &= \langle g(x).g(y), z\rangle + 0, \\
\langle g(x.y), z\rangle + \langle g(\langle x, y\rangle 1), z\rangle &= \langle g(x).g(y), z\rangle + \langle \langle g(x), g(y)\rangle \mathbf{1}, z\rangle, \\
\langle g(x.y) + g(\langle x, y\rangle \mathbf{1}), z\rangle &= \langle g(x).g(y) + \langle g(x), g(y)\rangle \mathbf{1}, z\rangle, \\
\langle g(x.y + \langle x, y\rangle \mathbf{1}), z\rangle &= \langle g(x).g(y) + \langle g(x), g(y)\rangle \mathbf{1}, z\rangle, \\
\langle g(P(x,y)), z\rangle &= \langle P(g(x), g(y)), z\rangle
\end{aligned}$$

olur. İç çarpım non-dejenere olduğundan, $\forall x, y \in Im\mathbb{O}$ için,

$$P(g(x), g(y)) = g(P(x,y))$$

bulunur. O halde $g \in B$, yani $G_2 \subset B$'dir. ■

Teorem 2.1.42 ***(Bryant)***

$$G_2 = \{g \in GL(Im\mathbb{O}) | g^*\varphi = \varphi\}$$

Kanıt. $A := \{g \in GL(Im\mathbb{O}) | g^*\varphi = \varphi\}$ şeklinde tanımlansın ve $g \in G_2 = Aut(\mathbb{O})$ olsun. Bu durumda önerme 2.1.39 gereğince $g \in O(Im\mathbb{O})$'dur. $\forall x, y, z \in$

$Im\mathbb{O}$ için,

$$\begin{aligned}
\varphi(g(x), g(y), g(z)) &= \langle g(x).g(y), g(z)\rangle \\
&= \langle g(x.y), g(z)\rangle \\
&= \langle g(Re(x.y) + Im(x.y)), g(z)\rangle \\
&= \langle g(Re(x.y)) + g(Im(x.y)), g(z)\rangle \\
&= \langle g(Re(x.y)), g(z)\rangle + \langle g(Im(x.y)), g(z)\rangle \\
&= \langle Re(x.y), g(z)\rangle + \langle g(Im(x.y)), g(z)\rangle \\
&= 0 + \langle g(Im(x.y)), g(z)\rangle \\
&= 0 + \langle Im(x.y), z\rangle \\
&= \langle Re(x.y), z\rangle + \langle Im(x.y), z\rangle \\
&= \langle Re(x.y) + Im(x.y), z\rangle \\
&= \langle x.y, z\rangle \\
&= \varphi(x, y, z)
\end{aligned}$$

olduğundan, $g \in A$, yani $G_2 \subset A$ olur.

Tersine, $A \subset G_2$'dir:

Öncelikle $A \subset O(Im\mathbb{O})$'dur:

$g \in A$ olsun. Bu durumda $g \in GL(Im\mathbb{O})$ ve $g^*\varphi = \varphi$'dir. $\{e_1, \ldots, e_7\}$, $Im\mathbb{O}$ için bir taban ve $\lambda = e_1^* \wedge e_2^* \wedge \ldots \wedge e_7^*$ standart hacim elemanı olsun. Taban elemanları üzerinden işlem yapılarak, $\forall x \in Im\mathbb{O}$ için,

$$(x \lrcorner \varphi) \wedge (x \lrcorner \varphi) \wedge \varphi = 6 \langle x, x\rangle \lambda$$

elde edilir. Polarizasyonla, $\forall x, y \in Im\mathbb{O}$ için,

$$(x \lrcorner \varphi) \wedge (y \lrcorner \varphi) \wedge \varphi = 6 \langle x, y\rangle \lambda \tag{2.1.1}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki yanına g^* uygulanır ve $g^*\lambda = (\det g).\lambda$ kullanılırsa,

$$g^*(x \lrcorner \varphi) \wedge g^*(y \lrcorner \varphi) \wedge \varphi = 6 \langle x, y\rangle \det g.\lambda \tag{2.1.2}$$

elde edilir.

$g^*(x \lrcorner \varphi) = g^{-1}(x) \lrcorner \varphi$ eşitliği kolaylıkla görülebilir. (2.1.2) eşitliğinde $g^*(x \lrcorner \varphi)$

yerine $g^{-1}(x)\lrcorner\varphi$ yazılırsa,

$$g^{-1}(x)\lrcorner\varphi \wedge g^{-1}(y)\lrcorner\varphi \wedge \varphi = 6\langle x, y\rangle (\det g).\lambda \tag{2.1.3}$$

elde edilir. Öte yandan, (2.1.1) eşitliğinde x yerine $g^{-1}(x)$ ve y yerine $g^{-1}(y)$ yazılırsa,

$$(g^{-1}(x)\lrcorner\varphi) \wedge (g^{-1}(y)\lrcorner\varphi) \wedge \varphi = 6\left\langle g^{-1}(x), g^{-1}(y)\right\rangle \lambda \tag{2.1.4}$$

bulunur. (2.1.3) ve (2.1.4) eşitlikleri karşılaştırılırsa,

$$\langle x, y\rangle \det g = \left\langle g^{-1}(x), g^{-1}(y)\right\rangle$$

görülür. $\forall x_1, \ldots, x_7 \in Im\mathbb{O}$ için, $(\lambda(x_1, \ldots, x_7))^2 = \det(\langle x_i, x_j\rangle)$ olduğundan, x_i yerine $g^{-1}(e_i)$ alınırsa, $\det g = 1$ bulunur. O halde, $g \in SO(Im\mathbb{O}) \subset O(Im\mathbb{O})$ bulunur.

Şimdi $g \in A$ olsun. $A \subset O(Im\mathbb{O})$ olduğundan, $g \in O(Im\mathbb{O})$ olur.

$x, y, z \in Im\mathbb{O}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\langle g(P(x,y)), g(z)\rangle &= \langle P(x,y), z\rangle \\
&= \langle x.y + \langle x, y\rangle \mathbf{1}, z\rangle \\
&= \langle x.y, z\rangle \\
&= \varphi(x,y,z) \\
&= g^*\varphi(x,y,z) \\
&= \varphi(g(x), g(y), g(z)) \\
&= \langle P(g(x), g(y)), g(z)\rangle
\end{aligned}$$

ve iç çarpım non-dejenere olduğundan, $\forall x, y \in Im\mathbb{O}$ için,

$$g(P(x,y)) = P(g(x), g(y))$$

bulunur. O halde, $g \in G_2$, yani $A \subset G_2$'dir. ■

Önerme 2.1.43 *[11] G_2 grubu $End(Im\mathbb{O}) \cong GL(7,\mathbb{R})$ Lie grubunun 14 boyutlu kapalı bir alt manifoldudur.*

G_2 grubu $End(Im\mathbb{O})$ Lie grubunun kapalı bir alt grubu olduğundan G_2 de bir Lie grubudur [15].

V, 7-boyutlu reel bir vektör uzayı olmak üzere, V üzerindeki 2-katlı P vektör çarpımı anti-simetrik olduğundan, $\Lambda^2 V$'den V'ye bir lineer dönüşüm olarak düşünülebilir. Bu nedenle $P(x,y)$ yerine $P(x \wedge y)$ de yazılabilir.

$\{e_1, \ldots, e_7\}$, V vektör uzayının ortonormal bir tabanı olsun. $P : \Lambda^2 V \longrightarrow V$ dönüşümü kullanılarak,

$$\begin{aligned} p : V \quad &\longrightarrow \quad \Lambda^2 V \\ x \quad &\longmapsto \quad p(x) := -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i=1}^{7} e_i \wedge P(e_i \wedge x) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan p dönüşümü P dönüşümünün adjointidir ve ayrıca $P(p(x)) = 3x$ eşitliği sağlanır [16].

$P : \Lambda^2 V \longrightarrow V$ ve $p : V \longrightarrow \Lambda^2 V$ dönüşümleri yardımıyla $P_k : \Lambda^{k+1} V \longrightarrow \Lambda^k V$ ve $p_k : \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{k+1} V$ lineer dönüşümleri tanımlanabilir:

$v_1, \ldots, v_{k+1} \in V$ olmak üzere,

$$P_k(v_1, \ldots, v_{k+1}) := \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j+1} P(v_i \wedge v_j) \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v_i} \wedge \ldots \wedge \hat{v_j} \wedge \ldots \wedge v_{k+1}$$

$$p_k(v_1, \ldots, v_k) := \sum_{1 \leq i \leq k} (-1)^{i+1} p(v_i) \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v_i} \wedge \ldots \wedge v_k$$

$k = 1$ alındığında, $P_1 = P$ ve $p_1 = p$ olur.

P_k ve p_k lineer dönüşümleri yardımıyla da $P_k^* : \Lambda^k(V^*) \longrightarrow \Lambda^{k+1}(V^*)$ ve $p_{k-1}^* : \Lambda^k(V^*) \longrightarrow \Lambda^{k-1}(V^*)$ dönüşümleri tanımlanabilir:

$\alpha \in \Lambda^k(V^*)$ olmak üzere,

$$P_k^*(\alpha) := \alpha \circ P_k$$

$$p_{k-1}^*(\alpha) := \alpha \circ p_{k-1}.$$

G_2 Lie grubunun düşük boyutlu ilk dört indirgenemez temsili 1, 7, 14 ve 27 boyutludur [17, 18]. Bu grubun 1 boyutlu temsili trivyaldir [18]. $G_2 = \{g \in O(7) | P(g(x), g(y)) = g(P(x,y))\}$ grubunun $SO(7)$'nin alt grubu olduğu dikkate alınırsa, 7-boyuttaki temsil elde edilir. G_2 grubunun 14-boyutlu temsili ise adjoint temsildir [18].

G_2 grubunun 7-boyutlu bir V vektör uzayı üzerindeki temsili kullanılarak $k = 1, \ldots, 7$ olmak üzere $\Lambda^k(V^*)$ uzayları üzerindeki temsilleri elde edilir. Ayrıca $\Lambda^k(V^*) \cong \Lambda^{7-k}(V^*)$ olduğundan [8], G_2'nin V^*, $\Lambda^2(V^*)$ ve $\Lambda^3(V^*)$ uzayları üzerindeki temsillerini incelemek yeterlidir. Bunun için, aşağıdaki alt uzaylar tanımlansın:

$$\Lambda_1^2(V^*) := \{\alpha \in \Lambda^2(V^*) | p_1^*(\alpha) = 0\},$$

$$\Lambda_2^2(V^*) := \{\alpha \in \Lambda^2(V^*) | 3\alpha = (P_1^* \circ p_1^*)(\alpha)\},$$

$$\Lambda_1^3(V^*) := \langle \varphi \rangle,$$

$$\Lambda_2^3(V^*) := \{\alpha \in \Lambda^3(V^*) | p_2^*(\alpha) = 0,$$

$$\Lambda_3^3(V^*) := \{\alpha \in \Lambda^3(V^*) | \forall x, y \in V \text{için}, \alpha(x \wedge y \wedge P(x \wedge y)) = 0\}$$

Önerme 2.1.44 *[16]* $\Lambda^2(V^*) = \Lambda_1^2(V^*) \oplus \Lambda_2^2(V^*)$, *boy*$\Lambda_1^2(V^*) = 14$, *boy*$\Lambda_2^2(V^*)$ $= 7$*'dir. G_2 grubunun bu alt uzaylar üzerindeki temsilleri indirgenemezdir.*

Önerme 2.1.45 *[16]* $\Lambda^3(V^*) = \Lambda_1^3(V^*) \oplus \Lambda_2^3(V^*) \oplus \Lambda_3^3(V^*)$*'dır ve boy*$\Lambda_1^3(V^*) =$ 1, *boy*$\Lambda_2^3(V^*) = 27$ *ve boy*$\Lambda_1^3(V^*) = 7$*'dir. G_2 grubunun bu alt uzaylar üzerindeki temsilleri indirgenemezdir.*

7-boyutlu bir M Riemann manifoldunun tanjant demeti üzerinde 2-katlı bir vektör çarpımından elde edilen φ temel 3-formunun $\nabla^g \varphi$ Levi-Civita kovaryant türevi yardımcı teorem (2.2.46)'da gösterilecek olan $\forall X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$\nabla_W^g(\varphi)(X, Y, P(X, Y)) = 0,$$

$$\nabla_W^g(\varphi)(X, Y, Z) = -\nabla_W^g(\varphi)(Y, X, Z) = -\nabla_W^g(\varphi)(X, Z, Y)$$

özelliklerine sahiptir. Fernandez ve Gray'in çalışmasında [16] bu özelliğe sahip $\alpha \in V^* \otimes \Lambda^3(V^*)$ formlarının

$$W := \{\alpha \in V^* \otimes \Lambda^3(V^*) | \forall x, y, z \in V \text{için}, \alpha(x, y \wedge z \wedge P(y \wedge z) = 0\}$$

uzayı tanımlanmıştır. Bu uzayın boyutu 49'dur. Ayrıca W uzayı G_2 grubunun 1, 7, 14 ve 27 boyutlu indirgenemez temsil uzaylarının bir dekompozisyonu olarak ifade edilmiştir.

