KONTROL FONKSİYONLARI İNTEGRAL KISITLI OLAN

KONTROL SİSTEMLERİN ERİŞİM KÜMELERİNİN

ÖZELLİKLERİ

Ali Serdar NAZLIPINAR

Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Mart - 2008

Bu tez çalışması Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından desteklenmiştir. Proje No: 106T012

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Ali Serdar Nazlıpınar'ın **"Kontrol Fonksiyonları İntegral Kısıtlı Olan Kontrol Sistemlerin Erişim Kümelerinin Özellikleri"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Doktora tezi 22.02.2008 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı-Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**:**	**Doç. Dr. HALUK HÜSEYİN**	**.................**
Üye	**:**	**Prof. Dr. İDRİS DAĞ**	**.................**
Üye	**:**	**Prof. Dr. ORHAN ÖZER**	**.................**
Üye	**:**	**Prof. Dr. ALADDİN ŞAMİLOV**	**.................**
Üye	**:**	**Yard. Doç. Dr. EMRAH AKYAR**	**.................**

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

KONTROL FONKSİYONLARI İNTEGRAL KISITLI OLAN KONTROL SİSTEMLERİN ERİŞİM KÜMELERİNİN ÖZELLİKLERİ

Ali Serdar NAZLIPINAR

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Haluk HÜSEYİN

2008, 124 Sayfa

Tezde, davranışı faz ve kontrol vektörüne göre doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemlerin erişim kümeleri incelenmiştir. Erişim kümelerinin kapalı olmadığı, çözümler kümesinin ise sürekli fonksiyonlar uzayının prekompakt alt kümesi olduğu gösterilmiş, erişim kümelerinin sistemin başlangıç koşullarına ve diğer parametrelerine sürekli bağlantılı olduğu kanıtlanmıştır.

Sistemin kompakt olmayan mümkün kontrol fonksiyonları kümesi, bir kompakt mümkün kontrol fonksiyonları kümesi (integral ve geometrik kısıtlı ayrıca Lipshitz sabitleri aynı sabitle sınırlı Lipschitz sürekli kontrol fonksiyonları kümesi) ile değiştirilerek; bu mümkün kontrol fonksiyonları kümelerinin oluşturduğu erişim kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı değerlendirilmiştir. Bu uzaklığın geometrik kısıtı ayarlayan sayı ve Lipschitz sürekli kontrol fonksiyonların Lipshitz sabitlerini sınırlayan sabite bağlantısı incelenmiş ve bu sabitler yeterli büyüklükte seçilirken, erişim kümeleri arasındaki uzaklğında yeteri kadar küçük olacağı kanıtlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal olmayan kontrol sistem, Diferansiyel denklem, Erişim kümesi, İntegral kısıtlama

ABSTRACT

PhD. Dissertation

THE PROPERTIES OF ATTAINABLE SETS OF CONTROL SYSTEMS WITH INTEGRAL CONSTRAINTS ON CONTROL FUNCTIONS

Ali Serdar NAZLIPINAR

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Haluk HÜSEYİN

2008, 124 Pages

In this thesis, attainable sets of control systems with integral constraints on control functions are investigated. It is assumed that the behavior of control system is described by a differential equation which is nonlinear with respect to the phase state vector and control vector. It is shown that the attainable set is not closed, but the set of solutions is a precompact subset of the space of continuous functions. It is proved that the attainable sets of the system continuously depend on the initial conditions and other parameters of the system.

The noncompact admissible control functions set is replaced by a compact admissible control functions set (integral and geometric constrained also Lipschitz continuous control functions where the Lipschitz constant of control functions are restricted by the same constant) and the Hausdorff distance between the attainable sets generated by these admissible control functions sets is evaluated. The dependence of this distance on the constants specifying the geometric constraint and the constraint on the Lipschitz constant is studied. It is proved that, if these constants are sufficiently great then the Hausdorff distance between these attainable sets is sufficiently small.

Keywords: Nonlinear control system, Differential equation, Attainable set
Integral constraint

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında gösterdiği yoğun ilgi ve büyük sabırdan dolayı değerli hocam Doç. Dr. Haluk Hüseyin'e, çalışmalarım sırasında her daim yanımda olan hayat arkadaşım Serap Nazlıpınar'a, ayrıca manevi destek ve özverilerinden dolayı ailemin diğer üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Ali Serdar NAZLIPINAR
Mart 2008

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

U_p	:	İntegral kısıtlı mümkün kontrol fonksiyonlar kümesi
U_p^H	:	İntegral ve geometrik kısıtlı mümkün kontrol fonksiyonlar kümesi
$U_{p,lip}^H$	:	İntegral ve geometrik kısıtlı ayrıca Lipschitz sürekli mümkün kontrol fonksiyonlar kümesi
$U_{p,lip,R}^H$	:	İntegral ve geometrik kısıtlı ayrıca sınırlı Lipschitz sabiti olan mümkün kontrol fonksiyonlar kümesi
X_δ	:	X_0 kompakt kümesinin sonlu δ-ağı
$X_p(t_0, X_0)$	:	Sistemin U_p kontrol fonksiyonları tarafından (t_0, X_0) başlangıç kümesinden üretilen çözümleri kümesi
$X_p(t; t_0, X_0)$	:	Sistemin (t_0, X_0) başlangıç kümesi ve U_p mümkün kontrol fonksiyonları için t zaman anındaki erişim kümesi
$X_p(t_0, X_\delta)$	:	Sistemin U_p kontrol fonksiyonları tarafından (t_0, X_δ) başlangıç kümesinden üretilen çözümleri kümesi
$X_p(t; t_0, X_\delta)$	:	Sistemin (t_0, X_δ) başlangıç kümesi ve U_p mümkün kontrol fonksiyonları için t zaman anındaki erişim kümesi
$X_p^H(t_0, X_\delta)$	:	Sistemin U_p^H kontrol fonksiyonları tarafından (t_0, X_δ) başlangıç kümesinden üretilen çözümleri kümesi
$X_p^H(t; t_0, X_\delta)$	:	Sistemin (t_0, X_δ) başlangıç kümesi ve U_p^H mümkün kontrol fonksiyonları için t zaman anındaki erişim kümesi
$X_{p,lip}^H(t_0, X_\delta)$	:	Sistemin $U_{p,lip}^H$ kontrol fonksiyonları tarafından (t_0, X_δ) başlangıç kümesinden üretilen çözümleri kümesi
$X_{p,lip}^H(t; t_0, X_\delta)$	:	Sistemin (t_0, X_δ) başlangıç kümesi ve $U_{p,lip}^H$ mümkün kontrol fonksiyonları için t zaman anındaki erişim kümesi
$X_{p,lip,R}^H(t_0, X_\delta)$	:	Sistemin $U_{p,lip,R}^H$ kontrol fonksiyonları tarafından (t_0, X_δ) başlangıç kümesinden üretilen çözümleri kümesi
$X_{p,lip,R}^H(t; t_0, X_\delta)$	:	Sistemin (t_0, X_δ) başlangıç kümesi ve $U_{p,lip,R}^H$ mümkün kontrol fonksiyonları için t zaman anındaki erişim kümesi
$C\left([t_0, \theta], \mathbb{R}^n\right)$	:	$x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ biçimindeki sürekli fonksiyonlar uzayı

$L_p\left([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\right)$	:	$x(\cdot):[t_0,\theta]\to\mathbb{R}^n$ biçimindeki ölçülebilir ve p. mertebeden integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$\Vert x(\cdot)\Vert_C$	:	$C\left([t_0,\theta],\mathbb{R}^n\right)$ uzayının normu
$\Vert u(\cdot)\Vert_p$	:	$L_p\left([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\right)$ uzayının normu
$\Vert\cdot\Vert$	:	Euclidean norm
$B_n(x_0,r)$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvarı
$B_C(0,1)$	:	$C\left([t_0,\theta],\mathbb{R}^n\right)$ uzayının merkezi orjinde olan kapalı birim yuvarı
$B_{L_p}(0,\mu_0)$	:	$L_p\left([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\right)$ uzayının merkezi orjinde olan μ_0 yarıçaplı kapalı
	:	yuvarı
$\mu(\Omega)$	:	Ω kümesinin Lebesgue ölçümü
$h_n(A,B)$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının A ve B altkümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı
$h_C(E,F)$	:	$C\left([t_0,\theta],\mathbb{R}^n\right)$ uzayının E ve F altkümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı
$h_{L_p}(U,V)$	:	$L_p\left([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\right)$ uzayının U ve V altkümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı

1 GİRİŞ

Tez Konusunun Güncelliği: Günümüzde kontrol teori, uygulamalı matematik bilim dalının en önemli ve gelişmiş alanlarından birisidir. Kontrol teorinin ortaya çıkması ve gelişmesi, II. Dünya Savaşından sonra teknikte, fizikte, ekonomide ve bilimin başka dallarında ortaya çıkan problemlere çözüm yöntemleri aranmasına bağlıdır. Günümüzde, özellikle otomatik kontrol sistemlerde kullanılan bir çok cihaz, önceden teoride elde edilen sonuçlar ile geliştirilmiş yöntem ve prensipler bazında çalışmaktadır. Kontrol sistemlerde önemli bir yeri, davranışı adi diferansiyel denklemlerle verilen kontrol sistemler almaktadır. Davranışı adi diferansiyel denklemlerle verilen kontrol sistemler teorisinde elde edilen ilk önemli sonuç, Pontryagin' in maksimum prensibidir. Bu prensip, 1950' li yılların sonunda kanıtlanmış olup optimal kontrolün varlığı için bir gerek koşuldur (bkz., Pontryagin ve ark. 1962). Daha sonra 1960' ın ilk yıllarında, doğrusal sistemlerin kontrol edilebilirliği için Kalman koşulu elde edilmiştir (bkz., Kalman ve ark. 1963). 1960' lı yıllarda yapılmış araştırmaların büyük bir kısmı da optimal kontrolün varlığına dair çalışmalardır (bkz., Markus ve Lee 1962; Roxin 1962). Ayrıca, kontrol sistemlerin incelenmesinde uygulanan bir çok altyapı, yöntem ve prensipler, müteakip zamanlarda matematiğin farklı dallarının ortaya çıkmasına bir neden oluşturmuştur. Matematiğin çağdaş alanlarından olan küme değerli analiz, düzgün olmayan analiz, Hamilton-Jakobi denkleminin minimax çözümleri teorisi bunlardan sadece birkaçıdır. (bkz., Aubin ve Cellina 1984; Aubin ve Frankowska 1990; Clarke ve ark. 1998; Crandal ve Lions 1983; Deimling 1992; Hu ve Papageorgiou 1997, 2000; Subbotin 1991, 1995).

Davranışı adi diferansiyel denklemlerle verilen kontrol sistemler, sistemin belirli parametrelerine göre sınıflandırılır. Örneğin, kontrol sistemin faz kısıtlamasının olup olmadığına göre, kontrol fonksiyonların üzerine konan kısıtlamaların türüne göre, sistemin davranışını gösteren diferansiyel denklemin türüne göre vs. Kontrol fonksiyonları üzerine konan kısıtlamalara göre, kontrol sistemleri aşağıdaki gibi karakterize edilir.

1. Kontrol fonksiyonları geometrik kısıtlı kontrol sistemler,

2. Kontrol fonksiyonları integral sınırlı kontrol sistemler,

3. Kontrol fonksiyonları karmaşık sınırlı, yani hem geometrik hem de integral sınırlı kontrol sistemler.

Kontrol fonksiyonu üzerinde geometrik kısıtlama olan kontrol sistemlerde, mümkün kontrol fonksiyonları, değerleri önceden verilen bir sınırlı kümeden seçilen ölçülebilir fonksiyonlardır. Bu kontrol sistemler, üzerlerinde çok geniş araştırmalar yapılmış kontrol sistemlerdendir. Ayrıca, bu kontrol sistemler, diferansiyel içermeler kapsamında da incelenmişlerdir. (bkz, Aubin 1984; Blagodatskikh ve Filippov 1986; Clarke ve ark. 1998; Deimling 1992; Guseinov ve ark. 1985, 1998, 2003; Guseinov ve Ushakov 1989, 1990, 1991; Guseinov 1990; Kurzhanskii ve Valyi 1996; Kurzhanskii 2005; Panasyuk 1990; Ushakov 1991; Wolenski 1990).

Kontrol fonksiyonu integral sınırlı olan kontrol sistemlerde, mümkün kontrol fonksiyonlarının integralinin sınırlı olması istenmektedir. Verilen bir fonksiyonun integral sınırı olması, bu fonksiyonun geometrik kısıtlı olmasını gerektirmez. Bundan dolayı, genellikle geometrik kısıtlı kontrol sistemler için kullanılan araştırma yöntemleri, integral sınırlı kontrol sistemlerin incelenmesinde işe yaramamaktadır. Ayrıca, eğer sistemin faz ölçüsü genişletilerek integral sınırlılık yok edilirse, bu durumda kontrol fonksiyonu üzerinde hiçbir kısıt olmayan ancak faz kısıtlaması olan bir kontrol sistemi elde edilir. Bu durumda, faz kısıtlamalı ve kontrol fonksiyonu üzerinde hiçbir kısıtlama olmayan kontrol sistemin incelenmesi, sadece integral kısıtı olan kontrol sistemin incelenmesinden daha karmaşık olur. Genelde, kontrol etkisi kullanıldıkça tükenen bir etki ise, örneğin, bu bir enerji, yakıt veya finans kullanan bir etki ise, bu tür kontrol etki kullanıldıkça tükenir ve bu kontrol etkinin sınırlılığı integral türü sınırlılık olur. Böylece verilen tüm kontrol stoğu, zamanın çok kısa bir süresinde kullanılıp tüketilebilir. İntegral kısıtlı kontrol sistemler, uzayda hareket eden değişken kütleli objelerin ve finans kaynaklı ekonomik sistemlerin matematik modellerinde ortaya çıkmaktadır (bkz., Beletskii 1972; Formalskii 1974; Krasovskii 1968; Lawden 1963; Ukhobotov 2005).

Kontrol sistemler teorisinin en temel kavramlarından biri, kontrol sistemin verilen zaman anındaki erişim kümesidir. Sistemin verilen zaman anındaki erişim kümesi, verilen başlangıç kümesinden itibaren bu zaman anında sistemin erişebileceği tüm noktalar kümesidir. Erişim kümesinin yaklaşık hesaplanması, verilen kontrol sistemin bir çok özelliklerinin önceden bulunmasına imkan vermektedir. Davranışı adi diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonu geometrik sınırlı olan kontrol sistemlerin erişim kümelerinin bir çok topolojik özellikleri "Aubin (1984), Blagodatskikh ve Filippov (1986), Clarke ve ark. (1998), Deimling (1992), Filippov (1998), Guseinov ve Ushakov (1989, 1990, 1991), Guseinov (1990), Guseinon ve ark. (2003), Kurzhanskii (2005), Leigh (1980), Panasyuk (1990)" da incelenmiştir. Bu tür kontrol sistemlerin erişim kümelerinin yaklaşık hesaplanması için farklı yaklaşım yöntemleri "Chernousko (1994), Guseinov ve ark. (1998), Kurzhansksii ve Valyi (1996), Panasyuk (1990), Wolenski (1990), Zhu ve ark. (1992)" de verilmiştir.

Davranışı adi diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları geometrik sınırlı olan kontrol sistemlerin erişim kümelerinin yaklaşık hesaplanması için geliştirilen yöntemler, kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemlerin erişim kümelerinin yaklaşık hesaplanmasında kolayca kullanılamamaktadır. Bu nedenle, davranışı adi diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemlerin erişim kümelerinin yaklaşık hesaplanması için farklı yöntemlerin geliştirilmesi gerekir. Davranışı faz ve kontrol vektörüne göre doğrusal diferansiyel denklem ile karakterize edilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemlerin erişim kümelerinin özellikleri ve hesaplanması 1970' li yıllarda başlamış ve halen çalışılmaktadır (bkz, Chentsov 1995a, 1995b, 1997; Conti 1974; Gozzi ve Loreti 1999; Krasovskii 1968; Leigh 1980; Lou 2004; Motta ve Rampazzo 2000; Motta ve Sartori 2000, 2003; Sirotin ve Formalskii 2003; Sokolov 1972, Solomatin 1984; Ukhobotov 1977, 1987, 2005; Ushakov 1991). Davranışı faz vektörüne göre dogrusal olmayan, kontrol vektörüne göre dogrusal olan adi diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral sınırlı olan kontrol sistemlerin erişim kümelerinin özellikleri, yaklaşık hesaplanması için yaklaşım yöntemleri ve hesaplama algoritmaları "Guseinov ve ark. (1999, 2004, 2007), Motta ve Sartori (2003)" de incelenmiştir. Bu araştırmalar 1990'lı yıllarda başlatılmış ve günümüzde de devam etmektedir. Davranışı faz ve kontrol vektörüne göre dogrusal olmayan adi diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral sınırlı olan kontrol sistemlerin erişim kümelerinin özellikleri "Guseinov ve Nazlıpınar (2006, 2007a, 2007b), Motta ve Rampazzo (2000), Polyak (2003), Soravia (2000)" de ele alınmıştır.

Kontrol etki yeterince küçük olduğu zaman, doğrusal olmayan kontrol sistemin sağ tarafındaki fonksiyon üzerine konulacak uygun koşullar altında, doğrusal olmayan integral kısıtlı kontrol sistemin erişim kümelerinin konveks olduğu "Polyak (2002)" de ispatlanmıştır.

Kontrol ve faz vektörleri üzerinde genelleştirilmiş integral kısıt olduğunda doğrusal olmayan optimal kontrol probleminin değer fonksiyonu "Motta ve Sartori (2000), Soravia (2000)" de incelenmiştir.

Davranışı faz ve kontrol vektörüne göre dogrusal olmayan adi diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral sınırlı olan kontrol sistemlerin erişim kümelerinin yaklaşık hesaplanması incelenmemiş konulardandır. Tezde, davranışı faz ve kontrol vektörlerine göre doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonu integral kısıtlı olan kontrol sistemlerin erişim kümelerinin topolojik özellikleri ve erişim kümelerinin sistemin farklı parametrelerine olan bağımlılığı incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, erişim kümelerinin yaklaşık olarak hesaplanması için bir algoritma geliştirilmesine kaynak teşkil edecek niteliktedir.

Tezde Yapılan Araştırmaların Amacı: Tez kapsamında yapılan araştırmalarda amaç, davranışı faz ve kontrol vektörüne göre doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral sınırlı olan kontrol sistemin erişim kümelerinin çeşitli özelliklerini, verilen başlangıç koşullara ve sistemin diğer parametrelerine bağlantısını incelemek; sistemin mümkün kontrol fonksiyonları kümesinin yerine, uygun bir kompakt mümkün kontrol fonksiyonları kümesi konularak, erişim kümelerini daha kolay hesaplanabilir duruma getirmektir.

Araştırmaların Yöntemleri: Tezde yapılan araştırmalarda fonksiyonel analizin, diferansiyel denklemler teorisinin, küme değerli analizin, kontrol sistemler teorisinin yöntemleri kullanılmaktadır.

Tezde Elde Edilen Bilimsel Yenilik: Tez kapsamında yapılan çalışmalar doğrultusunda, aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. Davranışı doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemin erişim kümelerinin özellikleri incelenmiştir. Erişim kümesinin sınırlı olduğu ancak kapalı küme olmadığı gösterilmiş, erişim kümelerinin çapı için üst değerlendirme elde edilmiş, sistemin yörüngeler kümesinin, sürekli fonksiyonlar uzayında prekompakt küme olduğu kanıtlanmıştır.

2. Erişim kümelerinin zamana, sistemin t_0, X_0 başlangıç koşullarına, kontrol etkinin kapasitesini gösteren μ_0 ve kontrol fonksiyonların seçildiği L_p uzayının p parametresine bağlantısının sürekli olduğu kanıtlanmıştır.

3. Davranışı doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral sınırlı, başlangıç kümesi kompakt $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ olan kontrol sistemin erişim kümeleri ve başlangıç kümesi kompakt $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin sonlu δ-ağı olan kontrol sistemin erişim kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığının δ'ya olan bağlantısı gösterilmiştir.

4. Davranışı doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral sınırlı, başlangıç kümesi kompakt $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin sonlu δ-ağı olan kontrol sistemin erişim kümeleri ve kontrol fonksiyonları ek olarak belli bir geometrik kısıtlamayı da sağlayan aynı kontrol sistemin erişim kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı değerlendirilerek, erişim kümeleri arasındaki uzaklığın geometrik sınıra olan bağlantısı elde edilmiştir.

5. Davranışı doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları karmaşık (integral ve geometrik) sınırlı olan kontrol sistemin erişim kümeleri ve kontrol fonksiyonları karmaşık sınırlı ve ek olarak Lipschitz sürekli olan aynı kontrol sistemin erişim kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı değerlendirilmiştir.

6. Davranışı doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları Lipschitz sürekli ve karmaşık sınırlı olan kontrol sistemin erişim kümeleri ve kontrol fonksiyonları ek olarak sınırlı Lipschitz sabitine sahip aynı kontrol sistemin erişim kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı incelenmiştir. Ayrıca, davranışı doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları, sınırlı Lipschitz sabitine sahip karmaşık sınırlı fonksiyonlar olan kontrol sistemin erişim kümelerinin topolojik özellikleri incelenmiştir.

Tezde Elde Edilen Sonuçların Teorik ve Pratik Değeri: Tezde elde edilen sonuçlar teorik niteliktedir. Kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemler, genelde enerji kaynaklarının sınırlı olduğu sistemlerin kontrolunda ortaya çıkmaktadır. Uzayda hareket eden kontrol edilebilir objelerin ve finans kaynaklı kontrol edilebilir ekonomik sistemlerin matematik modellerinde kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olmaktadır.

Kontrol sistemin erişim kümeleri, verilen sistem hakkında önbilgiler elde etmek için kullanılan en önemli yapılardan biridir. Erişim kümelerinin önceden hesaplanabilirliği, verilen sistem hakkında bir çok öngörüyü sağlayabilir. Tez kapsamında, davranışı doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemin erişim kümelerinin zamana, sistemin başlangıç koşullarına ve kontrol sistemin diger parametrelerine sürekli bağlantılılığı incelenmiştir. Erişim kümelerinin verilen başlangıç koşullara ve sistemin diğer parametrelerine sürekli bağlantılılığı, pratikte verilen kontrol sistemlerin matematik modelleri kontrol fonksiyonu integral kısıtlı olan ve doğrusal olmayan diferansiyel denklem biçiminde yapılırken, modelleme süresinde sistemin ele alınan parametrelerinin ölçümünde oluşabilecek küçük hataların, sistemin erişim kümelerini az etkileyeceyini göstermektedir. Diğer bir deyişle, kontrol sistemin erişim kümeleri, verilen sistem hakkında önbilgiler elde etmek için kullanılan en önemli yapılardan biri olduğundan, modelleme sırasında sistemin parametrelerinin ölçümünde oluşan küçük hatalar, sistem hakkında elde edeceğimiz önbilgileri az etkiler.

Elde edilen sonuçlar davranışı doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemin erişim kümelerinin yapılandırılması için yaklaşım yöntemi elde etme çalışmalarında önemli bir yer bulabilir.

Tez kapsamında elde edilmiş sonuçlar "Guseinov ve Nazlıpınar (2006, 2007a, 2007b, 2007c, 2007d)" de yayınlanmıştır.

Tezin Yapısı: Tez ilk bölüm giriş olmak üzere, 6 anabölümden ve sonuçtan oluşmuştur.

2. Anabölüm üç altbölümden oluşmaktadır. Bu anabölümde, küme değerli analizden küme değerli dönüşümlerin limitine, fonksiyonel analizden Steklov fonksiyonunun özelliklerine ve Gronwall eşitsizliklerine ait, tez kapsamında yapılan araştırmalarda kullanılan bilgiler verilmektedir.

Bölüm 2.1 de, küme değerli dönüşümlerin alt ve üst limitinin tanımı ve özellikleri, bölüm 2.2 de kümeler dizisinin alt ve üst limitinin tanımı ve özellikleri, bölüm 2.3 de Steklov fonksiyonunun tanımı ve özellikleri, bölüm 2.4 de ise Gronwall eşitsizlikleri verilmiştir.

3. Anabölüm dört altbölümden oluşmaktadır. Bu anabölümde, davranışı faz ve kontrol vektörüne göre doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral sınırlı olan kontrol sistemler teorisine ait bazı temel tanımlar verilmiş, kontrol sistemin erişim kümelerinin sınırlılığı, kapalılığı, yörüngeler kümesinin prekompaktlığı ve erişim kümesinin zamana olan bağlantısı incelenmiştir.

Bölüm 3.1 de, davranışı doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemler teorisine ait bazı temel tanım ve sistemin sağlayacağı koşullar verilmiştir.

Bölüm 3.2 de erişim kümesinin sınırlı olduğu (Önerme 3.2.2, Sonuç 3.2.3) gösterilmiştir.

Bölüm 3.3 de sistemin yörüngeler kümesinin, sürekli fonksiyonlar uzayında prekompakt küme olduğu kanıtlanmış (Sonuç 3.3.4), ancak erişim kümelerinin kapalı küme olmadığı gösterilmiştir (Örnek 3.3.5).

Bölüm 3.4 de, erişim kümelerinin zamana göre sürekli olduğu kanıtlanmış (Önerme 3.4.1) ve erişim kümelerinin çapı için üst değerlendirme elde edilmiştir (Önerme 3.4.4).

4. Anabölüm iki altbölümden oluşmaktadır. Bu anabölümde, davranışı faz ve kontrol vektörüne göre doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral sınırlı olan kontrol sistemin erişim kümelerinin sistemin başlanğıç koşullarına ve integral sınırlılığı ayarlayan parametreye bağlantısı incelenmiştir.

Bölüm 4.1 de kontrol sistemin erişim kümelerinin sistemin başlangıç parametrelerine, X_0' a (Önerme 4.1.1, Sonuç 4.1.2) ve t_0' a (Önerme 4.1.4) sürekli bağlantılı olduğu kanıtlanmıştır.

Bölüm 4.2 de kontrol sistemin erişim kümelerinin integral sınırlılığı ayarlayan μ_0 parametresine bağlantısının Lipschitz sürekli olduğu ispatlanmıştır (Önerme 4.2.1, Sonuç 4.2.2).

5. Anabölüm dört altbölümden oluşmaktadır. Bu anabölümde davranışı faz ve kontrol vektörüne göre doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral sınırlı olan kontrol sistemin erişim kümelerinin, kontrol fonksiyonlarının seçildiği L_p uzayının p parametresine olan bağlantısı incelenmektedir. Önce, L_p uzaylarında verilen merkezi orijinde sabit yarıçaplı topların p' ye göre sürekli bağlantılı olduğu kanıtlanmış ve bu özellikten yararlanarak, erişim kümelerinin p' ye göre bağlantısının sürekli olduğu ispatlanmışı̂r.

Bölüm 5.1 de, L_p uzaylarının ($p \in [1, \infty)$) alt kümeleri arasında Hausdorff uzaklığı tanımlanmıştır. Sonra, L_p, $p \in (1, \infty)$, uzayının merkezi orijinde, verilen yarıçaplı kapalı topu ile, bu topdan olan ve aynı zamanda bir geometrik kısıtlamayı da sağlayan fonksiyonların oluşturduğu küme arasındaki uzaklığın geometrik kısıtlamayı ayarlayan parametreye bağlantısı incelenmiştir (Önerme

5.1.1).

Bölüm 5.2 de L_p uzaylarının ($p \in (1, \infty)$) merkezi orijinde aynı yarıçaplı kapalı topları arasında uzaklığın p'ye göre soldan sürekli olduğu kanıtlanmıştır (Önerme 5.2.5).

Bölüm 5.3 de L_p uzaylarının ($p \in (1, \infty)$) merkezi orijinde aynı yarıçaplı kapalı topları arasında uzaklığın p'ye göre sağdan sürekli olduğu gösterilmiştir (Önerme 5.3.5) ve böylece L_p uzaylarının ($p \in (1, \infty)$) merkezi orijinde aynı yarıçaplı kapalı topları arasında uzaklığın p'ye göre sürekli olduğu kanıtlanmıştır (Teorem 5.3.6).

Bölüm 5.4 de, davranışı faz ve kontrol vektörüne göre doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral sınırlı olan kontrol sistemin erişim kümelerinin, kontrol fonksiyonlarının seçildiği L_p uzayının p parametresine olan bağlantısının sürekli olduğu gösterilmiştir (Teorem 5.4.1).

6. Anabölüm dört altbölümden oluşmaktadır. Bu anabölümde kompakt olmayan mümkün kontrol fonksiyonları kümesi, bir kompakt küme (integral kısıtlı, geometrik kısıtlı ve Lipschitz sabitleri aynı sabitle sınırlı kontrol fonksiyonları kümesi) ile değiştirilerek, kontrol fonksiyonları integral kisitlı olan sistemin erişim kümeleri ile, kontrol fonksiyonları integral kısıtlı, geometrik kısıtlı ve Lipschitz sabitleri aynı sabitle sınırlı kontrol fonksiyonları olan aynı sistemin erişim kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı değerlendirilmiştir. Bu uzaklığın, geometrik kısıtı ayarlayan sayıya ve kontrol fonksiyonların Lipschitz sabitini sınırlayan sabite bağlantısı incelenmiş, geometrik kısıtı ayarlayan sabit ve kontrol fonksiyonların Lipschitz sabiti yeteri kadar büyük seçilirken, erişim kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığının da yeteri kadar küçük olacağı gösterilmiştir.

Bölüm 6.1 de, sistemin başlangıç durumunu karakterize eden kompakt $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kümesi, bu kümenin sonlu δ ağı olan X_δ kümesi ile değiştirilerek, başlangıç kümeleri X_0 ve X_δ olan aynı sistemin verilen zaman anındaki erişim kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığının δ'ya olan bağlantısı elde edilmiştir (Önerme 6.1.2, Önerme 6.1.3). δ yeteri kadar küçük iken, erişim kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığının da yeterince küçük olacağı gösterilmiştir.

Genelde, integral kısıtlı fonksiyonlar geometrik kısıtlı olmayabilir. Bundan dolayı, verilen kontrol fonksiyonu küçük zaman aralığında büyük değerler alırken, yani sistem cok kısa zaman aralığında büyük miktarda enerji tüketirken sistemin davranışının nasıl olacağı teori ve pratikte önemlidir. Bölüm 6.2 de, davranışı doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral sınırlı, başlangıç kümesi kompakt $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin sonlu δ-ağı olan kontrol sistemin erişim kümeleri ve kontrol fonksiyonları ek olarak belli bir geometrik kısıtlamayı da sağlayan aynı kontrol sistemin erişim kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı değerlendirilerek, erişim kümeleri arasındaki uzaklığın geometrik sınıra olan bağlantısı elde edilmiştir (Önerme 6.2.1, Önerme 6.2.2). Geometrik kısıtlama yeteri kadar büyük iken, kontrol sistemin erişim kümesinin küçük değişeceği kanıtlanmıştır.

Bölüm 6.3 de, kontrol fonksiyonları karmaşık (integral ve geometrik) kısıtlı olan kontrol sistemin erişim kümeleri ile, kontrol fonksiyonları ek olarak Lipschitz sürekli olan aynı sistemin erişim kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığının sıfır olduğu kanıtlanmıştır (Önerme 6.3.1, Önerme 6.3.2, Önerme 6.3.5).

Kontrol sistem doğrusal, kontrol fonksiyonları kümesi ise L_p uzayında kompakt küme olmadığından, erişim kümelerinin yaklaşık hesaplanması kolay olmayan bir problemdir. Bundan dolayı, mümkün kontrol fonksiyonları kümesi olarak integral ve geometrik kısıtlı ve ayrıca sınırlı Lipschitz sabiti olan Lipschitz sürekli fonksiyonlar alındığında, mümkün kontrol fonksiyonları kompakt küme olur (Önerme 6.4.2). Bölüm 6.4 de, Steklov fonksiyonları kullanılarak, davranışı doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral sınırlı olan kontrol sistemin erişim kümeleri ve kontrol fonksiyonları karmaşık (integral ve geometrik) sınırlı ve ek olarak sınırlı Lipschitz sabiti ile Lipschitz sürekli olan aynı kontrol sistemin erişim kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığının yeterince küçük yapılabilirliği gösterilmiştir (Teorem 6.4.7).

2 KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER VE STEKLOV FONKSİYONU

2.1 Küme Değerli Dönüşümlerin Limiti

Önce bazı temel tanım ve önermeler verilsin.

$x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r \geq 0$ için

$$B_n(x_0, r) = \{x \in R^n : \| x - x_0 \| \leq r\}, \quad B_n(r) = \{x \in R^n : \| x \| \leq r\},$$

$$B_n = \{x \in R^n : \| x \| \leq 1\}$$

olsun. Burada $\| x \|$ verilen $x \in \mathbb{R}^n$ vektörünün Euclidean normudur.

Önerme 2.1.1 *$E \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ olsun. O zaman,*

$$d_n(x, E) \leq d_n(x, y) + d_n(y, E)$$

eşitsizliği doğrudur.

Burada, $d_n(x, y) = \|x - y\|$, $d_n(x, E) = \inf\{\|x - y\| : y \in E\}$ dir.

Şimdi verilen iki $D \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı tanımlansın.

$D \subset \mathbb{R}^n$ ve $E \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri arasındaki Hausdorff Uzaklığı $h_n(D, E)$ olarak gösterilir ve

$$h_n(D, E) = \max\{\sup_{x \in D} d_n(x, E), \sup_{y \in E} d_n(y, D)\}$$

olarak tanımlanır (bkz., Aubin ve Frankowska 1990, Burago ve ark. 2001, Hu ve Papageorgiou 1997).

Önerme 2.1.2 *Keyfi $D \subset \mathbb{R}^n$ ve $E \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri için,*

$$h_n(D, E) = \inf\{r > 0 : D \subset E + rB_n^{\circ}, E \subset D + rB_n^{\circ}\}$$

olur. Burada $B_n^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ dir.

Benzer olarak, herhangi bir metrik uzayın alt kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı da tanımlanabilir (bkz., Aubin ve Frankowska 1990; Burago ve ark. 2001; Hu ve Papageorgiou 1997).

Ayrıca, eğer $\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı, kompakt alt kümeleri ailesi $comp(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilirse, $\big(comp\,(\mathbb{R}^n), h(\cdot,\cdot)\big)$ uzayı bir metrik uzay olur (bkz., Aubin ve Frankowska 1990; Filippov 1988; Hu ve Papageorgiou 1997).

$\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı, sınırlı alt kümeleri ailesini $b(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilsin. O zaman, $h(\cdot,\cdot)$ fonksiyonu $b(\mathbb{R}^n)$ 'de yarı metrik olur.

$A \subset \mathbb{R}^m$ açık küme, $F(\cdot) : A \to b(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşüm olsun.

$F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün verilen bir noktadaki alt ve üst limitleri tanımlansın (bkz., Aubin ve Frankowska 1990; Hu ve Papageorgiou 1997).

