MULTI-AFİN POLİNOM AİLELERİNİN HURWITZ KARARLILIĞI

Mediha AKÇAY
Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Haziran - 2007

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Mediha AKÇAY'ın **"Multi-Afin Polinom Ailelerinin Hurwitz Kararlılığı"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 18.06.2007 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	**: Yard. Doç. Dr. TANER BÜYÜKKÖROĞLU**	**...........**
Üye	**: Doç. Dr. VAKIF CAFER**	**...........**
Üye	**: Yard. Doç. Dr. BÜLENT SAKA**	**...........**

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

.... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MULTI-AFİN POLİNOM AİLELERİNİN HURWITZ KARARLILIĞI

Mediha AKÇAY

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

2007, 46 sayfa

Bu tez çalışmasında multilineer polinomlar ailesinin gürbüz kararlılığı ele alınmıştır. Aralık polinomlar ailesi ve polinomlar politopunun gürbüz kararlılığı için bilinen sonuçlara değinilmiş ve bu sonuçların multilineer polinomlar ailesinde geçerli olmadığı ile ilgili karşıt örnekler verilmiştir. Kenar teoremine göre, bir polinomlar politopunda tüm kenarlar kararlıysa polinomlar politopu da kararlıdır. Herhangi bir matrisler politopu için kenar teoremi geçerli değildir. Kenar teoreminin geçerli olduğu özel bir matrisler politopu incelenmiştir. Multilineer polinomlar ailesinin gürbüz kararlılığı için yeter koşul veren dönüşüm teoremi (Mapping Theorem) ele alınmış ve ailenin değer kümesine göre dönüşüm teoreminin gerek ve yeter koşulu da verdiği özel bir durum incelenmiştir. İki parametreli multilineer polinomlar ailesinin kararlılığı araştırılmıştır. Belirsiz parametre sayısının düşük olduğu multilineer polinomlar ailesinin kararlılık testi için verimli olabilecek bir yöntemden bahsedilmiştir. Bu yöntemle polinom denklem sistemlerinin kutu üzerinde çözümünün olup olmadığı incelenebilir. Ele alınan multilineer polinomlar ailesi gürbüz kararlı ise bu yöntem sonlu adımda sonuç vermektedir. Verilen teoremlerle ilgili örnekler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Gürbüz Kararlılık, Multilineer Polinomlar Ailesi, Matrisler Politopu

ABSTRACT

Master of Science Thesis

THE HURWITZ STABILITY OF THE MULTI-AFFINE POLYNOMIAL FAMILIES

Mediha AKÇAY

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU
2007, 46 pages

In this thesis, the robust stability of the multilineer polynomials family is considered. The results which are known in the interval polynomials family and polytope of polynomials are given. Counter examples are provided and it is determined that this results do not valid in the multilineer polynomials family. According to edge theorem; if all edges are stable in the polytope of polynomials, polytope of polynomials is stable too. The edge theorem does not valid in the any polytope of matrices. A particular polytope of matrices in which the Edge Theorem is valid are investigated**.** The Mapping Theorem which leads to a sufficient condition for robust stability of multilineer polynomial family is considered. Also it is shown that the Mapping Theorem leads to a necessary and sufficient condition for robust stability of particular case according to character of value set. A method which can be efficiently for test of stability in the multilineer polynomials family whose number of uncertain parameters is low is noticed. This method can be use for control whether a system of polynomial equation has a solution on a box or not. If the multilineer polynomials family is stable, the method results in the finite step. The several examples related with theorems are investigated.

Keywords: Robust Stable, Multilineer Polynomials Family, Polytope of Matrices

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında danışmanım olarak verdiği tüm destek ve zaman için sayın Yard. Doç. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU'na en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca ilgi ve desteğinden dolayı sayın Doç. Dr. Vakıf CAFER'e de teşekkür ederim.

Mediha AKÇAY
Haziran 2007

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Lineer sistemlerin kararlılığının incelendiği problemlerde, sistemin karakteristik polinomunun veya matrisinin kararlılığının incelenmesi söz konusu olur. Bir polinomun (veya matrisin) kararlılığı ise köklerinin (öz değerlerinin) kompleks düzlemdeki yeri ile ilgilidir.

Tanım 1.1 *$D \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı, açık bir bölge ve*

$$p(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n, \quad (a_n \neq 0) \tag{1.1}$$

n. dereceden bir polinom olsun. $p(s)$ polinomunun tüm kökleri D bölgesinde ise bu polinoma $D-$kararlı polinom denir.

Eğer $D = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\, z < 0\ \}$ ise $D-$kararlılık yerine Hurwitz kararlılık kullanılır. Tez boyunca Hurwitz kararlılık yerine kısaca kararlılık kullanılacaktır.

Bir $n \times n$ lik reel kare matrisin kararlılığı, o matrisin karakteristik polinomunun kararlılığına denktir. A matrisi $n \times n$ lik bir reel matris ise, A matrisinin kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul $p_A(s) = \det(sI - A)$ polinomunun kararlı olmasıdır.

Bir polinomun kökleri nümerik yöntemlerle yaklaşık olarak hesaplanabilmektedir. Denklem (1.1) ile verilen polinomun kökleri olan s_1, s_2, ..., s_n bulunarak her $i = 1, 2, ..., n$ için $\mathrm{Re}\, s_i < 0$ koşulunu sağlayıp sağlamadığı kontrol edililebilir ve polinomun kararlılığı belirlenebilir. Bu polinomun kararlılığını araştırmada kullanılan bazı önemli özellikler ve teoremler aşağıda verilmiştir.

Yardımcı Teorem 1.1 *$p(s)$ (1.1) polinomu kararlı ise tüm katsayıları aynı işaretlidir.*

Kanıt. $p(s)$ polinomunun kökleri s_i $(i = 1, 2, ..., n)$ için

$$p(s) = a_n \prod_{i=1}^{n} (s - s_i)$$

şeklinde yazılabileceğinden ve $\mathrm{Re}\, s_i < 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ olduğundan tüm katsayılar aynı işaretlidir. ■

Tanım 1.2 *$p(s)$ (1.1) polinomu verilsin.*

$$H(p) = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

matrisine $p(s)$ polinomunun Hurwitz matrisi denir.

Teorem 1.1 *$p(s)$ (1.1) polinomunun kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul*

$$\begin{aligned} H_1 &= (a_{n-1}) \\ H_2 &= \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{pmatrix} \\ H_3 &= \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ H_n &= H(p) \end{aligned}$$

olmak üzere her $i = 1, 2, \ldots, n$ için det $H_i > 0$ olmasıdır [1].

$$p(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n \tag{1.2}$$

monik polinomu kararlı ise Yardımcı Teorem 1.1'e göre $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ katsayıları pozitiftir.

a_0, $a_1, \ldots,$ a_{n-1} katsayılarının pozitif olduğunu varsayalım. Bu durumda Teorem 1.1 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

i) $n = 1$ veya $n = 2$ ise (1.2) polinomu kararlıdır

ii) $n = 3$ ise (1.2) polinomu kararlıdır $\Leftrightarrow a_0 < a_1a_2$

iii) $n = 4$ ise (1.2) polinomu kararlıdır $\Leftrightarrow$

$$a_1^2 + a_0a_3^2 < a_1a_2a_3 \tag{1.3}$$

iv) $n = 5$ ise (1.2) polinomu kararlıdır $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} a_2 &< a_3a_4 \\ a_2^2 + a_1a_4^2 &< a_0a_4 + a_2a_3a_4 \\ a_0^2 + a_1a_2^2 + a_1^2a_4^2 + a_0a_3^2a_4 &< a_0a_2a_3 + 2a_0a_1a_4 + a_1a_2a_3a_4. \end{aligned}$$

Bundan başka, bir polinomun kararlılığı kompleks düzlemde oluşturulan bir eğri yardımıyla da belirlenebilir. $\omega \in \mathbb{R}$ olmak üzere $s = j\omega$ (1.1) polinomunda yerine yazıldığında $p(j\omega)$ kompleks sayısı elde edilir. $p(j\omega)$'nin argümenti $\measuredangle p(j\omega)$ ile gösterilsin.

Teorem 1.2

$$p(s) = a_0 + a_1s + \cdots + a_ns^n, \quad (a_n > 0) \tag{1.4}$$

polinomunun kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul $0 \leq \omega$ *için aşağıdaki ifadelerin sağlanmasıdır.*

i) $p(j0) = a_0 > 0$.

ii) $\measuredangle p(j\omega)$, ω*'nın artan fonksiyonudur.* ω, *0 dan* ∞*'a değiştirildiğinde* $p(j\omega)$ *eğrisi orjini saat yönünün tersi yönünde çevreler.* $\omega \to \infty$ *iken* $\measuredangle p(j\omega)$*'nin toplam değişimi* $n\frac{\pi}{2}$ *dir* [2].

Kararlılık problemlerinde genellikle bir tek polinom veya matris söz konusu olmamaktadır. Katsayıları (girdileri) sınırlı aralıklarda değişen parametrelerin fonksiyonlarından oluşan polinomlar (matrisler) ortaya çıkar. Bu parametrelere belirsizlik parametreleri, parametrelerin bulunduğu kümeye ise belirsizlik kümesi denir. $\mathbf{q}$ ile belirsizlik parametresi, $Q \subset \mathbb{R}^m$ ile de berlisizlik kümesi gösterilsin. Bu durumda

$a_i : Q \to \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, ..., n)$ olmak üzere

$$p(s, \mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q})s + \cdots + a_n(\mathbf{q})s^n \tag{1.5}$$

polinomlarından oluşan

$$\mathcal{P} = \{p(., \mathbf{q}) : \ \mathbf{q} \in Q\} \tag{1.6}$$

kümesine polinomlar ailesi denir. Her $\mathbf{q} \in Q$ için $a_n(\mathbf{q}) \neq 0$ ise $\mathcal{P}$ değişmez dereceli polinomlar ailesi olarak adlandırılır.

Tanım 1.3 *$\mathcal{P}$ (1.6) polinomlar ailesindeki tüm polinomlar kararlı ise $\mathcal{P}$ ye gürbüz kararlıdır denir.*

Bir matris ailesindeki tüm matrisler kararlı ise bu matris ailesi gürbüz kararlıdır.

$\mathcal{P}$ (1.6) polinomlar ailesinin gürbüz kararlılığını araştırmada her $\mathbf{q} \in Q$ için $p(s, \mathbf{q})$ polinomunun kararlılığının kontrol edilmesi genelde mümkün değildir. Bazı polinom ailelerinde $\mathcal{P}$'nin bir alt kümesinin gürbüz kararlılığı, $\mathcal{P}$'nin gürbüz kararlılığını gerektirir. Bu alt kümeler $\mathcal{P}$'nin test kümesi olarak adlandırılır.

Aşağıda tanımlanan aralık polinomlar ailelesinin kararlılığı, bu aileden seçilmiş dört tane polinomdan oluşan test kümesi yardımıyla belirlenebilmektedir.

Her $i = 0, 1, ..., n$ için $q_i^- \leq q_i^+$ olacak şekilde $q_i^-, q_i^+ \in \mathbb{R}$ verilsin.

$$Q = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n+1} : \ q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, \ i = 0, 1, ..., n\} \tag{1.7}$$

kutusunu ele alalım. $i = 0, 1, ..., n$ için $a_i(\mathbf{q}) = q_i$ olarak tanımlanmış ise

$$\mathcal{P} = \{p(., \mathbf{q}) : p(s, \mathbf{q}) = q_0 + q_1 s + \cdots + q_n s^n, \mathbf{q} \in Q\} \tag{1.8}$$

polinom ailesine aralık polinomlar ailesi denir. Aralık polinomlar ailesi (1.8) verildiğinde

$$\begin{aligned}
K_1(s) &= q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^- s^5 + q_6^+ s^6 + \cdots \\
K_2(s) &= q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^- s^6 + \cdots \\
K_3(s) &= q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + q_6^- s^6 + \cdots \\
K_4(s) &= q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^+ s^6 + \cdots
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan n. dereceden $K_1(s)$, $K_2(s)$, $K_3(s)$, $K_4(s)$ polinomlarına Kharitonov polinomları denir.

Teorem 1.3 (Kharitonov) *$\mathcal{P}$ (1.8) değişmez dereceli aralık polinomlar ailesi verilsin. $\mathcal{P}$'nin gürbüz kararlı olması için gerek ve yeter koşul $K_1(s)$, $K_2(s)$, $K_3(s)$, $K_4(s)$ Kharitonov polinomlarının kararlı olmasıdır* [3].

Kharitonov teoreminin $0 \in [q_n^-, q_n^+]$ $(q_n^- < q_n^+)$ olması durumunda da geçerli olduğu [4] çalışmasında gösterilmiştir.

$\mathcal{P}$ (1.8) aralık polinomlar ailesinin gürbüz kararlı olup olmadığının $K_1(s)$, $K_2(s)$, $K_3(s)$, $K_4(s)$ polinomları ile belirlenebilmesi Kharitonov teoreminin gücünü göstermektedir.

Kharitonov teoreminin orjinal ispatından farklı bir ispatı Barmish [1] tarafından verilmiştir. Bu yeni ispatta kullanılan ve diğer polinom ailelerinin gürbüz kararlılığı problemlerinde de oldukça işe yarayan bazı kavram ve özellikler aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.4 *$\mathcal{P}$ (1.6) polinomlar ailesi verilsin. $\omega \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$p(j\omega, Q) = \{p(j\omega, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$$

kümesine $\mathcal{P}$'nin $\omega \in \mathbb{R}$ deki değer kümesi denir.

Burada

$$\begin{aligned} p(j\omega, \mathbf{q}) &= (a_0(\mathbf{q}) - a_2(\mathbf{q})\omega^2 + \cdots) + j\omega(a_1(\mathbf{q}) - a_3(\mathbf{q})\omega^2 + \cdots) \\ &= \overline{(a_0(\mathbf{q}) - a_2(\mathbf{q})\omega^2 + \cdots) - j\omega(a_1(\mathbf{q}) - a_3(\mathbf{q})\omega^2 + \cdots)} \\ &= \overline{p(-j\omega, \mathbf{q})} \end{aligned}$$

dir. Buna göre reel katsayılı polinomların herhangi bir $\omega \in \mathbb{R}$ deki değer kümesi, $-\omega$ daki değer kümesinin $x-$eksenine göre simetriğidir.

Teorem 1.4 *$Q \subset \mathbb{R}^m$ yol bağlantılı ve $i = 0, 1, ..., n$ için $a_i : Q \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sürekli olmak üzere $\mathcal{P}$ (1.6) değişmez dereceli polinom ailesi verilsin. Bu durumda öyle $s_i : Q \to \mathbb{C}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ sürekli fonksiyonları vardır ki, her $\mathbf{q} \in Q$ için $p(s, \mathbf{q})$ polinomunun kökleri $s_1(\mathbf{q})$, $s_2(\mathbf{q})$, ..., $s_n(\mathbf{q})$ dir* [5].