W uzayının dekompozisyonunu elde etmek için $\forall x, y \in V$ ve $\alpha \in W$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} L_2(\alpha)(x \wedge y) &= \sum_{i=1}^{7} \alpha(e_i, e_i \wedge x \wedge y) \\ L_1(\alpha)(x) &= \sum_{i,j=1}^{7} \alpha(P(e_i \wedge e_j), e_i \wedge e_j \wedge x) \\ L_0(\alpha) &= \sum_{i,j,k=1}^{7} \alpha(P(P(e_i \wedge e_j) \wedge e_k), e_i \wedge e_j \wedge e_k) \end{aligned}$$

lineer dönüşümleri kullanılmıştır. Buna göre,

$$\begin{aligned} W_1 &:= \langle *\varphi \rangle \\ W_2 &:= \Big\{ \alpha \in W \mid \forall x, y, z, w \in W \text{ için, } \ \alpha(w, x \wedge y \wedge z) - \alpha(x, w \wedge y \wedge z) \\ &\quad\ + \alpha(y, w \wedge x \wedge z) - \alpha(z, w \wedge x \wedge y) = 0 \Big\} \\ W_3 &:= \{ \alpha \in W \mid L_2(\alpha) = L_0(\alpha) = 0 \} \\ W_4 &:= \Big\{ \alpha \in W \mid \forall x, y, z, w \in W \text{ için, } \ 12\alpha(w, x \wedge y \wedge z) \\ &\quad\ = \mathfrak{S}_{xyz}(-(p_1^* \circ L_2)(\alpha)(x)\varphi(x \wedge y \wedge z) + 3\langle w, x \rangle L_2(\alpha)(y \wedge z)) \Big\} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \ = \ W$$

ve $boyW_1 = 1$, $boyW_2 = 14$, $boyW_3 = 27$, $boyW_4 = 7$'dir [16].

2.2 Yapı Grubu G_2 Olan Riemann Manifoldları

(M, g) 7-boyutlu bir Riemann manifoldu ve TM bu manifoldun tanjant demeti olsun. $\forall x \in M$ için, T_xM tanjant uzayı $\mathbb{R}^7$ vektör uzayına izomorftur. P, $\mathbb{R}^7$ üzerindeki 2-katlı vektör çarpımı, φ de P'den elde edilen temel 3-form olsun. $\mathbb{R}^7$ üzerinde tanımlanan φ 3-formu TM tanjant demetine şu şekilde taşınabilir:

(U_i, Ψ_i) bir demet kartı olsun. $\forall x \in U_i$ ve $\forall u, v, w \in T_xM$ için,

$$\begin{aligned} (\Psi_i|_{\pi^{-1}(x)})^*\varphi : T_xM \times T_xM \times T_xM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v, w) &\longmapsto (\Psi_i|_{\pi^{-1}(x)})^*\varphi(u, v, w), \end{aligned}$$

$(\Psi_i|_{\pi^{-1}(x)})^*\varphi(u, v, w) := \varphi(\Psi_i|_{\pi^{-1}(x)}(u), \Psi_i|_{\pi^{-1}(x)}(v), \Psi_i|_{\pi^{-1}(x)}(w))$
dönüşümü T_xM üzerinde temel 3-formdur. Bu şekilde her bir T_xM lifine taşınan temel 3-formun noktadan bağımsız olarak TM üzerine taşınabilmesi için, temel 3-form, demet kartlarından bağımsız olmalıdır.

$i \neq j$ olmak üzere, (U_j, Ψ_j), $x \in U_j$ olan başka bir demet kartı olsun. Bu durumda, $(\Psi_i|_{\pi^{-1}(x)})^*\varphi = (\Psi_j|_{\pi^{-1}(x)})^*\varphi$ olmalıdır. Bu eşitlikten ise,

$$((\Psi_i \mid_{\pi^{-1}(x)}) \circ (\Psi_j \mid_{\pi^{-1}(x)})^{-1})^*(\varphi) = \varphi$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul,

$$(\Psi_i \mid_{\pi^{-1}(x)}) \circ (\Psi_j \mid_{\pi^{-1}(x)})^{-1} : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^7$$

dönüşümünün G_2 grubunun elemanı olmasıdır. Çünkü,

$$G_2 = \{g \in GL(7, \mathbb{R}) | \quad g^*\varphi = \varphi\}$$

olduğu gösterilmişti. Böylece, 7-boyutlu bir M manifoldunun yapı grubunun G_2 olması için gerek ve yeter koşul her $x \in M$ noktasındaki T_xM tanjant uzayı üzerine tanjant demetinin kartlarından bağımsız olacak şekilde $\mathbb{R}^7$ üzerindeki temel 3-formun taşınabilmesidir.

Çalışmanın bundan sonrasında kısalık açısından, TM üzerindeki temel 3-form da φ ile gösterilecektir.

Eğer M manifoldunun yapı grubu G_2 ise her $x \in M$ noktasındaki T_xM tanjant uzayı üzerindeki 2-katlı vektör çarpımı $\mathcal{X}(M)$ üzerine genişletilebilir. Bu durumda, P 2-katlı vektör çarpımı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$P : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ öyle ki $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned} \langle P(X,Y), X\rangle &= \langle P(X,Y), Y\rangle = 0, \\ \langle P(X,Y), P(X,Y)\rangle &= \langle X, X\rangle \langle Y, Y\rangle - \langle X, Y\rangle^2 . \end{aligned}$$

Benzer şekilde, temel 3-form da,

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (X, Y, Z) &\longmapsto \varphi(X,Y,Z) := \langle P(X,Y), Z\rangle \end{aligned}$$

olarak $\mathcal{X}(M)$'e genişletilebilir.

∇^g, M Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita kovaryant türevi olsun. P ve φ'nin $\nabla^g P$ ve $\nabla^g \varphi$ Levi-Civita kovaryant türevleri, $\forall\, W, X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned} \nabla^g_X(P)(Y,Z) &= \nabla^g_X(P(Y,Z)) - P(\nabla^g_X Y, Z) \\ &\quad -P(Y, \nabla^g_X Z) \\ \nabla^g_W(\varphi)(X,Y,Z) &= W\varphi(X,Y,Z) - \varphi(\nabla^g_W X, Y, Z) \\ &\quad -\varphi(X, \nabla^g_W Y, Z) - \varphi(X, Y, \nabla^g_W Z) \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\nabla^g_W(\varphi)(X,Y,Z) = \langle \nabla^g_W(P)(X,Y), Z\rangle$$

bulunur. Bu eşitlik metrik uyumlu herhangi bir kovaryant türev için de geçerlidir.

M Riemann manifoldunun üzerinde d ile exterior türev, δ ile kotürev gösterilsin. η, M manifoldu üzerinde bir 3-form ise $d\eta$ ve $\delta\eta$ aşağıdaki şekildedir [19]:

Her $W, X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ için, $\{E_1, E_2, \ldots, E_7\}$ bir lokal çatı olmak üzere,

$$\begin{aligned}
d\eta(W,X,Y,Z) &= \nabla^g_W(\eta)(X\wedge Y\wedge Z) - \nabla^g_X(\eta)(W\wedge Y\wedge Z) \\
&\quad +\nabla^g_Y(\eta)(W\wedge X\wedge Z) - \nabla^g_Z(\eta)(W\wedge X\wedge Y) \\
\delta\eta(Y,Z) &= -\sum_{i=1}^{7}\nabla^g_{E_i}(\eta)(E_i\wedge Y\wedge Z).
\end{aligned}$$

Yardımcı Teorem 2.2.46 *[16] $W, X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ olmak üzere,*

$$\nabla^g_W(\varphi)(X,Y,Z) = -\nabla^g_W(\varphi)(Y,X,Z) = -\nabla^g_W(\varphi)(X,Z,Y) \quad (2.2.5)$$

$$\nabla^g_W(\varphi)(X,Y,P(X,Y)) = 0. \quad (2.2.6)$$

Kanıt. $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ olsun.

$$\begin{aligned}
-\nabla^g_W(\varphi)(Y,X,Z) &= -W\varphi(Y,X,Z) + \varphi(\nabla^g_W Y, X, Z) + \varphi(Y, \nabla^g_W X, Z) \\
&\quad +\varphi(Y, X, \nabla^g_W Z) \\
&= W\varphi(X,Y,Z) - \varphi(X, \nabla^g_W Y, Z) - \varphi(\nabla^g_W X, Y, Z) \\
&\quad -\varphi(X, Y, \nabla^g_W Z) \\
&= \nabla^g_W(\varphi)(X,Y,Z)
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $\nabla^g_W(\varphi)(X,Y,Z) = -\nabla^g_W(\varphi)(X,Z,Y)$ olduğu görülür. O halde (2.2.5) eşitliği sağlanır. Eşitlik (2.2.6)'nin kanıtı için ise, aşağıda verilen (2.2.7) eşitliği kullanılacaktır.

P vektör çarpımının tanımındaki iki özellik kullanılarak $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$P(X, P(X,Y)) = -\langle X, X\rangle Y + -\langle X, Y\rangle X \quad (2.2.7)$$

bulunur.

$$
\begin{aligned}
\nabla^g_W(\varphi)(X,Y,P(X,Y)) &= W\varphi(X,Y,P(X,Y)) - \varphi(\nabla^g_W X, Y, P(X,Y)) \\
&- \varphi(X,\nabla^g_W Y, P(X,Y)) - \varphi(X,Y,\nabla^g_W(P(X,Y))) \\
&= W\left\langle P(X,Y), P(X,Y)\right\rangle - \left\langle P(\nabla^g_W X, Y), P(X,Y)\right\rangle \\
&- \left\langle P(X,\nabla^g_W Y), P(X,Y)\right\rangle \\
&- \left\langle P(X,Y), \nabla^g_W(P(X,Y))\right\rangle \\
&= \left\langle \nabla^g_W(P(X,Y)), P(X,Y)\right\rangle \\
&+ \left\langle P(X,Y), \nabla^g_W(P(X,Y))\right\rangle + \left\langle P(P(X,Y),Y), \nabla^g_W X\right\rangle \\
&- \left\langle P(P(X,Y),X), \nabla^g_W Y\right\rangle - \left\langle P(X,Y), \nabla^g_W(P(X,Y))\right\rangle \\
&= \left\langle \nabla^g_W(P(X,Y)), P(X,Y)\right\rangle + \left\langle P(P(X,Y),Y), \nabla^g_W X\right\rangle \\
&- \left\langle P(P(X,Y),X), \nabla^g_W Y\right\rangle \\
&= \left\langle P(X,Y), \nabla^g_W(P(X,Y))\right\rangle + \left\langle P(Y,P(Y,X)), \nabla^g_W X\right\rangle \\
&+ \left\langle P(X,P(X,Y)), \nabla^g_W Y\right\rangle \\
&= \left\langle P(X,Y), \nabla^g_W(P(X,Y))\right\rangle \\
&+ \left\langle -\left\langle Y,Y\right\rangle X + \left\langle Y,X\right\rangle Y, \nabla^g_W X\right\rangle \\
&+ \left\langle -\left\langle X,X\right\rangle Y + \left\langle X,Y\right\rangle X, \nabla^g_W Y\right\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}W\left\langle P(X,Y),P(X,Y)\right\rangle - \left\langle Y,Y\right\rangle\left\langle X,\nabla^g_W X\right\rangle \\
&\quad + \left\langle X,Y\right\rangle\left\langle Y,\nabla^g_W X\right\rangle - \left\langle X,X\right\rangle\left\langle Y,\nabla^g_W Y\right\rangle \\
&+ \left\langle X,Y\right\rangle\left\langle X,\nabla^g_W Y\right\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}W\{\left\langle X,X\right\rangle\left\langle Y,Y\right\rangle - \left\langle X,Y\right\rangle^2\} - \left\langle Y,Y\right\rangle\left\langle X,\nabla^g_W X\right\rangle \\
&\quad + \left\langle X,Y\right\rangle\left\langle Y,\nabla^g_W X\right\rangle - \left\langle X,X\right\rangle\left\langle Y,\nabla^g_W Y\right\rangle \\
&+ \left\langle X,Y\right\rangle\left\langle X,\nabla^g_W Y\right\rangle
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}W\{\left\langle X,X\right\rangle\left\langle Y,Y\right\rangle - \left\langle X,Y\right\rangle^2\} &= \tfrac{1}{2}\{W(\left\langle X,X\right\rangle)\left\langle Y,Y\right\rangle + \left\langle X,X\right\rangle W(\left\langle Y,Y\right\rangle)\} \\
&\quad -\tfrac{1}{2}.2W(\left\langle X,Y\right\rangle)\left\langle X,Y\right\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}\{\left\langle \nabla^g_W X, X\right\rangle + \left\langle X,\nabla^g_W X\right\rangle\}\left\langle Y,Y\right\rangle \\
&\quad +\tfrac{1}{2}\left\langle X,X\right\rangle\{2\left\langle Y,\nabla^g_W Y\right\rangle\} \\
&\quad -\{\left\langle \nabla^g_W X, Y\right\rangle + \left\langle X,\nabla^g_W Y\right\rangle\}\left\langle X,Y\right\rangle \\
&= \left\langle X,\nabla^g_W X\right\rangle\left\langle Y,Y\right\rangle + \left\langle Y,\nabla^g_W Y\right\rangle\left\langle X,X\right\rangle \\
&\quad - \left\langle X,Y\right\rangle\left\langle \nabla^g_W X, Y\right\rangle - \left\langle X,Y\right\rangle\left\langle X,\nabla^g_W Y\right\rangle
\end{aligned}
$$

eşitliklerinden, (2.2.6) eşitliğinin sağlandığı görülür. Bu eşitlik metrik uyumlu her kovaryant türev için de geçerlidir. ■

(M^7, g) yapı grubu G_2 olan 7-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Daha önce tanımlanmış olan W uzayının tanımına benzer şekilde her $m \in M$ noktası için,

$$W_m = \{\alpha \in T_m^*M \otimes \Lambda^3(T_m^*M) \mid \forall x, y, z \in T_m M \text{için}, \ \alpha(x, y \wedge z \wedge P_m(y \wedge z) = 0\}$$

uzayı tanımlanabilir.