Tanım 2.1.3 *(bkz., Aubin ve Frankowska 1990; Hu ve Papageorgiou 1997) $A \subset \mathbb{R}^m$ olmak üzere, $F(\cdot) : A \to b(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün $x_0 \in A$ noktasındaki üst limiti $\limsup\limits_{x \to x_0} F(x)$ olarak gösterilir ve*

$$\limsup_{x \to x_0} F(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : \liminf_{x \to x_0} d\big(v, F(x)\big) = 0\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.4 *(bkz., Aubin ve Frankowska 1990; Hu ve Papageorgiou 1997) $A \subset \mathbb{R}^m$ olmak üzere, $F(\cdot) : A \to b(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün $x_0 \in A$ noktasındaki alt limiti $\liminf\limits_{x \to x_0} F(x)$ olarak gösterilir ve*

$$\liminf_{x \to x_0} F(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : \lim_{x \to x_0} d\big(v, F(x)\big) = 0\}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 2.1.5 *$A \subset \mathbb{R}^m$, $F(\cdot) : A \to b(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşüm, $x_0 \in A$ olsun. O zaman*

$$\liminf_{x \to x_0} F(x) \subset \limsup_{x \to x_0} F(x)$$

olur.

Tanım 2.1.6 *(bkz., Aubin ve Frankowska 1990; Hu ve Papageorgiou 1997)* $A \subset \mathbb{R}^m$, $F(\cdot) : A \to b(\mathbb{R}^n)$ *küme değerli dönüşüm,* $x_0 \in A$ *olsun. Eğer*

$$\liminf_{x \to x_0} F(x) = \limsup_{x \to x_0} F(x)$$

ise, $F(\cdot)$ *küme değerli dönüşümününün* $x_0 \in A$ *noktasında limiti vardır denir ve* $\lim_{x \to x_0} F(x)$ *olarak gösterilir.*

Şimdi verilen küme değerli dönüşümün alt ve üst limitlerinin bazı özellikleri verilsin.

Önerme 2.1.7 $A \subset \mathbb{R}^m$, $F(\cdot) : A \to b(\mathbb{R}^n)$ *küme değerli dönüşüm,* $x_0 \in A$, $\sigma > 0$, *her* $x \in A \bigcap B_m(x_0, \sigma)$ *için* $r > 0$ *olmak üzere* $F(x) \subset B_n(r)$ *ve*

$$\limsup_{x \to x_0} F(x) = F^*$$

olsun. O zaman $F^* \subset B_n(r)$ *ve* F^* *boş kümeden farklı, kapalı kümedir.*

Kanıt. Önce, F^* kümesinin boş kümeden farklı olduğu kanıtlansın. $k \to \infty$ iken $x_k \to x_0$ ve her $k = 1, 2, \ldots$ için $f_k \in F(x_k)$ olsun. $F(x_k) \subset B_n(r)$ olduğundan keyfi $k = 1, 2, \ldots$ için $\|f_k\| \le r$ olur. O halde $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin yakınsak bir $\{f_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. $i \to \infty$ iken $f_{k_i} \to f_*$ olsun. O zaman Önerme 2.1.1 den, her $i = 1, 2, \ldots$ için

$$d(f_*, F(x_{k_i})) \le d(f_*, f_{k_i}) + d(f_{k_i}, F(x_{k_i})) \tag{2.1.1}$$

olur. $i \to \infty$ iken $d(f_*, f_{k_i}) \to 0$ ve $f_{k_i} \in F(x_{k_i})$ olduğundan $d(f_{k_i}, F(x_{k_i})) = 0$ dır. O halde (2.1.1) den

$$\lim_{i \to \infty} d(f_*, F(x_{k_i})) = 0 \tag{2.1.2}$$

olduğu bulunur. $i \to \infty$ iken $x_{k_i} \to x_0$ olduğundan (2.1.2) den

$$\liminf_{x \to x_0} d(f_*, F(x)) \le \lim_{i \to \infty} d(f_*, F(x_{k_i})) = 0$$

ve dolayısıyla $f_* \in F^*$ olur. Bu ise $F^* \neq \emptyset$ olması demektir.

Keyfi $f_* \in F^*$ alınsın ve sabitlensin. O zaman,

$$\liminf_{x \to x_0} d(f_*, F(x)) = 0$$

olur. Bu durumda $k \to \infty$ iken $x_k \to x_0$ ve

$$\lim_{k \to \infty} d(f_*, F(x_k)) = 0$$

olacak biçimde $\{x_k\}$ dizisi vardır. O zaman her $\xi > 0$ için $k > K(\xi)$ iken,

$$d(f_*, F(x_k)) < \xi$$

olacak biçimde $K(\xi) > 0$ vardır. O halde keyfi $k > K(\xi)$ için

$$f_* \in F(x_k) + \xi B \tag{2.1.3}$$

olur. $F(x_k) \subset B_n(r)$ olduğundan, (2.1.3) den,

$$\|f_*\| \leq r + \xi \tag{2.1.4}$$

olur. $\xi > 0$ keyfi sabitlenmiş olduğundan (2.1.4) den $\|f_*\| \leq r$ ve dolayısıyla $f_* \in B_n(r)$ olur. $f_* \in F^*$ keyfi olarak seçildiğinden $F^* \subset B_n(r)$ olur. Dolayısıyla F^* kümesi sınırlıdır.

Şimdi sınırlı $F^* \subset B_n(r)$ kümesinin kapalı olduğu gösterilsin. Her $k = 1, 2, \ldots$ için $f_k \in F^*$ ve $k \to \infty$ iken $f_k \to f_*$ olsun. $f_* \in F^*$ olduğu kanıtlansın.

Her $k = 1, 2, \ldots$ için $f_k \in F^*$ olduğundan her k sayısı için

$$\liminf_{x \to x_0} d(f_k, F(x)) = 0 \tag{2.1.5}$$

olur. Keyfi k sayısı alınsın ve sabitlensin. O halde Önerme 2.1.1 den her $x \in B_n(x_0, \sigma)$ için,

$$d(f_*, F(x)) \leq d(f_*, f_k) + d(f_k, F(x)) \tag{2.1.6}$$

olur. (2.1.6) eşitsizliğinden

$$\liminf_{x \to x_0} d(f_*, F(x)) \leq d(f_*, f_k) + \liminf_{x \to x_0} d(f_k, F(x)) \tag{2.1.7}$$

olur. O halde (2.1.5) ve (2.1.7) den, her $k = 1, 2, \ldots$ için

$$\liminf_{x \to x_0} d(f_*, F(x)) \leq d(f_*, f_k) \tag{2.1.8}$$

olduğu bulunur. k keyfi sabitlenmiş olduğundan (2.1.8) eşitsizliği her $k = 1, 2, \ldots$ için doğrudur. $k \to \infty$ iken $d(f_*, f_k) \to 0$ olduğundan (2.1.8) den

$$\liminf_{x \to x_0} d(f_*, F(x)) = 0$$

olduğu bulunur. Bu ise $f_* \in F^*$ olması demektir. Böylece F^* kümesi kapalıdır. ■

Önerme 2.1.8 *$A \subset \mathbb{R}^m$, $F(\cdot) : A \to b(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşüm, $x_0 \in A$, $\sigma > 0$, her $x \in A \bigcap B_m(x_0, \sigma)$ için $r > 0$ olmak üzere $F(x) \subset B_n(r)$ ve $\limsup_{x \to x_0} F(x) = F^*$ olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için $x \in B_m\big(x_0, \delta(\varepsilon)\big) \bigcap A$ iken*

$$F(x) \subset F^* + \varepsilon B_n$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon)$ vardır.

Kanıt. Önermenin aksi varsayılsın. $k \to \infty$ iken $x_k \to x_0$ ve

$$F(x_k) \not\subset F^* + \varepsilon_* B_n \tag{2.1.9}$$

olacak biçimde $\varepsilon_* > 0$ sayısı ve $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi var olsun. O zaman (2.1.9) dan her $k = 1, 2, \ldots$ için $f_k \in F(x_k)$ olmak üzere

$$f_k \notin F^* + \varepsilon_* B_n \tag{2.1.10}$$

olacak biçimde f_k'lar vardır. Her $k = 1, 2, \ldots$ için $f_k \in F(x_k) \subset B_n(r)$ olduğundan, her $k = 1, 2, \ldots$ için

$$\|f_k\| \leq r$$

olur. Sınırlı her dizinin yakınsak bir alt dizisi var olduğundan genelliği bozmaksızın $k \to \infty$ iken $f_k \to f_*$ olduğu kabul edilsin. (2.1.10) dan keyfi $k = 1, 2, \ldots$ için

$$d(f_k, F^*) \geq \varepsilon_* \tag{2.1.11}$$

olduğu elde edilir. $k \to \infty$ iken $f_k \to f_*$ ve $x \to d(x, F^*)$ fonksiyonu sürekli olduğundan (2.1.11) den

$$d(f_*, F^*) \geq \varepsilon_* \tag{2.1.12}$$

olduğu elde edilir.

Önerme 2.1.1 den her $k = 1, 2 \ldots$ için

$$d(f_*, F(x_k)) \leq d(f_*, f_k) + d(f_k, F(x_k)) \tag{2.1.13}$$

eşitsizliği doğrudur. Her $k = 1, 2 \ldots$ için $f_k \in F(x_k)$ olduğundan $d(f_k, F(x_k)) = 0$ olur. Ayrıca $k \to \infty$ iken $f_k \to f_*$ olduğundan (2.1.13) den

$$\liminf_{k\to\infty} d(f_*, F(x_k)) \leq \lim_{k\to\infty} d(f_*, f_k) = 0 \tag{2.1.14}$$

olur. Bu durumda (2.1.14) den

$$\liminf_{x\to x_0} d(f_*, F(x)) \leq \liminf_{k\to\infty} d(f_*, F(x_k)) = 0$$

ve $f_* \in F^*$ olduğu elde edilir. O halde

$$d(f_*, F^*) = 0 \tag{2.1.15}$$

olur. (2.1.12) ve (2.1.15) çelişir. O halde varsayım yanlıştır ve önerme doğrudur.
■

Küme değerli dönüşümlerin üst limitinden farklı olarak $\liminf_{x\to x_0} F(x) = \emptyset$ olabilir. Şimdi küme değerli dönüşümlerin alt limitlerine ilişkin önermeler verilsin.

Önerme 2.1.9 *$A \subset \mathbb{R}^m$, $F(\cdot) : A \to b(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşüm, $x_0 \in A$, $\sigma > 0$, her $x \in A \bigcap B_m(x_0, \sigma)$ için $r > 0$ olmak üzere $F(x) \subset B_n(r)$ ve*

$$\liminf_{x\to x_0} F(x) = F_*$$

olsun. O zaman $F_* \subset B_n(r)$ ve F_* kapalı kümedir.

Kanıt. Eğer $F_* = \emptyset$ ise, $F_* \subset B_n(r)$ ve F_* kümesi kapalı olur.

$F_* \neq \emptyset$ ve $\limsup\limits_{x \to x_0} F(x) = F^*$ olsun. Önerme 2.1.7 dan dolayı $F^* \subset B_n(r)$ ve F^*, boştan farklı kapalı kümedir. O halde $F_* \subset F^*$ olduğundan $F_* \subset B_n(r)$ olduğu bulunur.

Şimdi F_* kümesinin kapalı olduğu gösterilsin. Her $k = 1, 2, \dots$ için $f_k \in F_*$ ve $k \to \infty$ iken $f_k \to f_*$ olsun. $f_* \in F_*$ olduğu görülsün.

Önerme 2.1.1 den, her $k = 1, 2, \dots$ ve her $x \in B_m(x_0, \sigma) \bigcap A$ için

$$d(f_*, F(x)) \le d(f_*, f_k) + d(f_k, F(x)) \tag{2.1.16}$$

olur. Keyfi $k = 1, 2, \dots$ alınsın ve sabitlensin. $\xi_k = d(f_*, f_k)$ olsun. O zaman (2.1.16) dan

$$\lim_{x \to x_0} d(f_*, F(x)) \le \xi_k + \lim_{x \to x_0} d(f_k, F(x)) \tag{2.1.17}$$

elde edilir. Her $k = 1, 2, \dots$ için $f_k \in F_*$ olduğundan,

$$\lim_{x \to x_0} d(f_k, F(x)) = 0$$

olur. O halde (2.1.17) den

$$\lim_{x \to x_0} d(f_*, F(x)) \le \xi_k \tag{2.1.18}$$

bulunur. k keyfi sabitlenmiş olduğundan (2.1.18) eşitsizliği her $k = 1, 2, \dots$ için doğrudur.

Ayrıca $k \to \infty$ iken $f_k \to f_*$ olduğundan $k \to \infty$ iken $\xi_k \to 0$ olur. O halde (2.1.18) den

$$\lim_{x \to x_0} d(f_*, F(x)) = 0$$

olduğu bulunur. Bu ise $f_* \in F_*$ olması demektir. Böylece F_* kapalı kümedir. ■

Önerme 2.1.10 *$A \subset \mathbb{R}^m$, $F(\cdot) : A \to b(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşüm, $x_0 \in A$, $\sigma > 0$, her $x \in A \bigcap B_m(x_0, \sigma)$ için $r > 0$ olmak üzere $F(x) \subset B_n(r)$ ve*

$$\liminf_{x \to x_0} F(x) = F_*$$

olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ *için* $x \in B_m\big(x_0, \delta(\varepsilon)\big) \bigcap A$ *iken*

$$F_* \subset F(x) + \varepsilon B_n$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ *sayısı vardır.*

Kanıt. Eğer $F_* = \emptyset$ ise önerme trivial olarak doğrudur. $F_* \neq \emptyset$ olsun. Önermenin aksi varsayılsın. $k \to \infty$ iken $x_k \to x_0$ ve

$$F_* \not\subset F(x_k) + \varepsilon_* B_n \tag{2.1.19}$$

olacak biçimde $\{x_k\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi ve $\varepsilon_* > 0$ var olsun. O halde (2.1.19) dan her $k = 1, 2, \ldots$ için

$$f_k \not\subset F(x_k) + \varepsilon_* B_n \tag{2.1.20}$$

olacak biçimde $f_k \in F_*$ vardır. (2.1.20) den her $k = 1, 2, \ldots$ için

$$d\big(f_k, F(x_k)\big) \geq \varepsilon_* \tag{2.1.21}$$

olur. Önerme 2.1.9 gereği $F_* \subset B_n(r)$ ve F_* kapalı kümedir. Her $k = 1, 2, \ldots$ için $f_k \in F_*$, F_* kapalı ve sınırlı küme olduğundan $\{f_k\}_{i=1}^{\infty}$ dizinin $i \to \infty$ iken $f_{k_i} \to f_*$ ve $f_* \in F_*$ olacak biçimde yakınsak $\{f_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır.

(2.1.21) den ve Önerme 2.1.1 den her $i = 1, 2, \ldots$ için

$$\varepsilon_* \leq d\big(f_{k_i}, F(x_{k_i})\big) \leq d(f_{k_i}, f_*) + d\big(f_*, F(x_{k_i})\big)$$

olur. Son eşitsizlikten her $i = 1, 2, \ldots$ için

$$d\big(f_*, F(x_{k_i})\big) \geq \varepsilon_* - d(f_{k_i}, f_*) \tag{2.1.22}$$

olur. $i \to \infty$ iken $f_{k_i} \to f_*$ olduğundan (2.1.22) den

$$\liminf_{i \to \infty} d\big(f_*, F(x_{k_i})\big) \geq \varepsilon_* > 0 \tag{2.1.23}$$

olduğu bulunur.

Ayrıca, $f_* \in F_*$ olduğundan

$$\lim_{x \to x_0} d\big(f_*, F(x)\big) = 0$$

olur. $i \to \infty$ iken $x_{k_i} \to x_0$ olduğundan, son eşitlikten

$$\liminf_{i \to \infty} d\big(f_*, F(x_{k_i})\big) = \lim_{i \to \infty} d\big(f_*, F(x_{k_i})\big) = \lim_{x \to x_0} d\big(f_*, F(x)\big) = 0 \qquad (2.1.24)$$

olur. Böylece (2.1.23) ile (2.1.24) çelişir. O halde yapılan varsayımın yanlış olduğu sonucuna ulaşılır ve önermenin doğruluğu görülür. ■

Önerme 2.1.7 ve Önerme 2.1.9 dan, küme değerli dönüşümün verilen noktadaki limiti için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 2.1.11 *$A \subset \mathbb{R}^m$, $F(\cdot) : A \to b(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşüm, $x_0 \in A$, $\sigma > 0$, her $x \in A \bigcap B_m(x_0, \sigma)$ için $r > 0$ olmak üzere $F(x) \subset B_n(r)$ ve*

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F_0$$

olsun. O zaman $F_0 \subset B_n(r)$ ve F_0 boş kümeden farklı, kapalı kümedir. Ayrıca, her $\varepsilon > 0$ için $x \in A \bigcap B_m\big(x_0, \delta(\varepsilon)\big)$ iken

$$F(x) \subset F_0 + \varepsilon B_n, \quad F_0 \subset F(x) + \varepsilon B_n \qquad (2.1.25)$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

Önerme 2.1.11 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.12 *$A \subset \mathbb{R}^m$, $F(\cdot) : A \to b(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşüm, $x_0 \in A$, $\sigma > 0$, her $x \in A \bigcap B_m(x_0, \sigma)$ için $r > 0$ olmak üzere $F(x) \subset B_n(r)$ ve*

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F_0$$

olsun. O zaman $\lim_{x \to x_0} h_n(F(x), F_0) = 0$ olur.

2.2 Kümeler Dizisinin Alt Ve Üst Limiti

Bir önceki bölümde küme değerli dönüşümlerin verilen noktadaki alt ve üst limitleri ve ayrıca limiti tanımlandı. Bu bölümde kümeler dizisi için üst limit, alt limit ve limit kavramları verilecek ve özellikleri incelenecektir (bkz., Aubin ve Frankowska 1990; Hu ve Papageorgiou 1997).

Tanım 2.2.1 *(bkz., Aubin ve Frankowska 1990; Hu ve Papageorgiou 1997) Her* $k = 1, 2, \ldots$ *için* $E_k \in b(\mathbb{R}^n)$ *olsun.* $\{E_k\}_{i=1}^{\infty}$ *dizisinin üst limiti*

$$\limsup_{k\to\infty} E_k$$

ile gösterilir ve

$$\limsup_{k\to\infty} E_k = \{f \in \mathbb{R}^n : \liminf_{k\to\infty} d(f, E_k) = 0\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.2 *(bkz., Aubin ve Frankowska 1990; Hu ve Papageorgiou 1997) Her* $k = 1, 2, \ldots$ *için* $E_k \in b(\mathbb{R}^n)$ *olsun.* $\{E_k\}_{i=1}^{\infty}$ *dizisinin alt limiti*

$$\liminf_{k\to\infty} E_k$$

ile gösterilir ve

$$\liminf_{k\to\infty} E_k = \{f \in \mathbb{R}^n : \lim_{k\to\infty} d(f, E_k) = 0\}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 2.2.3 *Her* $k = 1, 2, \ldots$ *için* $E_k \in b(\mathbb{R}^n)$ *olsun. O zaman,*

$$\liminf_{k\to\infty} E_k \subset \limsup_{k\to\infty} E_k$$

olur.

Şimdi $\{E_k\}_{i=1}^{\infty}$ dizisinin $k \to \infty$ iken limiti tanımlansın.

Tanım 2.2.4 *(bkz., Aubin ve Frankowska 1990; Hu ve Papageorgiou 1997)* *Her* $k = 1, 2, \ldots$ *için* $E_k \in b(\mathbb{R}^n)$ *olsun. Eğer*

$$\limsup_{k\to\infty} E_k = \liminf_{k\to\infty} E_k = E_0$$

ise $\{E_k\}_{i=1}^{\infty}$ *dizisinin* $k \to \infty$ *iken limiti vardır denir ve* $E_0 = \lim_{k\to\infty} E_k$ *olarak gösterilir.*

Küme değerli dönüşümlerin üst ve alt limitlerini karekterize eden Önerme 2.1.5-2.1.10 önermelerine benzer olarak, kümeler dizisinin alt ve üst limitlerini karekterize eden aşağıdaki önermeler de doğrudur.

Önerme 2.2.5 $r > 0$, *her* $k = 1, 2, \ldots$ *için* $E_k \subset B_n(r)$ *ve*

$$\limsup_{k\to\infty} E_k = E^*$$

olsun. O zaman $E^* \subset B_n(r)$ *boştan farklı, kapalı ve sınırlı kümedir.*

Ayrıca, her $\varepsilon > 0$ *için* $k > K(\varepsilon)$ *iken*

$$E_k \subset E^* + \varepsilon B_n$$

olacak biçimde $K(\varepsilon) > 0$ *vardır.*

Önerme 2.2.5 in kanıtı, Önerme 2.1.7 ve Önerme 2.1.8 in kanıtlarına benzer olarak yapılır.

Önerme 2.2.6 $r > 0$, *her* $k = 1, 2, \ldots$ *için* $E_k \subset B_n(r)$ *ve*

$$\liminf_{k\to\infty} E_k = E_*$$

olsun. O zaman $E_* \subset B_n(r)$ *kapalı ve sınırlı kümedir.*

Ayrıca, her $\varepsilon > 0$ *için* $k > K(\varepsilon)$ *iken*

$$E_* \subset E_k + \varepsilon B_n$$

olacak biçimde $K(\varepsilon) > 0$ *vardır.*

Önerme 2.2.6 nın kanıtı, Önerme 2.1.9 ve Önerme 2.1.10 un kanıtlarına benzer olarak yapılır.

Önerme 2.2.5 ve Önerme 2.2.6 dan sonuç olarak kümeler dizisinin limitini karakterize eden aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 2.2.7 *$r > 0$, her $k = 1, 2, \ldots$ için $E_k \subset B_n(r)$ ve*

$$\lim_{k\to\infty} E_k = E_0$$

olsun. O zaman $E_* \subset B_n(r)$ boştan farklı, kapalı ve sınırlı kümedir.

Ayrıca, her $\varepsilon > 0$ için $k > K(\varepsilon)$ iken

$$E_k \subset E_0 + \varepsilon B_n, \quad E_0 \subset E_k + \varepsilon B_n \tag{2.2.1}$$

olacak biçimde $K(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

Önerme 2.2.7 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.8 *$r > 0$, her $k = 1, 2, \ldots$ için $E_k \subset B_n(r)$ ve*

$$\lim_{k\to\infty} E_k = E_0$$

olsun. O zaman

$$\lim_{k\to\infty} h_n(E_k, E_0) = 0$$

olur.

Şimdi özel bir küme dizisinin limitini karekterize eden bir önerme verelim.

Önerme 2.2.9 *$r > 0$, her $k = 1, 2, \ldots$ için $E_k \subset B_n(r)$, $E_k \subset E_{k+1}$ ve $E_* = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ olsun. O zaman,*

$$clE_* = \lim_{k\to\infty} E_k$$

olur.

Kanıt. Önce,

$$\limsup_{k\to\infty} E_k = \liminf_{k\to\infty} E_k \tag{2.2.2}$$

olduğu kanıtlansın.

Önerme 2.2.3 gereği

$$\liminf_{k\to\infty} E_k \subset \limsup_{k\to\infty} E_k \tag{2.2.3}$$

olur. Şimdi,

$$\limsup_{k\to\infty} E_k \subset \liminf_{k\to\infty} E_k \tag{2.2.4}$$

olduğu ispatlansın.

Keyfi $f_* \in \lim_{k\to\infty} \sup E_k$ alınsın ve sabitlensin. O halde tanım gereği,

$$\liminf_{k\to\infty} d(f_*, E_k) = 0$$

olur. Bu durumda $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin $i \to \infty$ iken

$$\lim_{i\to\infty} d(f_*, E_{k_i}) = 0 \tag{2.2.5}$$

olacak biçimde $\{E_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ alt küme dizisi vardır.

Her $k = 1, 2, \ldots$ için $E_k \subset E_{k+1}$ olduğundan $l_1 < l_2$ olacak biçimdeki keyfi l_1 ve l_2 sayıları için $E_{l_1} \subset E_{l_2}$ olur. O halde $l_1 < l_2$ olacak biçimdeki keyfi l_1 ve l_2 sayıları için

$$d(f_*, E_{l_1}) \geq d(f_*, E_{l_2}) \tag{2.2.6}$$

olur. O zaman $\{d(f_*, E_k)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi azalan dizidir. Ayrıca her $k = 1, 2, \ldots$ için

$$d(f_*, E_k) \geq 0 \tag{2.2.7}$$

olur.

$\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin keyfi $\{E_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ alt dizisi alınsın ve

$$\lim_{j\to\infty} d(f_*, E_{n_j}) = 0 \tag{2.2.8}$$

olduğu kanıtlansın.

(2.2.8) eşitliğinin aksi varsayılsın. Genelliği bozmaksızın $\alpha_* \neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{j\to\infty} d(f_*, E_{n_j}) = \alpha_* \tag{2.2.9}$$

olsun. (2.2.7) den $\alpha_* > 0$ olduğu bulunur.

$\varepsilon_* = \dfrac{\alpha_*}{4}$ olsun. O halde (2.2.5) den $\varepsilon_* = \dfrac{\alpha_*}{4}$ için, $i > i_*$ iken

$$0 < d(f_*, E_{k_i}) < \frac{\alpha_*}{4} \tag{2.2.10}$$

olacak biçimde $i_* > 0$ vardır. (2.2.9) dan ise $\varepsilon_* = \frac{\alpha_*}{4}$ için $j > j_*$ iken

$$\alpha_* - \frac{\alpha_*}{4} < d(f_*, E_{n_j}) < \alpha_* + \frac{\alpha_*}{4} \tag{2.2.11}$$

olacak biçimde $j_* > 0$ vardır. O halde (2.2.11) den her $j > j_*$ iken

$$d(f_*, E_{n_j}) > \frac{3}{4}\alpha_* \tag{2.2.12}$$

olduğu elde edilir.

(2.2.10) ve (2.2.12) den her $i > i_*$ ve her $j > j_*$ için

$$d(f_*, E_{k_i}) < d(f_*, E_{n_j}) \tag{2.2.13}$$

olduğu bulunur.

Keyfi $m > i_*$ alınarak sabitlensin. O halde (2.2.13) den her $j > j_*$ için,

$$d(f_*, E_{k_m}) < d(f_*, E_{n_j}) \tag{2.2.14}$$

olur. $j \to \infty$ iken $n_j \to \infty$ olduğundan, $n_r > k_m$ olacak biçimde $r > 0$ sayısı vardır. Bu durumda (2.2.14) den $n_r > k_m$ olmak üzere

$$d(f_*, E_{k_m}) < d(f_*, E_{n_r}) \tag{2.2.15}$$

olduğu elde edilir. (2.2.6) ile (2.2.15) çelişir. O halde yapılan varsayım doğru değildir ve (2.2.8) eşitliği doğrudur. (2.2.8) den

$$\lim_{k\to\infty} d(f_*, E_k) = 0 \tag{2.2.16}$$

olduğu bulunur.

Ayrıca (2.2.16) dan $f_* \in \liminf\limits_{k\to\infty} E_k$ olduğu elde edilir. $f_* \in \limsup\limits_{k\to\infty} E_k$ keyfi olarak seçildiğinden

$$\limsup_{k\to\infty} E_k \subset \liminf_{k\to\infty} E_k$$

olduğu yani (2.2.4)'ün doğru olduğu kanıtlanmış olur. (2.2.3) ve (2.2.4) den, (2.2.2) eşitliğinin doğru olduğu elde edilir. (2.2.2) eşitliğinden, $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ küme dizisinin limitinin var olduğu elde edilir.

Şimdi

$$clE_* \subset \liminf_{k\to\infty} E_k \tag{2.2.17}$$

olduğu gösterilsin. Önce,

$$E_* \subset \liminf_{k\to\infty} E_k \tag{2.2.18}$$

olduğu görülsün. Keyfi $f_* \in E_*$ alınarak sabitlensin. O zaman $f_* \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ olduğundan $f_* \in E_{k_*}$ olacak şekilde $k_* > 0$ vardır. Her $k = 1, 2, \ldots$ için $E_k \subset E_{k+1}$ olduğundan her $k \geq k_*$ için $f_* \in E_k$ ve dolayısıyla keyfi $k \geq k_*$ için

$$d(f_*, E_k) = 0$$

olur. O halde,

$$\lim_{k\to\infty} d(f_*, E_k) = 0$$

ve tanım gereği $f_* \in \liminf\limits_{k\to\infty} E_k$ olur. $f_* \in E_*$ keyfi sabitlenmiş olduğundan (2.2.18) kapsaması doğrudur. $\liminf\limits_{k\to\infty} E_k$ kümesi kapalı olduğundan, (2.2.18) den, (2.2.17) kapsamasının doğru olduğu elde edilir.

Son olarak

$$\limsup_{k\to\infty} E_k \subset clE_* \tag{2.2.19}$$

olduğu kanıtlansın.

Keyfi $f_* \in \limsup_{k\to\infty} E_k$ alınarak sabitlensin. O halde, (2.2.2) den

$$f_* \in \liminf_{k\to\infty} E_k$$

olduğu ve dolayısıyla

$$\lim_{k\to\infty} d(f_*, E_k) = 0 \tag{2.2.20}$$

olduğu elde edilir.

Keyfi $\varepsilon > 0$ alınsın ve sabitlensin. O zaman (2.2.20) den her $k \geq k_*$ için $d(f_*, E_k) < \varepsilon$ olacak biçimde $k_* > 0$ vardır. $d(f_*, E_{k_*}) < \varepsilon$ olduğundan

$$f_* \in E_{k_*} + \varepsilon B_n$$

olur. Bu durumda, $\varphi_* \in E_{k_*}$ olmak üzere

$$f_* \in \varphi_* + \varepsilon B_n \tag{2.2.21}$$

olur. $\varphi_* \in E_{k_*}$ olduğundan $\varphi_* \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ olur. O halde (2.2.21) den

$$f_* \in \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k + \varepsilon B_n \tag{2.2.22}$$

olur. $\varepsilon_* > 0$ keyfi sabitlenmiş olduğundan (2.2.22) den $f_* \in cl\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k\Big)$ yani $f_* \in cl(E_*)$ olduğu elde edilir. $f_* \in \limsup\limits_{k\to\infty} E_k$ keyfi seçildiğinden (2.2.19) kapsamasının doğru olduğu elde edilir.

(2.2.2) eşitliğinden, (2.2.17) ve (2.2.19) kapsamalarından, önermenin doğruluğu kanıtlanmış olur. ■

Önerme 2.2.9 dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.10 *$r > 0$, her $k = 1, 2, \ldots$ için $E_k \subset B_n(r)$, $E_k \subset E_{k+1}$ ve $E_* = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ olsun. O zaman, her $\varepsilon > 0$ için $k > k(\varepsilon)$ iken*

$$h_n(E_*, E_k) < \varepsilon$$

olacak biçimde $k(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

2.3 Steklov Fonksiyonunun Özellikleri

$p \in [1, +\infty)$ için $L_p([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$ uzayı $\|u(\cdot)\|_p < \infty$ olacak biçimdeki ölçülebilir $u(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonlar uzayıdır. Burada

$$\|u(\cdot)\|_p = \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$L_p([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$ uzayının merkezi $x_*(\cdot) \in L_p([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$ noktasında ve μ yarıçaplı kapalı topu

$$B_{L_p}(x_*(\cdot), \mu) = \left\{ x(\cdot) \in L_p([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m) : \|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_p \le \mu \right\}$$

ile gösterilsin.

$U \subset L_p([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$, $V \subset L_p([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı

$$h_{L_p}(U, V) = \max\{ \sup_{x(\cdot) \in U} d_{L_p}(x(\cdot), V), \sup_{y(\cdot) \in V} d_{L_p}(y(\cdot), U) \}$$

olarak tanımlanır.

Burada $d_{L_p}(x(\cdot), U) = \inf \left\{ d_{L_p}(x(\cdot), y(\cdot)) : y(\cdot) \in U \right\}$, $d_{L_p}(x(\cdot), y(\cdot)) = \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_p$.

$C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$ ile sürekli $x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonlar uzayı gösterilsin. $x(\cdot) \in C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$ fonksiyonunun normu

$$\|x(\cdot)\|_C = \max\{ \|x(t)\| : t \in [t_0, \theta] \}$$

olarak tanımlanır.

$C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$ uzayının merkezi $x_*(\cdot) \in C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$ noktasında ve ν yarıçaplı kapalı topu

$$B_C(x_*(\cdot), \nu) = \{ x(\cdot) \in C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m) : \|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \le \nu \}$$

ile gösterilsin. $P \subset C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$, $Q \subset C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı

$$h_C(P,Q)=\max\{\sup_{x(\cdot)\in P} d_C(x(\cdot),Q),\ \sup_{y(\cdot)\in Q} d_C(y(\cdot),P)\}$$

olarak tanımlanır.

Burada $d_C(x(\cdot),Q)=\inf\{d_C(x(\cdot),y(\cdot)) : y(\cdot)\in Q\}$, $d_C(x(\cdot),y(\cdot))=\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_C$.

Önce, Steklov fonksiyonunun özellikleri incelenirken kullanılacak bir önerme verilsin.

Önerme 2.3.1 (Lebesgue Yakınsaklık Teoremi) *(bkz. Lusternik ve Sobolev 1974; Warga 1972)*

Keyfi $i=1,2,\ldots$ için $f_i(\cdot)\in L_p\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\big)$ ve h.h. $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\lim_{i\to\infty} f_i(t)=f_*(t)\quad \big(\lim_{i\to\infty}\|f_i(t)-f_*(t)\|=0\big)$$

olsun. Ayrıca $g(\cdot)\in L_p\big([t_0,\theta],[0,\infty)\big)$ olmak üzere, keyfi $i=1,2,\ldots$ ve h.h. $t\in[t_0,\theta]$ için $\|f_i(t)\|\le g(t)$ olsun. O zaman

$$\lim_{i\to\infty}\|f_i(\cdot)-f_*(\cdot)\|_p=0$$

dır.

Şimdi de verilen $h>0$ sayısı için $u(\cdot)\in L_p\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\big)$ fonksiyonunun Steklov fonksiyonu tanımlansın.

Tanım 2.3.2 *(bkz. Lusternik ve Sobolev 1974)*

$p>1$, $u(\cdot)\in L_p([t_0,\theta],\mathbb{R}^m)$ ve $u_*(\cdot):[t_0-1,\theta+1]\to\mathbb{R}^m$ fonksiyonu, $t\in[t_0-1,\theta+1]$ için

$$u_*(t)=\begin{cases} u(t) & ,\ t\in[t_0,\theta] \\ 0 & ,\ t\in[t_0-1,t_0)\bigcup(\theta,\theta+1]\end{cases}\tag{2.3.1}$$

olarak tanımlansın.

$0 < h < 1$ ve $t \in [t_0, \theta]$ olmak üzere, $u(\cdot) \in L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^m)$ fonksiyonunun $u_h(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ Steklov fonksiyonu her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$u_h(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} u_*(\tau)\, d\tau \tag{2.3.2}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 2.3.3 *$p > 1$, $u(\cdot) \in L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^m)$, $\|u(\cdot)\|_p \leq \mu_0$, her $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u(t)\| \leq H$ ve $h \in (0,1)$ olsun. O zaman $\|u_h(\cdot)\|_p \leq \|u(\cdot)\|_p \leq \mu_0$, her $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u_h(t)\| \leq H$ ve $u_h(\cdot)$ fonksiyonu $\frac{H}{h}$ sabiti ile Lipschitz süreklidir.*

Kanıt. $h \in (0,1)$ seçilip sabitlensin. (2.3.2) den, her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$\|u_h(t)\| \leq \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} \|u_*(\tau)\|\, d\tau \tag{2.3.3}$$

olur. Burada $u_*(\cdot)$, (2.3.1) ile tanımlıdır. Her $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u(t)\| \leq H$ olduğundan, (2.3.1) den $\|u_*(t)\| \leq H$ olur. Böylece,

$$\|u_h(t)\| \leq \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} \|u_*(\tau)\|\, d\tau \leq \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} H\, d\tau = H$$

olduğu görülür.

