KONVEKS FONKSİYONLARIN VE SONLU KONVEKS FONKSİYONLARIN SUBDİFERANSİYELLENEBİLMELERİ

Mutlu DEDETÜRK

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Eylül – 2007

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Mutlu DEDETÜRK'ün **"Konveks Fonksiyonların ve Sonlu Konveks Fonksiyonların Subdiferansiyellenebilmeleri"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans tezi 27.07.2007 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**:**	**Prof. Dr. YALÇIN KÜÇÜK**	....
Üye	**:**	**Prof. Dr. REFAİL KASIMBEYLİ**	....
Üye	**:**	**Doç. Dr. NEDİM DEĞİRMENCİ**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONVEKS FONKSİYONLARIN VE SONLU KONVEKS FONKSİYONLARIN SUBDİFERANSİYELLENEBİLMELERİ

Mutlu DEDETÜRK

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK
2007, 145 sayfa

Günümüz araştırmacıları fizik, kimya gibi temel bilim ve endüstri,elektrik gibi mühendislik alanlarının herbirinde ortaya çıkan problemlere değişik çözümler üretmek için türev'i bir araç olarak kullanmaktadırlar . Klasik türev ve diferansiyel kavramları ile bu problemlerin çoğu çözülmesine karşın, bu kavramlar diğer bir çoğunun çözümünde yetersiz kalmaktadır.

Bu çalışmada tek değerli, sonlu boyutlu uzaylarda tanımlı, sonlu değerlere sahip kapalı konveks fonksiyonların subdiferansiyellerinin tanımlanması için gerekli ön bilgiler verilecek,subdiferansiyelleri tanımlanacak , kapalı konveks sonlu değerli fonksiyonların subdiferansiyellerinin bir takım özellikleri incelenecek ve son olarak bilinen temel fonksiyonların subdiferansiyelleri hesaplanacaktır.

Anahtar Kelimeler : Subdiferansiyel, Subgradyant, Sublineer Fonksiyon, Konveks Fonksiyon

ABSTRACT

Master of Science Thesis

SUBDIFFERENTIALS OF CONVEX FUNCTIONS AND FINITE CONVEX FUNCTIONS

Mutlu DEDETÜRK

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK

2007, 145 pages

Today's researchers use derivative as a tool to find different solutions to problems that arise in the fields of fundamental sciences like physics and chemistry and in the fields of engineering like electrical engineering. By using the classical derivative and differential concepts a number of these problems can be solved. However these concepts are not sufficient to solve many others.

In this study the prior information for defining subdifferentials of single and finite valued closed convex functions that are defined in finite dimesional spaces are to be given, their subdifferentials are to be defined, a number of properties about closed convex finite valued functions are to be examined and finally subdifferentials of known basic functions are to be calculated.

Keywords : Subdifferential, Subgradient, Sublinear Function, Convex Function

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK'e, Prof. Dr. Mahide KÜÇÜK'e , tezin yazımında yardımcı olan Mustafa SOYERTEM'e, Arş. Gör. İlknur ATASEVER'e, desteklerini hep hissettiğim eşime ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

Mutlu DEDETÜRK

Ağustos 2007

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	:	n-boyutlu Öklid uzayı
$\|x\|$	:	x vektörünün normu
$\langle x, y\rangle$	:	x ve y vektörlerinin iç çarpımları
$co(C)$	:	C kümesinin konveks zarfı
$\overline{co}(C)$	:	C kümesinin kapalı konveks zarfı
$cone(C)$	:	C kümesinin konveks konik zarfı
$\overline{cone}(C)$	:	C kümesinin kapalı konveks konik zarfı
C_∞	:	C kümesinin asimtotik konisi
$F_C(d)$	:	C konveks kümesinin d tarafından ortaya çıkarılmış yüzü
$dom(f)$	:	f fonksiyonunun tanım kümesi
$gr(f)$	:	f fonksiyonunun grafiği
$epi(f)$	:	f fonksiyonunun epigrafı
$epi_s(f)$	:	f fonksiyonunun kesin epigrafı
$S_r(f)$	:	f fonksiyonunun (r düzeyindeki) alt düzey kümesi
$Conv\ \mathbb{R}^n$	:	$\mathbb{R}^n$ üzerindeki konveks fonksiyonların sınıfı
$C\overline{onv}\ \mathbb{R}^n$	:	$\mathbb{R}^n$ üzerindeki kapalı konveks fonksiyonların sınıfı
$cl\ f$	:	f nin kapanış fonksiyonu
$\ell_C(\cdot)$	:	C kümesinin alt sınır fonksiyonu
Ag	:	g fonksiyonunun A lineer operatörü altındaki görüntü fonksiyonu
$\partial(A)$	:	A kümesinin sınır noktaları kümesi
$int(A)$	:	A kümesinin iç noktaları kümesi
$cl(A)$	:	A kümesinin kapanış noktaları kümesi
$ri(A)$	:	A kümesinin rölatif iç noktaları kümesi
$p_C(x)$	:	x noktasının C kümesi üzerine izdüşümü
$T_C(x)$	:	C kümesinin x noktasındaki Teğet (Contingent) konisi
$N_C(x)$	:	C kümesinin x noktasındaki normal konisi

K°	:	K konisinin polar konisi
$f'(x,d)$	:	f fonksiyonunun x de d yönündeki yönlü türevi
$D_+f(x)$	:	f fonksiyonunun x deki sağ türevi
$D_-f(x)$	:	f fonksiyonunun x deki sağ türevi
$\partial f(x)$	:	f fonksiyonunun x deki subdiferansiyeli
$\nabla f(x)$	:	f fonksiyonunun x deki gradyantı
C°	:	C kümesinin poları (polar kümesi)

1 GİRİŞ

Günümüz araştırmacıları fizik, kimya gibi temel bilim ve endüstri, elektrik gibi mühendislik alanlarının herbirinde ortaya çıkan problemlerin hemen hemen hepsine değişik çözümler üretmek için türev'i bir araç olarak kullanmaktadırlar. Klasik türev ve diferansiyel kavramları, günümüz bilim ve teknolojisinin bir çok alanlarında ortaya çıkan çoğu problemi çözmesine karşın, bu kavramlar bir çoğunun çözümünde de yetersiz kalmaktadır.

Problemlerin çözümsüz kalması ya incelenen fonksiyonların klasik anlamda türev ile diferansiyele sahip olmamasından veya incelenmesi gereken fonksiyonların tek değerli olmamasından kaynaklanmaktadır. Örneğin Optimizasyon Teorisi, Kontrol Teori ve Oyun Teorisi gibi birçok alanda incelenen fonksiyonların çoğu diferansiyellenebilir olmayan fonksiyonlardır (bkz. [1] - [11]). Son yıllarda, klasik anlamda genel olarak diferansiyellenebilir olmayan fonksiyonlar, örneğin alttan veya üstten yarısürekli fonksiyonlar ve konveks fonksiyonlar için farklı subdiferansiyel ve superdiferansiyel kavramları verilmektedir (bkz. [2], [6], [7], [13], [18], [19]).

Tek değerli olmayan fonksiyonlar için de çeşitli formlarda türev ve diferansiyel kavramları tanımlanmaktadır (bkz. [1] - [4], [6], [8]).

Bu çalışmada tek değerli, sonlu boyutlu uzaylarda tanımlı, sonlu değerlere sahip kapalı konveks fonksiyonların subdiferansiyellerinin tanımlanması için gerekli ön bilgiler verilecek, subdiferansiyelleri tanımlanacak, kapalı konveks sonlu değerli fonksiyonların subdiferansiyellerinin bir takım özellikleri incelenecek ve son olarak bilinen temel fonksiyonların subdiferansiyelleri hesaplanacaktır.

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde konveks kümeler ve konveks fonksiyonlar tanımlanmış, bazı örnekler verilmiştir. Konveks fonksiyonların birtakım önemli temel özellikleri gösterilmiştir.Bir konveks fonksiyonun sürekliliği ve yerel Lipschitz'liği incelenmiş ve birinci ve ikinci mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonların konveksliklerі incelenmiştir. Son olarak konveks fonksiyonların diferansiyellenebilirlikleri ile ilgili bir teorem verilmiştir .

İkinci bölümde lineer dönüşümlerin bir genellemesi olan sublineer fonksiyonlar tanımlanmış, sublineer fonksiyon örnekleri verilmiştir. Özel olarak sublineer fonksiyon örneklerinden olan Minkowski fonksiyoneli ve destek fonksiyonunun özellikleri detaylı olarak incelenmiş. Son olarak da kapalı konveks kümelerle, sonlu değerli kapalı sublineer fonksiyonların bire-bir eşleştiği gösterilmiştir.

Çalışmanın son bölümünde, konveks fonksiyonların yönlü türevleri ve subdiferansiyelleri tanımlanmış, geometrik yorumları verilmiştir. Subdiferansiyelin yerel özellikleri incelenerek konveks bir fonksiyona bir nokta civarında birinci mertebeden sublineer fonksiyonlarla yaklaşılabileceği kanıtlamıştır ve son olarak bazı özel fonksiyonların subdiferansiyelleri hesaplanmıştır.

2 KONVEKS FONKSİYONLAR VE KONVEKS KÜMELER

2.1 Konveks Kümeler

Tanım 2.1. *$C \subset \mathbb{R}^n$ bir küme olsun. $x, x' \in C$ ve $\alpha \in (0,1)$ iken $\alpha x + (1-\alpha)x' \in C$ oluyorsa C konveks kümedir denir.*

Geometrik olarak bu şu demektir: $x, x' \in C$ ise bu iki noktayı uç noktası kabul eden doğru parçası da yani

$[x, x'] := \{\alpha x + (1-\alpha)x' \ : \ 0 \leq \alpha \leq 1\} \quad C \quad$ tarafından kapsanır.

Önerme 2.1. *[12,13,16,17]Herhangi sayıda (sonlu, sayılabilir ya da sayılamaz) konveks kümenin kesişimi yine bir konveks kümedir.*

Önerme 2.2. *[12,13,16,17]$C_1, \ C_2 \subset \mathbb{R}^n$ iki konveks küme olsun. Bu durumda*
i) $C_1 + C_2 := \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in C_1, \, x_2 \in C_2\} \subset \mathbb{R}^n$ konveks kümedir
ii)$\lambda \in \mathbb{R}$ için λC_1konvekstir
iii)$C_1 - C_2$ konvekstir.

Tanım 2.2. *$A \subset \mathbb{R}^n$ bir küme olsun. $x, x' \in A$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ iken $\lambda x + (1-\lambda)x' \in A$ oluyorsa A afin kümedir denir.*

Tanım 2.3. *i)$K \subset \mathbb{R}^n$ bir küme olsun. $x \in K$, $\lambda > 0$ iken $\lambda x \in K$ oluyorsa K konidir denir.*
ii)K konveks bir koni olsun.

$$K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall y \in K \text{ için } \langle x, y \rangle \leq 0\}$$

kümesine K konisinin.(negatif) polar konisi denir.

Tanım 2.4. *C bir küme ve $x \in C$ olsun.*

$$x_k \to x, \ \frac{x_k - x}{\|x_k - x\|} \to \frac{y}{\|y\|}$$

ve $\forall k$ *için* $x_k \neq x$ *olacak şekilde* $\exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C$ *dizisi var ve ya* $y = 0$ *ise* y, C*'nin* x*'deki bir teğetidir denir.* C *kümesinin* x*'deki bütün teğetlerinin oluşturduğu kümeye* C*'nin* x*'deki teğet konisi denir. Bu küme* $T_C(x)$ *ile gösterilir.*

Tanım 2.5. C *bir küme ve* $x \in \partial C$ *(yani* x, C*'nin bir sınır noktası) olsun.*

$$\{y : \forall c \in C \text{ için } \langle y, c - x\rangle \leq 0\}$$

kümesine C *kümesinin* x*'deki normal konisi denir. Bu küme* $N_C(x)$ *ile gösterilir.*

Tanım 2.6. $C \subset \mathbb{R}^n$ *bir küme olsun.*C *kümesini kapsayan tüm konveks kümelerin kesişimine* C *nin konveks zarfı denir. Bu küme* $co(C)$ *ile gösterilir.*

Tanım 2.7. $S \subset \mathbb{R}^n$ *bir küme olsun.*S *kümesini kapsayan tüm kapalı konveks kümelerin kesişimine* C *nin kapalı konveks zarfı denir. Bu küme* $\overline{co}(C)$ *ile gösterilir.*

Teorem 2.1. *[14,16,17]*$S \subset \mathbb{R}^n$ *bir küme olsun.* S *nin kapalı konveks zarfı* S *nin konveks zarfının kapanışına eşittir.Yani* $\overline{co}S = cl(co(S))$ *dir.*

Uyarı 2.1. *Bir kümenin konveks zarfının kapanışı, aynı kümenin kapanışının konveks zarfına genel olarak eşit değildir. Yani* $cl(co(S)) \neq co(cl(S))$
$[\overline{co}S \neq co(cl(S))\ ]$ *dir.*

Tanım 2.8. $A \subset \mathbb{R}^n$ *bir küme olsun.*A *kümesini kapsayan tüm afin kümelerin kesişimine* C *nin afin zarfı denir. Bu küme* $aff(A)$ *ile gösterilir.*

Tanım 2.9. $C \subset \mathbb{R}^n$ *konveks kümesinin rölatif içi (göreceli içi) ri* C, C *nin afin zarfındaki topolojiye göre* C *nin içidir.Yani* $x \in ri\ C$ *ancak ve ancak* $x \in aff\ C$ *ve* $(aff\ C) \cap B(x,\delta)$ *olacak şekilde* $\delta > 0$ *vardır.*

Teorem 2.2. *[11, 14, 16, 17]*$\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n$ *konveks bir küme ise* $ri\, C \neq \emptyset$ *dir.*

Önerme 2.3. *[14, 17]*$cl\ A = cl\ B \iff ri\ A = ri\ B$

Önerme 2.4. *[12,17][* $x \in cl\ C$ *ve* $x' \in ri\ C$ *olsun. Bu durumda*

$$(x, x'] = \{\alpha x + (1-\alpha)x' : 0 \leq \alpha < 1\} \subset ri\ C$$

olur.

Önerme 2.5. *[16,18]* C_1, C_2 *konveks küme olsun.* $ri\ C_1 \cap ri\ C_2 \neq \emptyset$ *ise*

(a) $cl\ (C_1 \cap C_2) = cl\ C_1 \cap cl\ C_2$

(b) $ri\ (C_1 \cap C_2) = ri\ C_1 \cap ri\ C_2$

olur.

Tanım 2.10. $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *fonksiyonu,* $\forall x, x' \in \mathbb{R}^n$ *ve* $\alpha \in \mathbb{R}$ *için*

$$A(\alpha x + (1-\alpha)x') = \alpha A(x) + (1-\alpha)A(x')$$

sağlıyorsa A'ya afin fonksiyon denir.

$x \to A(x) - A(0)$ doğrusaldır. Dolayısıyla afin fonksiyonlar Bir A_0 doğrusal fonksiyonu ve $y_0 := A(0) \in \mathbb{R}^m$ için $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için

$$"A(x) = A_0(x) + y_0"$$

şeklinde yazılabilir.

Önerme 2.6. *[12,17]*$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *afin fonksiyon ve* $C \subset \mathbb{R}^n$ *konveks olsun.Bu durumda*

$$ri\ [A(C)] = A(ri\ C)$$

olur. Eğer $D \subset \mathbb{R}^m$ *konveks ve* $A^{-1}(ri\ D) \neq \emptyset$ *ise*

$$ri\ [A^{-1}(D)] = A^{-1}(ri\ D)$$

olur.

2.2 Konveks Fonksiyonlar

Tanım 2.11. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon ve* $f \not\equiv +\infty$ *olsun.*

a) $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *ve* $\forall \alpha \in (0,1)$ *için*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)x') \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(x')$$

eşitsizliği varsa bu f fonksiyonuna konvekstir denir.

b)Aynı f fonksiyonu verilsin. $\forall (x,x') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *ve* $\alpha \in (0,1)$ *ve* $x \neq x'$ *için*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)x') < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x')$$

sağlanıyorsa f ye kesin konvekstir denir.

Geometrik olarak konveks fonksiyonunun grafiğinde iki nokta aldığımızda fonksiyon bu noktaları birleştiren kirişin altında kalır.

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki konveks fonksiyonların sınıfını Conv $\mathbb{R}^n$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.12. $f \in Conv\, \mathbb{R}^n$ *olsun.*

a) $\emptyset \neq dom\, f := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}$ *kümesine f nin tanım kümesi denir.*

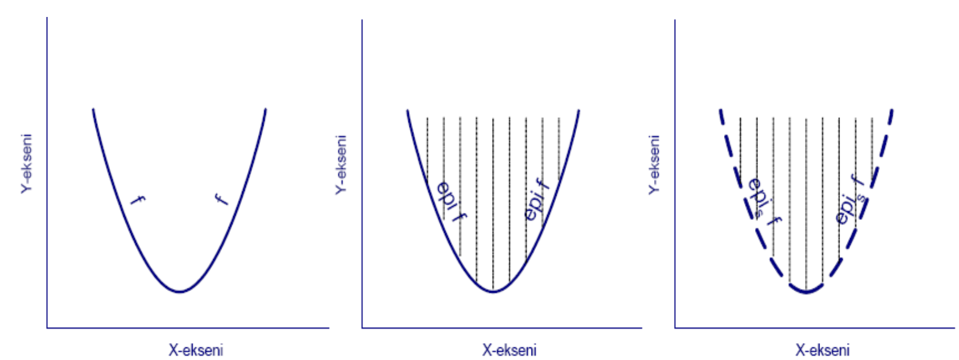
b)Aynı f fonksiyonu verilsin.

$\emptyset \neq epi\, \dot{f} := \{(x,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : r \geq f(x)\}$ $(epi_s f := \{(x,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : r > f(x)\})$ *ile tanımlanan kümeye f nin epigrafı(kesin epigrafı) denir.*

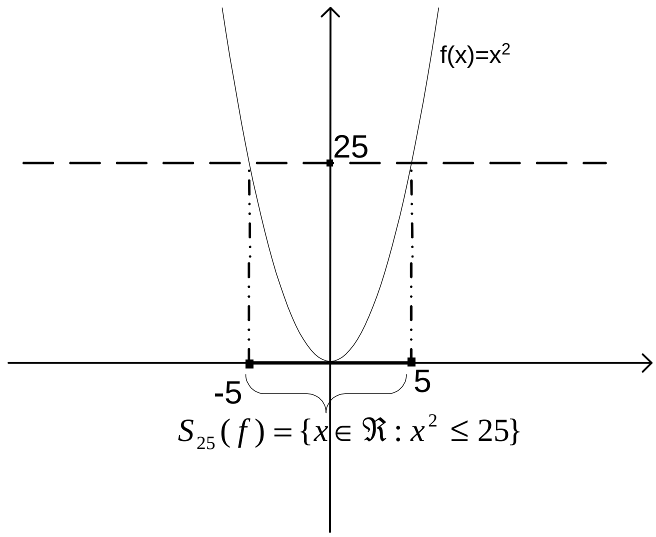
c) Aynı f fonksiyonu verilsin ve bir $r \in \mathbb{R}$ verilsin. $S_r(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq r\}$ *ile tanımlanan kümeye f nin bir alt düzey kümesi denir.*

Şekil 2.1'de bir fonksiyonun epigrafı ve kesin epigrafı ve şekil 2.2'de bir fonksiyonun alt düzey kümesi gösterilmektedir.

$(x,r) \in epi\, f \iff x \in S_r(f)$ olduğu açıktır.



Şekil 2.1: Bir fonksiyonun epigrafı ve kesin epigrafı



Şekil 2.2: $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $S_{25}(f) = \{x \in R^n : x^2 \leq 25\}$ alt düzey kümesi

Önerme 2.7. *[11,16]* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Aşağıdakiler birbirine denktir.*

i) f *konvekstir.*

ii) epi f, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *de konvekstir.*

iii) epi$_s f$, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *de konvekstir.*

2.2.1 Doğrusal ve afin fonksiyonlar

$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ doğrusal bir fonksiyon olsun. $s \in \mathbb{R}^n$ için $g(x) = \langle s, x \rangle$ formunda yazılabilir. g ninepigrafı

$$epi\ g = \{(x, r) : x \in \mathbb{R}^n, r \geq \langle s, x \rangle\}$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir afin fonksiyon ise f nin epigrafı da bir $s \in \mathbb{R}^n$ ve bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} epi f &= \{(x, r) : r \geq f(x_0) + \langle s, x - x_0 \rangle\} \\ &= \{(x, r) : \langle s, x \rangle - r \leq \langle s, x_0 \rangle - f(x_0)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Afin fonksiyonların epigrafı kapalı yarı uzaylardır ve $(s,-1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ vektörü ile karakterize edilirler.

Önerme 2.8. *[12,17] $f \in Conv\ \mathbb{R}^n$ ise*

$$ri\ (epi\ f) = \{(x,r) : x \in ri\ (dom\ f),\ r > f(x)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

dir.

Önerme 2.9. *$f \in Conv\ \mathbb{R}^n$ bir afin fonksiyonla minorize edilebilir ve $x_0 \in ri\ dom\ f$ için $aff\ dom\ f$ ye paralel V alt uzayında her $x \in \mathbb{R}^n$ için*

$$f(x) \geqslant f(x_0) + \langle s, x - x_0 \rangle$$

olacak şekilde $s \in V$ vardır.

Kanıt. $aff\ epi\ f = (aff\ dom\ f) \times \mathbb{R}$. V, $aff\ dom\ f$ ye paralel lineer alt uzay olmak üzere $x_0 \in dom\ f$ için

$$aff\ dom\ f = \{x_0\} + V$$

olacağından

$$aff\ epi\ f = (\{x_0\} + V) \times \mathbb{R}$$

olur. $x_0 \in ri\ dom\ f$ alırsak $(x_0, f(x_0)) \in rbd\ epi\ f$ olur. Bu ise $(x_0, f(x_0))$ noktasında $epi\ f$ i destekleyen aşikar olmayan hiperdüzlemin varlığını verir. $\forall (x,r) \in epi\ f$ için

$$\begin{aligned} \langle (s,\alpha), (x,r) \rangle &\leq \langle (s,\alpha), (x_0, f(x_0)) \rangle \\ \langle s, x \rangle + \langle \alpha, r \rangle &\leq \langle s, x_0 \rangle + \langle \alpha, f(x_0) \rangle \\ \langle s, x \rangle + \alpha r &\leq \langle s, x_0 \rangle + \alpha f(x_0) \qquad (2.1) \end{aligned}$$

ikisi birden sıfıra eşit olmamak kaydıyla $\exists s \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ vardır. $r \to +\infty$ giderken $\alpha \leq 0$ olmalıdır ki bu eşitsizlik sağlansın. $s \in V$ ve $x_0 \in$

$ri\ (dom\ f)$ olduğundan $\exists\delta > 0$ için $x_0 + \delta s \in dom\ f$ olur. 2.1 de (x, r) yerine $(x_0 + \delta s, f(x_0 + \delta s)) \in epi\ f$ alınırsa

$$\begin{aligned} \langle s, x_0 + \delta s\rangle + \alpha f(x_0 + \delta s) &\leq \langle s, x_0\rangle + \alpha f(x_0) \\ \langle s, x_0\rangle + \delta \|s\|^2 + \alpha f(x_0 + \delta s) &\leq \langle s, x_0\rangle + \alpha f(x_0) \\ \delta \|s\|^2 &\leq \alpha[f(x_0) - f(x_0 + \delta s)] < +\infty \end{aligned}$$

$\alpha \neq 0$ dır. Çünkü α nın 0 olması s nin de 0 olmasını gerektirirdi. Bu yüzden $\alpha < 0$ dır. Genellik bozulmadan $\alpha = -1$ seçilebilir. $(x, r) \in epi\ f$ için

$$\begin{aligned} \langle s, x\rangle - r &\leq \langle s, x_0\rangle - f(x_0) \\ \langle s, x\rangle - \langle s, x_0\rangle + f(x_0) &\leq r \\ \langle s, x - x_0\rangle + f(x_0) &\leq \inf\{r : f(x) \leq r\} = f(x) \end{aligned}$$

Böylelikle istenilen afin fonksiyon bulunmuş olur. ■

2.2.2 Kapalı konveks fonksiyonlar

Tanım 2.13. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ ve $x \in B_d(x_0, \delta)$ için $f(x_0) - \varepsilon < f(x)$ olacak şekilde x_0'a ve ε'a bağlı bir $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ varsa f'ye $x_0 \in \mathbb{R}$'de alttan yarı süreklidir denir.*

Tanım 2.14. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in \overline{dom\ f}$ olsun.*

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{\delta > 0} \inf_{x \in B_d(x_0, \delta)} f(x)$$

f'nin x_0'daki alt limiti denir.