Teorem 1.5 (Sıfırı İçermeme Prensibi) *$Q \subset \mathbb{R}^m$ yol bağlantılı ve $i = 0, 1, ..., n$ için $a_i : Q \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sürekli olmak üzere $\mathcal{P}$ (1.6) değişmez dereceli polinomlar ailesi verilsin. $\mathcal{P}$'de en az bir kararlı $p(s, \mathbf{q}^0)$ polinomu bulunsun. $\mathcal{P}$ polinomlar ailesinin gürbüz kararlı olması için gerek ve yeter koşul her $0 \leq \omega$ için $0 \notin p(j\omega, Q)$ olmasıdır* [1].

$\mathcal{P}$ (1.8) aralık polinomlar ailesinin $\omega \in \mathbb{R}$ deki değer kümesi kompleks düzlemde köşeleri $K_1(j\omega)$, $K_2(j\omega)$, $K_3(j\omega)$, $K_4(j\omega)$ olan, eksenlere paralel bir dikdörtgendir.

Bir polinom ailesinin sıfırı içermeme prensibi yardımıyla gürbüz kararlılığı araştırılırken, tüm $0 \leq \omega$ için değer kümesinin incelenmesine gerek yoktur. $\mathcal{P}$ aralık polinomlar ailesinde

$$\omega_c = 1 + \frac{\max\{q_0^+, q_1^+, ..., q_{n-1}^+\}}{q_n^-} \tag{1.9}$$

olmak üzere ω_c den büyük ω lardaki değer kümeleri sıfırı içermez [5].

Bir diğer önemli polinomlar ailesi ise polinomlar politopudur. $i = 1, 2, ..., k$ için $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^m$ olmak üzere

$$Q = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m : \ \mathbf{q} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{q}_i, \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geq 0 \ (i = 1, 2, ..., k)\} \tag{1.10}$$

kümesini ele alalım. Bu kümeye $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_k\}$ kümesinin konveks zarfı denir ve $Q =$conv$\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_k\}$ ile gösterilir. Ayrıca $\mathbb{R}^m$ 'deki sonlu sayıda noktadan oluşan bir kümenin konveks zarfına politop denir.

Bir politopun köşesi ve kenarı şu şekilde tanımlanır. $\mathbf{q} \in Q$ verilsin. $\mathbf{q} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$ olacak şekilde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ ve $\lambda \in (0, 1)$ bulunamıyor ise $\mathbf{q}$ noktasına Q politopunun köşe noktası denir. $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ noktaları Q politopunun birbirinden farklı iki köşe noktası olsun.

$$E = \{\mathbf{q} \in Q : \ \mathbf{q} = \lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}, \ \lambda \in [0, 1]\}$$

olarak tanımlayalım. E doğru parçasına ait olmayan her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$ noktaları için

$$E \cap \{\mathbf{q} \in Q : \ \mathbf{q} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}, \ \lambda \in [0, 1]\} = \emptyset$$

ise E doğru parçasına Q politopunun bir kenarıdır denir. Q (1.7) kutusunun köşe noktaları; $\mathbf{q} = (q_0, q_1, ..., q_n)$, $q_i = q_i^-$ veya $q_i = q_i^+$ $(i = 0, 1, ..., n)$ formundadır. Buna göre Q kutusunun 2^{n+1} tane köşesi vardır. Ayrıca bu kutunun herhangi bir kenarı $k \in \{0, 1, ..., n\}$ olmak üzere

$$E = \{\mathbf{q} \in Q : \ q_k^- \leq q_k \leq q_k^+, \ i \neq k \text{ için } q_i = q_i^- \text{ veya } q_i = q_i^+ \ (i = 0, 1, ..., n)\}$$

şeklinde verilebileceğinden, Q nun $(n+1).2^n$ tane kenarı vardır. Ancak herhangi bir politopun köşelerinin ve kenarlarının belirlenmesi ayrı bir problemdir.

$p(s)$ (1.1) polinomuna $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vektörü karşılık getirilebilir.

$p_1(s), ..., p_k(s)$ polinomları n.dereceden olsun. Bu polinomların katsayılarına karşılık gelen vektörler sırasıyla $\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, ..., \mathbf{q}^k \in \mathbb{R}^{n+1}$ ise Q =conv$\{\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, ..., \mathbf{q}^k\}$ olmak üzere

$$\mathcal{P} = \{p(., \mathbf{q}) : \ p(s, \mathbf{q}) = q_0 + q_1 s + \cdots + q_n s^n, \ \mathbf{q} \in Q\}$$

kümesine polinomlar politopu denir. Bir $\mathcal{P}$ polinomlar politopunun kararlılığı aşağıda verilen Kenar teoremi [6] kullanılarak araştırılabilir.

Teorem 1.6 (Kenar Teoremi) *$\mathcal{P}$ değişmez dereceli polinomlar politopu verilsin. $\mathcal{P}$'nin gürbüz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul Q politopunun her bir kenarı için bu kenara karşılık gelen Q'nun $\mathbf{q}^{i_1}$, $\mathbf{q}^{i_2}$ köşe noktalarında*

$$p_{i_1,i_2}(s, \lambda) = \lambda p(s, q^{i_1}) + (1-\lambda) p(s, q^{i_2}), \quad \lambda \in [0,1] \tag{1.11}$$

polinomlarının kararlı olmasıdır.

Denklem (1.11) ile verilen polinomların kümesine polinom segmenti denir. Bu segmentin kararlılığı ise aşağıda verilen Yardımcı Teorem 1.2 ile kontrol edilir [7].

$p_1(s)$ ve $p_2(s)$ n. dereceden iki polinom olsun. $\omega \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\{z \in \mathbb{C} : \ z = \lambda p_1(j\omega) + (1-\lambda) p_2(j\omega), \ \lambda \in [0,1]\}$$

kümesi kompleks düzlemde bir doğru parçası belirtir.

$$p_1(j\omega) = (a_0 - a_2\omega^2 + \cdots) + j(a_1\omega - a_3\omega^3 + \cdots)$$

olacağından $i = 1, 2$ için $p_i(j\omega)$ nın reel kısmı $p_i^e(\omega)$ ve imajiner kısmı $p_i^o(\omega)$ ile gösterilsin. Bu durumda $p_i(j\omega) = p_i^e(\omega) + jp_i^o(\omega)$ $(i = 1, 2)$ şeklinde yazılabilir.

Yardımcı Teorem 1.2 (Segment Lemma) *$p_1(s)$ ve $p_2(s)$ n. dereceden pozitif katsayılı, kararlı iki polinom olsun.*

$$L = \{p(., \lambda) : p(s, \lambda) = \lambda p_1(s) + (1-\lambda) p_2(s), \ \lambda \in [0,1]\}$$

polinom segmentine ait bir polinomun $s = j\omega$ *(imajiner) köke sahip olması için gerek ve yeter koşul*

$$\begin{aligned} p_1^e(j\omega)p_2^o(j\omega) - p_1^o(j\omega)p_2^e(j\omega) &= 0 \quad (1.12)\\ p_1^e(j\omega)p_2^e(j\omega) &\leq 0 \quad (1.13)\\ p_1^o(j\omega)p_2^o(j\omega) &\leq 0 \quad (1.14)\end{aligned}$$

sağlanmasıdır [7].

Aralık polinomlar ailesi ve polinomlar politopundan daha geniş bir aile olan multilineer (multi-afin) polinomlar ailesini tanımlayalım.

Tanım 1.5 $f : Q \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu verilsin.* f *fonksiyonu her* $i = 1, 2, ..., m$ *için* $\mathbf{q} \in Q$*'nun* q_i *bileşeni dışındaki diğer bileşenler sabit olmak üzere* q_i*'ye göre afin ise* f *fonksiyonuna multilineer fonksiyon denir.*

$a_k : Q \to \mathbb{R}$ fonksiyonları her $k = 0, 1, ..., n$ için multilineer fonksiyonlar ise $\mathcal{P}$ (1.6) polinomlar ailesine multilineer polinomlar ailesi denir.

Eğer Q belirsizlik kümesi bir kutu ise $f : Q \to \mathbb{R}$ multilineer fonksiyonunun maksimum ve minimum değerini veren önemli bir teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.7 Q *(1.7) kutusu verilsin.* $\mathbf{q}^i$ $(i = 1, 2, 3..., 2^{n+1})$ *ile* Q *kutusunun köşeleri gösterilsin.* $f : Q \to \mathbb{R}$ *multilineer bir fonksiyon ise*

$$\min_{\mathbf{q}\in Q} f(\mathbf{q}) = \min_{1\leq i\leq 2^{n+1}} f(\mathbf{q}^i) \quad ve \quad \max_{\mathbf{q}\in Q} f(\mathbf{q}) = \max_{1\leq i\leq 2^{n+1}} f(\mathbf{q}^i)$$

dir (Yani f*, maksimum ve minimum değerlerini* Q*'nun köşe noktalarında alır)* [1].

Bu ailenin gürbüz kararlılığının incelenmesi 3. ve 4. bölümlerde ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

Polinomlar ailesinde olduğu gibi bir matrisin girdileri de parametrelere bağlı olabilir. Örneğin, her $i, j = 1, 2, ..., n$ için $q_{ij}^- \leq q_{ij}^+$ olacak şekilde $q_{ij}^-, q_{ij}^+ \in \mathbb{R}$

verilsin. $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n^2}$ ve $q_{ij}^- \leq q_{ij} \leq q_{ij}^+$ olmak üzere

$$A(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

matrislerinden oluşan $\mathcal{A}$ kümesi verilsin. $\mathcal{A}$ kümesine aralık matrisler ailesi denir.

2×2 lik

$$A(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \; q_{ij}^- \leq q_{ij} \leq q_{ij}^+ \; (i, j = 1, 2)$$

matris ailesi ele alındığında, $A(\mathbf{q})$'nun karakteristik polinomu $p(s, \mathbf{q}) = (q_{11}q_{12} - q_{21}q_{22}) - (q_{11} + q_{22})s + s^2$ dir. Bu polinomun katsayıları multilineer fonksiyonlardır. $p(s, \mathbf{q})$ polinomunun derecesi 2 ve başkatsayısı pozitif olduğundan, $A(\mathbf{q})$ matris ailesinin gürbüz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul tüm köşe matrislerinin (Q'nun köşelerine karşılık gelen matrislerin) kararlı olmasıdır. [8] de 12 tane özel olarak belirlenmiş köşe matrisi için aynı sonucun geçerli olduğu gösterilmiştir.

$n \geq 3$ olması durumunda ise Q nun köşelerine karşılık gelen matrislerin kararlılığı, $n \times n$ lik aralık matris ailelerinin gürbüz kararlılığı için yeterli olmamaktadır [1].

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \operatorname{conv}\{A_1, A_2, ..., A_k\} \\ &= \{A : \; A = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i, \; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \; \alpha_i \geq 0 \; (i = 1, 2, .., k)\} \end{aligned}$$

matrisler politopu verildiğinde polinomlar politopunun gürbüz kararlılığında kullanılan Kenar teoremi bu matris ailesi için geçerli değildir [9].

2. KENAR TEOREMİNİN GEÇERLİ OLDUĞU BİR MATRİSLER POLİTOPU

A_1, A_2, ..., A_k matrisleri $n \times n$ lik reel, kararlı matrisler olsun.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \text{conv}\{A_1, A_2, ..., A_k\} \\ &= \{A : \ A = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i, \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geq 0 \ (i = 1, 2, .., k)\}\end{aligned}$$

matrisler politopunun gürbüz kararlılığı genel bir problemdir. Burada

$$\text{Rank } (A_i - A_j) = 1 \ (i, j = 1, 2, ..., k \text{ ve } i \neq j)$$

olan $\mathcal{A}$ matrisler politopunun kararlı olması için gerek ve yeter koşul verilecektir [10]. Gerekli bazı tanım ve özellikler aşağıda verilmiştir.

A $n \times n$ lik reel matrisinin öz değerleri λ_1, λ_2, ...,λ_n ise bu matrisin determinantı öz değerlerinin çarpımına eşittir. Yani

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n$$

dir. I_n ile $n \times n$ lik birim matrisi gösterilsin. $\lambda \in \mathbb{C}$, A matrisinin bir öz değeri olsun. Bu durumda $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ olacak şekilde $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vardır. Buna göre

$$\begin{aligned}(I_n + A)\mathbf{x} &= \mathbf{x} + A\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x} + \lambda \mathbf{x} \\ &= (1 + \lambda)\mathbf{x}\end{aligned}$$

olacağından $(1 + \lambda)$ kompleks sayısı $(I_n + A)$ nın öz değeridir.

Teorem 2.1 *$m \leq n$ olmak üzere A, $m \times n$ lik ve B, $n \times m$ lik iki reel matris olsun. Bu durumda $p_{BA}(s) = s^{n-m} p_{AB}(s)$ dir* [11].

Bu teoreme göre BA matrisinin $n - m$ tane 0 öz değeri vardır ve m tane özdeğeri ise AB matrisinin öz değerleri ile aynıdır. AB matrisinin öz değerleri γ_1, γ_2, ...,γ_m ise BA matrisinin öz değerleri γ_1, γ_2, ...,γ_m ve diğer $n - m$ tane özdeğeri $\gamma_{m+1} = 0$, ...,$\gamma_n = 0$ dır.

$$\begin{aligned}\det(I_m + AB) &= (1+\gamma_1)...(1+\gamma_m) \\ \det(I_n + BA) &= (1+\gamma_1)...(1+\gamma_m)\underbrace{(1+0)...(1+0)}_{n-m \text{ tane}}\end{aligned}$$

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA)$$

olduğu görülür.

$A(\{j\}', \{i\}')$ ile A matrisinin j. satır ve i. sütununun silinmesiyle elde edilen A nın alt matrisini gösterilsin.

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(\{j\}', \{i\}')$$

ile tanımlanan $n \times n$ lik $B = (b_{ij})$ matrisinin transpozuna A nın adjointi denir ve adj$A$ ile gösterilir. A matrisi için

$$(\text{adj}A)A = A(\text{adj}A) = (\det \text{A})I_n \tag{2.1}$$

dir [11]. Eğer A matrisi terslenebilir bir matris ise ($\det A \neq 0$), A matrisinin tersi A^{-1} için

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj}A$$

olduğu (2.1) eşitliği kullanılarak gösterilebilir.