(2.3.3) eşitsizliğinde Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|u_h(t)\| &\leq \frac{1}{2h} \left(\int_{t-h}^{t+h} 1^q\, d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{t-h}^{t+h} \|u_*(\tau)\|^p\, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (2h)^{\frac{1}{q}-1} \left(\int_{t-h}^{t+h} \|u_*(\tau)\|^p\, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{1}{2h}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{t-h}^{t+h} \|u_*(\tau)\|^p\, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

olur. $\tau = s+t$ denilirse, $d\tau = ds$ olduğundan ve (2.3.4) den, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|u_h(t)\|^p \leq \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} \|u_*(s+t)\|^p \, ds \tag{2.3.5}$$

olur. (2.3.5) eşitsizliğinde her iki tarafın t_0 dan θ ya integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}\int\limits_{t_0}^{\theta} \|u_h(t)\|^p \, dt &\leq \frac{1}{2h}\int\limits_{t_0}^{\theta}\left(\int\limits_{-h}^{h} \|u_*(s+t)\|^p \, ds\right) dt \\ &= \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\left(\int\limits_{t_0}^{\theta} \|u_*(s+t)\|^p \, dt\right) ds \qquad (2.3.6)\end{aligned}$$

olur. $s+t = \upsilon$ denilirse, $dt = d\upsilon$ olduğundan (2.3.6) dan

$$\int\limits_{t_0}^{\theta} \|u_h(t)\|^p \, dt \leq \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\left(\int\limits_{s+t_0}^{s+\theta} \|u_*(\upsilon)\|^p \, d\upsilon\right) ds \tag{2.3.7}$$

olduğu elde edilir.

$\int\limits_{s+t_0}^{s+\theta} \|u_*(\upsilon)\|^p \, d\upsilon$ integrali değerlendirilsin. Burada $h \in (0,1)$ olmak üzere $s \in [-h, h]$ dir.

$s \in [0, h]$ olsun. O halde,

$$\int\limits_{s+t_0}^{s+\theta} \|u_*(\upsilon)\|^p \, d\upsilon = \int\limits_{s+t_0}^{\theta} \|u_*(\upsilon)\|^p \, d\upsilon + \int\limits_{\theta}^{s+\theta} \|u_*(\upsilon)\|^p \, d\upsilon$$

olduğu elde edilir. $u_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından $\int\limits_{\theta}^{s+\theta} \|u_*(\upsilon)\|^p \, d\upsilon = 0$ olur. O halde son eşitsizlikten ve (2.3.1) den

$$\begin{aligned}\int\limits_{s+t_0}^{s+\theta} \|u_*(\upsilon)\|^p \, d\upsilon &= \int\limits_{s+t_0}^{\theta} \|u_*(\upsilon)\|^p \, d\upsilon \\ &\leq \int\limits_{t_0}^{\theta} \|u_*(\upsilon)\|^p \, d\upsilon \\ &= \int\limits_{t_0}^{\theta} \|u(\upsilon)\|^p \, d\upsilon \\ &= \left(\|u(\cdot)\|_p\right)^p \qquad (2.3.8)\end{aligned}$$

olur.

$s \in [-h, 0)$ olsun. O halde,

$$\int\limits_{s+t_0}^{s+\theta} \|u_*(\upsilon)\|^p \, d\upsilon = \int\limits_{s+t_0}^{t_0} \|u_*(\upsilon)\|^p \, d\upsilon + \int\limits_{t_0}^{s+\theta} \|u_*(\upsilon)\|^p \, d\upsilon$$

olduğu elde edilir. $u_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından $\int\limits_{s+t_0}^{t_0} \|u_*(\upsilon)\|^p \, d\upsilon = 0$ olur. O halde son eşitsizlikten ve (2.3.1) den

$$\begin{aligned} \int\limits_{s+t_0}^{s+\theta} \|u_*(\upsilon)\|^p \, d\upsilon &= \int\limits_{t_0}^{s+\theta} \|u_*(\upsilon)\|^p \, d\upsilon \\ &\leq \int\limits_{t_0}^{\theta} \|u_*(\upsilon)\|^p \, d\upsilon \\ &= \int\limits_{t_0}^{\theta} \|u(\upsilon)\|^p \, d\upsilon \\ &= \left(\|u(\cdot)\|_p\right)^p \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

olduğu bulunur.

(2.3.8) ve (2.3.9) dan, keyfi $s \in [-h, h]$ için

$$\int\limits_{s+t_0}^{s+\theta} \|u_*(\upsilon)\|^p \, d\upsilon \leq \left(\|u(\cdot)\|_p\right)^p \tag{2.3.10}$$

olduğu elde edilir.

Bu durumda (2.3.7) ve (2.3.10) dan

$$\begin{aligned} \int\limits_{t_0}^{\theta} \|u_h(t)\|^p \, dt &\leq \frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} \left(\int\limits_{s+t_0}^{s+\theta} \|u_*(\upsilon)\|^p \, d\upsilon \right) ds \\ &= \frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} \left(\|u(\cdot)\|_p\right)^p ds = \left(\|u(\cdot)\|_p\right)^p \end{aligned}$$

olduğu bulunur. Böylece,

$$\|u_h(\cdot)\|_p = \left(\int\limits_{t_0}^{\theta} \|u_h(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u(\cdot)\|_p \leq \mu_0$$

olduğu elde edilir.

Ayrıca, (2.3.2) den, h.h. $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\frac{d}{dt}\big(u_h(t)\big) = \frac{1}{2h}[u_*(t+h) - u_*(t-h)] \tag{2.3.11}$$

olur. Her $\tau \in [t_0, \theta]$ için, $\|u_*(t)\| \le H$ olduğundan, (2.3.11) den h.h. $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\left\|\dot{u_h}(t)\right\| \le \frac{1}{2h}(\|u_*(t+h)\| + \|u_*(t-h)\|) \le \frac{2H}{2h} = \frac{H}{h} \tag{2.3.12}$$

olduğu bulunur.

Keyfi $t_1, t_2 \in [t_0, \theta]$ alınsın ve sabitlensin. Genelliği bozmaksızın $t_2 > t_1$ olsun. O halde (2.3.12) den,

$$\|u_h(t_2) - u_h(t_1)\| \le \int\limits_{t_1}^{t_2} \left\|\dot{u_h}(t)\right\| dt \le \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{H}{h}\, dt = \frac{H}{h}(t_2 - t_1)$$

olur. Böylece $u_h(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu, $\frac{H}{h}$ sabiti ile Lipschitz süreklidir. ■

Önerme 2.3.4 *$p > 1$, $u(\cdot) \in L_p\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^m\big)$ ve $h \in (0, 1)$ için $u_h(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $u(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun Steklov fonksiyonu olsun. O zaman,*

$$\lim_{h \to 0^+} \|u_h(\cdot) - u(\cdot)\|_p = 0$$

olur.

Kanıt. Keyfi $\varepsilon > 0$ alınıp sabitlensin. Keyfi $h \in (0, h_\varepsilon)$ için

$$\|u_h(\cdot) - u(\cdot)\|_p < \varepsilon$$

olacak biçimde $h_\varepsilon > 0$ sayısının var olduğu görülsün.

$C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^m\big)$ sürekli fonksiyonlar uzayı $L_p\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^m\big)$ uzayında yoğun olduğundan,
$u(\cdot) \in L_p\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^m\big)$ için

$$\|u(\cdot) - w(\cdot)\|_p < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.3.13}$$

olacak biçimde $w(\cdot) \in C\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\big)$ vardır.

$h \in (0,1)$ için, $w_h(\cdot) : [t_0,\theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu sürekli $w(\cdot) : [t_0,\theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun Steklov fonksiyonu olsun. Yani, $w_h(\cdot) : [t_0,\theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu, her $t \in [0,1]$ için

$$w_h(t) = \frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} w_*(\tau)\,d\tau \tag{2.3.14}$$

olsun. Burada $w_*(\cdot) : [t_0-1,\theta+1] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $w(\cdot) : [t_0,\theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun genişlemesidir ve

$$w_*(t) = \begin{cases} w(t) & , \ t \in [t_0,\theta] \\ 0 & , \ t \in [t_0-1,t_0)\bigcup(\theta,\theta+1] \end{cases} \tag{2.3.15}$$

olarak tanımlanır.

Verilen fonksiyonun Steklov fonksiyonunun tanımından, keyfi $t \in [t_0,\theta]$ için

$$\begin{aligned} w_h(t) - u_h(t) &= \frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} w_*(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} u_*(\tau)\,d\tau \\ &= \frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} [w_*(\tau) - w_*(\tau)]\,d\tau \\ &= \big(w(t) - u(t)\big)_h \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

olur. O halde (2.3.16) ve Önerme 2.3.3 den,

$$\|w_h(\cdot) - u_h(\cdot)\|_p = \big\|\big(w(\cdot) - u(\cdot)\big)_h\big\|_p \le \|w(\cdot) - u(\cdot)\|_p \tag{2.3.17}$$

olduğu elde edilir. (2.3.13) ve (2.3.17) den, her $h \in (0,1)$ için

$$\|w_h(\cdot) - u_h(\cdot)\|_p \le \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.3.18}$$

olduğu bulunur.

Şimdi verilen $\dfrac{\varepsilon}{3}$ sayısı ve $h \in (0,h_\varepsilon)$ için

$$\|w_h(\cdot) - w(\cdot)\|_p \le \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak biçimde $h_\varepsilon > 0$ sayısının var olduğu gösterilsin.

Önce h.h. $t \in [t_0, \theta]$ için $\lim\limits_{h \to 0^+} w_h(t) = w(t)$ olduğu kanıtlansın.

Keyfi $t_* \in (t_0, \theta)$ alınarak sabitlensin. O zaman keyfi $h \in [0, h_*]$ için $[t_* - h, t_* + h] \subset [t_0, \theta]$ olacak biçimde $h_* > 0$ vardır. Herhangi $h \in (0, h_*)$ alınıp sabitlensin. Bu durumda keyfi $\tau \in [t_* - h, t_* + h]$ için $w_*(\tau) = w(\tau)$ ve

$$w_h(t_*) = \frac{1}{2h} \int\limits_{t_*-h}^{t_*+h} w_*(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2h} \int\limits_{t_*-h}^{t_*+h} w(\tau)\, d\tau \tag{2.3.19}$$

olur. Burada $w_*(\cdot)$ fonksiyonu (2.3.15) ile tanımlıdır ve $w(\cdot)$ fonksiyonunun genişlemesidir.

$w(\cdot) : [t_* - h, t_* + h] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu sürekli olduğundan dolayı, ortalama değer teoreminden ve (2.3.19) dan,

$$w_h(t_*) = \frac{1}{2h} 2h w(t_h) = w(t_h) \tag{2.3.20}$$

olacak biçimde bir $t_h \in [t_* - h, t_* + h]$ vardır.

Keyfi $h \in (0, h_*)$ için $t_h \in [t_* - h, t_* + h]$ olduğundan, $h \to 0^+$ iken $t_h \to t_* \in (t_0, \theta)$ olur. $w(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu sürekli olduğundan, (2.3.20) den $\lim\limits_{h \to 0^+} w_h(t_*) = w(t_*)$ olur. $t_* \in (t_0, \theta)$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, keyfi $t \in (t_0, \theta)$ için $\lim\limits_{h \to 0^+} w_h(t) = w(t)$ olur. Bu ise h.h. $t \in [t_0, \theta]$ için $\lim\limits_{h \to 0^+} w_h(t) = w(t)$ olması demektir.

Böylece, h.h. $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\lim_{h \to 0^+} \|w_h(t) - w(t)\| = 0 \tag{2.3.21}$$

olur.

$w(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu sürekli olduğundan, $\|w(\cdot)\|_C = \max\limits_{t \in [t_0, \theta]} \|w(t)\| = v_* < \infty$ olur. Bu durumda, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|w(t)\| \leq v_* \tag{2.3.22}$$

olduğu elde edilir. O halde (2.3.15) ve (2.3.22) den, her $t \in [t_0, \theta]$ için $\|w_*(t)\| \leq v_*$ olur.

(2.3.14) den, her $h \in (0,1)$ ve $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|w_h(t)\| \leq \frac{1}{2h} \int\limits_{t-h}^{t+h} \|w_*(\tau)\| \, d\tau \leq \frac{1}{2h} \int\limits_{t-h}^{t+h} v_* \, d\tau = v_* \tag{2.3.23}$$

olur.

$g(\cdot) : [t_0, \theta] \to [0, \infty)$ fonksiyonunu, her $t \in [t_0, \theta]$ için $g(t) = v_*$ olarak tanımlansın. O halde $g(\cdot) \in L_p\big([t_0, \theta], [0, \infty)\big)$ olur ve (2.3.23) dan, her $h \in (0,1)$ ve $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|w_h(t)\| \leq g(t) \tag{2.3.24}$$

olduğu elde edilir.

$i \to \infty$ iken $h_i \to 0$ olacak biçimde $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi alınsın ve genellği bozmaksızın her $i = 1, 2, \ldots$ için $h_i < 1$ olduğu kabul edilsin. O zaman (2.3.21) den, h.h. $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\lim_{i \to \infty} \|w_{h_i}(t) - w(t)\| = 0 \tag{2.3.25}$$

ve (2.3.24) den her $i = 1, 2, \ldots$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|w_{h_i}(t)\| \leq g(t) \tag{2.3.26}$$

olduğu bulunur. (2.3.25), (2.3.26) ve Önerme 2.3.1 den

$$\lim_{i \to \infty} \|w_{h_i}(\cdot) - w(\cdot)\|_p = 0 \tag{2.3.27}$$

olduğu elde edilir. $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi keyfi seçildiğinden, (2.3.27) den

$$\lim_{h \to 0} \|w_h(\cdot) - w(\cdot)\|_p = 0$$

olduğu bulunur. O halde $\dfrac{\varepsilon}{3}$ sayısı için $h \in (0, h_\varepsilon)$ iken

$$\|w_h(\cdot) - w(\cdot)\|_p < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.3.28}$$

olacak biçimde $h_\varepsilon > 0$ vardır.

Keyfi $h \in (0, h_\varepsilon)$ alınsın. O zaman (2.3.13), (2.3.18) ve (2.3.28) den

$$\begin{aligned}\|u_h(\cdot) - u(\cdot)\|_p &\leq \|u_h(\cdot) - w_h(\cdot)\|_p + \|w_h(\cdot) - w(\cdot)\|_p + \|w(\cdot) - u(\cdot)\|_p \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Böylece önerme kanıtlanmış olur. ■

2.4 Gronwall Eşitsizlikleri

Önerme 2.4.1 *$u(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}$, $\psi(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan sürekli fonksiyonlar, $c \geq 0$ ve keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için,*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} \psi(\tau) u(\tau)\, d\tau \tag{2.4.1}$$

olsun. O zaman her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$u(t) \leq c e^{\int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau} \tag{2.4.2}$$

olur.

Kanıt. $V(t) = c + \int_{t_0}^{t} \psi(\tau) u(\tau)\, d\tau$, $t \in [t_0, \theta]$ olsun. O zaman her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$V(t) \geq 0$$

$$u(t) \leq V(t) \tag{2.4.3}$$

$$\dot{V}(t) = \psi(t) u(t) \tag{2.4.4}$$

$$V(t_0) = c \tag{2.4.5}$$

olur. (2.4.3) ve (2.4.4) den, her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$\dot{V}(t) = \psi(t) V(t)$$

olur. Bu durumda,

$$\dot{V}(t) e^{-\int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau} - e^{-\int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau} \psi(t) V(t) \leq 0$$

$$\frac{d}{dt}\Big(V(t) e^{-\int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau}\Big) \leq 0$$

$$V(t) e^{-\int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau} - V(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t_0} \psi(\tau)\, d\tau} \leq 0$$

olur. O halde (2.4.5) den

$$V(t) e^{-\int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau} \leq c$$

ve

$$V(t) \le ce^{\int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau}$$

olduğu bulunur. (2.4.3) ve son eşitsizlikten önermenin kanıtı elde edilir. ■

Önerme 2.4.2 *$u(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}$, $\psi(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}$, $h(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan sürekli fonksiyonlar, $h(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}$ azalmayan fonksiyon ve her $t \in [t_0, \theta]$ için,*

$$u(t) \le h(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau) u(\tau)\, d\tau \tag{2.4.6}$$

olsun. O zaman her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$u(t) \le h(t) e^{\int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau} \tag{2.4.7}$$

olur.

Kanıt. Keyfi $t_* \in [t_0, \theta]$ alınarak sabitlensin. $t_* = t_0$ iken (2.4.6) dan

$$u(t_*) = u(t_0) \le h(t_0) = h(t_*) = h(t_*) e^{\int\limits_{t_*}^{t_*} \psi(\tau)\, d\tau} \tag{2.4.8}$$

olur. Yani $t_* = t_0$ iken (2.4.7) eşitsizliği doğrudur.

$t_* > t_0$ olsun. $h(\cdot)$ azalmayan fonksiyon olduğundan her $t \in [t_0, t_*]$ için $h(t) \le h(t_*)$ olur. O halde (2.4.6) dan keyfi $t \in [t_0, t_*]$ için

$$u(t) \le h(t_*) + \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau) u(\tau)\, d\tau$$

olur. $c = h(t_*) \ge 0$ dersek Önerme 2.4.1 den her $t \in [t_0, t_*]$ için,

$$u(t) \le h(t_*) e^{\int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau} \tag{2.4.9}$$

olur. O halde $t = t_*$ iken (2.4.9) dan

$$u_*(t) \le h(t_*) e^{\int\limits_{t_0}^{t_*} \psi(\tau)\, d\tau} \tag{2.4.10}$$

olur. $t_* \in (t_0, \theta]$ keyfi sabitlenmiş olduğundan (2.4.10) dan, her $t \in (t_0, \theta]$ için

$$u(t) \leq h(t) e^{\int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau} \tag{2.4.11}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak (2.4.8) ve (2.4.11) den, her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$u(t) \leq h(t) e^{\int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau} \tag{2.4.12}$$

olduğu elde edilir.

■

3 KONTROL SİSTEMİN ERİŞİM KÜMELERİNİN TEMEL ÖZELLİKLERİ

3.1 Kontrol Sistemin Erişim Kümeleri, Temel Tanım ve Koşullar

Davranışı

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) \in X_0 \tag{3.1.1}$$

diferansiyel denklemi ile verilen kontrol sistemi ele alınsın. Burada $x \in \mathbb{R}^n$ sistemin faz vektörü, $u \in \mathbb{R}^m$ kontrol vektörü, $t \in [t_0, \theta]$ zaman, $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt kümedir.

$p \geq 1$ olmak üzere $L_p([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m)$ ile ölçülebilir ve $\|u(\cdot)\|_p \leq \infty$ olacak biçimdeki $u(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonlar uzayı gösterilsin. Burada,

$$\|u(\cdot)\|_p = \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

olarak tanımlanır ve $\|\cdot\|$ Euclidean normunu göstermektedir.

(3.1.1) sisteminin sağ tarafındaki $f(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın.

3.1.A. $f(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu süreklidir.

3.1.B. Keyfi sınırlı $D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kümesi ve keyfi $(t, x_1) \in D$, $(t, x_2) \in D$, $u_1 \in \mathbb{R}^m$, $u_2 \in \mathbb{R}^m$ için

$$\|f(t, x_1, u_1) - f(t, x_2, u_2)\| \leq (L_1 + L_2 \|u_2\|) \|x_1 - x_2\| + L_3 \|u_1 - u_2\|$$

olacak biçimde $L_1 = L_1(D) > 0$, $L_2 = L_2(D) > 0$ ve $L_3 = L_3(D) > 0$ sabitleri vardır.

3.1.C. Her $(t, x, u) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ için

$$\|f(t, x, u)\| \leq c(1 + \|x\|)(1 + \|u\|)$$

olacak biçimde $c > 0$ sabiti vardır.

$p > 1$ ve $\mu_0 > 0$ için

$$U_p = \left\{ u(\cdot) \in L_p\left([t_0, \theta]; \mathbb{R}^m\right) : \|u(\cdot)\|_p \leq \mu_0 \right\} \tag{3.1.2}$$

olsun. (3.1.2) ile tanımlanan $U_p \subset L_p\left([t_0, \theta], \mathbb{R}^m\right)$ kümesine mümkün kontrol fonksiyonları kümesi denir. Açıktır ki U_p, $L_p\left([t_0, \theta], \mathbb{R}^m\right)$ uzayının merkezi orijinde olan μ_0 yarıçaplı kapalı yuvarıdır.

(3.1.1) sisteminin (t_0, x_0) başlangıç noktasından $u(\cdot) \in U_p$ mümkün kontrol fonksiyonunun ürettiği yörüngesi tanımlansın.

Tanım 3.1.3 *$x_0 \in X_0$, $u(\cdot) \in U_p$ olsun. Hemen hemen her $t \in [t_0, \theta]$ için $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ diferansiyel denklemini ve $x(t_0) = x_0$ başlangıç koşulunu sağlayan mutlak sürekli $x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna, (3.1.1) sisteminin (t_0, x_0) başlangıç noktasından $u(\cdot) \in U_p$ mümkün kontrol fonksiyonunun ürettiği yörüngesi denir ve $x\left(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)\right)$ olarak gösterilir.*

$$X_p(t_0, X_0) = \left\{ x\left(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)\right) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n \, : \, x_0 \in X_0, u(\cdot) \in U_p \right\}$$

olsun. $X_p(t_0, X_0)$ kümesine (3.1.1) sisteminin yörüngeler kümesi denir.

Şimdi, (3.1.1) sisteminin $t \in [t_0, \theta]$ zaman anındaki erişim kümesi ve (3.1.1) sisteminin integral tüneli tanımlansın.

Tanım 3.1.4 *$t \in [t_0, \theta]$ olsun.*

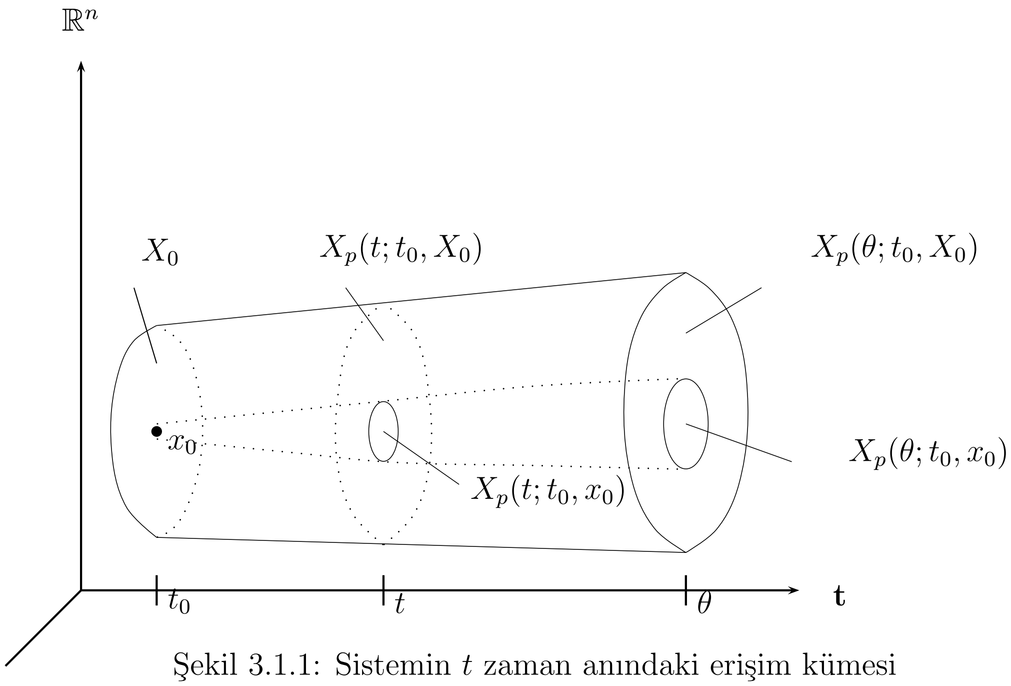
$$X_p(t; t_0, X_0) = \left\{ x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in X_p(t_0, X_0) \right\}$$

olarak tanımlanan $X_p(t; t_0, X_0)$ kümesine (3.1.1) sisteminin, (3.1.2) kısıtı altında, t zaman anındaki erişim kümesi denir.

Tanım 3.1.5 *(3.1.1) sisteminin (t_0, X_0) başlangıç kümesinden çıkan tüm yörüngelerinin grafiklerinin oluşturduğu kümeye, (3.1.1) sisteminin integral tüneli denir. İntegral tünel*

$$H_p(t_0, X_0) = \left\{ (t, x(t)) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in X_p(t_0, X_0) \right\}$$

ile gösterilir (Şekil 3.1.1).



Şekil 3.1.1: Sistemin t zaman anındaki erişim kümesi

(3.1.2) kısıtı olan (3.1.1) sisteminin sağ tarafı, yani $f(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu x faz vektörüne ve u kontrol vektörüne göre doğrusal iken, erişim kümelerinin çeşitli topolojik özellikleri ve yaklaşık hesaplama yöntemleri "Chentsov (1995a, 1995b, 1997), Conti (1974), Gozzi ve Loreti (1999), Krasowskii (1968), Leigh (1980), Lou (2004), Motta ve Sartori (2000), Sokolov (1972), Solomatin (1984), Ukhobotov (1977, 1987, 2005), Ushakov (1991)" de ele alınmıştır.

$f(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun u kontrol vektörüne göre doğrusal olduğu, x faz vektörüne göre ise doğrusal olmadığı durumda ise, erişim kümelerinin topolojik özellikleri ve yaklaşık hesaplama yöntemleri "Guseinov ve ark. (1999, 2004, 2007), Motta ve Sartori (2003)" de incelenmiştir.

$f(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun x faz vektörüne ve u kontrol vektörüne göre doğrusal olmadığı durumda ise, erişim kümelerinin topolojik özellikleri "Guseinov ve Nazlipinar (2006, 2007a, 2007b), Motta ve Rampozza (2000), Polyak (2003), Soravia (2000)" de araştırılmıştır.

$f(t, x, u) = \varphi(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t)$ olmak üzere davranışı (3.1.1) ile verilen kontrol sistemini ele alınsın. O halde kontrol sisteminin davranışı,

$$\dot{x} = \varphi(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t), \quad x(t_0) \in X_0 \tag{3.1.3}$$

diferansiyel denklemi ile verilmiş olur. Burada $x \in \mathbb{R}^n$ sistemin faz vektörü, $u \in \mathbb{R}^m$ kontrol vektörü, $\varphi(t, x(t))$ n-boyutlu vektör değerli fonksiyon, $B(t, x(t))$ $n \times m$ boyutlu matris fonksiyon ve $t \in [t_0, \theta]$ zamanı göstermektedir. Ayrıca (3.1.3) diferansiyel denkleminin mümkün $u(\cdot)$ kontrol fonksiyonları $1 < p < \infty$ olmak üzere $u(\cdot) \in U_p$ olarak seçilir. Burada U_p mümkün kontrol fonksiyonlar kümesi (3.1.2) ile tanımlanır.

(3.1.3) diferansiyel denkleminin sağ tarafının aşağıdaki koşulları sağladığı kabul edilsin.

3.1.A*. $\varphi(t, x)$ ve $B(t, x)$ fonksiyonları (t, x)'e göre sürekli ve x' e göre yerel Lipcshitz sürekli fonksiyonlar olsun. Yani, her sınırlı $D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ bölgesi ve keyfi (t, x_1), $(t, x_2) \in D$ öğeleri için

$$\|\varphi(t, x_1) - \varphi(t, x_2)\| \leq L_1 \|x_1 - x_2\|$$

ve

$$\|B(t, x_1) - B(t, x_2)\| \leq L_2 \|x_1 - x_2\|$$

olacak şekilde $L_1 = L_1(D) > 0$ ve $L_2 = L_2(D) > 0$ sayıları vardır.

3.1.B*. Keyfi $(t, x) \in [t_0, \theta]$ öğesi için

$$\|\varphi(t, x)\| \leq c_1(1 + \|x\|)$$

ve

$$\|B(t, x)\| \leq c_2(1 + \|x\|)$$

olacak şekilde c_1 ve c_2 pozitif sabitleri var olsun.

Bu durumda aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 3.1.6 *3.1.A* ve 3.1.B* koşullarını sağlayan (3.1.3) sistemi, 3.1.A-3.1.C koşullarını da sağlar. Başka bir deyişle 3.1.A-3.1.C koşulları 3.1.A* ve 3.1.B* koşullarını kapsar.*

Kanıt. 3.1.A nın geçerliliği açıktır.

3.1.B koşulunun sağlandığı gösterilsin. $(t, x_1), (t, x_2) \in D$ ve $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m$ için

$$\begin{aligned}\|f(t,x_1,u_1) - f(t,x_2,u_2)\| &= \|\varphi(t,x_1) + B(t,x_1)u_1 - \varphi(t,x_2) - B(t,x_2)u_2\| \\ &\le \|\varphi(t,x_1) - \varphi(t,x_2)\| + \|B(t,x_1)u_1 - B(t,x_2)u_2\|\end{aligned}$$

olur. Burada $B(t, x_1)u_2$ öğesi ikinci normun içerisine eklenip çıkarılır ve üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\|f(t,x_1,u_1) - f(t,x_2,u_2)\| \le \|\varphi(t,x_1) - \varphi(t,x_2)\| &+ \|B(t,x_1)\| \|u_1 - u_2\| \\ &+ \|B(t,x_1) - B(t,x_2)\| \|u_2\|\end{aligned}$$

olduğu bulunur.

Şimdi 3.1.A* ve 3.1.B* koşulları kullanılırsa, $L_3 = \sup\limits_{(t,x)\in D} \|B(t,x)\|$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\|f(t,x_1,u_1) - f(t,x_2,u_2)\| &\le L_1 \|x_1 - x_2\| + L_3 \|u_1 - u_2\| + L_2 \|u_2\| \|x_1 - x_2\| \\ &= (L_1 + L_2 \|u_2\|) \|x_1 - x_2\| + L_3 \|u_1 - u_2\|\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla 3.1.A* koşulunu sağlayan (3.1.3) sistemi 3.1.B koşulunu da sağlamış olur.

Son olarak 3.1.C. koşulunun da sağlandığı görülsün. $(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ öğesi için 3.1.B* koşulu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\|f(t,x,u)\| &= \|\varphi(t,x) + B(t,x)u\| \\ &\le \|\varphi(t,x)\| + \|B(t,x)\| \|u\| \\ &\le c_1(1 + \|x\|) + c_2(1 + \|x\|) \|u\|\end{aligned}$$

olur. $c = \max\{c_1, c_2\}$ denilirse,

$$\begin{aligned}\|f(t,x) + B(t,x)u\| &\le c(1 + \|x\|) + c(1 + \|x\|) \|u\| \\ &= c(1 + \|x\|)(1 + \|u\|)\end{aligned}$$

olduğu görülmüş olur. Yani 3.1.B* koşulunu sağlayan (3.1.3) sistemi, 3.1.C koşulunu da sağlar. ■

(3.1.3) biçiminde verilen ve 3.1.A* - 3.1.C* koşullarını sağlayan kontrol sistemlerin erişim kümeleri $\mathbb{R}^n$ uzayında kompakt kümelerdir ve bu kümelerin yaklaşık olarak hesaplanması daha önce ele alınmıştır (bkz., Guseinov ve ark. 1999, 2007).

Şimdi (3.1.1) biçiminde olmak üzere (3.1.3) biçiminde olmayan ve 3.1.A - 3.1.C koşullarını sağlayan bir sistem örneği verilsin.

Örnek 3.1.7 *Davranışı,*

$$\dot{x} = \sin(xu) \tag{3.1.4}$$

diferansiyel denklemi ile verilen kontrol sistemi ele alınsın. Burada $x \in \mathbb{R}$ *ve* $u \in \mathbb{R}$ *dir.*

İlk olarak 3.1.A koşulunun sağlandığı açıktır.

Şimdi (3.1.4) denkleminin sağ tarafının 3.1.B koşulunu sağladığı gösterilsin. $f(z) = \sin(z)$ *fonksiyonu için* $|f'(z)| = |\cos(z)| \leq 1$ *olduğundan, bu fonksiyon* $L = 1$ *sabiti ile Lipschitz süreklidir. Buna göre* $(t, x_1), (t, x_2) \in D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}$ *ve* $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} |f(t, x_1, u_1) - f(t, x_2, u_2)| &= |\sin(x_1u_1) - \sin(x_2u_2)| \\ &\leq |x_1u_1 - x_2u_2| \\ &\leq |x_1u_1 - x_1u_2| + |x_1u_2 - x_2u_2| \\ &= |x_1| \, |u_1 - u_2| + |u_2| \, |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

bulunur. $L_3 = \max\limits_{(t,x)\in D} |x|$, $L_2 = 1$ *ve* $L_1 = 1$ *olarak alınırsa,*

$$\begin{aligned} |f(t, x_1, u_1) - f(t, x_2, u_2)| &= |\sin(x_1u_1) - \sin(x_2u_2)| \\ &\leq (L_1 + L_2 \, |u_2|) \, |x_1 - x_2| + L_3 \, |u_1 - u_2| \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.1.4) denklemi için 3.1.B koşulu da sağlanmaktadır.

Son olarak 3.1.C koşulu kontrol edilsin. Keyfi $(t, x, u) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *için*

$$\begin{aligned} |f(t,x,u)| &= |\sin(xu)| \\ &\leq |xu| = |x|\,|u| \end{aligned}$$

olduğundan, $c = 1$ *olmak üzere,*

$$|f(t,x,u)| \leq c(1+|x|)(1+|u|)$$

olduğu görülmüş olur. Dolayısıyla (3.3.5) denklemi 3.1.C koşulunu da sağlamaktadır.

3.2 Erişim Kümelerinin Sınırlılığı

Şimdi, (3.1.2) kısıtı olan (3.1.1) sisteminin erişim kümelerinin sınırlılığı incelensin. Bunun için bir yardımcı önerme verilsin.

Önerme 3.2.1 *Her* $u(\cdot) \in U_p$ *ve her* $t \in [t_0, \theta]$ *için* $L_1 > 0$ *ve* $L_2 > 0$ *olmak üzere,*

$$\int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u(\tau)\|)\, d\tau \leq L_1(\theta - t_0) + L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \tag{3.2.1}$$

olur.

Kanıt. $u(\cdot) \in U_p$ keyfi olsun. Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u(\tau)\|)\, d\tau \leq L_1(t - t_0) + L_2 \left(\int_{t_0}^{t} 1^{\frac{p}{p-1}}\, d\tau \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|^p\, d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$$

olur. $u(\cdot) \in U_p$ olduğundan (3.1.2)'ye göre her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u(\tau)\|)\, d\tau \leq L_1(\theta - t_0) + L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0$$

olduğu bulunur. ■

Aşağıdaki önermede, $p > 1$, $\mu_* \in (0, \mu_0 + 1)$ ve $h_n(X_0, X_*) \leq 1$ olmak üzere, kontrol fonksiyonları üzerinde

$$\|u_*(\cdot)\|_p \leq \mu_* \tag{3.2.2}$$

kısıtı olan

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) \in X_* \tag{3.2.3}$$

kontrol sisteminin tüm yörüngelerinin grafiklerinin sınırlı bir $D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ bölgesinin içerisinde bulunduğu gösterilmektedir.