Teorem 2.3. *[6,9,10]$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda*

$$f,\ x_0\text{'da alttan yarı süreklidir} \iff \liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

dır.

Tanım 2.15. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun epigrafı kapalı ise f' ye kapalıdır denir.*

Önerme 2.10. *[16,17]* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *için aşağıdaki üç özellik birbirine denktir.*

i) f, $\mathbb{R}^n$*'de alttan yarı süreklidir.*

ii) epi f, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*'de kapalıdır.*

iii) $\forall r \in \mathbb{R}$ *için* $S_r(f)$ *alt düzey kümeleri kapalıdır .*

Tanım 2.16. f *fonksiyonu verilsin.*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ için } cl\ f(x) := \liminf_{y \to x} f(y)$$

ile tanımlı $cl\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*fonksiyonuna* f' *nin kapanış (yada alttan yarı sürekli zarf) fonksiyonu denir.*

$cl\ f$ için $epi(cl\ f) := cl(epi\ f)$ olduğu tanımdan açıktır.

Önerme 2.11. *[12,17]*$f \in Conv\ \mathbb{R}^n$ *ve* $x' \in ri\ dom\ f$ *olsun. Bu durumda*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ için } cl\ f(x) := \lim_{t \to 0^+} f(x + t(x' - x))$$

olur.

Önerme 2.12. *[12,16]*$f \in Conv\ \mathbb{R}^n$ *ise*

(i)$cl\ f \in Conv\ \mathbb{R}^n$,

(ii)$\forall x \in ri\ dom\ f$ *için* $(cl\ f)(x) = f(x)$

olur.

2.2.3 Bir konveks kümenin epigrafiksel zarfı ve alt sınır fonksiyonu

Bir $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ kümesi verilsin.

i)C kümesi düşey aşağı yönlü ışınları içermesin yani

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ için } -\infty < \inf\{r \in \mathbb{R} : (x, r) \in C\} \in \mathbb{R} \qquad (2.2)$$

olsun.

ii)C, üstten sınırsız yani

$$(x, r) \in C \implies \forall r' > r \text{ için } (x, r') \in C \qquad (2.3)$$

olsun ve son olarak

iii)

$$[\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } (x, r_n) \in C \text{ olan } (r_n) \subset \mathbb{R} \ \text{ dizisi için } r_n \downarrow r] \implies (x, r) \in C \tag{2.4}$$

yani C'nin altı kapalı olsun. Bu durumda C kümesi bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonunun epigrafıdır.

Yukarıdaki üç koşulu sağlayan C kümesi aynı zamanda konveks küme ise bu kümeyi epigrafı olarak kabul eden f fonksiyonu da konveks olur. Yukarıdaki ilk iki koşulu sağlayan C kümesi altı açık küme ise yani

$$\forall (x, r) \in C \ \text{ için } (x, r - \varepsilon) \in C \text{ olan } \exists \varepsilon = \varepsilon(x, r) > 0 \text{ varsa}$$

C bir f fonksiyonunun kesin epigraftır. Kısaca epigraf, yukarı yönlü ışınların; kesin epigraf ise yukarı yönlü yarı doğruların birleşimidir.

Tanım 2.17. *$C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ bir küme ve alttan sınırlı yani $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $-\infty < \inf\{r \in \mathbb{R} : (x, r) \in C\} \in \mathbb{R}$ olsun. C'yi kapsayan en dar epigraf'a C'nin epigrafiksel zarfı denir.*

Bu zarfı oluşturmak için

(i) 2.3 koşulunu sağlamak için C'nin üzerindeki bütün noktalar kümeye dahil edilmelidir yani $(x, r) \in C$ için $r' > r$ ise (x, r')noktalar kümesi C' ye eklenmelidir.

(ii) 2.4 koşulunu sağlamak için C'nin altı kapatılmalıdır yani $(x, r') \in C$ ve $r' \to r$ iken (x, r) C'ye eklenmelidir.

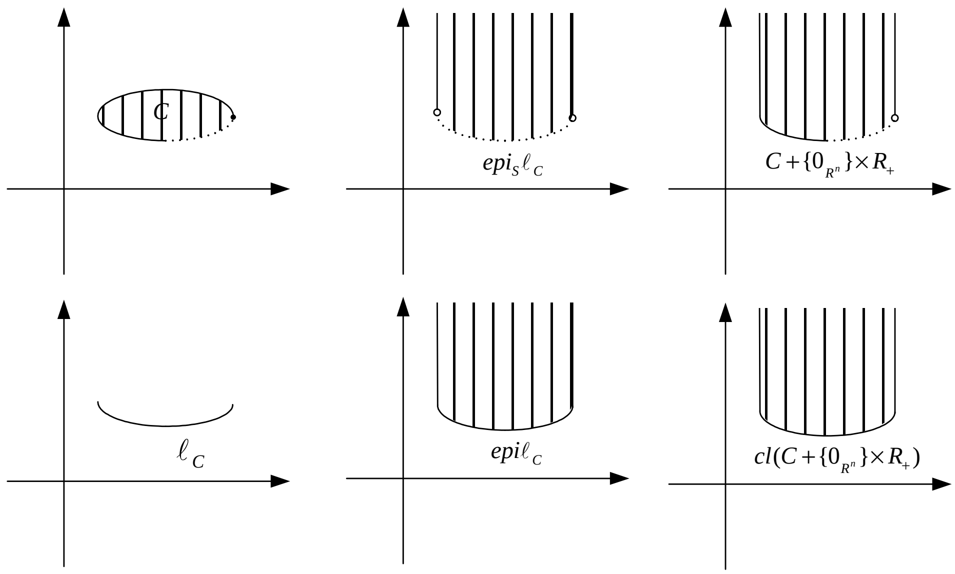
Tanım 2.18. *$C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ bir küme ve alttan sınırlı*

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n \ \textit{için} \ -\infty < \inf\{r \in \mathbb{R} : (x, r) \in C\} \in \mathbb{R})$$

olsun.

$$\ell_C(x) := \inf\{r \in \mathbb{R} : (x, r) \in C\}$$

ile tanımlanan $\ell_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna C kümesinin alt sınır fonksiyonu denir.



Şekil 2.3: Alt sınır fonksiyonu örneği 1

Şekil 2.3 ve şekil 2.4'de alt sınır fonksiyonu örnekleri gösterilmektedir.

Önerme 2.13. *$C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ bir küme ve alttan sınırlı ($\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $-\infty < \inf\{r \in \mathbb{R} : (x,r) \in C\} \in \mathbb{R}$) olsun. Bu durumda C'nin epigrafiksel zarfı $epi\ \ell_C$' ye eşit olur.*

Kanıt. C'nin epigrafiksel zarfı $\cap\{epi\ f : f\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ bir fonksiyon ve $epi\ f \supset C\}$ olarak alınsın. Kanıt için

$$\cap\{epi\ f : epi\ f \supset C\} = epi\ \ell_C$$

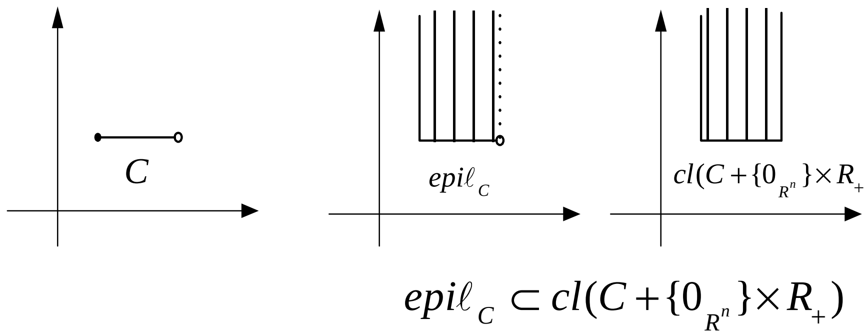
eşitliği gösterilecektir. Öncelikle $epi\ \ell_C \supset C$ olduğundan $\cap\{epi\ f : epi\ f \supset C\} \subset epi\ \ell_C$ olur.

Diğer kapsamı göstermek için $(x,r) \in epi\ \ell_C$ alalım. Bu durumda

$$\inf\{r' \in \mathbb{R} : (x,r') \in C\} = \ell_C(x) \leq r$$

olur. $(x,r') \in C$ ise $epi\ f \supset C$ için $(x,r') \in epi\ f$ olur. Bir fonksiyonun epigrafının altı kapalı olmalıdır. Dolayısıyla

$$(x, \inf\{r' \in \mathbb{R} : (x,r') \in C\}) = (x, \ell_C(x)) \in epi\ f$$



Şekil 2.4: Alt sınır fonksiyonu örneği 2

olur. Ayrıca epigraflar düşey yukarı yönlü ışınlardan oluştuklarından

$$\ell_C(x) \leq r \text{ iken } (x, r) \in epi\ f$$

dolayısıyla da

$$(x, r) \in \cap\{epi\ f : epi\ f \supset C\}$$

olur. İki yön de gösterildiğinden kanıt biter. ■

Ayrıca

$$epi_s \ell_C \subset C + (\{0_{\mathbb{R}^n}\} \times \mathbb{R}^+) \subset epi\ \ell_C \subset cl\ [C + (\{0_{\mathbb{R}^n}\} \times \mathbb{R}^+)]$$

kapsamları sağlanır.

Teorem 2.4. $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *bir küme ve* $\forall x \in C$ *için* $\{r \in \mathbb{R} : (x, r) \in C\}$ *alttan sınırlı (yani* C *düşey aşağı yönlü ışınları içermesin) olsun.*
i) C *konveks ise* $\ell_C \in Conv\ \mathbb{R}^n$ *olur,*
ii) C *kapalı konveks ise* $\ell_C \in C\overline{onv}\ \mathbb{R}^n$ *olur.*

Kanıt. i)C konveks ve $x_1, x_2 \in dom\ \ell_C$ olsun. Bu durumda $x_1 \in dom\ \ell_C$ olduğundan

$$\varepsilon > 0 \text{ için } r_1 \leq \ell_C(x_1) + \varepsilon$$

olacak şekilde $(x_1, r_1) \in C$ vardır. Aynı şekilde $x_2 \in dom\ \ell_C$ olduğundan

$$\varepsilon > 0 \text{ için } r_2 \leq \ell_C(x_2) + \varepsilon$$

olacak şekilde $(x_2, r_2) \in C$ vardır.

C'nin konveksliğinden $\alpha \in (0,1)$ için $(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha r_1 + (1-\alpha)r_2) \in C$ olur. Dolayısıyla

$$\ell_C(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha r_1 + (1-\alpha)r_2)$$

olur. Diğer taraftan varsayımdan

$$\alpha r_1 + (1-\alpha)r_2 \leq \ell_C(x_1) + \ell_C(x_2) + \varepsilon$$

olduğundan

$$\ell_C(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \ell_C(x_1) + \ell_C(x_2) + \varepsilon$$

olur. ε keyfi seçildiğinden

$$\ell_C(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \ell_C(x_1) + \ell_C(x_2)$$

olur. Böylece ℓ_C'nin konveks olduğu kanıtlanmış olur.

ii) ℓ_C'nin konveksliği i) de kanıtlandı. Kapalılığı için *epi* ℓ_C'nin kapalı olduğu gösterilecektir. Bunun için $((x_k, \rho_k))_k \subset$ *epi* ℓ_C bir dizi ve $((x_k, \rho_k))_k \to (x, \rho)$ olsun. Bu durumda $(x, \rho) \in$ *epi* ℓ_C olduğunu görmek yeterli olacaktır. $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $\varepsilon_k > 0$ için

$$(x_k, r_k) \in C \text{ ve } \ell_C(x_k) \leq r_k \leq \ell_C(x_k) + \varepsilon_k \leq \rho_k + \varepsilon_k$$

olacak şekilde $\exists r_k \in \mathbb{R}$ vardır. Bu r_k'larla $(r_k)_k$ dizisi oluşturulsun. ε_k keyfi seçildiğinden $(r_k)_k$ üstten sınırlıdır $(r_k \leq \rho_k)$. Ayrıca ℓ_C konveks olduğundan ℓ_C'yi minorize eden bir A afin fonsiyonu vardır. Böylece $(r_k)_k$ alttan da sınırlı olur.

$(r_k)_k$ sınırlı olduğundan $(r_{k_i})_{\{k_i\} \subset \mathbb{N}} \to r \in \mathbb{R}$ olacak şekilde (r_{k_i}) alt dizisi vardır. Bu dizi için

$$\begin{aligned} r_{k_i} &\leq \rho_{k_i} + \varepsilon_{k_i} \\ \lim_{k_i \to \infty} r_{k_i} &\leq \lim_{k_i \to \infty} (\rho_{k_i} + \varepsilon_{k_i}) \\ r &\leq \rho \end{aligned}$$

olur. C kapalı olduğundan $((x_k, r_k))_k \subset C$ ve $((x_k, r_k))_k \to (x, r)$ iken $(x, r) \in C$ olur. Burdan $\ell_C(x) \leq r$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\ell_C(x) \leq r \leq \rho$ elde edilir. Bu da $(x, \rho) \in epi\ \ell_C$'yi verir. Böylelikle $epi\ \ell_C$ kapalı bundan dolayı da ℓ_C kapalı olur. ∎

Önerme 2.14. *[12]$f \in Conv\ \mathbb{R}^n$ ise*

$$cl\ f(x) = \sup_{(s,b)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \{\langle s, x\rangle - b : \forall y \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s, y\rangle - b \leq f(y)\} \tag{2.5}$$

olur.

2.3 Fonksiyonların Kapalılığını ve Konveksliğini Koruyan İşlemler

2.3.1 Pozitif kombinasyon

Önerme 2.15. *[9,16]$f_1, \ldots, f_m \in Conv\ \mathbb{R}^n (\in \overline{Conv}\ \mathbb{R}^n)$ ve $t_1, \ldots, t_m > 0$ olsun ve f_j'lerin hepsini sonlu yapan en az bir noktanın var olduğu kabul edilsin. Bu durumda $f := \sum\limits_{j=1}^{m} t_j f_j \in Conv\ \mathbb{R}^n$ $(\in \overline{Conv}\ \mathbb{R}^n)$ olur.*

Örnek 2.1. *$f \in \overline{Conv}\ \mathbb{R}^n$ ve $C \subset \mathbb{R}^n$ kapalı konveks bir küme olsun. Bu durumda*

$$dom\ f \cap C \neq \emptyset \text{ ise } f + i_C \in \overline{Conv}\ \mathbb{R}^n$$

olur.

$$f = \left\{ \begin{array}{l} f(x),\ x \in dom\ f \\ +\infty,\ x \notin dom\ f \end{array} \right\} \text{ ve } i_C = \left\{ \begin{array}{rl} 0, & x \in C \\ +\infty, & x \notin C \end{array} \right\}$$

dır.C kapalı konveks olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $\liminf\limits_{y\to x} i_C(y) = i_C(x)$ olur. Bu sebeple $i_C \in \overline{Conv}\ \mathbb{R}^n$ olur. Diğer taraftan $dom\ f \cap C \neq \emptyset$ olduğundan $\exists x \in dom\ f \cap C$ vardır. Bu x için $f(x) < +\infty$ ve $i_C(x) = 0 < +\infty$ olur.$\{x : f(x)$ ve $i_C(x)$ sonludur$\} \neq \emptyset$ ve $f, i_C \in \overline{Conv}\ \mathbb{R}^n$ olduğundan

$$f + i_C = \left\{ \begin{array}{ll} f(x), & x \in dom\ f \cap C \\ +\infty, & x \notin dom\ f \cap C \end{array} \right\}$$

ile tanımlanan $(f + i_C) \in \overline{Conv}\ \mathbb{R}^n$ olur.

2.3.2 Supremum

Önerme 2.16. *[9,16]* $\{f_j\}_{j\in J}$ *konkevs fonksiyonların herhangi bir ailesi olsun.* $f := \sup\{f_j : j \in J\}$ *olarak tanımlı olsun. Bu durumda* f*'nin sonlu olduğu bir nokta var ise* $f \in Conv\ \mathbb{R}^n$ *olur. Ayrıca* $\{f_j\}_{j\in J}$ *fonksiyonları aynı zamanda kapalı ise* $f \in \overline{Conv}\ \mathbb{R}^n$ *olur.*

Örnek 2.2. *(Eşlenik fonksiyon)* $+\infty \not\equiv f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *bir fonksiyon olsun ve bir afin fonksiyon ile minorize edilsin* ($\exists(s_0, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *için* $\mathbb{R}^n$*'de* $f \geq \langle s_0, \cdot\rangle - b$). *Bu durumda* $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*'ye*

$$f^*(s) := \sup\{\langle s, x\rangle - f(x) : x \in dom\ f\}$$

ile tanımlanan f^* *fonksiyonuna* f*'nin eşleniği denir.* $x \in dom\ f$ *sabit iken* $F_x(s) = \langle s, x\rangle - f(x)$ *fonksiyonu oluşturulsun.* x *değişirken yukardaki önermedeki* f_j *fonksiyonlarına karşılık gelen* F_x *fonksiyonları oluşur.* $\alpha \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$\begin{aligned}
F_x(\alpha s_1 + (1-\alpha)s_2) &= \langle(\alpha s_1 + (1-\alpha)s_2), x\rangle - f(x) \\
&= \alpha\langle s_1, x\rangle + (1-\alpha)\langle s_2, x\rangle - f(x) \\
&= \alpha(\langle s_1, x\rangle - f(x)) + (1-\alpha)(\langle s_2, x\rangle - f(x)) \\
&= \alpha F_x(s_1) + (1-\alpha)F_x(s_2)
\end{aligned}$$

olduğundan F_x *afin bir dönüşümdür.* F_x*, afin dönüşüm olduğundan konveks ve kapalıdır.*

$$f^*(s) = \sup\{F_x : x \in dom\ f\}$$

olarak ifade edilebilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\forall x \quad &\in \quad dom\ f \text{ için } f(x) \geq \langle s_0, x\rangle - b \implies \langle s_0, x\rangle - f(x) \leq b \\
&\implies \sup\{\langle s_0, x\rangle - f(x) : x \in dom\ f\} \leq b \\
&\implies f^*(s_0) \leq b
\end{aligned}$$

olur, yani en az bir değer için f^* *sonlu değer alır.* f^* *kapalı konveks fonksiyonların supremumu olduğundan ve sonlu olduğu en az bir nokta bulunduğundan yukardaki önermeden dolayı* $f^* \in \overline{Conv}\ \mathbb{R}^n$ *olur.* ($x \in dom\ f \neq$

$\emptyset$ *ve* $\forall s \in \mathbb{R}^n$ *için* $\langle s, x\rangle - f(x) > -\infty$ *olur. Dolayısıyla* $\forall s \in \mathbb{R}^n$ *için* $\sup\{\langle s, x\rangle - f(x) : x \in dom\ f\} = f^* > -\infty$ *olur.)*

2.3.3 Bir konveks fonksiyonun bir afin fonksiyonla sağdan bileşkesi

Önerme 2.17. *$f \in Conv\ \mathbb{R}^n$, $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ bir afin fonksiyon ve* $\operatorname{Im} A \cap$ *$dom\ f \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $f \circ A \in Conv\ \mathbb{R}^m$ olur. Eğer $f \in C\overline{onv}\ \mathbb{R}^n$ ise $f \circ A \in C\overline{onv}\ \mathbb{R}^m$ olur.*

Kanıt. $f \in Conv\ \mathbb{R}^n$, $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ bir afin fonksiyon ve $\operatorname{Im} A \cap dom\ f \neq \emptyset$ olsun. $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $(f \circ A)(x) > -\infty$ olduğu açıktır. Ayrıca $\operatorname{Im} A \cap dom\ f \neq \emptyset$ olduğundan $f(y) < +\infty$ olan $\exists y = A(x) \in \mathbb{R}^n$ vardır. Bu yüzden $(f \circ A)(x) < +\infty$ olan $\exists x \in \mathbb{R}^n$ vardır.

$x_1, x_2 \in dom\ (f \circ A)$ ve $\alpha \in (0, 1)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}(f \circ A)(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) &= f(\alpha A(x_1) + (1-\alpha)A(x_2)) \\ &\leq \alpha f(A(x_1)) + (1-\alpha) f(A(x_2)) \\ &= \alpha (f \circ A)(x_1) + (1-\alpha)(f \circ A)(x_2)\end{aligned}$$

olur. Böylelikle $f \circ A \in Conv\ \mathbb{R}^n$ olur.

$f \in C\overline{onv}\ \mathbb{R}^n$ ise $f \circ A \in C\overline{onv}\ \mathbb{R}^n$ olduğu gösterilecektir. Konvekslik gösterildiğinden sadece kapalılığa bakmak yeterli olacaktır. Bunun için $B : (x, \mu) \mapsto (A(x), \mu)$ afin dönüşümü alınsın. B afin fonksiyon olduğundan süreklidir.

$$B^{-1}(epi\ f) = B^{-1}\{(x, r) : r \geq f(x)\} = \{(A^{-1}(x), r) : r \geq f(x)\}$$

olur $A^{-1}(x) = y \in \mathbb{R}^n$ denirse

$$B^{-1}(epi\ f) = \{(y, r) : r \geq f(A(y)) = (f \circ A)(y)\} = epi\ (f \circ A)$$

olur. f kapalı olduğundan $epi\ f$ kapalı bir küme olur. B sürekli ve sürekli fonksiyonlar altında kapalı kümelerin ters görüntüsü kapalı olduğundan

$B^{-1}(epi\ f) = epi\ (f \circ A)$ kapalı olur. Epigrafı kapalı olduğundan $f \circ A$ kapalı olur. ■

2.3.4 Bir konveks fonksiyonun artan bir konveks fonksiyonla soldan bileşkesi

Önerme 2.18. *$f \in Conv\ \mathbb{R}^n[\overline{Conv}\ \mathbb{R}^n]$ ve $g \in Conv\ \mathbb{R}^n[\overline{Conv}\ \mathbb{R}^n]$ ve g artan olsun. $f(x_0) \in domg$ olacak şekilde $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ olduğunu varsayalım ve $g(+\infty) := +\infty$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $g \circ f : x \mapsto g(f(x)), Conv\ \mathbb{R}^n$ nin elemanıdır.*

Kanıt. $x_1, x_2 \in dom(g \circ f)$ olsun. $\alpha \in (0,1)$ olsun. g artan fonksiyon olduğundan

$$a \leq b \text{ iken } g(a) \leq g(b)$$

dir.

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

olduğundan

$$g(f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)) \leq g(\alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2))$$

olur. Yani

$$(g \circ f)(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha (g \circ f)(x_1) + (1-\alpha)(g \circ f)(x_2)$$

olur. Böylece $(g \circ f)$ fonksiyonun konveksliği kanıtlanır. Kapalılığa gelirsek; g kapalı konveks, f (kapalı) konveks olsun. $dom(g \circ f) \supset (x_n) \to x$ dizisini alalım.

$$\forall k \geq m \text{ için } f(x) \leq \liminf f(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \leq f(x_k) \tag{2.6}$$

olacak şekilde $\exists m \in \mathbb{N}$ vardır.g artan olduğundan 2.6 deki ifadede her tarafın g ye göre görüntüsü alınırsa eşitsizlik korunur.

$$(g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(x_k)$$

olur.

$$\liminf_{k\to\infty}(g\circ f)(x) \leq \liminf_{k\to\infty}(g\circ f)(x_k) \Rightarrow (g\circ f)(x) \leq \liminf_{k\to\infty}(g\circ f)(x_k)$$

olduğundan $(g\circ f)$ kapalı fonksiyon olur. ■

$g(t) = e^t$ konveks artan (kapalı) bir fonksiyondur. f konveks ise $e^{f(x)}$ konvekstir. (kapalı konvekstir.)