Yardımcı teorem (2.2.47)'den, temel 3-formun Levi-Civita kovaryant türevi $\nabla^g \varphi$ için, $m \in M$ olmak üzere, $(\nabla^g \varphi)_m \in W_m$ olduğu açıktır.

G_2'nin W_m üzerindeki etkisi düşünüldüğünde, W_m uzayı dört indirgenemez $W_{m1}, W_{m2}, W_{m3}, W_{m4}$ alt uzayına ayrılabilir. Böylece W_m'nin 16 invaryant alt uzayı elde edilir. O halde $\forall m \in M$ için, $(\nabla^g \varphi)_m$ bu 16 invaryant alt uzayın birinde olmak zorundadır. Böylece yapı grubu G_2 olan bütün Riemann manifoldları temel 3-formun Levi-Civita kovaryant türevinin ait olduğu invaryant alt uzaya bağlı olarak 16 sınıfa ayrılmış olur.

U, W uzayının 16 invaryant alt uzayından biri olsun. $\forall m \in M$ için, W_m'de karşılık gelen invaryant alt uzay U_m ile gösterilsin. $\forall m \in M$ için, $(\nabla^g \varphi)_m$ bu 16 invaryant alt uzaydan birinde olmak zorundadır. Yani bir $U_m \subset W_m$ için, $(\nabla^g \varphi)_m \in U_m$ olmalıdır.

Yapı grubu G_2 olan bütün Riemann manifoldları ele alınsın. $\mathcal{U}$, $\forall m \in M$ için, $(\nabla^g \varphi)_m \in U_m$ olan M manifoldlarının sınıfını belirtsin. Yani,

$$\mathcal{U} := \{M | M \text{yapı grubu } G_2 \text{ olan bir Riemann manifoldudur ve}$$

$$\forall m \in M \text{için}, \ (\nabla^g \varphi)_m \in U_m\text{'dir.}\}$$

olsun.

$\{0\}$ invaryant alt uzayına karşılık gelen sınıf $\mathcal{T}$ ile, W_i alt uzayına karşılık gelen sınıf $\mathcal{W}_i$ ile, $W_i \oplus W_j$ invaryant alt uzayına karşılık gelen sınıf $\mathcal{W}_i \oplus \mathcal{W}_j$ ile, $W_i \oplus W_j \oplus W_k$ uzayına karşılık gelen sınıf $\mathcal{W}_i \oplus \mathcal{W}_j \oplus \mathcal{W}_k$ ile ve W'ya karşılık gelen sınıf $\mathcal{W}$ ile gösterilsin.

Teorem 2.2.47 *[16] M 7-boyutlu, yapı grubu* G_2 *olan bir Riemann manifoldu ise bu manifold, üzerindeki* φ *temel 3-formunun Levi-Civita kovaryant türevine göre Tablo 2.3'te verilen sınıflardan birine aittir.*

Tanım 2.2.48 $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ *sınıfına ait olan manifoldlara* ***integrallenebilir*** G_2 *yapısına sahip manifoldlar denir.*

Sınıf	Tanımlama bağıntısı
$\mathcal{T}$	$\nabla^g \varphi = 0$
$\mathcal{W}_1$	$\nabla^g_X(\varphi)(X \wedge Y \wedge Z) = 0$ veya $d\varphi = 4\nabla^g \varphi$ veya $\nabla^g \varphi = \frac{1}{168} \langle \nabla^g \varphi, *\varphi \rangle * \varphi$
$\mathcal{W}_2$	$d\varphi = 0$
$\mathcal{W}_3$	$\delta\varphi = \langle \nabla^g \varphi, *\varphi \rangle = 0$
$\mathcal{W}_4$	$12\nabla^g_W(\varphi)(X \wedge Y \wedge Z) = \mathfrak{S}_{xyz}\{p_1^* \; \delta\varphi(X) \; \varphi(W \wedge Y \wedge Z)$ $-3 \langle W, X \rangle \, \delta\varphi(Y \wedge Z)\}$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$	$\nabla^g_{P(X \wedge Y)}(\varphi)(X \wedge Y \wedge Z) = \nabla^g_X(\varphi)(P(X \wedge Y) \wedge Y \wedge Z)$ $-\nabla^g_Y(\varphi)(P(X \wedge Y) \wedge X \wedge Z)$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$	$\delta\varphi = 0$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$	$p_1^* \; \delta\varphi = \langle \nabla^g \varphi, *\varphi \rangle = 0$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$	$\nabla^g_W(\varphi)(X \wedge Y \wedge Z) - \frac{1}{12}\mathfrak{S}_{xyz}\{p_1^* \; \delta\varphi(X) \; \varphi(W \wedge Y \wedge Z)$ $-3 \langle W, X \rangle \, \delta\varphi(Y \wedge Z)\}$ $= \frac{1}{168} \langle \nabla^g \varphi, *\varphi \rangle * \varphi(W \wedge X \wedge Y \wedge Z)$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$	$d\varphi = -\frac{1}{4} p_1^* \; \delta\varphi \wedge \varphi$
$\mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$	$3\delta\varphi = P_1^* \circ p_1^* \; \delta\varphi$ ve $\langle \nabla^g \varphi, *\varphi \rangle = 0$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$	$p_1^* \; \delta\varphi = 0$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$	$d\varphi = -\frac{1}{4} p_1^* \; \delta\varphi \wedge \varphi + \frac{1}{42} \langle \nabla^g \varphi, *\varphi \rangle * \varphi$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$	$3\delta\varphi = P_1^* \circ p_1^* \; \delta\varphi$ veya $12\nabla^g_X(\varphi)(X \wedge Y \wedge Z) = p_1^* \; \delta\varphi(X) \; \varphi(X \wedge Y \wedge Z)$ $-3\{\langle X, X \rangle \, \delta\varphi(Y \wedge Z) - \langle X, Y \rangle \, \delta\varphi(X \wedge Z)$ $+ \langle X, Z \rangle \, \delta\varphi(X \wedge Y)\}$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$	$\langle \nabla^g \varphi, *\varphi \rangle = 0$
$\mathcal{W}$	Bağıntı yok.

Tablo 2.3: Yapı grubu G_2 olan 7-boyutlu Riemann manifoldlarının sınıfları

3 TORSİYONU TAMAMEN ANTİ-SİMETRİK OLAN $\mathfrak{g}_2$-DEĞERLİ BAĞLANTI 1-FORMLARI

3.1 Torsiyonu Tamamen Anti-simetrik Olan $\mathfrak{g}$-Değerli Bağlantı 1-Formları

(M^n, g) n-boyutlu yönlendirilmiş bir Riemann manifoldu olsun. Bu manifoldun $(\mathcal{F}(M^n),\ M,\ GL(n,\mathbb{R}),\ \pi)$ çatı demetinin yapı grubu $SO(n)$ Lie grubudur. M manifoldunun tanjant demetindeki Levi-Civita kovaryant türevinden elde edilen, manifoldun çatı demeti üzerindeki bağlantı 1-formu

$$Z^g : T(\mathcal{F}(M^n)) \longrightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{n})$$

olsun, yani

$$\begin{aligned} Z^g : \mathcal{F}(M^n) \quad &\longrightarrow \quad Hom(T(\mathcal{F}(M^n)), \mathfrak{so}(\mathfrak{n})) \\ p \quad &\longmapsto \quad Z_p : T_p(\mathcal{F}(M^n)) \longrightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{n}) \\ & \qquad\qquad X_p \longmapsto Z_p^g(X_p) \end{aligned}$$

olsun. G grubu $SO(n)$ Lie grubunun kapalı bir alt grubu olsun. $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{so}(\mathfrak{n})$ sırasıyla G ve $SO(n)$ Lie gruplarının Lie cebirlerini belirtsin. Bu durumda $\mathfrak{so}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$ olacak şekilde $\mathfrak{so}(\mathfrak{n})$'in bir $\mathfrak{m}$ alt uzayı vardır. Ayrıca $ad_G(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$'dir:

Öncelikle $\forall A \in \mathfrak{g}$ ve $\forall g \in G$ için $ad_g(A) = gAg^{-1} \in \mathfrak{g}$'dir.

Bir $B \in \mathfrak{m}$ ve $h \in G$ için $hBh^{-1} = C \in \mathfrak{g}$ olsun. Bu durumda $ad_{h^{-1}}(C) = ad_{h^{-1}}(hBh^{-1}) = B \in \mathfrak{g}$ olur. $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = \{0\}$ olduğundan $B = 0$'dır. O halde $\forall g \in G$ için, ad_g dönüşümü $\mathfrak{g}$ uzayının elemanlarını $\mathfrak{g}$'ye, $\mathfrak{m}$'nin elemanlarını $\mathfrak{m}$'ye gönderir.

$(\mathcal{R},\ M,\ G,\ \pi_{\mathcal{R}})$ asli lif demeti, M manifoldunun çatı demetinin, yapı grubu

G olan bir alt demeti,

$$\begin{array}{ccc} G & \hookrightarrow & SO(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R} & \hookrightarrow & \mathcal{F}(M^n) \\ \searrow & & \swarrow \\ & M^n & \end{array}$$

yani M manifoldu G-yapısına sahip bir manifold olsun. Birinci bölümdeki önerme 1.3.32 gereğince $\mathcal{F}(M^n)$ üzerinde tanımlı her bağlantı 1-formunun $\mathcal{R}$ manifolduna kısıtlanmışının $\mathfrak{g}$ uzayına izdüşümü $\mathcal{R}$ üzerinde $\mathfrak{g}$-değerli bir bağlantı 1-formudur. O halde

$$Z^g|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \longrightarrow Hom(T(\mathcal{R}), \mathfrak{so}(\mathfrak{n}))$$

dönüşümü

$$Z^g|_{\mathcal{R}} = \widetilde{Z} + \Gamma$$

şeklinde iki dönüşümün toplamı olarak düşünülebilir. Burada

$$\widetilde{Z} : \mathcal{R} \longrightarrow Hom(T(\mathcal{R}), \mathfrak{g})$$

dönüşümü $\mathcal{R}$ üzerinde tanımlı $\mathfrak{g}$-değerli bir bağlantı 1-formu ve

$$\Gamma : \mathcal{R} \longrightarrow Hom(T(\mathcal{R}), \mathfrak{m})$$

dönüşümü ad-tipinde $\mathfrak{m}$-değerli bir tensör 1-formudur.

$$\begin{aligned} Z^g|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} &\longrightarrow Hom(T(\mathcal{R}), \mathfrak{so}(\mathfrak{n})) \\ p &\longmapsto Z^g|_{\mathcal{R},p} : T_p(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m} \\ &\qquad\qquad X_p \longmapsto Z^g|_{\mathcal{R},p}(X_p) \end{aligned}$$

olduğundan $\forall p \in \mathcal{R}$ ve $\forall X_p \in T_p(\mathcal{R})$ için, $Z^g|_{\mathcal{R},p}(X_p) = Z^g|^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{R},p}(X_p) + Z^g|^{\mathfrak{m}}_{\mathcal{R},p}(X_p)$ olacak şekilde $Z^g|^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{R},p}(X_p) \in \mathfrak{g}$ ve $Z^g|^{\mathfrak{m}}_{\mathcal{R},p}(X_p) \in \mathfrak{m}$ vardır. Böylece $\mathfrak{g}$-değerli $\widetilde{Z}$ bağlantı 1-formu

$$\begin{aligned} \widetilde{Z} := Z^g|^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} &\longrightarrow Hom(T(\mathcal{R}), \mathfrak{g}) \\ p &\longmapsto Z^g|^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{R},p} : T_p(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathfrak{g} \\ &\qquad\qquad X_p \longmapsto Z^g|^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{R},p}(X_p) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$Z : T(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathfrak{g}$ dönüşümü $\mathcal{R}$ üzerinde $\mathfrak{g}$-değerli herhangi bir bağlantı 1-formu olsun. Bu durumda, $Z = \widetilde{Z} + \Sigma$ olacak şekilde ad-tipinde $\mathfrak{g}$-değerli bir

$$\Sigma : T(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathfrak{g}$$

tensör 1-formu vardır.

$Z^g|_{\mathcal{R}} = \widetilde{Z} + \Gamma$ ve $Z = \widetilde{Z} + \Sigma$ olduğundan,

$$Z = Z^g|_{\mathcal{R}} - \Gamma + \Sigma$$

olur.