$X_p^{\mu_*}(t_0, X_*)$ ile (3.2.2) integral kısıtı olan (3.2.3) kontrol sisteminin yörüngeler kümesi gösterilsin.

$$U_p^{\mu_*} = \left\{ u(\cdot) \in L_p\left([t_0, \theta], R^m\right) : \|u(\cdot)\|_p \leq \mu_* \right\} \tag{3.2.4}$$

olsun.

Önerme 3.2.2 *$p > 1$, $\mu_* \in (0, \mu_0 + 1)$, $h_n(X_0, X_*) \leq 1$ olsun. O zaman her $x_*(\cdot) \in X_p^{\mu_*}(t_0, X_*)$ için*

$$\|x_*(\cdot)\|_C \leq r_*$$

olur. Burada

$$r_* = d_1 \exp(k), \tag{3.2.5}$$

$$d_1 = 1 + d_* + k, \tag{3.2.6}$$

$$d_* = \max\{\|x\| : x \in X_0\}, \tag{3.2.7}$$

$$k = c\left[(\theta - t_0) + l_*\left(\mu_0 + 1\right)\right], \tag{3.2.8}$$

$$l_* = \max\left\{(\theta - t_0), 1\right\} \tag{3.2.9}$$

dır. $c > 0$ 3.1.C koşulunda verilen sabittir.

Kanıt. Keyfi $x_*(\cdot) \in X_p^{\mu_*}(t_0, X_*)$ alınsın. Her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$x_*(t) = x_* + \int_{t_0}^{t} f\left(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)\right) d\tau$$

olacak şekilde $x_* \in X_*$ ve $u_*(\cdot) \in U_p^{\mu_*}$ vardır. Eşitliğin her iki tarafının normu alınırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x_*(t)\| \leq \|x_*\| + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\| \, d\tau \tag{3.2.10}$$

olur. $h_n(X_0, X_*) \leq 1$ olduğundan $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ olmak üzere $X_* \subset X_0 + B_n$ olur. $x_* \in X_*$ olduğundan, $x_* \in X_0 + B_n$ ve (3.2.7) den,

$$\|x_*\| \leq 1 + d_* \tag{3.2.11}$$

olduğu bulunur. O halde (3.2.10), (3.2.11) ve 3.1.C koşulundan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x_*(t)\| &\leq (1 + d_*) + c \int_{t_0}^{t} (1 + \|x_*(\tau)\|)(1 + \|u_*(\tau)\|) \, d\tau \\ &= (1 + d_*) + c \int_{t_0}^{t} (1 + \|u_*(\tau)\|) \, d\tau + c \int_{t_0}^{t} (1 + \|u_*(\tau)\|) \|x_*(\tau)\| \, d\tau \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

olur. Diğer yandan Önerme 3.2.1, (3.2.8) ve (3.2.9) dan,

$$\begin{aligned} c \int_{t_0}^{t} (1 + \|u_*(\tau)\|) \, d\tau &\leq c[(\theta - t_0) + (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_*] \\ &\leq c[(\theta - t_0) + (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} (\mu_0 + 1)] \\ &\leq c[(\theta - t_0) + l_*(\mu_0 + 1)] = k \end{aligned}$$

olduğu bulunur. O halde (3.2.6), (3.2.12) ve son eşitsizlikten, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x_*(t)\| \leq d_1 + c \int_{t_0}^{t} (1 + \|u_*(\tau)\|) \|x_*(\tau)\| \, d\tau \tag{3.2.13}$$

olduğu elde edilir. Gronwall eşitsizliği kullanılırsa, (3.2.13) den, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x_*(t)\| &\leq d_1 \exp\left(c \int_{t_0}^{t} (1 + \|u_*(\tau)\|)\, d\tau \right) \\ &\leq d_1 \exp\left[c\big((\theta - t_0) + l_*(\mu_0 + 1) \big) \right] \\ &\leq d_1 \exp(k) \end{aligned}$$

olduğu bulunur. $r_* = d_1 \exp(k)$ olduğundan, $x_*(\cdot) \in X_p^{\mu_*}(t_0, X_*)$ için

$$\|x_*(\cdot)\|_C \leq r_*$$

olur. ■

Bu sonuç, (3.1.2) integral kısıtlaması olan (3.1.1) sisteminin tüm $x(\cdot) \in X_p(t_0, X_0)$ yörüngelerinin ve $p > 1$, $\mu_* \in (0, \mu_0 + 1)$ ve $h_n(X_0, X_*) \leq 1$ olmak üzere (3.2.2) kısıtlaması olan (3.2.3) sisteminin tüm $x_*(\cdot) \in X_p^{\mu_*}(t_0, X_*)$ yörüngelerinin grafiklerinin

$$D = \{(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r_*\} \tag{3.2.14}$$

şeklinde tanımlı D silindirinin içinde kaldığını gösterir. Burada r_*, (3.2.5) ile tanımlıdır.

Bundan sonraki bölümlerde 3.1.B. koşulundaki D kümesi olarak (3.2.14) ile tanımlanan D silindiri düşünülecektir.

Sonuç 3.2.3 *$p > 1$, $\mu_* \in (0, \mu_0 + 1)$, $h_n(X_0, X_*) \leq 1$ olsun. O zaman keyfi $x_*(\cdot) \in X_p^{\mu_*}(t_0, X_*)$, $t \in [t_0, \theta]$ için $(t, x(t)) \in D$ olur. Burada $D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$, (3.2.14) ile tanımlıdır.*

3.3 Yörüngeler Kümesinin Prekompaktlığı

Bu bölümde, (3.1.2) integral kısıtı olan (3.1.1) sisteminin $X_p(t_0, X_0)$ yörüngeler kümesinin prekompaktlığı incelenecektir.

Önerme 3.2.2 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.3.1 *(3.1.2) integral kısıtı olan (3.1.1) sisteminin $X_p(t_0, X_0)$ yörüngeler kümesi düzgün sınırlıdır.*

Sonuç 3.3.2 *(3.1.2) kısıtı olan (3.1.1) sisteminin keyfi $t \in [t_0, \theta]$ zaman anındaki $X_p(t; t_0, X_0)$ erişim kümesi için $X_p(t; t_0, X_0) \subset B_n(r_*)$ içermesi doğrudur. Burada $r_* > 0$, (3.2.5) ile ve tanımlıdır ve $B_n(r_*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r_*\}$ dır.*

r_* sayısı (3.2.5) ile, l_* sayısı ise (3.2.9) ile tanımlanmak üzere

$$k^* = c\,(1 + r_*)\,(l_* + \mu_0)\,. \tag{3.3.1}$$

olsun.

Önerme 3.3.3 *(3.1.2) kısıtı olan (3.1.1) sisteminin $X_p(t_0, X_0)$ yörüngeler kümesi eş süreklidir.*

Kanıt. Keyfi $\varepsilon > 0$ ve $x(\cdot) \in X_p(t_0, X_0)$ seçilsin. Bu durumda,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\tau, x(\tau), u(\tau)\right) d\tau \ , \ t \in [t_0, \theta]$$

olacak şekilde $x_0 \in X_0$ ve $u(\cdot) \in U_p$ vardır. Keyfi $t_1, t_2 \in [t_0, \theta]$ alınarak, genelliği bozmaksızın $t_1 \leq t_2$ olduğu kabul edilsin. O zaman,

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} f\left(\tau, x(\tau), u(\tau)\right) d\tau \right\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|f\left(\tau, x(\tau), u(\tau)\right)\| \, d\tau$$

olur. 3.1.C koşulundan,

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} c\,(1 + \|x(\tau)\|)\,(1 + \|u(\tau)\|)\, d\tau$$

olur. Önerme 3.2.2 uyarınca keyfi $x(\cdot) \in X_p(t_0, X_0)$ ve keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için $\|x(t)\| \leq r_*$ olduğundan, son eşitsizlikten

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq c(1 + r_*) \int_{t_1}^{t_2} (1 + \|u(\tau)\|)\, d\tau \tag{3.3.2}$$

olduğu bulunur. Burada $r_* > 0$, (3.2.5) ile tanımlıdır. Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa, $u(\cdot) \in U_p$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int\limits_{t_1}^{t_2} (1 + \|u(\tau)\|)\, d\tau &\leq |t_2 - t_1| + \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} 1^{\frac{p}{p-1}}\, d\tau\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} \|u(\tau)\|^p\, d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |t_2 - t_1| + \mu_0\, |t_2 - t_1|^{\frac{p-1}{p}}\end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur. O halde l_*, (3.2.9) ile tanımlı olmak üzere, (3.3.2) ve son eşitsizlikten

$$\begin{aligned}\|x(t_1) - x(t_2)\| &\leq c(1 + r_*)\left(|t_2 - t_1| + \mu_0\, |t_2 - t_1|^{\frac{p-1}{p}}\right) \\ &\leq |t_2 - t_1|^{\frac{p-1}{p}}\, c(1 + r_*)\left((\theta - t_0)^{\frac{1}{p}} + \mu_0\right) \\ &\leq |t_2 - t_1|^{\frac{p-1}{p}}\, c(1 + r_*)(l_* + \mu_0)) \qquad (3.3.3)\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. (3.3.1) ve (3.3.3) den

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq k^*\, |t_2 - t_1|^{\frac{p-1}{p}}$$

olur. O halde verilen keyfi $\varepsilon > 0$ için $\delta(\varepsilon) = \left(\dfrac{\varepsilon}{k^*}\right)^{\frac{p}{p-1}}$ olarak alınırsa, $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$ iken $\|x(t_1) - x(t_2)\| < \varepsilon$ olduğu bulunur. $x(\cdot) \in X_p(t_0, X_0)$ keyfi olarak seçildiğinden, $X_p(t_0, X_0)$ yörüngeler kümesi eş sürekli olur. ∎

Sonuç 3.3.1 ve Önerme 3.3.3 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.4 *(3.1.2) kısıtı olan (3.1.1) sisteminin $X_p(t_0, X_0)$ yörüngeler kümesi $C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^n\big)$ uzayında prekompakt kümedir.*

Kanıt. $X_p(t_0, X_0)$ kümesi, düzgün sınırlı ve eşsürekli fonksiyonlar kümesi olduğundan Arzela-Ascoli teoreminden $X_p(t_0, X_0)$ kümesi $C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^n\big)$ uzayında prekompakt küme olur. ∎

Kontrol fonksiyonları üzerinde (3.1.2) integral kısıtı olan (3.1.1) sisteminin erişim kümesi kapalı küme olmayabilir. Aşağıda bu durumu doğrulayan bir örnek verilmiştir.

Örnek 3.3.5 *Davranışı*

$$\dot{x}(t) = -y^2(t) + u^2(t), \quad x(0) = 0 \tag{3.3.4}$$
$$\dot{y}(t) = u(t), \quad y(0) = 0$$

diferansiyel denklem sistemi ile verilen kontrol sistem ele alınsın. Burada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *sistemin faz vektörü,* $t \in [0, 1]$ *zaman,* $u \in \mathbb{R}$ *kontrol vektörüdür.* $u(\cdot) \in L_2\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ *kontrol fonksiyonu*

$$\int_0^1 u^2(t)\, dt \leq 1 \tag{3.3.5}$$

integral kısıtını sağlamaktadır. Mümkün kontrol fonksiyonları kümesi U_2^* *ile gösterilsin. O halde,*

$$U_2^* = \{u(\cdot) \in L_2\left([0, 1]; \mathbb{R}\right) : \|u(\cdot)\|_2 \leq 1\}$$

ve (3.3.4) sisteminin mümkün yörüngeler kümesi

$$X_2\big(0, (0, 0)\big) = \Big\{\Big(x\big(\cdot; 0, (0, 0), u(\cdot)\big), y\big(\cdot; 0, (0, 0), u(\cdot)\big)\Big) : u(\cdot) \in U_2^*\Big\}$$

olur. Bu durumda (3.3.4) sisteminin $t \in [0, 1]$ *zaman anındaki erişim kümesi*

$$X_2\big(t; 0, (0, 0)\big) = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : (x(\cdot), y(\cdot)) \in X_2(0, (0, 0))\}$$

olur.

Şimdi $X_2(0, (0, 0))$ *yörüngeler kümesinin sınırlı olduğu kanıtlansın. Keyfi* $(x(\cdot), y(\cdot)) \in X_2(0, (0, 0))$ *alınsın ve sabitlensin. O halde,*

$$\dot{x}(t) = -y^2(t) + u^2(t), \quad x(0) = 0$$
$$\dot{y}(t) = u(t), \quad y(0) = 0$$

olacak biçimde $u(\cdot) \in U_2^*$ *vardır. Böylece, keyfi* $t \in [0, 1]$ *için*

$$x(t) = \int_0^t -y^2(\tau)\, d\tau + \int_0^t u^2(\tau)\, d\tau\ , \tag{3.3.6}$$

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)\, d\tau \tag{3.3.7}$$

olur. Bu durumda (3.3.5), (3.3.7) ve Hölder eşitsizliğinden, keyfi $t \in [0,1]$ *için*

$$|y(t)| \leq \int_0^t |u(\tau)|\, d\tau \leq \left(\int_0^t 1^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |u(\tau)|^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{t} \leq 1 \qquad (3.3.8)$$

olduğu bulunur. Diğer yandan (3.3.5),(3.3.6) ve (3.3.8) den, keyfi $t \in [0,1]$ *için*

$$|x(t)| \leq \int_0^t |y(\tau)|^2\, d\tau + \int_0^t |u(\tau)|^2\, d\tau \leq \int_0^t \tau\, d\tau + 1 = 1 + \frac{t^2}{2} \leq \frac{3}{2} \qquad (3.3.9)$$

olur.

(3.3.8) ve (3.3.9) dan, her $t \in [0,1]$ *için*

$$|x(t)| \leq \frac{3}{2}\ , \qquad |y(t)| \leq 1$$

olur. O halde,

$$\|(x(\cdot), y(\cdot))\|_C = \max_{t\in[0,1]} \|(x(t), y(t))\| = \max_{t\in[0,1]} \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \leq \sqrt{1 + \frac{9}{4}} < 2$$

olur. $(x(\cdot), y(\cdot)) \in X_2(0,(0,0))$ *keyfi seçildiğinden,* $X_2(0,(0,0))$ *yörüngeler kümesi sınırlı kümedir.*

Şimdi $(1,0) \notin X_2(1;0,(0,0))$ *olduğu kanıtlansın. Bu maksatla iddianın aksi varsayılsın.* $(1,0) \in X_2(1;0,(0,0))$ *olsun. Bu durumda,*

$$x(1) = 1, \quad y(1) = 0 \qquad (3.3.10)$$

olmak üzere, her $t \in [0,1]$ *için*

$$x(t) = \int_0^t -y^2(\tau)\, d\tau + \int_0^t {u_*}^2(\tau)\, d\tau\ , \qquad (3.3.11)$$

$$y(t) = \int_0^t u_*(\tau)\, d\tau \qquad (3.3.12)$$

olacak biçimde $u_*(\cdot) \in U_2^*$ *vardır.*

$y(t)=\int\limits_0^t u_*(\tau)\,d\tau$ *olduğundan (3.3.11) eşitliğinden,*

$$x(t)=-\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^\tau u_*(s)\,ds\right)^2 d\tau+\int\limits_0^t u_*^2(\tau)\,d\tau$$

olduğu elde edilir. $t=1$ *anında* $x(1)=1$ *olduğundan*

$$x(1)=\int\limits_0^1 u_*^2(\tau)\,d\tau-\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^\tau u_*(s)\,ds\right)^2 d\tau=1$$

dir. O halde,

$$\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^\tau u_*(s)\,ds\right)^2 d\tau=\int\limits_0^1 u_*^2(\tau)\,d\tau-1 \qquad (3.3.13)$$

olduğu bulunur. $u_*(\cdot)\in U_2^*$ *olduğundan* $\int\limits_0^1 u_*^2(t)\,dt\leq 1$ *ve (3.3.13) den*

$$\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^\tau u_*(s)\,ds\right)^2 d\tau\leq 0 \qquad (3.3.14)$$

olduğu elde edilir. Ayrıca her $\tau\in[0,1]$ *için* $\left(\int\limits_0^\tau u_*(s)\,ds\right)^2\geq 0$ *olduğundan (3.3.14) den*

$$\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^\tau u_*(s)\,ds\right)^2 d\tau=0 \qquad (3.3.15)$$

olduğu bulunur.

$\tau\in[0,1]$ *için,*

$$\varphi(\tau)=\int\limits_0^\tau u_*(s)\,ds \qquad (3.3.16)$$

olsun. $u_*(\cdot):[0,1]\to\mathbb{R}$ *integrallenebilir fonksiyon olduğundan,* $\varphi(\cdot):[0,1]\to\mathbb{R}$ *mutlak sürekli fonksiyondur. O zaman (3.3.15) den,*

$$\int\limits_0^\tau\varphi^2(\tau)\,d\tau=0$$

ve buradan ise keyfi $\tau \in [0,1]$ *için* $\varphi(\tau) = 0$ *dır. Yani keyfi* $\tau \in [0,1]$ *için,*

$$\varphi(\tau) = \int\limits_0^\tau u_*(s)\,ds = 0 \tag{3.3.17}$$

olur. $u_*(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$ *integrallenebilir fonksiyon olduğundan hemen hemen her* $\tau \in [0,1]$ *için,*

$$\dot{\varphi}(\tau) = u_*(\tau) \tag{3.3.18}$$

olduğu bulunur. Her $\tau \in [0,1]$ *için* $\varphi(\tau) = 0$ *ve* $\varphi(\cdot)$ *h.h. türevlenebilir olduğundan h.h.* $\tau \in [0,1]$ *için* $\dot{\varphi}(\tau) = 0$ *olur. O halde (3.3.18) den h.h.* $\tau \in [0,1]$ *için* $u_*(\tau) = 0$ *olur. Bu durumda (3.3.11) ve (3.3.12) den, her* $t \in [0,1]$ *için* $x(t) = 0$ *ve* $y(t) = 0$ *olur. O halde özel olarak* $t = 1$ *için de* $x(1) = 0$ *olur. Bu ise (3.3.10) ile, yani* $x(1) = 1$ *olması ile çelişir. Böylece varsayım doğru değildir ve*

$$(1,0) \notin X_2(1;0,(0,0)) \tag{3.3.19}$$

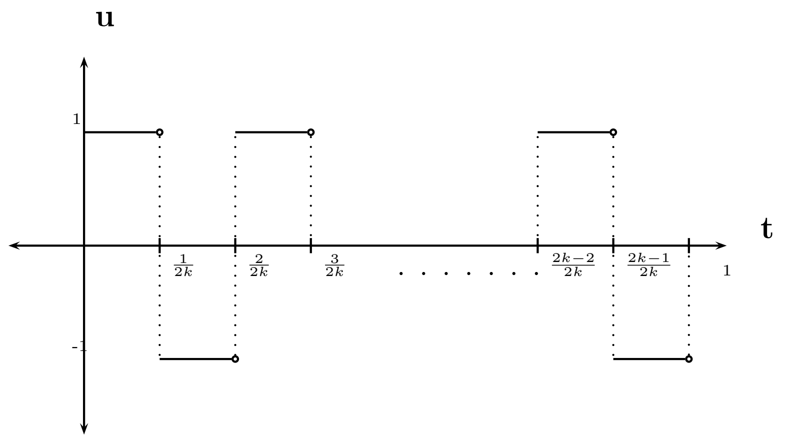
olur.

Şimdi $(1,0) \in cl(X_2(1;0,(0,0)))$ *olduğu gösterilsin.*

$[0,1]$ *aralığının* $\Delta = \{0, \frac{1}{2k}, \frac{2}{2k}, \ldots, \frac{2k-1}{2k}, 1\}$ *şeklindeki düzgün bölüntüsü alınsın ve her* $k = 1, 2, \ldots$ *için* $i = 0, 1, \ldots, k-1$ *olmak üzere*

$$u_k(t) = \begin{cases} 1 & , \ t \in [\frac{2i}{2k}, \frac{2i+1}{2k}) \\ -1 & , \ t \in [\frac{2i+1}{2k}, \frac{2i+2}{2k}) \end{cases} \tag{3.3.20}$$

fonksiyon dizisi tanımlansın (Şekil 3.3.1)



Şekil 3.3.1: $u_k(t)$ fonksiyon dizisi

Açıktır ki her k ve her $t \in [0,1]$ için $u_k^2(t) = 1$ dir. Buradan $\int\limits_0^1 u_k^2(t)\,dt = 1$ olur. Böylece keyfi $k = 1, 2, \ldots$ için $u_k(\cdot) \in U_2^*$ olur.

Şimdi (3.3.4) sisteminin $u_k(\cdot) \in U_2^*$ mümkün kontrol fonksiyonu tarafından üretilen $(x_k(\cdot), y_k(\cdot)) \in X_2(0,(0,0))$ yörüngesi bulunsun. (3.3.4) den hemen hemen her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = -y_k^2(t) + u_k^2(t) & , \quad x_k(0) = 0 \\ \dot{y}_k(t) = u_k(t) & , \quad y_k(0) = 0 \end{cases} \tag{3.3.21}$$

olur. Her $\tau \in [0,1]$ için $y_k(t) = \int\limits_0^t u_k(\tau)\,d\tau$ olduğundan $i = 0, 1, \ldots, k-1$ olmak üzere,

$$y_k(t) = \begin{cases} t - \frac{2i}{2k} & , \quad t \in [\frac{2i}{2k}, \frac{2i+1}{2k}) \\ -t + \frac{2i+2}{2k} & , \quad t \in [\frac{2i+1}{2k}, \frac{2i+2}{2k}) \end{cases} \tag{3.3.22}$$

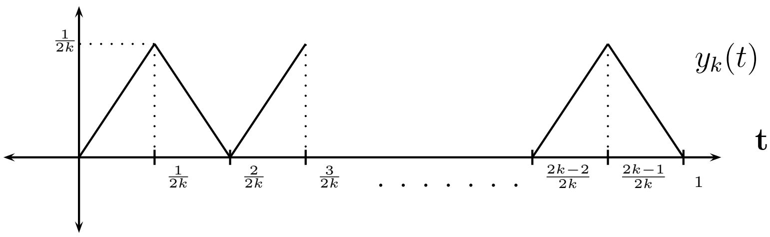
olur (Şekil 3.3.2).

O halde (3.3.22) den, her $t \in [0,1]$ için,

$$0 \le y_k(t) \le \frac{1}{2k} \tag{3.3.23}$$

olur. (3.3.23) den, her $t \in [0,1]$ için,

$$0 \le y_k^2(t) \le \frac{1}{4k^2} \tag{3.3.24}$$



Şekil 3.3.2: $y_k(t)$ dizisi

olduğu elde edilir.

(3.3.20) den, her $t \in [0,1]$ *için,* $u_k^2(t) = 1$ *dır. O halde (3.3.21) den, h.h.* $t \in [0,1]$ *için*

$$\dot{x}_k(t) = -y_k^2(t) + 1 \tag{3.3.25}$$

olur. (3.3.24) den, keyfi $t \in [0,1]$ *için,*

$$1 - \frac{1}{4k^2} \leq 1 - y_k^2(t) \leq 1 \tag{3.3.26}$$

olduğu elde edilir. O halde (3.3.25) ve (3.3.26) dan, h.h. $t \in [0,1]$ *için*

$$1 - \frac{1}{4k^2} \leq \dot{x}_k(t) \leq 1 \tag{3.3.27}$$

olduğu elde edilir. Şimdi (3.3.27) de eşitsizliğin her iki tarafının 0 *dan* t*'ye integrali alınırsa, keyfi* $k = 1, 2, \ldots$ *için*

$$\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) t \leq x_k(t) \leq t$$

ve $t = 1$ *için*

$$\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \leq x_k(1) \leq 1 \tag{3.3.28}$$

olduğu bulunur. Ayrıca, keyfi $k = 1, 2, \ldots$ *için* $\int\limits_0^1 u_k(t)\, dt = 0$ *dır. O halde* $\dot{y}_k(t) = u_k(t)$ *olduğundan keyfi* $k = 1, 2, \ldots$ *için*

$$y_k(1) = \int\limits_0^1 u_k(t)\, dt = 0 \tag{3.3.29}$$

dır. (3.3.28) ve (3.3.29) dan

$$k \to \infty \quad iken \quad (x_k(1), y_k(1)) \to (1,0) \tag{3.3.30}$$

olur. Her $k = 1, 2, \ldots$ *için* $(x_k(1), y_k(1)) \in X_2(1; 0, (0,0))$ *olduğundan, (3.3.30) dan*

$$(1,0) \in cl\big(X_2(1; 0, (0,0))\big) \tag{3.3.31}$$

olur.

(3.3.19) ve (3.3.31) den $X_2(1; 0, (0,0))$ *kümesinin kapalı olmadığı elde edilir.*

3.4 $X_p(t; t_0, X_0)$ Erişim Kümelerinin t' ye Göre Sürekliliği ve Çapı

Şimdi (3.1.2) kısıtı olan (3.1.1) sisteminin $X_p(t; t_0, X_0)$, $t \in [t_0, \theta]$, erişim kümelerinin, t' ye göre Hausdorff yarı metriğinde sürekli olduğu gösterilsin.

Önerme 3.4.1 *Keyfi* $t_1 \in [t_0, \theta]$, $t_2 \in [t_0, \theta]$ *için*

$$h_n(X_p(t_1; t_0, X_0), X_p(t_2; t_0, X_0)) \leq k^* \left|t_1 - t_2\right|^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliği doğrudur.

Burada $k^* > 0$ *sayısı (3.3.1) ile tanımlıdır.*

Kanıt. Keyfi $t_1 \in [t_0, \theta]$, $t_2 \in [t_0, \theta]$ alınsın ve genelliği bozmaksızın $t_1 < t_2$ kabul edilsin. $y_1 \in X_p(t_1; t_0, X_0)$ keyfi bir nokta olsun. Bu durumda

$$y_1 = x_0(t_1) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f\left(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau)\right) d\tau \tag{3.4.1}$$

olacak şekilde $x_0 \in X_0$, $x_0(\cdot) \in X_p(t_0, X_0)$ ve $u_0(\cdot) \in U_p$ vardır.

$$y_2 = x_0(t_2) = x_0 + \int_{t_0}^{t_2} f\left(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau)\right) d\tau \tag{3.4.2}$$

olsun. Açıktır ki, $y_2 \in X_p(t_2, t_0; X_0)$ olur. (3.4.1), (3.4.2) ve 3.1.C koşulundan

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau))\| \, d\tau \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} c\,(1 + \|x_0(\tau)\|)\,(1 + \|u_0(\tau)\|) \, d\tau \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Burada $c > 0$, 3.1.C koşulunda tanımlanan sabittir. Önerme 3.2.2 uyarınca keyfi $x_0(\cdot) \in X_p(t_0, X_0)$ ve keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için $\|x_0(t)\| \leq r_*$ olduğundan, son eşitsizlikten

$$\|y_1 - y_2\| \leq c(1 + r_*) \int_{t_1}^{t_2} (1 + \|u_0(\tau)\|) \, d\tau \tag{3.4.3}$$

olur. Burada $r_* > 0$, (3.2.5) ile tanımlıdır. Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa $u_0(\cdot) \in U_p$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (1 + \|u_0(\tau)\|) \, d\tau &\leq |t_2 - t_1| + \left(\int_{t_1}^{t_2} 1^{\frac{p}{p-1}} \, d\tau \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_1}^{t_2} \|u_0(\tau)\|^p \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |t_2 - t_1| + \mu_0 \, |t_2 - t_1|^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

olduğu bulunur. (3.4.3) ve (3.4.4) den

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\| &\leq c(1 + r_*) \left(|t_2 - t_1| + \mu_0 \, |t_2 - t_1|^{\frac{p-1}{p}} \right) \\ &= |t_2 - t_1|^{\frac{p-1}{p}} \, c(1 + r_*) \left(|t_2 - t_1|^{\frac{1}{p}} + \mu_0 \right) \\ &\leq |t_2 - t_1|^{\frac{p-1}{p}} \, c(1 + r_*) \, (l_* + \mu_0) \end{aligned}$$

olur. Burada $l_* > 0$ (3.2.9) ile tanımlıdır. O halde son eşitsizlik ve (3.3.1) den

$$\|y_1 - y_2\| \leq k^* \, |t_2 - t_1|^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliğinin doğruluğu bulunur. $y_1 \in X_p(t_1, t_0, X_0)$ keyfi seçildiğinden

$$X_p(t_1; t_0, X_0) \subset X_p(t_2; t_0, X_0) + k^* \, |t_2 - t_1|^{\frac{p-1}{p}} \, B_n \tag{3.4.5}$$

olduğu elde edilir.

Şimdi keyfi $y_2 \in X_p(t_2; t_0, X_0)$ alınsın ve sabitlensin. Bu durumda,

$$y_2 = x_*(t_2) = x_* + \int_{t_0}^{t_2} f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\, d\tau$$

olacak şekilde $x_* \in X_0$, $x_*(\cdot) \in X_p(t_0, X_0)$ ve $u_*(\cdot) \in U_p$ vardır.

$$y_1 = x_*(t_1) = x_* + \int_{t_0}^{t_1} f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\, d\tau$$

olsun. Açıktır ki, $y_1 \in X_p(t_1; t_0, X_0)$ olur. y_1 ve y_2 noktaları arasındaki uzaklık benzer biçimde değerlendirilirse,

$$X_p(t_2; t_0, X_0) \subset X_p(t_1; t_0, X_0) + k^* |t_2 - t_1|^{\frac{p-1}{p}} B_n \tag{3.4.6}$$

kapsaması elde edilir. (3.4.5), (3.4.6) ve Önerme 2.1.2 den, Önerme 3.4.1 kanıtlanmış olur. ■

Önerme 3.4.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4.2 *$t \to X_p(t; t_0, X_0)$, $t \in [t_0, \theta]$, küme değerli dönüşümü $\frac{p-1}{p}$-Hölder süreklidir.*

Şimdi verilen bir kümenin çapını tanımlansın.

Tanım 3.4.3 *$A \subset \mathbb{R}^n$ için A kümesinin çapı, $diamA$ ile gösterilir ve*

$$diamA = \sup_{x,y \in A} \|x - y\|$$

olarak tanımlanır.

Aşağıdaki önermede, sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için $X_p(t; t_0, X_0)$ erişim kümesinin çapı üstten değerlendirilmektedir.

Önerme 3.4.4 *Her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$diamX_p(t; t_0, X_0) \leq [d + r_1(t)] \exp(r_0(t))$$

eşitsizliği doğrudur. Burada,

$$d = diamX_0,$$

$$r_0(t) = L_1(t - t_0) + L_2\mu_0(t - t_0)^{\frac{p-1}{p}}, \tag{3.4.7}$$

$$r_1(t) = 2L_3\mu_0(t - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \tag{3.4.8}$$

dır.

Kanıt. Keyfi $t \in [t_0, \theta]$ alınsın ve sabitlensin. $y_1, y_2 \in X_p(t; t_0, X_0)$ keyfi öğeler olsun. Bu durumda,

$$y_1 = x_1(t) = x_1 + \int_{t_0}^{t} f\left(\tau, x_1(\tau), u_1(\tau)\right) d\tau \tag{3.4.9}$$

olacak şekilde $x_1 \in X_0, x_1(\cdot) \in X_p(t_0, X_0), u_1(\cdot) \in U_p$ ve

$$y_2 = x_2(t) = x_2 + \int_{t_0}^{t} f\left(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau)\right) d\tau \tag{3.4.10}$$

olacak şekilde $x_2 \in X_0, x_2(\cdot) \in X_p(t_0, X_0), u_2(\cdot) \in U_p$ vardır. $d = diamX_0$ olduğundan, $\|x_1 - x_2\| \leq d$ olur. (3.4.9), (3.4.10) ve 3.1.B koşulundan,

$$\begin{aligned}
&\|y_1 - y_2\| = \|x_1(t) - x_2(t)\| \\
&\leq \|x_1 - x_2\| + \int_{t_0}^{t} \left(L_1 + L_2 \|u_2(\tau)\|\right) \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| \, d\tau \\
&+ \int_{t_0}^{t} L_3 \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\| \, d\tau \\
&\leq d + \int_{t_0}^{t} \left(L_1 + L_2 \|u_2(\tau)\|\right) \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| \, d\tau + \int_{t_0}^{t} L_3 \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\| \, d\tau
\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

olur. $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in U_p$ olduğundan, Hölder ve Minkowski eşitsizliklerinden

$$
\begin{aligned}
& L_3 \int_{t_0}^{t} \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\| \, d\tau \\
& \leq L_3 \left(\int_{t_0}^{t} 1^{\frac{p-1}{p}} \, d\tau \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_0}^{t} \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|^p \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq L_3 (t - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int_{t_0}^{t} \|u_1(\tau)\|^p \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{t_0}^{t} \|u_2(\tau)\|^p \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
& \leq 2 L_3 \mu_0 (t - t_0)^{\frac{p-1}{p}} = r_1(t) \qquad (3.4.12)
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir. Burada $r_1(t)$, (3.4.8) ile tanımlıdır. (3.4.11) ve (3.4.12) den

$$
\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq d + r_1(t) + \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_2(\tau)\|) \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| \, d\tau \qquad (3.4.13)
$$

olduğu elde edilir. $t \in [t_0, \theta]$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, (3.4.13) eşitsizliği keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için doğrudur. $r_1(\cdot) : [t_0, \theta] \to [0, \infty)$ fonksiyonu azalmayan fonksiyon olduğundan, (3.4.13), Gronwall eşitsizliği ve Önerme 3.2.1 den

$$
\begin{aligned}
\|x_1(t) - x_2(t)\| & \leq [d + r_1(t)] \exp \left(\int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_2(\tau)\|) \, d\tau \right) \\
& \leq [d + r_1(t)] \exp \left(L_1 (t - t_0) + L_2 (t - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \right) \\
& = [d + r_1(t)] \exp(r_0(t))
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir. Burada $r_0(t)$, (3.4.7) ile tanımlıdır. ■

Sonuç 3.4.5 $t \to t_0$ *iken* $diam X_p(t; t_0, X_0) \to diam X_0$ *olur.*

4 ERİŞİM KÜMELERİNİN BAŞLANGIÇ KOŞULLARINA BAĞIMLILIĞI

Bu bölümde (3.1.2) kısıtı olan (3.1.1) sisteminin $X_p(t_0, X_0)$ yörüngeler kümesi ve $X_p(t; t_0, X_0)$ erişim kümesinin t_0, X_0 ve μ_0 parametrelerine olan bağlantısı incelenmektedir.

4.1 Erişim Kümelerinin t_0 ve X_0 Parametrelerine Bağlantısı

Aşağıdaki önerme, (3.1.2) kısıtı olan (3.1.1) sisteminin $X_p(t_0, X_0)$ yörüngeler kümesinin X_0'a bağlantısının Hausdorff metriğinde Lipschitz sürekli olduğunu göstermektedir.

$$k_0 = \exp\left(L_1(\theta - t_0) + L_2 l_* \mu_0\right) \tag{4.1.1}$$

olsun. Burada l_* sayısı, (3.2.9) ile tanımlıdır.

Önerme 4.1.1 *$X_0, X_1 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt kümeler olsun. O zaman,*

$$h_C(X_p(t_0, X_0), X_p(t_0, X_1)) \le k_0 h_n(X_0, X_1)$$

olur.