2.4 Bir Lineer Dönüşüm Altında Görüntü Fonksiyonu

$$\inf_{u\in U}\{\varphi(u) : c(u) \leq x\} \tag{2.7}$$

şeklinde ifade edilen optimizasyon değişkeni u olan ve x, X sıralı kümesinden alınan bir parametre olan optimizasyon problemini düşünelim. Optimal değer, x e bağlı bu fonksiyondur ve (u, φ, c) ile bu fonksiyon karakterize edilebilir ve fonksiyon değerlerini $\mathbb{R}\cup\mp\{\infty\}$ dan alır.

Üstte 2.7 ile verilen fonksiyon için birkaç varyasyon vardır. Eşitlik kısıtları veya birkaç kısıtın hedef fonksiyonda gösterge fonksiyonu olarak yer alması.

Tanım 2.19 (Görüntü Fonksiyonu)**.** *$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineer operatör ve $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ olsun. g nin A altındaki görüntüsü $Ag : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{\mp\infty\}$*

$$(Ag)(x) := \inf\{g(y) : Ay = x\} \tag{2.8}$$

ile tanımlanır.

Tanımdaki fonksiyonun ismi $g := i_c$ özel durumundan esinlenerek verilmiştir .Çünkü $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^m$ kümesi için

$$Ag(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & x = Ay \ \ \exists y\in C \\ +\infty, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} 0, & x\in A(C) \\ +\infty & x\notin A(C) \end{array}\right.$$

Yani $Ag = i_{A(C)}$ C nin A altındaki görüntüsünün gösterge fonksiyonudur. (C konveks ise $A(C)$ de konvekstir.)

Optimizasyon problemi 2.7'de $X=\mathbb{R}^n,\ U=\mathbb{R}^{m-n}, y=(u,x)\in U\times X=\mathbb{R}^m$ ve $Ay:=x$ ve $g(y):=\varphi(u)+i_C(y)$ ile $C:=\{y=(u,x)\in\mathbb{R}^m : c(u)\leq x\}$ için 2.7, 2.8 formuna çevrilir.

$$\inf_{u\in U}\{\varphi(u):c(u)\leq x\} \ = \inf_{u\in U}\{\varphi(u)+i_C(y):Ay=x\} \ = \inf\{g(y):Ay=x\}$$
$$=(Ag)(x)$$

2.8 de benzer bir yöntemle 2.7 e çevrilebilir.

Eğer A nın ters fonksiyonu varsa (non-singular); $Ag=g\circ A^{-1}$ dir. Gerçekten;

$$(Ag)(x)=\inf\{g(y):Ay=x\}$$

$y=A^{-1}x$ olduğundan

$$(Ag)(x)=\inf\{g(\underbrace{A^{-1}(x)}_{\text{tek eleman}})\}$$
$$Ag(x)=(g\circ A^{-1})(x)$$

olur.

Teorem 2.5. $g(x)=\inf\limits_{u\in U}\{\varphi(u):c(u)\leq x\}$ *ve* $g\in Conv\mathbb{R}^n$ *olsun. Ayrıca* $\forall x\in\mathbb{R}^n$ *için* g*,* $A^{-1}(x)$ *kümesinde sınırlı olsun. Bu durumda* $Ag\in Conv\mathbb{R}^n$ *dir.*

Kanıt. $\forall x\in\mathbb{R}^n$ için $Ag(x)>-\infty$ dur.

$$Ag(x)=\inf\{g(y):Ay=x\};\quad y=A^{-1}x>-\infty\Rightarrow g(y)>-\infty$$

olduğundan $Ag(x)>-\infty$ dur.

$$A'(y,r):=(Ay,r)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$$

A' : $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}$ operatörünü düşünelim. $A'(epi\ g):=C$ dersek; A' lineer, $epi\ g$ konveks olduğundan C konvekstir. Bu kümenin alt sınır fonksiyonunu hesaplarsak: $x\in\mathbb{R}^n$ verildiğinde

$$\inf_r\{r:(x,r)\in C\}=\inf_{y,r}\{r:Ay=x \text{ ve } g(y)\leq r\}=\inf_y\{g(y):Ay=x\}$$
$$=(Ag)(x)$$

olur. Konveks bir kümenin alt sınır fonksiyonu konveks olduğundan $(Ag)=\ell_C$ konvekstir. ∎

Tanım 2.20 (Marjinal Fonksiyon). *$g \in Conv(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ olsun.*

$$\begin{aligned} \gamma &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \gamma(x) &= \inf\{g(x,y) : y \in \mathbb{R}^m\} \end{aligned}$$

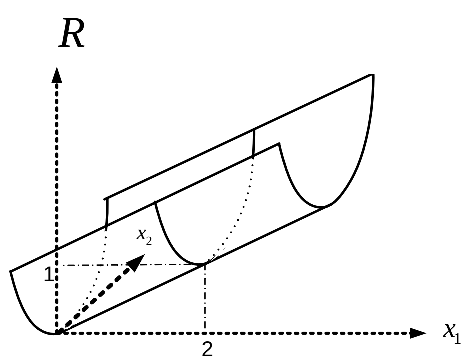
ile tanımlı γ fonksiyonuna g nin marjinal fonksiyonu denir.

Örnek 2.3. $g \in Conv(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $g(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1 + x_2^2$,
$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\gamma(x_1) = \inf\{g(x_1, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$

$$\gamma(0) = \inf_{x_2 \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + x_2^2\right) = 0$$

$$\gamma(2) = \inf_{x_2 \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + x_2^2\right) = 1$$

Şekil 2.5'de g fonksiyonu gösterilmektedir. g'nin marjinal fonksiyonu $\gamma(x_1) = \frac{1}{2}x_1$ dir.



Şekil 2.5: Marjinal fonksiyon

Önerme 2.19. *$g \in Conv(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ ve g, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $\{x\} \times \mathbb{R}^m$ de sınırlı olsun. Bu durumda g nin marjinal fonksiyonu $\gamma \in Conv\mathbb{R}^n$ dir.*

Kanıt.

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \inf\{g(x,y) : y \in \mathbb{R}^m\} \\ &= \inf\{g(x,y) : A(x,y) = x\} \\ &= (Ag)(x) \end{aligned}$$

γ fonksiyonunu görüntü fonksiyonu olarak yazdık ve $g \in Conv(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ olduğundan $\gamma \in Conv\mathbb{R}^n$ olur. ■

Geometrik olarak konveksliğin korunduğunu görelim. $epi_s\ \gamma$, $epi_s\ g$ nin $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ye iz düşümüdür. Bundan dolayı $epi_s\ \gamma$ bir lineer operatör altında konveks bir kümenin görüntüsüdür.

2.5 Bir Fonksiyonun Konveks Zarfı ve Kapalı Konveks Zarfı

Bir g fonksiyonu (konveks olmayan) verildiğinde bu fonksiyonun epigrafının konveks zarfını almayı düşünmek doğaldır. Bu bize bir küme verir. Bu küme epigraf değilse alt sınır fonksiyonunu kullanarak altı kapatılarak epigraf yapılır.

Tanım 2.21. $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $g \not\equiv +\infty$ *ve* $\exists (s,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *için*

$$g(x) \geq < s, x > -b, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

olsun. Bu durumda

$$(co(g))(x) := \sup\{h(x) : h \in Conv\mathbb{R}^n, h \leq g\}$$

ile tanımlanan fonksiyona g'nin konveks zarfı denir.

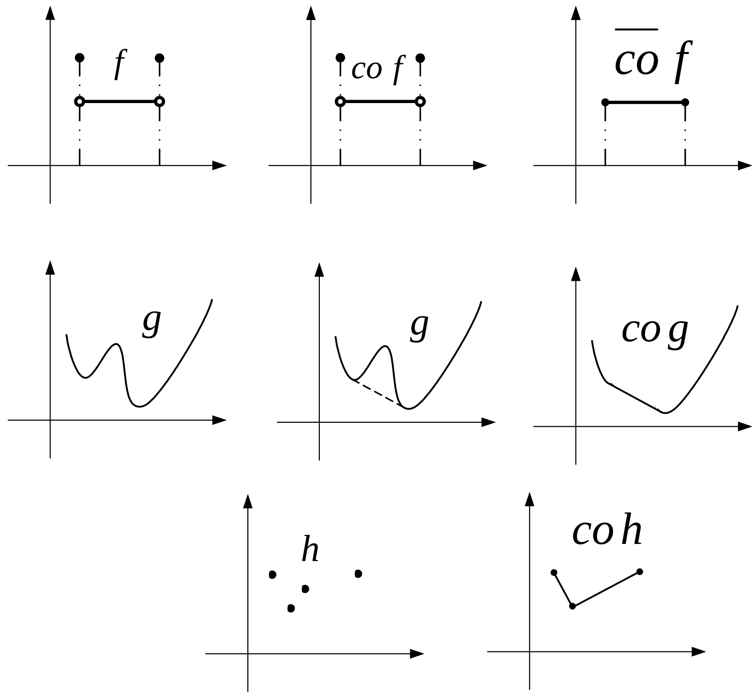
Şekil 2.6'da bir fonksiyonun konveks zarfının geometrik olarak nasıl bulunduğu gösterilmiştir.

Önerme 2.20. *[12]* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $g \not\equiv +\infty$ *ve* $\exists (s,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *için*

$$g(x) \geq < s, x > -b, \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{2.9}$$

olsun. Bu durumda alttaki f_1, f_2, f_3 *konvekstir ve* $\mathbb{R}^n$ *de çakışırlar.*

$$\begin{aligned} f_1(x) \ &: \ = \inf\{r : (x,r) \in coepi\ g\} \\ f_2(x) \ &: \ = \sup\{h(x) : h \in Conv\mathbb{R}^n, h \leq g\} \qquad (2.10) \\ f_3(x) \ &: \ = \inf\{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j g(x_j) : k = 1, 2, \cdots, \alpha \in \Delta_k, x_j \in domg, x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j\} \end{aligned}$$



Şekil 2.6: Bir fonksiyonun konveks zarfı

Önerme 2.21. *[12,17]g, önerme 2.20 deki koşulları sağlasın. Bu durumda aşağıdakiler*

$$\overline{f_1}(x) = \inf\{r : (x, r) \in \overline{co}epi\ g\}$$

$$\overline{f_2}(x) = \sup\{h(x) : h \in C\overline{onv}\mathbb{R}^n, h \leq g\}$$

$$\overline{f_3}(x) = \sup\{< s, x > -b :< s, y > -b \leq g(y), \forall y \in \mathbb{R}\}$$

kapalı, konvekstirler ve $\mathbb{R}^n$ *de co g nin kapanışı ile çakışırlar.*

Önerme 2.22. $g_1, g_2, \cdots, g_m \in Conv\mathbb{R}^n$ *ve hepsi aynı afin fonksiyonla minorize edilsin. Bu durumda infimumlarının konveks zarfı aşağıdaki fonksiyondur.*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \quad &\ni \quad x \mapsto [co\ (\min_j g_j)](x) \\ &= \quad \inf\ \{\ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j g_j(x_j) : \alpha \in \Delta_m, x_j \in dom g_j,\ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j = x\} \end{aligned}$$

Kanıt. $\{g_j\}_{j \in J}$ aynı afin fonksiyon ile minorize edildiğinden $\inf_j g_j =$

$\bigcup\limits_{j\in J} epi\ g_j$ dir. Ayrıca C_i kümeleri konveks ve $S = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_m$ ise

$$coS = \{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j . x_j : \alpha \in \Delta_m, x_i \in C_i, i = 1, 2, \cdots, m\}$$

olduğundan $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j . g(x_j)$ konveks kombinasyonları alınırken x_j lerin her biri farklı $domg_j$ lerden alınabilir. Böylece

$$[co\ (\min_j g_j)](x) = \inf\ \{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j . g(x_j) : \alpha \in \Delta_m, x_j \in domg_j,\ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j . x_j = x\} \tag{2.11}$$

olur. ■

Sonsuz sayıda g_j fonksiyonları içinde x in sonlu $x_j \in domg_j$ lerin konveks kombinasyonlarını düşünmek yeterlidir.

Keyfi bir $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu konveks fonksiyonlarının infimumu olarak düşünülebilir.

$$g(x) = \inf\{g(x_j) + i_{\{x_j\}} : x_j \in domg_j\}$$

$g(x_j)$ ler sonlu sabit fonksiyon.

2.6 Bir Konveks Fonksiyonun Yerel ve Global Davranışı

Konveks fonksiyonlar *ridom* da (tanım kümelerinin rölatif içlerinde) yerel Lipschitzdir. Fakat tanım kümesinin göreceli sınırında bütün süreklilikler kaybolabilir.

Yardımcı Teorem 2.1. *[6,18,19]* $f \in Conv\mathbb{R}^n$ *ve* $\exists x_0, \delta, m, M \ni \forall x \in B(x_0, 2\delta)$ *iken* $m \leq f(x) \leq M$ *olsun. Bu durumda* f, $B(x_0, 2\delta)$ *da Lipschtizdir Açık olarak söylersek*

$$\forall y, y' \in B(x_0, \delta)\ \textit{için}\ |f(y) - f(y')| < \frac{M-m}{\delta}||y - y'||$$

dir.

Teorem 2.6. $f \in Conv\mathbb{R}^n, S \subset ri\ domf$ *konveks, kompakt olsun. Bu durumda* $\forall x, x' \in S$ *için*

$$|f(x) - f(x')| \leq L||x - x'||$$

olacak şekilde $L = L(S) \geq 0$ *vardır.*

Kanıt. $\mathbb{R}^n$ *yerine* $domf$ *ile aynı boyutlu* $\mathbb{R}^d$ *alırsak, uygun düzeltmelerle* $ridomf = intdomf$ *olarak düşünülebilir.*

S *olsun. Öncelikle bir önceki Lemmanın sağlandığı kanıtlayacağız. Bunun için* $y, y' \in B(x_0, \delta)$, $|f(y) - f(y')| \leq L||y - y'||$ *ve* $B(x_0, \delta) \subset intdomf$ *olacak şekilde* $\delta = \delta(x_0) > 0$ *ve* $L = L(x_0, \delta)$ *varlığını gösterelim.* x_0 *ın komşuluğunda* f *nin sınırlı olduğunu göstermeliyiz. Uzayla* $domf$ *i aynı boyuta getirdiğimiz için* $\exists \Delta = co\{v_0, v_1, \cdots, v_n\} \subset domf \ni \ x_0 \in int\Delta$ *ve* $(\exists \delta > 0 \ni B(x_0, 2\delta)) \subset \Delta$ *dır. Bu durumda* $y \in B(x_0, 2\delta), \alpha \in \Delta_{n+1}$ *için* $y = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i.v_i$ *şeklinde yazılabilir.Böylece*

$$f(y) \leq \sum_{i=0}^{n} \alpha_i.f(v_i) \leq \max\{f(v_0), f(v_1), \cdots, f(v_n)\} := M$$

Ayrıca f *konveks olduğundan alttan bir afin fonksiyonla sınırlıdır.* $B(x_0, 2\delta)$ *da* f *alttan* M *ile alttan sınırlı olsun. Böylece* $\delta(x_0) > 0$ *için* $m \leq f(y) \leq M, \forall y \in B(x_0, 2\delta)$ *yı oluşturduk. Yani* f x_0 *da yerel Lipschitz oldu.*

$$|f(y) - f(y')| \leq L||y - y'||, \quad \forall y, y' \in B(x_0, \delta(x_0)) \tag{2.12}$$

S *nin kompaktlığını kullanarak bunun tüm tanım kümesinde sağlandığını görelim.* x_0 *keyfi seçildiğinden* $\forall x_0 \in S$ *2.12 i sağlayan bir* $\delta(x_0) > 0$ *vardır. Böylelikle bu* x_0 *ve* $\delta(x_0)$*'lar kullanılarak oluşturulan* $\{B(x_0, \delta(x_0)) : x_0 \in S\}$ *kümesi,* S *nin açık bir örtüsüdür.* S *kompakt olduğundan bu açık örtünün* $A = \{B(x_j, \delta_j) : x_j \in S, \ j = 1, .., k\}$ *sonlu alt örtüsü vardır.*

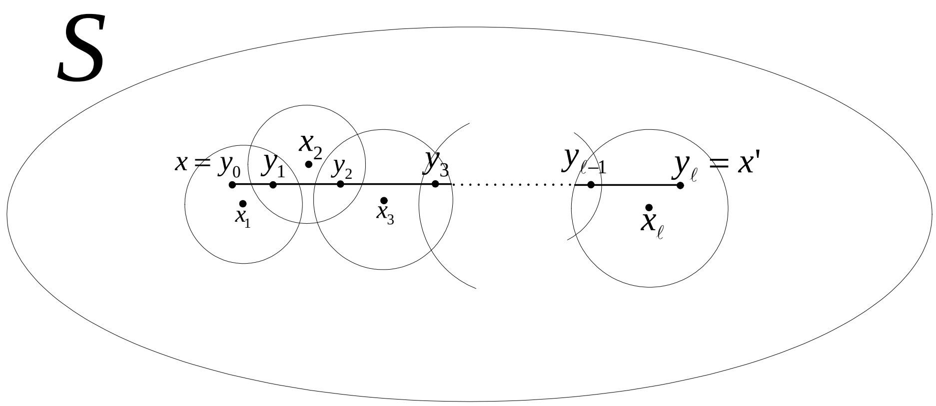
Bu durumda $[x, x'] \subset \bigcup_{i \in \{1,..k\}} B(x_i, \delta_i)$ *olur.* $y_0 := x$ *ve* $y_\ell := x'$ *olsun.* $x, x' \in ridom\ f$ *olduğundan* $[x, x']$ *doğru parçasını sonlu sayıda* $[y_{i-1}, y_i] \subset B(x_{j(i)}, \delta_{j(i)})$
$(i = 1, .., \ell$ *ve* $\ell \leq k)$ *doğru parçasına ayırabiliriz. (Genelliği bozmadan* $j(i) = i$ *alınabilir. Buradan* $y_{i-1}, y_i \in B(x_i, \delta_i)$, $(\forall i = 1, 2, \cdots \ell)$. *Şekil 2.7) Böylelikle* $[y_{i-1}, y_i]$ *de* f *Lipschitz olur. Ayrıca*

$$\begin{aligned} |f(y_i) - f(y_i)| &\leq L_i||y_{i-1} - y_i|| \\ &\leq \max\{L_i\}||y_{i-1} - y_i|| \end{aligned}$$

olduğundan f $[y_{i-1}, y_i]$ *de* $L = \{L_i\}$ *ortak katsayısına göre Lipschitzdir.*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x^{'})| &= |f(y_0) - f(y_1) + f(y_1) - \cdots - f(y_\ell)| \\ &\le |f(y_0) - f(y_1)| + |f(y_1) - f(y_2)| + \cdots + |f(y_{\ell-1}) - f(y_\ell)| \\ &\le L||y_0 - y_1|| + L||y_1 - y_2|| + \cdots + L||y_{\ell-1} - y_\ell|| \\ &= L||y_0 - y_\ell|| \end{aligned}$$

olur. Böylece kanıt biter. ■



Şekil 2.7: Alt örtü kullanılarak bir doğru parçasını küçük doğru parçalarına bölme

2.7 Konveks Fonksiyonların Birinci ve İkinci Mertebeden Türevleri

$C \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı ve konveks verilsin. Bu kesimde C kümesinde tanımlı f fonksiyonu ($f(x) < +\infty, x \in C$) verildiğinde bu kümede f'nin konveksliği türevlenebilirliği arasındaki ilişkiler incelenecektir.

2.7.1 Diferansiyellenebilir konveks fonksiyonlar

f nin C de diferansiyellenebilir olduğu kabul edilecektir.

$x_0 \in C$ verildiğinde "f , x_0 da diferansiyellenebilirdir" ifadesinin anlamlı olması için f nin x_0 ın bir komşuluğunda tanımlı olması gerekir. Bu yüzden

C, f'nin diferansiyellenebilir olduğu Ω açık kümesinin alt kümesi olduğunu kabul etmek doğru olacaktır.

Teorem 2.7. *$f, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesinde tanımlı diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $C \subset \Omega$ konveks olsun. Bu durumda*

(i) f, C de konvekstir ancak ve ancak $\forall (x_0, x) \in C \times C$ için

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \tag{2.13}$$

f, C de konvekstir ancak ve ancak $x \neq x_0$ için (4.1.1) deki eşitsizlik sağlanır.

Kanıt.

(i) f, C de konveks olsun. $(x_0, x) \in C \times C$ ve $\alpha \in (0,1)$ keyfi olarak alalım. Konvekslikten

$$f\left(\alpha x + (1-\alpha)x_0\right) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x_0)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad f\left(\alpha x + (1-\alpha)x_0\right) - f(x_0) \leq \alpha \left[f(x) - f(x_0)\right] \\
&\Rightarrow \quad \frac{f\left(\alpha x + (1-\alpha)x_0\right) - f(x_0)}{\alpha} \leq \frac{\alpha \left[f(x) - f(x_0)\right]}{\alpha} \\
&\Rightarrow \quad \frac{f\left(\alpha x + (1-\alpha)x_0\right) - f(x_0)}{\alpha} \leq f(x) - f(x_0) \\
&\Rightarrow \quad \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{f\left(\alpha x + (1-\alpha)x_0\right) - f(x_0)}{\alpha} \leq f(x) - f(x_0) \\
&\Rightarrow \quad < \nabla f(x_0), x - x_0 > \leq f(x) - f(x_0) \\
&\Rightarrow \quad f(x) \geq f(x_0) + < \nabla f(x_0), x - x_0 >
\end{aligned}$$

Tersine $x_1, x_2 \in C, \alpha \in (0,1)$ alalım; $x_0 := \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$ olsun. Hipoteze göre

$$\begin{aligned}
f(x_1) &\geq f(x_0) + < \nabla f(x_0), x_1 - x_0 > \\
f(x_2) &\geq f(x_0) + < \nabla f(x_0), x_2 - x_0 >
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
\alpha f(x_1) &\geq \alpha f(x_0) + < \nabla f(x_0), \alpha\left(x_1 - x_0\right) > \\
(1-\alpha) f(x_2) &\geq (1-\alpha) f(x_0) + < \nabla f(x_0), (1-\alpha)\left(x_2 - x_0\right) >
\end{aligned}$$

taraf tarafa toplama yaparsak

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \geq f(x_0) + < \nabla f(x_0), \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 - x_0 >$$

Bu eşitsizlikte $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = x_0$ değişikliği yaparsak

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) - x_0 = x_0 - x_0 = 0$$

olacaktır. Devamında

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \geq f(x_0) + < \nabla f(x_0), 0 >$$

$$\Rightarrow f(x_0) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = x_0$ olduğundan

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

elde edilir.