$\mathcal{F}(M^n)$ üzerinde tanımlı $\mathfrak{so}(\mathfrak{n})$-değerli Z^g bağlantı 1-formuna karşılık gelen TM üzerindeki kovaryant türev ∇^g olduğundan, $\mathcal{R}$ üzerinde tanımlı $\mathfrak{so}(\mathfrak{n})$-değerli $Z^g|_{\mathcal{R}}$ 1-formuna karşılık gelen kovaryant türev de ∇^g'dir.

$\mathcal{R}$ üzerinde tanımlı herhangi bir $\mathfrak{g}$-değerli Z bağlantı 1-formuna karşılık gelen TM üzerindeki kovaryant türev ∇ olsun. Bu durumda $Z = Z^g|_{\mathcal{R}} - \Gamma + \Sigma$ olduğundan, $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y - \widetilde{\Gamma}(X)(Y) + \widetilde{\Sigma}(X)(Y)$$

olacak şekilde $(2,1)$-tipinde $\widetilde{\Gamma}$ ve $\widetilde{\Sigma}$ tensör alanları vardır.

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ tanjant demetinin lokal kesitlerinin ortonormal bir kümesi ve

$$\begin{aligned} \varepsilon : M &\longrightarrow \mathcal{R} \\ x &\longmapsto \varepsilon(x) := (x, e_1, \ldots, e_n) \end{aligned}$$

dönüşümü M manifoldunun çatı demetinin G-alt demetinin lokal bir kesiti olsun. Bu durumda $\Gamma : T(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathfrak{m}$ ad-tipinde $\mathfrak{m}$-değerli bir tensör 1-formu ve $\mathrm{Pr}_{\mathfrak{m}}(\varepsilon^*(Z^g|_{\mathcal{R}}(X)))$ $n \times n$'lik bir matris olduğundan,

$$\widetilde{\Gamma}(X)(e_i) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} (\mathrm{Pr}_{\mathfrak{m}}(\varepsilon^*(Z^g|_{\mathcal{R}}(X))))_{ji} e_j$$

dir.

Ayrıca Z'ye karşılık gelen kovaryant türev

$$\nabla_X e_i = \sum_{j=1}^{n} (\varepsilon^* Z(X))_{ji} e_j,$$

$\widetilde{Z}$'ya karşılık gelen kovaryant türev

$$\widetilde{\nabla}_X e_i = \sum_{j=1}^{n} (\varepsilon^* \widetilde{Z}(X))_{ji} e_j$$

ve $\Sigma = Z - \widetilde{Z}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \widetilde{\Sigma}(X)(e_i) &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} (\varepsilon^* (Z - \widetilde{Z})(X))_{ji} e_j \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} (\varepsilon^* \Sigma(X))_{ji} e_j \end{aligned}$$

dir.

$\mathcal{R}$ üzerinde tanımlı $\mathfrak{g}$-değerli Z bağlantı 1-formu $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için

$$A(X,Y) = -\widetilde{\Gamma}(X)(Y) + \widetilde{\Sigma}(X)(Y)$$

ifadesini anti-simetrik yapacak şekilde alındığında, Z'ye karşılık gelen ∇ kovaryant türevinin torsiyonu

$$T(X,Y) = 2(-\widetilde{\Gamma}(X)(Y) + \widetilde{\Sigma}(X)(Y))$$

olur.

Çalışmanın bundan sonrasında $\mathcal{R}$ üzerindeki Z bağlantı 1-formu $T(X,Y) = 2(-\widetilde{\Gamma}(X)(Y) + \widetilde{\Sigma}(X)(Y))$ olacak şekilde seçilmiştir.

Birinci bölümde tanımlanan $\widetilde{T}$ torsiyonu $\widetilde{\Gamma}$ ve $\widetilde{\Sigma}$ cinsinden şöyle ifade edilebilir:

$X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}(X,Y,Z) &= g(T(X,Y),Z) \\
&= g(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], Z) \\
&= g((\nabla^g_X Y - \widetilde{\Gamma}(X)(Y) + \widetilde{\Sigma}(X)(Y)) \\
&\quad -((\nabla^g_Y X - \widetilde{\Gamma}(Y)(X) + \widetilde{\Sigma}(Y)(X)) - [X,Y], Z) \\
&= g((\nabla^g_X Y - \nabla^g_Y X - [X,Y]) - \widetilde{\Gamma}(X)(Y) \\
&\quad +\widetilde{\Sigma}(X)(Y) + \widetilde{\Gamma}(Y)(X) - \widetilde{\Sigma}(Y)(X), Z) \\
&= g(-\widetilde{\Gamma}(X)(Y) + \widetilde{\Sigma}(X)(Y) \\
&\quad +\widetilde{\Gamma}(Y)(X) - \widetilde{\Sigma}(Y)(X), Z) \\
&= -g(\widetilde{\Gamma}(X)(Y), Z) + g(\widetilde{\Sigma}(X)(Y), Z) \\
&\quad +g(\widetilde{\Gamma}(Y)(X), Z) - g(\widetilde{\Sigma}(Y)(X), Z).
\end{aligned}$$

Önerme 3.1.49 *$\widetilde{T}$'nın bir 3-form olması için, yani $\nabla = \nabla^g - \widetilde{\Gamma} + \widetilde{\Sigma}$ kovaryant türevinin metrik uyumlu olması için gerek ve yeter koşul $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ için*

$$g(\widetilde{\Gamma}(Y)(X), Z) + g(\widetilde{\Gamma}(Z)(X), Y) = g(\widetilde{\Sigma}(Z)(X), Y) + g(\widetilde{\Sigma}(Y)(X), Z)$$

olmasıdır.

Kanıt. Birinci bölümde $\widetilde{T}$'nin bir 3-form olması için gerek ve yeter şartın $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$g(T(X,Y),Z) + g(T(X,Z),Y) = 0$$

olduğu gösterilmişti. O halde, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned}
\widetilde{T} \text{ bir 3-formdur.} &\iff g(T(X,Y),Z) + g(T(X,Z),Y) = 0 \\
&\iff g(-T(Y,X),Z) + g(-T(Z,X),Y) = 0 \\
&\iff 2(g(-(-\widetilde{\Gamma}(Y)(X) + \widetilde{\Sigma}(Y)(X)), Z) - \\
&\qquad g(-\widetilde{\Gamma}(Z)(X) + \widetilde{\Sigma}(Z)(X), Y)) = 0 \\
&\iff g(\widetilde{\Gamma}(Y)(X), Z) - g(\widetilde{\Sigma}(Y)(X), Z) + \\
&\qquad g(\widetilde{\Gamma}(Z)(X), Y) - g(\widetilde{\Sigma}(Z)(X), Y) = 0 \\
&\iff g(\widetilde{\Gamma}(Y)(X), Z) + g(\widetilde{\Gamma}(Z)(X), Y) = \\
&\qquad g(\widetilde{\Sigma}(Z)(X), Y) + g(\widetilde{\Sigma}(Y)(X), Z).
\end{aligned}$$

■

$$\Phi : \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}^n \otimes S^2(\mathbb{R}^n)$$

ve

$$\Psi : \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{m} \longrightarrow \mathbb{R}^n \otimes S^2(\mathbb{R}^n)$$

dönüşümleri $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{g}$ ve $\widetilde{\Gamma} \in \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{m}$ için,

$$\Phi(\widetilde{\Sigma})(X, Y, Z) := g(\widetilde{\Sigma}(Z)(X), Y) + g(\widetilde{\Sigma}(Y)(X), Z)$$

ve

$$\Psi(\widetilde{\Gamma})(X, Y, Z) := g(\widetilde{\Gamma}(Y)(X), Z) + g(\widetilde{\Gamma}(Z)(X), Y)$$

olarak tanımlansın [20].

$\mathbb{R}^n \otimes S^2(\mathbb{R}^n) \cong Hom((\mathbb{R}^n)^*, S^2(\mathbb{R}^n))$ ve $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ izomorfizmlerinden faydalanılarak Φ dönüşümü şöyle düşünülebilir:

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \otimes S^2(\mathbb{R}^n) \\ \widetilde{\Sigma} & \longmapsto & \Phi(\widetilde{\Sigma}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^2(\mathbb{R}^n) \\ & & \qquad X \longmapsto \Phi(\widetilde{\Sigma})(X) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \qquad\qquad (Y, Z) \longmapsto \Phi(\widetilde{\Sigma})(X)(Y, Z), \end{array}$$

$$\Phi(\widetilde{\Sigma})(X)(Y, Z) = \Phi(\widetilde{\Sigma})(X, Y, Z) := g(\widetilde{\Sigma}(Z)(X), Y) + g(\widetilde{\Sigma}(Y)(X), Z).$$

Ψ dönüşümü de benzer şekilde anlamlandırılabilir.

Önerme 3.1.50 *Φ ve Ψ lineer dönüşümlerdir.*

Kanıt. $\widetilde{\Sigma}_1, \widetilde{\Sigma}_2 \in \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{g}$ olsun.

$$\begin{aligned} \Phi(\widetilde{\Sigma}_1 + \widetilde{\Sigma}_2)(X, Y, Z) &= g((\widetilde{\Sigma}_1 + \widetilde{\Sigma}_2)(Z)(X), Y) + g((\widetilde{\Sigma}_1 + \widetilde{\Sigma}_2)(Y)(X), Z) \\ &= g(\widetilde{\Sigma}_1(Z)(X) + \widetilde{\Sigma}_2(Z)(X), Y) + g(\widetilde{\Sigma}_1(Y)(X) \\ &\quad + \widetilde{\Sigma}_2(Y)(X), Z) \\ &= g(\widetilde{\Sigma}_1(Z)(X), Y) + g(\widetilde{\Sigma}_2(Z)(X), Y) \\ &\quad + g(\widetilde{\Sigma}_1(Y)(X), Z) + g(\widetilde{\Sigma}_2(Y)(X), Z) \\ &= g(\widetilde{\Sigma}_1(Z)(X), Y) + g(\widetilde{\Sigma}_1(Y)(X), Z) \\ &\quad + g(\widetilde{\Sigma}_2(Z)(X), Y) + g(\widetilde{\Sigma}_2(Y)(X), Z) \\ &= \Phi(\widetilde{\Sigma}_1)(X, Y, Z) + \Phi(\widetilde{\Sigma}_2)(X, Y, Z) \end{aligned}$$

O halde, $\Phi(\widetilde{\Sigma}_1 + \widetilde{\Sigma}_2) = \Phi(\widetilde{\Sigma}_1) + \Phi(\widetilde{\Sigma}_2)$'dir.

$c \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{g}$ olsun.

$$\begin{aligned}
\Phi(c\widetilde{\Sigma})(X,Y,Z) &= g((c\widetilde{\Sigma})(Z)(X),Y) + g((c\widetilde{\Sigma})(Y)(X),Z) \\
&= g(c(\widetilde{\Sigma}(Z)(X)),Y) + g(c(\widetilde{\Sigma}(Y)(X)),Z) \\
&= c(g(\widetilde{\Sigma}(Z)(X),Y) + g(\widetilde{\Sigma}(Y)(X),Z)) \\
&= c\Phi(\widetilde{\Sigma})(X,Y,Z)
\end{aligned}$$

O halde, $\Phi(c\widetilde{\Sigma}) = c\Phi(\widetilde{\Sigma})$'dır.

O halde, Φ lineerdir.

Ψ dönüşümünün lineerliği de benzer şekilde gösterilir. ■

G grubu V ve W vektör uzaylarına etki etsin. Bu durumda G grubu $Hom(V,W)$ vektör uzayına aşağıdaki gibi etki eder [21]: $h \in G$ ve $f \in Hom(V,W)$ için,

$$\begin{aligned}
G \times Hom(V,W) &\longrightarrow Hom(V,W) \\
(h,f) &\longmapsto (hf) : V \longrightarrow W \\
& \qquad\qquad v \longmapsto (hf)(v) := f(h^{-1}(v))
\end{aligned}$$

Önerme 3.1.51 *Φ ve Ψ dönüşümleri G-equivarianttır.*

Kanıt. Kanıtta G grubunun $Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ ve $Hom(\mathbb{R}^n,S^2(\mathbb{R}^n))$ uzayları üzerindeki etkileri kullanılmıştır:

$$\begin{aligned}
G \times Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) &\longrightarrow Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) \\
(h,\widetilde{\Sigma}(X)) &\longmapsto (h\widetilde{\Sigma}(X)) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\
& \qquad\qquad Y \longmapsto (h\widetilde{\Sigma}(X))(Y) := \widetilde{\Sigma}(X)(h^{-1}(Y))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
G \times Hom(\mathbb{R}^n,S^2(\mathbb{R}^n)) &\longrightarrow Hom(\mathbb{R}^n,S^2(\mathbb{R}^n)) \\
(h,\Phi(\widetilde{\Sigma})) &\longmapsto (h\Phi(\widetilde{\Sigma})) : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^2(\mathbb{R}^n) \qquad . \\
& \qquad\qquad X \longmapsto (h\Phi(\widetilde{\Sigma}))(X) := (\Phi(\widetilde{\Sigma}))(h^{-1}X)
\end{aligned}$$

$h \in G$, $\widetilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{g}$ ve $X,Y,Z \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\begin{aligned}
\Phi(h\widetilde{\Sigma})(X,Y,Z) &= g((h\widetilde{\Sigma}(Z))(X),Y) + g((h\widetilde{\Sigma}(Y))(X),Z) \\
&= g(\widetilde{\Sigma}(Z)(h^{-1}X),Y) + g(\widetilde{\Sigma}(Y)(h^{-1}X),Z)
\end{aligned}$$

Öte yandan,

$$\begin{aligned}(h\Phi(\widetilde{\Sigma}))(X)(Y,Z) &= ((\Phi(\widetilde{\Sigma}))(h^{-1}X))(Y,Z)\\ &= \Phi(\widetilde{\Sigma})(h^{-1}X,Y,Z)\\ &= g(\widetilde{\Sigma}(Z)(h^{-1}X),Y)+g(\widetilde{\Sigma}(Y)(h^{-1}X),Z)\end{aligned}$$

$\forall X,Y,Z\in\mathbb{R}^n$ için, $\Phi(h\widetilde{\Sigma})(X,Y,Z)=(h\Phi(\widetilde{\Sigma}))(X)(Y,Z)$ olduğundan, $\Phi(h\widetilde{\Sigma})=h\Phi(\widetilde{\Sigma})$'dir, yani Φ dönüşümü G-equivarianttır.

