MATRİS DENKLEMLERİ VE MATRİSLER AİLESİNİN GÜRBÜZ KARARLILIĞI PROBLEMLERİ

Özlem ESEN

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ocak - 2008

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Özlem Esen 'in **"Matris Denklemleri ve Matrisler Ailesinin Gürbüz Kararlılığı Problemleri"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Doktora Tezi 7.1.2008 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	**:**	**Prof. Dr. VAKIF CAFER**	....
Üye	**:**	**Prof. Dr. ABDURRAHMAN KARAMANCIOĞLU**	....
Üye	**:**	**Prof. Dr. MEMMEDAĞA MEMMEDLİ**	....
Üye	**:**	**Prof. Dr. ALTUĞ İFTAR**	....
Üye	**:**	**Yard. Doç. Dr. TANER BÜYÜKKÖROĞLU**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

MATRİS DENKLEMLERİ VE MATRİSLER AİLESİNİN GÜRBÜZ KARARLILIĞI PROBLEMLERİ

Özlem ESEN

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : **Prof. Dr. Vakıf CAFER**
2008, 66 sayfa

Bu tezde bir tek matris ve matrisler ailesinin kararlılık problemleri incelenmektedir. Tek bir matrisin özdeğerlerinin rasyonel bir bölgede olması için koşullar verilmiştir. Bu koşullar verilen matrise bağlı diğer matrislerin Hurwitz kararlılığı ve Lyapunov denklemlerinin ortak çözümüyle ifade edilmektedir. Polinomsal matrisler ailesinin Hurwitz kararlılığı da Lyapunov denklemlerinin ortak çözümü yardımıyla ifade edilmiştir. Tezde matrisler politopunun sektör kararlılığı problemi incelenmiş, bu politopun kararlılığının bir başka politopun tersinir (nonsingular) olduğuna denk olduğu kanıtlanmıştır. Özel bir sınıftan iki tane 3×3 matrisler için Lyapunov denkleminin ortak çözümünün varlığı araştırılmıştır. Elde edilmiş sonuçlar pek çok örneklerle açıklanmaktadır.

Anahtar Kelimeler : Matris, Matrisler Ailesi, Hurwizt Kararlılık, Sektör Kararlılık, Lyapunov Denklemi, Bernstein Açılımı

ABSTRACT

PhD Dissertation

**MATRIX EQUATIONS AND
ROBUST STABILITY OF FAMILY OF MATRICES**

Özlem ESEN

**Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program**

Supervisor: **Prof. Dr. Vakıf CAFER**
2008, 66 pages

In this dissertation, the stability problems for a single matrix and a family of matrices are studied. A single condition for the eigenvalues of a single matrix to lie in a rational region are obtained. This condition are expressed as Hurwitz stability of a suitable set of matrices and as an existence of a common solution to the Lyapunov equations. Hurwitz stability of a polynomial family is expressed as an existence of a common solution to the Lyapunov equations. In the dissertation, the sector stability of a matrix polytope is investigated and it is shown that this stability is equivalent to the nonsingularity of an extended polytope. For a special types of 3×3 matrices the existence problem of a common solution to the Lyapunov equations. The obtained results are illustrated by a number of examples.

Keywords : Matrix, Matrices Family, Hurwitz Stability, Sector Stability, Lyapunov Equation, Bernstein Expansion

TEŞEKKÜR

Yalnızca tez danışmanlığımı yürütmekle kalmayıp mesleki yaşantıma çok önemli katkılar sağlayan, hiçbir zaman yardımlarını benden esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. Vakıf Cafer'e sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca bu çalışmanın gerçekleşmesinde bilgi ve görüşlerine başvurduğum Yard. Doç.Dr. Taner Büyükköroğlu'na teşekkür ederim. Her zaman olduğu gibi doktora eğitimim süresince de benden desteklerini eksik etmeyen tüm aileme yardımları ve anlayışları için teşekkürü borç bilirim .

Özlem ESEN

Ocak 2008

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	:	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$conv\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$	:	$p_1, p_2, \ldots, p_n$ noktalarının konveks zarfı
A^T	:	A matrisinin transpozu
A^*	:	A matrisinin eşlenik transpozu
$A > 0$	:	A pozitif belirli matrisdir
$A < 0$	:	A negatif belirli matrisdir
$\mathcal{A}$	:	Matrisler ailesi
$\mathbb{R}^n$	:	n boyutlu gerçel vektörler kümesi
$\mathbb{C}^n$	:	n boyutlu kompleks vektörler kümesi
$\mathbb{R}^{n\times n}$	:	$n \times n$ boyutlu gerçel matrisler kümesi
$\mathbb{C}^{n\times n}$	:	$n \times n$ boyutlu kompleks matrisler kümesi
$\mathcal{D}$	:	kararlılık bölgesi
$\overline{z}$	:	z kompleks sayısının eşleniği
$\|z\|$	:	z kompleks sayısının modülü
Rez	:	z kompleks sayısının gerçel kısmı
Imz	:	z kompleks sayısının sanal kısmı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1 GİRİŞ ve ÖN BİLGİLER

Bir sistemin normal çalışabilmesi için onun kararlılığı önemlidir. 1892 yılında Rus matematikçi A. M. Lyapunov lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerle verilmiş sistemler için kararlılık kavramını tanımladı. Lineer sistemler için bu kararlılık Lyapunov denklemi denilen matris denkleminin pozitif belirli çözümünün varlığı problemine indirgenmiş oldu.

Ortak Lyapunov fonksiyonu (çözümü) kavramı ise son yıllarda ortaya çıkmıştır. Ortak fonksiyon yardımıyla lineer sistemlerin bir ailesinin kararlılığı araştırılmaktadır. Bu tür problemler belirsizlik içeren kontrol sistemlerinde [1], fuzzy sistemlerde [2] ve switched sistemlerde [3] v.s. ortaya çıkmaktadır.

Bir sistemin kararlılık problemleri ve performansının değerlendirilmesi probleminde, sisteme bağlı matrisin özdeğerlerinin kompleks düzlemin bir alt bölgesinde bulunması önem kazanmaktadır. Bu konuda çalışmalar 1970 yıllarında başlamış ve halen devam etmektedir [4, 5]. Burada genelde iki yöntem kullanılmaktadır: Lineer matris denklemleri yöntemi (genelleştirilmiş Lyapunov denklemleri) ve matrislerin Kroneker çarpımı yöntemi. Ancak her iki yöntem nümerik hesaplama açısından verimli değildir, öyleki matrisin boyutu ve bölgenin parametreleri arttıkça hesaplama parametreleri hızla artmaktadır. Bundan dolayı matrisin özdeğerlerinin konumlandırılması için daha kullanışlı yöntemlere ihtiyaç vardır. Kararlılık bölgesinin açık sol yarı düzlem (Hurwitz kararlılık), birim disk (Schur kararlılık) olması kontrol teorisinde çok önemlidir. Bunların yanı sıra kararlılık bölgesinin sol yarı düzlemde bir sektör olması bir çok problemde örneğin "sönme", "frenleme" (damping) gibi durumlar söz konusu olduğunda karşımıza çıkmaktadır. Sektör kararlılık problemleri [6, 7] gibi yayınlarda ele alınmıştır.

$\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesini, $\mathbb{C}$ ise kompleks sayılar kümesini göstersin. $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) ile n boyutlu gerçel (kompleks) vektörler uzayı gösterilsin.

$a_i, (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ kompleks veya gerçel sayılar olmak üzere,

$$p(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n, \quad (a_n \neq 0) \tag{1.0.1}$$

polinomu verilsin. $\mathcal{D}$ kümesi $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde basit bağlantılı, açık bir küme olsun. Eğer bu polinomun tüm kökleri $\mathcal{D}$ bölgesinde ise bu polinoma $\mathcal{D}$-kararlı polinom denir. Eğer,

- $\mathcal{D}$ bölgesi kompleks düzlemde sol açık yarı düzlem ise, $\mathcal{D}$-kararlılığa Hurwitz kararlılık,
- $\mathcal{D}$ bölgesi kompleks düzlemde açık birim disk ise, $\mathcal{D}$-kararlılığa Schur kararlılık
- $\mathcal{D}$ bölgesi kompleks düzlemde sol açık yarısında bir sektör ise $\mathcal{D}$-kararlılığa sektör kararlılık denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.0.2}$$

matrisi verilsin. Eğer A matrisin tüm özdeğerleri kompleks düzlemin basit bağlantılı, açık bir $\mathcal{D}$ bölgesinde ise bu matrise $\mathcal{D}$-kararlı matris denir. $\mathcal{D}$ bölgesi, sol açık yarı düzlem ise bu matrise Hurwitz kararlı matris, açık birim disk ise Schur kararlı matris denir ([1, 8]).

Eğer $p(s)$ polinomunda tüm a_i katsayıları gerçel ise, bu polinomun Hurwitz kararlı olması için gerekli koşul, a_i katsayılarının aynı işaretli olmasıdır, $n = 2$ durumunda bu koşulun yeter olduğu bilinmektedir, $n \geq 3$ durumunda ise bu koşulun yeterli olmadığı bilinmektedir. Kompleks katsayılı $p(s)$ polinomunun Schur kararlılığı için ise gerekli koşul olarak $|a_0| < |a_n|$ eşitsizliği bilinmektedir.

(1.0.1) polinomunda veya (1.0.2) matrisinde katsayılar sabittir. Ancak bir çok pratik problemlerde bu katsayıların değerleri bilinmemektedir, ancak onların değiştiği kompakt kümeler bilinmektedir. Bu durumda (1.0.1) polinomu yerine

$$p(s,q) = a_0(q) + a_1(q)s + \ldots + a_n(q)s^n \tag{1.0.3}$$

polinomlar ailesi ve (1.0.2) matrisi yerine

$$A(q) = \begin{bmatrix} a_{11}(q) & a_{12}(q) & \ldots & a_{1n}(q) \\ a_{21}(q) & a_{22}(q) & \ldots & a_{2n}(q) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(q) & a_{n2}(q) & \ldots & a_{nn}(q) \end{bmatrix} \tag{1.0.4}$$

matrisler ailesi ortaya çıkmaktadır. Bu ifadelerde q parametresi belirsizlik parametresidir ve bir Q kompakt kümesinde değişmektedir. Genelde, Q kümesi $\mathbb{R}^l$ uzayında bir kutu (box) olmaktadır:

$$Q = \{(q_1, q_2, \ldots, q_l) : \alpha_i \leq q_i \leq \beta_i (i = 1, 2, \ldots, l))\} \tag{1.0.5}$$

Eğer ailedeki her polinom (matris) kararlı ise, bu aileye gürbüz (robust) kararlı aile denir. Eğer ailede en az bir polinom (matris) kararlı değil ise, bu aileye kararlı olmayan (kararsız) aile denir. Gürbüz kararlılık için Sıfırı İçermeme Prensibi (Zero Exclusion Principle) çok önemlidir. Bu prensip, derecesi değişmez kalan ve katsayıları sürekli değişen polinomların köklerinin parametreye göre sürekli değiştiğini ifade eden aşağıdaki teoreme dayalıdır ([9]).

Teorem 1.0.1. *(1.0.3) polinomlar ailesi değişmez dereceli ve $a_i(q)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ katsayı fonksiyonları ise $q \in Q$'ya göre sürekli olsun. Bu durumda $p(s,q)$ polinomunun kökleri de $q \in Q$'ya göre sürekli değişir. Yani öyle*

$$s_i(\cdot) : Q \to \mathbb{C}, \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sürekli fonksiyonları vardır ki $s_1(q), s_2(q), \ldots, s_n(q)$ sayıları $p(s,q)$ polinomunun kökleridir.

Gürbüz kararlılık için sıfırı içermeme prensibi şöyledir:

Teorem 1.0.2. *$p(s,q)$ polinomlar ailesi değişmez dereceli, Q bir kutu, $a_i(q)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ katsayı fonksiyonları $q \in Q$'ya göre sürekli olsun ve bu aileye ait en az bir $p(s,q^0)$ polinomu $\mathcal{D}$ kararlı olsun. $p(s,q)$ polinomlar ailesinin $\mathcal{D}$ kararlı olması için gerek ve yeter koşul her $s \in \partial\mathcal{D}$ için*

$$0 \notin p(s,Q) \tag{1.0.6}$$

olmasıdır. Burada $p(s,Q) = \{p(s,q) : q \in Q\}, \partial\mathcal{D}$-kümesi ise $\mathcal{D}$ kümesinin sınırıdır.

$n \times n$ boyutlu gerçel matrisler kümesi $\mathbb{R}^{n\times n}$ ile, $n \times n$ boyutlu kompleks matrisler kümesi $\mathbb{C}^{n\times n}$ ile gösterilmektedir.

Eğer $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisinin eşlenik transpozu A^* kendisine eşit ise, bu matrise Hermityen (Hermitian) matris denir. Gerçel Hermityen matris simetrik matristir. Burada eşlenik transpoz, matrisin elemanları olan kompleks sayıların eşleniğini alıp sonra matrisin transpozunu alarak elde edilmektedir.

Eğer A Hermityen matrisi her $z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$ kompleks vektörü için $z^*Az > 0$ koşulunu sağlıyorsa, bu matrise pozitif belirli matris denir ve $A > 0$ ile gösterilir. Benzer olarak $-A > 0$ ise A matrisine negatif belirli matris denir ve $A < 0$ ile gösterilir. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olduğu durumda A matrisinin pozitif belirli olması, A nın simetrik olması ve her $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ için $x^TAx > 0$ koşulunun sağlanmasıdır.

Bir A matrisinin (gerçel veya kompleks) Hurwitz kararlılığı Lyapunov Teoremi ile Schur kararlılığı ise Stein Teoremi ile ifade edilebilir.

Teorem 1.0.3. *([10])*

1) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi verilsin. A matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$A^*P + PA < 0 \tag{1.0.7}$$

olacak şekilde P pozitif belirli matrisinin bulunmasıdır.

2) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *matrisi verilsin. A matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul*

$$A^T P + PA < 0 \tag{1.0.8}$$

olacak şekilde P gerçel pozitif belirli matrisinin bulunmasıdır.

(1.0.7) ve (1.0.8) eşitsizliklerine Lyapunov eşitsizlikleri denir.

$Q > 0$ olmak üzere,

$$A^*P + PA = -Q \text{ ve } A^T P + PA = -Q \tag{1.0.9}$$

denklemlerine Lyapunov denklemleri,

$$P - A^*PA = -Q \text{ , } P - A^T PA = -Q \tag{1.0.10}$$

denklemlerine ise Stein denklemleri denir [11].

(1.0.9)' daki

$$A^T P + PA = -Q$$

denklemini ele alalım. Eğer A matrisi Hurwitz kararlıysa bu matris denkleminin $P > 0$ tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

biçimindedir ([12], sayfa 574). Bu formüldeki e^{Ct} gibi exsponansiyel matris fonksiyonu

$$L^{-1}[(sI - C)^{-1}]$$

gibi tanımlıdır. Burada $(sI-C)^{-1}$ ters matrisi, L^{-1} ise ters Laplace dönüşümünü göstermektedir. Her elemanının integrali alınıp P matrisi elde edilmektedir.

İki ve daha fazla Hurwitz kararlı matris için (1.0.8) Lyapunov eşitsizliklerinin ortak $P > 0$ çözümünün var olması lineer sistemler teorisinde çok önemlidir. Bu tür sistemlere (switching) sistemleri denir. Ortak $P > 0$'ın varlığı bu sistem için ortak bir $V(x) = x^T P x$ Lyapunov fonksiyonunun varlığı demektir ve çok önemlidir. İki ve daha fazla Hurwitz kararlı matris için (1.0.8) Lyapunov eşitsizliğinin ortak $P > 0$'ın varlığı için aşağıdaki sonuçlar bilinmektedir ([13-19]). [13] makalesinde, fark matrisinin rankı bir olan iki Hurwitz kararlı matris için ortak $P > 0$'ın varlığı gösterilmiştir. [14] makalesinde sonlu sayıda 2×2 boyutlu komütatif Hurwitz kararlı matrisler için ortak $P > 0$'ın varlığı gösterilmiştir. [19] makalesinde sonlu tane kararlı matris için ortak $P > 0$'ın varlık kriteri verilmiştir ancak bu kriter oldukça karmaşıktır ve kullanılması zor gözükmektedir.

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi verilsin. $x, y \in \mathcal{P}$ için $\{(1-\alpha)x + \alpha y : \alpha \in [0,1]\}$ kümesine x ve y noktalarını birleştiren doğru parçası denir. Eğer $\mathcal{P}$ kümesindeki herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası $\mathcal{P}$ kümesinde ise $\mathcal{P}$'ye konveks küme denir. Bir $e \in \mathcal{P}$ noktası $x, y \in \mathcal{P}$, $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere

$$e = (1-\alpha)x + \alpha y$$

biçiminde yazılamazsa bu e noktasına $\mathcal{P}$ kümesinin uç (extremal) noktası denir.

$p_1, p_2, \ldots p_k \in \mathcal{P}$ noktaları verilsin. Bu noktaların tüm konveks kombinasyonları kümesi olan

$$\{\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_k p_k : \lambda_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$$

kümesine bu noktaların konveks zarfı denir ve

$$conv\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$$

gibi gösterilir. Bu kümeye, $\mathbb{R}^n$'de bir politop da denir. Bu kümenin uç noktalar kümesi $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ kümesinin alt kümesidir, ancak $p_1, p_2, \ldots, p_k$ noktalarından bazıları uç nokta olmayabilir.