(ii) f kesin konveks olsun. $x_0, x \in C$, $x_0 \neq x$ ve $\alpha \in (0,1)$ olsun. Bu durumda kesin konvekslikten

$$f\left(x_0 + \alpha(x - x_0)\right) - f(x_0) \leq \alpha \left[f(x) - f(x_0)\right]$$

yazılır. Ayrıca f özel olarak konveks de olduğundan

$$\begin{aligned} &< \nabla f(x_0), x_0 + \alpha(x - x_0) - x_0 > \leq f(x_0 + \alpha(x - x_0)) - f(x_0) \\ \Rightarrow &< \nabla f(x_0), \alpha(x - x_0) > \leq f(x_0 + \alpha(x - x_0)) - f(x_0) \end{aligned}$$

Böylelikle

$$\langle \nabla f(x_0), \alpha(x - x_0) \rangle < \alpha \left[f(x) - f(x_0)\right]$$

İki taraf $\alpha > 0$ e bölünürse

$$\langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle < f(x) - f(x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) > f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle$$

Diğer yönden 2.14 de kesin eşitsizlikten başlandığında (i) deki yol izlenerek f nin kesin konveks olduğu görülür. ■

Uyarı 2.2. *Eşitsizlik 2.13 oldukça önemlidir. Bu eşitsizliği eşitlik formuna dönüştürürken*

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + r(x_0, x)$$

$r(x_0, \cdot)$ *fonksiyonunun negatif olmaması ve konveks olması gerektiğine dikkat edilmelidir .*

"Tek değişkenli diferansiyellenebilen bir fonksiyonun konveks olması için gerekli ve yeterli koşul bu fonksiyonun türevinin monoton artan olmasıdır." olduğu biliniyor. Bunun benzeri bir özelliği Monoton artanlığı çok boyutlu duruma genelleştirerek verelim.

Tanım 2.22. $C \subset \mathbb{R}^n$ *konveks olsun.* $F : C \to \mathbb{R}^n$ *gönderimi (mapping)* $\forall x, x^{'} \in C$ *için*

$$\left\langle F(x) - F(x^{'}), x - x^{'} \right\rangle \geq 0 \quad (\left\langle F(x) - F(x^{'}), x - x^{'} \right\rangle > 0)$$

oluyorsa F *ye monoton, (kesin monoton) denir.*

Teorem 2.8. *[1,2,7]* f $\quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$ *açık kümesinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve* $C \subset \Omega$ *olsun. Bu durumda* f C *de konvekstir [kesin konvekstir] ancak ve ancak gradyantı* ∇f C *de monotondur. [kesin monotondur]*

Kanıt. *Önce kesin konveks kesin monoton durumunu görelim.* f *kesin konveks ise* $x \neq x_0$ *için*

$$\begin{aligned} f(x) &> f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \\ f(x_0) &> f(x) + \langle \nabla f(x), x_0 - x \rangle \end{aligned}$$

Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$f(x) + f(x_0) > f(x_0) + f(x) + \langle \nabla f(x) - \nabla f(x_0), x_0 - x \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \nabla f(x) - \nabla f(x_0), x_0 - x \rangle > 0$$

bulunur. Yani ∇f *kesin monoton olur.*

Tersine $(x_0, x_1) \in C \times C$, ∇f *kesin monoton ve* $t \in (0,1)$, $t \to \varphi(t) =$

$f(x_t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0)$ *olsun.* φ *iyi tanımlı ve diferansiyellenebilirdir ve* $\varphi'(t) = \langle \nabla f(x_t), x_1 - x_0 \rangle$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} \varphi^{'}(t) - \varphi^{'}(0) &= \langle \nabla f(x_t) - \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle \\ &= \frac{1}{t} \langle \nabla f(x_t) - \nabla f(x_0), xt - x_0 \rangle > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi^{'}(t) - \varphi^{'}(0) > 0$$

İki tarafın $t = 0$ *dan* $t = 1$ *e integrali alınırsa*

$$\int_{t=0}^{1} \left[\varphi^{'}(t) - \varphi^{'}(0) \right] dt > \int_{t=0}^{1} 0 dt$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \varphi(1) - \varphi(0) - \varphi^{'}(0) > 0 \\ &\Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle \end{aligned}$$

olur. Yani f *kesin konveks olur.* ■

Örnek 2.4. $f(x) := \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$ *kuadratik konveks bir fonksiyon olsun:* A *simetriktir,* $\lambda_n \geq 0$ *en küçük öz değer diyelim.* $\nabla f(x) = Ax + b$ *dir. Gerçekten*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} A_{ii}(x_i)^2 + \sum_{\substack{i, j \in \{1,2,..,n\} \\ j > i}} A_{ij}(x_i)(x_j) \\ \nabla \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle &= 2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} A_{ii} x_i + \sum_{\substack{i, j \in \{1,2,..,n\} \\ i \neq j}} A_{ij}(x_i + x_j) \\ &= Ax \end{aligned}$$

olduğundan $\nabla f(x) = Ax + b$ *olur.*

$$
\begin{aligned}
&f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x), x - x_0\rangle \\
&\quad = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \frac{1}{2}\langle Ax_0, x_0\rangle - \langle Ax_0, x - x_0\rangle \\
&\quad = \frac{1}{2}\langle Ax, x - x_0 + x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax_0, -x_0 + x - x\rangle - \langle Ax_0, x - x_0\rangle = \\
&\quad = \frac{1}{2}\langle Ax, x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax, x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax_0, x - x_0\rangle \\
&\qquad -\frac{1}{2}\langle Ax_0, x\rangle - \frac{1}{2}\langle 2Ax_0, x - x_0\rangle \\
&\quad = \frac{1}{2}\langle Ax + Ax_0 - 2Ax_0, x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax, x_0\rangle - \frac{1}{2}\langle Ax, x_0\rangle \\
&\quad = \frac{1}{2}\langle A(x - x_0), x - x_0\rangle \\
&\quad \geq \frac{1}{2}\lambda_n \|x - x_0\|^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x), x - x_0\rangle$$

elde edilir. Böylelikle f konveks olur. Buradan da ∇f nin monoton olduğu çıkar.

2.7.2 Diferansiyellenemeyen konveks fonksiyonlar

Önerme 2.23. *$f \in Conv\ \mathbb{R}^n$ ve $x \in int\ dom f$ için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) $\mathbb{R}^n \ni d \mapsto \lim\limits_{t \downarrow 0} \dfrac{f(x+td) - f(x)}{t}$ *fonksiyonu (d ye göre) lineerdir.*

(ii) $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ olan $\mathbb{R}^n$ nin bir tabanında $i = 1, 2, \cdots n$ için $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ kısmi türevleri vardır.

(iii) f, x de diferansiyellenebilirdir.

Kanıt. $\varphi : t \mapsto f(x+td)$ bir boyutlu fonksiyonun 0 da yarı türevleri vardır: (i) deki limitler her d için vardır. (ii) deki taban $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ olsun. $x = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i$ olur.

$[(i) \Rightarrow (ii)]$

$$\ell(d) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$$

doğrusal olsun. $d = -b_i$ için

$$\begin{aligned}
\ell(-b_i) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x - tb_i) - f(x)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x + tb_i) - f(x)}{-t} \\
&= -\lim_{t\to 0^-} \frac{f(x + tb_i) - f(x)}{t}
\end{aligned}$$

ℓ lineer olduğundan

$$\ell(-b_i) = -\ell(b_i) = -\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x + tb_i) - f(x)}{t}$$

Böylelikle

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(x + tb_i) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x + tb_i) - f(x)}{t}$$

olur. Bu da φ nin iki yarı türevinin $t = 0$ da eşit olduğu demektir. f nin x te b_i yönündeki kısmi türevleri vardır.

$[(iii) \Rightarrow (i)] f$ x te diferansiyellenebilir olsun.

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t} = \langle \nabla f(x), d \rangle$$

Bu da bu limit fonksiyonun d ye göre lineer olduğunu verir.

$[(ii) \Rightarrow (i)]$Not: (Önerme 3.4 : σ olsun. $j = 1, 2, \cdots, m$ için $\sigma(x_j) + \sigma(-x_j) = 0$ olacak şekilde $x_1, x_2, \cdots, x_m \in dom\sigma$ olsun. Bu durumda σ, $x_1, x_2, \cdots, x_m$ nin gerdiği alt uzayda lineerdir.)

$\{b_1,\ b_2, \cdots,\ b_n\}$tabanı için x te kısmi türevleri olsun.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x + tb_i) - f(x)}{t} = f^{'}(x)(b_i)$$

$f^{'}(x)$ yönlü türev sublineerdir ve $b_1, \cdots, b_n$ de lineer olduğundan. $\{b_1, \cdots, b_n\}$ tabanlı uzayda $f^{'}(x)$ lineer olur.

$[(i) \Rightarrow (iii)]$ f nin x te diferansiyellenebilmesinin bir tanımı

$$\lim_{t\to 0^+\ d^{'}\to d} \frac{f(x + td^{'}) - f(x)}{t}$$

(d ye göre) lineer olmasıdır. f yerel Lipschitz olduğundan

$$\left| f(x + td^{'}) - f(x + td) \right| \leq L \left| t(d^{'} - d) \right|$$

$$\lim_{d' \to d} \left| f(x+td') - f(x+td) \right| \leq \lim_{d' \to d} L \left| t(d' - d) \right| = 0$$

■

$$d' \to d \text{ iken } f(x+td') \to f(x+td)$$

olur.

$$\lim_{t \to 0^+} \lim_{d' \to d} \frac{f(x+td') - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$$

olur. f nin yönlü türevi lineer olduğu verildiğinden soldaki limit fonksiyon da lineer olur. Böylelikle f x te diferansiyellenebilirdir.

Uyarı 2.3. *Yukarıdaki sonuç konveks fonksiyonlarla ilgili üç ilginç özellik sunar:*

i) f nin $x + \mathbb{R}d$ doğrusuna kısıtlanışı $\varphi_d(t) := f(x+td)$ düşünüldüğünde; $d_1, d_2, \cdots, d_n$ şeklinde n bağımsız yön olduğundan her bir φ_{di} $t = 0$ da türevlenebilirse bütün diğer yönlerde de $(d \in \mathbb{R})$ $\varphi_d(t)$ türevlenebilir.

ii) Bu radial diferansiyellenebilme özelliği f nin x te global (yani Fréchet) diferansiyellenebilmesini garanti eder. Bu da temel olarak f nin Lipschitz özelliğinden gelir.

iii) f, x in bir komşuluğnda konveks ve diferansiyellenebilirse bu durumda ∇f x te süreklidir. Böylelikle eğer Ω açık konveks küme ise aşağıdaki denklik konveks f için sağlanır.

$$f \quad \Omega \text{ da diferansiyellenebilir} \Leftrightarrow f \in C^1(\Omega)$$

Bir fonksiyonun diferansiyellenebileceği en geniş küme, tanım kümesinin içindedir. Aslında H.Rademacher'a (1919) dayanan bir sonuç Ω açık kümesinde yerel Lipschitz bir fonksiyonun Ω nın hemen hemen her yerinde diferansiyellenebildiğini söyler. Konveks fonksiyonlar da yerel Lipschitz olduğundan aşağıdaki sonuç yazılır.

Teorem 2.9. *[10,12] $f \in Conv\ \mathbb{R}^n$ olsun. $int\ dom f$ in f nin diferansiyellenemediği noktalardan oluşan alt kümesinin (Lebesgue) ölçümü 0'dır.*

2.7.3 İkinci mertebeden diferansiyellenebilme

Bir konveks fonksiyonun tanımanın en kullanışlı kriteri, ikinci türevleri kullanır. Bir fonksiyon konvekstir ancak ancak $[x, x']$ doğru parçalarına kısıtlanışları konveks ise. Böylelikle durumu bir boyutta incelemek yeterlidir. Bu doğru parçaları, x merkezli ve d yönünde parametrize edilirse: f nin konveksliği $t \mapsto f(x+td)$ nin konveksliğine dönüşür. Bu durumda son fonksiyonda ikinci türev almak yeterli olacaktır.

Teorem 2.10. *f $\quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık konveks kümesinde iki kere diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda*
(i) f $\quad \Omega$ da konvekstir ancak ve ancak her $x_0 \in \Omega$ için $\nabla^2 f(x_0)$ pozitif yarı tanımlıdır.
(ii) Her $x_0 \in \Omega$ için $\nabla^2 f(x_0)$ pozitif tanımlı ise f, Ω da kesin konvekstir.

Kanıt. $x_0 \in \Omega$, $d \in \mathbb{R}^n$ ve $x_0 + td \in \Omega$ olacak şekilde $t \in \mathbb{R}$ verildiğinde

$$x_t := x_0 + td \ \text{ ve } \varphi(t) := f(x_t) = f(x+td)$$

alınacaktır.Böylece
$\varphi''(t) = \left\langle \nabla^2 f(x_t)d, d \right\rangle$ olur.
(i) f $\quad \Omega$ da konveks kabul edilsin; $d \neq 0$ için $(x_0, d) \in \Omega \times \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda φ, $I = \{t \in \mathbb{R} : x_0 + td \in \Omega\}$ açık aralığında konvekstir. Her $t \in I \ni 0$ için $0 \leq \varphi''(t) = \left\langle \nabla^2 f(x_t)d, d \right\rangle$ ve $\nabla^2 f(x_0)$ pozitif tanımlı olur. Diğer taraftan $[x_0, x_1] \subset \Omega$ alınırsa $d := x_1 - x_0$ ve $\nabla^2 f(x_t)$ pozitif yarı tanımlı (yani $t \in [0,1]$ için $\varphi''(t) \geq 0$) olsun. Bu durumda φ, $[0,1]$ de konvekstir (yani f $[x_0, x_1]$ aralığında konvekstir). $x_0, x_1 \in \Omega$ keyfi seçildiğinden kanıt biter
(ii) f nin Ω da kesin konveksliğini göstermek için ∇f nin Ω da kesin monoton olduğunu kanıtlamak yeterlidir. $x_1 \neq x_0$ için $[x_0, x_1] \subset \Omega$ ve $d := x_1 - x_0$ olsun. Ortalama Değer Teoremi φ' ye uygulanırsa φ', $[0,1]$ de diferansiyellenebilir olduğundan

$$\varphi'(1) - \varphi'(0) = \varphi''(\tau) = \left\langle \nabla^2 f(x_\tau)d, d \right\rangle > 0$$

olduğundan ∇f kesin monoton olur; f $\quad \Omega$ da kesin konveks olur. ■

3 SUBLİNEER FONKSİYONLAR

3.1 Giriş

Klasik gerçel analizde en basit fonksiyonlar lineer olanlardır. Konveks analizde lineer fonksiyonlardan sonra gelen basit konveks fonksiyon türü (afin fonksiyonlar dışında) sublineer fonksiyonlar olacaktır.sublineer fonksiyonların incelenmesinin gerekliliğini ortaya koyan üç temel ifade verelim.

1- Lineerliğin Bir Genellemesi Olarak Sublineer Fonksiyonlar:

$\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ve $(t_1, t_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için

$$\ell (t_1 x_1 + t_2 x_2) = t_1 \ell (x_1) + t_2 \ell (x_2) \tag{3.1}$$

eşitliğini sağlıyorsa ℓ fonksiyonuna bir lineer fonsiyon veya $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir lineer form denir.

Benzer şekilde sublineer fonksiyonun tanımı şöyle verilebilir.

$\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ve $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ için

$$\sigma (t_1 x_1 + t_2 x_2) \leq t_1 \sigma (x_1) + t_2 \sigma (x_2) \tag{3.2}$$

oluyorsa σ fonksiyonuna sublineer fonksiyon denir.

İlk olarak 3.2'deki "küçük-eşit"likteki eşitsizlik sublineerlik kavramını bozmadan σ'nun sonsuz değerini alabilmesine izin verir. 3.2'nin, 3.1'den daha zayıf bir koşul olduğu açıktır. 3.2'deki eşitsizlik $t_1 + t_2 = 1$ durumunda da sağlandığından lineer fonksiyonların genelleştirilmesi olan sublineer fonksiyonlar aynı zamanda konveks fonksiyon da olurlar.

Uyarı 3.1. *1) Her lineer fonksiyon aynı zamanda sublineerdir. Çünkü* $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ *yerine* $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$ *alınırsa bu görülür.*

2)Tanımdaki "sub" takısı " $\leq$ *" işaretinden gelir.*

3) Sublineer fonksiyonlar, en basit aşikar olmayan konveks fonksiyonlardır.

Bunun neden böyle olduğunu birazdan açıklayacağız. Bunların epigrafları konveks konilerdir.

2-Sublineer Fonksiyonlarla Konveks Fonksiyonlara Teğetsel Yaklaşım:

Bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonun bir $x \in \mathbb{R}^n$de diferansiyellenebilmesi demek $f(x+h) - f(x)$ farkına 1. mertebeden yaklaşan ℓ_x lineer fonksiyonun var olması demektir, yani

$$f(x+h) - f(x) = \ell_x(h) + o(\|h\|) \tag{3.3}$$

olan bir $\ell_x$doğrusal dönüşümü var demektir.

Bu x bir d yönünde değişirken

$$\begin{aligned} f(x+td) - f(x) &= \ell_x(td) + o(\|td\|) \\ &= t\ell_x(d) + to(\|td\|) \end{aligned}$$

olur. Buradan $t \to 0$ için $\varepsilon(t) \to 0$ olmak üzere her $t \neq 0$ için

$$\frac{f(x+td) - f(x)}{t} = \ell_x(d) + \varepsilon(t)$$

elde edilir.

Geometrik olarak $graf(f)$'nin $(x, f(x)) \in R^n \times R$'de teğet hiper düzlemi vardır ve bu hiperdüzlem $h \to f(x) + \ell_x(h)$ afin fonksiyonunun grafiğidir.

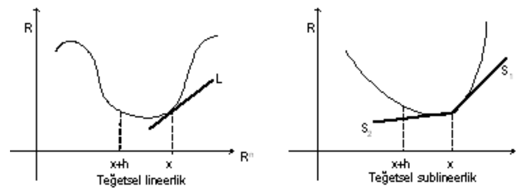
f sadece konveks ise grafiğin teğet hiperdüzlemi verilen $(x, f(x))$'de olmayabilir. Fakat uygun kabuller altında $f(x+h) - f(x)$'e bir sublineer fonksiyonla 1. mertebeden yaklaşılabilir: Yani

$$f(x+h) - f(x) = \sigma_x(h) + o(\|h\|)$$

$h \to \sigma_x(h)$ sublineer fonksiyonu vardır.

Geometrik olarak $gr\ (\sigma_x)$ artık bir hiperdüzlem değil bir konidir ve $gr\ (f)$' e teğettir. Buradaki teğet değimi: konilerin teğet olması anlamında anlaşılacaktır.

Bir fonksiyon diferansiyellenebilirse bir lineer teğete sahiptir ve fonksiyon konveks ise bir sublineer teğete sahiptir diyebiliriz. Şekil 3.1 de diferansiyellenebilen ve konveks fonksiyonların grafiği vardır ℓ_x'in grafiğine x'de çizilen teğet L doğrusu iken σ_x'in grafiğine x'de çizilen teğet ise S_1, S_2 ışınlarından oluşmuştur.



Şekil 3.1: İki teğet kavramı

3-Kapalı Sublineer Fonksiyonlarla, Kapalı Konveks Kümelerin Bire-bir Karşılık Getirilmesi:

$(R^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, Öklid uzayında bir ℓ lineer formu bir $s \in \mathbb{R}^n$ vektörüyle temsil edilebilir. Yani $\forall x \in R^n$ için

$$\ell\,(x) = \langle s, x\rangle \tag{3.4}$$

olan $\exists s \in R^n$ vardır. Lineer fonksiyonla ilgili bu eşitlik 3.1 deki eşitlikten daha geometrik ve aynı oranda kesindir.

Öncelikle $\emptyset \neq S \subset R^n$ bir küme olsun. $\sigma_S : R^n \to R \cup \{+\infty\}$

$$\sigma_S\,(x) := \sup\{\langle s, x\rangle : s \in S\} \tag{3.5}$$

olarak tanımlanan fonksiyon sublineerdir. Bu fonksiyona S'nin destek fonksiyonu denir. S sınırlı olduğunda onun destek fonksiyonu da her yerde sonludur. S sınırsız ise σ_S, $+\infty$ değerini alabilir. σ_S alttan yarı sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca σ_S'in S'nin kapanışının ve S'nin kapalı konveks zarfının destek fonksiyonu olduğu da kolayca görülebilir. Bundan dolayı sadece boş olmayan kapalı konveks kümelerin destek fonksiyonlarını incelemek yeterlidir.

Burada ana sonuç, $S \longrightarrow \sigma_S$ eşlemesi 1-1 ve örten olmasıdır. Bir alttan yarı sürekli (yani kapalı) sublineer fonksiyon boş olmayan kapalı konveks bir kümeyle tek olarak belirlenen bir destek fonksiyonudur. Böylece bir ℓ lineer fonksiyonu nasıl ki $\mathbb{R}^n$ de bir s vektörü ile $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $\ell(x) = \langle s, x\rangle$ biçiminde tek olarak belirlenebiliyorsa bir alttan yarı sürekli σ sublineer fonksiyonu da $\mathbb{R}^n$nin kapalı konveks bir $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ kümesiyle $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sigma(x) = \sigma_S(x) = \sup\{\langle s, x\rangle : s \in S\}$$

biçiminde tek olarak belirlenebilir. Özel olarak σ sublineer fonksiyonu lineer ise S'yi lineer fonksiyonu belirleyen $s \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere; $S = \{s\}$ tek nokta kümesi olarak alınabilir.

$\mathbb{R}^n$nin boş olmayan kapalı konveks alt kümeleriyle, kapalı sublineer fonksiyonların bu eşlemesi, bu tür fonksiyonların çalışılmasında geometrik yorumlar açısından çok yarar sağlayacaktır. Özel olarak kapalı konveks kümeler üzerindeki kesişim birleşim vs. işlemleri uygulayarak elde edilen yeni konveks kümelere karşı gelen yeni destek fonksiyonlarının nasıl elde edileceğini de göreceğiz. Bu yapılara göre

$$S \longrightarrow \sigma_S$$

bir izomorfizma olacaktır.

Bu bölümde bu üç ifadenin doğruluğunu göstereceğiz.

3.2 Tanım ve Özellikler

Tanım 3.1. *$\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ bir fonksiyon olsun. Eğer σ konveks ve pozitif homojen (1. mertebeden) yani $\sigma \in conv\mathbb{R}^n$ ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ için*

$$\sigma(tx) = t\sigma(x) \tag{3.6}$$

ise σ'ya sublineer fonksiyon denir.

Uyarı 3.2. *Denklem 3.6'deki eşitlik yerine eşitsizlik alınması pozitif homojenlik için yeterli olacaktır: Bir σ fonksiyonu homojendir ancak ve ancak $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ için*

$$\sigma(tx) \leq t\sigma(x) \tag{3.7}$$

dir.

Aslında 3.7 varsa ($tx \in \mathbb{R}^n, t^{-1} > 0$)

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sigma\left(t^{-1}tx\right) \leq t^{-1}\sigma(tx) \\ &\Longrightarrow t\sigma(x) \leq \sigma(tx) \end{aligned}$$

olur.3.7 ile üstteki eşitsizlik ise $t\sigma(x) = \sigma(tx)$ olduğunu yani σ'nun pozitif homojen olduğunu gösterir.

3.6'den $\sigma(0) = t\sigma(0)$ olduğunu çıkarabiliriz. Bu ise $\sigma(0)$ için iki olasılık bırakır $\sigma(0) = 0$ veya $\sigma(0) = +\infty$ dır. Fakat, karşılaşacağımız çoğu sublineer fonksiyonlar için $\sigma(0) = 0$ olacaktır. Konveks fonksiyon tanımından σ'nun en az bir noktada sonlu olması gerekir (Yoksa $dom\sigma = \emptyset$ olur). x bu noktalardan biri ise $\sigma(x) < +\infty$ iken $t > 0$ için $t\sigma(x) = \sigma(tx) < +\infty$ olur. Yani $x \in dom\sigma$ için $tx \in dom\sigma$ olur. Böylece $dom\sigma$, bir konidir. Ayrıca σ konveks olduğu için $dom\sigma$ konveks olmalıdır. Kısaca $dom\sigma$ konveks bir konidir. σ konveks olduğundan σ'nun $ridom\sigma$'ya göre sürekli olduğuna dikkat edilmelidir. $dom\sigma$'nun sınır ışınlarında (0'ı da kapsayan) süreksizlik görülebilir.

Bir sonraki sonuç sublineer fonksiyonların bir geometrik karakterizasyonudur.