Ψ dönüşümünün G-equivariantlığı da benzer şekilde görülür. ■

Önerme 3.1.52 *(M^n,g) n-boyutlu yönlendirilmiş bir Riemann manifoldu ve $(\mathcal{R},\ M,\ G,\ \pi_{\mathcal{R}})$ M manifoldunun $(\mathcal{F}(M^n),\ M,\ SO(n),\ \pi)$ çatı demetinin bir G-alt demeti olsun. Bu durumda $\mathcal{R}$ üzerinde tanımlı, $\widetilde{T}$ torsiyonu tamamen anti-simetrik olan $\mathfrak{g}$-değerli bir bağlantı 1-formunun var olması için gerek ve yeter koşul $\Gamma=Z^g|_{\mathcal{R}}-\widetilde{Z}$ için, $\Psi(\widetilde{\Gamma})\in Gör\Phi$ olmasıdır.*

Kanıt. Z, $\mathcal{R}$ üzerinde tanımlı, $\widetilde{T}$ torsiyonu tamamen anti-simetrik olan $\mathfrak{g}$-değerli bir bağlantı 1-formu olsun. Bu durumda $Z=Z^g|_{\mathcal{R}}-\Gamma+\Sigma$ olacak şekilde ad-tipinde $\mathfrak{g}$-değerli bir Σ tensör 1-formu vardır. Z'nin $\widetilde{T}$ torsiyonu bir 3-form olduğundan, önerme 3.1.49 gereğince $\forall X,Y,Z\in\mathbb{R}^n$ için, $g(\widetilde{\Gamma}(Y)(X),Z)+g(\widetilde{\Gamma}(Z)(X),Y)=g(\widetilde{\Sigma}(Z)(X),Y)+g(\widetilde{\Sigma}(Y)(X),Z)$ olduğundan, Φ ve Ψ dönüşümlerinin tanımlarından, $\forall X,Y,Z\in\mathbb{R}^n$ için, $\Psi(\widetilde{\Gamma})(X,Y,Z)=\Phi(\widetilde{\Sigma})(X,Y,Z)$ elde edilir. O halde, $\Psi(\widetilde{\Gamma})=\Phi(\widetilde{\Sigma})$ yani $\Psi(\widetilde{\Gamma})\in$ GörΦ olur.

Tersine, $\Gamma=Z^g|_{\mathcal{R}}-\widetilde{Z}$ için, $\Psi(\widetilde{\Gamma})\in$ GörΦ olsun. Bu durumda, $\Phi(\widetilde{\Omega})=\Psi(\widetilde{\Gamma})$ olacak şekilde bir $\widetilde{\Omega}\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathfrak{g})$ vardır. Φ ve Ψ'nin tanımlarından, $\forall X,Y,Z\in\mathbb{R}^n$ için,

$$\Phi(\widetilde{\Omega})(X,Y,Z)=\Psi(\widetilde{\Gamma})(X,Y,Z),$$

$$g(\widetilde{\Omega}(Y)(X),Z)+g(\widetilde{\Omega}(Z)(X),Y)=g(\widetilde{\Gamma}(Z)(X),Y)+g(\widetilde{\Gamma}(Y)(X),Z)$$

olur. Bu durumda önerme 3.1.49 gereğince,

$$\begin{aligned}\widetilde{T}(X,Y,Z) &= -g(\widetilde{\Gamma}(X)(Y),Z)+g(\widetilde{\Gamma}(Y)(X),Z)\\ &\quad +g(\widetilde{\Omega}(X)(Y),Z)-g(\widetilde{\Omega}(Y)(X),Z)\end{aligned}$$

bir 3-formdur. O halde $\mathcal{R}$ üzerinde $Z = Z^g|_{\mathcal{R}} - \Gamma + \Omega$ biçiminde tanımlanan $\mathfrak{g}$-değerli Z bağlantı 1-formunun $\widetilde{T}$ torsiyonu bir 3-formdur. ■

Tanım 3.1.53 *[22] V bir vektör uzayı ve $A \neq \emptyset$ bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $f : A \times A \longrightarrow V$ dönüşümü varsa, A kümesine V vektör uzayı üzerinde bir afin uzay denir.*

1) $\forall P, Q \in A$ için, $f(P,Q) = v$ olacak şekilde en az bir $v \in V$ vardır.

2) $\forall P \in A$ ve $\forall x \in V$ için, $f(P,Q) = x$ olacak şekilde tek türlü belirli bir $Q \in A$ vardır.

3) $\forall P, Q, R \in A$ için, $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$'dir.

Önerme 3.1.54 *(M^n, g) n-boyutlu yönlendirilmiş bir Riemann manifoldu ve $(\mathcal{R},\ M,\ G,\ \pi_{\mathcal{R}})$ asli lif demeti M manifoldunun $(\mathcal{F}(M^n),\ M,\ SO(n),\ \pi)$ çatı demetinin bir alt demeti olsun. Eğer $\mathcal{R}$ üzerinde tanımlı, $\widetilde{T}$ torsiyonu 3-form olan $\mathfrak{g}$-değerli bir Z bağlantı 1-formu varsa, bu durumda $\mathcal{R}$ üzerinde tanımlı, torsiyonları 3-form olan $\mathfrak{g}$-değerli bütün bağlantı 1-formlarının kümesi ÇekΦ uzayı üzerinde bir afin uzaydır.*

Kanıt.

$$A := \{Z : T(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathfrak{g} \mid Z, \text{ torsiyonu 3-form olan bir bağlantı 1-formudur.}\}$$

$$= \{Z : T(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathfrak{g} \mid \exists \widetilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{g} \text{ için, } Z = Z^g|_{\mathcal{R}} - \Gamma + \Sigma \ \textit{ve}\ \Psi(\widetilde{\Gamma}) = \Phi(\widetilde{\Sigma})\}$$

ve

$$\begin{aligned} f: \quad & A \times A \longrightarrow \text{Ç}ek\Phi \\ & (Z_1, Z_2) \longmapsto f(Z_1, Z_2) := Z_1 - Z_2 \end{aligned}$$

olarak tanımlansın.

1) $Z_1, Z_2 \in A$ olsun. Bu durumda $\Psi(\widetilde{\Gamma}) = \Phi(\widetilde{\Sigma}_1)$, $\Psi(\widetilde{\Gamma}) = \Phi(\widetilde{\Sigma}_2)$, $Z_1 = Z^g|_{\mathcal{R}} - \Gamma + \Sigma_1$ ve $Z_2 = Z^g|_{\mathcal{R}} - \Gamma + \Sigma_2$ koşullarını sağlayan ad-tipinde Σ_1,

Σ_2 tensör 1-formları vardır.

$v := \Sigma_1 - \Sigma_2$ olarak tanımlansın. $\widetilde{v} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathfrak{g}$ olduğu açıktır. Ayrıca, $\Psi(\widetilde{\Gamma}) = \Phi(\widetilde{\Sigma}_1) = \Phi(\widetilde{\Sigma}_2)$ ve Φ lineer olduğundan, $0 = \Phi(\widetilde{\Sigma}_1) - \Phi(\widetilde{\Sigma}_2) = \Phi(\widetilde{\Sigma}_1 - \widetilde{\Sigma}_2)$'dir. O halde, $\widetilde{v} = \widetilde{\Sigma}_1 - \widetilde{\Sigma}_2 \in$ ÇekΦ'dir. Yani, $\forall Z_1, Z_2 \in A$ için, $f(Z_1, Z_2) = \widetilde{v}$ olacak şekilde en az bir $\widetilde{v} \in$ÇekΦ vardır.

2) $Z_1 \in A$ ve $\widetilde{\Omega} \in$ÇekΦ olsun. $Z_2 := Z_1 - \Omega$ olarak tanımlansın.
$Z_1 \in A$ olduğundan, $Z_1 = Z^g|_{\mathcal{R}} - \Gamma + \Sigma_1$ ve $\Psi(\widetilde{\Gamma}) = \Phi(\widetilde{\Sigma}_1)$ olacak şekilde bir Σ_1 *ad*-tipinde tensör 1-formu vardır. Bu durumda, $Z_2 := Z_1 - \Omega = Z^g|_{\mathcal{R}} - \Gamma + \Sigma_1 - \Omega$ olur. Z_2 bir bağlantı 1-formudur. Ayrıca $\Phi(\widetilde{\Sigma}_1 - \widetilde{\Omega}) = \Phi(\widetilde{\Sigma}_1) - \Phi(\widetilde{\Omega}) = \Phi(\widetilde{\Sigma}_1) - 0 = \Phi(\widetilde{\Sigma}_1) = \Psi(\widetilde{\Gamma})$ olduğundan, Z_2 bağlantı 1-formunun torsiyonu 3-formdur.
$\forall \widetilde{\Omega} \in$Çek$\Phi$ için, Z_2 tek türlü bellidir.

3) Z_1, Z_2, $Z_3 \in A$ olsun. $f(Z_1, Z_2) + f(Z_2, Z_3) = (Z_1 - Z_2) + (Z_2 - Z_3) = Z_1 - Z_3 = f(Z_1, Z_3)$'tür.

Sonuç olarak, A kümesi, ÇekΦ üzerinde bir afin uzaydır. $\blacksquare$

3.2 Torsiyonu Tamamen Anti-simetrik Olan $\mathfrak{g}_2$-Değerli Bağlantı 1-Formları

Bu bölümde bir önceki bölümde tanımlanan Φ ve Ψ dönüşümleri G_2 Lie grubu için incelenecektir. G_2 grubu $SO(7)$'nin bir alt grubu olduğundan $\mathfrak{g}_2$ da $\mathfrak{so}(7)$'nin bir Lie alt cebridir. Bu durumda $\mathfrak{so}(7) = \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{m}$ olacak şekilde bir $\mathfrak{m}$ alt uzayı vardır.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^7 \otimes \mathfrak{g}_2 \arrow[r, "\Phi"] & \mathbb{R}^7 \otimes S^2(\mathbb{R}^7) \\ \mathbb{R}^7 \otimes \mathfrak{m} \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

Bu bölümün amacı G_2 grubunun $\mathbb{R}^7 \otimes \mathfrak{m}$ uzayındaki temsillerini indirgenemez bileşenlere ayırarak her bir bileşen için, bileşenin Ψ altındaki görüntüsünün GörΦ'de olup olmadığını araştırarak torsiyonu 3-form olan ve $\nabla\varphi = 0$ koşulunu sağlayan kovaryant türevlerin varlığını incelemektir.

$\{e_1, \ldots, e_7\}$ $\mathbb{R}^7$ için bir taban olmak üzere,

$$\mathfrak{so}(7) \cong \Lambda^2(\mathbb{R}^7)^* = \{\sum_{i<j} \omega_{ij}.e_i^* \wedge e_j^*\}$$

izomorfizmi göz önüne alınırsa, $\mathfrak{g}_2$ Lie cebri aşağıdaki eşitlikleri sağlayan $\sum_{i<j} \omega_{ij}.e_i^* \wedge e_j^*$ 2-formlarının uzayı olarak düşünülebilir:

$$\omega_{12} + \omega_{34} + \omega_{56} = 0, -\omega_{13} + \omega_{24} + \omega_{67} = 0, \omega_{14} + \omega_{23} + \omega_{57} = 0,$$

$$\omega_{16} + \omega_{25} - \omega_{37} = 0, \omega_{15} - \omega_{26} - \omega_{47} = 0, \omega_{17} + \omega_{36} + \omega_{45} = 0,$$

$$\omega_{27} + \omega_{35} + \omega_{46} = 0.$$

Ayrıca $\mathfrak{m}$ uzayı $\{e_1 \lrcorner \varphi, \ldots, e_7 \lrcorner \varphi\}$ iki formlarının gerdiği alt uzay olarak alınabilir [20].