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ konveks küme ve $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x, y \in \mathcal{P}$ ve her $\alpha \in [0,1]$ için

$$f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \tag{1.0.11}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu fonksiyona konveks fonksiyon denir. $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli konveks fonksiyonunun maksimumunu a veya b noktasında aldığı bilinmektedir. V kompakt bir küme olmak üzere bir $v \in V$ parametresine bağlı sürekli ve her v için x'e göre konveks olan $f(v, x)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda

$$f(x) = \max_{v \in V} f(v, x)$$

fonksiyonu da konvekstir. Bu özellik

$$\max_{v \in V}\{f(v, x_1) + f(v, x_2)\} \leq \max_{v \in V} f(v, x_1) + max_{v \in V} f(v, x_2)$$

eşitsizliğinden ve (1.0.11)'den elde edilmektedir.

$\mathcal{P} = conv\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ politopu ve politop üzerinde tanımlı $f(p) = \langle p, v\rangle$ afin fonksiyonu verilsin. Burada v sabit bir vektör, $\langle , \rangle$ ise skaler çarpım işaretidir. Bu durumda

$$\max_{p \in \mathcal{P}} f(p) = \max_{i=1,2,\ldots,k} f(p_i), \qquad \min_{p \in \mathcal{P}} f(p) = \min_{i=1,2,\ldots,k} f(p_i)$$

eşitlikleri sağlanmaktadır. Yani bu fonksiyon maksimum ve minimumunu uçlarda almaktadır. Gerçekten,

$$\max_{p \in \mathcal{P}} f(p) \geq \max_{i=1,2,\ldots,k} f(p_i) \tag{1.0.12}$$

dir. Öte yandan soldaki maksimum bir p_* noktasında elde ediliyorsa konveks zarfın tanımına göre $p_* = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_k p_k$ ve

$$\begin{aligned}
\max_{p \in P} f(p) &= f(p_*) = \langle p_*, v\rangle \\
&= \langle \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_k p_k, v\rangle \\
&= \lambda_1 \langle p_1, v\rangle + \lambda_2 \langle p_2, v\rangle + \ldots + \lambda_k \langle p_k, v\rangle \qquad (1.0.13) \\
&\leq \lambda_1 \max_i \langle p_i, v\rangle + \lambda_2 \max_i \langle p_i, v\rangle + \ldots + \lambda_k \max_i \langle p_i, v\rangle \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k) \max_i \langle p_i, v\rangle \\
&= \max_i f(p_i)
\end{aligned}$$

(1.0.11) ve (1.0.12) eşitsizliklerinden istenilen eşitlik elde edilmektedir.

Konveks kümelerin önemli özellikleri vardır ([20-22]). Bu özelliklerden biri konveks kümelerin ayrılabilme özelliğidir.

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ kapalı konveks küme ve $a \notin \mathcal{P}$ noktası verilsin. O zaman a noktasıyla $\mathcal{P}$ kümesi bir hiperdüzlemle ayrılabilir, yani

$$\sup_{p\in\mathcal{P}} \langle l, p\rangle < \alpha < \langle l, a\rangle$$

olacak şekilde $l \in \mathbb{R}^n$ ve α sayısı vardır. Eğer $\mathcal{P} \subset \mathbb{C}^n$ kompleks kapalı konveks küme ise o zaman yukarıdaki eşitsizlik

$$\sup_{p\in\mathcal{P}} Re\,\langle l, p\rangle < \alpha < Re\,\langle l, a\rangle$$

olacak şekilde değişecektir.
Şimdi ise tezde kullanacağımız Schur üçgenleştirme teoremi ve onun bir sonucunu verelim. ([23, sayfa 79])

Teorem 1.0.4. *$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi verilsin ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ bu matrisin özdeğerleri olsun. O zaman U^*AU üst üçgensel olacak biçimde bir üniter U matrisi vardır ve bu matrisin köşegen elemanları $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$'dir.*

Sonuç 1.0.5. *$\mathcal{F} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ komütatif ailesi verilsin. O zaman*

$$\{U^*AU : A \in \mathcal{F}\}$$

ailesinin üst üçgensel olduğu bir üniter U matrisi vardır.

Sonuç (1.0.5)'e bazen komütatif bir ailenin eş zamanlı olarak üçgenleştirilmesi teoremi de denir.

Bu tez çalışmasında tek bir matrisin ve matrisler ailesinin Hurwitz ve sektör kararlılığı problemleri incelenmiştir. Birinci bölümde tezde kullanılmış olan temel tanım ve teoremlere yer verilmektedir. İkinci bölümde tek bir matrisin özdeğerlerinin, rasyonel fonksiyonlarla ifade edilmiş olan bölgede kalması problemi incelenmiş ve daha basit bir kriter elde edilmiştir. Burada, komütatif bir ailenin kararlılığı için genel bir kriter elde edilmiştir. Bunun yanısıra kuadratik bir ailenin Hurwitz kararlılığı için yeni yeterli koşullar verilmiştir. Üçüncü bölümde gerçel matrisler politopunun sektör kararlılığı problemi incelenmiştir. Burada konveks kümelerin ayırma teoreminden yararlanılmıştır. Verilen politopun kararlılık koşulunun genişletilmiş kompleks politopun tersinirlik koşuluna denk olduğu gözlenmiş ve buradan sektör kararlılık için yeni gerekli ve yeterli koşullar elde edilmiştir. Bu koşullar yeni ailenin tersinirliği koşulu gibi ifade edilmektedir. Bu bölümde kararlılık probleminin çözümü için nümerik yöntemler de ele alınmaktadır. Önce, bir çok değişkenli polinomun bir kutu üzerindeki değer kümesini yaklaşık bulmaya olanak sağlayan Bernstein açılımı; sonra ise bir multilineer fonksiyonun bir kutu üzerindeki değer kümesini bulmaya yönelik sonuçlardan yararlanılmaktadır. Dördüncü bölümde pozitif kararlı 2×2 ve 3×3 boyutlu z- matrisler ele alınmaktadır. Bu matrisler için Lyapunov eşitsizliklerinin ortak çözümünün varlığı için yeterli koşul verilmektedir. Tezde elde edilmiş sonuçlar çok sayıda örneklerle açıklanmaktadır.

2 MATRİSLERİN ÖZDEĞERLERİNİN KONUMLANDIRILMASI

Bu bölümde matrislerin özdeğerlerinin konumlandırılması problemi ele alınmıştır. Burada, özdeğerleri kompleks düzlemin bir $\mathbb{D}$ alt kümesinde bulunan bir matris için koşullar veriyoruz. $\mathbb{D}$ bölgesi (kararlılık bölgesi) rasyonel fonksiyonlar yardımıyla tanımlanmaktadır. Tek bir matris için basit bir gerek ve yeter koşul elde edildi. Komütatif polinomsal aile için Lyapunov eşitsizlikleri için ortak bir çözüm yoluyla gerek ve yeter koşul türetildi. Komütatif kuadratik polinomsal ailenin Hurwitz kararlılığı için basit yeterli koşullar verildi.

2.1 Kararlılık Bölgesinin Tanımı

$\mathbb{C}$ kompleks düzleminin $\mathbb{D}$ alt kümesini

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : Ref_j(z)\bar{g}_j(z) < 0, j = 1, 2, \ldots, m\}, \tag{2.1.1}$$

olarak tanımlayalım. Burada, Re sembolü gerçel kısmı, $\bar{g}$, g'nin kompleks eşleniğini göstermektedir. $f_j(z)$ and $g_j(z)$ ise gerçel katsayılı polinomlardır. $Ref_j(z)\bar{g}_j(z) < 0$ eşitsizliği $r_j(z) = \frac{f_j(z)}{g_j(z)}$ olmak üzere $Rer_j(z) < 0$ eşitsizliğine denktir. $\mathbb{D}$ (2.1.1) bölgesi bir kararlılık bölgesidir. Bu bölge bilinen kararlılık bölgelerinin genelleştirilmesidir :

m=1, $f(z) = z$, $g(z) = 1$ ise Hurwitz kararlılık bölgesi,

m=1, $f(z) = z + 1$, $g(z) = z - 1$ ise Schur kararlılık bölgesi ,

m=2, $f_1(z) = z$, $f_2(z) = -z^2$, $g_j(z) = 1$ $(j = 1, 2)$ ise $\frac{\pi}{4}$ sol sektör kararlılık bölgesi,

m=2, $f_1(z) = z + a$, $f_2(z) = -z - b$, $g_1(z) = z - a$, $g_2(z) = z - b$ ise $\{z \in \mathbb{C} : b < |z| < a\}$ halkasıdır. Gerçekten $z = x + iy$ ise

$$Re(z + 1)\overline{(z - 1)} = Re(x + 1 + iy)(x - 1 - iy) = x^2 + y^2 - 1 < 0$$

Dolayısıyla $\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$

$Rez < 0 \Rightarrow x < 0.$

$Re(-z^2) = y^2 - x^2 < 0, \qquad |y| < |x| \ , \qquad |y| < -x, \qquad x < y < -x$
$\mathcal{D} = \{(x,y) : x < 0, x < y < -x\}.$
$Re(z+a)\overline{(z-a)} < 0 \Rightarrow x^2 + y^2 < a^2$
$Re(-z-b)\overline{(z-b)} < 0 \Rightarrow x^2 + y^2 > b^2.$
Dolayısıyla $\mathcal{D} = \{(x,y) : b^2 < x^2 + y^2 < a^2\}$

Lyapunov teoremine göre $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(\mathbb{C}^{n\times n})$ matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul

$$A^T P + PA < 0 \qquad (A^* P + PA < 0)$$

olacak biçimde $P > 0$ matrisinin varlığıdır. [24] makalesinde aşağıdaki sonuç elde edilmiştir ([24],Teorem 1).

Teorem 2.1.1. *([24]) Ω kararlılık bölgesi, $f_j(z)$ gerçel katsayılı polinomlar olmak üzere,*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : Ref_j(z) < 0, j = 1, 2, \ldots, m\},$$

olarak tanımlansın . O halde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisinin Ω -kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$[f_j(A)]^T P + P[f_j(A)] < 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.1.2}$$

olacak şekilde $P > 0$ matrisinin varlığıdır.

[25] da, verilen komütatif $A_1, A_2, \ldots, A_k$ matrisleri için ortak bir $P > 0$ matrisinin varlığı için sonuçlar verilmiştir. (bakınız [25],Teorem 1 ve Teorem 2).

Teorem 2.1.2. *$\{A_1, A_2\}$ matrisler ikilisini ele alalım. A_1 ve A_2 matrislerinin $A_1A_2 = A_2A_1$ koşulunu sağladıklarını ve Hurwitz kararlı olduklarını varsayalım. O zaman*

1) P_0 keyfi, simetrik pozitif tanımlı matrisi olmak üzere P_1 ve P_2

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -P_0 \tag{2.1.3}$$

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -P_1 \tag{2.1.4}$$

Lyapunov denklemlerinin simetrik pozitif tanımlı çözümleri olsun. O zaman $V(x) = x^T P x$ fonksiyonu $\dot{x} = A_i x$ (i=1, 2) sistemlerinin her ikisi için de bir ortak Lyapunov fonksiyonudur ve P_2 matrisi $\{A_1, A_2\}$ ikilisi için ortak çözümdür.

2) Verilen P_0 matrisi için, (2.1.3) ve (2.1.4)'de A_1 ve A_2 matrislerinin yerleri değiştirilebilir. Yani

$$A_2^T P_3 + P_3 A_2 = -P_0 \tag{2.1.5}$$

$$A_1^T P_2 + P_2 A_1 = -P_3 \tag{2.1.6}$$

olur.

3) P_2 matrisi aşağıdaki integral formunda seçilebilir.

$$\begin{aligned} P_2 &= \int_0^\infty e^{A_2^T t} \left[\int_0^\infty e^{A_1^T \tau} P_0 e^{A_1 \tau} d\tau \right] e^{A_2 t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{A_1^T t} \left[\int_0^\infty e^{A_2^T \tau} P_0 e^{A_2 \tau} d\tau \right] e^{A_1 t} dt. \end{aligned}$$

Kanıt. 1) $V(x) = x^T P_2 x$ olsun. $\dot{x} = A_2 x$ ise (2.1.4)'ü kullanarak bu sistemin yörüngesi boyunca V'nin türevi

$$\dot{V} = x^T (A_2^T P_2 + P_2 A_2) x = -x^T P_1 x < 0$$

olduğu görülür. Bu da V'nin bu sistem için bir Lyapunov fonksiyonu olduğunu gösterir. Şimdi, $\dot{x} = A_2 x$ sisteminin yörüngeleri boyunca V 'nin türevi $\dot{V} = x^T (A_1^T P_2 + P_2 A_1) x$ ile veriliyor. Bunun negatif olduğunu göstermeliyiz. (2.1.3) de (2.1.4)'deki P_1 'i yerine yazalım ve A_1ve A_2 matrislerinin komütatifliğini kullanalım. O zaman aşağıdakiler yazılabilir:

$$\begin{aligned} P_0 &= A_1^T (A_2^T P_2 + P_2 A_2) + (A_2^T P_2 + P_2 A_2) A_1 \\ &= A_1^T A_2^T P_2 + A_1^T P_2 A_2 + A_2^T P_2 A_1 + P_2 A_2 A_1 \qquad (2.1.7) \\ &= A_2^T A_1^T P_2 + A_1^T P_2 A_2 + A_2^T P_2 A_1 + P_2 A_1 A_2 \\ &= A_2^T \left(A_1^T P_2 + P_2 A_1 \right) + \left(P_2 A_1 + A_1^T P_2 \right) A_2 \end{aligned}$$

A_2 matrisi kararlı olduğu ve $P_0 > 0$ için Lyapunov teoremine göre $A_1^T P_2 + P_2 A_1 < 0$' dır, bu da P_2 matrisinin $\{A_1, A_2\}$ için ortak çözüm olduğunu göstermektedir.

2) P_2 matrisi (2.1.5)'in çözümü olduğu için pozitif belirlidir. O zaman

$$A_1^T P_4 + P_4 A_1 = -P_3 \tag{2.1.8}$$

denkleminin $P_4 > 0$ tek çözümü vardır. Şimdi $P_2 = P_4$ olduğunu kanıtlayalım. (2.1.5), (2.1.7)'den ve $A_1 A_2 = A_2 A_1$'den

$$P_0 = A_1^T (A_2^T P_4 + P_4 A_2) + (A_2^T P_4 + P_4 A_2) A_1 \tag{2.1.9}$$

yazabiliriz.

(2.1.7) ve (2.1.9)'dan görüldüğü gibi $A_2^T P_2 + P_2 A_2$ ve $A_2^T P_4 + P_4 A_2$ matrisleri aynı Lyapunov denklemlerinin çözümleridir.

$$A_2^T (P_2 - P_4) + (P_2 - P_4) A_2 = 0$$

olduğu ve A_2 kararlı olduğu için $P_2 = P_4$.

3) Lyapunov denklemlerinin çözümünün integral biçimindeki ifadesinden yararlanıp kolayca istenilen formül elde edilmektedir.

□

Yukarıdaki teorem sonlu sayıda Hurwitz kararlı matris için de genelleştilebilmektedir.

Teorem 2.1.3. *$A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ Hurwitz kararlı ve ikişer-ikişer komütatif matrisler verilsin. O zaman her $i = 1, 2, \ldots, k$ için*

$$A_i^T P + P A_i < 0$$

olacak biçimde bir $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P > 0$ matrisi vardır.

Bu matris integral biçiminde gösterilebilmektedir.

Tezimizde Teorem 2.1.2 ve 2.1.3 'ü kullanarak bir A matrisinin $\mathbb{D}$-kararlılığı için basit bir kriter kanıtlanmıştır.

Bir A matrisinin $\mathbb{D}$-kararlılığının $f_1(A)g_1^{-1}(A), \ldots, f_m(A)g_m^{-1}(A)$ matrislerinin Hurwitz kararlılığına denk olduğunu gösterilmektedir. (Teorem 2.2.5).

$t \in [0,1]$ ve $A_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ için

$$A(t) = A_0 + tA_1 + t^2A_2 + \ldots + t^kA_k, \tag{2.1.10}$$

$$\mathcal{A} = \{A(t) : t \in [0,1]\} \tag{2.1.11}$$

tanımlayalım. [26]'da, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ için $\mathcal{A}$ ailesinin Hurwitz kararlılık problemi guardian dönüşümü kavramı yardımıyla ele alınarak ve kararlılık için yeterli koşul verildi.

Komütatif aileler için Lyapunov eşitsizlikleri kümesi için bir ortak P'nin varlığını kullanıp $\mathbb{D}$-kararlılık için gerek ve yeter koşul vereceğiz (Sonuç 2.3.3). Son olarak, kuadratik ailelerde (yani (2.1.10)'da m=2 durumunda) Hurwitz kararlılık için yeterli koşullar elde edilmektedir.(Teorem 2.4.1 ve 2.4.3).

2.2 Bir Matris İçin Kararlılık Problemi

Bu bölümde bir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisinin $\mathbb{D}$-kararlılığı için bir kriter vereceğiz.