Kanıt. Keyfi $x_0(\cdot) \in X_p(t_0, X_0)$ alınsın ve sabitlensin. O zaman her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau))\, d\tau \tag{4.1.2}$$

olacak şekilde $x_0 \in X_0$ ve $u_0(\cdot) \in U_p$ vardır. Hausdorff uzaklığının tanımından $\|x_1 - x_0\| < h_n(X_0, X_1)$ olacak şekilde $x_1 \in X_1$ vardır. (3.1.1) sisteminin $u_0(\cdot)$ mümkün kontrol fonksiyonu tarafından $x_1 \in X_1$ başlangıç noktasından üretilen yörüngesi $x_1(\cdot)$ ile gösterilirse, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_1(t) = x_1 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_1(\tau), u_0(\tau))\, d\tau \tag{4.1.3}$$

olur. $\|x_1 - x_0\| < h_n(X_0, X_1)$ olduğundan, (4.1.2), (4.1.3) ve 3.1.B koşulundan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x_0(t) - x_1(t)\| \leq h_n(X_0, X_1) + \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_0(\tau)\|) \|x_0(\tau) - x_1(\tau)\| \, d\tau \tag{4.1.4}$$

olduğu elde edilir. (4.1.1), (4.1.4) ve Gronwall eşitsizliğinden her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x_0(t) - x_1(t)\| &\leq h_n(X_0, X_1) \exp\left(\int_{t_0}^{\theta} (L_1 + L_2 \|u_0(\tau)\|) \, d\tau \right) \\ &\leq h_n(X_0, X_1) \exp\left(L_1(\theta - t_0) + L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \right) \\ &\leq k_0 h_n(X_0, X_1) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Burada $k_0 > 0$, (4.1.1) ile tanımlıdır. Böylece keyfi sabitlenmiş $x_0(\cdot) \in X_p(t_0, X_0)$ için

$$\|x_0(\cdot) - x_1(\cdot)\|_C \leq k_0 h_n(X_0, X_1)$$

olacak şekilde $x_1(\cdot) \in X_p(t_0, X_1)$ olduğu kanıtlanmış olur. Bu ise,

$$X_p(t_0, X_0) \subset X_p(t_0, X_1) + k_0 h_n(X_0, X_1) B_C(0, 1) \tag{4.1.5}$$

olması demektir. Burada $B_C(0, 1)$, $C([t_0, \theta], R^n)$ uzayının merkezi orijinde olan kapalı birim yuvarıdır.

Benzer şekilde,

$$X_p(t_0, X_1) \subset X_p(t_0, X_0) + k_0 h_n(X_0, X_1) B_C(0, 1) \tag{4.1.6}$$

olduğu kanıtlanır. O halde (4.1.5) ve (4.1.6) dan önermenin kanıtı elde edilir. ■

Önerme 4.1.1 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.1.2 *Her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$h_n(X_p(t; t_0, X_0), X_p(t; t_0, X_1)) \leq k_0 h_n(X_0, X_1)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k_0 > 0$, (4.1.1) ile tanımlı olan sabittir.

Sonuç 4.1.3 *Her $i = 1, 2, \ldots$ için $X_i \subset \mathbb{R}^n$ ve $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt kümeler ve $i \to \infty$ iken $h_n(X_0, X_i) \to 0$ olsun. O zaman*

$$i \to \infty \quad \textit{iken} \quad h_C(X_p(t_0, X_0), X_p(t_0, X_i)) \to 0$$

ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$i \to \infty \quad \textit{iken} \quad h_n(X_p(t; t_0, X_0), X_p(t; t_0, X_i)) \to 0$$

olur.

$$r_\theta^* = L_1(\theta - t_1) + L_2\mu_0(\theta - t_1)^{\frac{p-1}{p}} \tag{4.1.7}$$

olarak gösterilsin. Aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 4.1.4 *$t_1 > t_0$, $X_0, X_1 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt kümeler olsun. O zaman her $t \in [t_1, \theta]$ için*

$$h_n(X_p(t; t_0, X_0), X_p(t; t_1, X_1)) \leq \left[h_n(X_0, X_1) + (t_1 - t_0)^{\frac{p-1}{p}} k^*\right] \exp(r_\theta^*)$$

olur.

Burada $k^* > 0$ sayısı (3.3.1) ile tanımlıdır.

Kanıt. Keyfi $t \in [t_1, \theta]$ ve keyfi $y_0 \in X_p(t; t_0, X_0)$ alınsın ve sabitlensin. O halde,

$$y_0 = x_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau))\, d\tau \tag{4.1.8}$$

olacak şekilde $x_0 \in X_0$, $x_0(\cdot) \in X_p(t_0, X_0)$ ve $u_0(\cdot) \in U_p$ vardır. Hausdorff uzaklığının tanımından $\|x_1 - x_0\| < h_n(X_0, X_1)$ olacak şekilde $x_1 \in X_1$ vardır. (3.1.1) sisteminin t_1 başlangıç zaman anında aynı $u_0(\cdot)$ kontrol fonksiyonu tarafından $x_1 \in X_1$ başlangıç noktasında üretilen yörüngesi $x_1(\cdot) \in X_1(t_1, X_1)$ ile gösterilirse bu durumda $t \in [t_1, \theta]$ için

$$x_1(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(\tau, x_1(\tau), u_0(\tau))\, d\tau \tag{4.1.9}$$

olur. (4.1.8), (4.1.9), 3.1.B ve 3.1.C koşullarından

$$
\begin{aligned}
\|x_0(t) - x_1(t)\| \leq \|x_0 - x_1\| + \int_{t_1}^{t} \|f(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau)) - f(\tau, x_1(\tau), u_0(\tau))\| \, d\tau \\
+ \int_{t_0}^{t_1} \|f(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau))\| \, d\tau \\
\leq h_n(X_0, X_1) + c \int_{t_0}^{t_1} (1 + \|u_0(\tau)\|)(1 + \|x_0(\tau)\|) \, d\tau \\
+ \int_{t_1}^{t} (L_1 + L_2 \|u_0(\tau)\|)(\|x_0(\tau) - x_1(\tau)\|) \, d\tau \qquad (4.1.10)
\end{aligned}
$$

olduğu bulunur. Burada $c > 0$, 3.1.C koşulunda tanımlıdır.

Önerme 3.2.2 gereğince her $x_0(\cdot) \in X_p(t_0, X_0)$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için $\|x_0(t)\| \leq r_*$ olur. Burada r_*, (3.2.5) ile tanımlıdır. Bu durumda Önerme 3.2.1 den

$$
\begin{aligned}
c \int_{t_0}^{t_1} (1 + \|u_0(\tau)\|)(1 + \|x_0(\tau)\|) \, d\tau &\leq c(1 + r_*) \int_{t_0}^{t_1} (1 + \|u_0(\tau)\|) \, d\tau \\
&\leq c(1 + r_*)[(t_1 - t_0) + \mu_0 (t_1 - t_0)^{\frac{p-1}{p}}] \\
&= (t_1 - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \left[c(1 + r_*)((t_1 - t_0)^{\frac{1}{p}} + \mu_0) \right] \\
&\leq (t_1 - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \left[c(1 + r_*)(l_* + \mu_0) \right] \\
&= (t_1 - t_0)^{\frac{p-1}{p}} k^*
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir. Burada l_*, (3.2.9) ile, k^* (3.3.1) ile tanımlıdır. $t \in [t_1, \theta]$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, (4.1.10) ve son eşitsizlikten, her $t \in [t_1, \theta]$ için

$$
\begin{aligned}
\|x_0(t) - x_1(t)\| \leq h_n(X_0, X_1) + (t_1 - t_0)^{\frac{p-1}{p}} k^* \qquad (4.1.11) \\
+ \int_{t_1}^{t} (L_1 + L_2 \|u_0(\tau)\|)(\|x_0(\tau) - x_1(\tau)\|) \, d\tau
\end{aligned}
$$

olduğu bulunur. (4.1.11), Gronwall eşitsizliği, Önerme 3.2.1 ve (4.1.7) den her $t \in [t_1, \theta]$ için

$$
\begin{aligned}
&\|x_0(t) - x_1(t)\| \\
&\leq \left[h_n(X_0, X_1) + (t_1 - t_0)^{\frac{p-1}{p}} k^*\right] \exp\left(\int_{t_1}^{t} (L_1 + L_2 \|u_0(\tau)\|)\, d\tau\right) \\
&\leq \left[h_n(X_0, X_1) + (t_1 - t_0)^{\frac{p-1}{p}} k^*\right] \exp\left(L_1(t - t_1) + L_2\mu_0(t - t_1)^{\frac{p-1}{p}}\right) \\
&\leq \left[h_n(X_0, X_1) + (t_1 - t_0)^{\frac{p-1}{p}} k^*\right] \exp\left(L_1(\theta - t_1) + L_2\mu_0(\theta - t_1)^{\frac{p-1}{p}}\right) \\
&= \left[h_n(X_0, X_1) + (t_1 - t_0)^{\frac{p-1}{p}} k^*\right] \exp(r_\theta^*) \qquad (4.1.12)
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir. (4.1.12) den her $t \in [t_1, \theta]$ için

$$X_p(t; t_0, X_0) \subset X_p(t; t_1, X_1) + \left[h_n(X_0, X_1) + (t_1 - t_0)^{\frac{p-1}{p}} k^*\right] \exp(r_\theta^*) B_n \qquad (4.1.13)$$

olur. Benzer şekilde her $t \in [t_1, \theta]$ için,

$$X_p(t; t_1, X_1) \subset X_p(t; t_0, X_0) + \left[h_n(X_0, X_1) + (t_1 - t_0)^{\frac{p-1}{p}} k^*\right] \exp(r_\theta^*) B_n \qquad (4.1.14)$$

kapsamasının doğru olduğu kanıtlanır. O halde (4.1.13), (4.1.14) ve Önerme 2.1.2 den, önermenin kanıtı elde edilir. ■

Önerme 4.1.4 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.5 *Her $i = 1, 2, \ldots$ için $X_i \subset \mathbb{R}^n$ ve $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt kümeler, $i \to \infty$ iken $t_i \to t_0 + 0$ ve $h_n(X_i, X_0) \to 0$ olsun. O zaman her $t \in [t_0, \theta]$ için $i \to \infty$ iken*

$$h_n(X_p(t; t_i, X_i), X_p(t; t_0, X_0)) \to 0.$$

4.2 Erişim Kümelerinin μ_0 Parametresine Bağlantısı

Bu bölümde (3.1.2) kısıtı olan (3.1.1) sisteminin yörüngelerinin ve erişim kümelerinin μ_0 kısıtına olan bağlılığı incelenecektir.

$\mu_1 > 0$ olmak üzere,

$$U_{p,\mu_1} = \{u(\cdot) \in L_p([t_0,\theta],\mathbb{R}^m) : \|u(\cdot)\|_p \leq \mu_1\}$$

olsun. (3.1.1) sisteminin (t_0, X_0) başlangıç kümesinden çıkan ve tüm $u(\cdot) \in U_{p,\mu_1}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesi $X_{p,\mu_1}(t_0, X_0)$ ile ve $t \in [t_0, \theta]$ anındaki erişim kümesi ise $X_{p,\mu_1}(t; t_0, X_0)$ ile gösterilsin.

$$r_1 = L_3 l_* \exp(r_0), \tag{4.2.1}$$

$$r_0 = L_1(\theta - t_0) + L_2\mu_0 l_* \tag{4.2.2}$$

olsun. Burada l_*, (3.2.9) ile tanımlıdır.

Aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 4.2.1

$$h_C(X_{p,\mu_1}(t_0, X_0), X_p(t_0, X_0)) \leq r_1 |\mu_1 - \mu_0|$$

eşitsizliği doğrudur. Burada r_1 sayısı (4.2.1) ile tanımlıdır.

Kanıt. Keyfi $x_0(\cdot) \in X_p(t_0, X_0)$ yörüngesi alıranak sabitlensin. Bu durumda her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau))\, d\tau \tag{4.2.3}$$

olacak şekilde $x_0 \in X_0$ ve $u_0(\cdot) \in U_p$ vardır. $u_0(\cdot) \in U_p$ mümkün kontrol fonksiyonu yardımıyla, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$u_1(t) = \frac{\mu_1}{\mu_0} u_0(t) \tag{4.2.4}$$

olmak üzere $u_1(\cdot)$ fonksiyonu tanımlansın. $u_0(\cdot) \in U_p$ olduğundan,

$$\|u_1(\cdot)\|_p = \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_1(\tau)\|^p \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\mu_1}{\mu_0} \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_0(\tau)\|^p \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \leq \mu_1$$

olur. Dolayısıyla $u_1(\cdot) \in U_{p,\mu_1}$ olur. (3.1.1) sisteminin, (t_0, x_0) başlangıç noktasından, (4.2.4) ile tanımlı $u_1(\cdot)$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesi $x_1(\cdot)$ olarak gösterilirse, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_1(\tau), u_1(\tau))\, d\tau \tag{4.2.5}$$

olur. Açıktır ki, $x_1(\cdot) \in X_{p,\mu_1}(t_0, X_0)$ olur. (4.2.3), (4.2.4), (4.2.5) ve 3.1.B koşulundan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
&\|x_1(t) - x_0(t)\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x_1(\tau), u_1(\tau)) - f(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau))\|\, d\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L_3 \|u_1(\tau) - u_0(\tau)\|\, d\tau + \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_0(\tau)\|) \|x_1(\tau) - x_0(\tau)\|\, d\tau \\
&\leq L_3 \left| \frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right| \int_{t_0}^{t} \|u_0(\tau)\|\, d\tau + \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_0(\tau)\|) \|x_1(\tau) - x_0(\tau)\|\, d\tau
\end{aligned}$$

olur. Şimdi ilk integralde Hölder integral eşitsizliği uygulanırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
&\|x_1(t) - x_0(t)\| \\
&\leq L_3 \mu_0 \left| \frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right| (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} + \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_0(\tau)\|) \|x_1(\tau) - x_0(\tau)\|\, d\tau \\
&= L_3 |\mu_1 - \mu_0| (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} + \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_0(\tau)\|) \|x_1(\tau) - x_0(\tau)\|\, d\tau \\
&\leq L_3 l_* |\mu_1 - \mu_0| + \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_0(\tau)\|) \|x_1(\tau) - x_0(\tau)\|\, d\tau
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

olduğu elde edilir. Burada l_*, (3.2.9) ile tanımlıdır.

(4.2.6) ve Gronwall eşitsizliğinden, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \leq L_3 l_* |\mu_1 - \mu_0| \exp\left(\int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_0(\tau)\|)\, d\tau \right) \tag{4.2.7}$$

olduğu bulunur. Önerme 3.2.1 den, (4.2.2) ve (4.2.7) den, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_0(t)\| &\leq L_3 l_* |\mu_1 - \mu_0| \exp\left(L_1(\theta - t_0) + L_2\mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\right) \\ &\leq L_3 l_* \exp(r_0) |\mu_1 - \mu_0| \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

olur. (4.2.1) ve (4.2.8) den her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \leq r_1 |\mu_1 - \mu_0|$$

olduğu elde edilir.

Böylece keyfi $x_0(\cdot) \in X_p(t_0, X_0)$ seçildiğinde her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$\|x_0(t) - x_1(t)\| \leq r_1 |\mu_1 - \mu_0| \tag{4.2.9}$$

olacak biçimde $x_1(\cdot) \in X_{p,\mu_1}(t_0, X_0)$ yörüngesinin olduğu gösterilmiş olur. O halde (4.2.9) dan, her $x_0(\cdot) \in X_p(t_0, X_0)$ için

$$\|x_0(\cdot) - x_1(\cdot)\|_C \leq r_1 |\mu_1 - \mu_0|$$

olacak biçimde $x_1(\cdot) \in X_{p,\mu_1}(t_0, X_0)$ vardır. Bu ise

$$X_p(t_0, X_0) \subset X_{p,\mu_1}(t_0, X_0) + r_1 |\mu_1 - \mu_0| B_C(0, 1) \tag{4.2.10}$$

olması demektir. Burada $B_C(0, 1)$, $C([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$ uzayında, merkezi orijinde olan kapalı birim yuvardır.

Benzer şekilde

$$X_{p,\mu_1}(t_0, X_0) \subset X_p(t_0, X_0) + r_1 |\mu_1 - \mu_0| B_C(0, 1) \tag{4.2.11}$$

kapsaması elde edilebilir. O halde (4.2.10), (4.2.11) ve Önerme 2.1.2 den, Önerme 4.2.1'in kanıtı elde edilir. ■

Önerme 4.2.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.2 *Keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için,*

$$h_n(X_{p,\mu_1}(t; t_0, X_0), X_p(t; t_0, X_0)) \leq r_1 |\mu_1 - \mu_0|$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $r_1 > 0$ sayısı (4.2.1) ile tanımlıdır.

$$U_{p,\mu_i} = \{u(\cdot) \in L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^m) : \|u(\cdot)\| \leq \mu_i\}$$

olsun. (3.1.1) sisteminin (t_0, X_0) başlangıç kümesinden çıkan ve tüm $u(\cdot) \in U_{p,\mu_i}$ mümkün kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesi $X_{p,\mu_i}(t_0, X_0)$ ile ve $t \in [t_0, \theta]$ anındaki erişim kümesi ise $X_{p,\mu_i}(t; t_0, X_0)$ ile gösterilsin. Bu durumda Önerme 4.2.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.3 *$i \to \infty$ iken, $\mu_i \to \mu_0$ olsun. O halde $i \to \infty$ iken*

$$h_C(X_{p,\mu_i}(t_0, X_0), X_p(t_0, X_0)) \to 0$$

ve $i \to \infty$ iken her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$h_n(X_{p,\mu_i}(t; t_0, X_0), X_p(t; t_0, X_0)) \to 0$$

olur.

5 ERİŞİM KÜMELERİNİN p PARAMETRESİNE OLAN BAĞIMLILIĞI

5.1 $L_p\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\big)$, $(p\in[1,\infty))$, Uzaylarının Kapalı Topları Arasındaki Uzaklık

Teori ve pratikte ortaya çıkan bazi problemlerde verilen kümeler arasındaki uzaklığın bulunması gerekir (bkz., Aubin ve Frankowska 1990; Burago ve ark. 2001; Filippov 1988; Hu ve Papageorgiou 1997; Guseinov ve ark. 1999, 2003, 2004, 2007; Panasyuk 1990). Verilen metrik uzayın alt kumeleri arasındaki uzaklık, Hausdorff uzaklığı ile tanımlanmaktadır (bkz., Aubin ve Frankowska 1990; Burago ve ark. 2001; Filippov 1988; Hu ve Papageorgiou 1997; Panasyuk 1990). Farklı metrik uzayların alt kümeleri arasındaki uzaklığı tanımlamak için Gromov - Hausdorff uzaklığı kavramı kullanılmaktadır (bkz.,Burago ve ark. 2001). Kümeler arasında başka uzaklık kavramları "Burago ve ark. (2001)" de verilmiştir.

Bu bölümde farklı $L_p\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\big)$, $(p\in[1,\infty))$, uzaylarının alt kümeleri arasında uzaklık tanımlanacaktır. Keyfi $(p\in[1,\infty))$ için $L_p\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\big)\subset L_1\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\big)$ olduğundan, farklı $L_p\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\big)$ uzaylarının alt kümeleri arasında Hausdorff uzaklığını tanımlarken $L_1\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\big)$ uzayının normu kullanılacaktır.

$1\le p_1<+\infty$ ve $1\le p_2<+\infty$ için $G\subset L_{p_1}\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\big)$ ve $W\subset L_{p_2}\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\big)$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı $\hbar_1(G,W)$ olarak gösterilir ve

$$\hbar_1\big(G,W\big)=\max\left\{\sup_{x(\cdot)\in G} d_{L_1}\big(x(\cdot),W\big),\ \sup_{y(\cdot)\in W} d_{L_1}\big(y(\cdot),G\big)\right\}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$d_{L_1}\big(x(\cdot),W\big)=\inf_{y(\cdot)\in W}\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_1\ ,\quad \|w(\cdot)\|_1=\int_{t_0}^{\theta}\|w(t)\|\ dt\ .$$

$L_p\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\big)$, $(p\in[1,\infty))$, uzayının merkezi orijinde olan $\mu_0>0$ yarıçaplı kapalı topu

$$B_{L_p}(0,\mu_0)=\big\{u(\cdot)\in L_p\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\big):\|u(\cdot)\|_p\le\mu_0\big\}.$$

olarak tanımlanır. Açıktır ki $B_{L_p}(0,\mu_0)=U_p$ dir. Burada U_p, (3.1.1) sisteminin mümkün kontrol fonksiyonları kümesidir ve (3.1.2) ile tanımlanmaktadır.

$H\in(0,\infty)$ için

$$B_p^H(0,\mu_0)=\big\{u(\cdot)\in B_{L_p}(0,\mu_0):\|u(t)\|\le H,\ t\in[t_0,\theta]\big\}$$

olsun. O halde $B_p^H(0,\mu_0)$ kümesi, $L_p\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\big)$ uzayının $B_{L_p}(0,\mu_0)$ topunun aynı zamanda keyfi $t\in[t_0,\theta]$ için $\|u(t)\|\le H$ geometrik kısıtlamasını da sağlayan noktaları kümesini göstermektedir.

Aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 5.1.1 *$H>0$ olsun. Bu durumda her $p>1$ için,*

$$\hbar_1(B_{L_p}(0,\mu_0),B_p^H(0,\mu_0))\le\frac{2{\mu_0}^p}{H^{p-1}}$$

eşitsizliği doğrudur.

Kanıt. Her $p>1$ için

$$B_p^H(0,\mu_0)\subset B_{L_p}(0,\mu_0) \tag{5.1.1}$$

içermesinin doğruluğu açıktır.

Keyfi $u(\cdot)\in B_{L_p}(0,\mu_0)$ seçilsin ve $u_*(\cdot):[t_0,\theta]\to\mathbb{R}^m$ fonksiyonu

$$u_*(t)=\begin{cases}u(t) & ,\|u(t)\|\le H\\ \frac{u(t)}{\|u(t)\|}H & ,\|u(t)\|>H\end{cases} \tag{5.1.2}$$

olarak tanımlansın.

$u(\cdot)\in B_{L_p}(0,\mu_0)$ olduğundan her $t\in[t_0,\theta]$ için,

$$\int_{t_0}^{\theta}\|u(t)\|^p\,dt\le\mu_0^p \tag{5.1.3}$$

olur. Her $t \in [t_0,\theta]$ için $\|u_*(t)\| \le \|u(t)\|$ olduğundan, (5.1.2) ve (5.1.3) eşitsizliklerinden

$$\|u_*(\cdot)\|_p = \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \mu_0 \tag{5.1.4}$$

ve her $t \in [t_0,\theta]$ için

$$\|u_*(t)\| \le H \tag{5.1.5}$$

olduğu elde edilir. Böylece (5.1.4) ve (5.1.5) den $u_*(\cdot) \in B_p^H(0,\mu_0)$ olur.

$$\Gamma = \{\tau \in [t_0,\theta] : \|u(\tau)\| > H\}$$

olsun. $u(\cdot)$ ve $u_*(\cdot)$ fonksiyonları farkının L_1 normu değerlendirilsin.

$$\begin{aligned}\|u(\cdot)-u_*(\cdot)\|_1 &= \int_{t_0}^{\theta} \|u(t)-u_*(t)\| \, dt \\ &= \int_{\Gamma} \|u(t)-u_*(t)\| \, dt + \int_{[t_0,\theta]\setminus\Gamma} \|u(t)-u_*(t)\| \, dt \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

olur. Her $\tau \in [t_0,\theta]\setminus\Gamma$ için $u_*(\tau) = u(\tau)$ olduğundan, $\tau \in [t_0,\theta]\setminus\Gamma$ iken $\|u_*(\tau)-u(\tau)\| = 0$ olur. Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri kullanılırsa, (5.1.6) dan

$$\begin{aligned}\|u(\cdot)-u_*(\cdot)\|_1 &= \int_{\Gamma} \|u(t)-u_*(t)\| \, dt \\ &\le \left(\int_{\Gamma} 1^{\frac{p}{p-1}} \, d\tau\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Gamma} \|u(\tau)-u_*(\tau)\|^p \, d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \mu(\Gamma)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Gamma} \|u(\tau)-u_*(\tau)\|^p \, d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \mu(\Gamma)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int_{\Gamma} \|u(\tau)\|^p \, d\tau\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Gamma} \|u_*(\tau)\|^p \, d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\ &\le 2\mu_0 \mu(\Gamma)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

olduğu elde edilir. Burada $\mu(\Gamma)$, Γ kümesinin Lebesgue ölçümüdür.

Diğer yandan $u(\cdot) \in B_{L_p}(0,\mu_0)$, $\Gamma \subset [t_0,\theta]$ ve her $\tau \in \Gamma$ için $\|u(\tau)\| > H$ olduğundan,

$$H^p \mu(\Gamma) \leq \int\limits_{\Gamma} \|u(\tau)\|^p \, d\tau \leq \int\limits_{t_0}^{\theta} \|u(\tau)\|^p \, d\tau \leq \mu_0^p$$

ve dolayısıyla

$$\mu(\Gamma) \leq \frac{\mu_0^p}{H^p} \tag{5.1.8}$$

olduğu elde edilir. Böylece (5.1.7) ve (5.1.8) den,

$$\|u(\cdot) - u_*(\cdot)\|_1 \leq (2\mu_0) \cdot \left(\frac{\mu_0^p}{H^p}\right)^{\frac{p-1}{p}} = \frac{2\mu_0^p}{H^{p-1}}$$

eşitsizliğinin doğru olduğu görülür. $u(\cdot) \in B_{L_p}(0,\mu_0)$ keyfi seçildiğinden,

$$B_{L_p}(0,\mu_0) \subset B_p^H(0,\mu_0) + \frac{2\mu_0^p}{H^{p-1}} B_{L_1}(0,1) \tag{5.1.9}$$

kapsaması elde edilir. Burada $B_{L_1}(0,1)$, $L_1([t_0,\theta],\mathbb{R}^m)$ uzayında, merkezi orijinde olan kapalı birim yuvardır.

(5.1.1) ve (5.1.9) dan Önerme 5.1.1 kanıtlanmış olur. ■

Önerme 5.1.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1.2 *$p_* > 1$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda keyfi $p \in [\frac{p_*+1}{2}, 2p_*]$ ve her $H > H_*(\varepsilon)$ için*

$$\hbar_1(B_{L_p}(0,\mu_0), B_p^H(0,\mu_0)) \leq \varepsilon$$

olacak biçimde bir $H_*(\varepsilon) > 2\mu_0$ sayısı vardır.

5.2 $B_{L_p}(0,\mu_0)$' ın p Parametresine Göre Soldan Değerlendirilmesi

Bu bölümde $p \to p_* - 0, (p_* > 1)$ iken $B_{L_p}(0,\mu_0) \subset L_1\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\big)$ ve $B_{L_{p_*}}(0,\mu_0) \subset L_1\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^m\big)$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı değerlendirilecektir.

$$\alpha_0 = \min\left\{\frac{\mu_0}{2}, 1\right\} \tag{5.2.1}$$

olsun.

Önerme 5.2.1 *$p_* > 1$, $\varepsilon \in (0, \alpha_0)$ ve $H_2 > H_1 > 2\mu_0$ olsun. O zaman her $p \in (p_* - \delta_1, p_*)$ için*

$$B_{p_*}^{H_1}(0, \mu_0) \subset B_p^{H_2}(0, \mu_0) + 2(\theta - t_0)\varepsilon B_{L_1}(0, 1)$$

olacak biçimde bir $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, H_1, H_2) \in (0, p_* - 1)$ sayısı vardır. Burada $\alpha_0 > 0$ (5.2.1) ile tanımlıdır, $B_{L_1}(0, 1)$ ise $L_1([t_0, \theta], \mathbb{R}^m)$ uzayında merkezi orijinde olan kapalı birim yuvardır.

Kanıt.

$$p_1(H_1, H_2) = \max\left\{\frac{p_* + 1}{2}, \frac{p_*}{1 + \log_{\frac{H_1}{\mu_0}} \frac{H_2}{H_1}}\right\}, \tag{5.2.2}$$

$$\beta_1(\varepsilon, H_1) = p_*\left(1 - \frac{1}{1 + \log_{\frac{H_1}{\mu_0}} \frac{H_1+\varepsilon}{H_1}}\right),$$

$$\beta_2(\varepsilon, H_1) = p_*\left(1 - \frac{1}{1 + \log_{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \frac{H_1-\varepsilon}{H_1}}\right)$$

olsun. Bu durumda, $p_1 \in \left[\frac{p_*+1}{2}, p_*\right)$, $\beta_1(\varepsilon, H_1) > 0$, $\beta_2(\varepsilon, H_1) > 0$, her $p \in (p_* - \beta_1(\varepsilon, H_1), p_*)$ için,

$$-\frac{\varepsilon}{H_1} \leq 1 - \left(\frac{H_1}{\mu_0}\right)^{\frac{p_*-p}{p}} \tag{5.2.3}$$

ve her $p \in (p_* - \beta_2(\varepsilon, H_1), p_*)$ için

$$1 - \left(\frac{\varepsilon}{\mu_0}\right)^{\frac{p_*-p}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{H_1} \tag{5.2.4}$$

olduğu kolayca görülebilir. Şimdi,

$$\delta_1(\varepsilon, H_1, H_2) = \min\{\beta_1(\varepsilon, H_1), \beta_2(\varepsilon, H_1), p_* - p_1(H_1, H_2)\} \tag{5.2.5}$$

olsun. O zaman $\delta_1(\varepsilon, H_1, H_2) \in (0, p_* - 1)$ olur.

Keyfi $p \in (p_* - \delta_1(\varepsilon, H_1, H_2), p_*)$ ve $u_*(\cdot) \in B_{p_*}^{H_1}(0, \mu_0)$ alınsın ve sabitlensin. Her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$u(t) = u_*(t) \left\|u_*(t)\right\|^{\frac{p_*-p}{p}} \mu_0^{\frac{p-p_*}{p}} \tag{5.2.6}$$

olmak üzere $u(\cdot) : [t_0, \theta] \to R^m$ fonksiyonu tanımlansın.

$u_*(\cdot) \in B_{p_*}^{H_1}(0, \mu_0)$ olduğundan her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\|^{p_*} \, dt \leq \mu_0^{p_*}, \ \|u_*(t)\| \leq H_1 \tag{5.2.7}$$

olur. (5.2.6) ve (5.2.7) den

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^{p} \, dt = \mu_0^{p-p_*} \int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\|^{p_*} \, dt \leq \mu_0^{p} \tag{5.2.8}$$

ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|u(t)\| = \mu_0^{\frac{p-p_*}{p}} \|u_*(t)\|^{\frac{p_*}{p}} \leq \mu_0^{\frac{p-p_*}{p}} H_1^{\frac{p_*}{p}} \tag{5.2.9}$$

olduğu elde edilir.

Diğer yandan, (5.2.2) ve (5.2.5) den $p \in (p_* - \delta_1(\varepsilon, H_1, H_2), p_*)$ için

$$p_* - p < \delta_1(\varepsilon, H_1, H_2) \leq p_* - p_1(H_1, H_2)$$

olur. Buna göre,

$$p > p_1(H_1, H_2) \geq \frac{p_*}{1 + \log_{\frac{H_1}{\mu_0}} \frac{H_2}{H_1}} \tag{5.2.10}$$

eşitsizliği doğrudur. O halde (5.2.9) ve (5.2.10) dan

$$\|u(t)\| \leq \mu_0^{\frac{p-p_*}{p}} H_1^{\frac{p_*}{p}} = \mu_0 \left(\frac{H_1}{\mu_0}\right)^{\frac{p_*}{p}} < \mu_0 \left(\frac{H_1}{\mu_0}\right)^{1+\log_{\frac{H_1}{\mu_0}} \frac{H_2}{H_1}} = H_2 \tag{5.2.11}$$

olduğu elde edilir. Böylece, (5.2.8) ve (5.2.11) den, $u(\cdot) \in B_p^{H_2}(0, \mu_0)$ olduğu görülür.

Şimdi, $u(\cdot)$ ve $u_*(\cdot)$ fonksiyonları arasındaki farkın L_1 normu değerlendirilirse, $u_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot) - u_*(\cdot)\|_1 &= \int_{t_0}^{\theta} \|u(t) - u_*(t)\| \, dt \\ &= \int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\| \left| 1 - \left(\frac{\|u_*(t)\|}{\mu_0}\right)^{\frac{p_*-p}{p}} \right| dt. \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

olur.

$$A(\varepsilon) = \{t \in [t_0, \theta] : 0 \leq \|u_*(t)\| \leq \varepsilon\}, \quad B(\varepsilon) = \{t \in [t_0, \theta] : \varepsilon < \|u_*(t)\| \leq H_1\}$$

kümeleri tanımlansın. $t \in A(\varepsilon)$ olsun. Bu durumda, $0 \leq \|u_*(t)\| \leq \varepsilon$ olur. $\varepsilon < \frac{\mu_0}{2}$, $p < p_*$ olduğundan

$$\left| 1 - \left(\frac{\|u_*(t)\|}{\mu_0} \right)^{\frac{p_*-p}{p}} \right| \leq 1$$

ve bundan dolayı, $t \in A(\varepsilon)$ için

$$\|u_*(t)\| \left| 1 - \left(\frac{\|u_*(t)\|}{\mu_0} \right)^{\frac{p_*-p}{p}} \right| \leq \varepsilon \tag{5.2.13}$$

olur.

$t \in B(\varepsilon)$ için $\varepsilon \leq \|u_*(t)\| \leq H_1$ olduğundan

$$1 - \left(\frac{H_1}{\mu_0} \right)^{\frac{p_*-p}{p}} \leq 1 - \left(\frac{\|u_*(t)\|}{\mu_0} \right)^{\frac{p_*-p}{p}} \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{\mu_0} \right)^{\frac{p_*-p}{p}} \tag{5.2.14}$$

elde edilir. $p \in (p_* - \delta_1(\varepsilon, H_1, H_2), p_*)$ olduğundan, (5.2.3), (5.2.5), (5.2.6) ve (5.2.14) den

$$\left| 1 - \left(\frac{\|u_*(t)\|}{\mu_0} \right)^{\frac{p_*-p}{p}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{H_1}$$

eşitsizliğinin doğru olduğu görülür. Böylece, $t \in B(\varepsilon)$ için

$$\|u_*(t)\| \left| 1 - \left(\frac{\|u_*(t)\|}{\mu_0} \right)^{\frac{p_*-p}{p}} \right| \leq \varepsilon \tag{5.2.15}$$

olduğu bulunur. Sonuç olarak, (5.2.12), (5.2.13) ve (5.2.15) den

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot) - u_*(\cdot)\|_1 &= \int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\| \left| 1 - \left(\frac{\|u_*(t)\|}{\mu_0} \right)^{\frac{p_*-p}{p}} \right| dt \\
&= \int_{A(\varepsilon)} \|u_*(t)\| \left| 1 - \left(\frac{\|u_*(t)\|}{\mu_0} \right)^{\frac{p_*-p}{p}} \right| dt + \\
&\quad \int_{B(\varepsilon)} \|u_*(t)\| \left| 1 - \left(\frac{\|u_*(t)\|}{\mu_0} \right)^{\frac{p_*-p}{p}} \right| dt \\
&\leq \varepsilon \Big(\mu\big(A(\varepsilon)\big) + \mu\big(B(\varepsilon)\big) \Big) \\
&\leq 2\varepsilon(\theta - t_0)
\end{aligned} \tag{5.2.16}$$

olduğu elde edilir. Böylece $p \in (p_* - \delta_1(\varepsilon, H_1, H_2), p_*)$ iken keyfi seçilen $u_*(\cdot) \in B_{p_*}^{H_1}(0, \mu_0)$ için (5.2.16) eşitsizliğini sağlayacak biçimde $u(\cdot) \in B_p^{H_2}(0, \mu_0)$ vardır. Bu ise

$$B_{p_*}^{H_1}(0, \mu_0) \subset B_p^{H_2}(0, \mu_0) + 2(\theta - t_0)\varepsilon B_{L_1}(0, 1)$$

olması demektir. Önermenin doğruluğu kanıtlanmış olur. ■

Sonuç 5.1.2 ve Önerme 5.2.1 uyarınca aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 5.2.2 *$p_* > 1$, $\varepsilon \in (0, \alpha_0)$ olsun. Bu durumda her $p \in (p_* - \gamma_1, p_*)$ için*

$$B_{L_{p_*}}(0, \mu_0) \subset B_{L_p}(0, \mu_0) + \varepsilon B_{L_1}(0, 1)$$

olacak şekilde bir $\gamma_1 = \gamma_1(\varepsilon) \in (0, p_* - 1)$ sayısı vardır. Burada α_0, (5.2.1) ile tanımlıdır.