Önerme 3.2.55 $\Phi : \mathbb{R}^7 \otimes \mathfrak{g}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^7 \otimes S^2(\mathbb{R}^7)$ *dönüşümü bire-birdir.*

Kanıt. $\widetilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^7 \otimes \mathfrak{g}_2$ olsun. $\forall\, Y \in \mathbb{R}^7$ için, $\widetilde{\Sigma}(Y) \in \mathfrak{g}_2 \subset \Lambda^2(\mathbb{R}^7)^*$ 2-formu, $\forall X, Z \in \mathbb{R}^7$ için, $\widetilde{\Sigma}(Y)(Z, X) = (Z \lrcorner \widetilde{\Sigma}(Y))(X) := g(\widetilde{\Sigma}(Y)(X), Z)$ olarak tanımlansın.

$\Phi(\Sigma) = 0$ olması koşulu, $\forall Y, Z \in \mathbb{R}^7$ için, $Z \lrcorner \widetilde{\Sigma}(Y) + Y \lrcorner \widetilde{\Sigma}(Z) = 0$ olması koşuluna denktir:

$\forall Y, Z \in \mathbb{R}^7$ için, $Z \lrcorner \widetilde{\Sigma}(Y) + Y \lrcorner \widetilde{\Sigma}(Z) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall X \in \mathbb{R}^7$ için, $(Z \lrcorner \widetilde{\Sigma}(Y) + Y \lrcorner \widetilde{\Sigma}(Z))(X) = 0$ olmasıdır. Buradan
$(Z \lrcorner \widetilde{\Sigma}(Y))(X) + (Y \lrcorner \widetilde{\Sigma}(Z))(X) = 0$,
$\widetilde{\Sigma}(Y)(Z, X) + \widetilde{\Sigma}(Z)(Y, X) = 0$,
$g(\widetilde{\Sigma}(Y)(X), Z) + g(\widetilde{\Sigma}(Z)(X), Y) = 0$,
$\Phi(\Sigma)(X, Y, Z) = 0$, yani $\Phi(\Sigma) = 0$ olur.

Şimdi, $\phi(\Sigma) = 0$ olsun. Bu durumda $\forall Y, Z \in \mathbb{R}^7$ için,

$$Z \lrcorner \widetilde{\Sigma}(Y) + Y \lrcorner \widetilde{\Sigma}(Z) = 0\text{'dır.}$$

$\{e_1, \ldots, e_7\}$, $\mathbb{R}^7$ için ortonormal bir taban olsun. $\widetilde{\Sigma}(e_i) \in \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{so}(7)$ olduğundan, $\widetilde{\Sigma}(e_i) = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 7} \omega_{i\alpha\beta} e^*_\alpha \wedge e^*_\beta$ olacak şekilde $\omega_{i\alpha\beta}$ reel sayıları vardır. $Z \lrcorner \widetilde{\Sigma}(Y) + Y \lrcorner \widetilde{\Sigma}(Z) = 0$ eşitliği özel olarak $i < m$ için, $Z = e_i$, $Y = e_m$ alındığında da sağlanır. Yani $e_i \lrcorner \widetilde{\Sigma}(e_m) + e_m \lrcorner \widetilde{\Sigma}(e_i) = 0$ olmalıdır. Bu da

$$e_i \lrcorner \Big(\sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 7} \omega_{m\alpha\beta} e^*_\alpha \wedge e^*_\beta \Big) + e_m \lrcorner \Big(\sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 7} \omega_{i\alpha\beta} e^*_\alpha \wedge e^*_\beta \Big) = 0$$

demektir. Yukarıdaki 1-forma $i < m < k$ olacak şekilde bir e_k vektörü girildiğinde,
$(e_i \lrcorner (\sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 7} \omega_{m\alpha\beta} e^*_\alpha \wedge e^*_\beta))(e_k) + (e_m \lrcorner (\sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 7} \omega_{i\alpha\beta} e^*_\alpha \wedge e^*_\beta))(e_k) = 0$,
$\sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 7} \omega_{m\alpha\beta} e^*_\alpha \wedge e^*_\beta)(e_i, e_k) + \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 7} \omega_{i\alpha\beta} e^*_\alpha \wedge e^*_\beta(e_m, e_k) = 0$,
$\sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 7} \omega_{m\alpha\beta} (e^*_\alpha(e_i) e^*_\beta(e_k) - e^*_\alpha(e_k) e^*_\beta(e_i)) +$
$+ \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 7} \omega_{i\alpha\beta} (e^*_\alpha(e_m) e^*_\beta(e_k) - e^*_\alpha(e_k) e^*_\beta(e_m)) = 0$ eşitliğinden $\omega_{mik} + \omega_{imk} = 0$ yani $\omega_{mik} = -\omega_{imk}$ elde edilir.

$\forall i = 1, \ldots, 7$ için, $\widetilde{\Sigma}(e_i) \in \mathfrak{g}_2$ ve $\omega_{mik} = -\omega_{imk}$ eşitliklerinden faydalanılarak aşağıdaki 35 bilinmeyenli 49 denklemden oluşan homojen denklem sistemi bulunur:

$\omega_{134}+\omega_{156}=0,\quad \omega_{124}-\omega_{167}=0,\quad \omega_{123}+\omega_{157}=0,\quad \omega_{125}-\omega_{137}=0,$

$\omega_{126}+\omega_{147}=0,\quad \omega_{136}+\omega_{145}=0,\quad \omega_{135}-\omega_{146}=0,\quad \omega_{234}+\omega_{256}=0,$

$\omega_{123}-\omega_{267}=0,\quad \omega_{257}-\omega_{124}=0,\quad \omega_{126}+\omega_{237}=0,\quad \omega_{125}+\omega_{247}=0,$

$\omega_{235}-\omega_{246}=0,\quad \omega_{123}+\omega_{356}=0,\quad \omega_{234}+\omega_{367}=0,\quad \omega_{357}-\omega_{134}=0,$

$\omega_{136}+\omega_{235}=0,\quad \omega_{345}-\omega_{137}=0,\quad \omega_{237}+\omega_{346}=0,\quad \omega_{124}+\omega_{456}=0,$

$\omega_{134}+\omega_{467}=0,\quad \omega_{234}+\omega_{457}=0,\quad \omega_{246}-\omega_{145}=0,\quad \omega_{147}+\omega_{346}=0,$

$\omega_{247}+\omega_{345}=0,\quad \omega_{125}+\omega_{345}=0,\quad \omega_{145}+\omega_{235}=0,\quad \omega_{236}+\omega_{245}-\omega_{127}=0,$

$\omega_{357}-\omega_{156}=0,\quad \omega_{256}+\omega_{457}=0,\quad \omega_{157}+\omega_{356}=0,\quad \omega_{236}-\omega_{347}-\omega_{135}=0,$

$\omega_{456}-\omega_{257}=0,\quad \omega_{126}+\omega_{346}=0,\quad \omega_{246}-\omega_{136}=0,\quad \omega_{347}-\omega_{146}-\omega_{245}=0,$

$\omega_{256}+\omega_{367}=0,\quad \omega_{156}+\omega_{467}=0,\quad \omega_{456}-\omega_{167}=0,\quad \omega_{245}-\omega_{135}-\omega_{567}=0,$

$\omega_{356}-\omega_{267}=0,\quad \omega_{247}-\omega_{137}=0,\quad \omega_{147}+\omega_{237}=0,\quad \omega_{146}+\omega_{236}-\omega_{567}=0,$

$\omega_{167}+\omega_{257}=0,\quad \omega_{157}-\omega_{267}=0,\quad \omega_{367}+\omega_{457}=0,\quad \omega_{127}+\omega_{347}+\omega_{567}=0,$

$\omega_{357}-\omega_{467}=0.$

Yukarıdaki denklem sisteminin tek çözümü $\omega_{ijk}=0$'dır. O halde, $\widetilde{\Sigma}(e_i)=0$ ya da $\widetilde{\Sigma}=0$'dır. $\widetilde{\Sigma}\in$ÇekΦ olduğundan, Φ bire-birdir. ■

Önerme 3.2.56 *(M^7,g,φ), yapı grubu G_2 olan 7-boyutlu yönlendirilmiş bir Riemann manifoldu ve $(\mathcal{R},\ M,\ G_2,\ \pi_{\mathcal{R}})$ asli lif demeti M manifoldunun $(\mathcal{F}(M^7),\ M,\ SO(7),\ \pi)$ çatı demetinin bir G_2-alt demeti olsun. ∇, TM üzerinde tanımlı metrik uyumlu bir kovaryant türev ve Z de bu kovaryant türeve karşılık gelen $\mathcal{F}(M^7)$ üzerindeki bağlantı 1-formu olsun. Bu durumda $Z|_{\mathcal{R}}$'nin $\mathfrak{g}_2$'de değer alması için gerek ve yeter koşul $\nabla\varphi=0$ olmasıdır.*

Kanıt. Kanıt için öncelikle $\mathfrak{g}_2$ Lie cebrinin bir ifadesi elde edilecektir:
$\alpha:[0,1]\longrightarrow G_2$, G_2'de değer alan C^∞ bir eğri ve $\alpha(0)=I_{7\times7}$ olsun. Bu durumda $\alpha'(0)\in\mathfrak{g}_2$'dir. $\forall t\in[0,1]$ için, $\alpha(t)\in G_2\cong\{A\in GL(7,\mathbb{R})|\forall x,y\in\mathbb{R}^7$ için $P(Ax,Ay)=AP(x,y)\}$ olduğundan, $\forall x,y\in\mathbb{R}^7$ için,

$$P(\alpha(t)x,\alpha(t)y)=\alpha(t)P(x,y) \tag{3.2.8}$$

koşulu sağlanır.

$\{e_1, \ldots, e_7\}$ $\mathbb{R}^7$ için standart taban ve

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \ldots & \alpha_{17}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \ldots & \alpha_{27}(t) \\ \vdots & & & \\ \alpha_{71}(t) & \alpha_{72}(t) & \ldots & \alpha_{77}(t) \end{pmatrix}$$

olsun. (3.2.9) eşitliğinde x, y yerine taban elemanları alınırsa

$$\begin{aligned} P(\alpha(t)e_i, \alpha(t)e_j) &= \alpha(t)P(e_i, e_j), \\ \textstyle\sum_{n,m=1}^{7} P(\alpha(t)_{ni}e_n, \alpha(t)_{mj}e_m) &= \textstyle\sum_{l=1}^{7} \alpha(t)(P_{ij}^{l}e_l), \\ \textstyle\sum_{n,m=1}^{7} \alpha(t)_{ni}\alpha(t)_{mj}P(e_n, e_m) &= \textstyle\sum_{l,r=1}^{7} P_{ij}^{l}\alpha(t)_{rl}e_r, \\ \textstyle\sum_{n,m,r=1}^{7} \alpha(t)_{ni}\alpha(t)_{mj}P_{nm}^{r}e_r &= \textstyle\sum_{l,r=1}^{7} P_{ij}^{l}\alpha(t)_{rl}e_r \end{aligned}$$

olur. Katsayıların eşitliğinden $\forall r = 1, \ldots, 7$ için,

$$\sum_{n,m=1}^{7} \alpha(t)_{ni}\alpha(t)_{mj}P_{nm}^{r} = \sum_{l=1}^{7} P_{ij}^{l}\alpha(t)_{rl}$$

bulunur. Bu eşitlikte $t = 0$'da türev alınırsa

$$\sum_{n,m=1}^{7} (\alpha^{'}(0)_{ni}\alpha(0)_{mj}P_{nm}^{r} + \alpha(0)_{ni}\alpha^{'}(0)_{mj}P_{nm}^{r}) = \sum_{l=1}^{7} P_{ij}^{l}\alpha^{'}(0)_{rl}$$

elde edilir. $\alpha(0) = I_{7\times 7}$ olduğundan, $\alpha(0)_{ab} = \delta_{ab}$'dir. Buradan,

$$\sum_{n=1}^{7} \alpha^{'}(0)_{ni}P_{nj}^{r} + \sum_{m=1}^{7} \alpha^{'}(0)_{mj}P_{im}^{r} = \sum_{l=1}^{7} P_{ij}^{l}\alpha^{'}(0)_{rl}$$

olur. Bu eşitlik ise

$$a := \alpha^{'}(0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \ldots & a_{17} \\ a_{21} & {}_{22} & \ldots & a_{27} \\ \vdots & & & \\ a_{71} & a_{72} & \ldots & a_{77} \end{pmatrix}$$

matrisinin

$$P(ae_i, e_j) + P(e_i, ae_j) = aP(e_i, e_j)$$

eşitliğini sağlamasıyla eşdeğerdir. Böylece

$$\mathfrak{g}_2 = \{a \in M_{7\times 7} | P(ae_i, e_j) + P(e_i, ae_j) = aP(e_i, e_j)\}$$

olur.

M manifoldu G_2 yapısına sahip olduğundan, herhangi bir $U \subset M^7$ açığı üzerinde manifoldun öyle bir $\{e_1, \ldots, e_7\}$ lokal çatısı vardır ki, $\forall m \in U$ için, $P(e_i(m), e_j(m)) = \sum_{s=1}^{7} P_{ij}^s(m) e_s(m)$ eşitliğinde $P_{ij}^s(m) = P_{ij}^s$ olur.

∇, TM üzerinde tanımlı metrik uyumlu bir kovaryant türev ve Z de bu kovaryant türeve karşılık gelen $\mathcal{F}(M^7)$ üzerindeki bağlantı 1-formu olsun.