Bir $m \times n$ lik A matrisinin rankı, bu matrisin lineer bağımsız satır veya sütun sayısı olarak tanımlanabilir ve Rank(A) ile gösterilir. Eğer Rank(A)$= 1$ ise $A = \mathbf{x}\,\mathbf{y}^T$ olacak şekilde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vardır ($\mathbf{y}^T$ ile $\mathbf{y}$ nin transpozu gösterilmektedir).

Bu tanım ve özellikler kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2 *Her $i = 1, 2, ..., k$ için $n \times n$ lik reel $A_1, A_2, ..., A_k$ matrisleri Rank($A_i - A_j$) $= 1$ ($i, j = 1, 2, ..., k$ ve $i \neq j$) olacak şekilde verilsin.*
$\mathcal{A}$ =conv$\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ olmak üzere $\mathcal{A}$'nın gürbüz kararlı olması için gerek ve yeter koşul $i, j = 1, 2, ..., k$ ve $i \neq j$ için $\mathcal{A}_{i,j}$ =conv$\{A_i, A_j\}$ alt ailelerinin kararlı olmasıdır.

Kanıt. $\Rightarrow$: $\mathcal{A}$ gürbüz kararlı ise $i,j=1,2,...,k$ ve $i\neq j$ için $\mathcal{A}_{i,j}$ =conv$\{A_i,A_j\}$ alt ailelerinin kararlı olması açıktır.

$\Leftarrow$: $A\in\mathcal{A}$ olsun. Bu durumda $A=\alpha_1A_1+\cdots+\alpha_kA_k$ olacak şekilde $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i=1$, $\alpha_i\geq 0$ $(i=1,2,..,k)$ skalerleri vardır.

$A_0=A_1$ olsun ($A_2,...,A_k$ matrislerinden herhangi biri alınabilir).

Rank$(A_i-A_j)=1$ $(i,j=1,2,...,k$ ve $i\neq j)$ olduğundan $i=1,2,...,k$ için

$$A_i=A_0+\mathbf{b}\rho_i^T$$

olacak şekilde $\rho_i\in\mathbb{R}^n$ ve sabit bir $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ vektörü vardır.

$$\begin{aligned}A &= \alpha_1A_1+\cdots+\alpha_kA_k\\ &= \alpha_1(A_0+\mathbf{b}\rho_1^T)+\cdots+\alpha_k(A_0+\mathbf{b}\rho_k^T)\\ &= A_0+\mathbf{b}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\rho_i^T\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. A matrisinin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned}p_A(s) &= \det(sI-A)\\ &= \det(sI-A_0-\mathbf{b}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\rho_i^T)\\ &= \det\left[(sI-A_0)\left(I-(sI-A_0)^{-1}\mathbf{b}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\rho_i^T\right)\right]\\ &= \det(sI-A_0)\left[1-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\rho_i^T(sI-A_0)^{-1}\mathbf{b}\right]\\ &= \det(sI-A_0)-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\rho_i^T\text{adj}(sI-A_0)\mathbf{b}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. A_0 matrisinin karakteristik polinomu $p_{A_0}(s)$ ve $p_i(s)=\rho_i^T\text{adj}(sI-A_0)\mathbf{b}$ $(i=1,2,...,k)$ polinomları için, A matrisinin karakteristik polinomu

$$p_A(s)=p_{A_0}(s)-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\ p_i(s)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bir A_i $(i=1,2,...,k)$ matrisinin karakteristik polinomu

$$p_{A_i}(s)=p_{A_0}(s)-p_i(s)$$

dir. Diğer taraftan $i, j = 1, 2, ..., k$ ve $i \neq j$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{i,j} &= \text{conv}\{A_i, A_j\} \\ &= \{A: \ A = \lambda A_i + (1-\lambda)A_j, \ \lambda \in [0,1]\}\end{aligned}$$

olduğundan $A \in \mathcal{A}_{i,j}$ matrisinin karakteristik polinomu $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}p_A &= p_{A_0}(s) - (\lambda p_i(s) + (1-\lambda)p_j(s)) \\ &= \lambda(p_{A_0}(s) - p_i(s)) + (1-\lambda)(p_{A_0}(s) - p_j(s)) \\ &= \lambda p_{A_i}(s) + (1-\lambda)p_{A_j}(s)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buna göre $\mathcal{A}$ =conv$\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ matrisler politopunun gürbüz kararlılığı

$$\text{conv}\{p_{A_1}(s), p_{A_2}(s), ..., p_{A_k}(s)\} \tag{2.2}$$

polinomlar politopunun gürbüz kararlılığına denktir. conv$\{A_i, A_j\}$ $(i, j = 1, 2, ..., k$ ve $i \neq j)$ kararlı olduğundan Kenar teoremine göre (2.2) ailesi gürbüz kararlıdır. Yani $\mathcal{A}$ matrisler politopu gürbüz kararlıdır. ■

Örnek 2.1

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 1 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -6 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

matrisleri verilsin.

$\mathcal{A}$ =*conv*$\{A_1, A_2, A_3\}$ *matris politopu için;*

$$\begin{aligned}Rank\ (A_2 - A_1) &= Rank \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 1 \\ Rank\ (A_3 - A_1) &= Rank \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = 1 \\ Rank\ (A_3 - A_2) &= Rank \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix} = 1\end{aligned}$$

dir.

$$
\begin{aligned}
A_2 &= A_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
A_3 &= A_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

yazılabilir.

A_1, A_2, A_3 *matrislerine karşılık gelen karakteristik polinomlar*

$$
\begin{aligned}
p_{A_1}(s) &= 7 + 32s + 11s^2 + s^3, \\
p_{A_2}(s) &= 7 + 25s + 10s^2 + s^3, \\
p_{A_3}(s) &= 14 + 43s + 12s^2 + s^3
\end{aligned}
$$

kararlıdır.

$A \in conv\{A_1, A_2\}$ *ise*

$$
A(\lambda) = \begin{pmatrix} -4 & -3-3\lambda & -4+\lambda \\ 0 & -3 & 1 \\ -3 & -4+3\lambda & -3-\lambda \end{pmatrix}, \ \lambda \in [0,1]
$$

yazılabilir. $A(\lambda)$ *matrisine karşılık gelen karakteristik polinom*

$$
p(s,\lambda) = 7 + (25+7\lambda)s + (10+\lambda)s^2 + s^3
$$

dir ve (1.3) sonucu kullanılırsa her $\lambda \in [0,1]$ *için*

$$
0 < 243 + 95\lambda + 7\lambda^2
$$

olduğundan $conv\{A_1, A_2\}$ *kararlıdır.*

Diğer ikililere karşılık gelen karakteristik polinomlar

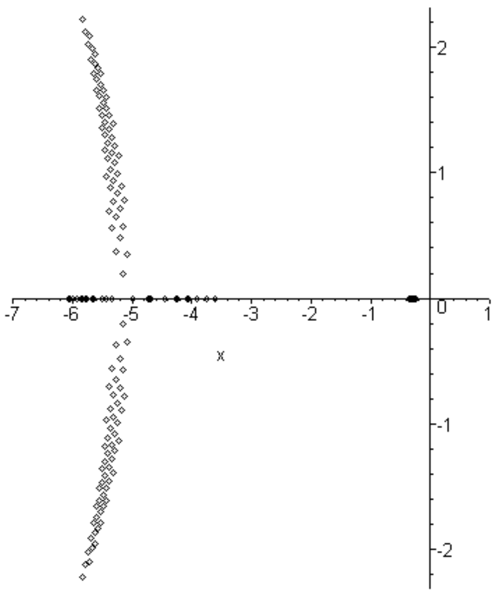
$$
\begin{gathered}
conv\{A_1, A_3\} \ \textit{için} \quad p(s,\lambda) = (14-7\lambda) + (43-11\lambda)s + (12-\lambda)s^2 + s^3 \\
0 < 502 - 168\lambda + 11\lambda^2, \ \lambda \in [0,1]
\end{gathered}
$$

$$conv\{A_2, A_3\} \text{ için } \quad p(s,\lambda) = (14-7\lambda) + (43-18\lambda)s + (12-2\lambda)s^2 + s^3$$

$$0 < 502 - 295\lambda + 36\lambda^2, \;\; \lambda \in [0,1]$$

dir.

Teorem 2.2 ye göre $\mathcal{P}$ matris politopu gürbüz kararlıdır (Şekil 2.1).



Şekil 2.1: $\mathcal{A}$ matris ailesinin öz değerleri.

3. MULTİLİNEER POLİNOM AİLELERİNİN KARARLILIĞI

$Q \subset \mathbb{R}^m$ köşeleri $\{\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, ..., \mathbf{q}^{2^m}\}$ olan bir kutu ve $i = 0, 1, ..., n$ için $a_i : Q \to \mathbb{R}$ multilineer fonksiyonlar olmak üzere

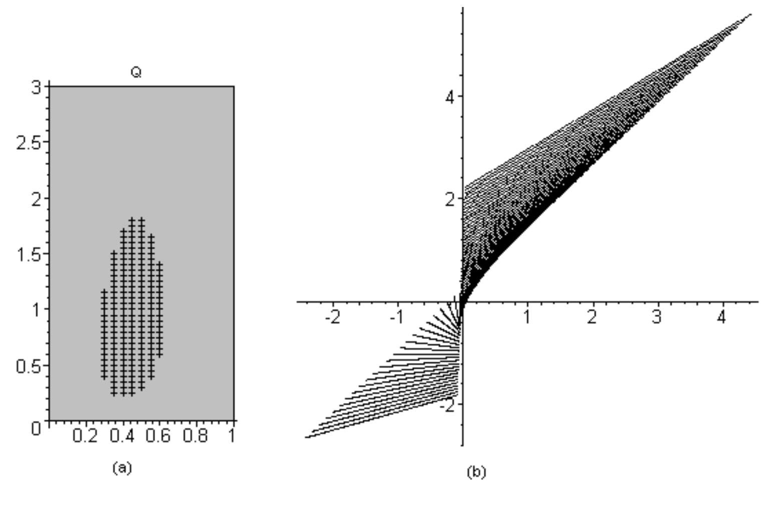
$$p(s, \mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q})s + \cdots + a_n(\mathbf{q})s^n \tag{3.1}$$

$\mathcal{P} = \{p(., \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$ multilineer polinomlar ailesi verilsin. Q nun köşelerine karşılık gelen polinomların kararlı olması $\mathcal{P}$ 'nin gürbüz kararlılığı için yeterli olmadığı gibi, Kenar teoremi de geçerli değildir [1].

Örnek 3.1 $0 \leq q_1 \leq 1$, $0 \leq q_2 \leq 3$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} p(s, \mathbf{q}) &= s^4 + (q_1 + q_2 + 2.56)s^3 + (q_1 q_2 + 2.06q_1 + 1.56q_2 + 2.871)s^2 \\ &\quad +(1.06q_1q_2 + 4.841q_1 + 1.561q_2 + 3.164)s \\ &\quad +(4.032q_1q_2 + 3.773q_1 + 1.985q_2 + 1.853) \end{aligned}$$

4. dereceden multilineer polinomlar ailesinin tüm köşe ve kenar polinomları kararlıdır.
Diğer taraftan bu polinom ailesinin $\omega = 1.33$ deki değer kümesinin sıfırı içerdiği görülmektedir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1: Q nun kararsız noktaları, $\omega = 1.33$ deki değer kümesi.

Buna göre $\mathbf{q} = (0.5, 1)$ *noktası alınırsa, karşılık gelen polinom*

$$\begin{aligned} p(s) &= s^4 + 4.06s^3 + 5.961s^2 + 7.676s + 7.741 \\ &= (s + 2.2389)(s + 1.8263)(s - 0.0026 + j1.376) \\ &\quad (s - 0.0026 - j1.376) \end{aligned}$$

dir ve bu polinom $s = 0.0026 \pm j1.376$ *köküne sahip olduğu için kararsızdır. Dolayısıyla aile gürbüz kararlı değildir.*

Şekil 3.1 de görüldüğü gibi, multilineer polinomlar ailelerinin bir $\omega \in \mathbb{R}$'deki değer kümesinin bulunması aralık polinomlar ailesi ve polinomlar polito-puna göre çok daha zordur.

$\mathcal{P}$ (3.1) multilineer polinomlar ailesini kapsayan bir aralık polinomlar ailesi bulunabilir. $i = 0, 1, ..., n$ için

$$\begin{aligned} \beta_i^- &= \min_{\mathbf{q} \in Q} a_i(\mathbf{q}) = \min_{1 \leq k \leq 2^m} a_i(\mathbf{q}^k), \\ \beta_i^+ &= \max_{\mathbf{q} \in Q} a_i(\mathbf{q}) = \max_{1 \leq k \leq 2^m} a_i(\mathbf{q}^k) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. $\mathcal{P}' = \{p(., \mathbf{r}) : \sum_{i=0}^{n} r_i s^i,\ \beta_i^- \leq r_i \leq \beta_i^+ \ (i = 0, 1, ..., n)\}$ olsun. $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ olduğundan $\mathcal{P}'$ aralık polinomlar ailesi gürbüz kararlı ise $\mathcal{P}$ multilineer polinomlar ailesi de gürbüz kararlıdır. $\mathcal{P}'$ gürbüz kararlı değilse $\mathcal{P}$ için bir şey söylenemez.

Örnek 3.2 $i = 1, 2$ *için* $|q_i| \leq 0.25$ *olsun.*

$$\begin{aligned} p(s, \mathbf{q}) &= s^4 + (0.2q_1q_2 + 0.1q_1 - 0.1q_2 + 5)s^3 + (3q_1q_2 - 4q_2 + 6)s^2 \\ &+ (6q_1 + 8q_2 + 6)s + (-3q_1q_2 + 0.5) \end{aligned}$$

polinomunun katsayılarının değişim aralıkları bulunduğunda

$$\begin{aligned} \tilde{p}(s, \mathbf{q}) &= s^4 + [4.9475, 5.0375]s^3 + [4.8125, 7.1875]s^2 \\ &\quad + [2.5, 9.5]s + [0.3125, 0.6875] \end{aligned}$$

aralık polinomlar ailesi elde edilir. Bu ailenin Kharitonov polinomları

$$\begin{aligned}
K_1(s) &= 0.3125 + 2.5s + 7.1875s^2 + 5.0375s^3 + s^4 \\
K_2(s) &= 0.6875 + 9.5s + 4.8125s^2 + 4.9475s^3 + s^4 \\
K_3(s) &= 0.6875 + 2.5s + 4.8125s^2 + 5.0375s^3 + s^4 \\
K_4(s) &= 0.3125 + 9.5s + 7.1875s^2 + 4.9475s^3 + s^4
\end{aligned}$$

kararlıdır. Aralık polinomlar ailesi gürbüz kararlı olduğundan multilineer polinomlar ailesi de gürbüz kararlıdır.