Kanıt. Sonuç 5.1.2 den her $p \in [\frac{p_*+1}{2}, 2p_*]$ ve her $H > H_*(\varepsilon)$ için

$$B_{L_p}(0, \mu_0) \subset B_p^H(0, \mu_0) + \frac{\varepsilon}{3} B_{L_1}(0, 1), \tag{5.2.17}$$

$$B_p^H(0, \mu_0) \subset B_{L_p}(0, \mu_0) + \frac{\varepsilon}{3} B_{L_1}(0, 1) \tag{5.2.18}$$

olacak şekilde bir $H_*(\varepsilon) > 2\mu_0$ sayısı vardır.

$H_1(\varepsilon) = 2H_*(\varepsilon)$, $H_2(\varepsilon) = 3H_*(\varepsilon)$ olsun. O zaman, Önerme 5.2.1 den her $p \in (p_* - \gamma_1, p_*)$ için,

$$B_{p_*}^{H_1(\varepsilon)}(0, \mu_0) \subset B_p^{H_2(\varepsilon)}(0, \mu_0) + \frac{\varepsilon}{3} B_{L_1}(0, 1) \tag{5.2.19}$$

olacak şekilde bir $\gamma_1 = \gamma_1(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon, H_1(\varepsilon), H_2(\varepsilon)) \in (0, p_* - 1)$ sayısı vardır.

(5.2.17)-(5.2.19) içermelerinden her $p \in (p_* - \gamma_1, p_*)$ için

$$\begin{aligned} B_{L_{p_*}}(0, \mu_0) \subset B_{p_*}^{H_1(\varepsilon)}(0, \mu_0) + \frac{\varepsilon}{3} B_{L_1}(0, 1) &\subset B_p^{H_2(\varepsilon)}(0, \mu_0) + \frac{2\varepsilon}{3} B_{L_1}(0, 1) \\ &\subset B_{L_p}(0, \mu_0) + \varepsilon B_{L_1}(0, 1) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Böylece önerme kanıtlanmış olur. ■

$$L_* = (2 + \mu_*)(\theta - t_0), \tag{5.2.20}$$

$$\mu_* = \max\left\{ \mu_0^{\frac{p_*-p}{p_*}} : p \in \left[\frac{p_*+1}{2}, p_* \right] \right\} \tag{5.2.21}$$

olsun.

Önerme 5.2.3 *$p_* > 1$, $\varepsilon \in (0, \alpha_0)$, $H > 2\mu_0$ olsun. Bu durumda, her $p \in (p_* - \delta_2, p_*)$ için*

$$B_p^H(0, \mu_0) \subset B_{p_*}^H(0, \mu_0) + L_* \varepsilon^{\frac{1}{2}} B_{L_1}(0, 1)$$

olacak şekilde bir $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon, H) \in \left(0, \frac{p_*-1}{2}\right]$ sayısı vardır. Burada α_0, (5.2.1) ile tanımlıdır.

Kanıt.

$$\beta_3(\varepsilon, H) = \min\left\{ p_* \log_{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \frac{H+\varepsilon}{H}, \frac{p_*-1}{2} \right\},$$
$$\beta_4(\varepsilon, H) = \min\left\{ p_* \log_{\frac{\mu_0}{H}} \frac{H-\varepsilon}{H}, \frac{p_*-1}{2} \right\}$$

sayıları tanımlansın. Açıktır ki, $\beta_3(\varepsilon, H) \in (0, \frac{p_*-1}{2}]$, $\beta_4(\varepsilon, H) \in (0, \frac{p_*-1}{2}]$. Her $p \in (p_* - \beta_3(\varepsilon, H), p_*)$ için

$$-\frac{\varepsilon}{H} \leq 1 - \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon} \right)^{\frac{p_*-p}{p_*}} \tag{5.2.22}$$

ve her $p \in (p_* - \beta_4(\varepsilon, H), p_*)$ için

$$1 - \left(\frac{\mu_0}{H} \right)^{\frac{p_*-p}{p_*}} \leq \frac{\varepsilon}{H} \tag{5.2.23}$$

eşitsizliklerinin doğruluğu kolayca görülebilir.

$$\delta_2(\varepsilon, H) = \min\{\beta_3(\varepsilon, H), \beta_4(\varepsilon, H)\} \tag{5.2.24}$$

olsun. O halde $\delta_2(\varepsilon, H) \in (0, \frac{p_*-1}{2}]$ dir.

Keyfi $p \in (p_* - \delta_2(\varepsilon, H), p_*)$ ve keyfi $u(\cdot) \in B_p^H(0, \mu_0)$ fonksiyonu seçilip sabitlensin. $t \in [t_0, \theta]$ için

$$u_*(t) = u(t) \left\| u(t) \right\|^{\frac{p-p_*}{p_*}} \mu_0^{\frac{p_*-p}{p_*}}, \ t \in [t_0, \theta] \tag{5.2.25}$$

olmak üzere $u_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu tanımlansın.

$u(\cdot) \in B_p^H(0, \mu_0)$ olduğundan her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \, dt \le \mu_0^p \, , \qquad \|u(t)\| \le H$$

eşitsizlikleri doğrudur. O halde (5.2.25) den

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\|^{p_*} \, dt \le \mu_0^{p_*-p} \int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \, dt \le \mu_0^p \tag{5.2.26}$$

ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|u_*(t)\| &\le \mu_0 \mu_0^{-\frac{p}{p_*}} \|u(t)\|^{\frac{p}{p_*}} = \mu_0 \left(\frac{\|u(t)\|}{\mu_0} \right)^{\frac{p}{p_*}} \\ &\le \mu_0 \left(\frac{H}{\mu_0} \right)^{\frac{p}{p_*}} < \mu_0 \frac{H}{\mu_0} = H \end{aligned} \tag{5.2.27}$$

olduğu elde edilir. Böylece, (5.2.26) ve (5.2.27) eşitsizliklerinden $u_*(\cdot) \in B_{p_*}^H(0, \mu_0)$ olduğu görülür.

$$A(\varepsilon) = \{t \in [t_0, \theta] : 0 \le \|u(t)\| \le \varepsilon\}, \quad B(\varepsilon) = \{t \in [t_0, \theta] : \varepsilon < \|u(t)\| \le H_1\}$$

kümeleri tanımlansın.

$u(\cdot)$ ve $u_*(\cdot)$ fonksiyonları arasındaki farkın L_1 normu alınırsa, $u_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} \|u(\cdot) - u_*(\cdot)\|_1 &= \int_{t_0}^{\theta} \|u(t) - u_*(t)\| \, dt \\ &= \int_{t_0}^{\theta} \left\| u(t) - u(t) \|u(t)\|^{\frac{p-p_*}{p_*}} \mu_0^{\frac{p-p_*}{p_*}} \right\| dt \\ &= \int_{A(\varepsilon)} \left\| u(t) - u(t) \|u(t)\|^{\frac{p-p_*}{p_*}} \mu_0^{\frac{p-p_*}{p_*}} \right\| dt \\ &+ \int_{B(\varepsilon)} \left\| u(t) - u(t) \|u(t)\|^{\frac{p-p_*}{p_*}} \mu_0^{\frac{p-p_*}{p_*}} \right\| dt \end{aligned} \tag{5.2.28}$$

olur.

$t \in A(\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $0 \leq \|u(t)\| \leq \varepsilon$ olur. $\delta_2(\varepsilon, H) \leq \frac{p_*-1}{2}$ ve $p \in (p_* - \delta_2(\varepsilon, H), p_*)$ olduğundan $p \geq \frac{p_*+1}{2}$ olur. $\varepsilon < \alpha_0 \leq 1$ ve $p \in [\frac{p_*+1}{2}, p_*)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\int\limits_{A(\varepsilon)} \left\| u(t) - u(t) \|u(t)\|^{\frac{p-p_*}{p_*}} \mu_0^{\frac{p-p_*}{p_*}} \right\| dt &\leq \int\limits_{A(\varepsilon)} \|u(t)\| \, dt + \int\limits_{A(\varepsilon)} \|u(t)\|^{\frac{p}{p_*}} \mu_0^{\frac{p_*-p}{p_*}} \, dt \\
&\leq \varepsilon(\theta - t_0) + \mu_0^{\frac{p_*-p}{p_*}} \varepsilon^{\frac{p}{p_*}} (\theta - t_0) \\
&\leq \varepsilon(\theta - t_0) + \mu_*(\theta - t_0)\varepsilon^{\frac{p}{p_*}} \\
&\leq \varepsilon(\theta - t_0) + \mu_*(\theta - t_0)\varepsilon^{\frac{p_*+1}{2p_*}} \\
&\leq \varepsilon(\theta - t_0) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \mu_*(\theta - t_0) \\
&\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} (1 + \mu_*)(\theta - t_0) \qquad (5.2.29)
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Burada μ_*, (5.2.21) ile tanımlıdır.

Şimdi $t \in B(\varepsilon)$ olsun. O halde $\varepsilon < \|u(t)\| \leq H$ ve $p < p_*$ olduğundan

$$1 - \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon}\right)^{\frac{p_*-p}{p_*}} \leq 1 - \left(\frac{\mu_0}{\|u(t)\|}\right)^{\frac{p_*-p}{p_*}} \leq 1 - \left(\frac{\mu_0}{H}\right)^{\frac{p_*-p}{p_*}} \qquad (5.2.30)$$

olur. $p \in (p_* - \delta_2(\varepsilon, H), p_*)$ olduğundan (5.2.22), (5.2.23) ve (5.2.30) eşitsizliklerinden her $t \in B(\varepsilon)$ için

$$\left| 1 - \left(\frac{\mu_0}{\|u(t)\|}\right)^{\frac{p_*-p}{p_*}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{H}$$

ve

$$\|u(t)\| \left| 1 - \left(\frac{\mu_0}{\|u(t)\|}\right)^{\frac{p_*-p}{p_*}} \right| \leq \varepsilon \qquad (5.2.31)$$

olduğu bulunur. Böylece (5.2.31) den

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B(\varepsilon)} \left\| u(t) - u(t) \|u(t)\|^{\frac{p-p_*}{p_*}} \mu_0^{\frac{p-p_*}{p_*}} \right\| dt &= \int\limits_{B(\varepsilon)} \|u(t)\| \left| 1 - \left(\frac{\mu_0}{\|u(t)\|}\right)^{\frac{p_*-p}{p_*}} \right| dt \\
&\leq \varepsilon(\theta - t_0) \qquad (5.2.32)
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. (5.2.20), (5.2.21), (5.2.28), (5.2.29) ve (5.2.32) den

$$\begin{aligned}\|u(\cdot)-u_*(\cdot)\|_1 &= \int_{t_0}^{\theta} \|u(t)-u_*(t)\| \, dt \\ &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}(1+\mu_*)(\theta-t_0)+\varepsilon(\theta-t_0) \\ &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\theta-t_0)[1+\mu_*+\varepsilon^{\frac{1}{2}}] \\ &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\theta-t_0)[2+\mu_*] \\ &= \varepsilon^{\frac{1}{2}}L_*\end{aligned}$$

olur. $p \in (p_*-\delta_2(\varepsilon,H),p_*)$ ve keyfi $u(\cdot) \in B_p^H(0,\mu_0)$ keyfi seçildiğinden, son eşitsizlikten önermenin kanıtı elde edilir. ■

Önerme 5.2.4 *$p_* > 1$, $\varepsilon \in (0,\alpha_0)$ olsun. Bu durumda her $p \in (p_*-\gamma_2,p_*)$ için*

$$B_{L_p}(0,\mu_0) \subset B_{L_{p_*}}(0,\mu_0)+\varepsilon B_{L_1}(0,1)$$

olacak biçimde bir $\gamma_2=\gamma_2(\varepsilon) \in (0,p_*-1)$ sayısı vardır.

Kanıt. Sonuç 5.1.2 den her $H > H_*(\varepsilon)$ ve keyfi $p \in [\frac{p_*+1}{2},2p_*]$ için

$$B_{L_p}(0,\mu_0) \subset B_p^H(0,\mu_0)) + \frac{\varepsilon}{3}B_{L_1}(0,1), \tag{5.2.33}$$

$$B_p^H(0,\mu_0)) \subset B_{L_p}(0,\mu_0) + \frac{\varepsilon}{3}B_{L_1}(0,1) \tag{5.2.34}$$

olacak biçimde $H_*(\varepsilon) > 2\mu_0$ sayısı vardır.

$H(\varepsilon) = 2H_*(\varepsilon)$ seçilip sabitlensin. Bu durumda Önerme 5.2.3 den her $p \in (p_*-\delta_2,p_*)$ için

$$B_p^{H(\varepsilon)}(0,\mu_0) \subset B_{p_*}^{H(\varepsilon)}(0,\mu_0) + \frac{\varepsilon}{3}B_{L_1}(0,1) \tag{5.2.35}$$

olacak biçimde bir $\delta_2=\delta_2(\varepsilon,H(\varepsilon)) \in (0,p_*-1)$ sayısı vardır.

$\gamma_2=\gamma_2(\varepsilon)=\delta_2(\varepsilon,H(\varepsilon))$ olsun. Bu durumda, (5.2.33)-(5.2.35) içermelerinden, her $p \in [\frac{p_*+1}{2},2p_*]$ için

$$\begin{aligned}B_{L_p}(0,\mu_0) &\subset B_p^{H(\varepsilon)}(0,\mu_0)) + \frac{\varepsilon}{3}B_{L_1}(0,1) \\ &\subset B_{p_*}^{H(\varepsilon)}(0,\mu_0)) + \frac{2\varepsilon}{3}B_{L_1}(0,1) \\ &\subset B_{L_{p_*}}(0,\mu_0)) + \varepsilon B_{L_1}(0,1)\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır. ■

Önerme 5.2.2 ve Önerme 5.2.4 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 5.2.5 *$p_* > 1$ ve $\varepsilon \in (0, \alpha_0)$ olsun. O zaman her $p \in (p_* - \delta_1, p_*)$ için*

$$\hbar_1(B_{L_p}(0, \mu_0), B_{L_{p*}}(0, \mu_0)) \leq \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

5.3 $B_{L_p}(0, \mu_0)$' ın p Parametresine Göre Sağdan Değerlendirilmesi

Bu bölümde $p \to p_* + 0$, ($p_* > 1$), iken $B_{L_p}(0, \mu_0)$ ve $B_{L_{p*}}(0, \mu_0)$ arasındaki Hausdorff uzaklığı değerlendirilecektir.

Önerme 5.3.1 *$p_* > 1$, $\varepsilon \in (0, \alpha_0)$, $H_1 > H_2 > \mu_0$ olsun. O zaman keyfi $p \in (p_*, p_* + \upsilon_1)$ için*

$$B_p^{H_2}(0, \mu_0) \subset B_{p_*}^{H_1}(0, \mu_0) + 2(\theta - t_0)\varepsilon B_{L_1}(0, 1)$$

olacak biçimde $\upsilon_1 = \upsilon_1(\varepsilon, H_1, H_2) \in (0, p_*]$ sayısı vardır. Burada α_0, (5.2.1) ile tanımlıdır, $B_{L_1}(0, 1)$ ise $L_1([t_0, \theta], \mathbb{R}^m)$ uzayında merkezi orijinde olan kapalı birim yuvardır.

Kanıt.

$$p_2(H_1, H_2) = \min\left\{2p_*, p_*\left(1 + \log_{\frac{H_2}{\mu_0}} \frac{H_1}{H_2}\right)\right\}, \tag{5.3.1}$$

$$\beta_1^*(\varepsilon, H_1, H_2) = \min\left\{p_* \log_{\frac{H_2}{\mu_0}} \frac{H_2 + \varepsilon}{H_2}, p_*\right\}, \tag{5.3.2}$$

$$\beta_2^*(\varepsilon, H_1, H_2) = \min\left\{p_* \log_{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \frac{H_2 - \varepsilon}{H_2}, p_*\right\} \tag{5.3.3}$$

sayıları tanımlansın. Bu durumda, $p_2(H_1, H_2) \in (p_*, 2p_*]$, $\beta_1^*(\varepsilon, H_1, H_2) > 0$, $\beta_2^*(\varepsilon, H_1, H_2) > 0$ olur. Her $p \in (p_*, p_* + \beta_1^*(\varepsilon, H_1, H_2))$ için

$$-\frac{\varepsilon}{H_2} \leq 1 - \left(\frac{H_2}{\mu_0}\right)^{\frac{p - p_*}{p_*}} \tag{5.3.4}$$

ve her $p \in (p_*, p_* + \beta_2^*(\varepsilon, H_1, H_2))$ için,

$$1 - \left(\frac{\varepsilon}{\mu_0}\right)^{\frac{p-p_*}{p_*}} \leq \frac{\varepsilon}{H_2} \qquad (5.3.5)$$

olduğu kolayca görülebilir.

$$\upsilon_1(\varepsilon, H_1, H_2) = \min\{\beta_1^*(\varepsilon, H_1, H_2), \beta_2^*(\varepsilon, H_1, H_2), p_2(H_1, H_2) - p_*\} \qquad (5.3.6)$$

olsun. $\upsilon_1(\varepsilon, H_1, H_2) \in (0, p_*]$ olduğu açıktır.

Keyfi $p \in (p_*, p_* + \upsilon_1(\varepsilon, H_1, H_2))$ ve keyfi $u(\cdot) \in B_p^{H_2}(0, \mu_0)$ alınsın ve sabitlensin. $t \in [t_0, \theta]$ için

$$u_*(t) = u(t)\,\|u(t)\|^{\frac{p-p_*}{p_*}}\,\mu_0^{\frac{p_*-p}{p_*}}, \;\; t \in [t_0, \theta] \qquad (5.3.7)$$

olmak üzere $u_*(\cdot) : t \in [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu tanımlansın. $u(\cdot) \in B_p^{H_2}(0, \mu_0)$ olduğundan her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \, dt \leq \mu_0^p, \quad \|u(t)\| \leq H_2$$

olur. O halde (5.3.7) den

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\|^{p_*} \, dt \leq \mu_0^{p_*-p} \int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \, dt \leq \mu_0^{p_*} \qquad (5.3.8)$$

olduğu elde edilir.

$p \in (p_*, p_* + \upsilon_1(\varepsilon, H_1, H_2))$ olduğundan (5.3.1) ve (5.3.6) dan

$$p - p_* < \upsilon_1(\varepsilon, H_1, H_2) \leq p_2(H_1, H_2) - p_*,$$

$$p < p_2(H_1, H_2) \leq p_*\left(1 + \log_{\frac{H_2}{\mu_0}} \frac{H_1}{H_2}\right)$$

ve dolayısıyla

$$\left(\frac{H_2}{\mu_0}\right)^{\frac{p-p_*}{p_*}} < \frac{H_1}{H_2} \qquad (5.3.9)$$

olduğu elde edilir.

O halde (5.3.7) ve (5.3.9) dan her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$
\begin{aligned}
\|u_*(t)\| &= \|u(t)\| \, \|u(t)\|^{\frac{p-p_*}{p_*}} \mu_0^{\frac{p_*-p}{p_*}} \leq H_2 H_2^{\frac{p-p_*}{p_*}} \mu_0^{\frac{p_*-p}{p_*}} \\
&= H_2 \left(\frac{H_2}{\mu_0} \right)^{\frac{p-p_*}{p_*}} < H_2 \frac{H_1}{H_2} = H_1
\end{aligned} \tag{5.3.10}
$$

olduğu bulunur. Böylece (5.3.8) ve (5.3.10) dan, $u_*(\cdot) \in B_{p_*}^{H_1}$ olduğu görülür.

$$
A(\varepsilon) = \{t \in [t_0, \theta] : 0 \leq \|u(t)\| \leq \varepsilon\}, \quad B(\varepsilon) = \{t \in [t_0, \theta] : \varepsilon < \|u(t)\| \leq H_2\}
$$

kümeleri tanımlansın.

$u(\cdot)$ ve $u_*(\cdot)$ fonksiyonları arasındaki farkın L_1 normu değerlendirilsin. $u_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından

$$
\begin{aligned}
\|u(\cdot) - u_*(\cdot)\|_1 &= \int_{t_0}^{\theta} \|u(t) - u_*(t)\| \, dt \\
&= \int_{t_0}^{\theta} \left\| u(t) - u(t) \, \|u(t)\|^{\frac{p-p_*}{p_*}} \mu_0^{\frac{p_*-p}{p_*}} \right\| dt \\
&= \int_{A(\varepsilon)} \|u(t)\| \left| 1 - \left(\frac{\|u(t)\|}{\mu_0} \right)^{\frac{p_*-p}{p_*}} \right| dt \\
&+ \int_{B(\varepsilon)} \|u(t)\| \left| 1 - \left(\frac{\|u(t)\|}{\mu_0} \right)^{\frac{p-p_*}{p_*}} \right| dt
\end{aligned} \tag{5.3.11}
$$

olur.

$t \in A(\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $0 \leq \|u(t)\| \leq \varepsilon$ olur. $\varepsilon < \mu_0$ ve $p > p_*$ olduğundan keyfi $t \in A(\varepsilon)$ için

$$
\left| 1 - \left(\frac{\|u(t)\|}{\mu_0} \right)^{\frac{p-p_*}{p_*}} \right| \leq 1
$$

ve dolayısıyla

$$
\|u(t)\| \left| 1 - \left(\frac{\|u(t)\|}{\mu_0} \right)^{\frac{p-p_*}{p_*}} \right| \leq \varepsilon \tag{5.3.12}
$$

olduğu bulunur.

$t \in B(\varepsilon)$ için $\varepsilon \leq \|u(t)\| \leq H_2$ dir. O halde,

$$1 - \left(\frac{H_2}{\mu_0}\right)^{\frac{p-p_*}{p_*}} \leq 1 - \left(\frac{\|u(t)\|}{\mu_0}\right)^{\frac{p-p_*}{p_*}} \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{\mu_0}\right)^{\frac{p-p_*}{p_*}} \tag{5.3.13}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

$p \in (p_*, p_* + \upsilon_1(\varepsilon, H_1, H_2))$ olduğundan (5.3.4)-(5.3.6) eşitsizlikleri ve (5.3.13) den, $t \in B(\varepsilon)$ için

$$\left|1 - \left(\frac{\|u(t)\|}{\mu_0}\right)^{\frac{p-p_*}{p_*}}\right| \leq \frac{\varepsilon}{H_2}$$

eşitsizliğinin doğru olduğu görülür. Son eşitsizlikten, keyfi $t \in B(\varepsilon)$ için

$$\|u(t)\| \left|1 - \left(\frac{\|u(t)\|}{\mu_0}\right)^{\frac{p-p_*}{p_*}}\right| \leq \varepsilon \tag{5.3.14}$$

olur. O halde (5.3.11), (5.3.12) ve (5.3.14) den,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot) - u_*(\cdot)\|_1 &= \int\limits_{A(\varepsilon)} \|u(t)\| \left|1 - \left(\frac{\|u(t)\|}{\mu_0}\right)^{\frac{p-p_*}{p_*}}\right| dt \\ &+ \int\limits_{B(\varepsilon)} \|u(t)\| \left|1 - \left(\frac{\|u(t)\|}{\mu_0}\right)^{\frac{p-p_*}{p_*}}\right| dt \\ &\leq \varepsilon \mu(A(\varepsilon)) + \varepsilon \mu(B(\varepsilon)) \\ &\leq 2\varepsilon(\theta - t_0) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. $p \in (p_*, p_* + \upsilon_1(\varepsilon, H_1, H_2))$ ve $u(\cdot) \in B_p^{H_2}(0, \mu_0)$ keyfi seçildiğinden, kanıt tamamlanmış olur. ■

Önerme 5.3.2 *$p_* > 1$, $\varepsilon \in (0, \alpha_0)$ olsun. O zaman keyfi $p \in (p_*, p_* + \gamma_1^*)$ için*

$$B_{L_p}(0, \mu_0) \subset B_{L_{p_*}}(0, \mu_0) + \varepsilon B_{L_1}(0, 1)$$

olacak şekilde bir $\gamma_1^* = \gamma_1^*(\varepsilon) \in (0, p_*]$ sayısı vardır. Burada α_0, (5.2.1) ile tanımlıdır.

Kanıt. Sonuç 5.1.2 den keyfi $p \in [\frac{p_*+1}{2}, 2p_*]$ ve her $H > H_*(\varepsilon)$ için

$$B_{L_p}(0, \mu_0) \subset B_p^H(0, \mu_0) + \frac{\varepsilon}{3} B_{L_1}(0, 1), \tag{5.3.15}$$

$$B_p^H(0, \mu_0) \subset B_{L_p}(0, \mu_0) + \frac{\varepsilon}{3} B_{L_1}(0, 1) \tag{5.3.16}$$

olacak biçimde bir $H_*(\varepsilon) > 2\mu_0$ sayısı vardır.

$H_1(\varepsilon) = 3H_*(\varepsilon)$, $H_2(\varepsilon) = 2H_*(\varepsilon)$ olsun. O zaman, Önerme 5.3.1 den her $p \in (p_*, p_* + \upsilon_1)$ için

$$B_p^{H_2(\varepsilon)}(0, \mu_0) \subset B_{p_*}^{H_1(\varepsilon)}(0, \mu_0) + \frac{\varepsilon}{3} B_{L_1}(0, 1) \tag{5.3.17}$$

olacak şekilde bir $\upsilon_1 = \upsilon_1(\varepsilon, H_1(\varepsilon), H_2(\varepsilon)) \in (0, p_*]$ sayısı vardır.

$\gamma_1^* = \gamma_1^*(\varepsilon) = \upsilon_1(\varepsilon, H_1(\varepsilon), H_2(\varepsilon))$ olsun. Bu durumda (5.3.15)-(5.3.17) içermelerinden her $p \in (p_*, p_* + \gamma_1^*)$ için

$$\begin{aligned} B_{L_p}(0, \mu_0) &\subset B_p^{H_2(\varepsilon)}(0, \mu_0) + \frac{\varepsilon}{3} B_{L_1}(0, 1) \\ &\subset B_{p_*}^{H_1(\varepsilon)}(0, \mu_0) + \frac{2\varepsilon}{3} B_{L_1}(0, 1) \\ &\subset B_{L_{p_*}}(0, \mu_0) + \varepsilon B_{L_1}(0, 1) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Böylece içermenin doğruluğu görülmüş olur. ■

$$L^* = (2 + \mu^*)(\theta - t_0), \tag{5.3.18}$$

$$\mu^* = \max \left\{ \mu_0^{\frac{p - p_*}{p}} : p \in [p_*, 2p_*] \right\} \tag{5.3.19}$$

olsun.

Önerme 5.3.3 *$p_* > 1$, $\varepsilon \in (0, \alpha_0)$ ve $H > 2\mu_0$ olsun. Bu durumda her $p \in (p_*, p_* + \upsilon_2)$ için*

$$B_{p_*}^H(0, \mu_0) \subset B_p^H(0, \mu_0) + L^* \varepsilon^{\frac{1}{2}} B_{L_1}(0, 1)$$

olacak biçimde bir $\upsilon_2 = \upsilon_2(\varepsilon, H) \in (0, p_*]$ sayısı vardır. Burada α_0, (5.2.1) ile tanımlıdır.

Kanıt.

$$\beta_3^*(\varepsilon, H) = \min \left\{ p_* \left(\frac{1}{1 - \log_{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \frac{H+\varepsilon}{H}} - 1 \right) , p_* \right\},$$

$$\beta_4^*(\varepsilon, H) = \min \left\{ p_* \left(\frac{1}{1 - \log_{\frac{\mu_0}{H}} \frac{H-\varepsilon}{H}} - 1 \right) , p_* \right\}$$

olsun. $\varepsilon \in (0, \alpha_0)$ olduğundan,

$$0 < 1 - \log_{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \frac{H+\varepsilon}{H} < 1 \ , \quad 0 < 1 - \log_{\frac{\mu_0}{H}} \frac{H-\varepsilon}{H} < 1$$

ve dolayısıyla $\beta_3^*(\varepsilon, H) \in (0, p_*]$, $\beta_4^*(\varepsilon, H) \in (0, p_*]$ olduğu gösterilebilir.

Her $p \in (p_*, p_* + \beta_3^*(\varepsilon, H))$ için

$$-\frac{\varepsilon}{H} \leq 1 - \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon}\right)^{\frac{p-p_*}{p}} \tag{5.3.20}$$

ve her $p \in (p_*, p_* + \beta_4^*(\varepsilon, H))$ için

$$1 - \left(\frac{\mu_0}{H}\right)^{\frac{p-p_*}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{H} \tag{5.3.21}$$

eşitsizliklerinin doğruluğu kolayca görülebilir.

$$\upsilon_2(\varepsilon, H) = \min\{\beta_3^*(\varepsilon, H), \beta_4^*(\varepsilon, H)\} \tag{5.3.22}$$

olsun. Bu durumda $\upsilon_2(\varepsilon, H) \in (0, p_*]$ olur.

Keyfi $p \in (p_*, p_* + \upsilon_2(\varepsilon, H))$ ve $u_*(\cdot) \in B_{p_*}^H(0, \mu_0)$ alınsın ve sabitlensin. $t \in [t_0, \theta]$ için

$$u(t) = u_*(t) \, \|u_*(t)\|^{\frac{p_*-p}{p}} \, \mu_0^{\frac{p-p_*}{p}} \ , \ t \in [t_0, \theta] \tag{5.3.23}$$

olmak üzere $u_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu tanımlansın.

$u_*(\cdot) \in B_{p_*}^H(0, \mu_0)$ olduğundan, her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\|^{p_*} \, dt \leq \mu_0^{p_*}, \ \|u_*(t)\| \leq H$$

olur. Buradan ve (5.3.23) den

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \, dt \leq \mu_0^{p-p_*} \int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\|^{p_*} \, dt \leq \mu_0^p \tag{5.3.24}$$

ve her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &= \mu_0 \mu_0^{-\frac{p_*}{p}} \, \|u_*(t)\|^{\frac{p_*}{p}} \\ &\leq \mu_0 H^{\frac{p_*}{p}} \mu_0^{-\frac{p_*}{p}} \leq \mu_0 \left(\frac{H}{\mu_0}\right)^{\frac{p_*}{p}} < \mu_0 \frac{H}{\mu_0} = H \end{aligned} \tag{5.3.25}$$

olduğu elde edilir. O halde (5.3.24) ve (5.3.25) den $u(\cdot) \in B_p^H(0,\mu_0)$ dır.

$$A(\varepsilon) = \{t \in [t_0,\theta] : 0 \leq \|u_*(t)\| \leq \varepsilon\}, \quad B(\varepsilon) = \{t \in [t_0,\theta] : \varepsilon < \|u_*(t)\| \leq H\}$$

kümeleri tanımlansın ve $u(\cdot)$ ve $u_*(\cdot)$ fonksiyoları arasındaki farkın L_1 normu değerlendirilsin. $u_*(\cdot)$ fonksiyonunun tanımımdan,

$$\begin{aligned}
\|u_*(\cdot) - u(\cdot)\|_1 &= \int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t) - u(t)\| \, dt \\
&= \int_{t_0}^{\theta} \left\| u_*(t) - u_*(t) \|u_*(t)\|^{\frac{p_*-p}{p}} \mu_0^{\frac{p-p_*}{p}} \right\| dt \\
&= \int_{A(\varepsilon)} \left\| u_*(t) - u_*(t) \|u_*(t)\|^{\frac{p_*-p}{p}} \mu_0^{\frac{p-p_*}{p}} \right\| dt \\
&+ \int_{B(\varepsilon)} \left\| u_*(t) - u_*(t) \|u_*(t)\|^{\frac{p_*-p}{p}} \mu_0^{\frac{p-p_*}{p}} \right\| dt \qquad (5.3.26)
\end{aligned}$$

olur.

$t \in A(\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $0 \leq \|u_*(t)\| \leq \varepsilon$ olur. $\varepsilon < \alpha_0 < 1$ ve $p \in [p_*, 2p_*]$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_{A(\varepsilon)} \left\| u_*(t) - u_*(t) \|u_*(t)\|^{\frac{p_*-p}{p}} \mu_0^{\frac{p-p_*}{p}} \right\| dt &\leq \int_{A(\varepsilon)} \|u_*(t)\| \, dt + \int_{A(\varepsilon)} \|u_*(t)\|^{\frac{p_*}{p}} \mu_0^{\frac{p-p_*}{p}} \, dt \\
&\leq \varepsilon(\theta - t_0) + \mu_0^{\frac{p-p_*}{p}} \varepsilon^{\frac{p_*}{p}} (\theta - t_0) \\
&\leq \varepsilon(\theta - t_0) + \mu_*(\theta - t_0)\varepsilon^{\frac{p_*}{p}} \\
&\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\theta - t_0) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\mu_*(\theta - t_0) \\
&\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}(1 + \mu_*)(\theta - t_0) \qquad (5.3.27)
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

$t \in B(\varepsilon)$ olsun. O halde $\varepsilon < \|u(t)\| \leq H$ ve

$$1 - \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon}\right)^{\frac{p-p_*}{p}} \leq 1 - \left(\frac{\mu_0}{\|u_*(t)\|}\right)^{\frac{p-p_*}{p}} \leq 1 - \left(\frac{\mu_0}{H}\right)^{\frac{p-p_*}{p}} \qquad (5.3.28)$$

eşitsizliklerinin doğruluğu elde edilir.

$p \in (p_*, p_*+\upsilon_2(\varepsilon, H))$ olduğundan (6.4.2)-(5.3.22) ve (5.3.28) eşitsizliklerinden, $t \in B(\varepsilon)$ için

$$\left|1 - \left(\frac{\mu_0}{\|u_*(t)\|}\right)^{\frac{p-p_*}{p}}\right| \leq \frac{\varepsilon}{H}$$

ve

$$\|u_*(t)\| \left|1 - \left(\frac{\mu_0}{\|u_*(t)\|}\right)^{\frac{p-p_*}{p}}\right| \leq \varepsilon \tag{5.3.29}$$

olduğu bulunur. Böylece (5.3.29) dan

$$\begin{aligned}\int\limits_{B(\varepsilon)} \left\| u_*(t) - u_*(t) \|u_*(t)\|^{\frac{p_*-p}{p}} \mu_0^{\frac{p-p_*}{p}} \right\| dt &= \int\limits_{B(\varepsilon)} \|u_*(t)\| \left|1 - \left(\frac{\mu_0}{\|u_*(t)\|}\right)^{\frac{p-p_*}{p}}\right| dt \\ &\leq \varepsilon(\theta - t_0) \end{aligned} \tag{5.3.30}$$

olur.