Lemma 2.2.1. *$f(z)$ ve $g(z)$ polinomlar , $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olsun . Eğer $g(A)$ tersinir ise $f(A)$ ve $g^{-1}(A)$ komütatiftir.*

Kanıt. $f(A)$ ve $g(A)$ matris polinomları oldukları için

$$f(A)g(A) = g(A)f(A)$$

eşitliği doğrudur. Bu eşitliği önce sağdan $g^{-1}(A)$ ile sonra soldan $g^{-1}(A)$ ile çarparsak

$$g^{-1}(A)f(A) = f(A)g^{-1}(A)$$

eşitliğini elde ederiz. □

Lemma 2.2.2. *$f_j(z)$, $g_j(z)$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ polinomlar ve her $j = 1, 2, \dots, m$ için $g_j(A)$ tersinir olsun. O zaman $r_j(A) = f_j(A)g_j^{-1}(A)$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ matrisleri komütatiftir.*

Kanıt. Lemma 2.2.1 den dolayı aşağıdaki ifade doğrudur.

$$[g_j(A)g_i(A)]^{-1} f_i(A)f_j(A) = f_j(A)f_i(A) [g_i(A)g_j(A)]^{-1} . \qquad (2.2.12)$$

(2.2.12) de uygun çarpımlar yapıldıktan sonra, $r_j(A)$ matrisleri'nin komütatifliği kolayca görülmektedir. □

Lemma 2.2.3. *$f(z)$ ve $g(z)$ polinomlar, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, λ kompleks sayısı A'nın bir özdeğeri ve $g(A)$ tersinir ise $g(\lambda) \neq 0$ dır ve $\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}$ kompleks sayısı $f(A)g^{-1}(A)$ matrisi'nın bir özdeğeridir.*

Kanıt. $g(\lambda)$ sayısı $g(A)$'nın bir özdeğeridir. $g(A)$ tersinir olduğundan $g(\lambda) \neq 0$'dır. $x \in \mathbb{C}^{n \times 1}$, $x \neq 0$ vardır öyle ki aşağıdakiler yazılabilir :

$$\begin{aligned}
&Ax = \lambda x \\
&f(A)x = f(\lambda)x \\
&g(A)x = g(\lambda)x \\
&g^{-1}(A)x = \tfrac{1}{g(\lambda)}x \\
&f(A)g^{-1}(A)x = f(A)\tfrac{1}{g(\lambda)}x = \tfrac{f(\lambda)}{g(\lambda)}x
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.2.4. *$f(z)$ ve $g(z)$ polinomlar ve $g(A)$ matrisi tersinir olsun. Eğer μ sayısı $f(A)g^{-1}(A)$'nın bir özdeğeri ise A'nın bir λ özdeğeri vardır öyleki $g(\lambda) \neq 0$ ve $\mu = \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}$ dır.*

Kanıt. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ A'nın özdeğerleri olsun . O zaman $g(\lambda_i) \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ ve Lemma 2.2.3 den dolayı $\frac{f(\lambda_i)}{g(\lambda_i)}$ sayıları $f(A)g^{-1}(A)$'nın özdeğerleridir. Buradan, $\mu = \frac{f(\lambda_i)}{g(\lambda_i)}$ olacak şekilde bir i vardır. □

Teorem 2.2.5. *Bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi ve $\mathbb{D}$ (2.1.1) kararlılık bölgesi verilsin. O halde aşağıdakiler denktir :*

i) A matrisi, $\mathbb{D}$-kararlıdır .

ii) $g_j(A)$ tersinirdir ve $r_j(A) = f_j(A)g_j^{-1}(A)$ matrisleri Hurwitz kararlıdır $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

iii) $g_j(A)$ tersinirdir ve

$$[r_j(A)]^T P + P[r_j(A)] < 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.2.13}$$

olacak şekilde bir $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P > 0$ vardır.

Kanıt. iii)$\Longrightarrow$ii) implikasyonu Lyapunov Teorem'inden gorülür.
ii)$\Longrightarrow$i) : λ sayısı A'nın keyfi bir özdeğeri olsun. Buradan $g_j(\lambda) \neq 0$ ve $\frac{f_j(\lambda)}{g_j(\lambda)}$ sayıları $r_j(A)$'nın özdeğerleridir $(j = 1, 2, \ldots, m)$. $r_j(A)$ matrisi Hurwitz kararlı olduğu için, $Re\frac{f_j(\lambda)}{g_j(\lambda)} < 0$ ya da $Ref_j(\lambda)\bar{g}_j(\lambda) < 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$'dır. O halde $\lambda \in \mathbb{D}$dir.
i)$\Longrightarrow$iii) : Keyfi j alalım ve μ sayısı $g_j(A)$'nın bir özdeğeri olsun. A'nın özdeğerleri λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ olsun. O zaman $g(\lambda_1), \ldots, g(\lambda_n)$ sayıları $g_j(A)$'nın özdeğerleridir. Buradan $\mu = g_j(\lambda_i)$ olacak şekilde i vardır. A matrisi $\mathbb{D}$-kararlı olduğu için $g_j(\lambda_i) = \mu \neq 0$'dır. μ sayısı $g_j(A)$'nın keyfi bir özdeğeri olduğu için sonuç olarak $g_j(A)$ tersinirdir.

Lemma 2.2.2 ve 2.2.3' den dolayı $r_j(A)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ matrisleri Hurwitz ve komütatiftirler. O halde Teorem 2.1.3'den dolayı öyle $P > 0$ vardır ki (2.2.13) doğrudur. $\square$

Örnek 2.2.6. *A matrisi aşağıdaki gibi verilsin*

$$A = \begin{bmatrix} -94.7 & -47.1 & -41.1 & -2.3 \\ 15.2 & -46.9 & 3.0 & -7.6 \\ 121.0 & 77.9 & 46.3 & 9.1 \\ -116.9 & 65.2 & -54.6 & -4.7 \end{bmatrix}$$

ve Ω bölgesi Şekil 1'deki gibi verilsin.

Bu bölge $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : Ref_i(z) < 0, j = 1, 2, 3\}$, $f_1(z) = z$, $f_2(z) = -z^2$, $f_3(z) = -z^3\}$ olarak ifade edilebilir. Teorem 2.2.5' in ii) şıkkındaki matrisler *şöyledir:*

$$A=\begin{bmatrix} -94.7 & -47.1 & -41.1 & -2.3 \\ 15.2 & -46.9 & 3.0 & -7.6 \\ 121.0 & 77.9 & 46.3 & 9.1 \\ -116.9 & 65.2 & -54.6 & -4.7 \end{bmatrix},$$

$$-A^2=\begin{bmatrix} -3547.9 & -3317.7 & -1973.5 & -212.57 \\ 900.88 & -1221.9 & 211.56 & -384.5 \\ 5736.1 & 5152.5 & 3092.6 & 491.78 \\ -6004.3 & 2111.7 & -2728.8 & 701.42 \end{bmatrix},$$

$$-A^3=\begin{bmatrix} 71614. & 1.5511\times 10^5 & 56100.0 & 16415. \\ -33339. & 6285.4 & -9902.9 & 10947. \\ -1.4818\times 10^5 & -2.3885\times 10^5 & -1.0396\times 10^5 & -26521. \\ 1.8852\times 10^5 & 16922. & 88469. & -30368. \end{bmatrix}$$

Bu matrisler Hurwitz kararlıdır. Teorem 2.2.5'den dolayı A matrisi Ω-kararlıdır .

$Im(z)$

15°

$Re(z)$

30°

Şekil 2.1: Örnek 2.2.6 için kararlılık bölgesi

[24]'de bu kararlılık $A, -A^2$ ve $-A^3$ matrisleri için ortak bir $P > 0$ matrisini bulma yöntemiyle kanıtlanmıştır.

Örnek 2.2.7. *A matrisi şöyle tanımlansın*

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -0.01 & 0.5 \\ 1 & 0 & -1.5 \\ -0.01 & 1 & 1.9 \end{bmatrix}$$

ve $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}: Ref_j(z).\bar{g}_j(z)<0, j=1,2\}$, $f_1(z)=z+1,\ g_1(z)=z-1,$ $f_2(z)=-z-\frac{1}{2}, g_2(z)=z-\frac{1}{2}$ *verilsin.* $\mathbb{D}$ *bölgesi* $\left\{(x,y):\frac{1}{4}<x^2+y^2<1\right\}$ *halkadır. Burada*

$$\begin{aligned} r_1(A) &= \begin{bmatrix} -11.48 & -10.48 & -10.712 \\ 18.409 & 19.616 & 20.8 \\ -20.592 & -20.802 & -20.008 \end{bmatrix} \\ r_2(A) &= \begin{bmatrix} -8.1846 & -4.6161 & -2.3799 \\ 12.438 & 5.2416 & 2.2451 \\ -8.9358 & -4.4912 & -3.3351 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir ve $r_1(A)$ *matrisi* $-10.805, -0.53341+2.2524i, -0.53341-2.2524i$ *özdeğerlerine sahip olurken* $r_2(A)$ *matrisinin özdeğerleri de* $-4.0633, -1.1074+1.7091i, -1.1074-1.7091i$ *'dir (burada i sanal birimdir:* $i^2=-1$ *). Dolayısıyla bu matrisler Hurwitz kararlıdırlar. Buradan,Teorem 2.2.5 'den dolayı A matrisi* $\mathbb{D}$*-kararlıdır.*

2.3 Komütatif Bir Ailenin Kararlılığı

Bu bölümde komütatif bir aile için $\mathbb{D}$*-kararlılık kriterini Lyapunov eşitsizlikleri kümesi için bir ortak pozitif belirli çözümün varlığı yoluyla vereceğiz. Aşağıdaki Lemma [27] ve [28]'den alınmıştır.*

Lemma 2.3.1. *([27],[28])* $\mathcal{B}\subset\mathbb{C}^{n\times n}$ *ailesi Hurwitz kararlı üst üçgensel matrislerin kompakt bir kümesi olsun. O zaman her* $A\in\mathcal{A}$ *için*

$$A^*D+DA\leq-\alpha I$$

olacak şekilde bir $\alpha>0$ *sayısı ve D pozitif diagonal matrisi vardır.*
Burada I, birim matrisi göstermektedir.

Teorem 2.3.2. *$\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ kompakt komütatif ailesi verilsin. O zaman $\mathcal{F}$ ailesinin Hurwitz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul her $F \in \mathcal{F}$ için*

$$F^T P + PF < 0. \tag{2.3.1}$$

olacak şekilde bir $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P > 0$ matrisinin varlığıdır.

Kanıt. $\Longrightarrow$) : Schur üçgenleştirme teoreminin sonucuna göre ([23], p.81) bir üniter U matrisi $\mathcal{B} = \{U^* F U : F \in \mathcal{F}\}$ üst üçgensel (ve Hurwitz kararlı) olacak şekilde vardır. Lemma 2.3.1'i $\mathcal{B}$ ailesine uygulayalım ve $Q = UDU^*$ yazalım. O zaman her $F \in \mathcal{F}$ için

$$F^T Q + QF < 0 \tag{2.3.2}$$

elde ederiz. $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$,$Q > 0$ olduğundan $Q = P + jL$, P, $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ve $P > 0$'dır.

O zaman (2.3.2)'den (2.3.1) elde edilir.

$\Leftarrow$) implikasyonu ise Lyapunov teoreminden elde edilir.

Yukarıdaki Teorem 2.2.5'e göre $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi için $\mathbb{D}$-kararlılık, $g_j(A)$ matrislerinin tersinir olması ve $f_j(A)g_j^{-1}(A)$ matrislerinin ise Hurwitz kararlı olmasına denktir ($j = 1, 2, \ldots, m$). Bu durumda, Teorem 2.2.5 ve 2.3.2'den aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Sonuç 2.3.3. *$\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ ailesi kompakt komütatif olsun. O zaman $\mathcal{F}$ ailesinin $\mathbb{D}$-kararlı olması için gerek ve yeter koşul her $F \in \mathcal{F}$ için ve her $j = 1, 2, \ldots, m$ için $g_j(F)$ matrisinin tersinir olması ve*

$$\left[f_j(F)\, g_j^{-1}(F)\right]^T P + P\left[f_j(F)\, g_j^{-1}(F)\right] < 0 (j = 1, 2, \ldots, m)$$

olacak biçimde bir $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P > 0$ matrisinin varlığıdır.

2.4 Kuadratik Ailelerin Hurwitz Kararlılığı

Bu bölümde kuadratik polinomsal bir ailenin Hurwitz kararlılığı için bir yeter koşul vereceğiz.

$$A(t) = A_0 + tA_1 + t^2 A_2 \tag{2.4.1}$$

matrisler ailesi verilsin. Burada $t \in [0,1]$, $A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(j = 0,1,2)$ ve komütatif olsunlar. Teorem 2.3.2'den dolayı $\mathcal{A} = \{A(t) : t \in [0,1]\}$ ailesinin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{A}$ ailesi için Lyapunov eşitsizliklerinin ortak bir pozitif tanımlı çözümünün var olmasıdır (bakınız (2.3.1)). Burada ortak pozitif tanımlı P'nin var olduğu bir matrisler ailesini ele alacağız.

Teorem 2.4.1. *(2.4.1) formülüyle verilen $A(t)$ ailesi verilsin ve A_0, A_1, A_2 matrisleri ikişer ikişer komütatif olsun ve $A_0, A_0 + A_1 + A_2$ matrisleri Hurwitz kararlı olsun. $P_0 > 0$ herhangi bir matris $A = A_0, B = A_0 + A_1 + A_2$ olmak üzere*

$$P = \int_0^\infty e^{B^T t} \left[\int_0^\infty e^{A^T \tau} P_0 e^{A\tau} d\tau \right] e^{Bt} dt \tag{2.4.2}$$

matrisi için

$$A_2^T P + PA_2 > 0 \tag{2.4.3}$$

sağlansın. O zaman $\mathcal{A} = \{A(t) : t \in [0,1]\}$ ailesi Hurwitz kararlıdır ve (2.4.2) ile verilmiş olan P matrisi $\mathcal{A}$ ailesi için Lyapunov eşitsizliğinin ortak çözümüdür.

Kanıt. $\lambda_{\max}(.)$ en büyük özdeğer olmak üzere

$$\max_{t\in[0,1]} \lambda_{\max}(A^T(t)P + PA(t)) < 0, \tag{2.4.4}$$

olduğunu göstermemiz gerekiyor. Öte yandan $V = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\triangleq \lambda_{\max}(A^T(t)P + PA(t)) \\ &= \max_{v\in V} v^T(A^T(t)P + PA(t))v \\ &\triangleq \max_{v\in V} f(t,v) \end{aligned}$$

yazılabilir, burada $f(t,v) = v^T(A^T(t)P + PA(t))v$.

$f(t,v)$ fonksiyonu her $v \in V$ için konvekstir. Gerçekten (2.4.3) koşuluna göre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 2v^T(A_2^T P + PA_2)v > 0$$

olduğundan $f(t,v)$ konvekstir. $\varphi(t)$ fonksiyonu ise konveks fonksiyonların bir parametreye göre maksimumu olduğuna göre konvekstir. Kapalı aralık üzerinde konveks fonksiyon en büyük değerini uç noktalarda almaktadır. Buna göre

$$\begin{aligned}\max_{t\in[0,1]}\varphi(t) &= \max\{\varphi(0),\varphi(1)\} \\ &= \max\{\lambda_{\max}(A(0)),\lambda_{\max}(A(1))\}\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

yazılabilir. $A(0)=A_0, A(1)=A_0+A_1+A_2$ dir ve bu matrisler komütatiftir. Teorem 2.1.2'ye göre $A(0), A(1)$ matrisleri için Lyapunov eşitsizliklerinin ortak çözümü vardır ve (2.4.2) ile verilmiş P böyle bir çözümdür. Dolayısıyla

$$\lambda_{max}(A(0))<0, \lambda_{max}(A(1))<0.$$

Buradan (2.4.5)'e göre her $t\in[0,1]$ için $\varphi(t)<0$ dır ve (2.4.4)sağlanmaktadır.

$\square$

Sonuç 2.4.2. $A_0A_1=A_1A_0$ *özellğine sahip* $A(t)=A_0+tA_1+t^2I$, $(t\in[0,1])$ *ailesi verilsin. O zaman* $\{A(t):t\in[0,1]\}$ *ailesinin Hurwitz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul (ve aile için ortak bir* P*' nin varolması için gerekli ve yeterli koşul)* A_0 *ve* A_0+A_1+I*'nın Hurwitz kararlı olmasıdır.*

Şimdi A_0, A_1, A_2 matrislerinin komütatif olmadığı (2.4.1) ailesini ele alalım. Aşağıdaki teorem kolayca kanıtlanabilir.

Teorem 2.4.3. $\{A(t):t\in[0,1]\}$ *(2.4.1) ailesi verilsin.* A_0 *ve* $A_0+A_1+A_2$ *nın Hurwitz kararlı ve* $\{A_0, A_0+A_1+A_2\}$ *çifti için Lyapunov eşitsizliklerinin ortak bir* $P>0$ *çözümünün var olduğunu ve ortak* P*'nin (2.4.3)'ü sağladığını varsayalım. O zaman* $\mathcal{A}=\{A(t):t\in[0,1]\}$ *Hurwiztz kararlıdır ve* $P>0$ *matrisi* $\mathcal{A}$ *ailesi için Lyapunov eşitsizliklerinin ortak bir çözümüdür.*

Örnek 2.4.4.

$$A_0=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ -5 & 0 & -5\end{bmatrix}, A_1=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

matrislerini alalım. Bu matrisler komütatiftir. Gerçekten

$$A_0A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \end{bmatrix}, A_1A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

A_0 *matrisinin özdeğerleri* $-2, -3+i, -3-i$,

$$A_0 + A_1 + I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri $-5, -4+i, -4-i$*' dir ve bu matrisler Hurwitz kararlıdır (burada i sanal birimdir:* $i^2 = -1$*). Sonuç 2.4.2'den dolayı* $\{A(t) : t \in [0,1]\}$ *ailesi Hurwitz kararlıdır. Bunun yanı sıra bu aile için Lyapunov eşitsizliklerinin ortak* $P > 0$ *çözümü vardır. Bu* $P > 0$ *matrisi*

$$P = \begin{bmatrix} 5.2430 & 0 & 3.3171 \\ 0 & 6.2369 & 0 \\ 3.3171 & 0 & 5.7674 \end{bmatrix}$$

gibi seçilebilir. Dolayısıyla, bu $P > 0$ *matrisi* $A(t) = A_0 + tA_1 + t^2 I$ *olmak üzere*

$$[A(t)]^T P + P[A(t)] < 0$$

eşitsizliklerinin her $t \in [0,1]$ *için sağlanmaktadır.*

3 BİR MATRİS POLİTOPU İÇİN SEKTÖR KARARLILIK

Bu bölümde bir matris politopu için gürbüz kararlılık problemi ele alındı. Kararlılık bölgesi kompleks düzlemde bir sol sektördür. Kararlılık için bir gerek ve yeter koşul elde edildi. Nümerik çözümler düşünüldü. Bu çözümler bir çok değişkenli polinomun Bernstein açılımına ve multilineer dönüşümün görüntü kümesinin hesaplanmasına dayanmaktadır.