Örnek 3.3 $q_1 \in [1, 2]$, $q_2 \in [0, 1]$ *verilsin.*

$$p(s, \mathbf{q}) = q_1 q_2 + (1 + q_1)s + q_1 s^2 + s^3$$

polinomunun genişletilmesiyle elde edilen aralık polinomlar ailesi

$$\tilde{p}(s, \mathbf{q}) = [0, 2] + [2, 3]s + [1, 2]s^2 + s^3$$

dir ve bu polinomlar ailesi gürbüz kararlı değildir. $p(s, \mathbf{q})$ *nun katsayı fonksiyonları ele alındığında her* $\mathbf{q} \in [1, 2] \times [0, 1]$ *için* $0 < (1+q_1)q_1 - q_1 q_2$ *olduğundan bu multilineer polinomlar ailesi gürbüz kararlıdır.*

Bir $\mathcal{P}$ (3.1) multilineer polinomlar ailesinin kararlılığının araştırılmasında dönüşüm teoremi önemli bir yer tutar.

Teorem 3.1 (Dönüşüm Teoremi) $Q \subset \mathbb{R}^m$ *köşeleri* $\{\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, ..., \mathbf{q}^{2^m}\}$ *olan bir kutu ve* $\mathcal{P} = \{p(., \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$ *değişmez dereceli multilineer polinomlar ailesi verilsin.* $p(s, \mathbf{q}_0)$ *kararlı polinomu* $\mathcal{P}$ *ailesine ait olsun. Eğer her* $\omega \geq 0$ *için*

$$0 \notin conv\{p(j\omega, \mathbf{q}^i) : \ i = 1, 2, ..., 2^m\}$$

ise $\mathcal{P}$ *multilineer polinomlar ailesi gürbüz kararlıdır* [1].

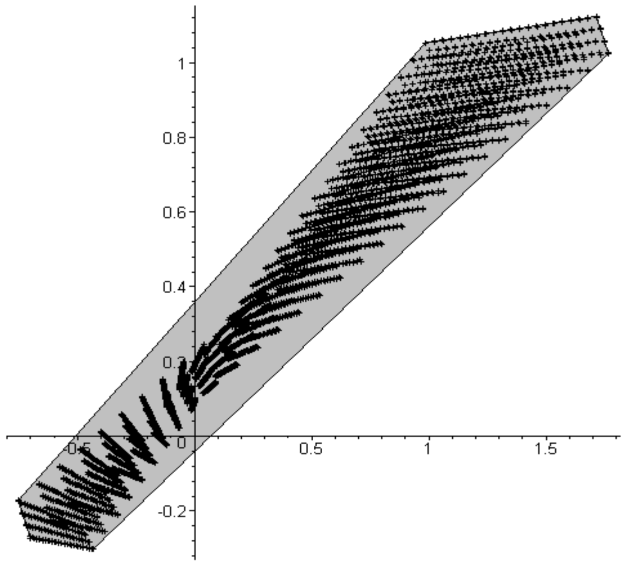
Teorem 3.2 z *kompleks sayısı* $conv\{p(j\omega, \mathbf{q}^i) : i = 1, 2, ..., 2^m\}$ *politopunun kenarına ait bir nokta olsun. Eğer* $z \in p(j\omega, Q)$ *ise* $p(j\omega, \mathbf{q}) = z$ *olacak şekilde* Q*'nun kenarı üzerinde bir* $\mathbf{q} \in Q$ *vardır* [12].

Teorem 3.1 multilineer ailenin gürbüz kararlılığı için yeter koşul vermektedir.

Örnek 3.4 $-2.4780 \leq q_1 \leq -1.4471$, $-0.0518 \leq q_2 \leq -0.0194$, $-0.0026 \leq q_3 \leq -0.0012$, $2 \leq q_4 \leq 3.437$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} p(s, \mathbf{q}) &= s^3 + (-q_2 - q_3 - q_1)s^2 + (q_1q_2 + q_2q_3 + 0.7115q_4 + q_1q_3)s \\ &\quad -q_1q_2q_3 - 0.7115q_1q_4 \\ &= (s - q_1)(s^2 - (q_2 + q_3)s + q_2q_3 + 0.7115q_4) \end{aligned}$$

polinomunun birinci çarpanı kararlıdır. İkinci çarpanın katsayıları ise pozitiftir. Buna göre $p(s, \mathbf{q})$ *kararlıdır.*
Bu aile için dönüşüm teoremi uygulanırsa, $\omega = 1.3$ *deki* $p(1.3j, Q)$ *değer kümesinin konveks zarfı sıfırı içerir (Şekil 3.2).*



Şekil 3.2: conv $p(1.3j, Q)$

Her $\omega \geq 0$ için $p(j\omega, Q)$ konveks küme ise bu teorem $\mathcal{P}$ (3.1) ailesinin gürbüz kararlılığı için gerek ve yeter koşul verir.

3.1. İki Parametreli Multilineer Polinom Ailelerinin Kararlılığı

$Q = \{(q_1, q_2) : q_1^- \leq q_1 \leq q_1^+, q_2^- \leq q_2 \leq q_2^+\}$ olsun. Bu durumda öyle $f_0(s)$, $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$ polinomları vardır ki $\mathcal{P}$ (3.1) multilineer polinomlar ailesi

$$p(s, \mathbf{q}) = f_0(s) + q_1 f_1(s) + q_2 f_2(s) + q_1 q_2 f_3(s) \tag{3.2}$$

şeklinde ifade edilebilir. Q nun köşelerinin kümesini

$$\Gamma = \{\mathbf{q}^1 = (q_1^-, q_2^-), \mathbf{q}^2 = (q_1^+, q_2^-), \mathbf{q}^3 = (q_1^-, q_2^+), \mathbf{q}^4 = (q_1^+, q_2^+)\}$$

ile gösterilsin.

Belirlenmiş bir $\omega \in \mathbb{R}$ için $s = j\omega$ olsun. Her $i = 0, 1, 2, 3$ olmak üzere $f_i(j\omega)$ nın reel kısmı $g_i(j\omega)$, imajiner kısmı $h_i(j\omega)$ ile gösterilirse

$$f_i(j\omega) = g_i(j\omega) + jh_i(j\omega)$$

şeklinde ifade edilebilir ($g_i(j\omega)$, $h_i(j\omega)$ kısaca g_i, h_i ile gösterilsin). Her $\mathbf{q} \in Q$ için $p(j\omega, \mathbf{q})$ dönüşümünün $J(\mathbf{q})$ Jacobi matrisinin determinantı

$$\begin{aligned} \det J(\mathbf{q}) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re} p(j\omega,\mathbf{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial \operatorname{Re} p(j\omega,\mathbf{q})}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \operatorname{Im} p(j\omega,\mathbf{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial \operatorname{Im} p(j\omega,\mathbf{q})}{\partial q_2} \end{pmatrix} \\ &= (g_1 h_2 - g_2 h_1) + q_1(g_1 h_3 - g_3 h_1) + q_2(g_3 h_2 - g_2 h_3) \end{aligned}$$

olur.

$Q \subset \mathbb{R}^m$ kutusuna ait ve eksenlerden birine paralel bir doğru parçası ele alınsın. Bu doğru parçası üzerindeki noktaların sadece bir bileşeni aralıkta değişir, diğer bileşenleri ise sabittir. Böyle bir doğru parçasının $p(j\omega, \mathbf{q})$ multilineer dönüşümü altındaki görüntüsü kompleks düzlemde bir doğru parçasıdır.

Yardımcı Teorem 3.1 *$Q \subset \mathbb{R}^2$ kutusu verilsin. $\mathbf{q} \in Q$ noktasından geçen ve q_i eksenine paralel olan Q'ya ait bir doğru parçasının $p(j\omega, \mathbf{q})$ dönüşümü altındaki görüntüsünün eğimi*

$$\frac{\frac{\partial \operatorname{Im} p(j\omega,\mathbf{q})}{\partial q_i}}{\frac{\partial \operatorname{Re} p(j\omega,\mathbf{q})}{\partial q_i}}$$

dir [13].

Teorem 3.3 *$0 < \omega$ ve (3.2) polinomlar ailesi verilsin. $p(j\omega, Q)$ dört köşeli konveks politoptur $\Leftrightarrow$ $i = 1,2,3,4$ için $\det J(\mathbf{q}^i)$ sıfırdan farklı, aynı işaretli sayılardır* [13].

Bir multilineer polinomlar ailesi verildiğinde, her $0 < \omega$ için $p(j\omega, Q)$ değer kümesinin konveks olduğu Teorem 3.3 kullanılarak belirlenebiliyor ise bu ailenin gürbüz kararlılığı Kenar teoremi kullanılarak incelenebilir.

Örnek 3.5 *$Q = \{(q_1, q_2) : 1 \le q_1 \le 1.5,\ 2 \le q_2 \le 2.2\}$ verilsin.*

$$p(s, \mathbf{q}) = q_1q_2 - 1.9 + (q_1q_2 - 1)s + (1 + q_2)s^2 + 3.5s^3 + q_1s^4 + s^5 \tag{3.3}$$

multilineer polinomlar ailesinin kararlılığını araştıralım.
Katsayıların değişim aralıkları

$$\begin{aligned}
\beta_0^- &= \min_{q\in Q}(q_1q_2 - 1.9) = 0.1, & \beta_0^+ &= \max_{q\in Q}(q_1q_2 - 1.9) = 1.4\\
\beta_1^- &= \min_{q\in Q}(q_1q_2 - 1) = 1, & \beta_1^+ &= \max_{q\in Q}(q_1q_2 - 1) = 2.3\\
\beta_2^- &= \min_{q\in Q}(1 + q_2) = 3, & \beta_2^+ &= \max_{q\in Q}(1 + q_2) = 3.2\\
\beta_4^- &= \min_{q\in Q} q_1 = 1, & \beta_4^+ &= \max_{q\in Q} q_1 = 1.5
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buna göre (3.3) multilineer ailesinin aralık polinomlar ailesine genişletilmesi

$$\tilde{p}(s, \mathbf{q}) = [0.1, 1.4] + [1, 2.3]s + [3, 3.2]s^2 + 3.5s^3 + [1, 1.5]s^4 + s^5$$

dir. Bu aralık polinomlar ailesinin Kharitonov polinomlarından üçüncüsü

$$K_3(s) = 1.4 + s + 3s^2 + 3.5s^3 + 1.5s^4 + s^5$$

dir ve $s = 0.1085 \pm j0.685$ köküne sahiptir.
Diğer taraftan $\omega = 0$ için

$$p(0j, \mathbf{q}) = q_1q_2 - 1.9$$

olduğundan $0 \notin p(j0, \mathbf{q}) = [0.1, 3.3]$ dir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
p_1(s,\mathbf{q}^1) &= 0.1+s+3s^2+3.5s^3+s^4+s^5\\
p_2(s,\mathbf{q}^2) &= 0.3+1.2s+3.2s^2+3.5s^3+s^4+s^5,\\
p_3(s,\mathbf{q}^3) &= 0.1+s+3s^2+3.5s^3+1.5s^4+s^5,\\
p_4(s,\mathbf{q}^4) &= 1.1+s+3s^2+3.5s^3+s^4+s^5
\end{aligned}
$$

köşe polinomları kararlıdır.

$0<\omega$ *sayısı için* $p(j\omega,Q)$ *değer kümesini araştıralım.* $s=j\omega$ *olsun.*

$$p(j\omega,\mathbf{q})=(-1.9+q_1q_2)-(1+q_2)\omega^2+q_1\omega^4+j\omega(-1+q_1q_2-3.5\omega^2+\omega^4)$$

ve buradan

$$
\begin{aligned}
\det J(\mathbf{q}) &= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re} p(j\omega,\mathbf{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial \operatorname{Re} p(j\omega,\mathbf{q})}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \operatorname{Im} p(j\omega,\mathbf{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial \operatorname{Im} p(j\omega,\mathbf{q})}{\partial q_2} \end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix} \omega^4+q_2 & -\omega^2+q_1 \\ \omega q_2 & \omega q_1 \end{pmatrix}\\
&= \omega^3(\omega^2 q_1+q_2)
\end{aligned}
$$

dir.

Her $\mathbf{q}\in Q$ *ve* $0<\omega$ *için* $0<\omega^3(\omega^2q_1+q_2)$ *dir. Teorem* 3.3*'e göre* (*3.3*) *polinomlar ailesinin herhangi bir* $0<\omega$ *daki değer kümesi konvekstir.*

$$p(j\omega,Q)=conv\; p(j\omega,Q)=conv\; p(j\omega,\Gamma)$$

Dönüşüm teoremi ve Teorem 3.2 kullanılarak, (*3.3*) *multilineer ailesinin gürbüz kararlılığı* Q *kutusunun kenarlarına karşılık gelen polinomların kararlı olup olmadığı incelenerek belirlenebilir.* Q *kutusunun kenarlarının* $p(j\omega,\mathbf{q})$ *dönüşümü altındaki görüntüsü doğru parçası olacağından Yardımcı Teorem 1.2 ile bu kenarların kararlılığı belirlenebilir.*

$\mathbf{q}^1$, $\mathbf{q}^2$ *köşelerinin belirlediği kenar incelendiğinde,*

$$
\begin{aligned}
p_1(j\omega,\mathbf{q}^1) &= 0.1-3\omega^2+\omega^4+j(\omega-3.5\omega^3+\omega^5)\\
p_1^e(j\omega,\mathbf{q}^1) &= 0.1-3\omega^2+\omega^4,\;\; p_1^o(j\omega,\mathbf{q}^1)=(\omega-3.5\omega^3+\omega^5)\\
p_2(j\omega,\mathbf{q}^2) &= 1.1-3\omega^2+1.5\omega^4+j(2\omega-3.5\omega^3+\omega^5)\\
p_2^e(j\omega,\mathbf{q}^2) &= 1.1-3\omega^2+1.5\omega^4,\;\; p_2^o(j\omega,\mathbf{q}^2)=2\omega-3.5\omega^3+\omega^5
\end{aligned}
$$

dir. Denklem (1.12)

$$p_1^e(j\omega,\mathbf{q}^1)p_2^o(j\omega,\mathbf{q}^2) - p_1^o(j\omega,\mathbf{q}^1)p_2^e(j\omega,\mathbf{q}^2) = 0$$

şeklinde olur. Bu denklemin reel kökleri $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0.9274$ *ve* $\omega_3 = 1.7998$ *dir.* $\omega_1 = 0$ *da (3.3) ailesinin değer kümesinin sıfırı içermediği gösterilmiştir.*
$\omega_2 = 0.9274$ *için* $p_1^e(j\omega_2,\mathbf{q}^1)p_2^e(j\omega_2,\mathbf{q}^2) = 0.6451 > 0$ *ve*
$\omega_3 = 1.7998$ *için* $p_1^e(j\omega_2,\mathbf{q}^1)p_2^e(j\omega_2,\mathbf{q}^2) = 6.0439 > 0$
olduğundan (1.13) *eşitsizliği sağlanmaz. Dolayısıyla* $\mathbf{q}^1$, $\mathbf{q}^2$ *köşelerinin belirlediği kenar kararlıdır. Diğer üç kenarın kararlılığı da benzer şekilde incelendiğinde, bu kenarların da kararlı oldukları görülür. Her* $0 < \omega$ *için değer kümesi sürekli olarak değiştiğinden ve sınırı sıfırı bulundurmadığından Teorem* 1.5 *e göre (3.3) multilineer ailesi gürbüz kararlıdır.*

Bu örnekte de görüldüğü gibi, bir multilineer polinomlar ailesinin gürbüz kararlılığı incelenirken değer kümesinin sınırını veren $\mathbf{q} \in Q$ noktalarının bulunması gerekmektedir.