(5.3.18), (5.3.19), (5.3.26), (5.3.27) ve (5.3.30) dan

$$\begin{aligned}\|u(\cdot) - u_*(\cdot)\|_1 &= \int\limits_{t_0}^{\theta} \|u(t) - u_*(t)\| \, dt \\ &= \int\limits_{A(\varepsilon)} \left\| u_*(t) - u_*(t) \|u_*(t)\|^{\frac{p_*-p}{p}} \mu_0^{\frac{p-p_*}{p}} \right\| dt \\ &+ \int\limits_{B(\varepsilon)} \left\| u_*(t) - u_*(t) \|u_*(t)\|^{\frac{p_*-p}{p}} \mu_0^{\frac{p-p_*}{p}} \right\| dt \\ &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}(1+\mu_*)(\theta - t_0) + \varepsilon(\theta - t_0) \\ &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\theta - t_0)[1 + \mu_* + \varepsilon^{\frac{1}{2}}] \\ &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\theta - t_0)[2 + \mu_*] \\ &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} L_* \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. $p \in (p_*, p_*+\upsilon_2(\varepsilon, H))$ ve $u_*(\cdot) \in B_{p_*}^H(0, \mu_0)$ keyfi seçildiğinden, son eşitsizlikten önerme kanıtlanmış olur. ■

Önerme 5.3.4 *$p_* > 1$, $\varepsilon \in (0, \alpha_0)$ olsun. Bu durumda her $p \in (p_*, p_* + \gamma_2^*)$ için*

$$B_{L_{p_*}}(0, \mu_0) \subset B_{L_p}(0, \mu_0) + \varepsilon B_{L_1}(0, 1)$$

olacak biçimde bir $\gamma_2^* = \gamma_2^*(\varepsilon) \in (0, p_*]$ *sayısı vardır. Burada* α_0*, (5.2.1) ile tanımlıdır.*

Kanıt. Sonuç 5.1.2 den her $H > H_*(\varepsilon)$ ve her $p \in [p_*, 2p_*]$ için

$$B_{L_p}(0,\mu_0) \subset B_p^H(0,\mu_0) + \frac{\varepsilon}{3} B_{L_1}(0,1), \tag{5.3.31}$$

$$B_p^H(0,\mu_0) \subset B_{L_p}(0,\mu_0) + \frac{\varepsilon}{3} B_{L_1}(0,1) \tag{5.3.32}$$

içermelerini doğru kılan bir $H_*(\varepsilon) > 2\mu_0$ sayısı vardır.

$H(\varepsilon) = 2H_*(\varepsilon)$ olsun. Önerme 5.3.3 den her $p \in (p_*, p_* + \upsilon_2)$ için

$$B_{p_*}^{H(\varepsilon)}(0,\mu_0) \subset B_p^{H(\varepsilon)}(0,\mu_0) + \frac{\varepsilon}{3} B_1(0,1) \tag{5.3.33}$$

olacak biçimde bir $\upsilon_2 = \upsilon_2(\varepsilon, H(\varepsilon)) \in (0, p_*]$ sayısı vardır.

$\gamma_2^* = \gamma_2^*(\varepsilon) = \upsilon_2(\varepsilon, H(\varepsilon))$ olsun. O zaman (5.3.31)-(5.3.33) içermelerinden her $p \in (p_*, p_* + \gamma_2^*)$ için,

$$\begin{aligned} B_{L_{p_*}}(0,\mu_0) &\subset B_{p_*}^{H(\varepsilon)}(0,\mu_0)) + \frac{\varepsilon}{3} B_{L_1}(0,1) \\ &\subset B_p^{H(\varepsilon)}(0,\mu_0) + \frac{2\varepsilon}{3} B_{L_1}(0,1) \\ &\subset B_{L_p}(0,\mu_0) + \varepsilon B_{L_1}(0,1) \end{aligned}$$

olduğu ele edilir. Bu ise gösterilmek istenilendir. ■

Önerme 5.3.2 ve Önerme 5.3.4 den aşağıdaki sonucun doğruluğu görülebilir.

Önerme 5.3.5 $p_* > 1$ *ve* $\varepsilon \in (0, \alpha_0)$ *olsun. O zaman her* $p \in (p_*, p_* + \delta_2)$ *için*

$$\hbar_1(B_{L_p}(0,\mu_0), B_{L_{p_*}}(0,\mu_0)) \leq \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in (0, p_*)$ *sayısı vardır. Burada* α_0*, (5.2.1) ile tanımlıdır.*

Önerme 5.2.5 ve Önerme 5.3.5 den aşağıdaki teoremin doğru olduğu elde edilir.

Teorem 5.3.6 $p_* > 1$ *ve* $\varepsilon \in (0, \alpha_0)$ *olsun. Bu durumda her* $p \in (p_* - \delta_*, p_* + \delta_*)$ *için*

$$\hbar_1(B_{L_p}(0,\mu_0), B_{L_{p_*}}(0,\mu_0)) \leq \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta_* = \delta_*(\varepsilon) > 0$ *sayısı vardır.*

5.4 Erişim Kümelerinin p' ye Göre Sürekliliği

Bu bölümde, bir önceki bölümde ifade edilen Teorem 5.3.6 yardımıyla, (3.1.2) kısıtı olan (3.1.1) sisteminin yörüngeler kümesinin ve erişim kümelerinin p'ye olan bağlılığını incelenecektir.

$$b_* = L_3 \exp(r_0) \tag{5.4.1}$$

olsun. Burada r_0 sayısı (4.2.2) ile tanımlıdır.

Teorem 5.4.1 *$p_* > 1$, $\varepsilon \in (0, \alpha_0)$ olsun. O zaman her $p \in (p_* - \xi, p_* + \xi)$ için*

$$h_C(X_p(t_0, X_0), X_{p_*}(t_0, X_0)) \leq \varepsilon$$

ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h_n(X_p(t; t_0, X_0), X_{p_*}(t; t_0, X_0)) \leq \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\xi = \xi(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. Burada α_0 sayısı (5.2.1) ile tanımlıdır.

Kanıt. Teorem 5.3.6 dan $\dfrac{\varepsilon}{b_*}$ için her $p \in (p_* - \xi, p_* + \xi)$ için

$$\hbar_1(B_{L_p}(0, \mu_0), B_{L_{p_*}}(0, \mu_0)) \leq \frac{\varepsilon}{b_*} \tag{5.4.2}$$

olacak biçimde bir $\xi = \xi(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

Keyfi $p \in (p_* - \xi, p_* + \xi)$ ve $x(\cdot) \in X_p(t_0, X_0)$ alınsın ve sabitlensin. Bu durumda, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau \tag{5.4.3}$$

olacak şekilde $x_0 \in X_0$ ve $u(\cdot) \in U_p = B_{L_p}(0, \mu_0)$ vardır. (5.4.2) den

$$\|u(\cdot) - u_*(\cdot)\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{b_*} \tag{5.4.4}$$

olacak biçimde bir $u_*(\cdot) \in U_{p_*} = B_{L_{p_*}}(0, \mu_0)$ fonksiyonu vardır.

$x_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu (3.1.1) sisteminin (t_0, x_0) başlangıç noktasından $u_*(\cdot) \in U_{p_*} = B_{L_{p_*}}(0, \mu_0)$ mümkün kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesi olsun. Bu durumda $x_*(\cdot) \in X_{p_*}(t_0, X_0)$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\, d\tau \tag{5.4.5}$$

olur. (5.4.3)-(5.4.5) ve 3.1.B koşulundan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
&\|x(t) - x_*(t)\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau), u(\tau)) - f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\|\, d\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_*(\tau)\|) \|x(\tau) - x_*(\tau)\|)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} L_3 \|u(\tau) - u_*(\tau)\|\, d\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_*(\tau)\|) \|x(\tau) - x_*(\tau)\|)\, d\tau + \int_{t_0}^{\theta} L_3 \|u(\tau) - u_*(\tau)\|\, d\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_*(\tau)\|) \|x(\tau) - x_*(\tau)\|)\, d\tau + L_3 \frac{\varepsilon}{b_*}
\end{aligned} \tag{5.4.6}$$

olduğu elde edilir. Gronwall eşitsizliği kullanılırsa (4.2.2), (5.4.1) ve (5.4.6) dan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\|x(t) - x_*(t)\| &\leq \frac{\varepsilon}{b_*} L_3 \exp\left(\int_{t_0}^{\theta} (L_1 + L_2 \|u_*(\tau)\|)\, d\tau \right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{b_*} L_3 \exp(r_0) = \varepsilon
\end{aligned} \tag{5.4.7}$$

olduğu elde edilir. $p \in (p_* - \xi, p_* + \xi)$ ve $x(\cdot) \in X_p(t_0, X_0)$ keyfi seçildiğinden (5.4.7) den

$$X_p(t_0, X_0) \subset X_{p_*}(t_0, X_0) + \varepsilon B_C(0, 1) \tag{5.4.8}$$

içermesinin doğruluğu elde edilir. Burada $B_C(0, 1)$, $C([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$ uzayının merkezi orijinde olan kapalı birim topudur.

$p \in (p_* - \xi, p_* + \xi)$ için, önce keyfi $x_*(\cdot) \in X_{p_*}(t_0, X_0)$ fonksiyonu seçilip sabitlenirse, benzer olarak her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x_*(t) - x(t)\| \leq \varepsilon$$

olacak biçimde $x(\cdot) \in X_p(t_0, X_0)$ yörüngesinin var olduğu kanıtlanabilir. Bu ise keyfi $p \in (p_* - \xi, p_* + \xi)$ için

$$X_{p_*}(t_0, X_0) \subset X_p(t_0, X_0) + \varepsilon B_C(0, 1) \tag{5.4.9}$$

olması demektir.

Böylece (5.4.8) ve (5.4.9) içermelerinden teoremin kanıtı elde edilir. ∎

6 KONTROL FONKSİYONLARI LİPSCHİTZ SÜREKLİ OLAN KONTROL SİSTEMİN ERİŞİM KÜMELERİ

Bu anabölümde kompakt olmayan U_p mümkün kontrol fonksiyonları kümesi, bir kompakt küme (integral kısıtlı, geometrik kısıtlı ve Lipschitz sabitleri aynı sabitle sınırlı kontrol fonksiyonları kümesi) ile değiştirilerek, kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan sistemin erişim kümeleri ile, kontrol fonksiyonları integral kısıtlı, geometrik kısıtlı ve Lipschitz sabitleri aynı sabitle sınırlı olan aynı sistemin erişim kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı değerlendirilecektir.

6.1 Başlangıç Kümesi X_δ olan Kontrol Sistemin Erişim Kümesi

$X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme olduğundan, keyfi $\delta > 0$ için X_0 kümesinin sonlu δ-ağı vardır. Verilen $\delta > 0$ için $X_\delta = \{x_1(\delta), x_2(\delta), \ldots, x_k(\delta)\}$ kümesi X_0 kümesinin sonlu δ-ağı olsun. O halde,

$$h_n(X_0, X_\delta) \leq \delta \tag{6.1.1}$$

olur.

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\ x(t_0) \in X_\delta \tag{6.1.2}$$

kontrol sistemi ele alınsın. (6.1.2) sisteminin tüm $u(\cdot) \in U_p$ mümkün kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesi $X_p(t_0, X_\delta)$ ile gösterilsin. Yani,

$$X_p(t_0, X_\delta) = \{x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)) : x_0 \in X_\delta, u(\cdot) \in U_p\}$$

olsun. (6.1.2) sisteminin $t \in [t_0, \theta]$ zaman anında $u(\cdot) \in U_p$ kontrol fonksiyonlarının oluşturduğu erişim kümesi ise $X_p(t; t_0, X_\delta)$ ile gösterilsin. Başka bir deyişle,

$$X_p(t;t_0,X_\delta)=\{x(t)\in\mathbb{R}^n : x(\cdot)\in X_p(t_0,X_\delta)\}$$

olsun.

Aşağıdaki önermeler doğrudur.

Önerme 6.1.2

$$h_C\big(X_p(t_0,X_0),X_p(t_0,X_\delta)\big)\le \delta\exp(r_0)$$

eşitsizliği doğrudur.

Burada r_0 sayısı (4.2.2) ile tanımlıdır.

Önerme 6.1.2 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Önerme 6.1.3 *Her $t\in[t_0,\theta]$ için*

$$h_n\big(X_p(t;t_0,X_0),X_p(t;t_0,X_\delta)\big)\le \delta\exp(r_0)$$

olur.

Sonuç 6.1.4 *$\varepsilon>0$ için $\delta<\delta_\varepsilon=\dfrac{\varepsilon}{\exp(r_0)}$ iken, keyfi $t\in[t_0,\theta]$ için*

$$h_n\big(X_p(t;t_0,X_0),X_p(t;t_0,X_\delta)\big)\le \varepsilon$$

olur.

6.2 Karmaşık Kısıtlı Kontrol Sistemlerin Erişim Kümeleri

$H\in(0,\infty)$ olsun. U_p^H ile her $t\in[t_0,\theta]$ için $\|u(t)\|\le H$ geometrik kısıtını sağlayan $u(\cdot)\in U_p$ biçimindeki mümkün kontrol fonksiyonları kümesi gösterilsin. Yani,

$$U_p^H=\{u(\cdot)\in U_p : \forall t\in[t_0,\theta] \text{ için } \|u(t)\|\le H\}$$

olsun. Açıktırki $U_p^H\subset U_p$ dir.

(6.1.2) sisteminin (t_0, X_δ) başlangıç kümesinden çıkan ve tüm $u(\cdot) \in U_p^H$ mümkün kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesi $X_p^H(t_0, X_\delta)$ ile, $t \in [t_0, \theta]$ anındaki erişim kümesi ise $X_p^H(t; t_0, X_\delta)$ ile gösterilsin. Yani,

$$X_p^H(t; t_0, X_\delta) = \left\{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in X_p^H(t_0, X_\delta)\right\}$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 6.2.1

$$h_C(X_p(t_0, X_\delta), X_p^H(t_0, X_\delta)) \leq \frac{k_*}{H^{p-1}}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada

$$k_* = 2L_3\mu_0^p \cdot \exp\left(r_0\right), \tag{6.2.1}$$

$r_0 > 0$ *sayısı (4.2.2) ile tanımlıdır.*

Kanıt. $U_p^H \subset U_p$ olduğundan,

$$X_p{}^H(t_0, X_\delta) \subset X_p(t_0, X_\delta) \tag{6.2.2}$$

dır.

$x(\cdot) \in X_p(t_0, X_\delta)$ keyfi bir yörünge olsun. Bu durumda keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau \tag{6.2.3}$$

olacak şekilde $x_0 \in X_\delta$ ve $u(\cdot) \in U_p$ vardır. $u(\cdot) \in U_p$ mümkün kontrol fonksiyonu yardımıyla her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$u_*(t) = \begin{cases} u(t) & , \ \|u(t)\| \leq H \\ \frac{u(t)}{\|u(t)\|}H & , \ \|u(t)\| > H \end{cases} \tag{6.2.4}$$

olmak üzere $u_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ kontrol fonksiyonunu tanımlansın.

$t \in [t_0, \theta]$ için $\|u(t)\| \leq H$ ise, $u_*(t) = u(t)$ ve

$$\|u_*(t)\| = \|u(t)\| \leq H$$

olur. $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u(t)\| > H$ ise, o zaman $u_*(t) = \frac{u(t)}{\|u(t)\|} H$ ve buradan $\|u_*(t)\| = H$ olduğu bulunur. Böylece her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$\|u_*(t)\| \leq H \tag{6.2.5}$$

olduğu bulunur. Ayrıca (6.2.4) den keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için, $\|u_*(t)\| \leq \|u(t)\|$ olduğundan her $t \in [t_0, \theta]$ için, $\|u_*(t)\|^p \leq \|u(t)\|^p$ ve

$$\|u_*(\cdot)\|_p = \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|u(\cdot)\|_p \tag{6.2.6}$$

olduğu bulunur. $u(\cdot) \in U_p$ olduğundan $\|u(\cdot)\|_p \leq \mu_0$ eşitsizliği geçerlidir. O halde (6.2.6) dan

$$\|u_*(\cdot)\|_p \leq \mu_0 \tag{6.2.7}$$

olduğu elde edilir. (6.2.5) ve (6.2.7) den $u_*(\cdot) \in U_p^H$ olur.

(6.1.2) sisteminin (t_0, x_0) başlangıç noktasından (6.2.4) ile tanımlı $u_*(\cdot) \in U_p^H$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesi $x_*(\cdot)$ ile gösterilirse, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \, d\tau \tag{6.2.8}$$

olur. Açıktır ki, $x_*(\cdot) \in X_p^H(t_0, X_\delta)$ dır. (6.2.3) ve (6.2.8) den her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t) - x_*(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \left\| f(\tau, x_(\tau), u(\tau)) - f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau)) \right\| d\tau$$

olur. 3.1.B koşulu uygulanırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t) - x_*(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_*(\tau)\|) \|x(\tau) - x_*(\tau)\|) \, d\tau$$
$$+ \int_{t_0}^{t} L_3 \|u(\tau) - u_*(\tau)\| \, d\tau \tag{6.2.9}$$

olduğu bulunur.

$$K_t = \{\tau \in [t_0, t] : \|u(\tau)\| > H\}$$

kümesi tanımlansın. Bu durumda

$$[t_0, t] \backslash K_t = \{\tau \in [t_0, t] : \|u(\tau)\| \leq H\}$$

olur. (6.2.4) den, her $\tau \in [t_0, t] \backslash K_t$ için

$$\|u(\tau) - u_*(\tau)\| = 0$$

eşitliği sağlanır. O halde (6.2.9) dan,

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_*(t)\| \leq & \int\limits_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_*(\tau)\|) \|x(\tau) - x_*(\tau)\| \, d\tau \\ & + \int\limits_{K_t} L_3 \|u(\tau) - u_*(\tau)\| \, d\tau \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

olur. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci ifadeye Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \int\limits_{K_t} L_3 \|u(\tau) - u_*(\tau)\| \, d\tau \\ & \leq L_3 \left(\int\limits_{K_t} 1^{\frac{p}{p-1}} \, d\tau \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_{K_t} \|u(\tau) - u_*(\tau)\|^p \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = L_3 \mu(K_t)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_{K_t} \|u(\tau) - u_*(\tau)\|^p \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq L_3 \mu(K_t)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int\limits_{K_t} \|u(\tau)\|^p \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{K_t} \|u_*(\tau)\|^p \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \right] \end{aligned}$$

olduğu bulunur. Burada $\mu(K_t)$ sayısı, K_t kümesinin Lebesgue ölçümünü göstermektedir.

$u(\cdot) \in U_p$, $u_*(\cdot) \in U_p^H$ ve $K_t \subset [t_0, \theta]$ olduğundan, son eşitsizlikten

$$\begin{aligned} &\int\limits_{K_t} L_3 \left\| u(\tau) - u_*(\tau) \right\| d\tau \\ &\leq L_3 \mu(K_t)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int\limits_{t_0}^{\theta} \left\| u(\tau) \right\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{t_0}^{\theta} \left\| u_*(\tau) \right\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ &\leq 2\mu_0 L_3 \mu(K_t)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

olduğu elde edilir.

Diğer yandan, her $\tau \in K_t$ için $\left\| u(\tau) \right\| > H$, $K_t \subset [t_0, \theta]$ ve $u(\cdot) \in U_p$ olduğundan,

$$H^p \mu(K_t) \leq \int\limits_{K_t} \left\| u(\tau) \right\|^p d\tau \leq \int\limits_{t_0}^{\theta} \left\| u(\tau) \right\|^p d\tau \leq \mu_0^p$$

olur. O halde,

$$\mu(K_t) \leq \frac{\mu_0^p}{H^p} \tag{6.2.12}$$

dir. (6.2.11) ve (6.2.12) den,

$$\int\limits_{K_t} L_3 \left\| u(\tau) - u_*(\tau) \right\| d\tau \leq \frac{2L_3 \mu_0^p}{H^{p-1}} \tag{6.2.13}$$

eşitsizliğinin doğru olduğu bulunur.

(6.2.10) ve (6.2.13) eşitsizliklerinden

$$\left\| x(t) - x_*(t) \right\| \leq \frac{2L_3 \mu_0^p}{H^{p-1}} + \int\limits_{t_0}^{t} \left(L_1 + L_2 \left\| u_*(\tau) \right\| \right) \left\| x(\tau) - x_*(\tau) \right\| d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizlikte Gronwall eşitsizliği kullanılırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\left\| x(t) - x_*(t) \right\| \leq \frac{2L_3 \mu_0^p}{H^{p-1}} \cdot \exp \left(\int\limits_{t_0}^{t} \left(L_1 + L_2 \left\| u_*(\tau) \right\| \right) d\tau \right)$$

olduğu bulunur. Burada Önerme 3.2.1 kullanılırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t) - x_*(t)\| \leq \frac{2L_3\mu_0^p}{H^{p-1}} \cdot \exp\Big(L_1(\theta - t_0) + L_2\mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\Big)$$

olur. Keyfi $p > 1$ için

$$L_1(\theta - t_0) + L_2\mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \leq r_0$$

olduğundan, son eşitsizlikten ve (6.2.1) den her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$\|x(t) - x_*(t)\| \leq \frac{2L_3\mu_0^p}{H^{p-1}} \cdot \exp(r_0) = \frac{k_*}{H^{p-1}}$$

olduğu elde edilir. Burada $r_0 > 0$ sayısı (4.2.2) ile tanımlıdır. Bu ise

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \leq \frac{k_*}{H^{p-1}}$$

olması demektir. O halde, her $x(\cdot) \in X_p(t_0, X_\delta)$ için

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \leq \frac{k_*}{H^{p-1}}$$

olacak biçimde bir $x_*(\cdot) \in X_p^H(t_0, X_\delta)$ olduğu kanıtlanmış olur. Böylece,

$$X_p(t_0, X_\delta) \subset X_p^H(t_0, X_\delta) + \frac{k_*}{H^{p-1}} B_C(0,1) \tag{6.2.14}$$

kapsamasının doğruluğu görülmüş olur. Burada $B_C(0,1)$ kümesi, $C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^m\big)$ sürekli fonksiyonlar uzayındaki birim topu göstermektedir.

Diğer yandan, (6.2.2) den

$$X_p^H(t_0, X_\delta) \subset X_p(t_0, X_\delta) \subset X_p(t_0, X_\delta) + \frac{k_*}{H^{p-1}} B_C(0,1) \tag{6.2.15}$$

kapsamasının doğruluğu görülür. O halde (6.2.14), (6.2.15) kapsamalarından

$$h_C(X_p(t_0, X_\delta), X_p^H(t_0, X_\delta)) \leq \frac{k_*}{H^{p-1}}$$

olduğu bulunur. ■

Önerme 6.2.1 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Önerme 6.2.2 *Keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$h_n(X_p(t; t_0, X_\delta), X_p^H(t; t_0, X_\delta)) \leq \frac{k_*}{H^{p-1}}$$

olur. Burada $k_* > 0$ sayısı (6.2.1) ile tanımlıdır.

Sonuç 6.2.3 *$H \to \infty$ iken keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$h_n(X_p(t; t_0, X_\delta), X_p^H(t; t_0, X_\delta)) \to 0$$

olur.

6.3 Lipschitz Sürekli ve Karmaşık Sınırlı Kontrol Fonksiyonlar

$$U_{p,lip}^H = \{u(\cdot) \in U_p^H : u(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m \text{ Lipschitz süreklidir}\}$$

kontrol fonksiyonları kümesi tanımlansın. Açıktır ki, $U_{p,lip}^H \subset U_p^H$ dir.

(6.1.2) sisteminin (t_0, X_δ) başlangıç kümesinden çıkan ve tüm $u(\cdot) \in U_{p,lip}^H$ mümkün kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesi $X_{p,lip}^H(t_0, X_\delta)$ ile, $t \in [t_0, \theta]$ anındaki erişim kümesi ise $X_{p,lip}^H(t; t_0, X_\delta)$ ile gösterilsin. Yani,

$$X_{p,lip}^H(t; t_0, X_\delta) = \left\{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in X_{p,lip}^H(t_0, X_\delta)\right\}$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 6.3.1 *Keyfi $\varepsilon > 0$ için*

$$h_C\left(X_p^H(t_0, X_\delta), X_{p,lip}^H(t_0, X_\delta)\right) < \varepsilon$$

olur.

Kanıt. l_* ve r_0 , sırasıyla (3.2.9) ve (4.2.2) ile tanımlanan sabitler olmak üzere

$$a_* = L_3 l_* \exp(r_0) \tag{6.3.1}$$

sayısı tanımlansın.

Şimdi keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı alınsın ve sabitlensin. $U^H_{p,lip} \subset U^H_p$ olduğundan,

$$X^H_{p,lip}(t_0, X_\delta) \subset X^H_p(t_0, X_\delta) \subset X^H_p(t_0, X_\delta) + \varepsilon B_C(0,1) \tag{6.3.2}$$

olduğu açıktır.

$x(\cdot) \in X^H_p(t_0, X_\delta)$ keyfi bir yörünge olsun. Bu durumda keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau \tag{6.3.3}$$

olacak şekilde $x_0 \in X_\delta$ ve $u(\cdot) \in U^H_p$ vardır.

$h \in (0,1)$ için, $u_h(\cdot)$ ile $u(\cdot) \in U_p$ mümkün kontrol fonksiyonunun Steklov fonksiyonu gösterilsin. Başka bir deyişle $t \in [t_0, \theta]$ olmak üzere,

$$u_h(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} \widetilde{u}(\tau)\, d\tau$$

olsun. Burada

$$\widetilde{u}(\tau) = \begin{cases} u(\tau) & , \tau \in [t_0, \theta] \\ 0 & , \tau \in [t_0 - 1, t_0) \bigcup (\theta, \theta + 1] \end{cases}$$

ile tanımlıdır.

Önerme 2.3.3 den her sabitlenmiş $h \in (0,1)$ için, $\|u_h(\cdot)\|_p \leq \mu_0$, her $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u_h(t)\| \leq H$ ve $u_h(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, \theta]$ aralığında $\dfrac{H}{h}$ sabiti ile Lipschitz süreklidir. Yani, $u_h(\cdot) \in U^H_{p,lip}$ dir. Önerme 2.3.4 den

$$\lim_{h \to 0^+} \|u_h(\cdot) - u(\cdot)\|_p = 0$$

olur. O halde $\dfrac{\varepsilon}{a_*} > 0$ için

$$\|u_{h_*}(\cdot) - u(\cdot)\|_p < \frac{\varepsilon}{a_*} \tag{6.3.4}$$

olacak biçimde $h_* \in (0,1)$ vardır. Burada $a_* > 0$, (6.3.1) ile tanımlıdır.

$u_*(\cdot) = u_{h_*}(\cdot)$ olarak gösterilsin. O halde $\|u_*(\cdot)\|_p \leq \mu_0$, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için, $\|u_*(t)\| \leq H$ ve $u_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $\frac{H}{h_*}$ sabiti ile Lipschitz sürekli olur. Böylece, $u_*(\cdot) \in U_{p,lip}^H$ olur. Ayrıca (6.3.4) den

$$\|u_*(\cdot) - u(\cdot)\|_p < \frac{\varepsilon}{a_*}$$

yani,

$$\left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t) - u(t)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{a_*} \tag{6.3.5}$$

olur.

(6.1.2) sisteminin (t_0, x_0) başlangıç noktasından $u_*(\cdot) \in U_{p,lip}^H$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen yörüngesi $x_*(\cdot)$ ile gösterilirse, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\, d\tau \tag{6.3.6}$$

olur. Açıktır ki, $x_*(\cdot) \in X_{p,lip}^H(t_0, X_\delta)$ dır.

(6.3.3), (6.3.6) ve 3.1.B koşulundan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_*(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau), u(\tau)) - f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\|\, d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u_*(\tau)\|)(\|x(\tau) - x_*(\tau)\|)\, d\tau \\ &+ \int_{t_0}^{t} L_3 \|u(\tau) - u_*(\tau)\|\, d\tau \end{aligned} \tag{6.3.7}$$

olduğu bulunur.

Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci ifadeye Hölder integral eşitsizliği uygulanırsa,

l_* (3.2.9) ile tanımlı olmak üzere

$$\int\limits_{t_0}^{t} L_3 \left\| u(\tau) - u_*(\tau) \right\| d\tau \leq L_3 \left(\int\limits_{t_0}^{t} 1^{\frac{p}{p-1}}\, d\tau \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_{t_0}^{t} \left\| u(\tau) - u_*(\tau) \right\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq L_3 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_{t_0}^{t} \left\| u(\tau) - u_*(\tau) \right\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq L_3 l_* \left(\int\limits_{t_0}^{\theta} \left\| u(\tau) - u_*(\tau) \right\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.3.8}$$

olduğu elde edilir.

(6.3.5) ve (6.3.8) eşitsizliklerinden, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\int\limits_{t_0}^{t} L_3 \left\| u(\tau) - u_*(\tau) \right\| d\tau \leq L_3 l_* \frac{\varepsilon}{a_*} \tag{6.3.9}$$

olur. (6.3.7) ve (6.3.9) eşitsizliklerinden, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\left\| x(t) - x_*(t) \right\| \leq L_3 l_* \frac{\varepsilon}{a_*} + \int\limits_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \left\| u_*(\tau) \right\|)(\left\| x(\tau) - x_*(\tau) \right\|)\, d\tau \tag{6.3.10}$$

olduğu elde edilir. (6.3.10) da Gronwall eşitsizliği kullanılırsa, keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\left\| x(t) - x_*(t) \right\| \leq L_3 l_* \frac{\varepsilon}{a_*} \exp \left(\int\limits_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \left\| u_*(\tau) \right\|)\, d\tau \right)$$

olur. O halde (3.2.9), (4.2.2), (6.3.1) ifadeleri ve Önerme 3.2.1 den, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\left\| x(t) - x_*(t) \right\| \leq L_3 l_* \exp(r_0) \frac{\varepsilon}{a_*} = a_* \frac{\varepsilon}{a_*} = \varepsilon$$

olur. Böylece, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\left\| x(t) - x_*(t) \right\| \leq \varepsilon$$

olduğu bulunur. Bu ise

$$\left\| x(\cdot) - x_*(\cdot) \right\|_C \leq \varepsilon$$

olması demektir.

Böylece keyfi sabitlenmiş $x(\cdot) \in X_p^H(t_0, X_\delta)$ için

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \leq \varepsilon$$

olacak biçimde $x_*(\cdot) \in X_{p,lip}^H(t_0, X_\delta)$ olduğu kanıtlanmış olur. Bu ise,

$$X_p^H(t_0, X_\delta) \subset X_{p,lip}^H(t_0, X_\delta) + \varepsilon B_C(0,1) \tag{6.3.11}$$

olması demektir.

O halde (6.3.2) ve (6.3.11) kapsamalarından,

$$h_C(X_p^H(t_0, X_\delta), X_{p,lip}^H(t_0, X_\delta)) \leq \varepsilon$$

olur. ■

Önerme 6.3.1 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Önerme 6.3.2 *Keyfi $\varepsilon > 0$ için ve keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$h_n(X_p^H(t; t_0, X_\delta), X_{p,lip}^H(t; t_0, X_\delta)) < \varepsilon$$

olur.

Önerme 6.3.3

$$h_C(X_p^H(t_0, X_\delta), X_{p,lip}^H(t_0, X_\delta)) = 0$$

eşitliği doğrudur.

Sonuç 6.3.4

$$cl(X_p^H(t_0, X_\delta)) = cl(X_{p,lip}^H(t_0, X_\delta))$$

olur. Burada $cl(E)$, E kümesinin kapanışını göstermektedir.

Önerme 6.3.5 *Her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$h_n(X_p^H(t; t_0, X_\delta), X_{p,lip}^H(t; t_0, X_\delta)) = 0$$

eşitliği doğrudur.

Sonuç 6.3.6 *Her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$cl(X_p^H(t; t_0, X_\delta)) = cl(X_{p,lip}^H(t; t_0, X_\delta))$$

eşitliği doğrudur.

6.4 Sınırlı Lipschitz Sabiti Olan Karmaşık Sınırlı Kontrol Fonksiyonlar

$R > 0$ için $U^H_{p,lip,R}$ ile, Lipschitz sabiti R' den büyük olmayan Lipschitz sürekli $u(\cdot) \in U^H_{p,lip}$ kontrol fonksiyonları kümesi gösterilsin. Yani,

$$U^H_{p,lip,R} = \{u(\cdot) \in U^H_{p,lip} : u(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m \text{ fonksiyonunun Lipschitz sabiti } R\text{' den küçük veya eşittir}\}$$

olsun.

Açıktır ki, $R_1 \leq R_2$ iken

$$U^H_{p,lip,R_1} \subset U^H_{p,lip,R_2}$$

olur.

Aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 6.4.1 $U^H_{p,lip} = \bigcup\limits_{R=1}^{\infty} U^H_{p,lip,R}$

Kanıt. Keyfi $R = 1, 2 \ldots$ için

$$U^H_{p,lip,R} \subset U^H_{p,lip}$$

olduğundan

$$\bigcup_{R=1}^{\infty} U^H_{p,lip,R} \subset U^H_{p,lip} \tag{6.4.1}$$

olur. Şimdi

$$U^H_{p,lip} \subset \bigcup_{R=1}^{\infty} U^H_{p,lip,R} \tag{6.4.2}$$

kapsamasının doğruluğu kanıtlansın.

Keyfi $u(\cdot) \in U^H_{p,lip}$ alınsın. O halde $u(\cdot)$ fonksiyonu Lipschitz süreklidir. Bu fonksiyonun Lipschitz sabiti $M_* > 0$ olsun. R_* doğal sayı olmak üzere

$R_* > M_*$ olsun. O halde $u(\cdot)$ fonksiyonu R_* sabiti ile de Lipschitz sürekli olduğundan, $u(\cdot) \in U^H_{p,lip,R_*}$ olur. Bu durumda,

$$u(\cdot) \in \bigcup_{R=1}^{\infty} U^H_{p,lip,R}$$

olur. $u(\cdot) \in U^H_{p,lip}$ keyfi seçildiğinden, (6.4.2) kapsaması doğrudur. (6.4.1) ve (6.4.2) ifadelerinden önermenin doğru olduğu elde edilir. ■

Önerme 6.4.2 *Her sabitlenmiş $R > 0$ sayısı için $U^H_{p,lip,R}$ kümesi, $C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^m\big)$ uzayında kompakt kümedir.*

Kanıt. Keyfi $u(\cdot) \in U^H_{p,lip,R}$ fonksiyonu $R > 0$ sabiti ile Lipschitz sürekli olduğundan, aynı zamanda sürekli fonksiyondur. Yani $u(\cdot) \in C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^n\big)$ dir. Böylece $U^H_{p,lip,R} \subset C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^n\big)$ olur.

Keyfi $u(\cdot) \in U^H_{p,lip,R}$ alınsın ve sabitlensin. Her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|u(t)\| \leq H$$

olduğundan,

$$\|u(\cdot)\|_C \leq H \tag{6.4.3}$$

olduğu elde edilir. $u(\cdot) \in U^H_{p,lip,R}$ keyfi sabitlenmiş eleman olduğundan (6.4.3) den $U^H_{p,lip,R}$ kümesinin düzgün sınırlı olduğu elde edilir.

$\varepsilon > 0$ için $\delta_*(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{R}$ olsun. $u(\cdot) \in U^H_{p,lip,R}$ fonksiyonları aynı $R > 0$ sabiti ile Lipschitz sürekli olduğundan, her $u(\cdot) \in U^H_{p,lip,R}$ ve her $\varepsilon > 0$ için $|t_1 - t_2| < \delta_*(\varepsilon)$ ($t_1 \in [t_0, \theta]$, $t_2 \in [t_0, \theta]$) iken

$$|u(t_1) - u(t_2)| \leq R\,|t_1 - t_2| < R\delta_*(\varepsilon) = R\frac{\varepsilon}{R} = \varepsilon$$

olur. Bu ise $U^H_{p,lip,R}$ kümesinin eş sürekli fonksiyonlar kümesi olması demektir.