3.1 Sektör Kararlılık İçin Gerek ve Yeter Koşul

$A_l \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$ gerçel matrisleri için bu matrislerin tüm gerçel konveks kombinasyonların kümesini

$$\mathbb{A} = conv\left\{A_1, A_2, \ldots, A_k\right\} \tag{3.1.1}$$

konveks zarfı (convex hull) olarak tanımlayalım. Bu kümeye matrisler politopu denir.

$a > 0, b > 0$ için $\mathbb{C}$ kompleks düzlemin aşagıdaki Λ ve $\bar{\Lambda}$ alt kümelerini tanımlayalım.

$$\Lambda = \left\{t(-a + jb) : t \geq 0\right\}, \bar{\Lambda} = \left\{t(-a - jb) : t \geq 0\right\} \tag{3.1.2}$$

Sol yarı düzlemde sınırı $\Lambda \cup \bar{\Lambda}$ olan $\Omega = \Omega\left(a, b\right)$ açık kümesi bir sektördür.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$'nin tüm özdeğerleri Ω'da ise A'ya Ω-kararlıdır denir. $\mathbb{A}$ ailesindeki tüm matrisler Ω-kararlı ise $\mathbb{A}$ ailesine Ω-kararlıdır denir.

[29]'da I birim matris olmak üzere bir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisinin $\Omega = \Omega\left(1, \delta\right)$ (yani $a = 1, b = \delta$) kararlı olması için gerek ve yeter koşul $\lambda \to \det[\lambda^2 I - 2\delta A\lambda + \left(\delta^2 + 1\right) A^2]$ polinomunun Hurwitz kararlı olması gerektiği kanıtlanmıştır.

$Im(z)$

$45°$

$Re(z)$

Şekil 3.1: $\frac{\pi}{4}$ sektör

[24]'de A matrisi $\Omega = \Omega(1,1)$ kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} A^T P + PA &< 0 \\ (A^2)^T P + PA^2 &> 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde simetrik pozitif tanımlı $P > 0$ matrisinin bulunması olduğu gösterilmiştir. $\mathbb{A}$ politopunun Hurwitz kararlılığı [30, 31]'de ele alınmıştır.

Şimdi sektör kararlılık için koşullar vereceğiz.
$x, y \in \mathbb{C}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vektörleri için skaler çarpım

$$\langle x, y \rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \ldots + x_n\bar{y}_n$$

olarak tanımlanmaktadır. Aşağıdaki teorem [30]'da verilmiştir.

Teorem 3.1.1. *([30]) $\Lambda \subset \mathbb{C}$ kapalı , konveks, $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ konveks kompakt olsun. $\sigma(\mathbb{A})$ 'nin , $\mathbb{A}$'nın spekturumu (tüm özdeğerlerinin kümesi) olduğunu varsayalım. $\partial\Lambda$, ile Λ 'nın sınırını ve $\mathbb{E}$ ile $\mathbb{A}$ 'nın uç noktaların kümesini gösterelim. O zaman $\sigma(\mathbb{A}) \cap \Lambda = \emptyset$ olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki 1) ve 2) önermelerinin sağlanmasıdır.*

1) Kompleks düzlemde Λ_0 , Λ nın iç noktalar kümesini göstermek üzere

$$\sigma(A) \cap \Lambda_0 = \emptyset$$

olacak şekilde en az bir $A \in \mathbb{A}$ matrisi vardır.

2) Sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{C}^n$ vektörü için

$$\inf_{\lambda \in \partial\Lambda} Re \langle \lambda x, y \rangle > \sup_{A \in \mathbb{E}} Re \langle Ax, y \rangle \tag{3.1.3}$$

olacak şekilde $y = y(x) \in \mathbb{C}^n$ vardır.

Aşağıda, Teorem 3.1.1'de 1) koşulunun fazla olduğunu gösteren bir teorem vereceğiz.

Teorem 3.1.2. $\mathbb{A}$ *ve* Λ *Teorem 3.1.1' de tanımlandığı gibi olsun. O halde* $\sigma(\mathbb{A}) \cap \Lambda = \emptyset$ *olması için gerek ve yeterli koşul Teorem 3.1.1' deki 2) koşulunun sağlanmasıdır.*

Kanıt. $\Rightarrow$) : $x \neq 0$, $x \in \mathbb{C}^n$ için $B(x) \subset \mathbb{C}^n$ kümesini aşağıdaki şekilde tanımlayalım :

$$B(x) = \{Ax - \lambda x : A \in \mathbb{A}, \lambda \in \Lambda\}$$

O zaman

$$\sigma(\mathbb{A}) \cap \Lambda = \emptyset \Leftrightarrow 0 \notin B(x) \quad , \forall x \neq 0. \tag{3.1.4}$$

$B(x)$ kümesi konveks ve kapalıdır. Konveks kümelerin ayırma teoremiyle

$$\sup_{z \in B(x)} Re \langle z, y \rangle < Re \langle 0, y \rangle$$

yada

$$\sup_{A \in \mathbb{A}} Re \langle Ax, y \rangle - \inf_{\lambda \in \Lambda} \langle \lambda x, y \rangle < 0 \tag{3.1.5}$$

olacak şekilde $y = y(x) \in \mathbb{C}^n$ vardır. Lineerlikten dolayı

$$\sup_{A \in \mathbb{A}} Re \langle Ax, y \rangle = \sup_{A \in \mathbb{E}} Re \langle Ax, y \rangle , \qquad \inf_{\lambda \in \Lambda} \langle \lambda x, y \rangle = \inf_{\lambda \in \partial\Lambda} \langle \lambda x, y \rangle$$

ve (3.1.5)' den (3.1.3) eşitsizliği elde edilir.

$\Longleftarrow$) (3.1.3) 'ün sağlandığını varsayalım. Tersine, $\sigma(\mathbb{A}) \cap \Lambda \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. O halde $A_* x_* = \lambda_* x_*$ olacak şekilde $A_* \in \mathbb{A}$, $\lambda_* \in \Lambda$ ve $x_* \in \mathbb{C}^n$

$x \neq 0$ vardır.

(3.1.3)'den aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz.

$Re\left\langle \lambda_* x_*, y_* \right\rangle \geq \inf\limits_{\lambda \in \Lambda} Re\left\langle \lambda x_*, y_* \right\rangle = \inf\limits_{\lambda \in \partial\Lambda} Re\left\langle \lambda x_*, y_* \right\rangle > Re\left\langle A_* x_*, y_* \right\rangle = Re\left\langle \lambda_* x_*, y_* \right\rangle$

Varılan bu çelişkiden dolayı

$$\sigma(\mathbb{A}) \cap \Lambda = \emptyset$$

□

$\Omega-$kararlılık için Teorem 3.1.2'nin uygulaması aşağıda veriliyor.

Teorem 3.1.3. *$\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ konveks kompakt küme olsun. Λ, (3.1.2)'de verilmek üzere, sınırı $\Lambda \cup \bar{\Lambda}$ olan Ω sektörü verilsin. $\mathbb{A}$'nın en az bir Ω-kararlı elemanı olsun. O halde $\mathbb{A}$'nın Ω- kararlı olması için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{C}^n$ için*

$$\sup_{A \in \mathbb{E}} Re\left\langle Ax, y \right\rangle < 0 \tag{3.1.6}$$

$$aRe\left\langle x, y \right\rangle + bIm\left\langle x, y \right\rangle < 0$$

olacak şekilde $y \in \mathbb{C}^n$'nin varlığıdır.

Kanıt. $\mathbb{A}$ ailesi gerçel matrisler ailesi olduğu için onun özdeğerleri gerçel eksene göre simetriktirler. Buna göre $\sigma(\mathbb{A}) \cap \Lambda = \emptyset$ ise $\sigma(\mathbb{A}) \cap \bar{\Lambda} = \emptyset$ dir. Diğer bir deyişle $\mathbb{A}$'nın en az bir Ω-kararlı bir elemanı olduğu için süreklilikten $\mathbb{A}$ ailesinin Ω-kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\sigma(\mathbb{A}) \cap \Lambda = \emptyset \tag{3.1.7}$$

dir. Λ kümesi konveks ve kapalıdır. Buradan (3.1.7) için Teorem 3.1.2 uygulanabilir. Bu teoremi uygularsak

$$\begin{aligned}
\inf_{\lambda \in \partial\Lambda} Re\left\langle \lambda x, y \right\rangle &= \inf_{\lambda \in \partial\Lambda} Re\lambda\left\langle x, y \right\rangle \\
&= \inf_{t \geq 0} Ret(-a+ib)\left\langle x, y \right\rangle \\
&= \inf_{t \geq 0} t[-aRe\left\langle x, y \right\rangle - bIm\left\langle x, y \right\rangle].
\end{aligned}$$

elde ederiz. (3.1.3)'den dolayı bu infimum sonlu olmak zorundadır. Eğer

$$-aRe\langle x,y\rangle - bIm\langle x,y\rangle < 0 \tag{3.1.8}$$

ise bu infimum -∞ 'a eşit olur. Dolayısıyla

$$-aRe\langle x,y\rangle - bIm\langle x,y\rangle \geq 0 \tag{3.1.9}$$

dır. (3.1.9)'dan infimum sıfıra eşittir ve (3.1.3)'den (3.1.6)'yı elde ederiz. Şimdi (3.1.10)'daki "$\geq$" işaretinin yerine "$>$" yazılabileceğini gösterelim.

(3.1.6) ve (3.1.10)'un sağlandığını varsayalım . Yeterince küçük $\epsilon > 0$ için $\tilde{y} = y - \varepsilon x$ vektörünü düsünelim. Süreklilikten

$$\sup_{A\in\mathcal{E}} Re\langle Ax,\tilde{y}\rangle < 0 \tag{3.1.10}$$

dir. Diğer bir deyişle

$$\begin{aligned} aRe\langle x,\tilde{y}\rangle + bIm\langle x,\tilde{y}\rangle &= aRe\langle x,y-\varepsilon x\rangle + bIm\langle x,y-\varepsilon x\rangle \\ &= aRe\langle x,y\rangle + bIm\langle x,y\rangle - a\varepsilon\|x\|^2 < 0 \end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlikte $a > 0$ olduğu dikkate alınmaktadır.
Kanıt tamamlanmıştır. $\square$

(3.1.7)'nin yerine $\sigma(\mathbb{A})\cap\bar{\Lambda} = \emptyset$ kullanabileceğimizi aşağıdaki teoremle elde ediyoruz.

Teorem 3.1.4. $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ *konveks kompakt küme olsun. Sınırı* $\Lambda\cup\bar{\Lambda}$ *(3.1.2) olan* Ω *sektörü verilsin.* $\mathbb{A}$ *'nın en az bir* Ω *- kararlı elemanının var olduğunu varsayalım. O zaman* $\mathbb{A}$ *ailesinin* Ω*- kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul sıfırdan farklı her* $x \in \mathbb{C}^n$ *için*

$$\sup_{A\in\mathbb{E}} Re\langle Ax,y\rangle < 0$$

$$aRe\langle x,y\rangle - bIm\langle x,y\rangle < 0$$

olacak şekilde bir $y \in \mathbb{C}^n$ *vektörünün varlığıdır.*

Örnek 3.1.5. *Ω, $\frac{\pi}{4}$-sol sektör (a=1,b=1) olsun.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -10 & -9 & -5 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\mathbb{A} = conv\{A_1, A_2\}$ olsun.

$\mathbb{A}$'nın $\frac{\pi}{4}$-sektör kararlılığını Teorem 3.1.3'ü kullanarak göstereceğiz.

$x = ([x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}] + j[x_{I_1}, x_{I_2}, x_{I_3}])^T$, $y = ([y_{r_1}, y_{r_2}, y_{r_3}] + j[y_{I_1}, y_{I_2}, y_{I_3}])^T$. *alalım. O halde*

$$\begin{aligned} \langle A_1x, y\rangle &= (-xr_1 + xr_2)yr_1 + (-2xr_2 + xr_3)yr_2 \\ &+(-10xr_1 - 9xr_2 - 5xr_3)yr_3 + (xj_1 - xj_2)yj_1 \\ &+(2xj_2 - xj_3)yj_2 + (10xj_1 + 9xj_2 + 5xj_3)yj_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle A_2x, y\rangle &= (-3xr_1 + xr_2)yr_1 + (2xr_1 + xr_3)yr_2 \\ &+(-4xr_1 - 7xr_2 - 5xr_3)yr_3 + (3xj_1 - xj_2)yj_1 \\ &+(-2xj_1 - xj_3)yj_2 + (4xj_1 + 7xj_2 + 5xj_3)yj_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Re\,\langle x, y\rangle + Im\,\langle x, y\rangle &= (xr_1 + xj_1)yr_1 + (xr_2 + xj_2)yr_2 \\ &+(xr_3 + xj_3)yr_3 + (xj_1 - xr_1)yj_1 \\ &+(xj_2 - xr_2)yj_2 + (xj_3 - xr_3)yj_3 \end{aligned}$$

Aşağıda keyfi $x \in \mathbb{C}^3$; $\|x\| = 1$ için uygun $y \in \mathbb{C}^3$'nin seçimini göstereceğiz:

1. Eğer $x = ([1, xr_2, xr_3] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve $0 < xr_2 < 1$, $0 < xr_3 < 1$, $0 < xj_1 < 1$, $0 < xj_2 < 1$, $0 < xj_3 < 1$ ise
   $y = ([-3, -5, 2] + i\,[5, 2, -1])^T$

   $\langle A_1x, y\rangle = -17$

   $\langle A_2x, y\rangle = -2$

   $Re < x, y > +Im < x, y >= -2$.

2. Eğer $x = ([xr_1, 1, xr_3] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve $0 < xr_1 < 1$, $0 < xr_3 < 1$, $0 < xj_1 < 1$, $0 < xj_2 < 1$, $0 < xj_3 < 1$ ise
$y = ([-5, -5, 2] + i\,[5, 2, -1])^T$

$\langle A_1 x, y\rangle = -13$

$\langle A_2 x, y\rangle = -12$

$Re < x, y > +Im < x, y >= -3$

3. Eğer $x = ([xr_1, xr_2, 1] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve $0 < xr_1 < 0.25$, $0 < xr_2 < 0.25$, $0 < xj_1 < 0.25$, $0 < xj_2 < 0.25$, $0 < xj_3 < 0.25$ ise
$y = ([-1.5, -9.5, -0.001] + i\,[-0.55, 0.02, -0.0001])^T$

$\langle A_1 x, y\rangle = -4.592975$

$\langle A_2 x, y\rangle = -9.357675$

$Re < x, y > +Im < x, y >= -0.0009$.

Eğer $x = ([xr_1, xr_2, 1] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve $0.25 < xr_1 < 0.5$, $0.25 < xr_2 < 0.5$, $0.25 < xj_1 < 0.5$, $0.25 < xj_2 < 0.5$, $0.25 < xj_3 < 0.5$ ise
$y = ([-1.75, -3.75, -0.001] + i\,[-0.025, -0.001, -0.1])^T$

$\langle A_1 x, y\rangle = -5.58575$

$\langle A_2 x, y\rangle = -5.15400$

$Re < x, y > +Im < x, y >= -2.67625$.

Eğer $x = ([xr_1, xr_2, 1] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve $0.5 < xr_1 < 0.75$, $0.5 < xr_2 < 0.75$, $0.5 < xj_1 < 0.75$, $0.5 < xj_2 < 0.75$, $0.5 < xj_3 < 0.75$ ise
$y = ([-1.75, -3.5, -0.002] + i\,[-0.05, 0.001, -0.15])^T$

$\langle A_1 x, y\rangle = -0.01100$

$\langle A_2 x, y\rangle = -6.4805$

$Re < x, y > +Im < x, y >= -5.1780$.

Eğer $x = ([xr_1, xr_2, 1] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve $0.75 < xr_1 < 1$, $0.75 < xr_2 < 1$, $0.75 < xj_1 < 1$, $0.75 < xj_2 < 1$, $0.75 < xj_3 < 1$ ise

$y = ([-1.75, -2.5, -0.002] + i\,[-0.05, 0.001, -0.15])^T$

$\langle A_1 x, y\rangle = -0.15125$

$\langle A_2 x, y\rangle = -5.41125$

$Re < x, y > + Im < x, y >= -6.34100.$

4. Eğer $x = ([xr_1, xr_2, xr_3] + i\,[1, xj_2, xj_3])^T$ ve $0 < xr_1 < 1$, $0 < xr_2 < 1$, $0 < xr_3 < 1$, $0 < xj_2 < 1$, $0 < xj_3 < 1$
   ise $y = ([-2, -2, -0.03] + i\,[-10, -2.5, -0.1])^T$

   $\langle A_1 x, y\rangle = -0.33$

   $\langle A_2 x, y\rangle = -11.98$

   $Re < x, y > + Im < x, y >= -3.43$.