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon : M & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ m & \longmapsto & (m, e_1, \ldots, e_7) \end{array}$$

$\mathcal{R}$'nin lokal bir kesiti olsun. Bu durumda önerme (1.3.32) gereğince

$$\nabla_{e_k} e_i = \sum_{r=1}^{7} (\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}(e_k))_{ri} e_r$$

'dir.

$$\begin{array}{rcl} (\nabla_{e_k} P)(e_i, e_j) & = & \nabla_{e_k} P(e_i, e_j) - P(\nabla_{e_k} e_i, e_j) - P(e_i \nabla_{e_k} e_j) \\ & = & \nabla_{e_k}(\sum_{l=1}^{7} P_{ij}^l e_l) - P(\sum_{r=1}^{7} (\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}(e_k))_{ri} e_r, e_j) \\ & & -P(e_i, \sum_{r=1}^{7} (\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}(e_k))_{rj} e_r) \\ & = & \sum_{l=1}^{7} P_{ij}^l \nabla_{e_k} e_l - \sum_{r=1}^{7} (\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}(e_k))_{ri} P(e_r, e_j) \\ & & - \sum_{r=1}^{7} (\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}(e_k))_{rj} P(e_i, e_r) \\ & = & \sum_{l=1}^{7} P_{ij}^l (\sum_{r=1}^{7} (\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}(e_k))_{rl} e_r) \\ & & - \sum_{r=1}^{7} (\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}(e_k))_{ri} (\sum_{s=1}^{7} P_{rj}^s e_s) \\ & & - \sum_{r=1}^{7} (\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}(e_k))_{rj} (\sum_{s=1}^{7} P_{ir}^s e_s) \\ & = & \sum_{l,r=1}^{7} P_{ij}^l (\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}(e_k))_{rl} e_r - \sum_{r,s=1}^{7} (\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}(e_k))_{ri} P_{rj}^s e_s \\ & & - \sum_{r,s=1}^{7} (\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}(e_k))_{rj} P_{ir}^s e_s \\ & = & \sum_{s=1}^{7} \{\sum_{l=1}^{7} P_{ij}^l (\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}(e_k))_{sl} - \sum_{r=1}^{7} (\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}(e_k))_{ri} P_{rj}^s \\ & & - \sum_{r=1}^{7} (\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}(e_k))_{rj} P_{ir}^s \} e_s \end{array}$$

olduğundan, $\forall i, j, k = 1, \ldots, 7$ için, $(\nabla_{e_k} P)(e_i, e_j) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall s = 1, \ldots, 7$ için,

$$\sum_{l=1}^{7} P_{ij}^{l}(\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}(e_k))_{sl} - \sum_{r=1}^{7}(\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}(e_k))_{ri} P_{rj}^{s} - \sum_{r=1}^{7}(\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}(e_k))_{rj} P_{ir}^{s} = 0$$

olmasıdır. Bu ise $(\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}(e_k))$ matrisinin $\mathfrak{g}_2$'de olması demektir. O halde $\nabla P = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\varepsilon^* Z|_{\mathcal{R}}$ 1-formunun $\mathfrak{g}_2$-değerli olması, yani $Z|_{\mathcal{R}}$ bağlantı 1-formunun $\mathfrak{g}_2$-değerli olmasıdır. $\forall\, W, X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ için

$$\nabla_W \varphi(X, Y, Z) = \langle \nabla_W P(X, Y), Z \rangle$$

olduğundan, $\nabla \varphi = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\nabla P = 0$ olmasıdır. ■

Sonuç 3.2.57 *(M^7, g, φ), yapı grubu G_2 olan 7-boyutlu yönlendirilmiş bir Riemann manifoldu ve $(\mathcal{F}(M^7),\ M,\ SO(7),\ \pi)$ M manifoldunun çatı demeti olsun. Bu durumda $\nabla \varphi = 0$ koşulunu sağlayan ve $\widetilde{T}$ torsiyonu 3-form olan en fazla bir tek ∇ kovaryant türevi vardır.*

Kanıt. M manifoldunun yapı grubu G_2 olduğundan, manifoldun çatı demetinin $(\mathcal{R},\ M,\ G_2,\ \pi_{\mathcal{R}})$ gibi bir alt demeti vardır.

∇_1 ve ∇_2, TM üzerinde tanımlı $\nabla_1 \varphi = \nabla_2 \varphi = 0$ koşulunu sağlayan ve torsiyonları 3-form olan kovaryant türevler; Z_1 ve Z_2 sırasıyla ∇_1 ve ∇_2'ye karşılık gelen $\mathcal{F}(M^7)$ üzerinde tanımlı bağlantı 1-formları olsunlar. $\nabla_1 \varphi = \nabla_2 \varphi = 0$ olduğundan, bir önceki önerme gereğince Z_1 ve Z_2'nin $\mathcal{R}$'ye kısıtlanmışları $\mathcal{R}$ üzerinde $\mathfrak{g}_2$-değerli bağlantı 1-formlarıdırlar. Bu durumda $Z_1|_{\mathcal{R}} = Z^g|_{\mathcal{R}} - \Gamma + \Sigma_1$ ve $Z_2|_{\mathcal{R}} = Z^g|_{\mathcal{R}} - \Gamma + \Sigma_2$ olacak şekilde ad-tipinde Σ_1, Σ_2 tensör 1-formları vardır.

Torsiyonları 3-form olan $\mathcal{R}$ üzerinde tanımlı, $\mathfrak{g}_2$-değerli bütün bağlantı 1-formlarının kümesi ÇekΦ üzerinde bir afin uzay olduğundan, $\widetilde{\Sigma}_1 - \widetilde{\Sigma}_2 \in$ ÇekΦ'dir. Φ dönüşümü 1-1 olduğundan, Çek$\Phi = \{0\}$'dır. Buradan, $Z_1|_{\mathcal{R}} - Z_2|_{\mathcal{R}} = 0$, yani $Z_1|_{\mathcal{R}} = Z_2|_{\mathcal{R}}$ bulunur. O halde $\nabla_1 = \nabla_2$ olmalıdır, yani $\nabla \varphi = 0$ koşulunu sağlayan en fazla bir tek ∇ kovaryant türevi vardır. ■

Aşağıdaki tabloda G_2 Lie grubunun düşük boyutlu temsilleri verilmiştir [20].

temsil boyutu	temsil uzayı
1	$\Lambda^0_1 := \Lambda^0(\mathbb{R}^7) = \Lambda^3_1$
7	$\Lambda^1_7 := \Lambda^1(\mathbb{R}^7) = \Lambda^2_7 = \Lambda^3_7$
14	$\mathfrak{g}_2 = \Lambda^2_{14}$
27	$\Lambda^3_{27} = S^2_0(\mathbb{R}^7)$
64	Λ_{64}
77	Λ_{77}

Tablo 3.1: G_2 grubunun düşük boyutlu temsilleri

Önerme 3.2.58 *[16, 20] G_2 Lie grubu $\mathbb{R}^7 \otimes \mathfrak{m}$, $\mathbb{R}^7 \otimes \mathfrak{g}_2$ ve $\mathbb{R}^7 \otimes S^2(\mathbb{R}^7)$ uzaylarına indirgenebilir olarak etki eder. Bu uzaylar indirgenemez temsillerin direkt toplamı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:*

1) $\mathbb{R}^7 \otimes \mathfrak{m} \cong \Lambda^0_1 \oplus \Lambda^1_7 \oplus \Lambda^2_{14} \oplus \Lambda^3_{27}$

2) $\mathbb{R}^7 \otimes \mathfrak{g}_2 \cong \Lambda^1_7 \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64}$

3) $\mathbb{R}^7 \otimes S^2(\mathbb{R}^7) \cong 2\Lambda^1_7 \oplus \Lambda^2_{14} \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64} \oplus \Lambda_{77}$

Yardımcı Teorem 3.2.59 *G grubu V ve W vektör uzaylarına etki etsin. $f : V \longrightarrow W$ dönüşümü G-equivariant olsun. Bu durumda,*

i) Çek$f$ uzayı V'nin invaryant bir alt uzayıdır.

ii) Görf uzayı W'nın invaryant bir alt uzayıdır.

Kanıt.

i) $v \in$ Çek$f$ olsun. f, G-equivariant olduğundan, $\forall g \in G$ için, $f(g.v) = g.f(v) = 0$'dır. O halde, $g.v \in$ Çek$f$, yani Çek$f$ uzayı V'nin invaryant bir alt uzayıdır.

ii) $w \in \text{Gör}f$ olsun. Bu durumda $f(v) = w$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. f, G-equivariant olduğundan $\forall g \in G$ için, $f(g.v) = g.f(v) = g.w$'dır. O halde $g.w \in \text{Gör}f$'tir, yani Görf uzayı W'nun invaryant bir alt uzayıdır.

■

Yardımcı Teorem 3.2.60 *G grubu V ve W vektör uzaylarına indirgenemez olarak etki etsin. $f : V \longrightarrow W$ dönüşümü G-equivariant olsun. Bu durumda, $f \neq 0$ ise, f bir izomorfizmdir.*

Kanıt. $f \neq 0$ olsun. Çek$f$, V'nin invaryant bir alt uzayı ve $f \neq 0$ olduğundan, Çek$f = 0$ olmalıdır. Görf uzayı W'nun invaryant bir alt uzayı ve $f \neq 0$ olduğundan Gör$f = W$ olmalıdır. O halde f bir izomorfizmdir. ■

Önerme 3.2.61

$$1)\Psi(\Lambda^0_1 \oplus \Lambda^3_{27}) \subset Gör\Phi.$$

$$2)\Psi(\Lambda^2_{14}) \cap Gör\Phi = \{0\}.$$

Kanıt.

1) $\Phi : \mathbb{R}^7 \otimes \mathfrak{g}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^7 \otimes S^2(\mathbb{R}^7)$ dönüşümünde, $\mathbb{R}^7 \otimes \mathfrak{g}_2 \cong \Lambda^1_7 \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64}$ ve $\mathbb{R}^7 \otimes S^2(\mathbb{R}^7) \cong 2\Lambda^1_7 \oplus \Lambda^2_{14} \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64} \oplus \Lambda_{77}$ olarak düşünülürse,

$\Phi : \Lambda^1_7 \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64} \longrightarrow 2\Lambda^1_7 \oplus \Lambda^2_{14} \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64} \oplus \Lambda_{77}$ olur. Φ dönüşümü $1-1$ olduğundan, Çek$\Phi = \{0\}$'dır.

Φ lineer olduğundan, boy$(\Lambda^1_7 \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64})$ =boyÇekΦ+boyGörΦ'dir. boyÇek$\Phi = 0$ olduğundan, boy$(\Lambda^1_7 \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64})$ =boyGörΦ yani $\Lambda^1_7 \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64} = \text{Gör}\Phi$ olur.

$\Psi|_{\Lambda^0_1} : \Lambda^0_1 \longrightarrow 2\Lambda^1_7 \oplus \Lambda^2_{14} \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64} \oplus \Lambda_{77}$ dönüşümü ele alındığında $\Psi|_{\Lambda^0_1}(\Lambda^0_1) = \Psi(\Lambda^0_1) = \text{Gör}\Psi|_{\Lambda^0_1}$ uzayı $2\Lambda^1_7 \oplus \Lambda^2_{14} \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64} \oplus \Lambda_{77}$ uzayının invaryant bir alt uzayıdır. $\Psi|_{\Lambda^0_1} \neq 0$ ise, $\Psi|_{\Lambda^0_1}$ dönüşümü 1-boyutlu Λ^0_1 uzayından, $2\Lambda^1_7 \oplus \Lambda^2_{14} \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64} \oplus \Lambda_{77}$ uzayının invaryant bir alt uzayına izomorfizm olmalıdır. Bu uzayın 1-boyutlu invaryant bir alt uzayı olmadığından, $\Psi|_{\Lambda^0_1} = \Psi(\Lambda^0_1) = \{0\}$ olmalıdır. O halde $\Psi(\Lambda^0_1) = \{0\} \subset$ GörΦ'dir.

$\Psi|_{\Lambda^3_{27}} : \Lambda^3_{27} \longrightarrow 2\Lambda^1_7 \oplus \Lambda^2_{14} \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64} \oplus \Lambda_{77}$ dönüşümü düşünülürse, bu dönüşüm 0'dan farklı ise $\Psi|_{\Lambda^3_{27}}(\Lambda^3_{27}) = \Psi(\Lambda^3_{27}) = \text{Gör}\Psi|_{\Lambda^3_{27}}$ uzayı, $2\Lambda^1_7 \oplus \Lambda^2_{14} \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64} \oplus \Lambda_{77}$ uzayının 27-boyutlu invaryant bir alt uzayı olmalıdır. Bu uzayın 27-boyutlu tek invaryant uzayı Λ^3_{27}'dir. O halde, $\Psi|_{\Lambda^3_{27}} = 0$ veya $\Psi(\Lambda^3_{27}) = \Lambda^3_{27}$ olmalıdır. $\text{Gör}\Phi = \Lambda^1_7 \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64}$ olduğundan, her iki durumda da $\Psi(\Lambda^3_{27}) \subset \text{Gör}\Phi$ olur.

O halde, $\Psi(\Lambda^0_1 \oplus \Lambda^3_{27}) \subset \text{Gör}\Phi$'dir.