$U^H_{p,lip,R} \subset C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^n\big)$ kümesi düzgün sınırlı ve eş sürekli fonksiyonlar kümesi olduğundan Arzela-Ascoli teoreminden (bkz., Lusternik ve Sobolev 1974; Warga 1972), $U^H_{p,lip,R}$ kümesi $C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^m\big)$ uzayında prekompakt küme olur.

Eğer $U^H_{p,lip,R}$ kümesinin aynı zamanda kapalı olduğu kanıtlanırsa, o halde $U^H_{p,lip,R}$ kümesi kompakt küme olur.

Her $k = 1, 2 \ldots$ için $u_k(\cdot) \in U^H_{p,lip,R}$ olmak üzere $k \to \infty$ iken $u_k(\cdot) \to u_*(\cdot)$ olsun. Her $k = 1, 2 \ldots$ için $u_k(\cdot) \in U^H_{p,lip,R}$ olduğundan, her $k = 1, 2 \ldots$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u_k(t)\| \leq H$ olur. $k \to \infty$ iken $u_k(\cdot) \to u_*(\cdot)$ olduğundan

$$\|u_*(t)\| \leq H \tag{6.4.4}$$

olur.

Her $k = 1, 2 \ldots$ için $u_k(\cdot) \in U^H_{p,lip,R}$ olduğundan, her $k = 1, 2 \ldots$ için $\|u_k(\cdot)\|_p \leq \mu_0$ dır. Yani, her $k = 1, 2 \ldots$ için

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u_k(t)\|^p \, dt \leq {\mu_0}^p \tag{6.4.5}$$

olur. Her $k = 1, 2 \ldots$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u_k(t)\| \leq H$ ve $k \to \infty$ iken $u_k(\cdot) \to u_*(\cdot)$ olduğundan, integral altında limite geçilirse (6.4.5) den

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\|^p \, dt \leq {\mu_0}^p$$

yani,

$$\|u_*(\cdot)\|_p \leq \mu_0 \tag{6.4.6}$$

olduğu bulunur.

Ayrıca, her $k = 1, 2 \ldots$ için $u_k(\cdot) \in U^H_{p,lip,R}$ olduğundan, $u_k(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonları aynı $R > 0$ sabiti ile Lipschitz süreklidir. O halde her $k = 1, 2 \ldots$, her $t_1, t_2 \in [t_0, \theta]$ için

$$\|u_k(t_1) - u_k(t_2)\| \leq R\,|t_1 - t_2| \tag{6.4.7}$$

olur. $k \to \infty$ iken $u_k(\cdot) \to u_*(\cdot)$ olduğundan (6.4.7) den

$$\|u_*(t_1) - u_*(t_2)\| \leq R\,|t_1 - t_2| \tag{6.4.8}$$

olduğu elde edilir. Yani $u_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $R > 0$ sabiti ile Lipschitz sürekli olur.

Böylece (6.4.4), (6.4.6) ve (6.4.8) den $u_*(\cdot) \in U^H_{p,lip,R}$ olduğu bulunur. Bu ise $U^H_{p,lip,R} \subset C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^n\big)$ kümesinin kapalı olması demektir. Böylece, $U^H_{p,lip,R}$ kümesi prekompakt ve kapalı olduğundan kompakt kümedir. ■

$X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta)$ ile (6.1.2) sisteminin (t_0, X_δ) başlangıç kümesinden tüm mümkün $U^H_{p,lip,R}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen yörüngeler kümesi, $X^H_{p,lip,R}(t; t_0, X_\delta)$ ile ise (6.1.2) sisteminin, (t_0, X_δ) başlangıç kümesinden $U^H_{p,lip,R}$ kontrol fonksiyonları tarafından elde edilen t zaman anındaki erişim kümesi gösterilsin. O halde,

$$X^H_{p,lip,R}(t; t_0, X_\delta) = \big\{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta)\big\}$$

olur.

Önerme 6.4.3 *$X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta)$ kümesi $C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^n\big)$ uzayında, her sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için ise $X^H_{p,lip,R}(t; t_0, X_\delta)$ erişim kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayında kompakt kümedir.*

Kanıt. $U^H_{p,lip,R} \subset U_p$ olduğundan

$$X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta) \subset X_p(t_0, X_\delta) \tag{6.4.9}$$

olur.

Sonuç 3.3.1 ve Önerme 3.3.3 den, $X_p(t_0, X_\delta)$ yörüngeler kümesi $C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^n\big)$ uzayında düzgün sınırlı ve eş sürekli fonksiyonlar kümesidir. O halde, (6.4.9) dan, $X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta)$ kümesi de düzgün sınırlı ve eş sürekli fonksiyonlar kümesi olur. Buna göre Arzela-Ascoli teoremi uyarınca, $X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta)$ kümesinin $C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^n\big)$ uzayında prekompakt küme olduğu elde edilir.

Şimdi, $X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta)$ kümesinin $C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^n\big)$ uzayında kapalı olduğu gösterilsin.

Her $k = 1, 2, \ldots$ için, $x_k(\cdot) \in X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta)$ olmak üzere $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ olsun. $x_*(\cdot) \in X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta)$ olduğu kanıtlansın.

Her $k=1,2,\dots$ için, $x_k(\cdot)\in X^H_{p,lip,R}(t_0,X_\delta)$ olduğundan, keyfi $k=1,2,\dots$ ve her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$x_k(t)=x_k+\int_{t_0}^{t} f(\tau,x_k(\tau),u_k(\tau))\,d\tau \tag{6.4.10}$$

olacak biçimde $x_k\in X_\delta$ ve $u_k(\cdot)\in U^H_{p,lip,R}$ vardır. $X_\delta\subset\mathbb{R}^n$ ve Önerme 6.4.2 gereği $U^H_{p,lip,R}\subset C\big([t_0,\theta],\mathbb{R}^n\big)$ kompakt kümeler olduğundan, genelliği bozmaksızın

$$x_*\in X_\delta \text{ ve } u_*(\cdot)\in U^H_{p,lip,R} \tag{6.4.11}$$

olmak üzere $k\to\infty$ iken

$$x_k\to x_* \text{ ve } u_k(\cdot)\to u_*(\cdot) \tag{6.4.12}$$

olduğu kabul edilsin.

Şimdi $y_*(\cdot):[t_0,\theta]\to\mathbb{R}^n$ fonksiyonu her $t\in[t_0,\theta]$ için,

$$y_*(t)=x_*+\int_{t_0}^{t} f(\tau,y_*(\tau),u_*(\tau))\,d\tau \tag{6.4.13}$$

olarak tanımlansın. (6.4.11) den $y_*(\cdot)\in X^H_{p,lip,R}(t_0,X_\delta)$ olur.

(6.4.10), (6.4.13) ve 3.1.B koşulundan, keyfi $k=1,2,\dots$ ve $t\in[t_0,\theta]$ için,

$$\begin{aligned}\|x_k(t)-y_*(t)\| &\le \|x_k-x_*\|+\int_{t_0}^{t}\|f(\tau,x_k(\tau),u_k(\tau))-f(\tau,y_*(\tau),u_*(\tau))\|\,d\tau\\ &\le \|x_k-x_*\|+L_3\int_{t_0}^{t}\|u_k(\tau)-u_*(\tau)\|\,d\tau\\ &+\int_{t_0}^{t}\big(L_1+L_2\|u_*(\tau)\|\big)\|x_k(\tau)-y_*(\tau)\|\,d\tau \end{aligned} \tag{6.4.14}$$

olduğu bulunur.

Keyfi $\varepsilon>0$ alınsın ve sabitlensin. $r_0>0$ sayısı (4.2.2) ile tanımlanmak üzere

$$k_1=\exp(r_0) \tag{6.4.15}$$

olsun. (6.4.12) den, her $k \geq K_\varepsilon$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x_k - x_*\| < \frac{\varepsilon}{2k_1} \quad , \quad \|u_k(t) - u_*(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2L_3(\theta - t_0)k_1} \tag{6.4.16}$$

olacak biçimde $K_\varepsilon > 0$ vardır. O halde, her $k \geq K_\varepsilon$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$L_3 \int\limits_{t_0}^{t} \|u_k(\tau) - u_*(\tau)\| \, d\tau \leq \frac{\varepsilon}{2k_1} \tag{6.4.17}$$

olur. (6.4.14), (6.4.16) ve (6.4.17) den, her $k \geq K_\varepsilon$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x_k(t) - y_*(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{k_1} + \int\limits_{t_0}^{t} \big(L_1 + L_2 \|u_*(\tau)\|\big) \|x_k(\tau) - y_*(\tau)\| \, d\tau \tag{6.4.18}$$

olduğu elde edilir. (6.4.18), Önerme 3.2.1 ve Gronwall eşitsizliğinden, her $k \geq K_\varepsilon$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - y_*(t)\| &\leq \frac{\varepsilon}{k_1} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \big(L_1 + L_2 \|u_*(\tau)\|\big) \, d\tau \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{k_1} \exp\Big(L_1(\theta - t_0) + L_2\mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\Big) \end{aligned} \tag{6.4.19}$$

olduğu elde edilir.

Keyfi $p > 1$ için $r_0 \geq L_1(\theta - t_0) + L_2\mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}$ olduğundan, (6.4.15) ve (6.4.19) dan her $k \geq K_\varepsilon$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x_k(t) - y_*(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{k_1} \exp(r_0) = \frac{\varepsilon}{k_1} k_1 = \varepsilon$$

olduğu bulunur. Bu ise $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to y_*(\cdot)$ olması demektir. $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ olduğundan limitin tekliğinden, $x_*(\cdot) = y_*(\cdot)$ olduğu bulunur. $y_*(\cdot) \in X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta)$ olduğundan $x_*(\cdot) \in X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta)$ olur. Böylece $X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta)$ kümesinin kapalı olduğu kanıtlanmış olur.

$X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta) \subset C\big([t_0, \theta], \mathbb{R}^n\big)$ kümesi prekompakt ve kapalı olduğundan, kompakt kümedir.

Şimdi her $t \in [t_0, \theta]$ için $X^H_{p,lip,R}(t; t_0, X_\delta) \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kompakt olduğu gösterilsin.

$X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta)$ kümesi düzgün sınırlı olduğundan, keyfi sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için $X^H_{p,lip,R}(t; t_0, X_\delta) \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı kümedir.

$X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta)$ kümesi kapalı olduğundan, keyfi sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için $X^H_{p,lip,R}(t; t_0, X_\delta) \subset \mathbb{R}^n$ kümesi kapalı kümedir. Keyfi $t \in [t_0, \theta]$ için $X^H_{p,lip,R}(t; t_0, X_\delta) \subset \mathbb{R}^n$ kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan kompakt kümedir. ■

Önerme 6.4.1 den aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 6.4.4 $X^H_{p,lip}(t_0, X_\delta) = \bigcup\limits_{R=1}^{\infty} X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta)$ *ve her sabitlenmiş* $t \in [t_0, \theta]$ *için,* $X^H_{p,lip}(t; t_0, X_\delta) = \bigcup\limits_{R=1}^{\infty} X^H_{p,lip,R}(t; t_0, X_\delta)$ *eşitlikleri doğrudur.*

Kanıt. Önce,

$$X^H_{p,lip}(t_0, X_\delta) = \bigcup_{R=1}^{\infty} X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta) \tag{6.4.20}$$

olduğu kanıtlansın.

Keyfi $x(\cdot) \in X^H_{p,lip}(t_0, X_\delta)$ alınsın. O zaman her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = x_\delta + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau \tag{6.4.21}$$

olacak biçimde $x_\delta \in X_\delta$ ve $u(\cdot) \in U^H_{p,lip}$ vardır.

$u(\cdot) \in U^H_{p,lip}$ olduğundan Önerme 6.4.1 den $u(\cdot) \in U^H_{p,lip,R_*}$ olacak şekilde $R_* > 0$ sayısı vardır. $x_\delta \in X_\delta$ ve $u(\cdot) \in U^H_{p,lip,R_*}$ olduğundan (6.4.21) den $x(\cdot) \in X^H_{p,lip,R_*}(t_0, X_\delta)$ olduğu bulunur. O halde, $x(\cdot) \in \bigcup\limits_{R=1}^{\infty} X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta)$ olur. $x(\cdot) \in X^H_{p,lip}(t_0, X_\delta)$ keyfi seçildiğinden,

$$X^H_{p,lip}(t_0, X_\delta) \subset \bigcup_{R=1}^{\infty} X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta) \tag{6.4.22}$$

olduğu elde edilir.

Keyfi $R = 1, 2, \ldots$ için $U^H_{p,lip,R} \subset U^H_{p,lip}$ olduğundan, her $k = 1, 2, \ldots$ için

$$X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta) \subset X^H_{p,lip}(t_0, X_\delta) \tag{6.4.23}$$

olur. O halde (6.4.23) den

$$\bigcup_{R=1}^{\infty} X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta) \subset X^H_{p,lip}(t_0, X_\delta) \qquad (6.4.24)$$

olur. (6.4.22) ve (6.4.24) den, (6.4.20)'nin doğruluğu elde edilir.

Şimdi her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$X^H_{p,lip}(t; t_0, X_\delta) = \bigcup_{R=1}^{\infty} X^H_{p,lip,R}(t; t_0, X_\delta) \qquad (6.4.25)$$

olduğu kanıtlansın.

Keyfi sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için keyfi $y_0 \in X^H_{p,lip}(t; t_0, X_\delta)$ seçilsin. Bu durumda

$$y_0 = x_\delta(t) = x_\delta + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_\delta(\tau), u_0(\tau))\, d\tau$$

olacak şekilde $x_\delta \in X_\delta$ ve $u_0(\cdot) \in U^H_{p,lip}$ vardır. O halde $x_\delta(\cdot) \in X^H_{p,lip}(t_0, X_\delta)$ olur.

$x_\delta(\cdot) \in X^H_{p,lip}(t_0, X_\delta)$ ve (6.4.20) eşitliğinin doğruluğu görüldüğünden, $x_\delta(\cdot) \in X^H_{p,lip,R_1}(t_0, X_\delta)$ olacak biçimde $R_1 > 0$ sayısı vardır. O halde,

$$y_0 \in X^H_{p,lip,R_1}(t; t_0, X_\delta)$$

olur. Böylece,

$$y_0 \in \bigcup_{R=1}^{\infty} X^H_{p,lip,R}(t; t_0, X_\delta) \qquad (6.4.26)$$

olduğu elde edilir. $t \in [t_0, \theta]$ ve $y_0 \in X^H_{p,lip}(t; t_0, X_\delta)$ keyfi seçildiğinden, (6.4.26) dan her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$X^H_{p,lip}(t; t_0, X_\delta) \subset \bigcup_{R=1}^{\infty} X^H_{p,lip,R}(t; t_0, X_\delta) \qquad (6.4.27)$$

olur.

Şimdi, keyfi sabitlenmiş $t \in [t_0, \theta]$ için keyfi $y_1 \in \bigcup\limits_{R=1}^{\infty} X^H_{p,lip,R}(t; t_0, X_\delta)$ alınsın. Bu durumda, $y_1 \in X^H_{p,lip,R_1}(t; t_0, X_\delta)$ olacak biçimde $R_1 > 0$ sayısı vardır. O halde,

$$y_1 = x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau$$

olacak şekilde $x_0 \in X_\delta$ ve $u(\cdot) \in U^H_{p,lip,R_1}$ vardır. Bu durumda $x(\cdot) \in X^H_{p,lip,R_1}(t_0, X_\delta)$ olur.

$x(\cdot) \in X^H_{p,lip,R_1}(t_0, X_\delta)$ olduğundan, $x(\cdot) \in \bigcup\limits_{R=1}^{\infty} X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta)$ olur. O halde (6.4.20) eşitliğinden $x(\cdot) \in X^H_{p,lip}(t_0, X_\delta)$ olduğu bulunur. Böylece $t \in [t_0, \theta]$ için $y_1 = x(t) \in X^H_{p,lip}(t; t_0, X_\delta)$ olur. $y_1 \in \bigcup\limits_{R=1}^{\infty} X^H_{p,lip,R}(t; t_0, X_\delta)$ keyfi seçildiğinden

$$\bigcup_{R=1}^{\infty} X^H_{p,lip,R_1}(t; t_0, X_\delta) \subset X^H_{p,lip}(t; t_0, X_\delta) \tag{6.4.28}$$

olduğu elde edilir. (6.4.27) ve (6.4.28) den

$$\bigcup_{R=1}^{\infty} X^H_{p,lip,R}(t; t_0, X_\delta) = X^H_{p,lip}(t; t_0, X_\delta) \tag{6.4.29}$$

eşitliğinin doğruluğu görülür. ■

Önerme 3.2.2 den, her $R = 1, 2, \ldots$ ve her $X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta)$ için, $\|x(\cdot)\|_C \leq r_*$ dır. Burada $r_* > 0$, (3.2.5) ile tanımlıdır. O halde her $R = 1, 2, \ldots$ için

$$X^H_{p,lip,R}(t_0, X_\delta) \subset B_C(0, r_*)$$

olur. Burada $B_C(0, r_*)$ kümesi $C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ uzayının merkezi orijinde olan kapalı birim yuvarıdır.

Yine Önerme 3.2.2 den her $R = 1, 2, \ldots$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$X^H_{p,lip,R}(t; t_0, X_\delta) \subset B_n(r_*)$$

olur.

Her $R = 1, 2, \ldots$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$X^H_{p,lip,R}(t; t_0, X_\delta) \subset X^H_{p,lip,R+1}(t; t_0, X_\delta) \subset B_n(r_*)$$

olduğundan dolayı, Önerme 2.2.9 ve Önerme 6.4.4 den aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 6.4.5 *Her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$cl\Big(X^H_{p,lip}(t; t_0, X_\delta)\Big) = \lim_{R \to \infty} X^H_{p,lip,R}(t; t_0, X_\delta)$$

eşitliği doğrudur.

Sonuç 2.2.10 ve Önerme 6.4.5 den aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 6.4.6 *$\delta \in (0,\infty)$, $H \in (0,\infty)$ ve $t \in [t_0,\theta]$ sabitlenmiş olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için $R \geq R_*(t,\varepsilon,\delta,H)$ iken,*

$$h_n(X^H_{p,lip}(t;t_0,X_\delta), X^H_{p,lip,R}(t;t_0,X_\delta)) < \varepsilon \tag{6.4.30}$$

olacak biçimde $R_*(t,\varepsilon,\delta,H) > 0$ doğal sayısı vardır.

Böylece her sabitlenmiş $H \in (0,\infty)$ ve $t \in [t_0,\theta]$ için R Lipschitz sabiti yeterince büyük seçildiğinde, $X^H_{p,lip}(t;t_0,X_\delta)$ erişim kümesi ile $X^H_{p,lip,R}(t;t_0,X_\delta)$ erişim kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığı yeteri kadar küçük olur. Yani her sabitlenmiş $\delta \in (0,\infty)$, $H \in (0,\infty)$ ve $t \in [t_0,\theta]$ için

$$\lim_{R\to\infty} h_n(X^H_{p,lip}(t;t_0,X_\delta), X^H_{p,lip,R}(t;t_0,X_\delta)) = 0$$

olur.

Önerme 6.4.6 da verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için (6.4.30) eşitsizliğinin sağlanmasını garanti eden $R_*(t,\varepsilon,\delta,H) > 0$ sayısı, seçilen $t \in [t_0,\theta]$ zaman anına da bağlıdır.

Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3\exp(r_0)}\ , \tag{6.4.31}$$

$$H(\varepsilon) = \left(\frac{3k_*}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p-1}} \tag{6.4.32}$$

olsun. Burada r_0 sayısı (4.2.2) ile, k_* sayısı ise (6.2.1) ile tanmlıdır.

Önerme 6.1.2, 6.2.1, 6.3.5 ve 6.4.6 dan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 6.4.7 *Her $\varepsilon > 0$ için $t \in [t_0,\theta]$ iken*

$$h_n(X_p(t;t_0,X_0), X^{H(\varepsilon)}_{p,lip,R(t,\varepsilon)}(t;t_0,X_{\delta(\varepsilon)})) < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$, $H(\varepsilon) > 0$ ve $R(t,\varepsilon) > 0$ vardır.

Kanıt. Verilen $\varepsilon > 0$ için $\delta(\varepsilon)$ sayısı (6.4.31) ile, $H(\varepsilon)$ sayısı ise (6.4.32) ile tanımlanmış olsun. Şimdi $t \in [t_0, \theta]$ alınsın ve sabitlensin.

(6.4.31) ve Önerme 6.1.3 den, $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h_n\big(X_p(t; t_0, X_0), X_p(t; t_0, X_{\delta(\varepsilon)})\big) \leq \delta(\varepsilon) \exp(r_0) = \frac{\varepsilon}{3} \,, \tag{6.4.33}$$

(6.4.32) ve Önerme 6.2.2 den ise, $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h_n(X_p(t; t_0, X_{\delta(\varepsilon)}), X_p^{H(\varepsilon)}(t; t_0, X_{\delta(\varepsilon)})) \leq \frac{k_*}{H(\varepsilon)^{p-1}} = \frac{\varepsilon}{3} \tag{6.4.34}$$

olduğu elde edilir. Burada r_0 sayısı (4.2.2) ile, $k_* > 0$ sayısı (6.2.1) ile tanımlıdır.

Şimdi, $R(t, \varepsilon) = R(t, \varepsilon, \delta(\varepsilon), H(\varepsilon))$ olarak alınsın. Burada $R(t, \varepsilon, \delta(\varepsilon), H(\varepsilon))$ sayısı, Önerme 6.4.6 da, $\delta = \delta(\varepsilon)$, $H = H(\varepsilon)$ iken

$$h_n\big(X_{p,lip}^{H(\varepsilon)}(t; t_0, X_{\delta(\varepsilon)}), X_{p,lip,R(t,\varepsilon,\delta(\varepsilon),H(\varepsilon))}^{H(\varepsilon)}(t; t_0, X_{\delta(\varepsilon)})\big) \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{6.4.35}$$

olacak biçimdeki sayıdır.

O halde, (6.4.33), (6.4.34) ve (6.4.35) den, $t \in [t_0, \theta]$ için

$$h_n(X_p(t; t_0, X_0), X_{p,lip,R(t,\varepsilon)}^{H(\varepsilon)}(t; t_0, X_{\delta(\varepsilon)})) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

olduğu elde edilir. ■

Böylece pratikte, kontrol fonksiyonları üzerinde (3.1.2) kısıtlaması olan (3.1.1) sisteminin $X_p(t; t_0, X_0)$ ($t \in [t_0, \theta]$) erişim kümesi yerine, verilen $\varepsilon > 0$ için $\delta(\varepsilon) > 0$, $H(\varepsilon) > 0$ ve $R(t, \varepsilon) > 0$ parametrelerini uygun biçimde seçerek, $X_p(t; t_0, X_0)$ kümesinden Hausdorff uzaklığı ε dan büyük olmayan kompakt $X_{p,lip,R(t,\varepsilon)}^{H(\varepsilon)}(t; t_0, X_{\delta(\varepsilon)})$ ($t \in [t_0, \theta]$) kümesini hesaplamak işe yarar.

7 SONUÇ VE ÖNERİLER

Kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemler, genelde enerji kaynaklarının sınırlı olduğu sistemlerin kontrolunda ortaya çıkmaktadır. Uzayda hareket eden kontrol edilebilir objelerin ve finans kaynaklı kontrol edilebilir ekonomik sistemlerin matematik modellerinde kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olmaktadır.

Kontrol sistemin erişim kümeleri, verilen sistem hakkında önbilgiler elde etmek için kullanılan en önemli yapılardan biridir. Erişim kümelerinin önceden hesaplanabilirliği, verilen sistem hakkında bir çok öngörüyü sağlayabilir. Tez kapsamında, davranışı doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemin erişim kümelerinin zamana, sistemin başlangıç koşullarına ve kontrol sistemin diger parametrelerine bağlantısının sürekli olduğu görülmüştür. Erişim kümelerinin verilen başlangıç koşullara ve sistemin diğer parametrelerine sürekli bağlantılılığı, pratikte verilen kontrol sistemlerin matematik modelleri kontrol fonksiyonu integral kısıtlı olan ve doğrusal olmayan diferansiyel denklem biçiminde yapılırken, modelleme süresinde sistemin ele alınan parametrelerinin ölçümünde oluşabilecek küçük hataların, sistemin erişim kümelerini az etkileyeceğini göstermektedir. Diğer bir deyişle, kontrol sistemin erişim kümeleri, verilen sistem hakkında önbilgiler elde etmek için kullanılan en önemli yapılardan biri olduğundan, modelleme sırasında sistemin parametrelerinin ölçümünde oluşan küçük hatalar, sistem hakkında elde edeceğimiz önbilgileri az etkiler.

Elde edilen sonuçlar davranışı doğrusal olmayan diferansiyel denklem ile verilen ve kontrol fonksiyonları integral kısıtlı olan kontrol sistemin erişim kümelerinin yapılandırılması için yaklaşım yöntemi elde etme çalışmalarında önemli bir yer bulabilir.

KAYNAKLAR

Aubin, J-P. ve Cellina, A. (1984), *Differential Inclusions*, Set Valued Maps and Viability Theory, Springer-Verlag, Berlin.

Aubin, J.P. ve FRANKOWSKA, H. (1990), *H. Set Valued Analysis*, Birkhauser, Boston.

Beletskii, V.V. (1972), *Studies of motions of celestial bodies*, Nauka, Moscow.

Blagodatskikh, V.I. ve Filippov, A.F. (1986), "Differential Inclusions and Optimal Control", Proc. of the Steklov Inst. of Math., **169**, 199-256.

Blumenson, L.E. (1960), "A Derivation of n-dimensional spherical coordinates", The American Mathematical Monthly, **67**, 63-66.

Burago, D., Burago, Y. ve Ivanov, S. (2001), *A Course in Metric Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 33.

Chentsov, A.G. (1995a), "Asymptotic attainability with perturbation of integral constraints", Cybernet. Sistems Anal., **31**, 75–84.

Chentsov, A.G. (1995b), "Asymptotic attainability with perturbation of integral constraints in the abstract control problem", Russian Math. (Iz. VUZ), **39**, 57-68.

Chentsov, A.G. (1997), *Asymptotic Attainability*, Kluwer, Dordrecht.

Chernousko, F.L. (1994), *State Estimation of Dynamic Systems*, SRC Press: Boca Raton, Florida, USA.

Clarke, F.H., Ledyaev, Y.S., Stern, R.J. ve Wolenski P.R. (1998), *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer, New York.

Conti, R. (1974), *Problemi Di Controllo E Di Controllo Ottimale*, UTET, Torino.

Crandall, M.G. ve Lions, P.L. (1983), "Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations", Trans. Amer. Math. Soc., **277**, 1-22.

Deimling, K. (1992), *Multivalued Differential Equations*, D.Gruyter, Berlin.

Filippov, A.F. (1988), *Differential equations with discontinuous right-hand* *sides*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.

Formalskii, A.M. (1974), "Controllability and stability of systems with limited resources", Theoretical Foundations of Engineering Cybernetics Series, Nauka, Moscow.

Hu, S. ve Papageorgiou, N.S. (1997), *Handbook of Multivalued Analysis. Vol.1. Theory*, Kluwer, Dordrecht.

Hu, S. ve Papageorgiou, N.S. (2000), *Handbook of Multivalued Analysis. Vol.II. Applications*, Kluwer, Dordrecht.

Gozzi, F. ve Loreti, P. (1999), "Regularity of the minimum time function and minimum energy problems: the linear case", *SIAM J. Control Optim.*, **37**, 1195-1221.

Guseinov, Kh.G., Subbotin, A.I. ve Ushakov, V.N. (1985), "Derivatives for multivalued mappings with applications to game-theoretical problems of control", Problems of Control and Information Theory, **14**, 155-167.

Guseinov, Kh.G. ve Ushakov V.N. (1989), "Strongly and weakly invariant sets with respect to a differential inclusion", Soviet Math. Dokl., **38**, 603-605.

Guseinov, Kh.G. (1990), "Strongly invariant sets and periodic solutions of a differential inclusion", Differential Equations, **26**, 1246-1254.

Guseinov, Kh.G. ve Ushakov, V.N. (1990), "Strongly and weakly invariant sets with respect to a differential inclusion, their derivatives and application to control problems", Differential Equations, **26**, 1399-1405.

Guseinov, Kh.G. ve Ushakov, V.N. (1991), "Differential properties of integral funnels and stable bridges", J. Appl. Math. Mech., **55**, 56-61.

Guseinov, Kh.G., Moiseyev, A.N. ve Ushakov, V.N. (1998), "On the approximation of reachable domains of control systems", J. Appl. Math. Mech., **62**, 169-175.

Guseinov, Kh.G., Neznakhin, A.A. ve Ushakov, V.N. (1999), "Approximate construction of reachable sets of control systems with integral constraints on the controls", J. Appl. Math. Mech., **63**, 557-567.

Guseinov, Kh.G., Özer, O. ve DÜZCE, S.A. (2003), "On Differential Inclusions with Prescribed Attainable Sets", J. Math. Anal. Appl., **277**, No.2, 701-713.

Guseinov, Kh.G., Özer, O. ve Akyar, E. (2004) "On the continuity properties of the attainable sets of control systems with integral constraints on control, Nonlinear Anal. Ser. A: Theory, Meth., Appl., **56**, 433-449.

Guseinov, Kh.G., Özer, O., Akyar, E. ve Ushakov, V.N. (2007), "The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls", Nonlinear Different. Equat. Appl. (NoDEA), **14**, 57-73.

Guseinov, Kh.G. ve Nazlıpınar, A.S. (2006), "İntegral kısıtlı doğrusal olmayan kontrol sistemlerin erişim kümelerinin bazı topolojik özellikleri", *XIX. Ulusal Matematik Sempozyumu:Bildiri özetleri*, Kütahya, 39.

Guseinov, Kh.G. ve Nazlıpınar, A.S. (2007a), "On the continuity property of L_p balls and an application", J. Math. Anal. Appl., **335**, No.2, 1347-1359.

Guseinov, Kh.G. ve Nazlıpınar, A.S. (2007b), "İntegral kısıtlı doğrusal olmayan kontrol sistemlerin erişim kümelerinin sürekliliği üzerine", *XX. Ulusal Matematik Sempozyumu:Bildiri özetleri*, Erzurum, 39.

Guseinov, Kh.G. ve Nazlıpınar, A.S. (2007c), "Attainable Sets of Nonlinear Control Systems with Integral Constraints", *First Joint International Meeting Between the American Mathematical Society and the Polish Mathematical Society:Abstracts*, Warsaw, Poland, 206.

Guseinov, Kh.G. ve Nazlıpınar, A.S. (2007d), "On the continuity of L_p balls and an application", *Epcara*, Moscow, Russia.

James, M.R. ve Petersen, I.R. (1998), "Nonlinear state estimation for uncertain systems with an integral constraints", IEEE Trans. Signal

Process, **46**, 2926-2937.

Kalman, R.E., HO, Y.C. ve Narendra, K.S. (1963), "Controllability of linear dynamical systems", Contr. Diff. Equat., **1**, 189-213.

Krasovskii, N.N. (1968), *Theory of control of motion: Linear systems*, Nauka, Moscow.

Kurzhanskii, A.B ve Valyi, L. (1996), *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*, Birkhauser, Boston.

Kurzhanskii, A.B (2005), "Differential equations in control synthesis problems: I. Ordinary systems", Differential Equations, **41**, 10-21.

Lawden, D.F. (1963), *Optimal Trajectories for Space Navigation*, Butterworth, London.

Leigh, J.R. (1980), *Functional Analysis and Linear Control Theory*, Academic Press. London.

Lou, H.W. (2004), "On the attainable sets of control systems with p-integrable controls", J. Optim. Theory Appl., **123**, 123-147.

Lusternik, L.A. ve Sobolev, V.J. (1974), *Elements of functional analysis: Authorised third translation from second extensively enlarged and rewritten Russian edition*, Int. Mon. Adv. Math. Phys., Hindustan Publishing Corp., Delhi; Halsted Press [John Wiley and Sons Inc.], New York.

Markus, L. ve LEE, E.B. (1962) "On the existence of optimal controls", Trans. ASME Ser. D. J. Basic Engrg., **84**, 13-22.

Motta, M. ve Rampazzo, F. (2000), "Multivalued dynamics on a closed domain with absorbing boundary, applications to optimal control problems with integral constraints", Nonlinear Anal. Ser. A: Theory, Meth., Appl., **41**, 631-647.

Motta, M. ve Sartori, C. (2000), "Minimum time and minimum energy function for linear systems with controls in L^p for $p \geq 1$, Preprint.

Motta, M. ve Sartori, C. (2003), "Minimum time with bounded energy, minimum energy with bounded time", SIAM J. Control Optim., **42**, 789-809.

Panasyuk, A.I. (1990), "Equations of Attainable Set Dynamics, Part 1: Integral Funnel Equations", J. Opt. Theo. Appl., **64**, No.2, 349-366.

Polyak, B.T. (2003), *Convexity of the Reachable Set of Nonlinear Systems under L_2 Bounded Controls*, Institut Mittag-Leffler, report no. 02.2002/ 2003, spring.

Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V. ve Mishenko, E. (1962), *The mathematical theory of optimal processes*, Interscience Publishers John Wiley and Sons, New York-London.

Rampozzo, F. ve Sartori, C. (1998), "The minimum time function with unbounded controls", J. Math. Syst. Estim. Controls, **8**, no.2, 1-34.

Roxin, E. (1962), "The existence of optimal controls", Michigan Math. J., **9**, 109-119.

Sirotin, A.N. ve Formalskii, A.M. (2003), "Reachability and Controllability of Discrete-Time Systems under Control Actions Bounded in Magnitude and Norm", Autom. Rem. Contr., **64**, 1844-1857.

Sokolov, B.N. (1972), "A certain differential pursuit game with information lag in the presence of integral constraints", Differential Equations, **8**, 1797-1804.

Solomatin, A.M. (1984), "A game theoretic approach-evasion problem for a linear system with integral constraints imposed on the player control", J. Appl. Math. Mech., **48**, 401-405.

Soravia, P. (2000), "Viscosity solutions and optimal control problems with integral constraints", Syst. Cont. Lett., **40**, 325-335.

Subbotin, A.I. (1991), *Minimax Inequalities and Hamilton-Jacobi Equations*, Nauka, Moscow.

Subbotin, A.I. (1995), *Generalized solutions of first-order PDEs : The dynamical optimization perspective*, Birkhäuser, Boston.

Ukhobotov, V.I. (1977), "On a class of differential games with an integral constraint", J. Appl. Math. Mech., **41**, 819-824.

Ukhobotov, V.I. (1987), "A type of linear game with mixed constraints on the controls", J. Appl. Math. Mech., **51**, 139-144.

Ukhobotov, V.I. (2005), *One dimensional projection method in linear differential games with integral constraints*, Chelyabinsk State Univ. press, Chelyabinsk.

Ushakov, V.N. (1991), *The construction procedures of the stable bridges*, Doctor of Science Thesis, Sverdlovsk.

Warga, J. (1972), *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York.

Wolenski, P. (1990) "The Exponential Formula for the Reachable Set of Lipschitz Differential Inclusion", SIAM J. Contr. Optimiz., **28**, 1148-1161.

Zhu, Q.J., Zhang, N. ve He, Y. (1992), "Algorithm for determining the reachability set of a linear control system", J. Optim. Theo. Appl., **72**, 333-354.