5. Eğer $x = ([xr_1, xr_2, xr_3] + i\,[xj_1, 1, xj_3])^T$ ve $0 < xr_1 < 1$, $0 < xr_2 < 1$, $0 < xr_3 < 1$, $0 < xj_1 < 1$, $0 < xj_3 < 1$ ise
   $y = ([-0.2, -0.2, -0.03] + i\,[-0.1, -0.25, -0.1])^T$

   $\langle A_1 x, y\rangle = -0.33$

   $\langle A_2 x, y\rangle = -0.27$

   $Re < x, y > + Im < x, y >= -0.33.$

6. Eğer $x = ([xr_1, xr_2, xr_3] + i\,[xj_1, xj_2, 1])^T$ ve $0 < xr_1 < 1$, $0 < xr_2 < 1$, $0 < xr_3 < 1$, $0 < xj_1 < 1$, $0 < xj_2 < 1$ ise
   $y = ([-1, -0.2, -0.03] + i\,[0, -0.25, -1])^T$

   $\langle A_1 x, y\rangle = -3.45$

   $\langle A_2 x, y\rangle = -2.03$

   $Re < x, y > + Im < x, y >= -0.01$.

7. Eğer $x = ([1, xr_2, xr_3] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve $-1 < xr_2 < -0.5$, $-1 < xr_3 < -0.5$, $-1 < xj_1 < -0.5$, $-1 < xj_2 < -0.5$, $-1 < xj_3 < -0.5$
   ise $y = ([2, -0.1, 2] + i\,[0.1, 1.5, 1.5])^T$

$\langle A_1x, y\rangle = -14.85$

$\langle A_2x, y\rangle = -1.95$

$Re < x, y > +Im < x, y >= -0.25$

Eğer $x = ([1, xr_2, xr_3] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve $-0.5 < xr_2 < 0$,
$-0.5 < xr_3 < 0$, $-0.5 < xj_1 < 0$, $-0.5 < xj_2 < 0$, $-0.5 < xj_3 < 0$ ise
$y = ([2, -0.1, 2] + i\,[3, 1.5, 1.5])^T$

$\langle A_1x, y\rangle = -9.05$

$\langle A_2x, y\rangle = -3.15$

$Re < x, y > +Im < x, y >= -0.20$

8. Eğer $x = ([xr_1, 1, xr_3] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve $-1 < xr_1 < -0.5$,
$-1 < xr_3 < -0.5$, $-1 < xj_1 < -0.5$, $-1 < xj_2 < -0.5$, $-1 < xj_3 < -0.5$ ise
$y = ([-0.5, -0.001, 0.35] + i\,[-0.01, 4.5, 1.5])^T$

$\langle A_1x, y\rangle = -19.147$

$\langle A_2x, y\rangle = -4.9730$

$Re < x, y > +Im < x, y >= -5.5255.$

Eğer $x = ([xr_1, 1, xr_3] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve $-0.5 < xr_1 < 0$,
$-0.5 < xr_3 < 0$, $-0.5 < xj_1 < 0$, $-0.5 < xj_2 < 0$, $-0.5 < xj_3 < 0$ ise
$y = ([-0.25, -0.01, 0.35] + i\,[-0.01, 2.75, 1.5])^T$

$\langle A_1x, y\rangle = -0.875$

$\langle A_2x, y\rangle = -1.485$

$Re < x, y > +Im < x, y >= -1.935.$

9. Eğer $x = ([xr_1, xr_2, 1] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve
$-1 < xr_1 < 0$, $-1 < xr_2 < 0$,
$-1 < xj_1 < 0$, $-1 < xj_2 < 0$, $-1 < xj_3 < 0$ ise
$y = ([-1.5, -2, 0.01] + i\,[1, -0.01, 10])^T$

$\langle A_1 x, y\rangle = -1.350$

$\langle A_2 x, y\rangle = -0.250$

$Re < x, y > +Im < x, y >= -2.99$.

10. Eğer $x = ([xr_1, xr_2, xr_3] + i\,[1, xj_2, xj_3])^T$ ve $-1 < xr_1 < 0$, $-1 < xr_2 < 0$, $-1 < xr_3 < 0$, $-1 < xj_2 < 0$, $-1 < xj_3 < 0$ ise
$y = ([-0.1, -0.05, -0.05] + i\,[-0.23, -0.05, 0])^T$

    $\langle A_1 x, y\rangle = -0.23$

    $\langle A_2 x, y\rangle = -0.59$

    $Re < x, y > +Im < x, y >= -0.13$.

11. Eğer $x = ([xr_1, xr_2, xr_3] + i\,[xj_1, 1, xj_3])^T$ ve $-1 < xr_1 < -0.5$, $-1 < xr_2 < -0.5$, $-1 < xr_3 < -0.5$, $-1 < xj_1 < -0.5$, $-1 < xj_3 < -0.5$ ise
$y = ([-0.05, -0.05, -0.05] + i\,[-0.23, -0.45, -0.1])^T$

    $\langle A_1 x, y\rangle = -0.915$

    $\langle A_2 x, y\rangle = -0.605$

    $Re < x, y > +Im < x, y >= -0.385$.

    Eğer $x = ([xr_1, xr_2, xr_3] + i\,[xj_1, 1, xj_3])^T$ ve $-0.5 < xr_1 < 0$, $-0.5 < xr_2 < 0$, $-0.5 < xr_3 < 0$, $-0.5 < xj_1 < 0$, $-0.5 < xj_3 < 0$ ise
$y = ([-0.1, -0.25, -0.01] + i\,[-0.1, -0.25, -0.1])^T$

    $\langle A_1 x, y\rangle = -0.525$

    $\langle A_2 x, y\rangle = -0.180$

    $Re < x, y > +Im < x, y >= -3.45$

12. Eğer $x = ([xr_1, xr_2, xr_3] + i\,[xj_1, xj_2, 1])^T$ ve $-1 < xr_1 < -0.75$, $-1 < xr_2 < -0.75$, $-1 < xr_3 < -0.75$, $-1 < xj_1 < -0.75$, $-1 < xj_2 < -0.75$ ise
$y = ([-0.15, 0.85, -0.9] + i\,[-0.001, -0.015, -0.01])^T$

$\langle A_1 x, y\rangle = -15.4675$

$\langle A_2 x, y\rangle = -12.8605$

$Re < x, y > +Im < x, y >= -0.34625$.

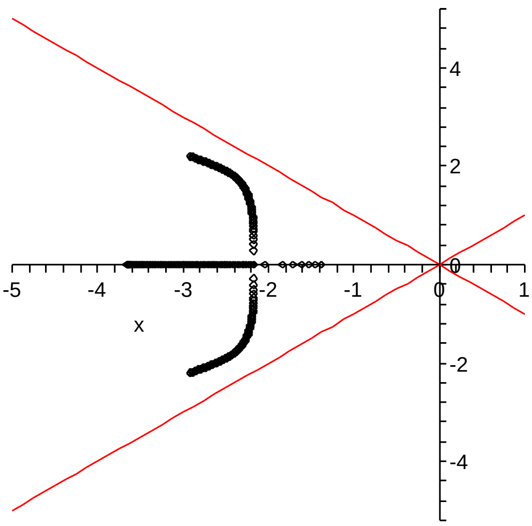
Eğer $x = ([xr_1, xr_2, xr_3] + i\,[xj_1, xj_2, 1])^T$ ve $-0.75 < xr_1 < 0$, $-0.75 < xr_2 < 0$, $-0.75 < xr_3 < 0$, $-0.75 < xj_1 < 1$, $-0.75 < xj_2 < 0$ ise

$y = ([0, 0, -2] + i\,[0.12, 0.3, -0.001])^T$

$\langle A_1 x, y\rangle = -0.305$

$\langle A_2 x, y\rangle = -0.02675$

$Re < x, y > +Im < x, y >= -1.2862$



Şekil 3.2: Örnek 3.1.5 matrisler ailesinin köklerinin dağılımı

Örnek 3.1.6. Ω, $\frac{\pi}{4}$*-sol sektör (a=1,b=1) olsun.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -5 & -3 & -5 \end{bmatrix} A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\mathbb{A} = conv\{A_1, A_2\}$ *olsun.*

$\mathbb{A}$*'nın* $\frac{\pi}{4}$*-sektör kararlılığını Teorem 3.1.4'ü kullanarak göstereceğiz.*

$x = ([x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}] + j[x_{I_1}, x_{I_2}, x_{I_3}])^T$, $y = ([y_{r_1}, y_{r_2}, y_{r_3}] + j[y_{I_1}, y_{I_2}, y_{I_3}])^T$. *alalım. O halde*

$$\begin{aligned}
\langle A_1x, y\rangle &= (-xr_1 + xr_2 + xr_3)yr_1 + (-2xr_2 + xr_3)yr_2 \\
&\quad +(-5xr_1 - 3xr_2 - 5xr_3)yr_3 + (xj_1 - xj_2 - xj_3)yj_1 \\
&\quad +(2xj_2 - xj_3)yj_2 + (5xj_1 + 3xj_2 + 5xj_3)yj_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle A_2x, y\rangle &= (-3xr_1 + xr_2 + xr_3)yr_1 + (2xr_1 + xr_3)yr_2 \\
&\quad +(-4xr_1 - 3xr_2 - 5xr_3)yr_3 + (3xj_1 - xj_2 - xj_3)yj_1 \\
&\quad +(-2xj_1 - xj_3)yj_2 + (4xj_1 + 3xj_2 + 5xj_3)yj_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Re\,\langle x, y\rangle - Im\,\langle x, y\rangle &= (xr_1 - xj_1)yr_1 + (xr_2 - xj_2)yr_2 \\
&\quad +(xr_3 - xj_3)yr_3 + (xr_1 + xj_1)yj_1 \\
&\quad +(xr_2 + xj_2)yj_2 + (xr_3 + xj_3)yj_3
\end{aligned}$$

Aşağıda keyfi $x \in \mathbb{C}^3$; $\|x\| = 1$ için uygun $y \in \mathbb{C}^3$'nin seçimini göstereceğiz:

1. Eğer $x = ([1, xr_2, xr_3] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve $0 < xr_2 < 1$, $0 < xr_3 < 1$, $0 < xj_1 < 1$, $0 < xj_2 < 1$, $0 < xj_3 < 1$ ise

   $y = ([-4, -5, 2.5] + i\,[-5, 2, -1])^T$

   $\langle A_1x, y\rangle = -2.5$

   $\langle A_2x, y\rangle = -6.0$

   $Re < x, y > -Im < x, y >= -0.5$.

2. Eğer $x = ([xr_1, 1, xr_3] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve $0 < xr_1 < 1$, $0 < xr_3 < 1$, $0 < xj_1 < 1$, $0 < xj_2 < 1$, $0 < xj_3 < 1$ ise
$y = ([-1, -5, 4] + i\,[0, -3, -1])^T$

$\langle A_1 x, y\rangle = -3$

$\langle A_2 x, y\rangle = -11$

$Re < x, y > -Im < x, y >= -2$

3. Eğer $x = ([xr_1, xr_2, 1] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve $0 < xr_1 < 1$, $0 < xr_2 < 1$, $0 < xj_1 < 1$, $0 < xj_2 < 1$, $0 < xj_3 < 1$ ise
$y = ([-1, 1, 2] + i\,[0.05, 0.1, -5])^T$

$\langle A_1 x, y\rangle = -10$

$\langle A_2 x, y\rangle = -10$

$Re < x, y > -Im < x, y >= -0.85$.

4. Eğer $x = ([xr_1, xr_2, xr_3] + i\,[1, xj_2, xj_3])^T$ ve $0 < xr_1 < 1$, $0 < xr_2 < 1$, $0 < xr_3 < 1$, $0 < xj_2 < 1$, $0 < xj_3 < 1$
ise $y = ([-0.1, -0.25, -0.01] + i\,[-0.15, -0.25, -0.1])^T$

$\langle A_1 x, y\rangle = --0.07$

$\langle A_2 x, y\rangle = -0.35$

$Re < x, y > -Im < x, y >= -0.05$.

5. Eğer $x = ([xr_1, xr_2, xr_3] + i\,[xj_1, 1, xj_3])^T$ ve $0 < xr_1 < 1$, $0 < xr_2 < 1$, $0 < xr_3 < 1$, $0 < xj_1 < 1$, $0 < xj_3 < 1$ ise
$y = ([-0.1, -0.1, -0.01] + i\,[-0.15, -0.25, -0.1])^T$

$\langle A_1 x, y\rangle = --0.37$

$\langle A_2 x, y\rangle = -0.01$

$Re < x, y > -Im < x, y >= -0.15.$

6. Eğer $x = ([xr_1, xr_2, xr_3] + i\,[xj_1, xj_2, 1])^T$ ve $0 < xr_1 < 1$, $0 < xr_2 < 1$, $0 < xr_3 < 1$, $0 < xj_1 < 1$, $0 < xj_2 < 1$ ise

   $y = ([-1, -0.1, -0.1] + i\,[0, -0.25, -2])^T$

   $\langle A_1 x, y\rangle = -8.25$

   $\langle A_2 x, y\rangle = -6.55$

   $Re < x, y > -Im < x, y >= -0.9$.

7. Eğer $x = ([1, xr_2, xr_3] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve $-1 < xr_2 < -0.5$, $-1 < xr_3 < -0.5$,$-1 < xj_1 < -0.5$,$-1 < xj_2 < -0.5$,$-1 < xj_3 < -0.5$ ise $y = ([0, -0.1, -0.3] + i\,[-1, 1, 1])^T$

   $\langle A_1 x, y\rangle = -6.7$

   $\langle A_2 x, y\rangle = -2.4$

   $Re < x, y > -Im < x, y >= -2$

   Eğer $x = ([1, xr_2, xr_3] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve $-0.5 < xr_2 < 0$, $-0.5 < xr_3 < 0$, $-0.5 < xj_1 < 0$, $-0.5 < xj_2 < 0$, $-0.5 < xj_3 < 0$ ise

   $y = ([0, -0.1, -0.3] + i\,[-1, -0.1, 1])^T$

   $\langle A_1 x, y\rangle = -0.35$

   $\langle A_2 x, y\rangle = -0.15$

   $Re < x, y > -Im < x, y >= -0.40$.

8. Eğer $x = ([xr_1, 1, xr_3] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve $-1 < xr_1 < -0.5$, $-1 < xr_3 < -0.5$, $-1 < xj_1 < -0.5$, $-1 < xj_2 < -0.5$, $-1 < xj_3 < -0.5$ ise

   $y = ([-0.1, 0.1, 0] + i\,[1, 3, 1])^T$

   $\langle A_1 x, y\rangle = -7.85$

   $\langle A_2 x, y\rangle = -2.35$

   $Re < x, y > -Im < x, y >= -0.35.$

Eğer $x = ([xr_1, 1, xr_3] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve $-0.5 < xr_1 < 0$,
$-0.5 < xr_3 < 0$, $-0.5 < xj_1 < 0$, $-0.5 < xj_2 < 0$, $-0.5 < xj_3 < 0$ ise
$y = ([-0.1, 0.1, 0] + i\,[1, -1, 1])^T$

$\langle A_1x, y\rangle = -0.3$

$\langle A_2x, y\rangle = -0.1$

$Re < x, y > -Im < x, y >= -0.35$.

9. Eğer $x = ([xr_1, xr_2, 1] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve
$-1 < xr_1 < -0.5$, $-1 < xr_2 < -0.5$,
$-1 < xj_1 < -0.5$, $-1 < xj_2 < -0.5$, $-1 < xj_3 < -0.5$ ise
$y = ([-2, -2, 0] + i\,[2, -0.01, 1])^T$

$\langle A_1x, y\rangle = -11.495$

$\langle A_2x, y\rangle = -10.015$

$Re < x, y > -Im < x, y >= -0.485$.

Eğer $x = ([xr_1, xr_2, 1] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve
$-0.5 < xr_1 < -0.25$, $-0.5 < xr_2 < -0.25$,$-0.5 < xj_3 < -0.25$ ise
$-0.5 < xj_1 < -0.25$, $-0.5 < xj_2 < -0.25$,
$y = ([-1, -4, -1] + i\,[2, 3, 2])^T$

$\langle A_1x, y\rangle = -10.75$

$\langle A_2x, y\rangle = -4.25$

$Re < x, y > -Im < x, y >= -2$.

Eğer $x = ([xr_1, xr_2, xr_3] + i\,[xj_1, xj_2, xj_3])^T$ ve
$-0.25 < xr_1 < 0$, $-0.25 < xr_2 < 0$,
$-0.25 < xj_1 < 0$, $-0.25 < xj_2 < 0$, $-0.25 < xj_3 < 0$ ise
$y = ([-1.5, -7.5, -0.9] + i\,[3, 4.8, 0])^T$

$\langle A_1x, y\rangle = -2.8$

$\langle A_2x, y\rangle = -0.47$

$Re < x, y > -Im < x, y >= -0.025$.

10. Eğer $x = ([xr_1, xr_2, xr_3] + i\,[1, xj_2, xj_3])^T$ ve $-1 < xr_1 < 0$, $-1 < xr_2 < 0$, $-1 < xr_3 < 0$, $-1 < xj_2 < 0$, $-1 < xj_3 < 0$ ise
    $y = ([0.5, 0, 0] + i\,[-1, 0.1, 0])^T$

    $\langle A_1 x, y\rangle = -0.5$

    $\langle A_2 x, y\rangle = -1.7$

    $Re < x, y > -Im < x, y >= -1$.