Bir $\omega_0 \in \mathbb{R}$ için $\det J(\mathbf{q}) = 0$ olacak şekilde $\mathbf{q} \in Q$ var ise

$$(g_1h_2 - g_2h_1) + q_1(g_1h_3 - g_3h_1) + q_2(g_3h_2 - g_2h_3) = 0$$

dir ve bu bir doğru denklemidir.

$$\tilde{Q} = \{\mathbf{q} \in Q : (g_1h_2 - g_2h_1) + q_1(g_1h_3 - g_3h_1) + q_2(g_3h_2 - g_2h_3) = 0\}$$

olsun. (3.2) polinomlar ailesinin $p(j\omega_0, Q)$ değer kümesinin sınırı Q nun kenarları ve $\tilde{Q}$ daki noktaların görüntüleri ile belirlenir [2].

Örnek 3.6 $Q = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R} : 0.3 \le q_1 \le 2.5,\ 0 \le q_2 \le 1.7\}$ *ve*

$$p(s,\mathbf{q}) = (2.25 + 6q_1 + 6q_2 + 2q_1q_2) + (2 + q_1 + q_2)s + (2 + q_1 + q_2)s^2 + s^3$$

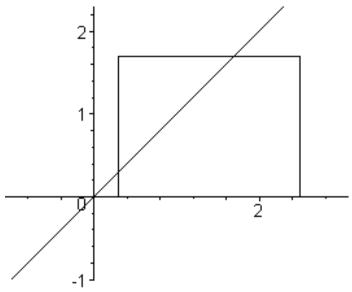
verilsin. $0 < \omega$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} \det J(\mathbf{q}) &= \begin{pmatrix} 6 - \omega^2 + 2q_2 & 6 - \omega^2 + 2q_1 \\ \omega & \omega \end{pmatrix} \\ &= 2\omega(q_2 - q_1) \end{aligned}$$

dir. Buradan

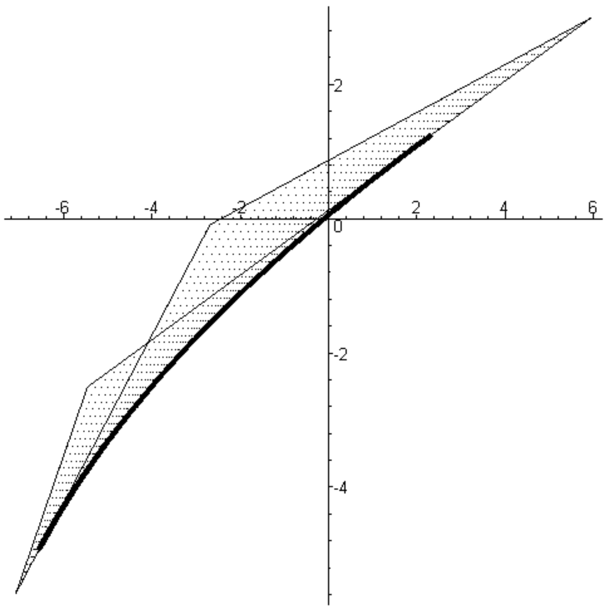
$$2\omega(q_2 - q_1) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem $q_2 = q_1$ *için sağlanır ve çözümü* ω*'dan bağımsızdır (Şekil 3.3). Buna göre herhangi bir* $0 < \omega$ *da* $p(j\omega, Q)$ *değer kümesinin*



Şekil 3.3: Q kutusu ile $q_2 = q_1$ doğrusu.

sınırı (ω *dan bağımsız olarak)* Q *nun dört kenarı ve* $(0.3, 0.3)$ *ile* $(1.7, 1.7)$ *noktalarını birleştiren doğru parçası üzerindeki noktaların görüntüsü bulunarak elde edilir (Şekil 3.4).* Q *kutusunun kenarlarının kararlılığı segment lemma*



Şekil 3.4: $p(2.2j, Q)$ değer kümesi.

ile araştırılabilir. Ancak $(0.3, 0.3)$ *ile* $(1.7, 1.7)$ *noktalarını birleştiren doğru* *parçası eksenlere paralel olmadığından, bu doğru parçasının kararlılığı için segment lemma uygulanamaz. Bu durum ileride incelenilecektir.*

Örnek 3.6 da $\det J(\mathbf{q}) = 0$ denkleminin çözümü ω dan bağımsız elde edilmesine rağmen genellikle bu denklemin çözümü ω ya bağlı olur. Örnek 3.1 de verilen polinomlar ailesi için

$$\begin{aligned}\det J(\mathbf{q}) &= (q_2 + 0.499 - q_1)\omega^5 + (2.553141 - 3.93834q_2 + 6.6894q_1)\omega^3 \\ &\quad + (-3.719732 + 4.189852q_2 - 15.519532q_1)\omega\end{aligned}$$

dir ve bu denklemin çözümü hem ω'ya hem de $\mathbf{q}$'ya bağlıdır. Denklem bu türlü olduğunda değer kümesinin sınırını veren noktalar ω'ya göre değişecektir. Dolayısıyla her ω için $\det J(\mathbf{q}) = 0$ denklemini sağlayan $\mathbf{q} \in Q$ noktalarının belirlenmesi ve bu noktalara karşılık gelen polinomların kararlılıklarının araştırılması gerekecektir. Bu ise oldukça zor bir problemdir.

Denklem (3.1) multilineer polinomlar ailesi verilsin. Belli bir $\omega \in \mathbb{R}$ için $p(j\omega, \mathbf{q}) : Q \to \mathbb{C}$ dönüşümünün Jacobi matrisi

$$J(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re} p(j\omega,\mathbf{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial \operatorname{Re} p(j\omega,\mathbf{q})}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \operatorname{Re} p(j\omega,\mathbf{q})}{\partial q_m} \\ \frac{\partial \operatorname{Im} p(j\omega,\mathbf{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial \operatorname{Im} p(j\omega,\mathbf{q})}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \operatorname{Im} p(j\omega,\mathbf{q})}{\partial q_m} \end{pmatrix}$$

dir. $p(j\omega, Q)$ değer kümesinin sınırı, Q nun kenarlarının ve $\mathrm{Rank} J(\mathbf{q}) < 2$ eşitsizliğini sağlayan $\mathbf{q} \in Q$ noktalarının görüntüleri tarafından kapsanır [2]. $\mathrm{Rank} J(\mathbf{q}) < 2$ eşitsizliğini sağlayan noktaların belirlenmesi kolay değildir. Ancak bazı özel polinom ailelerinde bu yöntem işe yarayabilir.

3.2. Kararlılık İçin Gerek ve Yeter Koşul Verilebilen Özel Bir Multilineer Polinomlar Ailesi

Bu bölümde değer kümesinin sınırlarını veren noktaların $\omega \in \mathbb{R}$ den bağımsız olduğu ve bu noktaların herhangi bir denklemin çözülmesine gerek kalmadan belirlenebildiği bir multilineer polinomlar ailesi ele alınacaktır [14].

Parametreleri $2-$boyutlu bir kutuda değişen multilineer polinomlar ailesinin gürbüz kararlılığının incelenmesinin dahi çok kolay olmadığı görülmektedir.

$$Q = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m : q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, i = 1, 2, ..., m\} \tag{3.4}$$

kutusu olmak üzere $\mathcal{P}$ (3.1) multilineer polinomlar ailesi verilsin. Burada $\omega \in \mathbb{R}$ için

$$p(j\omega, \mathbf{q}) = (a_0(\mathbf{q}) - a_2(\mathbf{q})\omega^2 + \cdots) + j(a_1(\mathbf{q})\omega - a_3(\mathbf{q})\omega^3 + \cdots)$$

olmak üzere $f_\omega : Q \to \mathbb{C}$, $f_\omega(\mathbf{q}) = p(j\omega, \mathbf{q})$ bir multilineer dönüşümdür. Dolayısıyla $i = 1, 2, ..., m$ için

$$f_\omega(q_1, ..., q_{i-1}, q_i + \gamma, q_{i+1}, ...q_m) - f_\omega(q_1, ..., q_{i-1}, q_i, q_{i+1}, ...q_m) = \gamma \frac{\partial f_\omega}{\partial q_i}(\mathbf{q})$$

dir. $G_i(\mathbf{q}) = \frac{\partial f_\omega}{\partial q_i}(\mathbf{q})$ $(i = 1, 2, ..., m)$ (kısaca G_i) ile gösterilsin .

Sıfırdan farklı $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ kompleks sayıları için, eğer

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{z_2}{z_1} &> 0 \text{ ise } z_1 \prec z_2, \\ \operatorname{Im} \frac{z_2}{z_1} &\geq 0 \text{ ise } z_1 \preceq z_2, \\ \operatorname{Im} \frac{z_2}{z_1} &= 0 \text{ ise } z_1 \asymp z_2 \end{aligned}$$

olarak tanımlansın (Burada $z_1 \prec z_2$ ile $0 < \arg z_2 - \arg z_1 < \pi$ olması belirtilmiştir).

$\mathbf{q} \in Q$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I^+ &= \{i : q_i = q_i^+\}, \\ I^- &= \{i : q_i = q_i^-\}, \\ I^o &= \{i : q_i^- < q_i < q_i^+\} \end{aligned}$$

şeklinde indis kümeleri tanımlansın.

Tanım 3.1 $\mathbf{q} \in Q$ *verilsin.*
i) Her $i \in I^o$ *için* $G_i \asymp G$
ii) Her $i \in I^-$, $G_i \neq 0$ *ve her* $k \in I^+$, $G_k \neq 0$ *için* $G_i \preceq G \preceq G_k$
olacak şekilde bir $G \neq 0$ *kompleks sayısı varsa* $\mathbf{q}$*'ya* f_ω *multilineer fonksiyonunun esas noktası denir.*

$f_\omega(Q)$ ile $\mathcal{P}$ (3.1) multilineer polinomlar ailesinin $\omega \in \mathbb{R}$ deki değer kümesi, $\partial f_\omega(Q)$ ile de bu değer kümesinin sınırı gösterilsin.

Teorem 3.4 *Eğer $z \in \partial f_\omega(Q)$ ise $z = f_\omega(\mathbf{q})$ olacak şekildeki $\mathbf{q} \in Q$ noktası f_ω multilineer fonksiyonunun esas noktasıdır* [14].

Bu teorem gösteriyor ki, esas noktaların f_ω altındaki görüntülerinin kümesi $\partial f_\omega(Q)$ kümesini kapsar.

$X_p(\omega)$ ile f_ω'nın esas noktalarının kümesi gösterilsin.

Tanım 3.2 $\mathcal{P}$ (3.1) *multilineer polinomlar ailesi verilsin.*

$$X_p = \bigcup_{0<\omega} X_p(\omega)$$

kümesine $\mathcal{P}$ ailesinin esas noktaları kümesi denir.

Teorem 3.5 *Her $\mathbf{q} \in Q$ için $a_0(\mathbf{q}) \neq 0$ ve $a_n(\mathbf{q}) \neq 0$ olsun. $\mathcal{P}$ (3.1) multilineer polinomlar ailesinin gürbüz kararlı olması için gerek ve yeter koşul*

$$\{p(.,\mathbf{q}) : \ \mathbf{q} \in X_p\}$$

ailesinin gürbüz kararlı olmasıdır [14].

Kanıt. $\Rightarrow$: Denklem (3.1) ile verilen multilineer ailesi gürbüz kararlı ise ailedeki her polinom kararlı olduğundan $\mathbf{q} \in X_p$ olmak üzere $p(s,\mathbf{q})$ polinomları da kararlıdır.

$\Leftarrow$: $\mathbf{q} \in X_p$ olmak üzere $p(s,\mathbf{q})$ polinomları kararlı iken (3.1) multilineer polinomlar ailesi kararlı olmasın. Bu durumda sıfırı içermeme prensibine göre en az bir $\omega \geq 0$ için $0 \in p(j\omega, Q)$ dir. Her $\mathbf{q} \in Q$ için $a_0(\mathbf{q}) \neq 0$ olduğundan $0 \notin p(j0, Q)$ dir.

$0 < \omega$ olsun. Değer kümesi ω ya göre sürekli değiştiğinden en az bir $\omega^* > 0$ için sıfır $p(j\omega, Q)$ değer kümesinin sınırındadır. Teorem 3.4 e göre $s = j\omega^*$, en az bir $\mathbf{q}^* \in X_p(\omega)$ noktasına karşılık gelen $p(s,\mathbf{q}^*)$ polinomunun köküdür. Bu ise $\mathbf{q} \in X_p$ için $p(s,\mathbf{q})$ polinomlarının kararlı olması ile çelişir. $\mathcal{P}$ (3.1) multilineer polinomlar ailesi gürbüz kararlıdır. ■

Aşağıda verilen polinomlar ailesi için X_p esas noktalar kümesi ω'dan bağımsızdır [14].

$p_0(s)$, $p_1(s)$ herhangi iki polinom ve $\mathbf{q} \in Q$ (3.4)için

$$p(s, \mathbf{q}) = p_0(s) + p_1(s) \prod_{i=1}^{m} (1 + q_i s) \tag{3.5}$$

multilineer polinomlar ailesi verilsin. Derece düşmesini engellemek amacıyla $0 \notin [q_i^-, q_i^+]$ $(i = 1, 2, ..., m)$ ve her $\omega \in \mathbb{R}$ için $p_1(j\omega) \neq 0$ olsun.