Önerme 3.1. $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *fonksiyonu verilsin.*

$$\sigma \textit{ sublineerdir} \iff epi(\sigma) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \textit{ konveks konidir.}$$

Kanıt. $(\Rightarrow)\sigma$ sublineer olsun. σ konvekstir dolayısıyla $epi(\sigma)$ konvekstir. Şimdi $epi(\sigma)$'nın koni olduğunu gösterelim. $t \in \mathbb{R}^+$ ve $(x, r) \in epi(\sigma)$ olsun $\sigma(x) \leq r$ dir. Her iki taraf t ile çarpılırsa

$$t\sigma(x) = \sigma(tx) \leq tr$$

olur ki bu

$$t(x, r) = (tx, tr) \in epi(\sigma)$$

demektir. Yani $epi(\sigma)$ konidir. Böylece $epi(\sigma)$ konveks konidir.

$(\Leftarrow) epi(\sigma) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ konveks koni olsun. Öncelikle σ konvekstir ve $\forall t > 0$ için

$$(x, \sigma(x)) \in epi(\sigma) \Rightarrow (tx, t\sigma(x)) \in epi(\sigma)$$

olacağından $\sigma(tx) \leq t\sigma(x)$ elde edilir ki bu σ'nın pozitif homojen olmasını verir. Böylece σ sublineerdir. ■

Analizde bir diğer önemli kavram alt toplamsallıktır (subadditivity): σ fonksiyonu için

$$\sigma(x_1 + x_2) \leq \sigma(x_1) + \sigma(x_2) \;\; \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \tag{3.8}$$

varsa σ'ya alttoplamsaldır denir.bu eşitsizliğin 3.2'den farklılığına dikkat edin. Burada da eşitsizlik $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ için anlaşılmalıdır. Pozitif homojenlikle beraber üstteki önerme sublineer fonksiyonların bir diğer karakterizasyonunu (analitik) verir.

Önerme 3.2. *[8,16]$\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, σ özdeş olarak $+\infty$ olmasın. σ nın sublineer olması için gerek ve yeterli koşul*

$$\sigma(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leq t_1 \sigma(x_1) + t_2 \sigma(x_2) \;\; \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \text{ ve } t_1, t_2 > 0$$

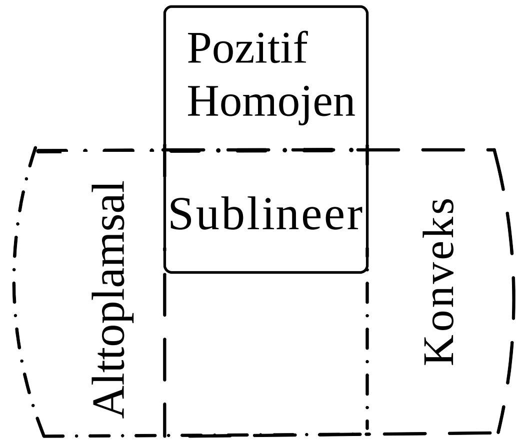
veya σ'nın pozitif homojen ve alttoplamsal olmasıdır.

Önerme 3.3. *[12,16]Eğer σ sublineer ise*

$$\sigma(x) + \sigma(-x) \geq 0 \; \forall x \in R^n \tag{3.9}$$

Sublineer olmak için pozitif homojen bir fonksiyon aynı zamanda alttoplamsal da olmak zorundadır. (Tanım 3.1'de konvekslik yerine) Sonrasında zaten konveksliği sağlamış olur. Şekil 3.2 şimdiye kadar gördüğümüz fonksiyon sınıfları arasındaki ilişkileri özetler. Konveks ve alttoplamsal bir fonksiyon sublineer olmak zorunda değildir: $f(x) \equiv 1$ 'i düşünün.

Benzer şekilde sublineer fonksiyon ne zaman lineer olduğu da sorulabilir. Eşitsizlik 3.9 lineer fonksiyonda eşitlik olarak sağlanır ve sonraki sonuç bunun tam olarak lineerlikle sublineerlik arasındaki fark olduğunu göstermelidir.



Şekil 3.2: Fonksiyon sınıfları

Önerme 3.4. *[12,16]σ sublineer olsun ve $x_1, ..., x_m \in dom\sigma$ için*

$$\sigma(x_j) + \sigma(-x_j) = 0, \quad j = 1, ..., m \tag{3.10}$$

sağlansın. Bu durumda σ, $\{x_1, ..., x_m\}$ tarafından gerilen altuzayda lineerdir.

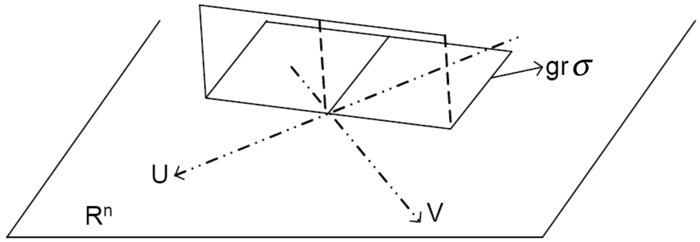
Bu sonuç sayesinde şöyle bir altuzay tanımlanabilir:

$$U := \{x \in R^n : \sigma(x) + \sigma(-x) = 0\} \tag{3.11}$$

Bu altuzayda σ lineerdir. U'ya bazen σ doğrusallık (linearity) uzayı denir.

$$\begin{aligned} U &\neq \emptyset \Rightarrow \sigma(0) = 0 \text{ dır. } (U = \{0\} \text{ olsa bile}) \\ (x &\in U \Rightarrow 0 = \sigma(x) + \sigma(-x) \geq \sigma(0) \geq 0 \text{ olduğundan} \\ U &= \{0\} \Rightarrow 0 = \sigma(0) + \sigma(-0) \geq \sigma(0) \geq 0 \Rightarrow \sigma(0) = 0) \end{aligned}$$

Bu kavramda ilginç olan geometrik yorumudur. Eğer $U \cap V = \{0\}$ olan bir V alt uzayı varsa, tanımdan $\sigma(x) + \sigma(-x) > 0 \ \forall (0 \neq) x \in V$. Bu ise eğer $0 \neq d \in V$ ise σ d vektörü doğrultusundan V-şeklindedir: $t > 0$ için, $\sigma(td) = \alpha t$ ve $\sigma(-td) = \beta t$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in R \cup \{+\infty\}$ vardır ve $\alpha + \beta > 0$ dır. $\alpha + \beta = 0$ ancak $d \in U$ olur ise gerçekleşir. (Şekil 3.3'e bakın). d'nin normu 1 ise $\alpha + \beta$ ya d doğrultusunda σ'nun doğrusallık eksiği diyebiliriz: d doğrusuna kısıtlandığında σ'nun grafiği bir açı yapar; sonlu ise $\alpha + \beta$ sayısı bu açının ne kadar geniş olduğunu ölçer.



Şekil 3.3: Bir sublineer fonksiyonun doğrusallık alt uzayı

Şekil 3.3'de $gr\sigma$'nun sadece U'da değil U'nun ötelemelerinde de hiperdüzlem olduğu görülüyor: σ'nun $\{y\}+U$'ya kısıtlanmış hali y sabitken afindir. Bu bir sonraki sonuçtan gelir.

Önerme 3.5. *σ sublineer olsun. Eğer $x \in U$ ise yani*

$$\sigma(x) + \sigma(-x) = 0 \tag{3.12}$$

bu durumdan

$$\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y) \ \ \forall y \in R^n \tag{3.13}$$

olur.

Kanıt. $\sigma(x+y) \leq \sigma(x) + \sigma(y)$ (alttoplamsallıktan) $y = x + y - x$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sigma(y) &\leq \sigma(x+y) + \sigma(-x) = \sigma(x+y) - \sigma(x) \\ &\Rightarrow \sigma(x+y) \geq \sigma(x) + \sigma(y) \end{aligned}$$

olur. Böylece kanıt biter. ■

3.3 Sublineer Fonksiyon Örnekleri

Örnek 3.1. *$\emptyset \neq K$ konveks koni ise gösterge fonksiyonu*

$$i_K(x) := \begin{cases} 0 & ; x \in K \\ +\infty & ; x \notin K \end{cases}$$

.K konveks ise i_K'nın konveks olduğunu biliyoruz. Ayrıca her $x \in K$ ve $t > 0$ için $i_K(x) = i_K(tx) = 0 \Rightarrow i_K(tx) = ti_K(x)$ olduğundan i_K pozitif homojendir. Bu durumda i_K sublineerdir.

Örnek 3.2. $\emptyset \neq K$ *konveks koni olsun.Bu durumda*

$$d_K(x) = \inf\{|\|y - x\||: y \in K\}$$

ile tanımlı x'in K konisine uzaklık fonksiyonu da sublineerdir.Gerçekten: K konveks olduğundan d_K konvekstir. Ayrıca $t > 0$ için

$$\begin{aligned} d_K(tx) &= \inf\{|\|y - tx\||: y \in K\} \\ &= \inf\{|\|ty - tx\||: ty \in K\} \\ &= t\inf\{|\|y - x\||: ty \in K\} \\ &= t\inf\{|\|y - x\||: y \in K\} \\ &= td_K(x) \end{aligned}$$

olur böylece d_K pozitif homojendir.

Örnek 3.3.

$$\sigma(x) = \sigma(\xi, n) := \begin{cases} -2\sqrt{\xi n} & ; \xi, n \geq 0 \\ +\infty & ; \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlı $\sigma : R^2 \to R \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu sublineerdir. $t > 0$için

$$\sigma(tx) = \sigma(t\xi, tn) := \begin{cases} -2t\sqrt{\xi n} & ; \xi, n \geq 0 \\ +\infty & ; \text{ diğer durumlarda} \end{cases} = t\sigma(x)$$

olduğundan pozitif homojendir.Ayrıca

$x_1 = (\xi_1, n_1)$, $x_2 = (\xi_2, n_2) \in R^2$,olsun. ξ_1, n_1, ξ_2 veya n_2 den biri negatif ise $\sigma(x_1 + x_2) \leq \sigma(x_1) + \sigma(x_2) = +\infty$ sağlanır. Hepsi pozitif ise

$\left(\sqrt{\xi_1 n_2} - \sqrt{\xi_2 n_1}\right)^2 \geq 0$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \xi_1 n_2 + \xi_2 n_1 \geq 2\sqrt{\xi_1 \xi_2 n_1 n_2} \\
&\Rightarrow \quad \xi_1 n_1 + \xi_1 n_2 + \xi_2 n_1 + \xi_2 n_2 \geq \xi_1 n_1 + 2\sqrt{\xi_1 \xi_2 n_1 n_2} + \xi_2 n_2 \\
&\Rightarrow \quad (\xi_1 + \xi_2)(n_1 + n_2) \geq \left(\sqrt{\xi_1 n_1} + \sqrt{\xi_2 n_2}\right)^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{(\xi_1 + \xi_2)(n_1 + n_2)} \geq \sqrt{\xi_1 n_1} + \sqrt{\xi_2 n_2} \\
&\Rightarrow \quad -2\sqrt{(\xi_1 + \xi_2)(n_1 + n_2)} \leq -2\sqrt{\xi_1 n_1} - 2\sqrt{\xi_2 n_2} \\
&\Rightarrow \quad \sigma(\xi_1 + \xi_2, n_1 + n_2) \leq \sigma(\xi_1, n_1) + \sigma(\xi_2, n_2) \\
&\Rightarrow \quad \sigma(x_1 + x_2) \leq \sigma(x_1) + \sigma(x_2)
\end{aligned}
$$

olur. Yani σ alttoplamsal olur. Böylece σ sublineerdir.

Örnek 3.4. *R^n üzerinde bir $|\|\cdot\||$ normu aşağıdaki koşulları sağlayan R^n'den $[0, +\infty)$ 'a bir fonksiyondur.*

i) $|\|x\|| = 0$ *ancak ve ancak* $x = 0$;

ii) $|\|tx\|| = |t| \; |\|x\|| \; \forall x \in R^n$ *ve* $t \in R$

iii) $|\|x_1 + x_2\|| \leq |\|x_1\|| + |\|x_2\|| \; \forall (x_1, x_2) \in R^n \times R^n$

$|\|\cdot\||$ *(0 dışında) pozitif ve sonlu sublineer bir fonksiyondur.* $\forall x$ *için* $|\|-x\|| = |\|x\||$ *olduğundan simetriktir. Hiçbir doğru üzerinde doğrusal değildir: 3.11'deki U altuzayı sadece $\{0\}$'dan oluşur.*

Örnek 3.5 (KUADRATİK SEMİ-NORMLAR). *$Q : \mathbb{R}^n \to R^n$, Q bir simetrik pozitif yarı tanımlı operatör ve $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{\langle \mathsf{Q}x, x\rangle}$ olsun. f'nin konveksliğini doğrudan göstermek bıktırıcı bir iştir. Bu iş için alttoplamsallık ve Cauchy Schwarz eşitsizliği kullanılabilir.)*

$E_{\mathsf{Q}} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \mathsf{Q}x, x\rangle \leq 1\}$ *kümesini kullanarak f aşağıdaki gibi elde edilebilir.*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \inf\{\lambda > 0 : \langle \mathsf{Q}x, x\rangle \leq \lambda^2\} = \inf\{\lambda > 0 : \left\langle \mathsf{Q}\frac{x}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}\right\rangle \leq 1\} \\
&= \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in E_{\mathsf{Q}}\} = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda E_{\mathsf{Q}}\}
\end{aligned}
$$

buradan f'nin konvesliği dolayısıyla sublineerliği gösterilebilir.E_{Q}, f ve $f^2 = \langle \mathsf{Q}(\cdot), \cdot\rangle$'nin bir alt seviye kümesidir. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n = \ker Q \oplus \operatorname{Im} Q$ *biçiminde* *ayrıştırılırsa* E_{Q}*ile* $\operatorname{Im} Q$*'nın kesişimi merkezi orijin olan* $\tilde{E}_{\mathsf{Q}}$*eliptik kümesidir.* E_{Q}*, asimtotik konisi* $\ker Q$ *alt uzayı olan* $\tilde{E}_{\mathsf{Q}} + \ker Q$ *silindiridir.*

$$\mathsf{Q} \text{ pozitif tanımlıdır} \iff \ker \mathsf{Q} = \{0\} \iff E_{\mathsf{Q}} \text{ kompakttır.}$$

Diğer taraftan f *sonlu, negatif olmayan, simetriktir, çünkü* E_{Q}*, orijin merkezlidir ve* f*,* E_{Q}*'nun* $\ker Q$ *asimtotik konisi üzerinde sıfırdır.* Q *pozitif tanımlı ise* f *normdur.*

$E_{\mathsf{Q}} \to f$ *dönüşümü sublineer fonksiyonların içinde önemlidir.*

- $g(x,y) = \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2+2xy+y^2}$ verilsin. $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ için

  $g^2(x,y) = \langle \mathsf{Q}(x,y),(x,y)\rangle \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

  $\ker Q = \{(x,y) : y = -x\}$ dir.

  $$\operatorname{Im} \mathsf{Q} = \{\mathsf{Q} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{ \begin{bmatrix} x+y \\ x+y \end{bmatrix} : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

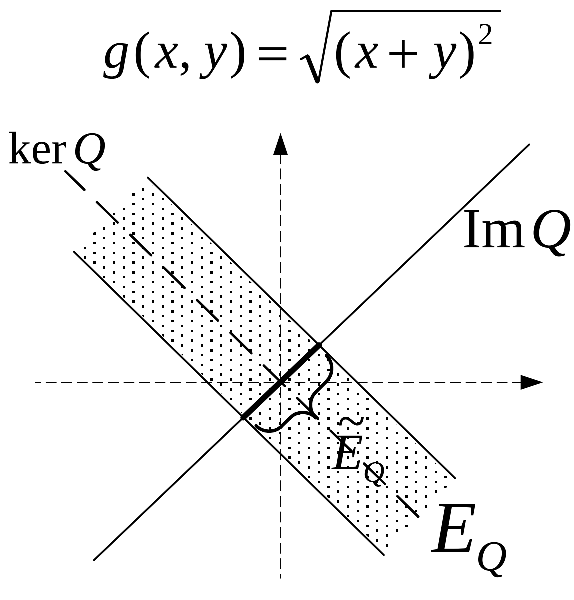
  olduğundan $\operatorname{Im} Q = \{(x+y, x+y) : y = x\} = \{(\lambda,\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) : x = y\}$ olur.

  $$\begin{aligned} E_{\mathsf{Q}} &= \{(x,y) : (x+y)^2 \leq 1\} \\ &= \{(x,y) : |x+y| \leq 1\} \\ &= \{(x,y) : -1 \leq x+y \leq 1\} \\ &= \{(x,y) : -x-1 \leq y \leq -x+1\} \end{aligned}$$

  olarak bulunur buradan

  $$\begin{aligned} \widetilde{E}_{\mathsf{Q}} &= E_{\mathsf{Q}} \cap \operatorname{Im} \mathsf{Q} \\ &= \{(\lambda,\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} \cap \{(x,y) : |x+y| \leq 1\} \\ &= \{(\lambda,\lambda) : |\lambda+\lambda| \leq 1\} = \{(\lambda,\lambda) : |\lambda| \leq \frac{1}{2}\} \\ &= \{(\lambda,\lambda) : \lambda \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\} \end{aligned}$$

  elde edilir. Bunlar şekil 3.4'de görülmektedir.



Şekil 3.4: Kuadratik semi norm

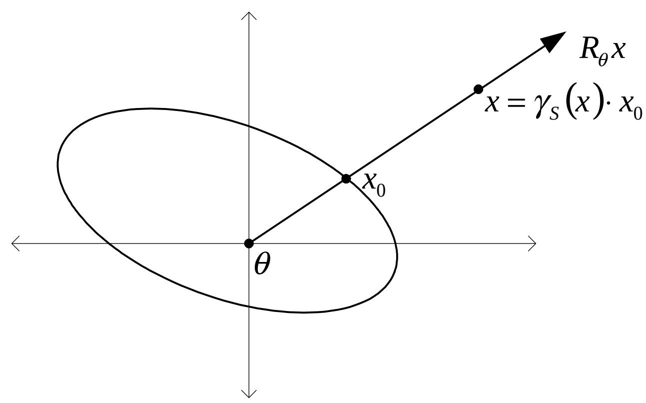
3.4 Minkowski Fonksiyoneli

Tanım 3.2. *$S \subset \mathbb{R}^n$, kapalı konveks ve $\theta \in int(S)$ olsun.*

$$\gamma_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \gamma_S(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda S\}$$

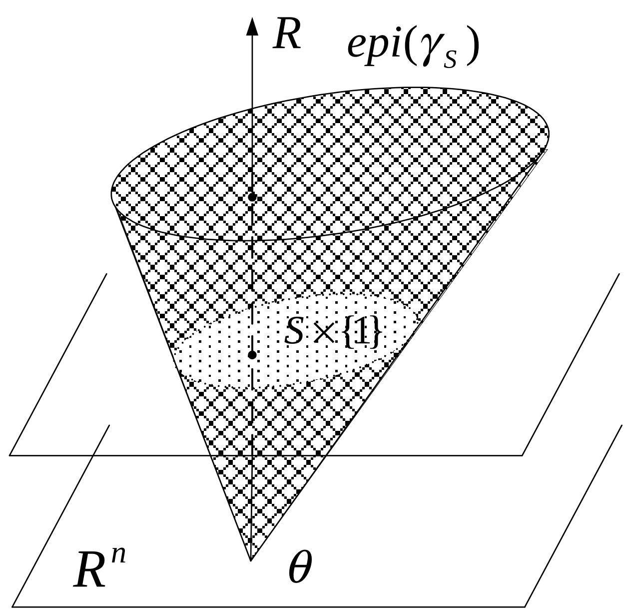
fonksiyonuna Minkowski (Gauge-Ayar) fonksiyoneli denir.$x \in \lambda C$ olan hiçbir $\lambda > 0$ yoksa $\gamma_C(x) = +\infty$ olur.

Bu fonksiyon ilk olarak 1911'de Minkowski tarafından tanımlandı. S kümesi bazı durumlarda sadece konveks bazı durumlarda da kompakt ve konveks alınmasına karşın burada S kapalı konveks olarak alınacaktır.Aynı zamanda S kompakt ise bu fonksiyonel sonlu ya da sonsuz boyutlu lineer uzaylarda norm elde etmeye olanak sağlar ve bu durumda n boyutlu uzayda γ_S'i gözümüzde şöyle canlandırabiliriz: $x \neq \theta$ bir nokta olsun. θ'ı x'e birleştiren $R_{\theta x}$ ışını S'nin sınırını bir x_0 noktasında keser. Bu durumda şekil 3.5'de görüleceği üzere $x = \gamma_S(x)x_0$ ve $\gamma_S(x) = \frac{\|x\|}{\|x_0\|}$ olur. Böylece γ_S'yi S'nin uzaklık fonksiyonu olarak düşünebiliriz. Çünkü θ'ın x_0'a olan Euclid uzaklığını θ'ı x'e birleştiren $R_{\theta x}$ ışını boyunca "S'ye göre 1 birim" alınırsa, S'ye göre temel birim uzaklık doğrultuya göre değişecektir.



Şekil 3.5: Minkowski fonksiyonelini bir kümeden oluşturma

Genel durumda ise geometrik olarak $epi(\gamma_S)$ aşağıdaki biçimde elde edilir. $S \subset \mathbb{R}^n$yi $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ da $S \times \{0\}$ kümesi olarak düşünüp, 1 birim yukarı $\mathbb{R}^n \times \{1\}$ hiperdüzlemine taşıyalım.Oluşan $S \times \{1\}$ kümesiyle üretilen koni γ_S'nin epigrafıdır. γ_S'de bu koninin altsınır fonksiyonudur. Bu şekil 3.6'da gösterilmektedir.



Şekil 3.6: Minkowski fonksiyonelinin epigrafı

Teorem 3.1. *$S \subset \mathbb{R}^n$ konveks ve $0 \in int(S)$ olsun. Bu durumda S kümesi için tanımlanan Minkowski fonksiyoneli $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için aşağıdaki özellikleri* *sağlar.*

a) $\gamma(x) \geq 0$

b) $\forall \alpha \geq 0$ *için* $\gamma(\alpha x) = \alpha\gamma(x)$

c) $\gamma(x+y) \leq \gamma(x) + \gamma(y)$

d)

$$\begin{aligned} \gamma(x) &< 1 \iff \times \in int(S) \\ \gamma(x) &= 1 \iff \times \in \partial(S) \\ \gamma(x) &> 1 \iff \times \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{S} \end{aligned}$$

Kanıt. a) γ fonksiyonunun tanımlanışından açıktır.

b)$\alpha = 0$ ise eşitlik sağlanır. $\alpha \neq 0$ olsun.

$$\gamma(\alpha x) = \inf\{a > 0 : \alpha x \in aS\} = \inf\{a > 0 : x \in \frac{a}{\alpha}S\}$$

eşitliğinde $\frac{a}{\alpha}$ yerine a' alınırsa ($a, \alpha > 0$ olduğundan $a' = \frac{a}{\alpha} > 0$ dır.)

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha x) &= \inf\{\alpha a' : x \in \frac{a}{\alpha}S\} = \alpha \inf\{a' > 0 : x \in a'S\} \\ &= \alpha\gamma(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

d) $x \in int(S)$ olsun. Bu durumda $x + U \subset S$ olacak şekilde $\exists U \in N(0)$ vardır. $\varepsilon x \in U$ olacak şekilde $\exists \varepsilon > 0$ vardır. Buradan

$$(1+\varepsilon)x = x + \varepsilon x \in x + U \subset S$$

dolayısıyla

$$\gamma((1+\varepsilon)x) \leq 1$$

olur.(b) şıkkı kullanılarak

$$\gamma(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$$

elde edilir.

Tersine $\gamma(x) < 1$ olsun. Bu durumda γ fonksiyonunun tanımlanışından $\frac{x}{a} \in S$ olacak şekilde $\exists a \in (0,1)$ vardır. $0 \in int(S) \neq \emptyset$ olduğundan $ri\ S = int\ S$ ve Önerme 2.4'den

$$x = (1-a)0 + a(\frac{x}{a}) \in int(S)$$

olur. Böylece $int(S) = \{x : \gamma(x) < 1\}$ olur.