11. Eğer $x = ([xr_1, xr_2, xr_3] + i\,[xj_1, 1, xj_3])^T$ ve $-1 < xr_1 < 0$, $-1 < xr_2 < 0$, $-1 < xr_3 < 0$, $-1 < xj_1 < 0$, $-1 < xj_3 < 0$ ise
    $y = ([0.5, 0, 0] + i\,[0.1, -1, 0])^T$

    $\langle A_1 x, y\rangle = -1.1$

    $\langle A_2 x, y\rangle = -0.1$

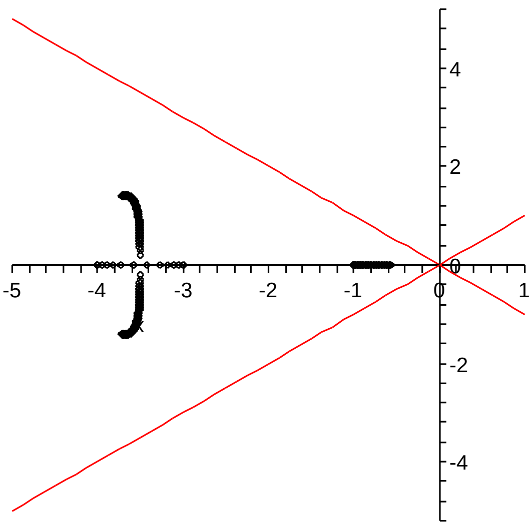
    $Re < x, y > -Im < x, y >= -1$.

12. Eğer $x = ([xr_1, xr_2, xr_3] + i\,[xj_1, xj_2, 1])^T$ ve $-1 < xr_1 < 0$, $-1 < xr_2 < 0$, $-1 < xr_3 < 0$, $-1 < xj_1 < 0$, $-1 < xj_2 < 0$ ise
    $y = ([0, 0.1, 0.01] + i\,[1.5, 1.5, -1])^T$

    $\langle A_1 x, y\rangle = -2.72$

    $\langle A_2 x, y\rangle = -0.97$

    $Re < x, y > -Im < x, y >= -0.02$.



Şekil 3.3: Örnek 3.1.6 matrisler ailesinin köklerinin dağılımı

3.2 Sektör Kararlılık ve Tersinirlik

Bu bölümde A_1 sektör kararlı bir matris olmak üzere $\mathbb{A} = conv\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ ailesinin sektör kararlılığının genişletilmiş

$$conv\{A_1, A_2, \ldots, A_k,\ (a-ib)I\}$$

konveks zarfın tersinir olmasına denk olduğunu göstereceğiz.

İlk olarak Teorem 3.1.2'de $\Lambda = \{0\}$ ise aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.1. *$\mathbb{A} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ kompakt konveks küme olsun. O zaman $\mathbb{A}$'nın tersinir olması için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{C}^n$ vektörü için*

$$\sup_{A\in\mathcal{E}} Re\,\langle Ax, y\rangle < 0 \tag{3.2.1}$$

olacak şekilde $y = y(x) \in \mathbb{C}^n$ vektörünün varlığıdır.

$conv\{A_1, A_2, \ldots, A_k, (a-ib)I\}$ kompakt konveks kümesi için (3.2.1) koşulu aşağıdaki koşullara denktir.

$$Re\,\langle A_l x, y\rangle < 0\ (l = 1, 2, \ldots, k) \tag{3.2.2}$$

$$Re\,\langle (a-ib)x,y\rangle < 0 \tag{3.2.3}$$

(3.2.3)'ün sol tarafı $aRe\,\langle x,y\rangle + bIm\,\langle x,y\rangle$'ye eşittir yani (3.2.2), (3.2.3) eşitsizlikleri (3.1.6) eşitsizliğine denktir . Bu aşağıdaki sonucu verir.

Teorem 3.2.2. *$A_l \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$ matrisleri verilsin. A_1 matrisi Ω-kararlı ve $\mathbb{A} = conv\,\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ olsun. O zaman $\mathbb{A}$ ailesinin Ω-kararlı olması için gerek ve yeter koşul $conv\,\{A_1, A_2, \ldots, A_k, (a-ib)I\}$ konveks zarfının tersinir olmasıdır.*

(3.2.1) tersinirlik koşulu

$$conv\{A_1, A_2, \ldots, A_k, (a+ib)I\}$$

politopuna uygulanırsa

$$Re\,\langle A_l x, y\rangle < 0$$
$$Re\,\langle (a+ib)x, y\rangle < 0$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizliğin sol tarafı

$$aRe\,\langle x,y\rangle - bIm\,\langle x,y\rangle$$

dir ve bu ailenin tersinirlik koşulu, sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{C}^n$ vektörü için

$$Re\,\langle A_l x, y\rangle < 0 \;\; (l = 1, 2, \ldots, k)$$
$$aRe\,\langle x,y\rangle - bIm\,\langle x,y\rangle < 0$$

olacak biçimde $y \in \mathbb{C}^n$ vektörünün varlığı olacaktır. Bu koşul ise Teorem 3.1.4' de ifade edilmiş olan eşitsizliklerle aynıdır. Buna göre, aşağıdaki elde edilmektedir.

Teorem 3.2.3. *$A_l \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$ matrisleri verilsin. A_1 matrisi Ω-kararlı ve $\mathbb{A} = conv\,\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ olsun. O zaman $\mathbb{A}$ ailesinin Ω-kararlı olması için gerek ve yeter koşul $conv\,\{A_1, A_2, \ldots, A_k, (a+bj)I\}$ konveks zarfının tersinir olmasıdır.*

Yukarıdaki teoremler (Teorem 3.2.2 ve 3.2.3) gerçel matrisler politopu için geçerlidir. Ancak kompleks matrisler politopu için de benzer teorem verilebilir.

Teorem 3.2.4. *$A_l \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$ kompleks matrisleri verilsin ve A_1 matrisi Ω- kararlı olsun. Bu durumda*

$$\mathbb{A} = conv\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \tag{3.2.4}$$

politopunun Ω- kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul

$$conv\{A_1, A_2, \ldots, A_k, (a - ib)I\} \tag{3.2.5}$$

$$conv\{A_1, A_2, \ldots, A_k, (a + ib)I\} \tag{3.2.6}$$

politoplarının tersinir olmasıdır.

Kanıt. (3.2.5) politopunun tersinir olması Λ kümesi üzerinde bu politopun özdeğerinin olmadığını gösterir. (3.2.6) politopunun tersinir olması ise $\overline{\Lambda}$ üzerinde (3.2.4)'ün özdeğerinin olmadığını ifade etmektedir. A_1 matrisi Ω- kararlı olduğuna göre sıfırı içermeme prensibine göre (3.2.4)'ün tüm özdeğerleri Ω sektöründedir. □

3.3 Nümerik Çözümler Bernstein Açılımı ve Multilineerizasyon

Yukarıda verdiğimiz Teorem 3.2.1'e göre eğer matris politopunda en az bir tane sektör kararlı matris var ise o zaman bu politopun sektör kararlılığı genişletilmiş kompleks politopun tersinir olmasına eşdeğerdir. Tersinirlik ise determinant fonksiyonunun sıfırdan farklı olması demektir. Determinant fonksiyonu bir çok değişkenli polinom olduğu için burada, çok değişkenli polinomların bir kutu üzerinde değer kümesinin hesaplanması algoritmaları kullanılabilmektedir.

$0 \le \lambda_i \le 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $\sum\limits_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$ olmak üzere

$$conv\{A_1, A_2, \ldots, A_k, (a - ib)I\}$$

konveks zarfı

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k + \lambda_{k+1}(a - ib)I$$

gibi tüm konveks kombinasyonların kümesidir.

$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \in \Lambda$, $A \in \mathcal{P}$ olmak üzere aşağıdakiler tanımlansın:

$$\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) : \lambda_1 \in [0,1], \ldots, \lambda_k \in [0,1], \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k \leq 1\} \tag{3.3.1}$$

$$\mathcal{P} = \{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k + (1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_k)(a - ib)I\} \tag{3.3.2}$$

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = \det(A) \tag{3.3.3}$$

Teorem 3.2.2.'ye göre A_1 matrisi Ω-sektör kararlı ise $\mathcal{P}$ ailesinin Ω-sektör kararlı olması için gerek ve yeter koşul $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \in \Lambda$ için

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \neq 0$$

olmasıdır. F fonksiyonu kompleks bir fonksiyon olduğu için f ve g gerçel fonksiyonlar olmak üzere bu fonksiyon

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) + ig(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \tag{3.3.4}$$

şeklinde yazılabilir. O halde $\mathcal{P}$ ailesinin Ω-sektör kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul her $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \in \Lambda$ için

$$h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = f^2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) + g^2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) > 0 \tag{3.3.5}$$

olmasıdır.

Lemma 3.3.1. *(3.3.2) ailesindeki herhangi bir A matrisi A_R ve A_I gerçel matrisler olmak üzere*

$$A = A_R + iA_I$$

biçiminde yazılsın. O zaman (3.3.5)'de tanımlı $h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ fonksiyonu için

$$h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = det(A_R^2 + A_I^2))$$

eşitliği doğrudur.

Kanıt. z kompleks sayısı için $|z|$ modülü, $\overline{z}$ ise eşleniği göstermek üzere $|z|^2 = z\overline{z}$ eşitliğinden

$$|\det A|^2 = \det A\overline{\det A} \tag{3.3.6}$$

yazabiliriz. Bir $f(z)$ polinomsal ifadesi için $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$eşitliğini ve $det(AB) = detAdetB$ eşitliğini kullanırsak (3.3.6)'dan

$$\begin{aligned} h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) &= |\det A|^2 \\ detAdet\overline{A} &= det(A\overline{A}) \\ det(A_R + iA_I)(A_R - iA_I) &= det(A_R^2 + A_I^2) \end{aligned}$$

elde ederiz. □

$h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ fonksiyonu bir çok değişkenli polinomdur. Bir kutu üzerinde çok değişkenli bir polinomun pozitifliği Bernstein açılımıyla kontrol edilebileceği bilinmektedir. Bu algoritmayı kısaca tanımlayalım ([32-34]).

$L = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$ negatif olmayan tam sayıların $m-$lisi ve $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ için

$$x^L = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_m^{im}.$$

olsun. $N = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$ için

$$L \leq N \Longleftrightarrow 0 \leq i_k \leq n_k \;\; (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Bir $m-$değişkenli $p(x)$ polinomu

$$p(x) = \sum_{L \leq N} a_L x^L, (x \in \mathbb{R}^m). \tag{3.3.7}$$

gibi tanımlanabilir. Burada N'ye $p(x)$ polinomunun derecesi diyeceğiz.

d dereceli i'inci Bernstein polinomu

$$b_{d,i}(x) = \begin{pmatrix} d \\ i \end{pmatrix} x^i (1 - x)^{d-i}, 0 \leq i \leq d.$$

olarak tanımlanır. Çok değişkenli durumda , N dereceli L'inci Bernstein polinomu

$$B_{N,L}(x) = b_{n_1,i_1}(x_1)\dots b_{n_m,i_m}(x_m). \tag{3.3.8}$$

olarak tanımlanır. m-boyutlu birim kutu üzerinde $U = [0,1]\times[0,1]\times\dots\times[0,1]$ p'nin Bernstein katsayıları $p_L(U)$

$$p_L(U) = \sum_{J\leq N} \frac{\begin{pmatrix} L \\ J \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ J \end{pmatrix}} a_J \;\; (L \leq N)\,. \tag{3.3.9}$$

olmak üzere (3.3.7) kuvvet formundan Bernstein formundaki bir polinoma dönüşüm

$$p(x) = \sum_{L\leq N} p_L(U) B_{N,L}(x) \tag{3.3.10}$$

şeklindedir. Burada $\begin{pmatrix} N \\ L \end{pmatrix}$ sayısı, $\begin{pmatrix} n_1 \\ i_1 \end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix} n_m \\ i_m \end{pmatrix}$'lerin çarpımı olarak tanımlanır.

Örnek 3.3.2. *$p(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_2 + x_2 + x_3$ ile verilen p polinomunu Bernstein formunda ifade edelim:*

N multi indeksi $N = (2,1)$ ve $S = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1)\}$ dir. (3.3.22) 'yi kullanarak Bernstein katsayıları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} b_{(0,0)} &= 3 \; b_{(0,1)} = 4 \; b_{(1,0)} = 3 \\ b_{(1,1)} &= 4 \; b_{(2,0)} = 3 \; b_{(2,1)} = 5 \end{aligned}$$

Bernstein polinomları ise

$$\begin{aligned}
B_{(00)}^{(21)}(x) &= (1-x_1)^2(1-x_2) \\
B_{(01)}^{(21)}(x) &= (1-x_1)^2 x_2 \\
B_{(10)}^{(21)}(x) &= 2x_1(1-x_1)(1-x_2) \\
B_{(11)}^{(21)}(x) &= 2x_1(1-x_1)x_2 \\
B_{(20)}^{(21)}(x) &= x_1^2(1-x_2) \\
B_{(21)}^{(21)}(x) &= x_1^2 x_2
\end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde p polinomunun Bernstein formunda ifade edilişi

$$\begin{aligned}
b_f &= 3(1-x_1)^2(1-x_2) + 3\left[2x_1(1-x_1)(1-x_2)\right] \\
&\quad +3x_1^2(1-x_2) + 4(1-x_1)^2 x_2 \\
&\quad +4\left[2x_1(1-x_1)x_2\right] + +5x_1^2 x_2
\end{aligned}$$

biçimindedir.

$$\underline{m} = min\left\{p(x) : x \in U\right\}, \overline{m} = \max\left\{p(x) : x \in U\right\},$$

$$\alpha = min\left\{p_L(U) : L \leq N\right\}, \beta = \max\left\{p_L(U) : L \leq N\right\}.$$

sayılarını tanımlayalım.

Teorem 3.3.3. *([33])*

$$\alpha \leq \underline{m} \leq \overline{m} \leq \beta$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 3.3.3 U birim kutusunda (3.3.7) çok değişkenli polinomunun görüntü kümesi için sınırlar veriyor. Bernstein katsayılarını ve keyfi bir D kutusu üzerindeki sınırları elde etmek için , D kutusu U'ya afin olarak dönüştürülür, sonuçda yeni bir polinom elde edilir ve katsayıları D'de $p(x)$ (3.3.7)başlangıç polinomunun Bernstein katsayılarıdır.

Teorem 3.3.3'den, $\alpha > 0$ ise $p(x)$ (3.3.7) polinomu U'da pozitiftir ve $\beta < 0$ ise $p(x)$ U 'da negatiftir. Eğer $\alpha \leq 0$, $\beta \geq 0$ ise U kutusu koordinat yönü belirlenerek ikiye bölünür ve yeni kutu için yeni Bernstein katsayıları $p_L(U)$ (3.3.10) kolayca hesaplanabilir. [33]'de bölmenin koordinat yönü için seçim kuralı önerilmiştir. Bu kural Berntein formundaki (bak(3.3.10)) bir polinomun kısmi türevine dayanmaktadır. Polinomumuzun işareti kutu üzerinde sabit olana kadar $\alpha > 0$ yada $\beta < 0$ eşitsizliklerini sağlayan yeni kutu elimine edilir. Kutuda $\alpha > 0$ yada $\beta < 0$ eşitsizlikleri sağlanmadığı sürece bölme işlemine devam edilir.

$h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ fonksiyonu çok değişkenli bir polinomdur ancak Λ kümesi bir kutu olmamaktadır. Bununla beraber ,yukarıdaki algoritma kolayca bu probleme de uyarlanabilir. Gerçekten Bernstein katsayılarının bir dizisi aynı işaretli ise bir $D = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times \ldots \times [\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}]$alt kümesini elimine ederiz. Eğer bu kutu için $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1} \geq 1$ eşitsizliği sağlanırsa bu D alt kümesi Λ kümesinin dışında kaldığı için otomatik olarak elenecektir.

Örnek 3.3.4. *Ω kümesi $\frac{\pi}{4}$-sol sektör (a=1,b=1) ve*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 2 & -5 & -5 \\ 1 & -2 & -6 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -6 \\ 1 & -1 & -7 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -6 \end{bmatrix}.$$

olmak üzere $\mathbb{A} = conv\{A_1, A_2, A_3\}$ gerçel matrisler politopu verilsin. Burada A_1 matrisi Ω kararlıdır. Gerçekten, $\lambda^2 I - 2\delta\lambda A_1 + (\delta^2+1)A^2$ matrisi

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + 4\lambda\delta + \delta^2 + 1 & -2\lambda\delta + 3\delta^2 + 3 & 10\lambda\delta + 35\delta^2 + 35 \\ -4\lambda\delta - 19\delta^2 - 19 & \lambda^2 + 10\lambda\delta + 37\delta^2 + 37 & 10\lambda\delta + 45\delta^2 + 45 \\ -2\lambda\delta - 12\delta^2 - 12 & 4\lambda\delta + 23\delta^2 + 23 & \lambda^2 + 12\lambda\delta + 41\delta^2 + 41 \end{bmatrix}$$

olduğu için ve $\delta = 1$ olduğundan

$$det[\lambda^2 I - 2\lambda A_1 + 2A_1^2] = \lambda^6 + 26\lambda^5 + 338\lambda^4 + 2188\lambda^3 + 8100\lambda^2 + 13\,680\lambda + 11\,552$$

Bu polinomun Hurwitz kararlılığı bilinen kararlılık kriterlerinden birisiyle gös-

terilebilir. Bu polinomunun kökleri

$$-7.9291-7.9291i$$
$$-7.9291+7.9291i$$
$$-3.8145-3.8145i$$
$$-3.8145+3.8145i$$
$$-1.2564-1.2564i$$
$$-1.2564+1.2564i$$

dir.