Denklem (3.5) ile verilen polinomlar ailesinin esas noktalarının kümesini veren Q nun özel iki alt kümesi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Q kutusunun bir kenarı

$$\{\mathbf{q} \in Q : \ I^o(\mathbf{q}) = \{k\}, \quad k \in \{1, 2, ..., m\}\}$$

ile ifade edilebilir. Eğer $\mathbf{q}$ noktası bu kenar üzerinde ise $i \neq k$ için $q_i = q_i^-$ veya $q_i = q_i^+$, $q_k^- \leq q_k \leq q_k^+$ dir. Buna göre, Q'nun $q_k^- \leq q_k \leq q_k^+$ olan kenarlarının sayısı 2^{m-1} dir. $\mathcal{P}$ (3.5) ailesi için X_p kümesini belirlerken $m2^{m-1}$ tane kenarın tümüne gerek olmayabilir. Aşağıdaki tanım yardımıyla bu sayı Q kutusuna bağlı olarak azaltılabilir.

Tanım 3.3 *$k \in \{1, 2, ..., m\}$, $i = 1, 2, ..., m$ ve $i \neq k$ için*
$[q_i^-, q_i^+] \cap [q_k^-, q_k^+] = \emptyset$ ise ya

$$|q_i - q_k| = \max\{|x - q_k| : \ x \in [q_i^-, q_i^+]\} \tag{3.6}$$

sağlayan q_i ler ya da

$$|q_i - q_k| = \min\{|x - q_k| : \ x \in [q_i^-, q_i^+]\}, \tag{3.7}$$

sağlayan q_i ler alınarak,
$[q_i^-, q_i^+] \cap [q_k^-, q_k^+] \neq \emptyset$ ise $q_i = q_i^-$ veya $q_i = q_i^+$ alınarak belirlenen Q'nun

$$\{\mathbf{q} \in Q : I^o(\mathbf{q}) = \{k\}, \quad k \in \{1, 2, ..., m\}\}$$

kenarına Q kutusunun esas kenarı denir.

Örnek 3.7 *$Q = [0,1] \times [2,3] \times [3,5]$ kutusu verilsin. $k = 1$ için $[0,1] \cap [2,3] = \emptyset$ olduğundan*

$$|q_2 - q_1| = \max\{|x - q_1| : \ x \in [2,3], \ q_1 \in [0,1]\}$$

eşitliği $q_2 = q_2^+$ durumunda sağlanır.

$$|q_2 - q_1| = \min\{|x - q_1| : \ x \in [2,3], \ q_1 \in [0,1]\}$$

ise $q_2 = q_2^-$ için sağlanır.
$[0,1] \cap [3,5] = \emptyset$ olduğundan

$$|q_3 - q_1| = \max\{|x - q_1| : \ x \in [3,5], \ q_1 \in [0,1]\}$$

eşitliği $q_3 = q_3^+$ olmasını gerektirir.

$$|q_3 - q_1| = \min\{|x - q_1| : \ x \in [3,5], \ q_1 \in [0,1]\}$$

ise $q_3 = q_3^-$ için sağlanır. Buna göre

$$E_1 = \{\mathbf{q} \in Q : (q_1, 3, 5), \ 0 \leq q_1 \leq 1\}, \ E_2 = \{\mathbf{q} \in Q : (q_1, 2, 3), \ 0 \leq q_1 \leq 1\}$$

olmak üzere E_1 ve E_2 kenarları Q nun iki esas kenarıdır. $k = 2$ için $[2,3] \cap [0,1] = \emptyset$ dir. Denklem (3.6) dan $q_1 = q_1^-$, (3.7) den $q_1 = q_1^+$ olarak bulunur.
$[2,3] \cap [3,5] \neq \emptyset$ olduğundan $q_3 = q_3^-$ veya $q_3 = q_3^+$ alınabilir. Öyle ise

$$\begin{aligned} E_3 &= \{\mathbf{q} \in Q : (0, q_2, 3), \ 2 \leq q_2 \leq 3\}, \ E_4 = \{\mathbf{q} \in Q : (0, q_2, 5), \ 2 \leq q_2 \leq 3\}, \\ E_5 &= \{\mathbf{q} \in Q : (1, q_2, 3), \ 2 \leq q_2 \leq 3\}, \ E_6 = \{\mathbf{q} \in Q : (1, q_2, 5), \ 2 \leq q_2 \leq 3\} \end{aligned}$$

esas kenarları elde edilmiş olur. $k = 3$ için ise benzer yöntemle

$$\begin{aligned} E_7 &= \{\mathbf{q} \in Q : (0, 2, q_3), \ 3 \leq q_3 \leq 5\}, \ E_8 = \{\mathbf{q} \in Q : (0, 3, q_3), \ 3 \leq q_3 \leq 5\}, \\ E_9 &= \{\mathbf{q} \in Q : (1, 2, q_3), \ 3 \leq q_3 \leq 5\}, \ E_{10} = \{\mathbf{q} \in Q : (1, 3, q_3), \ 3 \leq q_3 \leq 5\} \end{aligned}$$

bulunur. Q nun toplam 12 kenarından yukarıda elde edilen 10 kenarı esas kenardır.

Bu örnekten de görüldüğü gibi, eğer $Q \subset \mathbb{R}^m$ birbirini kesmeyen aralıklarla tanımlanmış ise Q'nun esas kenarlarının sayısı $2m$ tane olacaktır.

Tanım 3.4 *$k \geq 2$ olmak üzere $\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subset \{1, 2, ..., m\}$ indis kümesi için*

$$\begin{aligned} \sigma &\in (q_i^-, q_i^+), \; i \in \{i_1, i_2, ..., i_k\} \text{ ve} \\ \sigma &\notin (q_i^-, q_i^+), \; i \notin \{i_1, i_2, ..., i_k\} \end{aligned}$$

olacak şekilde σ sayısının varlığı kabul edilsin. Bu durumda $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_m) \in Q$ için

$$q_i = \begin{cases} \sigma & , \; i \in \{i_1, i_2, ..., i_k\} \\ q_i^- & , \; i \notin \{i_1, i_2, ..., i_k\} \text{ ve } \sigma \leq q_i^- \\ q_i^+ & , \; i \notin \{i_1, i_2, ..., i_k\} \text{ ve } \sigma \geq q_i^+ \end{cases}$$

koşulunu sağlayan noktalarının kümesi bir doğru parçası belirtir. Bu doğru parçasına Q'nun esas segmenti denir.

Örnek 3.8 *$Q = [2, 3] \times [1, 4] \times [0, 5]$ verilsin. Bu kutu için*

$$\begin{aligned} \{(\sigma, \sigma, \sigma) &: \sigma \in [2, 3]\}, \\ \{(2, \sigma, \sigma) &: \sigma \in [1, 2]\}, \\ \{(3, \sigma, \sigma) &: \sigma \in [3, 4]\} \end{aligned}$$

esas segmentleri elde edilir.

Esas kenar ve esas segment, tanımlarından da görüldüğü gibi sadece Q belirsizlik kümesine bağlıdır.

Teorem 3.6 *$\mathcal{P}$ (3.5) polinomlar ailesinin esas noktalar kümesi X_p, Q'nun esas kenar ve esas segmentlerinin birleşimidir* [14].

Sonuç 3.1 *$\mathcal{P}$ (3.5) ile verilen multilineer ailesinin gürbüz kararlı olması için gerek ve yeter koşul esas kenarların ve esas segmentlerin kararlı olmasıdır* [14].

Bir esas segment eksenlere paralel olmadığından, multilineer dönüşüm altındaki görüntüsü kompleks düzlemde bir doğru parçası değildir. Dolayısıyla Yardımcı Teorem 1.2 ile esas segmente karşılık gelen polinomların kararlılığı incelenemez.

Tanım 3.5

$$p_1(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n \ (a_n \neq 0), \tag{3.8}$$

$$p_2(s) = b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m \ (b_m \neq 0) \tag{3.9}$$

reel katsayılı polinomları için

$$R(p_1, p_2) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_1 & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan $(n+m) \times (n+m)$ *boyutlu matrise* $p_1(s)$ *ve* $p_2(s)$ *nin Resultant matrisi denir.*

Teorem 3.7 $p_1(s)$ (3.8) *ve* $p_2(s)$ (3.9) *polinomlarının ortak bir kökünün olması için gerek ve yeter koşul* $\det R(p_1, p_2) = 0$ *olmasıdır* [2].

Teorem 3.8 $Q \subset \mathbb{R}^m$ *yol bağlantılı bir küme ve* $a_i : Q \to \mathbb{R}$ *sürekli fonksiyon olmak üzere*

$$\mathcal{P} = \{p(., \mathbf{q}) : p(s, \mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q}) + ... + a_{n-1}(\mathbf{q}) s^{n-1} + a_n(\mathbf{q}) s^n, \ \mathbf{q} \in Q\}$$

değişmez dereceli polinomlar ailesi verilsin. $p(s, \mathbf{q}_0)$ *polinomu* $\mathcal{P}$ *nin bir kararlı polinomu olsun.* $\mathcal{P}$ *ailesinin gürbüz kararlı olması için gerek ve yeter koşul her* $\mathbf{q} \in Q$ *için* $\det H_n(\mathbf{q}) \neq 0$ *olmasıdır* [2].

Kanıt. $\Rightarrow$: $\mathcal{P}$ gürbüz kararlı olsun. Her $\mathbf{q} \in Q$ için $p(s, \mathbf{q})$ polinomu kararlı olduğundan Teorem 1.1 gereği $\det H_n(\mathbf{q}) \neq 0$ dır.
$\Leftarrow$: Her $\mathbf{q} \in Q$ için $\det H_n(\mathbf{q}) \neq 0$ olsun. $\mathcal{P}$ nin gürbüz kararlı olmadığını varsayalım. Bu durumda Teorem 1.5'e göre $0 \in p(j\omega_*, Q)$ olacak şekilde $0 \leq \omega_*$ reel sayısı vardır. Dolayısıyla $\mathcal{P}$ polinomlar ailesinde $s = j\omega_*$ köküne sahip bir $p(j\omega_*, q_*)$ polinomu vardır.
Diğer taraftan

$$p(s, \mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q})s + \cdots + a_n(\mathbf{q})s^n$$

polinomunda $s = j\omega$ yerine yazıldığında

$$p(j\omega, \mathbf{q}) = (a_0(\mathbf{q}) - a_2(\mathbf{q})\omega^2 + \cdots) + j\omega(a_1(\mathbf{q}) - a_3(\mathbf{q})\omega^2 + \cdots)$$

$$\begin{aligned} h(-\omega^2, \mathbf{q}) &= a_0(\mathbf{q}) + a_2(\mathbf{q})(-\omega^2) + a_4(\mathbf{q})(-\omega^2)^2 + \cdots, \\ g(-\omega^2, \mathbf{q}) &= a_1(\mathbf{q}) + a_3(\mathbf{q})(-\omega^2) + a_5(\mathbf{q})(-\omega^2)^2 + \cdots \end{aligned}$$

olmak üzere

$$p(j\omega, \mathbf{q}) = h(-\omega^2, \mathbf{q}) + j\omega g(-\omega^2, \mathbf{q})$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$p(j\omega, \mathbf{q}) = 0 \Leftrightarrow \; h(-\omega^2, \mathbf{q}) = 0 \text{ ve } \omega g(-\omega^2, \mathbf{q}) = 0$$

dır. $h(-\omega^2, \mathbf{q})$ ile $\omega g(-\omega^2, \mathbf{q})$'nin ortak köke sahip olması için gerek ve yeter koşul $h(-\omega^2, \mathbf{q})$ ile $-\omega^2 g(-\omega^2, \mathbf{q})$'nin ortak köke sahip olmasıdır. $v = -\omega^2$ olsun. Bu yeni değişkene göre

$$\begin{aligned} h(v, \mathbf{q}) &= a_0(\mathbf{q}) + a_2(\mathbf{q})v + a_4(\mathbf{q})v^2 + \cdots \\ vg(v, \mathbf{q}) &= a_1(\mathbf{q})v + a_3(\mathbf{q})v^2 + a_5(\mathbf{q})v^3 + \cdots \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $h(v, \mathbf{q})$ ve $vg(v, \mathbf{q})$ polinomlarının ortak kökünün olması için gerek ve yeter koşul (Teorem 3.7 ye göre) $\det R(vg(v, \mathbf{q}), h(v, \mathbf{q})) = 0$ olmasıdır. $R(vg(v, \mathbf{q}), h(v, \mathbf{q}))$ matrisi kısaca $R(\mathbf{q})$ ile gösterilsin.

Eğer n çift ise $(n \times n)$ lik Resultant matrisi

$$R(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-4} & \cdots & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & a_3 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & & a_3 & a_1 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_2 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & a_4 & a_2 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_4 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

dir. $R(\mathbf{q})$ matrisinin satırları düzenlendiğinde (n'nin tek veya çift olmasına bağlı olmaksızın) ($H_n(\mathbf{q})$, $p(s,\mathbf{q})$ matrisine karşılık gelen Hurwitz matrisi olmak üzere)

$$\det R(\mathbf{q}) = \pm \det H_n(\mathbf{q})$$

dir. Her $\mathbf{q} \in Q$ için $\det H_n(\mathbf{q}) \neq 0$ olduğundan $h(v,\mathbf{q})$, ve $vg(v,\mathbf{q})$ polinomlarının ortak kökü yoktur. Dolayısı ile $p(j\omega,\mathbf{q}) = 0$ olacak şekilde $\omega \in \mathbb{R}$ bulunamaz. Bu ise varsayımımızla çelişir. $\mathcal{P}$ ailesi gürbüz kararlıdır. ■

Bir $p(s)$ polinomu verilsin. $H(p)$ Hurwitz matrisinin n. satır n. sütun elemanı a_0 olduğundan, $\det H_n = a_0 \det H_{n-1}$ dir. Teorem 3.8 aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 3.9 *Teorem* 3.8 *deki koşullar altında* $\mathcal{P}$*'nin gürbüz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul her* $\mathbf{q} \in Q$ *için* $a_0(\mathbf{q}) \neq 0$ *ve* $\det H_{n-1}(\mathbf{q}) \neq 0$ *olmasıdır* [2].

Q kutusunun bir esas segmentinin köşe noktaları $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in Q$ olsun. Bu esas segment L ile gösterilirse

$$L = \{\mathbf{q} \in Q : \ \mathbf{q} = \lambda\mathbf{q}_1 + (1-\lambda)\mathbf{q}_2, \ \lambda \in [0,1]\}$$

şeklinde ifade edilebilir. Her $\mathbf{q} \in L$ noktasına karşılık gelen $p(s,\mathbf{q})$ polinomları

$$\begin{aligned} p(s,\mathbf{q}) &= p(s, \lambda\mathbf{q}_1 + (1-\lambda)\mathbf{q}_2) \\ &= b_0(\lambda) + b_1(\lambda)s + \cdots + b_n(\lambda)s^n, \ \lambda \in [0,1] \end{aligned}$$

olduğundan sadece λ parametresini bulundurur.

$$p(s,\lambda) = b_0(\lambda) + b_1(\lambda)s + \cdots + b_n(\lambda)s^n, \ \lambda \in [0,1] \tag{3.10}$$

alalım. Burada $b_i(\lambda)$ $(i = 0,1,...,n)$ katsayıları λ nın polinomlarıdır. $p(s,\lambda)$ polinomun Hurwitz matrisi de yine λ'ya bağlıdır. Bu matris $H(\lambda)$ ile gösterilsin.