$x \in \partial S$ olsun. $0 \in int(S)$ olduğundan önerme 2.4 gereği $\forall \alpha \in [0,1)$ için

$$\alpha x + (1-\alpha)0 = \alpha x \in int(S)$$

olur. O halde $\gamma(\alpha x) = \alpha\gamma(x) \leq 1$ olduğundan $\gamma(x) \leq 1$ elde edilir. $x \in \partial S$ olduğundan $x \notin int(S)$ olur. O halde $\gamma(x) \geq 1$ dir. Dolayısıyla $\gamma(x) = 1$ elde edilir.

Diğer taraftan $\gamma(x) = 1$ olsun.$x \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{S}$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $B(x,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \backslash \overline{S}$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır. $x(1-\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{S}$ olduğundan $x(1-\frac{\varepsilon}{2}) \notin S$ olur. Dolayısıyla $\gamma(x(1-\frac{\varepsilon}{2})) \geq 1$ olur. Bu ise

$$\gamma(x) \geq \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}} > 1$$

çelişkisini verir; $x \notin \mathbb{R}^n \backslash \overline{S}$ dir. $\gamma(x) \neq 1$ olduğundan $x \notin int(S)$ dir.$x \in \partial S$ elde edilmiş olur. Buradan $\partial S = \{x : \gamma(x) = 1\}$ olur.

Bu iki çift gerektirme beraber ele alınırsa

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma(x) < 1 \iff \times \in int(S) \\ \gamma(x) = 1 \iff \times \in \partial(S) \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\gamma(x) \quad \leq \quad 1 \iff x \in \overline{S}$$

verir. Buradan

$$\gamma(x) > 1 \iff \times \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{S}$$

olur

c) $\varepsilon > 0$ ve $x, y \in \mathbb{R}^n$ verilsin.

$$\gamma(x) < r_x < \gamma(x) + \varepsilon$$

ve

$$\gamma(y) < r_y < \gamma(y) + \varepsilon$$

olacak şekilde r_x, r_y sayıları seçilsin. Bu durumda

$$\gamma(\frac{x}{r_x}) < 1$$

dolayısıyla $\frac{x}{r_x} \in S$ olur. Aynı şekilde

$$\gamma(\frac{y}{r_y}) < 1$$

olduğundan $\frac{y}{r_y} \in S$ olur. $r = r_x + r_y$ olsun. S konveks ve $\frac{r_x}{r} + \frac{r_y}{r} = 1$ olduğundan

$$\frac{x+y}{r} = \frac{r_x}{r}\frac{x}{r_x} + \frac{r_y}{r}\frac{y}{r_y} \in S$$

olur. O halde $\gamma(\frac{x+y}{r}) \leq 1$ dolayısıyla (b) şıkkından $\gamma(x+y) \leq r = r_x + r_y$ olur. r_x ve r_y elemanlarının seçilişinden

$$\begin{aligned} \gamma(x+y) &\leq r_x + r_y \\ &\leq \gamma(x) + \varepsilon + \gamma(y) + \varepsilon \\ &= \gamma(x) + \gamma(y) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

olur. $\varepsilon > 0$, x, y keyfi seçildiğinden $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\gamma(x+y) \leq \gamma(x) + \gamma(y)$$

elde edilir. ■

Teorem 3.2. *S orijini içeren kapalı konveks bir küme olsun. Bu durumda*
i)γ_S fonksiyonu negatif olmayan kapalı sublineer bir fonksiyondur.
ii) S'nin asimtotik konisi S_∞ olmak üzere

$$\forall r \in \mathbb{R}^+ \text{ için } \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_S(x) \leq r\} = rS \text{ ve } \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_S(x) = 0\} = S_\infty$$

iii)γ_S her yerde sonludur ancak ve ancak θ, S'nin iç noktasıdır.

Kanıt. i)γ_S'nin negatif olmadığını üstteki teoremin (a) şıkkından bilinmektedir. Aynı zamanda γ_S'nin bu teoremin (b) şıkkından pozitif homojen (c) şıkkından dolayı da alt toplamsal olduğu için sublineer olduğu açıktır.Kapalılığına ilerde dönülecektir.

ii)$\theta \in intS$ olsun. $\forall x \neq 0$ için $x_\varepsilon := \frac{\varepsilon x}{\|x\|} \in C$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır.Teorem 3.1 (d) şıkkından $\gamma_S(x_\varepsilon) \leq 1$ olur.

$$\gamma_S(x) = \gamma_S\left(\frac{\|x\|}{\varepsilon}x_\varepsilon\right) = \frac{\|x\|}{\varepsilon}\gamma_S\left(x_\varepsilon\right) \leq \frac{\|x\|}{\varepsilon}$$

ve $\gamma_S(0) = 0$ olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $0 \leq \gamma_S(x) \leq \frac{\|x\|}{\varepsilon}$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır. Dolayısıyla γ_S sonlu bir fonksiyondur.

Diğer taraftan γ_S her yerde sonlu olduğunu kabul edelim. Süreklilikten dolayı γ_S'nin birim yuvardaki görüntülerinin bir üst sınırı $L > 0$ olsun.

$$\|x\| \leq 1 \Rightarrow \gamma_S(x) \leq L \Rightarrow \gamma_S(\frac{x}{L}) \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{L} \in S$$

ve $\left\|\frac{x}{L} - 0\right\| = \frac{\|x\|}{L} \leq \frac{1}{L}$ olduğundan $B(0, \frac{1}{L}) \subset C$ olur.Bu sebeple $\theta \in int(S)$ olur.

iii)S kapalı olduğundan ve teorem 3.1'in (d) şıkkından $\{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_S(x) \leq 1\} = \overline{S} = S$ olur. $r > 0$ için pozitif homojenlikten

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_S(x) \leq r\} &= \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_S(\tfrac{x}{r}) \leq 1\} = \{rx \in \mathbb{R}^n : \gamma_S(x) \leq 1\} \\ &= r\{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_S(x) \leq 1\} = rS \end{aligned}$$

eşitliği çıkar. r keyfi seçildiğinden $\forall r > 0$ için

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_S(x) \leq r\} = rS$$

kanıtlanmış olur.

$x \in S$ için $S_\infty = \bigcap\limits_{t>0} \frac{S-x}{t}$dir. $0 \in S$ olduğundan $S_\infty = \bigcap\limits_{t>0} \frac{S-0}{t} = \bigcap\limits_{t>0} \frac{S}{t}$ olur. $t > 0$ için $r = \frac{1}{t}$ değişikliğini yaparsak $S_\infty = \bigcap\limits_{r>0} rS$ olur. rS yerine eşiti olan $\{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_S(x) \leq r\}$ yazarsak

$$\begin{aligned} S_\infty &= \bigcap_{r>0} \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_S(x) \leq r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_S(x) \leq 0\} \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $\gamma_S(x) \geq 0$ olduğundan

$$S_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_S(x) = 0\}$$

eşitliği elde edilir.

i)[kapalılık] Şimdi γ_S'nin kapalı olduğu gösterilecektir.

$$S_1(\gamma_S) = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_S \leq 1\} = S$$

alt düzey kümesi kapalı olduğundan $\forall r > 0$ için

$$S_r(\gamma_S) = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_S \leq r\} = rS$$

alt düzey kümeleri de kapalı olur. Ayrıca $r = 0$ için $rS = \{0\}$ tek nokta kümesi kapalıdır. $r < 0$ için ise alt düzey kümeleri boştur dolayısıyla kapalıdır. Tüm alt düzey kümeleri kapalı olduğundan γ_S kapalı bir fonksiyon olur. ■

"S kompakttır $\iff$ $S_\infty = \{0\}$ dır" olduğunu biliyoruz. Üstteki teoremde (iii)'nin bir sonucunu verelim.

Sonuç 3.1. *S kompakttır $\iff$ $\forall x \neq 0$ için $\gamma_S(x) > 0$ dır*

Kanıt. Üstteki teoremin (iii) şıkkından $S_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_S(x) = 0\}$dir.

$$\begin{aligned} S \text{ kompakttır} \quad &\iff \quad S_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_S(x) = 0\} = \{0\} \\ &\iff \quad \forall x \neq 0 \text{ için } \gamma_S(x) \neq 0 \end{aligned}$$

γ_S negatif olmayan bir fonksiyon olduğundan bu da "$\forall x \neq 0$ için $\gamma_S(x) > 0$" ifadesine denktir. ■

Örnek 3.6. *Q pozitif yarı tanımlı olmak üzere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\langle \mathsf{Qx}, \mathsf{x} \rangle}$ fonksiyonuna quadratik semi-norm demiştik. Bunu genelleştirebiliriz. $g \in \overline{Conv}\mathbb{R}^n$, g negatif değer almayan ve 2. mertebeden pozitif homojen bir fonksiyon olmak üzere $f(x) = \sqrt{g(x)}$ konveks fonksiyondur.*

Gerçekten $S_1(g) = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 1\} = C$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{g(x)} = \inf\{\lambda > 0 : \sqrt{g(x)} \leq \lambda\} = \inf\{\lambda > 0 : g(x) \leq \lambda^2\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in S_1(g)\} = \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in C\} \\ &= \gamma_C(x) \end{aligned}$$

f, C kapalı konveks ve orijini bulunduran kümenin ayar fonksiyonudur.

Minkowski fonksiyonelleri, kapalı sublineer fonksiyon örnekleridir. Sublineer fonksiyonlar kapalı olmak zorunda değildir. Örnek olarak

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h(x,y) = \begin{cases} 0 & y > 0 \\ |x| & y = 0 \\ +\infty & y < 0 \end{cases}$$

alalım. h sublineerdir fakat kapalı değildir. h'ı kapalı yapmak için $\forall x \in \mathbb{R}$ için $h(x,0) = 0$ tanımını yapalıyız.

Bir σ sublineer fonksiyonunun kapanışını ya da denk olarak alttan yarı sürekli zarfını alırsak

$$cl\sigma(x) := \lim_{x' \to x} \sigma(x') \tag{3.14}$$

ile tanımlı yeni bir fonksiyon elde ederiz. Bu fonksiyon kuruluşundan kapalıdır, konvekstir (önerme 2.12) ve pozitif homojendir (3.14).

Sublineer fonksiyonu kapalı yaparsak, şüphesiz kapalıdır ve sublineerliğini korur.

Kapalı sublineer fonksiyonların sınıfı, sublineer fonksiyonlar sınıfı içinde oldukça öneme sahip bir sınıftır. Aslında çalışmalarımızı kapalı sublineer fonksiyonlar sınıfına kısıtlayacağız. Bunun nedeni: σ kapalı sublineer bir fonksiyonsa $\forall x \in dom\sigma$ için

$$\sigma(0) \leq \lim_{t \to 0^+} \sigma(tx) = 0$$

dolayısıyla $\sigma(0) = 0$ dır ve $dom\sigma \neq \emptyset$ olur. Diğer bir gözlemimizde σ kapalı sublineer fonksiyonu σ'_∞ asimtotik fonksiyonu ile çakışır. Yani σ kapalı ve sublineer ise $\sigma = \sigma'_\infty$ dir. Gerçekten kapalı sublineer fonksiyonların asimtotik fonksiyonu kendisidir. Özel olarak σ her yerde sonlu değer alıyorsa σ Lipschitz dir ve en iyi lipschitz sabiti

$$L = \sup\{\sigma(d) : \|d\| = 1\}$$

dir.

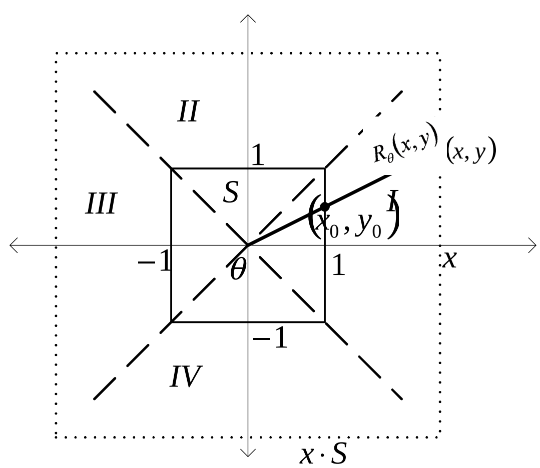
3.4.1 Minkowski fonksiyoneli örnekleri

Örnek 3.7. *Köşeleri* $(1, \pm 1)$ *ve* $(-1, \pm 1)$ *olan* S *karesinin Minkowski fonksiyonelini bulalım:*

Şekil 3.7'de S *kümesi dörde bölünmüştür.* $(x, y) \in I = \{(x, y) : x > 0$ *ve* $-x < y < x\}$ *ise* $R_{\theta,(x,y)}$ *ışını karenin sağ dik kenarını* $(1, y_0)$ *da keser.*S*'yi* x *ile genişletirsek* (x, y) *noktası* xS*'ye ait olacağından*

$$\gamma_S(x, y) = \inf\{\lambda : (x, y) \in \lambda S\} = x$$

olur.



Şekil 3.7: Bir karenin Minkowski fonksiyoneli altında (x,y) $\in I$ noktasının değeri

$$\begin{aligned} (x, y) &\in II = \{(x, y) : y > 0 \text{ ve } -y \leq x \leq y\} \text{ ise} \\ \gamma_S(x, y) &= \inf\{\lambda : (x, y) \in \lambda S\} \\ &= \inf\{\lambda : (x, y) \in \lambda S = yS\} = y \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} (x, y) &\in III = \{(x, y) : x < 0 \text{ ve } -x < y < x\} \text{ ise} \\ \gamma_S(x, y) &= \inf\{\lambda : (x, y) \in \lambda S\} \\ &= \inf\{\lambda : (x, y) \in \lambda S = -xS\} = -x \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} (x,y) &\in IV = \{(x,y) : y < 0 \ ve \ -y \leq x \leq y\} \ ise \\ \gamma_S(x,y) &= \inf\{\lambda : (x,y) \in \lambda S\} \\ &= \inf\{\lambda : (x,y) \in \lambda S = -yS\} = -y \end{aligned}$$

olur. Böylece $R_{\theta,(x,y)}$ ışını S'nin dikey kenarlarından birini kesiyorsa $\gamma_S(x,y) = |x|$ ve $R_{\theta,(x,y)}$ ışını S'nin yatay kenarlarından birini kesiyorsa $\gamma_S(x,y) = |y|$ olur. Yani S kümesini $|x|$ (veya $|y|$) kadar genişlettiğimizde $(x,y) \in |x| S$ (veya $(x,y) \in |y| S$) olur. Sonuçta

$$\gamma_S(x,y) = maks\{|x|, |y|\} = \|(x,y)\|_\infty$$

olur.

Uyarı 3.3. $\gamma_S(x,y) = \frac{\|(x,y)\|_ö}{\|(x_0,y_0)\|_ö} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$ *burada (x_0, y_0), $R_{\theta,(x,y)}$ ışınının S'yi kestiği noktanın koordinatlarıdır.*

Örnek 3.8. *$B(\theta,1) = \{(a,b) : a^2 + b^2 \leq 1\}$'in Minkowski fonksiyonelini bulalım. $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ verilsin.*

$$\begin{aligned} (x,y) \in \lambda B(\theta,1) &\iff \tfrac{(x,y)}{\lambda} = \left(\tfrac{x}{\lambda}, \tfrac{y}{\lambda}\right) \in B(\theta,1) &&\iff \tfrac{x^2}{\lambda^2} + \tfrac{y^2}{\lambda^2} \leq 1 \\ &\iff x^2 + y^2 \leq \lambda^2 &&\iff \sqrt{x^2+y^2} \leq \lambda \\ &\iff \|(x,y)\| \leq \lambda \end{aligned}$$

ve $\gamma_{B(\theta,1)}(x,y) = \inf\{\lambda > 0 : (x,y) \in \lambda B(\theta,1)\}$ olarak tanımlandığından

$$\gamma_{B(\theta,1)}(x,y) = \inf\{\lambda > 0 : \|(x,y)\| \leq \lambda\} = \|(x,y)\|$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.9. *$B = [-1,2]$ olmak üzere B'nin Minkowski fonksiyonelini bulalım. $x \in \mathbb{R}$ verilsin. $\lambda > 0$ olduğundan*

$$\begin{aligned} x &\in \lambda[-1,2] \iff \frac{x}{\lambda} \in [-1,2] \implies -1 \leq \frac{x}{\lambda} \leq 2 \\ &\implies -1 \leq \frac{x}{\lambda} \ ve \ \frac{x}{2} \leq \lambda \implies \lambda \geq -x \ ve \ \lambda \geq \frac{x}{2} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} x \geq 0 \text{ için } \lambda \geq \frac{x}{2} \geq -x \\ x < 0 \text{ için } \lambda \geq -x \geq \frac{x}{2} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \gamma_{[-1,2]}(x) &= \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda[-1,2]\} \\ &= \begin{cases} \frac{x}{2} & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

olur.

3.5 Destek Fonksiyonu

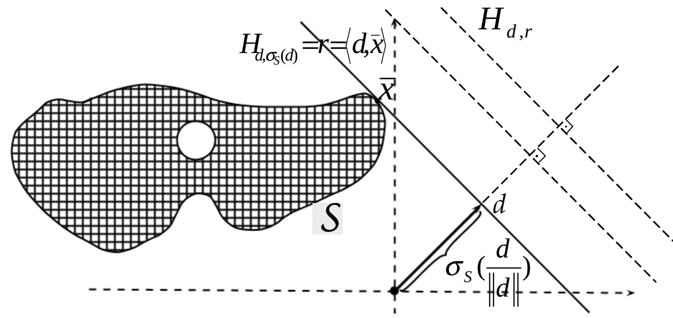
Tanım 3.3. $S \subset \mathbb{R}^n$, $S \neq 0$ *olsun.*

$$\sigma_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \sigma_S(d) = \sup\{\langle d, x\rangle : x \in S\}$$

fonksiyonuna S'nin destek fonksiyonu denir.

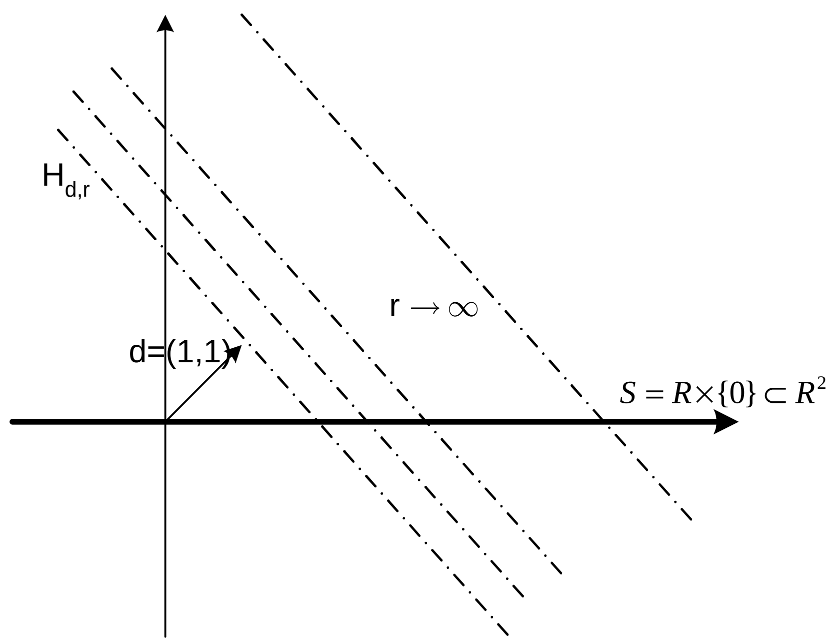
Destek fonksiyonu geometrik olarak şöyle belirlenebilir. Öncelikle σ_S'nin tanım kümesi $\exists r \in \mathbb{R}^+$ için $\sigma_S(d) = r$ olan $d \in \mathbb{R}^n$ lerden oluşur ve σ_S'nin tanım kümesi bir konveks koni olur (açık ya da kapalı). İkinci olarak bir $d \in \mathbb{R}^n$ için $\sigma_S(d) = r_0$ ise. $\sigma_S(d) = \sup\{\langle d, x\rangle : x \in S\}$ olduğundan $\forall x \in S$ için $\langle d, x\rangle \leq r_0$ olur. $r_0 \leq r$ alırsak $\forall x \in S$ için $\langle d, x\rangle \leq r$ olacağından $S \subset H^-_{d,r} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle d, x\rangle \leq r\}$ olur. Bu ise S'nin $H^-_{d,r}$yarı uzayı tarafından kapsanması demektir. Bir diğer deyişle de S, şekil 3.8'de görüleceği gibi$H_{d,r} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle d, x\rangle = r\}$ hiper düzleminin belirlediği kapalı yarı uzaylardan biri tarafından kapsanmaktadır.

Bir $d \in \mathbb{R}^n$ için $\sigma_S(d)$'nin değeri ise geometrik olarak şöyle belirlenir: Bu $S \subset \mathbb{R}^n$ ve $d \neq 0$ için $r \in \mathbb{R}$, $S \subset H^-_{d,r} = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, d\rangle \leq r\}$ olacak şekilde şeçilsin $\sigma_S(d)$ bu şekildeki r'lerin en küçüğüdür. r, $H_{d,r} = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, d\rangle = r\}$ hiper düzlemi S'ye teğet olacak şekilde küçültülürse en küçük r'ye ulaşılmış olur. S sınırsız ise bu mümkün olmaz. Bu durumda $\sigma_S(d) = +\infty$ olur.



Şekil 3.8: Destek fonksiyonu ve destek hiperdüzlemleri

Örnek 3.10. *$S = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ olsun. $d = (1,1)$ yönü verildiğinde hiçbir $r \in \mathbb{R}$ için $H^-_{d,r}$ yarı uzayı S'yi kapsamaz. Ancak $\sigma_S(d) = \sigma_S(1,1) = +\infty$ olur. Şekil 3.9'da bu görülmektedir.*



Şekil 3.9: Sınırsız kümenin destek fonksiyonu

Şimdi de $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de konveks konik zarf kullanarak σ_S'yi belirleyelim.

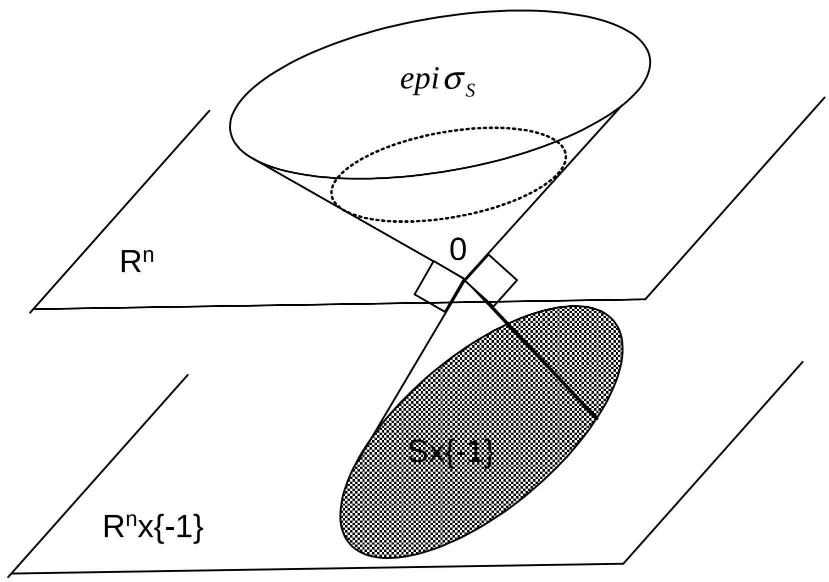
$S \subset \mathbb{R}^n$ kümesini $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ uzayında düşünelim. Yani diyelim ki $S \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}$ olsun. S'yi $\mathbb{R}^n \times \{-1\}$'e kaydıralım. K_S, S'nin kaydırılmış kopyası olan $S \times \{-1\}$'in konveks konik zarfı olsun. K_S'nin $(K_S)^\circ$ polar konisi σ_S'nin epigrafı olduğu şekil 3.10'da görülmektedir.