$\tilde{A}=\{\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\lambda_3A_3+(1-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)(1+j)I:\lambda_i\in[0,1],\ \ (i=1,2,3)\}$

Her $A\in\tilde{A}$, $A=A_R+iA_I$ *için*

$$A_R=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\lambda_3A_3+(1-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\,I$$

$$A_I=(1-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)\,I$$

olmak üzere Lemma 3.3.1'e göre

$$\det(A_R^2+A_I^2)\neq 0$$

koşulunun sağlandığını göstermemiz gerekmektedir. Bu determinant ile

$$
\begin{aligned}
p(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \;=\;& 8-21\,356\lambda_1^5-6692\lambda_2^5-87\,244\lambda_1^4\lambda_2-100\,052\lambda_1^4\lambda_3\\
&-140\,324\lambda_1^3\lambda_2^2-184\,292\lambda_1^3\lambda_3^2-111\,128\lambda_1^2\lambda_2^3\\
&-166\,612\lambda_1^2\lambda_3^3-43\,384\lambda_1\lambda_2^4-73\,896\lambda_1\lambda_3^4\\
&-27\,172\lambda_1\lambda_2\lambda_3-202\,204\lambda_1\lambda_2^3\lambda_3-348\,948\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3^2\\
&-264\,000\lambda_1\lambda_2\lambda_3^3+6500\lambda_3^6+35\,028\lambda_2\lambda_3^5+20\,058\lambda_2^5\lambda_3\\
&+58\,855\lambda_2^4\lambda_3^2+90\,804\lambda_2^3\lambda_3^3+2810\lambda_2^6+22\,168\lambda_1\lambda_2^5\\
&+45\,792\lambda_1\lambda_3^5+116\,850\lambda_1^4\lambda_2^2+123\,188\lambda_1^3\lambda_2^3+195\,728\lambda_1^3\lambda_3^3\\
&+72\,022\lambda_1^2\lambda_2^4+131\,296\lambda_1^2\lambda_3^4+160\,126\lambda_1^4\lambda_3^2+11\,890\lambda_1^6\\
&+58\,212\lambda_1^5\lambda_2+68\,292\lambda_1^5\lambda_3-12\,880\lambda_3^5\\
&-152\lambda_1-128\lambda_2-136\lambda_3-39\,142\lambda_2^4\lambda_3\\
&-90\,480\lambda_2^3\lambda_3^2-103\,162\lambda_2^2\lambda_3^3-58\,012\lambda_2\lambda_3^4+77\,725\lambda_2^2\lambda_3^4\\
&+275\,476\lambda_1^4\lambda_2\lambda_3+510\,226\lambda_1^3\lambda_2\lambda_3^2+461\,338\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3^3\\
&+599\,766\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2+341\,726\lambda_1^2\lambda_2^3\lambda_3+437\,246\lambda_1^3\lambda_2^2\lambda_3\\
&+113\,736\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3-323\,764\lambda_1^3\lambda_2\lambda_3-442\,622\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3^2\\
&-386\,674\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3+203\,404\lambda_1\lambda_2\lambda_3^4+356\,830\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3^3\\
&+308\,752\lambda_1\lambda_2^3\lambda_3^2+131\,702\lambda_1\lambda_2^4\lambda_3-15\,120\lambda_1^2\lambda_2\\
&-16\,508\lambda_1^2\lambda_3-12\,388\lambda_1\lambda_2^2-14\,768\lambda_1\lambda_3^2-11\,088\lambda_2^2\lambda_3\\
&-12\,120\lambda_2\lambda_3^2+51\,884\lambda_1^3\lambda_2+58\,144\lambda_1^3\lambda_3+62\,880\lambda_1^2\lambda_2^2\\
&+79\,028\lambda_1^2\lambda_3^2+33\,404\lambda_1\lambda_2^3+47\,112\lambda_1\lambda_3^3+30\,028\lambda_2^3\lambda_3\\
&+50\,874\lambda_2^2\lambda_3^2+37\,832\lambda_2\lambda_3^3-4376\lambda_3^3-3352\lambda_2^3\\
&+15\,830\lambda_1^4+6578\lambda_2^4+10\,416\lambda_3^4+127\,596\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2\\
&+141\,828\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3-6092\lambda_1^3+1316\lambda_1^2+2200\lambda_1\lambda_2\\
&+2344\lambda_1\lambda_3+920\lambda_2^2+1960\lambda_2\lambda_3+1044\lambda_3^2
\end{aligned}
$$

üç değişkenli polinomu elde edilir. Bu polinomun kutu üzerindeki pozitifliği Bernstein açılımıyla kontrol edilmektedir. Öncelikle $p(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ polinomunu

Bernstein formunda ifade edildikten sonra aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

1.) $p(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ polinomunun $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ kutusundaki minimum ve maksimum değerleri

$$min = \frac{-10022}{9} \quad max = 2470504$$

2.) $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ kutusu bir yönünde bölündüğünde $[0, \frac{1}{2}] \times [0,1] \times [0,1]$ kutusunda

$$min = \frac{-5968}{9}, \; max = \frac{19187081}{32}$$

$[\frac{1}{2}, 0] \times [0,1] \times [0,1]$ kutusunda

$$min = \frac{233}{32}, \; max = 2470504$$

3.) $[0, \frac{1}{2}] \times [0,1] \times [0,1]$ kutusu üç yönünde bölündüğünde $[0, \frac{1}{2}] \times [0,1] \times [0, \frac{1}{2}]$ kutusunda

$$min = \frac{-2581}{10}, \; max = \frac{1852749}{16}$$

$[0, \frac{1}{2}] \times [0,1] \times [\frac{1}{2}, 0]$ kutusunda

$$min = \frac{65}{16}, \; max = \frac{19187081}{32}$$

4.) $[0, \frac{1}{2}] \times [0,1] \times [0, \frac{1}{2}]$ kutusu iki yönünde bölündüğünde $[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ kutusunda

$$min = \frac{-2617}{1440}, \; max = \frac{569313}{32}$$

$[0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$ kutusunda

$$min = \frac{29}{32}, \; max = \frac{1852749}{16}$$

5.) $[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ kutusu bir yönünde bölündüğünde $[0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ kutusunda

$$min = \frac{-61723}{6912}, \; max = \frac{7048913}{2048}$$

$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ kutusunda

$$min = \frac{1937}{2048}, \; max = \frac{569313}{32}$$

6.) $[0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{2}]$ kutusu üç yönünde bölündüğünde $[0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{4}]$ kutusunda

$$min = \frac{-8}{3}, \; max = \frac{488601}{1024}$$

$[0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ kutusunda

$$min = \frac{585}{1024}, \; max = \frac{7048913}{2048}$$

7.) $[0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{4}]$ kutusu iki yönünde bölündüğünde $[0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{4}]$ kutusunda

$$min = \frac{-25}{3456}, \; max = \frac{105785}{2048}$$

$[0, \frac{1}{4}] \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{4}]$ kutusunda

$$min = \frac{7529}{10240}, \; max = \frac{488601}{1024}$$

8.) $[0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{4}]$ kutusu bir yönünde bölündüğünde $[0, \frac{1}{8}] \times [0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{4}]$ kutusunda

$$min = \frac{-1367}{6912}, \; max = \frac{1172393}{131072}$$

$[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{4}]$ kutusunda

$$min = \frac{203501}{393216}, \; max = \frac{105785}{2048}$$

İlk adımda $p(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ polinomunun $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ kutusundaki minimum ve maksimum değerleri

$$min = \frac{-10022}{9} \qquad max = 2470504$$

olarak bulunur. Bu polinomun pozitifliğini vermediğinden uygun yön seçerek bölme işlemine devam edilir ve aşağıdaki sonuçlar elde edilir: Beşinci adımda incelenen kutu üzerinde

$$min = \frac{-61723}{6912} \qquad max = \frac{7048913}{2048}$$

minimum ve maksimum değerleri elde edilir. Son olarak sekizinci adımda

$$min = \frac{203501}{393216}, \qquad max = \frac{105785}{2048}$$

değerleri alınır. Bu sonuçlar polinomun kutu üzerindeki pozitifliğini gösterir.

Tanım 3.3.5. *$f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu her bir değişkene göre afin lineer ise f fonksiyonuna multilineer fonksiyon denir.*

$D = \{(x_1, \ldots, x_k) : \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i (i = 1, \ldots, k)\}$ kutusu üzerinde tanımlanan $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ multilineer fonksiyonu aşağıdaki özelliği sağlar.

Teorem 3.3.6. *([1]) Kutu üzerinde tanımlanan bir multilineer skaler fonksiyon maksimum ve minimum değerlerini kutunun uç noktalarında alır.*

$\{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}) : \lambda_i \in [0, 1], \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{k+1} = 1, (i = 1, \ldots, k+1)\}$ üzerinde

$$\det(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k + \lambda_{k+1}(-a + ib)I) = 0$$

eşitliğini araştırmanın alternatif bir yolu polinom denklem sisteminin ve Teorem 3.3.6'nın kullanılmasıdır.

$$\det(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k + \lambda_{k+1}(-a + ib)I) = f(\lambda) + jg(\lambda)$$

olduğunu varsayalım. O zaman $(k+1)-$ boyutlu birim kutuda aşağıdaki polinom denklemler sistemini elde ederiz.

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= 0 \qquad (3.3.11) \\ g(\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{k+1} - 1 = 0 \ \lambda_i \in [0, 1] \qquad (i = 1, \ldots, k+1)$$

Teorem 3.3.6'yı kullanmak için $f(\lambda)$ ve $g(\lambda)$'yı multilineerleştireceğiz. Bu, yeni değişkenler tanımlama ve (3.3.11)'e yeni denklemler ekleme ile yapılabilir. Örneğin, λ^2 yerine $t_{11}t_{12}$ ve $t_1 - t_2 = 0$ denklemi yazılabilir. (Burada $\lambda_1 = t_{11}$'dir.) Bu işlemleri mertebesi birden büyük olan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}$' ler için yaparsak $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ fonksiyonları t_{ij} değişkenlerinin multilineer fonksiyonlarına dönüşür, ancak denklem sayısı çoğalır. Bunun sonucunda kutunun boyutuda artar. Ancak buna rağmen düşük boyutlarda (hem matrislerin boyutu hemde matrislerin sayısı) bu yöntem hızlı sonuç vermektedir.
Şimdi aşağıdaki örnekte bunu açıklayalım.

Örnek 3.3.7.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -10 & -20 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -10 & -15 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

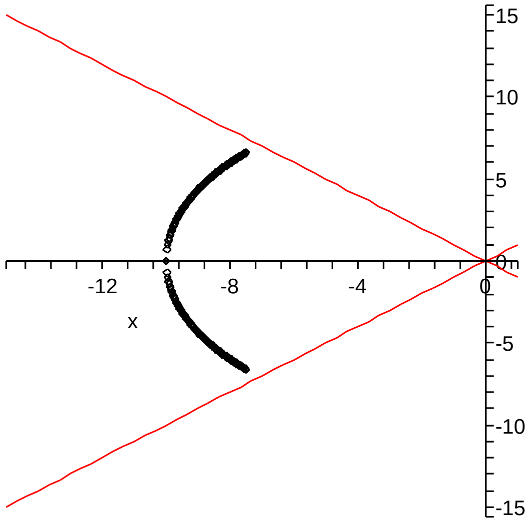
$$\mathbb{A} = conv\left\{A_1, A_2\right\}$$

olsun.

$$\begin{aligned} det(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3(1-i)I) = {} & -20\lambda_3\lambda_1 - 15\lambda_3\lambda_2 \\ & +\lambda_3^2 - 2\lambda_3^2 j + 20\lambda_3 j\lambda_1 \\ & +15\lambda_3 j\lambda_2 + \lambda_3^2 j^2 + 100\lambda_1^2 \\ & +200\lambda_1\lambda_2 + 100\lambda_2^2. \end{aligned}$$

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -20\lambda_3\lambda_1 - 15\lambda_3\lambda_2 + 100\lambda_1^2 + 200\lambda_1\lambda_2 + 100\lambda_2^2,$$

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -2\lambda_3^2 + 20\lambda_3\lambda_1 + 15\lambda_3\lambda_2.$$



Şekil 3.4: Örnek 3.3.7 matrisler ailesinin köklerinin dağılımı

dır. $\lambda_1 = t_{11}, \lambda_1^2 = t_{11}.t_{12}$, $\lambda_2 = t_{21}, \lambda_2^2 = t_{21}.t_{22}$, $\lambda_3 = t_{31}, \lambda_3^2 = t_{31}.t_{32}$ olmaktadır. O zaman

$$\tilde{f}\,(t_{11},\ldots,t_{32}) = -20t_{31}t_{11} - 15t_{31}t_{21} + 100t_{11}t_{12} \quad (3.3.12)$$

$$+200t_{11}t_{21} + 100t_{21}t_{22}, \quad (3.3.13)$$

$$\tilde{g}\,(t_{11},\ldots,t_{32}) = -2t_{31}t_{32} + 20t_{31}t_{11} + 15t_{31}t_{21}, \quad (3.3.14)$$

altı değişkenli fonksiyonlar ve

$$\begin{aligned} t_{11} - t_{12} &= 0, \\ t_{21} - t_{22} &= 0, \quad (3.3.15) \\ t_{31} - t_{32} &= 0, \end{aligned}$$

$$(3.3.16)$$

gibi yeni denklemler ve

$$t_{11} + t_{21} + t_{31} - 1 = 0 \quad (3.3.17)$$

denklemi elde edilir.

(3.3.11)-(3.3.14) denklemler sistemi multilineer bir sistemdir ve $t_{ij}(i = 1,2,3; j = 1,2)$ değişkenlerinin hepsi $[0,1]$ aralığında değişmektedir. Bu sistemin altı boyutlu birim kutu üzerinde çözümünün olmadığı Teorem 3.3.6 yardımıyla gösterilebilir. Bunun için kutu her yönde ikiye bölünür ve her bir alt kutuda sistemin denklemlerinden birisinin sıfırı içermediği görülür. Buna göre $\mathbb{A}$ ailesi $\frac{\pi}{4}$-sektör kararlıdır.

4 Z-MATRİSLERİN KARARLILIĞI

Bu bölümde z-matrislerin pozitif kararlılığı, konveks kombinasyonlarının kararlılığı, Lyapunov eşitsizliklerinin ortak çözümünün varlığı v.s. gibi problemler ele alınacaktır.

4.1 3×3 Matrisler İçin Ortak Çözüm

Tanım 4.1.1. $A = (a_{ij})$ *gerçel kare matrisi verilsin. Eğer* $i \neq j$ *iken* $a_{ij} \leq 0$ *ise* A *matrisine z-matris denir.*

Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi bir 3×3 z-matristir. z-matrislerle ilgili aşağıdakiler bilinmektedir.([10, 35, 36])

a) A matrisi z-matris ise α gerçel sayısı, P negatif olmayan matris olmak üzere $A = \alpha I - P$ olarak yazılabilir.

b) A matrisi z-matris ise A'nın en az bir tane gerçel özdeğeri vardır. Burada, $A = \alpha I - P, \alpha \in \mathbb{R}$, P ise negatif olmayan matristir ve $\alpha - \rho(P)$ sayısı A'nın gerçel özdeğeri olmaktadır. ($\rho(P)$ sayısı P matrisinin spektral yarıçapının göstermektedir).

c) A matrisi z-matris ise onun pozitif kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul tüm gerçel özdeğerlerinin pozitif olmasıdır.

d) Pozitif kararlı A matrisi z-matris ise A'nın tüm esas alt matrisleri de pozitif kararlıdır.

e) Pozitif kararlı A ve B matrisleri verilsin. O zaman A ve B matrislerinin konveks kombinasyonu olan $\{(1-\alpha)A + \alpha B : \alpha \in [0, 1]\}$ ailesinin de pozitif kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul $B^{-1}A$ matrisinin gerçel negatif özdeğerlerinin bulunmamasıdır.

f) $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ ailesi z-matrislerden oluşmuş olan kompakt yol bağlantılı bir matrisler ailesi olsun. Bu ailede en az bir tane pozitif kararlı matris bulunsun. O zaman $\mathcal{A}$ ailesi tersinir ise pozitif kararlıdır.

Öte yandan iki tane herhangi 2×2 boyutlu gerçel pozitif kararlı A ve B matrisleri için

$$\begin{aligned} A^T P + PA > 0 \\ B^T P + PB > 0 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Lyapunov aşitsizliklerinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul AB ve AB^{-1} matrislerinin gerçel negatif özdeğerlerinin bulunmamasıdır. ([14])

Teorem 4.1.2. *A ve B matrisleri $n \times n$ boyutlu gerçel matrisler olsun ve (4.1.1) Lyapunov eşitsizliklerinin ortak $P > 0$ çözümü varolsun. Bu durumda $\{(1-\alpha)A + \alpha B : \alpha \in [0,1]\}$ konveks kombinasyonu da pozitif kararlıdır.*

Kanıt. (4.1.1) eşitsizliğinin birincisini α, ikincisini $1-\alpha$ ile çarpıp, iki pozitif belirli matrisin toplamıda pozitif belirli olduğunu kullanırsak

$$[(1-\alpha)A + \alpha B]^T P + P[(1-\alpha)A + \alpha B] > 0$$

elde ederiz. Buradan, Lyapunov teoremine göre konveks kombinasyon da pozitif kararlı olur ve bu $P > 0$ matrisi bu aile için de ortak çözüm olur. □

Yukarıdaki Teorem 4.1.2'den görüldüğü gibi sonlu sayıda kararlı matrisler için konveks kombinasyonun kararlılığı, Lyapunov eşitsizliklerinin ortak çözümünün varlığı için gerekli koşuldur. Şimdi, iki tane 2×2 boyutlu pozitif kararlı z-matris için bu koşulun yeterli olduğunu göstereceğiz.