Denklem (3.5) ile verilen polinom ailesi değişmez dereceli olduğundan (3.10) polinomlar ailesi değişmez derecelidir. $p(s,\mathbf{q}_1)$ ve $p(s,\mathbf{q}_2)$ polinomlarının kararlı oldukları kabul edilsin. Teorem 3.9 'e göre L esas segmentinin kararlı olması için gerek ve yeter koşul her $\lambda \in [0,1]$ için $b_0(\lambda) \neq 0$ ve $\det H_{n-1}(\lambda) \neq 0$ olmasıdır. Ayrıca Q'nun esas kenarlarının kararlılığı da yine Teorem 3.9 ile incelenebilir.

Sonuç olarak bir esas segmentin kararlılığı araştırılırken, bu segmentin köşelerine karşılık gelen polinomlarının kararlılığı ve $b_0(\lambda)$, $\det H_{n-1}(\lambda)$ polinomlarının $[0,1]$ aralığında bir kökünün olup olmadığı incelenmelidir.

Bir $f(x)$ polinomun (a,b) aralığında kaç tane farklı reel köke sahip olduğunu veren Sturm zinciri aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.6 (Sturm Zinciri) *$f(x)$ polinomu verilsin. $f_0(x) = f(x)$ ve $f_1(x) = f'(x)$ diyelim. Öklid bölme algoritması ile*

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= q_1 f_1(x) - f_2(x), && \deg f_2 < \deg f_1, \\
f_1(x) &= q_2 f_2(x) - f_3(x), && \deg f_3 < \deg f_2, \\
&\vdots && \vdots \\
f_{i-1}(x) &= q_i f_i(x) - f_{i+1}(x), && \deg f_{i+1} < \deg f_i, \\
&\vdots && \vdots \\
f_{k-1}(x) &= q_k f_k(x) - f_{k+1}(x), && \deg f_{k+1} < \deg f_k, \\
f_{k+1}(x) &= 0
\end{aligned}$$

şeklinde oluşturulan

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_k(x)$$

dizisine Sturm zinciri denir [15].

Teorem 3.10 (Sturm Teoremi) *$f(x)$ reel katsayılı bir polinom ve bu polinomun Sturm zinciri $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots,$ $f_k(x)$ olsun. $[a,b]$ aralığı için $f(a) \neq 0 \neq f(b)$ olsun. Bir $x \in [a,b]$ için V_x ile $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots,$ $f_k(x)$ zincirinin işaret değiştirme sayısı gösterilsin. $f(x)$ polinomunun (a,b) açık aralığındaki birbirinden farklı reel köklerinin sayısı $V_a - V_b$ dir* [15].

Örnek 3.9

$$\{p(.,\mathbf{q}): \ p(s,\mathbf{q}) = s^3 + (1+q_1 s)(1+q_2 s) : q_1 \in [2,3], q_2 \in [1,4]\} \tag{3.11}$$

multilineer polinomlar ailesi verilsin.

$Q = [2,3] \times [1,4]$ *olmak üzere Q'nun tüm kenarları esas kenardır. Q'nun esas segmenti ise*

$$L = \{(\sigma,\sigma) : \sigma \in [2,3]\}$$

dir.

Q'nun $q_1 \in [2,3]$, $q_2 = 1$ kenarının kararlılığı incelendiğinde,

$$\mathbf{q} = \lambda(2,1) + (1-\lambda)(3,1), \ \lambda \in [0,1]$$

noktalarına karşılık gelen polinom

$$p(s,\lambda) = s^3 + (3-\lambda)s^2 + (4-\lambda)s + 1, \ \lambda \in [0,1]$$

dir.

$$p(s,0) = s^3 + 3s^2 + 4s + 1$$

polinomu kararlıdır. $p(s,\lambda)$ polinomunun Hurwitz matrisi

$$H_3(\lambda) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

olur.

$$H_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

ve

$$\det H_2(\lambda) = 11 - 7\lambda + \lambda^2$$

elde edilir. Bu parabolün $[0,1]$ *aralığında kökünün olup olmadığı, Sturm teoreminin bir uygulamasını göstermek amacıyla Teorem* 3.10 *kullanılarak araştırılırsa;* $\det H_2(0) = 11 \neq 0$ *ve* $\det H_2(1) = 5 \neq 0$ *dır. Bu polinomun Sturm zinciri*

$$\begin{aligned} f_0(\lambda) &= \lambda^2 - 7\lambda + 11 \\ f_1(\lambda) &= 2\lambda - 7 \\ f_0(\lambda) &= (\frac{1}{2}\lambda - \frac{7}{4})(2\lambda - 7) - \frac{5}{4} \\ f_1(\lambda) &= (\frac{8}{5}\lambda - \frac{28}{5})\frac{5}{4} \\ f_2(\lambda) &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{array}{llll} f_0(0) = 11 & +, & f_0(1) = 5 & + \\ f_1(0) = -7 & -, & f_1(1) = -5 & - \\ f_2(0) = \frac{5}{4} & +, & f_2(1) = \frac{5}{4} & + \end{array}$$

olduğundan $\det H_2(\lambda)$ *polinomunun* $[0,1]$ *aralığındaki birbirinden farklı köklerinin sayısı*

$$V_0 - V_1 = 2 - 2 = 0$$

olarak bulunur. Diğer esas kenarların kararlı oldukları benzer yolla gösterilebilir.

L esas segmentine karşılık gelen polinomlar ise

$$\mathbf{q} = \lambda(2,2) + (1-\lambda)(3,3), \;\; \lambda \in [0,1]$$

olacağından

$$p(s,\lambda) = 1 + (-2\lambda + 6)s + (\lambda^2 - 6\lambda + 9)s^2 + s^3$$

dir. $p(s,0) = 1 + 6s + 9s^2 + s^3$ *polinomu kararlıdır.* $p(s,\lambda)$ *nın Hurwitz matrisi*

$$H_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 6\lambda + 9 & 1 & 0 \\ 1 & -2\lambda + 6 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 6\lambda + 9 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$H_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 6\lambda + 9 & 1 \\ 1 & -2\lambda + 6 \end{pmatrix}$$

olur. Buradan

$$\det H_2(\lambda) = 53 - 54\lambda + 18\lambda^2 - 2\lambda^3$$

polinomunun $[0,1]$ *aralığında kökünü araştırıldığında,*
$\det H_2(0) = 53 \neq 0$ *ve* $\det H_2(1) = 15 \neq 0$ *dır.* $\det H_2(\lambda)$ *polinomun Sturm zinciri*

$$\begin{aligned}
f_0(\lambda) &= -2\lambda^3 + 18\lambda^2 - 54\lambda + 53 \\
f_1(\lambda) &= -6\lambda^2 + 36\lambda - 54 \\
f_0(\lambda) &= (\frac{1}{3}\lambda - 1)(-6\lambda^2 + 36\lambda - 54) - 1 \\
f_1(\lambda) &= (-6\lambda^2 + 36\lambda - 54).1 \\
f_2(\lambda) &= 1
\end{aligned}$$

dir. Bu zincir için

$$\begin{array}{llll}
f_0(0) = 53 & +, & f_0(1) = 15 & + \\
f_1(0) = -54 & -, & f_1(1) = -24 & - \\
f_2(0) = 1 & +, & f_2(1) = 1 & +
\end{array}$$

dir. Buna göre her $\lambda \in [0,1]$ *için* $\det H_2(\lambda) \neq 0$ *ve* $b_0(\lambda) \neq 0$ *olduğundan bu esas segment de kararlıdır. Sonuç* 3.1 *'e göre bu multilineer polinomlar ailesi gürbüz kararlıdır.*

4. MULTİLİNEERLEŞTİRME

Bu bölümde polinom denklem sisteminin kutu üzerinde çözümünün olup olmadığını test etmek için bir yöntemden bahsedilecektir.

Denklem (3.1) ile verilen, köşeleri $\{\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, ..., \mathbf{q}^{2^m}\}$ olan $Q \subset \mathbb{R}^m$ kutusu olmak üzere

$$\mathcal{P} = \{p(., \mathbf{q}) : p(s, \mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q})s + \cdots + a_n(\mathbf{q})s^n, \ \mathbf{q} \in Q\}$$

multilineer polinomlar ailesi için $p(s, \mathbf{q}_0) \in \mathcal{P}$ kararlı polinom ve her $0 \leq \omega$ için $0 \notin p(j\omega, Q)$ ise sıfırı içermeme prensibine göre $\mathcal{P}$ ailesi gürbüz kararlıdır. Burada $\mathcal{P}$ ailesi aralık polinomlar ailesine genişletilir ve (1.9) denklemi kullanılırsa ω için bir ω_c üst sınırı bulunabilir. Buna göre her $\omega \in [0, \omega_c]$ için $0 \notin p(j\omega, Q)$ kontrol edilerek $\mathcal{P}$ ailesinin gürbüz kararlılığı belirlenebilir.

$s = j\omega$ olsun.

$$p(j\omega, \mathbf{q}) = (a_0(\mathbf{q}) - a_2(\mathbf{q})\omega^2 + a_4(\mathbf{q})\omega^4 + \cdots) + j\omega(a_1(\mathbf{q}) - a_3(\mathbf{q})\omega^2 + a_5(\mathbf{q})\omega^4 + \cdots)$$

dir.

$$\begin{aligned} f_1(\omega^2, \mathbf{q}) &= a_0(\mathbf{q}) - a_2(\mathbf{q})\omega^2 + a_4(\mathbf{q})\omega^4 + \cdots \\ f_2(\omega^2, \mathbf{q}) &= a_1(\mathbf{q}) - a_3(\mathbf{q})\omega^2 + a_5(\mathbf{q})\omega^4 + \cdots \end{aligned}$$

olmak üzere

$$p(j\omega, \mathbf{q}) = f_1(\omega^2, \mathbf{q}) + j\omega f_2(\omega^2, \mathbf{q})$$

olur. $\omega = 0$ için

$$p(j0, \mathbf{q}) = 0 \ \Leftrightarrow \ f_1(\omega^2, \mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q}) = 0$$

denklemi sağlanıyorsa değer kümesi $\omega = 0$ da sıfırı içerir. Dolayısıyla aile gürbüz kararlı değildir.

Her $\mathbf{q} \in Q$ için $a_0(\mathbf{q}) \neq 0$ ise $\omega \in [0, \omega_c]$ için

$$p(j\omega, \mathbf{q}) = 0 \ \Leftrightarrow \ f_1(\omega^2, \mathbf{q}) = 0 \text{ ve } f_2(\omega^2, \mathbf{q}) = 0$$

dır. $t = \omega^2$ olsun. Öyle bir $t \in [0, \omega_c^2]$ ve $\mathbf{q} \in Q$ için

$$f_1(t, \mathbf{q}) = 0 \text{ ve } f_2(t, \mathbf{q}) = 0$$

ise değer kümesi sıfırı içereceğinden $\mathcal{P}$ ailesi gürbüz kararlı değildir.

Doğrusal olmayan sistemler için bir varlık teoremi aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.1 (Miranda) *$X = [\underline{x}_1, \bar{x}_1] \times \ldots \times [\underline{x}_m, \bar{x}_m]$ kutusu verilsin. $X_i^- = \{\mathbf{x} \in X\colon\ x_i = \underline{x}_i\}$ ve $X_i^+ = \{\mathbf{x} \in X\colon\ x_i = \bar{x}_i\}$ kümeleri X'in i. koordinata dik, paralel yüzlerini göstersin. $F = (f_1, f_2, ..., f_m)^T$, X üzerinde tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olmak üzere, eğer*

$$\text{her } \mathbf{x} \in X_{v_i}^-,\ \mathbf{y} \in X_{v_i}^+ \text{ için } f_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{y}) \leq 0 \ \ (i = 1, 2, ..., m)$$

olacak şekilde $(1, 2, ..., m)$ nin bir $(v_1, v_2, ..., v_m)$ permütasyonu varsa bu durumda $F(\mathbf{x}) = 0$ denkleminin X üzerinde çözümü vardır [16].

Burada $X = [0, \omega_c^2] \times [q_1^-, q_1^+] \times ... \times [q_m^-, q_m^+]$ olmak üzere $\mathbf{x} = (t, q_1, ..., q_m) \in X$ için $f_3(\mathbf{x}) = 0, ..., f_{m+1}(\mathbf{x}) = 0$ tanımlanırsa, Teorem 4.1'in koşulları sağlandığında $0 \in p(j\sqrt{t}, Q)$ olduğu belirlenebilir.

Diğer taraftan, eğer her $\mathbf{x} \in X$ için

$$f_1(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ veya } f_2(\mathbf{x}) \neq 0$$

ise değer kümesi sıfırı içermez.

Buna göre

$$m_i = \min_{\mathbf{x} \in X} f_i(\mathbf{x}) \text{ ve } M_i = \max_{\mathbf{x} \in X} f_i(\mathbf{x}) \ \ i = 1, 2$$

olmak üzere

$$m_1 > 0,\ m_2 > 0,\ M_1 < 0,\ M_2 < 0$$

eşitsizliklerinden en az birinin sağlanıp sağlanmadığı araştırılmalıdır. Bunun kontrolü için $f_i(\mathbf{x})$ $(i = 1, 2)$ çok değişkenli polinomlarının X kutusu üzerindeki minimum ve maksimum değerlerinin bulunması gerekmektedir. Multilineer fonksiyonlar bir kutu üzerindeki maksimum ve minimum değerlerini bu kutunun köşelerinde alır (Teorem 1.7).

$$f_1(t, \mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q}) - a_2(\mathbf{q})t + a_4(\mathbf{q})t^2 - a_6(\mathbf{q})t^3 + \cdots \pm a_{2k}(\mathbf{q})t^k$$

fonksiyonunu ele alınsın. $t_1 = t$, $t_2 = t_1$, $t_3 = t_2, ..., t_k = t_{k-1}$ değişkenleri tanımlanırsa $\tilde{\mathbf{q}} = (t_1, t_2, ..., t_k)$ olmak üzere

$$\tilde{f}_1(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q}) - a_2(\mathbf{q})t_1 + a_4(\mathbf{q})t_1t_2 - a_6(\mathbf{q})t_1t_2t_3 + \cdots \pm a_{2k}(\mathbf{q})t_1t_2...t_k$$

multilineer dönüşümü elde edilir.

$$\tilde{X} = \underbrace{[0, \omega_c^2] \times ... \times [0, \omega_c^2]}_{k \text{ tane}} \times [q_1^-, q_1^+] \times ... \times [q_m^-, q_m^+]$$

olsun. Benzer şekilde f_2 için $\tilde{f}_2$ multilineer dönüşümü elde edilebilir.