2) $\Psi|_{\Lambda^2_{14}} : \Lambda^2_{14} \longrightarrow 2\Lambda^1_7 \oplus \Lambda^2_{14} \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64} \oplus \Lambda_{77}$ dönüşümü 0'dan farklı ise $\Psi|_{\Lambda^2_{14}}(\Lambda^2_{14})$ uzayı, $2\Lambda^1_7 \oplus \Lambda^2_{14} \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64} \oplus \Lambda_{77}$ uzayının 14-boyutlu invaryant bir alt uzayı olmalıdır. Bu uzayın 14-boyutlu invaryant alt uzayları Λ^2_{14} ve $\Lambda^1_7 \oplus \Lambda^1_7$'dir.

   $\Psi|_{\Lambda^2_{14}}(\Lambda^2_{14}) = \Lambda^1_7 \oplus \Lambda^1_7$ olsun. Bu durumda Λ^2_{14}'ün öyle invaryant U, V alt uzayları vardır ki $\Psi|_{\Lambda^2_{14}}$ dönüşümü, $\Psi^1 : U \longrightarrow \Lambda^1_7$, $\Psi^2 : V \longrightarrow \Lambda^1_7$ şeklinde iki izomorfizmin toplamı olarak yazılabilir. Λ^2_{14}'ün invaryant alt uzayları $\{0\}$ ve kendisi olduğundan böyle izomorfizmler bulunamaz. O halde $\Psi|_{\Lambda^2_{14}}(\Lambda^2_{14}) = \Lambda^1_7 \oplus \Lambda^1_7$ olamaz. Dolayısıyla $\Psi|_{\Lambda^2_{14}}(\Lambda^2_{14}) = \Psi(\Lambda^2_{14}) = 0$ veya $\Psi|_{\Lambda^2_{14}}(\Lambda^2_{14}) = \Psi(\Lambda^2_{14}) = \Lambda^2_{14}$ olur. $\text{Gör}\Phi = \Lambda^1_7 \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64}$ olduğundan, $\Psi(\Lambda^2_{14}) \cap \text{Gör}\Phi = \{0\}$ bulunur.

■

Önerme 3.2.62 $\Psi(\Lambda^1_7) \subset Gör\Phi$.

Kanıt. $\Gamma \in \Lambda^1_7 \cong \mathbb{R}^7$ olsun. Ψ dönüşümü $\mathbb{R}^7 \otimes \mathfrak{m}$'den $\mathbb{R}^7 \otimes S^2(\mathbb{R}^7)$'ye tanımlı olduğundan, $\Gamma \in \Lambda^1_7 \cong \mathbb{R}^7$ vektörüne bir $\Gamma : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathfrak{m}$ dönüşümü karşılık getirilecektir.

$\{e_1, \ldots, e_7\}$, $\mathbb{R}^7$ için ortonormal bir taban olsun.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^7 &\longrightarrow \mathbb{R}^7 \otimes \mathfrak{m} \\ X &\longmapsto \textstyle\sum_{i=1}^7 e_i \otimes pr_{\mathfrak{m}}(e_i \wedge X) \end{aligned}$$

dönüşümü ele alınsın [23]. Γ dönüşümü

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : \mathbb{R}^7 & \longrightarrow & \mathfrak{m} \\ e_i & \longmapsto & pr_{\mathfrak{m}}(e_i \wedge \Gamma) \end{array}$$

olarak alınabilir. Bu durumda $\forall Y \in \mathbb{R}^7$ için, $\Gamma(Y) = pr_{\mathfrak{m}}(Y \wedge \Gamma)$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \Gamma(Y) &= pr_{\mathfrak{m}}(Y \wedge \Gamma) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{7} \langle e_i \lrcorner \varphi, Y \wedge \Gamma \rangle e_i \lrcorner \varphi \end{aligned}$$

olduğundan, $\forall\ X \in \mathbb{R}^7$ için,

$\Gamma(Y)(X) = \sum_{i=1}^{7} \langle e_i \lrcorner \varphi, Y \wedge \Gamma \rangle e_i \lrcorner \varphi(X)$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} \Psi(\Gamma)(X, Y, Y) &= 2g(\Gamma(Y)(X), Y) \\ &= 2g(\textstyle\sum_{i=1}^{7} \langle e_i \lrcorner \varphi, Y \wedge \Gamma \rangle e_i \lrcorner \varphi(X), Y) \\ &= 2\textstyle\sum_{i=1}^{7} \langle e_i \lrcorner \varphi, Y \wedge \Gamma \rangle g(e_i \lrcorner \varphi(X), Y) \\ &= -2\textstyle\sum_{i=1}^{7} \langle e_i \lrcorner \varphi, Y \wedge \Gamma \rangle \varphi(e_i, X, Y) \\ &= 2\textstyle\sum_{i=1}^{7} \varphi(\Gamma, Y, e_i)\varphi(e_i, X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir.

$\forall\ \Gamma \in \mathbb{R}^7$ ve $\forall\ Y \in \mathbb{R}^7$ için, $\Sigma_0(\Gamma) : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ dönüşümü

$\Sigma_0(\Gamma)(Y) := pr_{\mathfrak{g}_2}(Y \wedge \Gamma)$ olarak tanımlansın.

$\forall\ \alpha^2 \in \Lambda^2 V^*$ için, $pr_{\mathfrak{g}_2}(\alpha^2) := \alpha^2 - \sum_{i=1}^{7} \langle e_i \lrcorner \varphi, \alpha^2 \rangle e_i \lrcorner \varphi$ olarak tanımlı olduğundan,

$\Sigma_0(\Gamma)(Y) = pr_{\mathfrak{g}_2}(Y \wedge \Gamma) = Y \wedge \Gamma - \sum_{i=1}^{7} \langle e_i \lrcorner \varphi, Y \wedge \Gamma \rangle e_i \lrcorner \varphi$ olur. O halde,

$$\begin{aligned} \Phi(\Sigma_0(\Gamma))(X, Y, Y) &= 2g(\Sigma_0(\Gamma)(Y)(X), Y) \\ &= 2g(\{Y \wedge \Gamma - \textstyle\sum_{i=1}^{7} \langle e_i \lrcorner \varphi, Y \wedge \Gamma \rangle e_i \lrcorner \varphi\}(X), Y) \\ &= 2g((Y \wedge \Gamma)(X), Y) \\ &- 2\textstyle\sum_{i=1}^{7} \langle e_i \lrcorner \varphi, Y \wedge \Gamma \rangle g(e_i \lrcorner \varphi(X), Y) \\ &= 2g((Y \wedge \Gamma)(X), Y) + 2\textstyle\sum_{i=1}^{7} \varphi(\Gamma, Y, e_i)\varphi(e_i, X, Y) \\ &= 2\textstyle\sum_{i=1}^{7} \varphi(\Gamma, Y, e_i)\varphi(e_i, X, Y) \\ &+ 2\textstyle\sum_{i=1}^{7} \varphi(\Gamma, Y, e_i)\varphi(e_i, X, Y) \\ &= 4\varphi(\Gamma, Y, e_i)\varphi(e_i, X, Y) \\ &= 2\Psi(\Gamma)(X, Y, Y) \end{aligned}$$

bulunur. O halde, $\Phi(\frac{1}{2}\Sigma_0(\Gamma))(X, Y, Y) = \Psi(\Gamma)(X, Y, Y)$'dir. Polarizasyonla $\Phi(\frac{1}{2}\Sigma_0(\Gamma))(X, Y, Z) = \Psi(\Gamma)(X, Y, Z)$ elde edilir.

Sonuç olarak, $\Gamma \in \text{Gör}\Phi$ bulunur. Yani, $\Psi(\Lambda^1_7) \subset \text{Gör}\Phi$'dir. ■

Buraya kadar yapılanlar G_2 yapısına sahip 7-boyutlu yönlendirilmiş Riemann manifoldları için aşağıdaki teoremle özetlenebilir:

Teorem 3.2.63 *(M^7, g, φ) yapı grubu G_2 olan 7-boyutlu yönlendirilmiş bir Riemann manifoldu ve $(\mathcal{F}(M^7),\ M,\ SO(7),\ \pi)$ bu manifoldun çatı demeti olsun. M manifoldunun tanjant demetinin geçiş fonksiyonları G_2 grubunda değer aldıklarından, çatı demetinin $(\mathcal{R},\ M,\ G_2,\ \pi_{\mathcal{R}})$ gibi bir alt demeti vardır. $\Gamma = Z^g|_{\mathcal{R}} - \widetilde{Z}$ için, $\widetilde{\Gamma} \in \mathbb{R}^7 \otimes \mathfrak{m}$ ve $\mathbb{R}^7 \otimes \mathfrak{m} \cong \Lambda^0_1 \oplus \Lambda^1_7 \oplus \Lambda^2_{14} \oplus \Lambda^3_{27}$ olduğundan $\widetilde{\Gamma} = \Gamma^0_1 + \Gamma^1_7 + \Gamma^2_{14} + \Gamma^3_{27}$ olacak şekilde $\Gamma^i_j \in \Lambda^i_j$ vardır. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

1) *$\Gamma^2_{14} = 0$'dır.*

2) *$\nabla\varphi = 0$ koşulunu sağlayan ve $\widetilde{T}$ torsiyonu 3-form olan tek türlü belirli bir ∇ kovaryant türevi vardır.*

Kanıt. $\widetilde{\Gamma} = \Gamma^0_1 + \Gamma^1_7 + \Gamma^2_{14} + \Gamma^3_{27}$ için, $\Gamma^2_{14} = 0$ olsun. Bu durumda (3.2.61) ve (3.2.62) önermeleri gereğince, $\Psi(\widetilde{\Gamma}) \in \text{Gör}\Phi$'dir. Bu durumda önerme (3.1.52)'den, $\nabla\varphi = 0$ koşulunu sağlayan ve $\widetilde{T}$ torsiyonu 3-form olan metrik uyumlu bir ∇ kovaryant türevi vardır. Sonuç (3.2.57) gereğince bu kovaryant türev tektir.

Tersine TM üzerinde $\nabla\varphi = 0$ koşulunu sağlayan ve torsiyonu 3-form olan tek türlü belirli bir ∇ kovaryant türevi var olsun. Bu durumda önerme (3.1.52) gereğince $\Gamma = Z^g|_{\mathcal{R}} - \widetilde{Z}$ için, $\Psi(\widetilde{\Gamma}) \in \text{Gör}\Phi = \Lambda^1_7 \oplus \Lambda^3_{27} \oplus \Lambda_{64}$ bulunur. Buradan $\Gamma^2_{14} = 0$ olur. ■

Sonuç 3.2.64 *İkinci bölümdeki notasyon ile $\Gamma^2_{14} = 0$ olması, M manifoldunun $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ sınıfına ait olması, yani M manifoldunun integrallenebilir G_2 yapısına sahip olması demektir. O halde yapı grubu G_2 olan 7-boyutlu bir Riemann manifoldunun, torsiyonu tamamen anti-simetrik olan ve $\nabla\varphi = 0$ koşulunu sağlayan bir ∇ kovaryant türevinin olması için gerek ve yeter koşul, M manifoldunun integrallenebilir G_2 yapısına sahip bir manifold olmasıdır.*

KAYNAKLAR

[1] Porter, R.D, *Introduction to Fibre Bundles*, Marcel Dekker Inc., New York, 1977.

[2] Nakahara, M., *Geometry, Topology and Physics*, Taylor and Francis, 2003.

[3] Morita, S., *Geometry of Differential Forms*, A. M. S., 2001.

[4] Kobayashi, S. ve Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry Volume I*, John Wiley and Sons, 1996.

[5] Lee, J.M, *Riemannian Manifolds*, Springer-Verlag, 1997.

[6] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[7] Naber, G.L, *Topology, Geometry and Gauge Fields*, Springer-Verlag, 1997.

[8] Warner, F.W, *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[9] Friedrich, T., *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, A. M. S., 2000.

[10] Lawson, H.B. ve Michelsohn M.-L., *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1989.

[11] Harvey, F.R, *Spinors and Calibrations*, Academic Press, 1990.

[12] Kantor, I.L. ve Solodovnikov A.S., *Hypercomplex Numbers*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[13] Brown, R.B ve Gray, A., “Vector Cross Products”, *Comment. Math. Helv.*, **42**, 222-236, 1967.

[14] Elduque, A., “Vector Cross Products”, *Preprint*, 2004.

[15] Baker, A., *Matrix Groups*, Springer-Verlag, London, 2002.

[16] Fernández, M. ve Gray, A., “Riemannian Manifolds with Structure Group G_2”, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **132**, 19-45, 1982.

[17] Samelson, H., *Notes on Lie Algebras*, Springer-Verlag, 1990.

[18] Fulton, W. ve Harris, J., *Representation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[19] Lang, M., *Differential Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[20] Friedrich, T. ve Ivanov, S., “Parallel Spinors and Connections with Skew-symmetric Torsion in String Theory ”, *Asian Journ. Math.*, **6**, 303-336, 2002.

[21] Bröcker, T. ve Dieck, T., *Representations of Compact Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[22] Greub, W., *Linear Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[23] Friedrich, T., “On Types of Non-integrable Geometries”, *Suppl. Rend. Circ. Mat. di Palermo Ser. II*, **71**, 99-113, 2003.