Teorem 4.1.3. *A ve B matrisleri 2×2 boyutlu pozitif kararlı z-matrisler olmak üzere $[A,B]=\{(1-\alpha)A+\alpha B:\alpha\in[0,1]\}$ segmenti pozitif kararlıysa A,B ikilisi için (4.1.1) Lyapunov denklemlerinin ortak $P>0$ çözümü vardır.*

Kanıt. $[A,B]$ segmenti pozitif kararlı olduğu için yukarıdaki $e)$ şıkkına göre $B^{-1}A$ matrisinin negatif özdeğeri yoktur. $B^{-1}A$ ile AB^{-1} matrisleinin özdeğerleri aynı olduklarından AB^{-1} matrisinin de negatif özdeğeri yoktur. Şimdi AB matrisinin de negatif özdeğeri olmadığını gösterelim.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$$

$b\leq 0, c\leq 0, n\leq 0, p\leq 0$ ve pozitif kararlılık ile $d)$ şıkkından dolayı $a>0, d>0, m>0, q>0$.

$$AB=\begin{pmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{pmatrix}$$

Bu matrisin karakteristik denklemi

$$\lambda^2-\beta\lambda+det(AB)=0,$$

olur. Burada $\beta=am+bp+cn+dq$ ve $\beta>0$ dır.

$$\lambda=\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-4det(AB)}}{2}$$

olur. Olmayana ergi yöntemiyle yukarıdaki denklemin negatif kökünün olduğunu varsayalım. O zaman

$$\beta^2-4det(AB)\geq 0$$
$$\beta-\sqrt{\beta^2-4det(AB)}<0$$

olması gerekmektedir.

$$\beta^2\geq 4det(AB)$$
$$\beta<\sqrt{\beta^2-4det(AB)}$$

eşitsizliklerinden

$$det(AB) < 0$$

olduğu çıkar. Başka değişle $det(A), det(B)$ determinantları zıt işaretli olmalıdırlar. Öte yandan, $-A$ matrisi Hurwitz kararlı olduğu için ve onun karakteristik polinomu

$$det(\lambda I - (-A)) = det(\lambda I + A) = \lambda^2 + (a+d)\lambda + det(A)$$

olur. Bu polinom Hurwitz kararlı olduğu için $det(A) > 0$ dır. Benzer yolla $det(B) > 0$ olur. Varılan çelişkiden dolayı AB'nin negatif özdeğerlerinin olmadığı kanıtlanmış oldu. Sonuçta AB ve AB^{-1} matrislerinin negatif özdeğeri olmadığı için (4.1.1)'in ortak $P > 0$ çözümü vardır. $\square$

Şimdi iki tane 3×3 boyutlu pozitif kararlı z-matrisler için Lyapunov eşitsizliklerinin ortak çözümünün varlığının araştıracağız. $\widetilde{A} = (a_{ij}), \widetilde{B} = (b_{ij})$ iki tane 3×3 boyutlu pozitif kararlı z-matrisler olsun ve $[\widetilde{A}, \widetilde{B}]$ segmentinin de pozitif kararlı olduğunu varsayalım (Ortak $P > 0$'ın varlığı için bu koşulun gerekli koşul olduğu bilinmektedir. Bu koşulun sağlanması için $(\widetilde{B}^{-1}\widetilde{A})$ matrisinin negatif özdeğeri bulunmamalıdır).

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A & & a_{13} \\ & & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \widetilde{B} = \begin{bmatrix} B & & b_{13} \\ & & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

olarak yazarsak A ve B matrisleri esas alt matrisler olduğu için $d)$ şıkkına göre $[A, B]$ segmenti hem z-matrislerden oluşmaktadır, hem de pozitif kararlı olmaktadır. O zaman Teorem 4.1.3'den dolayı A, B ikilisi için (4.1.1) eşitsizliklerinin ortak $P > 0$ çözümü vardır.

$$\widetilde{P} = \begin{bmatrix} P & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisini oluşturalım. $\widetilde{P} > 0$ dır. Bu matris bir çok durumlarda $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ ikilisi için ortak çözüm olmaktadır.

Teorem 4.1.4. *Yukarıdaki koşullara ek olarak eğer*

$$\det\left[\widetilde{A}^T\widetilde{P} + \widetilde{P}\widetilde{A}\right] > 0 \tag{4.1.2}$$
$$\det\left[\widetilde{B}^T\widetilde{P} + \widetilde{P}\widetilde{B}\right] > 0 \tag{4.1.3}$$

ise $\widetilde{P}$ matrisi $\left\{\widetilde{A}, \widetilde{B}\right\}$ ikilisi için (4.1.1) Lyapunov eşitsizliklerinin ortak çözümdür.

Kanıt. $\widetilde{A}^T\widetilde{P}+\widetilde{P}\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}^T\widetilde{P}+\widetilde{P}\widetilde{B}$ simetrik matrisleri pozitif belirlidir. $\widetilde{A}^T\widetilde{P}+\widetilde{P}\widetilde{A}$ matrisini ele alalım. Bir simetrik matrisin pozitif belirli olması için gerekli ve yeterli koşul onun esas baş minörlerinin pozitif olmasıdır. Yukarıdaki matris 3×3 boyutlu olduğundan bu matris

$$\begin{bmatrix} A^TP + PA & & * \\ & & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

biçimindedir. İlk iki esas baş minör $A^TP + PA > 0$ eşitsizliğinden dolayı pozitifdir. Üçüncü minör (determinant) ise (4.1.2)'den dolayı pozitiftir. Benzer yolla, $\widetilde{B}^T\widetilde{P} + \widetilde{P}\widetilde{B}$ simetrik matrisinin pozitif belirli olduğu görülmektedir.

Örnek 4.1.5. *$\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ matrisleri aşağıdaki gibi verilsin.*

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -2 & 15 \end{bmatrix}, \widetilde{B} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -0.5 & -0.5 & 10 \end{bmatrix}$$

$\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ matrisleri pozitif kararlı z-matrislerdir ve $\left[\widetilde{A}, \widetilde{B}\right]$ segmenti de pozitif kararlıdır. Gerçekten,

$$\widetilde{B}^{-1}\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0.70955 & -0.11397 & 0.14798 \\ -0.15073 & 0.14338 & 0.32997 \\ -0.02206 & -0.19853 & 1.5239 \end{bmatrix}$$

dir ve özdeğerleri $0.735\,04, 0.167\,03, 1.474\,8$ *olarak elde edilir.*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $[A, B]$ *segmenti de pozitif kararlıdır. O zaman Teorem 4.1.3 'e göre* A, B *ikilisi için Lyapunov eşitsizliklerinin ortak* $P > 0$ *çözümü vardır. Bu çözüm*

$$P = \begin{bmatrix} 12.6762 & -2.7909 \\ -2.7909 & 5.6962 \end{bmatrix}$$

biçiminde seçilebilir.

$$\widetilde{P} = \begin{bmatrix} 12.6762 & -2.7909 & 0 \\ -2.7909 & 5.6962 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisini oluşturalım. Bu durumda

$$\widetilde{A}^T \widetilde{P} + \widetilde{P} \widetilde{A} = \begin{bmatrix} 163.28 & -43.605 & -11.781 \\ -43.605 & 16.974 & -2.057\,2 \\ -11.781 & -2.057\,2 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{B}^T \widetilde{P} + \widetilde{P} \widetilde{B} \begin{bmatrix} 213.98 & -70.236 & -10.385 \\ -70.236 & 56.733 & -7.905\,3 \\ -10.385 & -7.905\,3 & 20 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned} \det \left[\widetilde{A}^T \widetilde{P} + \widetilde{P} \widetilde{A} \right] &= 20943 > 0 \\ \det \left[\widetilde{B}^T \widetilde{P} + \widetilde{P} \widetilde{B} \right] &= 1.305\,7 \times 10^5 > 0 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda Teorem 4.1.4' e göre $\widetilde{P}$ *matrisi* $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ *ikilisi için ortak matris olmaktadır.*

Örnek 4.1.6.

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 16 & -3 & -2 \\ -8 & 3 & -1 \\ -5 & -1 & 14 \end{bmatrix}, \widetilde{B} = \begin{bmatrix} 18 & -5 & -1 \\ -7 & 4 & -2 \\ -6 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

$\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ pozitif kararlı z-matrisleri verilsin. Aynı zamanda $\left[\widetilde{A}, \widetilde{B}\right]$ segmenti de pozitif kararlıdır. Gerçekten,

$$\widetilde{B}^{-1}\widetilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{38}{243} & \frac{17}{81} & \frac{14}{243} \\ \frac{82}{243} & \frac{58}{81} & \frac{43}{243} \\ \frac{31}{243} & \frac{16}{81} & \frac{37}{243} \end{bmatrix}$$

matrisi negatif özdeğer bulundurmamaktadır.

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 18 & -5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $[A, B]$ segmenti de pozitif kararlıdır. O zaman Teorem 4.1.3 'e göre A, B ikilisi için Lyapunov eşitsizliklerinin ortak $P > 0$ çözümü vardır. Bu çözüm

$$P = \begin{bmatrix} 34.73 & -8.68 \\ -8.68 & 5.66 \end{bmatrix}$$

biçiminde seçilebilir. Gerçekten,

$$A^T P + PA = \begin{bmatrix} 1249.4 & -313.44 \\ -313.44 & 85.74 \end{bmatrix}$$

$$B^T P + PB = \begin{bmatrix} 1371.1 & -403.13 \\ -403.13 & 131.58 \end{bmatrix}$$

matrisleri pozitif tanımlıdırlar. Şimdi

$$\widetilde{P} = \begin{bmatrix} 34.73 & -8.68 & 0 \\ -8.68 & 5.6962 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisini oluşturalım. Bu durumda

$$\widetilde{A}^T \widetilde{P} + \widetilde{P}\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1249.4 & -313.44 & -65.83 \\ -313.44 & 85.74 & 10.6 \\ -65.83 & 10.6 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{B}^T\widetilde{P}+\widetilde{P}\widetilde{B}=\begin{bmatrix} 1371.1 & -403.13 & -23.47 \\ -403.13 & 131.58 & -3.69 \\ -23.47 & -3.69 & 20 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned} \det\left[\widetilde{A}^T\widetilde{P}+\widetilde{P}\widetilde{A}\right] &= 1.741\times 10^5>0 \\ \det\left[\widetilde{B}^T\widetilde{P}+\widetilde{P}\widetilde{B}\right] &= 1.9694\times 10^5>0 \end{aligned}$$

olur. Böylece $\widetilde{P}$ matrisi $\widetilde{A},\widetilde{B}$ ikilisi için çözüm olmaktadır.

Bu tez çalışmasında aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir: tek bir matrisin ve matrisler ailesinin Hurwitz ve sektör kararlılığı problemleri incelenmiştir.

5 SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir :

Tek bir matrisin özdeğerlerinin, rasyonel fonksiyonlarla ifade edilmiş olan bölgede kalması problemi incelenmiş ve daha basit bir kriter elde edilmiştir. Burada, komütatif bir ailenin kararlılığı için genel bir kriter elde edilmiştir. Bunun yanısıra kuadratik bir ailenin Hurwitz kararlılığı için yeni yeterli koşullar verilmiştir.

Gerçel matrisler politopunun sektör kararlılığı problemi incelenmiştir. Burada konveks kümelerin ayırma teoreminden yararlanılmıştır. Verilen politopun kararlılık koşulunun genişletilmiş kompleks politopun tersinirlik koşuluna denk olduğu gözlenmiş ve buradan sektör kararlılık için yeni gerekli ve yeterli koşullar elde edilmiştir. Bu koşullar yeni ailenin tersinirliği koşulu gibi ifade edilmektedir. Burada kararlılık probleminin çözümü için nümerik yöntemler de ele alınmıştır. Önce, bir çok değişkenli polinomun bir kutu üzerindeki değer kümesini yaklaşık bulmaya olanak sağlayan Bernstein açılımı, sonra ise bir multilineer fonksiyonun bir kutu üzerindeki değer kümesini bulmaya yönelik sonuçlardan yararlanılmaktadır.

Pozitif kararlı 2×2 ve 3×3 boyutlu z- matrisler için Lyapunov eşitsizliklerinin ortak çözümünün varlığı için yeterli koşul verilmiştir. Tezde elde edilmiş sonuçlar çok sayıda örneklerle açıklanmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Barmish, B.R., *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan Publishing Company, New York, 1994.

[2] Tanaka, K., Sugeno, M., *Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems*, Fuzzy Sets and Systems, **45**, 135-156, 1992.

[3] Liberzon, D., Morse, A. S.,*Basic Problems in Stability and Design of Switched Systems*, IEEE Control Systems Magazine, **19(5)**, 59-70, 1999.

[4] Gutman, S., *Root Clustering in Parameter Space*, Springer, Berlin, 1990.

[5] Yedavalli, R. K., *Robust Root Clustering for Linear Uncertain Systems Using Generalized Lyapunov Theory*, Automatica, **29**, 237-240, 1993.

[6] Soh, Y. C., Xie, L., Foo, Y. K., *Maximal Pertubation Bound for Perturbed Polynomials with Roots in The Left-Sector*, IEEE Transactions on Circuts and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, **41**, 281-285, 1994.

[7] Soh, Y. C., Foo, Y. K., *Generalization of Strong Kharitonov Theorems to The Left Sector*, IEEE Transactions on Automatic Control, **35**, 1378-1382, 1990.

[8] Bhattacharya, S.P., Chapellat, H. ve Keel, L.H., *Robust Control The Parametric Approach*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 1995.

[9] Marden, M., *Geometry of Polynomials* , American Mathematical Society, Providence, R.I., 1966.

[10] Horn, R., Johnson, C. R., *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1991.

[11] JURY, E. I., *Theory and Applications of the z Transform Method*, John Wiley, New York, 1964.

[12] Chen, C.T., *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston, 1984.

[13] King, C., Nathanson, M., *On the Existence of A Common Quadratic Lyapunov Function for A Rank One Difference*, Linear Algebra and Its Applications, **419**, 400-416, 2006.

[14] Narendra, K., Shorten, R., *Necessary and Sufficient Conditions for The Existence of A Common Lyapunov Function for A Finite Number of Stable Second Order Linear Time-Invariant Systems*, International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, **16**, 709-728, 2002.

[15] Mason, O., Shorten, R., Solmaz, S., *On the Kalman -Yacubovich-Popov Lemma and Common Lyapunov Solutions for Matrices with Regular Inertia* , Linear Algebra and Its Applications, **420**, 183-197, 2007.

[16] Ando, T., *Set of Matrices with Common Lyapunov Solution*, Archiv der Mathematik, **77**, 76-84, 2001.

[17] Laffey, T. J., Smigoç, H., *Tensor Conditons for The Existence of A Common Lyapunov Equation*,Linear Algebra and Its Applications, **420**, 672-6855, 2007.

[18] Willems, J., *The Circle Criterion and Quadratic Lyapunov Functions for Stability Analysis*, IEEE Transactions on Automatic Control, **18**, 184, 1973.

[19] Cheng, D., Gua, L., Huang, J., *On Quadratic Lyapunov Functions* , IEEE Transactions on Automatic Control, **48**, 885-890, 2003.

[20] Rockafaellar, R. T., *Convex Analysis*, Princeton University Pres, Princeton, N. J., 1970.

[21] Stöer, J., Witzgall, C., *Convexity and Optimization in Finite Dimensions*, Springer- Verlag, Berlin, Germany, 1970.

[22] Eggsleston, H. G., *Convexity*, (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics ;No. 47), Cambridge University Press, 1958.

[23] Horn, R., Johnson, C. R., Matrix Analysis, Cambridge University Press, 1985.

[24] Mori, T., Mori, Y., Kokame, H., *Common Lyapunov Function Approach To Matrix Root Clustering* , Systems and Control Letters, **44**, 73-78, 2001.

[25] Narendra, K. S., Balakrishnan, J., A Common Lyapunov Function For Stable LTI Systems with Commuting A-Matrices, IEEE Transactions on Automatic Control, **39**, 1994.

[26] Saydy, L., Tits, A. L., Abed, E.H., *Guardian Maps and The Generalized Stability of Parametrized Families of Matrices and Polynomials*, Mathematics of Control, Signals and Systems, **3**, 345-371, 1990.

[27] Cohen, N., Lewcowicz, I., *Convex Invertible Cones and the Lyapunov Equations*, Linear Algebra and It's Applications, **250**, 105-131, 1997.

[28] Cohen, N., Lewcowicz, I., Rodman, L., *Exponential Differential Inclusion Systems*, Systems and Control Letters, **30**, 159-164, 1997.

[29] Gutman, S., Vaisberg, F., *Root Clustering of a Real Matrix in a Sector*, IEEE Transactions on Automatic Control, **29**, 251-253, 1984.

[30] Cohen, N., Lewcowicz, I.,*A Necessary and Sufficient Criterion for the Stability of a Convex Set of Matrices*, IEEE Transactions on Automatic Control, **38**, 611-615, 1993.

[31] Monov, V. V., *On the Spectrum of Convex Sets of Matrices*, IEEE Transactions on Automatic Control, **44**, 1009-1012, 1999.

[32] Garloff, J.,*Bernstein Algorithm*, Interval Computations, **43**, 154-168, 1993.

[33] Zettler, M., Garloff, J., *Robustness of Polynomials with Polynomials Parameter Dependecy Using Bernstein Expansion*, IEEE Transactions on Automatic Control, **43**, 425-431, 1998.

[34] Garloff, J., Smith, A. P., *Investigation of A Subdivision Based Algorithm For Solving Systems of Polynomial Equations* **47**, 167-178, 2001.

[35] Dzhafarov, V., Buyukkoroğlu, T., *On Nonsingularity of a Polytope of Matrices*, Linear Algebra and Its Applications, Basımda, 2008.

[36] Dzhafarov, V., Buyukkoroğlu, T., *On the Stability of a Convex Set of Matrices*, Linear Algebra and Its Applications, **414**, 547-559, 2006.