$\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{X}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(\tilde{\mathbf{x}}) &= 0 \\ \tilde{f}_2(\tilde{\mathbf{x}}) &= 0 \\ \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 &= 0 \\ \tilde{x}_3 - \tilde{x}_1 &= 0 \\ &\vdots \\ \tilde{x}_k - \tilde{x}_1 &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

denklem sistemi ele alınsın.

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{q}) &= 0 \\ f_2(t, \mathbf{q}) &= 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

denklem sisteminin X de çözümü vardır $\Leftrightarrow$ (4.1) denklem sisteminin $\tilde{X}$ de çözümü vardır.

$$\begin{aligned} g_1(\tilde{\mathbf{x}}) &= \tilde{f}_1(\tilde{\mathbf{x}}), \\ g_2(\tilde{\mathbf{x}}) &= \tilde{f}_2(\tilde{\mathbf{x}}), \\ g_3(\tilde{\mathbf{x}}) &= \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1, \\ &\vdots \\ g_{k+1}(\tilde{\mathbf{x}}) &= \tilde{x}_k - \tilde{x}_1 \end{aligned}$$

olsun. g_i $(i = 1, 2, ..., k+1)$ fonksiyonları multilineer olduklarından $(k + m)-$ boyutlu $\tilde{X}$ kutusu üzerindeki minimum ve maksimum değerlerini bu kutununun köşelerinde alır. $l = 2^{k+m}$ olmak üzere $\tilde{X}$ kutusunun köşeleri $\{\tilde{\mathbf{x}}^1, \tilde{\mathbf{x}}^2, ..., \tilde{\mathbf{x}}^l\}$ ile gösterilirse $i = 1, 2, ..., k+1$ için

$$m_i = \min_{\tilde{\mathbf{x}} \in \{\tilde{\mathbf{x}}^1, \tilde{\mathbf{x}}^2, ..., \tilde{\mathbf{x}}^l\}} g_i(\tilde{\mathbf{x}}) \text{ ve } M_i = \max_{\tilde{\mathbf{x}} \in \{\tilde{\mathbf{x}}^1, \tilde{\mathbf{x}}^2, ..., \tilde{\mathbf{x}}^l\}} g_i(\tilde{\mathbf{x}})$$

olarak belirlenir.

$$m_i > 0, \;\; M_i < 0 \;\; (i = 1, ..., k+1) \qquad (4.3)$$

eşitsizliklerinden en az biri sağlanıyorsa (4.1) denklem sisteminin $\tilde{X}$ de çözümü yoktur. Dolayısıyla (4.2) denklem sisteminin de X üzerinde çözümü yoktur.

$\alpha_1 = 0, \beta_1 = \omega_c^2, ..., \alpha_k = 0, \beta_k = \omega_c^2, \alpha_{k+1} = q_1^-, \beta_{k+1} = q_1^+, ..., \alpha_{k+m} = q_m^-,$ $\beta_{k+m} = q_m^+$ alınırsa

$$\tilde{X} = [\alpha_1, \beta_1] \times ... \times [\alpha_{k+m}, \beta_{k+m}]$$

şeklinde ifade edilebilir. $\beta_i - \alpha_i$ $(i = 1, 2, ..., k+m)$ değerini en büyük yapan i indisi için $r = i$ olsun. Eğer bu maksimum birden fazla i indisi için elde edilebiliyorsa r olarak en küçük i indisini alınır. Bu r indisini kullanarak $\tilde{X}_0 = \tilde{X}$ kutusunu

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{00} &= [\alpha_1, \beta_1] \times ... \times [\alpha_r, \frac{\alpha_r + \beta_r}{2}] \times ... \times [\alpha_{k+m}, \beta_{k+m}], \\ \tilde{X}_{01} &= [\alpha_1, \beta_1] \times ... \times [\frac{\alpha_r + \beta_r}{2}, \beta_r] \times ... \times [\alpha_{k+m}, \beta_{k+m}] \end{aligned}$$

şeklinde iki parçaya bölünebilir.

$\tilde{X}_{00}$ alt kutusu ele alınsın. Bu altkutu için (4.3) eşitsizlikleri kontrol edilir. Bu eşitsizliklerden en az biri sağlanıyorsa $\tilde{X}_{00}$ alt kutusu üzerinde (4.1) denklem sisteminin çözümü yoktur. Bu durumda $\tilde{X}_{01}$ altkutusuna geçilerek benzer inceleme yapılır.

Eğer $\tilde{X}_{00}$ alt kutusunda (4.1) denklem sisteminin çözümünün olmadığı belirlenemiyorsa bu alt kutu en uzun kenarına karşılık gelen r indisi kullanılarak yukarıdaki gibi $\tilde{X}_{000}$, $\tilde{X}_{001}$ şeklinde iki eşit parçaya bölünür ve aynı işlemler tekrarlanır.

Bölme işlemi sonunda tüm altkutular üzerinde (4.1) denklem sisteminin çözümünün olmadığı belirlenebilirse, (4.2) denklem sisteminin X üzerinde çözümünün olmadığı gösterilmiş olur. Sonuç olarak, değer kümesi sıfırı içermeyeceğinden $\mathcal{P}$ ailesi gürbüz kararlıdır.

Eğer verilen $\mathcal{P}$ ailesi gürbüz kararlıysa, sonlu bölme işleminden sonra $\mathcal{P}$ nin değer kümesinin sıfırı içermediği belirlenebilir. Ancak $\mathcal{P}$ ailesi gürbüz kararlı değilse bölme işlemi sonlu adımda tamamlanamaz. Dolayısıyla değer kümesinin sıfırı içerip içermediği belirlenemez. Yine de $\tilde{X}$ kutusunun bazı alt kutularında değer kümesinin sıfırı içermediği belirlenebileceğinden, değer kümesinin sıfırı içerip içermediği problemi $\tilde{X}$ kutusunun bir alt kümesine indirgenmiş olur.

Örnek 3.6 da verilen multilineer polinomlar ailesinin kararlılığı bu yöntemle aşağıda araştırılmıştır.

Örnek 4.1 $Q = \{(q_1, q_2) : 1 \leq q_1 \leq 1.5,\ 2 \leq q_2 \leq 2.2\}$ *olmak üzere*

$$p(s, \mathbf{q}) = q_1 q_2 - 1.9 + (q_1 q_2 - 1)s + (1 + q_2)s^2 + 3.5s^3 + q_1 s^4 + s^5$$

multilineer ailesi için $\omega_c = 4.5$ *olarak bulunur.* $\mathbf{q} \in Q$ *için* $0.1 \leq a_0(\mathbf{q}) \leq 1.4$ *dir.*

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{q}) &= (-1.9 + q_1 q_2) - (1 + q_2)t + q_1 t^2 \\ f_2(t, \mathbf{q}) &= -1 + q_1 q_2 - 3.5t + t^2 \end{aligned}$$

olduğundan bu fonksiyonların multilineerleştirilmiş hali

$$\tilde{X} = [0, 20.25] \times [0, 20.25] \times [1, 1.5] \times [2, 2.2]$$

için

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(\tilde{\mathbf{x}}) &= (-1.9 + \tilde{x}_3 \tilde{x}_4) - (1 + \tilde{x}_4)\tilde{x}_1 + \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 = 0 \\ \tilde{f}_2(\tilde{\mathbf{x}}) &= -1 + \tilde{x}_3 \tilde{x}_4 - 3.5\tilde{x}_1 + \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 = 0 \\ \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 &= 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

dir.

$$\begin{aligned} g_1(\tilde{\mathbf{x}}) &= (-1.9 + \tilde{x}_3 \tilde{x}_4) - (1 + \tilde{x}_4)\tilde{x}_1 + \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 \\ g_2(\tilde{\mathbf{x}}) &= -1 + \tilde{x}_3 \tilde{x}_4 - 3.5\tilde{x}_1 + \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \\ g_3(\tilde{\mathbf{x}}) &= \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 \end{aligned}$$

olsun.

$$\begin{array}{ll} m_1 = -64.5 & M_1 = 555.44375 \\ m_2 = -69.875 & M_2 = 341.4875 \\ m_3 = -20.25 & M_3 = 20.25 \end{array}$$

olduğundan $\tilde{X}_0 = \tilde{X}$ *üzerinde* (4.4) *denklem sisteminin çözümünün olmadığı söylenemez. Buna göre* $\tilde{X}_0$ *kutusu* $r = 1$ *alınarak (en uzun kenara göre)*

$$\begin{array}{rcl} \tilde{X}_{00} & = & [0, 10.125] \times [0, 20.25] \times [1, 1.5] \times [2, 2.2] \\ \tilde{X}_{01} & = & [10.125, 20.25] \times [0, 20.25] \times [1, 1.5] \times [2, 2.2] \end{array}$$

iki alt kutuya bölünür. $\tilde{X}_{00}$ *alt kutusu üzerinde* g_i $(i = 1, 2, 3)$ *fonksiyonlarının minimum ve maksimum değerleri*

$$\begin{array}{ll} m_1 = -32.1 & M_1 = 278.271875 \\ m_2 = -34.4375 & M_2 = 171.89375 \\ m_3 = -10.125 & M_3 = 20.25 \end{array}$$

olarak bulunur. Minimumlardan en az biri pozitif veya maksimumlardan en az biri negatif olmadığından bu alt kutu üzerinde (4.4) *denkleminin çözümünün olmadığı belirlenemez.*

$$T = \{\tilde{X}_{00}\}$$

şeklinde bir liste tanımlansın.

$\tilde{X}_{01}$ *için bu işlemi yapıldığında*

$$\begin{array}{ll} m_1 = -64.5 & M_1 = 555.44375 \\ m_2 = -69.875 & M_2 = 341.4875 \\ m_3 = -20.25 & M_3 = 10.125 \end{array}$$

olarak bulunur. Bu alt kutu için de (4.4) *denkleminin çözümünün olmadığı belirlenemediğinden* $\tilde{X}_{01}$ *alt kutusu* T *listesinin en soluna eklenir.*

$$T = \{\tilde{X}_{01,}\tilde{X}_{00}\}$$

olur. T *deki alt kutulardan en soldaki alt kutu listeden çıkartılır ve bu alt kutu ikiye bölünerek aynı işlemler tekrarlanır.*

$\tilde{X}_{01}$ *alt kutusu* $r = 2$ *alınarak bölünürse*

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{010} &= [10.125, 20.25] \times [0, 10.125] \times [1, 1.5] \times [2, 2.2],\\ \tilde{X}_{011} &= [10.125, 20.25] \times [10.125, 20.25] \times [1, 1.5] \times [2, 2.2]\end{aligned}$$

alt kutuları bulunur. $\tilde{X}_{010}$ *alt kutusu için*

$$\begin{array}{ll} m_1 = -64.5 & M_1 = 247.896875 \\ m_2 = -69.875 & M_2 = 136.45625 \\ m_3 = -20.25 & M_3 = 0 \end{array}$$

olduğundan bu alt kutu T *listesinin en soluna eklenir.*

$$T = \{\tilde{X}_{010}, \tilde{X}_{00}\}$$

olur. $\tilde{X}_{011}$ *alt kutusu için*

$$m_1 = 70.415625 \quad M_1 = 555.44375$$

olduğundan bu alt kutu üzerinde (4.4) *denkleminin çözümü yoktur.* T *listesinin en soldaki elemanı alınarak bu işlemler tekrarlanır.*

Bu işlemler bilgisayar yardımıyla yapıldığında, toplam 342 bölme işleminden sonra T *listesindeki alt kümelerin sayısı 0 olur. Bu sonuç ise verilen polinomlar ailesinin değer kümesinin sıfırı içermediğini gösterir. Bu nedenle aile gürbüz kararlıdır.*

KAYNAKLAR

[1] Barmish, B.R., *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan, New York, 1994.

[2] Ackermann J., *Robust Stability: Systems with Uncertain Physical Parameters*, London, UK: Springer-Verlag, 1993.

[3] Kharitonov, V.L., *Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations,* Differentsial'nye Uravneniya, **14**, 1483-1485, 1978.

[4] Kale A.A. ve Tits A.L., *On Kharitonov's Theorem Without Invariant Degree Assumption*, Automatica, **36**, 1075-1076, 2000.

[5] Marden M., *Geometry of Polynomials*, American Mathematical Society, Providence, R.I, 1966.

[6] Barlett A.C., Hollot C.V., ve Huang L., *Root locations of an Entire Polytope of Polynomials: It Suffices to Check the Edges*, Mathematics of Control, **1**, 61-71, 1988.

[7] Bahattacharyya S.P., Chapellat H., ve Keel L.H., *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice-Hall, 1995.

[8] Mansour M., *Robust Stability of Interval Matrices*, Proc. 28th IEEE Conf. On Decision and Control, Tampa, Florida, 46-51, 1989.,

[9] Barmish B.R., Fu M. ve Saleh S., *Stability of a polytope of matrices; Counterexamples*, IEEE Transactions on Automatic Control, **AC-33**, 569-572, 1988.

[10] Collado J. ve Lazano R., *Necessary and Sufficient for Robust Stability of the Convex-Hull of Matrices with Rank One Uncertainty*, Proceeding of the American Control Conference, Chicago, Illinois, 4316-4317, 2000.

[11] Horn R.A. ve Johnson C.R., *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[12] Tsıng N., Tits A.L., *When is the multiaffine image of a cube a convex polygon?,* Systems & Control Letters, **20**, 439-445, 1993.

[13] Anderson B.D.O., Kraus F., Mansour M. ve Dasgupta S., *Easily testable Sufficient Conditions for the Robust Stability of Systems with Multilinear Parameter Dependence*, Automatica, **31**, 25-40, 1995.

[14] Poljak B.T. ve Kogan J., *Necessary and Sufficient Conditions for Robust Stability of Linear Systems with Multiaffine Uncertainty Structure*, IEEE Transactions on Automatic Control, **40**, 1255-1260, 1995.

[15] Smiley M.F., *A Proof of Sturm's Theorem,* The American Mathematical Monthly, **49(3)**, 185-186, 1942.

[16] Garloff J., Smith, A.P. *Solution of systems of polynomial equations by using Bernstein expansion*, Symbolic Algebraic Methods and Verification Methods, 87–97, Springer, Vienna, 2001.