Gerçekten

$$K_S = \mathbb{R}^+ co(S \times \{-1\}) = co(\mathbb{R}^+(S \times \{-1\}) = co\{(ts, -t) : s \in S,\ t > 0\}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
(K_S)^\circ &= \{(d,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \forall s \in S \text{ ve } t > 0 \text{ için } \langle (ts,-t),(d,r)\rangle \leq 0\} \\
&= \{(d,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \forall s \in S \text{ ve } t > 0 \text{ için } \langle ts,d\rangle - \langle t,r\rangle \leq 0\} \\
&= \{(d,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \forall s \in S \text{ için } \langle s,d\rangle \leq r\} \\
&= \{(d,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \sup_{s \in S} \langle s,d\rangle \leq r\} = epi(\sigma_S)
\end{aligned}$$



Şekil 3.10: Bir destek fonksiyonun epigrafı

S kompakt küme ise iç çarpım fonksiyonu sürekli olduğundan maksimum değerini S'de alır. d ne seçilirse seçilsin $\sigma_S(d) = \sup_{x \in S} \langle d, x\rangle$ var ve sonludur. Bunun anlamı her bir d için $H^-_{d,\sigma_S(d)}$ yarı uzayı S'yi kapsar ve $\sigma_S(d) = \langle s_d, d\rangle = r_d$ eşitliğini sağlayan bir $s_d \in S$ ve bir $r_d \in \mathbb{R}$ vardır. Burada s_d, S'nin bir yüzünde bulunur.(S'yi konveks kabul edebiliriz.)

$\sigma_S = \sigma_{\overline{co}S}$ dir. Gerçekten destek hiper düzlem $H_{d,\sigma_S(d)}$'nin 0'a uzaklığı $\left|\sigma_S(\frac{d}{\|d\|})\right|$ dir. Bu ise 0'ın bir hiper düzleme dik izdüşümüdür. Bu durumda

$\overrightarrow{d}$ nin bir katı olan $\exists t^* \in \mathbb{R}$, $t^*\overrightarrow{d}$ vektörü vardır ki $\sigma_S(d) = \langle d, t^*d \rangle = \|t^*d\|$ olur.

Tanım 3.4. *(Bir Kümenin Genişliği) $S \neq \emptyset$ bir küme olsun. S'nin d yönündeki genişliği (breadth)*

$$\sigma_S(d) + \sigma_S(-d) = \sup_{s\in S} \langle s, d \rangle - \inf_{s\in S} \langle s, d \rangle$$

olarak tanımlanır.

Bu sayı $[0, +\infty]$ aralığındadır. Eğer S, d'ye dik bir hiperdüzlem içindeyse S'nin genişliği 0'dır. Böyle bir hiperdüzlemi

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, d \rangle = \sigma_S(d)\}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu hiperdüzlemler S'yi bulundurur.Tüm bu hiperdüzlemlerin arakesitleri $aff\ (S)$'yi verir.
S'nin genişliği, x doğrultusunda S'nin ne kadar kalınlıkta olduğunu ölçer. Bu sayı x'e dik ve S'yi sıkan paralel iki hiperdüzlem arasındaki mesafeyi verir.

Önerme 3.6. *$S \neq \emptyset$ bir küme ve σ_S, S'nin destek fonksiyonu olsun.Bu durumda*

$$\sigma_S \textit{ sonludur} \iff S \textit{ sınırlıdır.}$$

Kanıt. $(\Rightarrow)$ σ_S sonlu olsun. $\forall(s, d) \in S \times B(0, 1)$ için $\langle s, d \rangle \leq \sigma_S(d) \leq L$ olan $\exists L > 0$ vardır. $s \neq 0$ için $d = \frac{s}{\|s\|}$ dersek

$$\langle s, d \rangle = \left\langle s, \frac{s}{\|s\|} \right\rangle = \frac{1}{\|s\|} \langle s, s \rangle = \|s\| \leq L$$

olur. Buradan $\forall s \in S$ için $\|s\| \leq L$ olur ki bu $S \subset B(0, L)$ demektir. S sınırlıdır.

$(\Leftarrow)S$ sınırlı olsun. $\exists L > 0$ için $S \subset B(0, L)$ dir. Diğer taraftan iç çarpım lineer dönüşüm olduğundan süreklidir (sonlu boyutlu uzaylarda tanımlı lineer uzaylar süreklidir).$\forall d \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle s, d \rangle \leq \|s\| \|d\| \leq L \|d\| \implies \sup_{s\in S} \langle s, d \rangle = \sigma_S(d) \leq L \|d\| \implies \sigma_S(\frac{d}{\|d\|}) \leq L$$

olduğundan σ_S, $B(0, 1)$ de sınırlıdır. Bundan dolayı da σ_S sonludur. ■

Önerme 3.7. *$S \neq \emptyset$ bir küme olsun. σ_S kapalı ve sublineerdir.*

Kanıt. Önce σ_S'nin tanım kümesinin bir koni olduğunu gösterelim. $x \in dom(\sigma_S)$ ve $\lambda \geq 0$ olsun. $\sigma_S(x) \leq +\infty$ olur.

$$\sigma_S(\lambda x) = \sup_{s \in S} \langle s, \lambda x \rangle = \lambda \sup_{s \in S} \langle s, x \rangle = \lambda \sigma_S(x) < +\infty$$

olduğundan $\lambda x \in dom(\sigma_S)$ olur. Dolayısıyla $dom(\sigma_S)$ konidir.
Ayrıca $\sigma_S(\lambda x) = \lambda \sigma_S(x)$ olduğundan σ_S pozitif homojendir.
Son olarak $dom(\sigma_S)$ ve σ_S'nin konveks olduklarını gösterelim. $x, y \in dom(\sigma_S)$ ve $\alpha \in (0,1)$ alalım.

$$\begin{aligned}
\sigma_S(\alpha x + (1-\alpha)y) &= \sup_{s \in S} \langle \alpha x + (1-\alpha)y, s \rangle = \sup_{s \in S} [\alpha \langle x, s \rangle + (1-\alpha) \langle y, s \rangle] \\
&\leq \sup_{s \in S} \alpha \langle x, s \rangle + \sup_{s \in S} (1-\alpha) \langle y, s \rangle \\
&= \alpha \sup_{s \in S} \langle x, s \rangle + (1-\alpha) \sup_{s \in S} \langle y, s \rangle \\
&= \alpha \sigma_S(x) + (1-\alpha) \sigma_S(y) < +\infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\alpha x + (1-\alpha)y \in dom(\sigma_S)$ olur . Bu $dom(\sigma_S)$ konveks oluşunu verir. $x, y \in dom(\sigma_S)$ ve $\alpha \in (0,1)$ için

$$\sigma_S(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha \sigma_S(x) + (1-\alpha) \sigma_S(y)$$

oluşundan da σ_S 'in konveksliği çıkar. ■

Önerme 3.8. *S_1, S_2 iki küme ve $S_1 \subset S_2$ olsun. Bu durumda $\sigma_{S_1} \leq \sigma_{S_2}$ olur.*

Kanıt. $S_1 \subset S_2$ olsun.$s_1 \in S_1$ keyfi alınsın.$s_1 \in S_2$ olacağından $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle s_1, d \rangle \leq \sigma_{S_2}(d)$$

olur. s_1 keyfi alındığından $\forall s_1 \in S_1$ ve $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned}
\sup_{s_1 \in S_1} \langle s_1, d \rangle &\leq \sigma_{S_2}(d) \\
\sigma_{S_1}(d) &\leq \sigma_{S_2}(d)
\end{aligned}$$

olur. Böylelikle $\sigma_{S_1} \leq \sigma_{S_2}$ elde edilir. ■

Önerme 3.9. *$S \subset \mathbb{R}^n$ boş olmayan bir küme olsun. $\sigma_S = \sigma_{cl(S)} = \sigma_{co(S)} = \sigma_{\overline{co}S}$ dir.*

Kanıt. $S \subset cl(S)$ olduğundan $\sigma_S \leq \sigma_{cl(S)}$ olur.
Tersine $d \in \mathbb{R}^n$ ve $\overline{s} \in cl(S)$ olsun. Bu durumda $\exists (s_n) \subset S$ vardır öyle ki $s_n \to \overline{s}$ dir. $\langle d, . \rangle$ iç çarpımı sürekli olduğundan $\langle d, s_n \rangle \to \langle d, \overline{s} \rangle$ olur. Buradan

$$\langle d, \overline{s} \rangle = \left\langle d, \lim_{n\to\infty} s_n \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle d, s_n \rangle \leq \lim_{n\to\infty} \sigma_S(d) = \sigma_S(d)$$

olur. d ve $\overline{s}$ keyfi seçildiğinden $\forall d \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall \overline{s} \in cl(S)$ için

$$\begin{aligned} \langle d, \overline{s} \rangle &\leq \sigma_S(d) \\ \sup_{\overline{s} \in cl(S)} \langle d, \overline{s} \rangle &\leq \sigma_S(d) \\ \sigma_{cl(S)}(d) &\leq \sigma_S(d) \end{aligned}$$

olur. Böylelikle $\sigma_S = \sigma_{cl(S)}$ elde edilir.
Şimdi $\sigma_S = \sigma_{co(S)}$ olduğu kanıtlanacaktır.

$$S \subset co(S) \implies \sigma_S \leq \sigma_{co(S)}$$

olur.
Tersine $s^* \in co(S)$ alalım. $\exists s_1, s_2, ..., s_k \in S$ ve $\exists \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_k \in [0,1]$ öyle ki

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \ \text{ ve } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i$$

olur. $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} \langle s^*, d \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i, d \right\rangle \overset{\langle \cdot, d \rangle \text{ lineer}}{=} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle s_i, d \rangle \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sigma_S(d) = \sigma_S(d) \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i}_{=1} = \sigma_S(d) \end{aligned}$$

oluşundan $\forall d \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall s^* \in co(S)$ için $\langle s^*, d \rangle \leq \sigma_S(d)$ elde edilir. Sol tarafın $s^* \in co(S)$ için supremumu alınırsa $\sigma_{co(S)} \leq \sigma_S$ olur. Böylelikle $\sigma_S = \sigma_{co(S)}$ kanıtlanmış olur.$\overline{co}S = cl(co(S))$ olduğundan

$$\sigma_S = \sigma_{cl(S)} = \sigma_{co(S)} = \sigma_{cl(co(S))} = \sigma_{\overline{co}S}$$

yazılır kanıt biter. ■

Bu önermenin bir sonucu olarak şunu söyleyebiliriz: Bir S kümesi ve S'nin kapalı konveks zarfının destek fonksiyonları aynıdır.

Teorem 3.3. *S boş olmayan kapalı ve konveks bir küme, σ_S, $\emptyset \neq dom(\sigma_S)$ tanım kümesine sahip S'nin destek foksiyonu olsun. Bu durumda S kümesini*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall d \in dom(\sigma_S) \ \textit{için} \ \langle x, d\rangle \leq \sigma_S(d)\}$$

veya denk olarak

$$S = \bigcap_{d \in dom(\sigma_S)} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, d\rangle \leq \sigma_S(d)\}$$

biçiminde yazabiliriz.

Kanıt. Her bir $d \in dom(\sigma_S)$ için

$$H^-_{d,\sigma_S(d)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, d\rangle \leq \sigma_S(d)\}$$

dersek $S \subset H^-_{d,\sigma_S(d)}$ olur. Buradan $S \subset \bigcap_{d \in dom(\sigma_S)} H^-_{d,\sigma_S(d)}$ olur. Tersine $x_0 \notin S$ ise S kapalı konveks olduğundan x_0 ile S'yi kesin ayıran bir H_{x_0} hiperdüzlemi vardır. $\exists (0 \neq) d_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\exists r \in \mathbb{R}$ öyle ki

$$H_{d_0,r} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, d_0\rangle = r\}$$

olur. Genelliği bozmadan $\forall s \in S$ için $\langle s, d_0\rangle < r$ yazabiliriz. Bu durumda $\langle x_0, d_0\rangle > r$ olacaktır. Böylece

$$\sigma_S(d_0) = \sup_{s \in S} \langle s, d_0\rangle \leq r < +\infty$$

olacağından $d_0 \in dom(\sigma_S)$ olacaktır. Ayrıca $x_0 \notin H^-_{d_0,\sigma_S(d_0)}$ olduğundan $x_0 \notin \bigcap_{d \in dom(\sigma_S)} H^-_{d,\sigma_S(d)}$ dir. Buradan $\bigcap_{d \in dom(\sigma_S)} H^-_{d,\sigma_S(d)} \subset S$ olur.
$\therefore S = \bigcap_{d \in dom(\sigma_S)} H^-_{d,\sigma_S(d)}$ olur. ■

Teorem 3.4. *$\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ bir küme ve σ_S, S'nin destek fonkiyonu olsun. Bu durumda*

$$s \in \overline{co}S \iff \forall d \in X \ (= \mathbb{R}^n \vee B(0,1) \vee \partial B(0,1)) \ \textit{için} \ \langle s, d\rangle \leq \sigma_S(d) \quad (3.15)$$

dir.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ $s \in \overline{co}S$ olsun.Önerme 3.9den

$$\forall d \in X \text{ için } \langle s, d\rangle \leq \sigma_{\overline{co}S}(d) = \sigma_S(d)$$

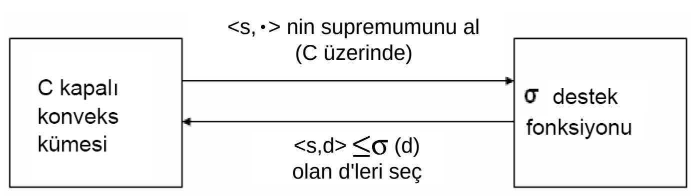
olur.

$(\Leftarrow) \forall d \in X$ için $\langle s, d\rangle \leq \sigma_S(d)$ olsun. Kabul edelim ki $s \notin \overline{co}S$ olsun. $\{s\}$ noktasını ve $\overline{co}S$ kapalı kümesini ayıran bir hiperdüzlem vardır yani

$$\exists d_0 \in \mathbb{R}^n \text{ vardır öyle ki } \langle s, d_0\rangle > \sup\{\langle s', d_0\rangle : s' \in \overline{co}S\} = \sigma_{\overline{co}S}(d_0) = \sigma_S(d_0)$$

olur ki bu kabulümüzle çelişir.Böylece $s \in \overline{co}S$ olmak zorundadır. ■

Sonuç olarak kapalı konveks bir küme destek fonksiyonuyla belirlenebilir. Yani kapalı konveks kümeler ile bu kümelerin destek fonksiyonları arasında şekil 3.11'de görüleceği gibi iki yönlü bir ilişki vardır.



Şekil 3.11: Kapalı konveks küme-destek fonksiyonu ilişkisi

S kapalı konveks kümesi ve bir $s \in \mathbb{R}$ elemanı verildiğinde s'nin S'ye ait olup olmadığı

$$s \in \overline{co}S \iff \forall d \in X \ (= \mathbb{R}^n \vee B(0,1) \vee \partial B(0,1)) \text{ için } \langle s, d\rangle \leq \sigma_S(d)$$

ile test edilebilir. Bu duruma σ_S destek fonksiyonu kapalı konveks kümelerin içini rölatif içini ve afin zarfını seçer (süzer) denir.

Teorem 3.5. *[12]$S \subset \mathbb{R}^n$, $S \neq \emptyset$ ve kapalı konveks bir küme olsun.*

i) $s \in aff(S) \iff \sigma_S(d) + \sigma_S(-d) = 0$ *olan her* d *için* $\langle s, d\rangle = \sigma_S(d)$ *dir.*

ii) $s \in ri\ S \iff \sigma_S(d) + \sigma_S(-d) > 0$ *olan her* d *için* $\langle s, d\rangle < \sigma_S(d)$ *dir.*

iii) $s \in int\ S \iff \forall d \neq 0$ *için* $\langle s, d\rangle < \sigma_S(d)$ *dir*

Tanım 3.5. *(Asimtotik Koni)*$C \subset \mathbb{R}^n$ *kapalı konveks bir küme ve* $x \in C$ *olmak üzere*

$$C_\infty(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : x + td \in C, \ \forall t > 0\}$$

(x'den başlayan ve küme içinden sonsuza giden ışınların başlangıcı orijinde olan paralellerinden oluşan kümeye) veya

$$C_\infty(x) = \bigcap_{t>0} \frac{C - x}{t}$$

şeklinde tanımlanan kümeye C'nin asimtotik konisi denir.

Uyarı 3.4. *C kapalı konveks alındığından $C_\infty(x)$ asimtotik konisi x'in seçilişine bağlı değildir. Bu yüzden bu küme C_∞ ile gösterilecektir.*

Önerme 3.10. *S, $\mathbb{R}^n$ nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda*

$$cl(dom(\sigma_S)) = (S_\infty)^\circ$$

dir.

Kanıt. $p \in S_\infty$ olsun. $s_0 \in S$ olmak üzere $S_\infty = \bigcap_{t>0} t(S - s_0)$ olduğundan $\exists s_t \in S$ vardır öyle ki $p = t(s_t - s_0)$ olur. $\forall q \in dom(\sigma_S)$ için

$$\langle p, q \rangle = t \langle s_t - s_0, q \rangle \leq t[\sigma_S(q) - \langle s_0, q \rangle] < +\infty$$

$t \to 0^+$ iken $\langle p, q \rangle \leq 0$ olur ve $q \in (S_\infty)^\circ$ olur. Böylece $dom(\sigma_S) \subset (S_\infty)^\circ$ olur. $(S_\infty)^\circ$ kapalı olduğundan $cl(dom(\sigma_S)) \subset (S_\infty)^\circ$ dır.
Tersine $q \in (dom(\sigma_S))^\circ$ alalım. $(dom(\sigma_S))^\circ$ koni olduğundan $\forall t > 0$ için $tq \in (dom(\sigma_S))^\circ$ olur. $s_0 \in S$ keyfi bir nokta olmak üzere $\forall p \in dom(\sigma_S)$ için $\langle q, p \rangle \leq 0$ olduğundan

$$\langle s_0 + tq, p \rangle = \langle s_0, p \rangle + t \langle q, p \rangle \leq \langle s_0, p \rangle \leq \sigma_S(p)$$

olur. Buradan $s_0 + tq \in cl(co(S)) = S$ olur. Bu ise $\forall t > 0$ için $q \in \frac{S - s_0}{t}$ ya da $q \in S_\infty$ demektir. Böylelikle $(dom(\sigma_S))^\circ \subset S_\infty$ olur. Bundan dolayı da $(S_\infty)^\circ \subset [(dom\,(\sigma_S))^\circ]^\circ = dom\,(\sigma_S)$ olduğu görülür.

$$(S_\infty)^\circ \subset dom(\sigma_S) \subset cl(dom(\sigma_S)) \subset (S_\infty)^\circ$$

olduğundan $(S_\infty)^\circ = cl(dom(\sigma_S))$ olur. ■

3.5.1 Destek fonksiyonu örnekleri

Örnek 3.11. $S = \{(x_1, x_2) : (x_1 < 0, x^2 + y^2 \leq 1) \vee (x_1 \geq 0, -1 \leq x_2 \leq 1)\}$ *kümesinin destek fonksiyonunu bulalım.*

$$\begin{array}{rcccl} \sigma_S & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & d & \mapsto & \sigma_S(d) = \sup\{\langle d, x\rangle : x \in S\} \end{array}$$

idi.

Önce bir $\overrightarrow{d} = (d_1, d_2)$ *yönü verilir. Varsa* S *yi kapsayan bir hiperdüzlem çizilir. Bu hiperdüzlem* S *ye doğru kaydırılır. Hiperdüzlemlerden* S *ye teğet olan hiperdüzlemin (varsa) değme noktası* $(\overline{x})$ *bulunur.* $\langle d, \overline{x}\rangle$ *istenen supremumu verir.*

$d_1 < 0$ *olan bir* $\overline{d} = (d_1, d_2)$ *verilsin.* $\overline{x} = \frac{\overrightarrow{d}}{\|\overrightarrow{d}\|}$ *alınırsa* $\overline{x}$ *istenen teğetin değme noktası olur ve* $\sigma_S(d) = \langle d, \overline{x}\rangle$ *olur.*$d_1 < 0$ *için*

$$\sigma_S(d) = \langle d, \overline{x}\rangle = \overrightarrow{d} \cdot \frac{\overrightarrow{d}}{\left\|\overrightarrow{d}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{d}\right\|^2}{\left\|\overrightarrow{d}\right\|} = \left\|\overrightarrow{d}\right\|$$

olur.

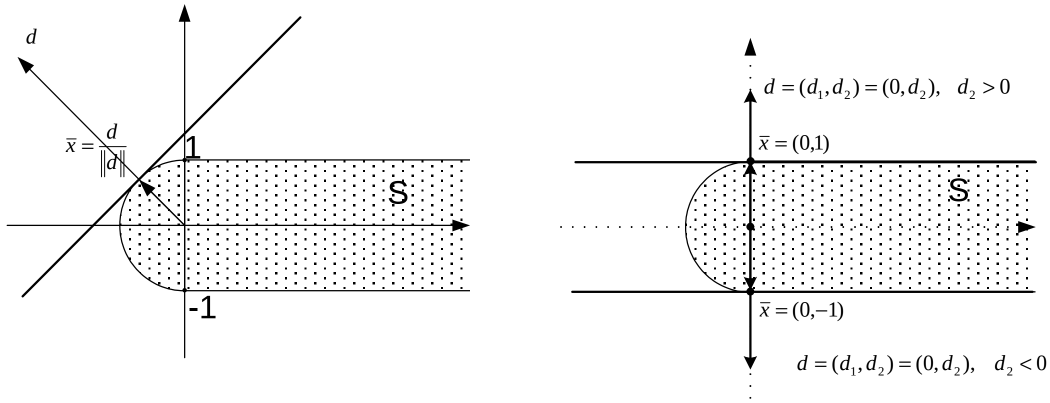
Şimdi $d_1 = 0$ *ve* $d_2 > 0$ *olan bir* $d = (d_1, d_2) = (0, d_2)$ *verilsin. Bu durumda şekil 3.12'de görüldüğü üzere* S *kümesine teğet olan doğru (hiperdüzlem)* $y = 1$ *doğrusudur ve* $d = (0, d_2)$ *yönündeki değme noktası* $\overline{x} = (0, 1)$*dir.* $d = (0, d_2)$ *ve* $d_2 > 0$ *için*

$$\overrightarrow{d} = (0, d_2) \text{ ve } d_2 > 0 \text{ için } \quad \sigma_S(\overrightarrow{d}) = \langle(0, d_2), (0, 1)\rangle = d_2$$

olur. Benzer şekilde $d_1 = 0$ *ve* $d_2 < 0$ *olan bir* $d = (d_1, d_2) = (0, d_2)$ *verilsin. Bu durumda* S *kümesine teğet olan doğru (hiperdüzlem)* $y = -1$ *doğrusudur ve* $d = (0, d_2)$ *yönündeki değme noktası* $\overline{x} = (0, -1)$*dir.* $d = (0, d_2)$ *ve* $d_2 < 0$ *için*

$$d = (0, d_2) \text{ ve } d_2 < 0 \text{ için } \sigma_S(\overrightarrow{d}) = \langle(0, d_2), (0, -1)\rangle = -d_2$$

olur.



Şekil 3.12: $S = \{(x_1, x_2) : (x_1 < 0, x^2 + y^2 \leq 1) \vee (x_1 \geq 0, -1 \leq x_2 \leq 1)\}$ kümesinin destek fonksiyonu

Son olarak $d = (d_1, d_2)$ $d_1 > 0$ *ise* d_2 *ne olursa olsun* d_2 *ne olursa olsun* d*'nin belirttiği hiçbir* $H^-_{d,r} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle d, x\rangle \leq r\}$*kapalı yarı uzay* S*'nin tamamını kapsamaz. O halde* $\sigma_S(d) = +\infty$ *olur.*
Böylece S*'nin destek fonksiyonu*

$$\sigma_S(d_1, d_2) = \begin{cases} \|d\| & d_1 \leq 0 \\ +\infty & d_1 > 0 \end{cases}$$

dur.

Örnek 3.12. $S = B(\theta, 1) \subset \mathbb{R}^2$ *birim yuvarının destek fonksiyonunu bulalım.*
$\forall d \neq 0$ *için*

$$\sigma_S(d) = \sup_{s\in B(\theta,1)} \langle s, d\rangle$$

$s = \frac{d}{\|d\|} \in B(\theta, 1)$ *olduğundan*

$$\sigma_S(d) \geq \left\langle \frac{\overrightarrow{d}}{\left\|\overrightarrow{d}\right\|}, \overrightarrow{d} \right\rangle = \left\|\overrightarrow{d}\right\|$$

olur.
Diğer taraftan $\forall s \in B(\theta, 1)$ *ve* $\forall d \neq 0$ *için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden*

$$\begin{aligned} \langle s, d\rangle &\leq \|s\| \cdot \|d\| \leq 1 \cdot \|d\| \\ &\leq \|d\| \end{aligned}$$

olduğundan $\forall d \neq 0$ *için*

$$\sigma_{B(\theta,1)}(d) = \sup_{s\in B(\theta,1)} \langle s, d\rangle \leq \|d\|$$

olur.Böylelikle $\sigma_S(d) = \|d\|$ *dir. Ayrıca* $\sigma_S(\theta) = 0$ *olduğundan* σ_S *birim çember üzerinde bir normdur.*

$S_\infty = (B(\theta,1))_\infty = \{0\}$ *olduğundan* $\{0\}^\circ = dom(\sigma_S(\cdot)) = \mathbb{R}^n$ *olur. Yâni* $\sigma_S(\cdot)$ *nin sonlu değer aldığı* d*'lerin kümesi* $\mathbb{R}^n$ *dir. Şimdi verilen bir* d *yönünde* $H_{d,\sigma_S(d)}$ *yi belirleyen* $s_d \in B(\theta,1)$ *leri bulalım. Özel olarak* $d = (1,2)$ *için* $\sigma_S(1,2) = \|(1,2)\| = \sqrt{5}$ *dir. Buradan*

$$\begin{aligned} H_{d,\sigma_S(d)} &= \{(x,y) : 1\cdot x + 2\cdot y = \sigma_S(1,2) = \sqrt{5}\} \\ &= \{(x,y) : \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y = 1\} \end{aligned}$$

$H_{d,\sigma_S(d)}$ *nin* $S = B(\theta,1)$*'e değme noktası* $s_d = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \in \partial B(\theta,1) = \partial S$ *olur.*

Şimdi genel bir $d \neq 0$ doğrultusu alalım. $d = (a,b) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\sigma_{B(\theta,1)}(d) = \|d\| = \sqrt{a^2+b^2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} H_{d,\sigma_S(d)} &= \{(x,y) : ax + by = \sigma_S(d)\} \\ &= \{(x,y) : ax + by = \sqrt{a^2+b^2}\} \\ &= \{(x,y) : \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y = 1\} \end{aligned}$$

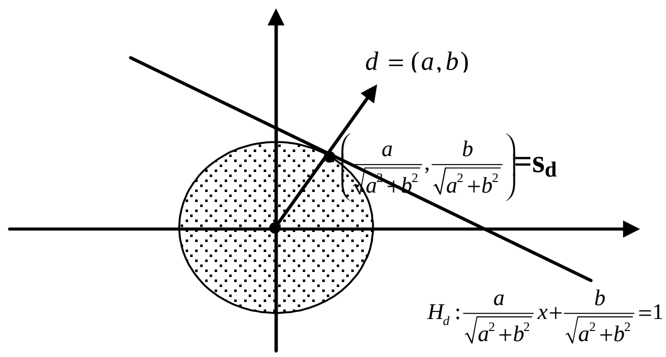
teğet hiperdüzleminin $S = B(\theta,1)$ birim yuvarına değme noktası

$$s_d = (\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

dir. Bu şekil 3.13'de görülmektedir.

Örnek 3.13. *K, $\mathbb{R}^n$de kapalı konveks bir koni olsun. Önce* σ_K *nın tanım kümesini belirleyelim.* K*'nın asimtotik konisinin polarını bulalım. Şekil 3.14'de görüldüğü üzere*

$$K_\infty = K \ \ ve \ (K_\infty)^\circ = K^\circ = cl(dom(\sigma_K))$$



Şekil 3.13: $\mathbb{R}^2$ de birim yuvarın destek fonksiyonu

olur.Böylece $d \in K^\circ$ *ise yani* $\forall s \in K$ *için* $\langle s, d\rangle \leq 0$ *ve* $0 \in K$ *için* $\langle 0, d\rangle = 0$ *olduğundan*

$$\begin{aligned}
\sigma_K(\overrightarrow{d}) &= \begin{cases} 0 & \langle s, d\rangle \leq 0, \forall s \in K \ ise \\ +\infty & \quad diğer\ durumlarda \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \overrightarrow{d} \in K^\circ := K\text{'nın pozitif polar konisi ise} \\ +\infty & \qquad\qquad diğer\ durumlarda \end{cases} \\
&= i_{K^\circ}(\overrightarrow{d})
\end{aligned}$$

olur. Böylece K *kapalı konveks koni ise destek fonksiyonu* K°*nın gösterge fonksiyonu olur.*

$\theta \in K$ *olduğundan,* $d \in K^\circ$ *ise* d*'ye dik olan ve* K*'yı destekleyen hiperdüzlem*

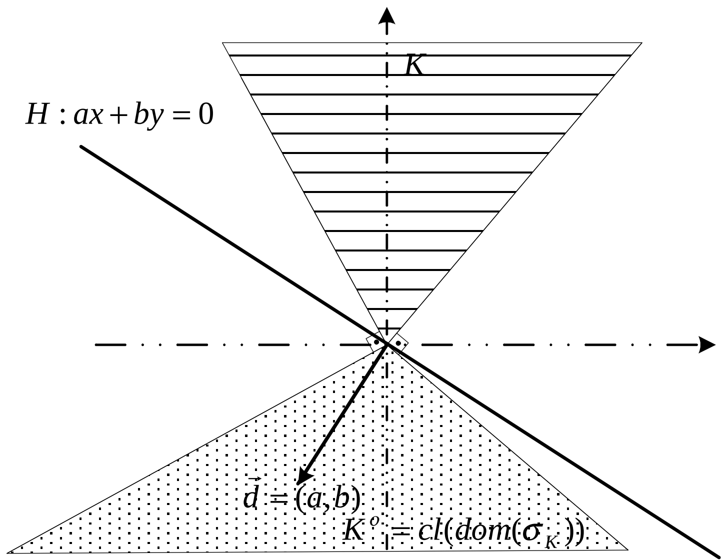
$$H_{d,\sigma_K(d)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle d, x\rangle = \sigma_K(d) = 0\}$$

θ*'dan geçer.*

$\mathbb{R}^2$ *de düşünüldüğünde destek hiperdüzlemleri,* θ*'dan geçen ve* $(a, b) = d \in K^\circ$ *ye dik*

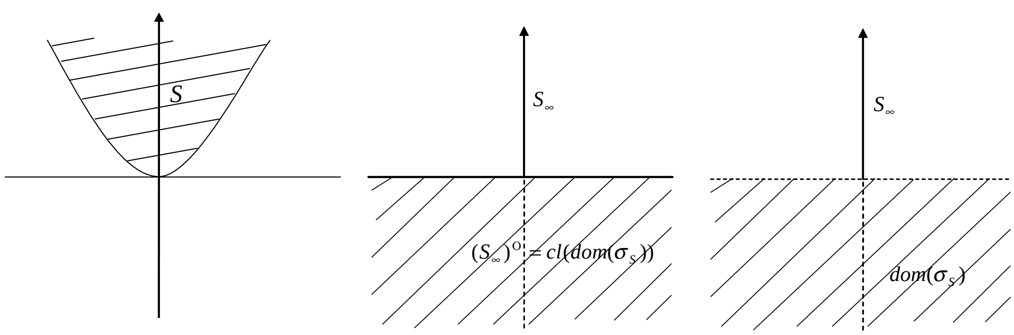
$$\begin{aligned}
H_{d,\sigma_K(d)} &= \{(x, y) : \langle (a, b), (x, y)\rangle = \sigma_K(d) = 0\} \\
&= \{(x, y) : ax + by = 0\}
\end{aligned}$$

doğrulardır.



Şekil 3.14: Bir koninin destek fonksiyonu

Örnek 3.14. *$S = \{(x, y) : y \geq x^2\}$ kümesinin destek fonksiyonunu bulalım. S'nin asimtotları olmadığından $dom(\sigma_S)$ kapalı değildir(Şekil 3.15). Verilen*



Şekil 3.15: $S = \{(x, y) : y \geq x^2\}$ kümesinin destek fonksiyonunun tanım kümesi

bir d için s_d yi belirleyelim ve $\sigma_S(d)$ yi bulalım.

$$\begin{aligned} s_d &= (x_0, y_0) \in \partial S = \{(x, y) : y = x^2\} \\ &\Longrightarrow y_0 = x_0^2 \text{ ve } s_d \in H_{d,\sigma_S(d)} \Longrightarrow ax_0 + by_0 = \sigma_S(d) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$ax_0 + bx_0^2 = \sigma_S(d) \implies bx_0^2 + ax_0 - \sigma_S(d) = 0$$

elde edilir. Bu ikinci mertebe denklemin diskriminantı 0 *olursa, bu iki eğri teğet olacağından*

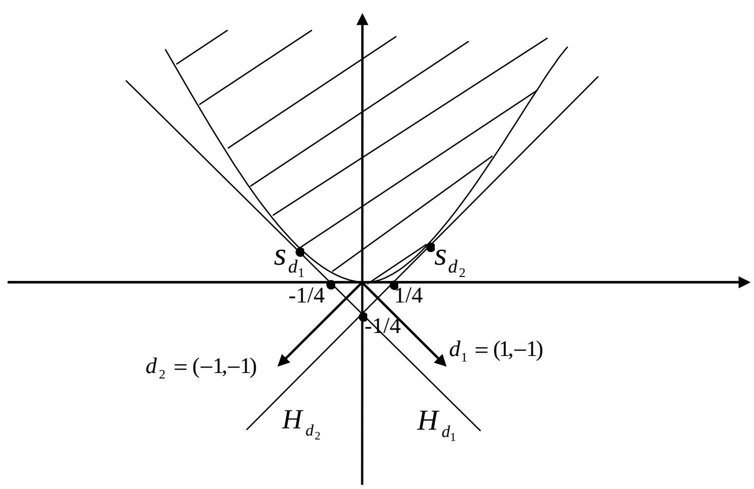
$$\begin{aligned} \Delta &= a^2 + 4b\sigma_S(d) = 0 \\ \sigma_S(d) &= -\frac{a^2}{4b} \end{aligned}$$

olur.

Özel olarak

$$\begin{array}{lll} d_1 = (-1,-1) \ ise & \sigma_S(-1,-1) = -\frac{(-1)^2}{4(-1)} = \frac{1}{4} & \Rightarrow H_{d,\sigma_S(d)} : -x - y = \frac{1}{4} \\ d_2 = (1,-1) \ ise & \sigma_S(1,-1) = -\frac{(1)^2}{4(-1)} = \frac{1}{4} & \Rightarrow H_{d,\sigma_S(d)} : x - y = \frac{1}{4} \\ d_2 = (-\frac{1}{2},-2) \ ise & \sigma_S(-\frac{1}{2},-2) = -\frac{(-\frac{1}{2})^2}{4(-2)} = \frac{1}{32} & \Rightarrow H_{d,\sigma_S(d)} : -\frac{1}{2}x - 2y = \frac{1}{32} \end{array}$$

olur(Şekil 3.16'ya bakınız).



Şekil 3.16: $S = \{(x,y) : y \geq x^2\}$ kümesinin destek hiperdüzlemleri ve bunlara ait destek noktaları

Uyarı 3.5. *$d_1 = (-1,0)$ ve $d_2 = (1,0)$ ise $d_1, d_2 \in \partial dom(\sigma_S) = \{(x,y) : y = 0\}$ dir.*

$$\sigma_S(d_1) = \sigma_S(d_2) = +\infty$$

olduğundan $d_1, d_2 \notin dom(\sigma_S)$ olur. Bir diğer değişle $dom(\sigma_S)$ kapalı değildir.

3.6 Kapalı Konveks Kümeler ve Kapalı Sublineer Fonksiyonlar Arasındaki İzomorfizm

Önerme 3.7'de destek fonksiyonunun kapalı ve sublineer olduğunu gördük. Tersi için ne söylenebilir?

R^n'de hiç bir kümenin destek fonksiyonu olmayan bir kapalı sublineer fonksiyon var mıdır? Bu sorunun cevabı "hayır"dır. Yani herhangi bir kapalı sublineer fonksiyona bir destek fonksiyonuymuş gibi bakılabilir. Bunun sırrı bir konveks fonksiyonun onu alttan destekleyen afin fonksiyonlarla ifade edilebileceğinde yatar. f kapalı sublineer bir fonksiyon ise onu alttan destaklayen afin fonksiyon yerine bir lineer fonksiyon alınabilir. Şimdi bunu teorem olarak ifade edelim.

Teorem 3.6. *σ bir kapalı sublineer fonksiyon olsun σ'yi alttan destekleyen bir doğrusal dönüşüm vardır. Hatta σ kendini alttan destekleyen lineer fonksiyonların supremumudur. Diğer bir deyişle σ*

$$S_\sigma = \{s \in R^n : \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s, d \rangle \leq \sigma(d)\} \tag{3.16}$$

kümesinin destek fonksiyonudur.

Kanıt. Bir konveks fonksiyonun bir afin fonksiyonla alttan desteklendiğini biliyoruz. (önerme 2.9) O halde $\forall d \in R^n$ için $\exists (s, r) \in R^n \times R \ni \langle s, d \rangle - r \leq \sigma(d)$ olur. $\sigma(0) = 0$ ve buradan $-r \leq \sigma(0) = 0$ olduğundan $r \geq 0$ olmalıdır. Pozitif homojenlikten $\forall t > 0$ ve $\forall d \in R^n$ için

$$\langle s, td \rangle - r \leq \sigma(td) \Longrightarrow t \langle s, d \rangle - r \leq t\sigma(d)$$

yazılabilir. Her iki taraf t'ye bölünürse

$$\langle s, d \rangle - \frac{r}{t} \leq \sigma(d)$$

olur. $t \to \infty$ yapılırsa

$$\langle s, d \rangle \leq \sigma(d)$$

olur ki bu σ kapalı sublineer fonksiyonunun bir lineer fonksiyonla alttan desteklendiğini gösterir. Bu durumda $\forall d \in R^n$ için

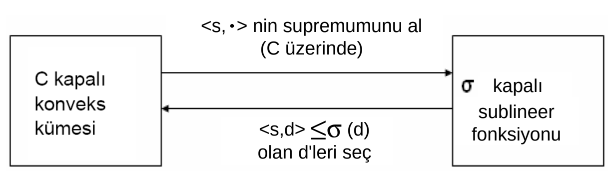
$$\begin{aligned}\sigma(d) &= \sup\{\langle s,d\rangle : \langle s,d\rangle\,,\ \sigma\text{'yi alttan destekler}\} \\ &= \sup\{\langle s,d\rangle : s\in S_\sigma\}\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu fonksiyonun indeks kümesi S_σ'dır. ■

Uyarı 3.6. *Bu önermenin en önemli noktası 3.16.'deki S_σ kümesinin boş olmamasıdır. Bu da Hahn-Banach teoreminin analitik formudur.*
Yani bir σ kapalı sublineer fonksiyonunu alttan destekleyen bir lineer dönüşüm vardır.

- Bu önemli teoremin ana sonucu bir kapalı sublineer fonksiyona bir kümeyi karşılık getirmektir. "sublineer fonksiyon ile ilgili özellikler"de bu karşılık getirme daha önce kurulmuştu teorem 3.6 ile bu karşılık getirmenin örtenliği garantilendi.

- Şekil 3.17'deki eşlemeyle, destek fonksiyonu ile kapalı sublineer deyimlerinden biri diğerinin yerine kullanılabilir.



Şekil 3.17: Kapalı konveks küme ile kapalı sublineer fonksiyon arasındaki ilişki

Sonuç 3.2. *[12]Boş olmayan kapalı konveks S kümeleri ve kapalı sublineer σ fonksiyonu için aşağıdakiler denktirler.*
1)σ, S'nin destek fonksiyonudur.
2)$S=\{s:\forall d\in X$ için $\langle s,d\rangle\le\sigma(d)\}$
Burada $X=\mathbb{R}^n \vee X=\bar{B}(0,1)\vee X=\partial\bar{B}(0,1)=S(0,1)$ veya $X=dom\sigma$ alınabilir.

Teorem3.6'da, $X = R^n$ için doğruluğu veriliyor. $\forall d \in R^n$ için $\frac{d}{\|d\|} \in \bar{B}(0,1)$ ve σ pozitif homojendir.

Geometrik olarak kapalı konveks S kümesi yarıuzayların kesişimi olarak ifade edilebiliyordu. S kümesi S kümesinin destek fonksiyonu ile de karakterize edilebilir. Gerçekten herbir $(d,r) \in R^n \times R$ için $(d \neq 0)$ $H^-_{d,r}$ yarı uzayını düşünelim. Bu yarı uzay S'yi kapsar $\Longleftrightarrow \sigma(d) \leq r$ dir.yazılabilir. Sonuç 3.2den

$$S = \{s : \forall d \in R^n \text{ için } \langle s, d\rangle \leq \sigma(d) \leq r\}$$

Burada (d,r) iklileri indeks rolü oynarlar ve (d,r)'ler $epi\sigma \subset R^n \times R$'de değişir. Şüphesiz bu indeks kümeleri R^n'yi kısıtlar ve yukarıdaki yazımı

$$S = \{s : \forall d \in X \text{ için } \langle s, d\rangle \leq \sigma(d)\}$$

biçimine dönüştürür.

S kümesinin açığa çıkmış yüzü (exposed face'i) bir lineer dönüşümü maksimize eden S'nin noktalarından oluşur. bu kapsamda S'nin destek fonksiyonu devreye girer.

Tanım 3.6. *C boş olmayan konveks bir küme ve σ bunun destek fonksiyonu olsun. $d \neq 0$ için C konveks kümesinin d tarafından ortaya çıkarılmış yüzü (exposed face)*

$$F_C(d) = \{s \in C : \ \langle s, d\rangle = \sigma(d)\}$$

dir.

Özel olarak $F_C(0) = \{s \in C : \ \langle s, 0\rangle = \sigma(0) = 0\} = C$'dir. C'nin kendisi 0'ın ortaya çıkardığı yüzüne eşit olur. C d yönünde sınırsız ise C'nin ortaya çıkmış yüzü olmadığından $F_C(d) = \emptyset$ dir.S kümesinin exposed face'i S'nin bir lineer dönüşümü maksimize eden noktalarından oluşur. Bu kapsamda destek fonksiyonları devreye girer.

Tanım 3.6'e simetrik olarak şu soru sorulabilir. $x \in C$ verildiğinde $\langle x, d\rangle$'yi maksimum yapan $d \in \mathbb{R}^n$ ler nelerdir? Bunun cevabı: "C'ye x'de normal olan $N_C(x)$ normal konisi" olacaktır.

Önerme 3.11. *[5,12]x, C kapalı konveks kümesi içinde bir nokta olsun.*

$$x \in F_C(d) \Longleftrightarrow d \in N_C(x).$$

d'ler normal yönü gösterirken d'nin ortaya çıkardığı yüzler C'nin sınırını oluştururlar. Bunu bir önerme ile verelim.

Önerme 3.12. *C kapalı konveks kümesi için*

$$bd(C) = \cup\{F_C(d) : d \in X\}$$

olur. Burada $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \vee X = \bar{B}(0,1) \setminus \{0\}$ veya $X = dom\sigma \setminus \{0\}$ dır.

Kanıt. Tanım 3.6 den C'nin $d \neq 0$ yönünde ortaya çıkan yüzü $\|d\|$'ye bağlı değildir. Bu X'in ilk iki seçiminin denkliğini verir. Üçüncü seçim ise $d \notin dom\sigma_C$ iken $F_C(d) = \emptyset$ oluşundan gelir.
$x \in icC = C^o$ ise $\exists\varepsilon > 0$ için $x + \varepsilon d \in C$ olacaktır ki bu durumda x, $\langle \cdot, d\rangle$ lineer dönüşümünün bir maksimumu olamaz. Buradan $x \notin F_C(d)$ dir.
Tersine x C'nin sınırında bir nokta ise $N_c(x)$ en az bir $d \in R^n \setminus \{0\}$ vektörü bulundurur. Önerme 3.11'den $x \in F_C(d)$ olur. ■

Örnek 3.15 (Normlar ve Dualleri)**.** $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}^n$ *üzerinde keyfi bir norm olsun. Bu norm (0 hariç) pozitif kapalı sublineer bir fonksiyondur ve bunun*

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

alt düzey kümesi özellikle ilginçtir. B,bu normla ilgili, simetrik konveks 0'ı iç nokta kabul eden kompakt birim yuvardır.
$\|\cdot\|$ normu ise B'nin Minkowski fonksiyonelidir. Yani $\|\cdot\| = \gamma_B$ dir.
Diğer taraftan destek fonksiyonu $\|\cdot\|$ normu olan

$$B^* := \{s \in \mathbb{R}^n : \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s, x\rangle \leq \|x\|\}$$

kümesi oluşturulabilir. Açıktır ki B^* 'da simetrik, konveks kompakt ve (0'ı) orijini iç nokta olarak bulundurur. (Teorem 3.5(iii)) Şu ana kadar iki kapalı konveks B ve B^* kümeleri bulduk. bu kümeleri kullanarak iki tane daha kapalı sublineer fonksiyonu tanımlanabilir . Bunlar B'nin σ_B destek fonksiyonunu ve B^*'ın γ_{B^*} Minkowski fonksiyoneli olan sublineer fonksiyonlarıdır.

Önerme 3.13. *$\|\cdot\|$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir norm olmak üzere B ve B^* yukarıda tanımlanan kümeler olsunlar. Bu durumla B'nin destek fonksiyonu ile B^*'ın Minkowski fonsiyoneli*

$$\|s\|^* = maks\{\langle s, x\rangle : \|x\| \leq 1\} \tag{3.17}$$

ile tanımlı aynı fonksiyonlardır.$\|s\|^*$ ile gösterilir. Yani $\|\cdot\|^* = \gamma_{B^*} = \sigma_B$ dur.Ayrıca $\|\cdot\|^*$ $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir normdur. $\|\cdot\|^*$'un birim yuvarı B^*'dır. Bu durumda B^*'ın destek fonksiyonu ve B'nin Minkowski fonsiyoneli aynı $\|\cdot\|$ fonksiyonudur ve

$$\gamma_B(x) = \sigma_{B^*} = \|x\| = maks\{\langle s, x\rangle : \|s\|^* \leq 1\} \tag{3.18}$$

olur. Böylece $\|\cdot\| = \gamma_B = \sigma_{B^*}$ ve $\|\cdot\|^* = \gamma_{B^*} = \sigma_B$ normu olurki $\|\cdot\|^*$ normuna, $\|\cdot\|$ normunun duali denir.

Kanıt. 3.18ve aşağıda verilecek olan 3.19'in özel durumu olarak elde edilir. ■

$(s, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ alalım. $(s, \frac{x}{\|x\|}) \in \mathbb{R}^n \times B(0,1)$ olur.

$$\|s\|^* = maks\{\langle s, x\rangle : \|x\| \leq 1\}$$

den

$$\left\langle s, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \leq \|s\|^* \Rightarrow \langle s, x\rangle \leq \|s\|^* \|x\| \tag{3.19}$$

Cauchy Scwartz eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ve $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|^*)$ Banach uzayları arasında bir DUALLİK bağıntısı verir.

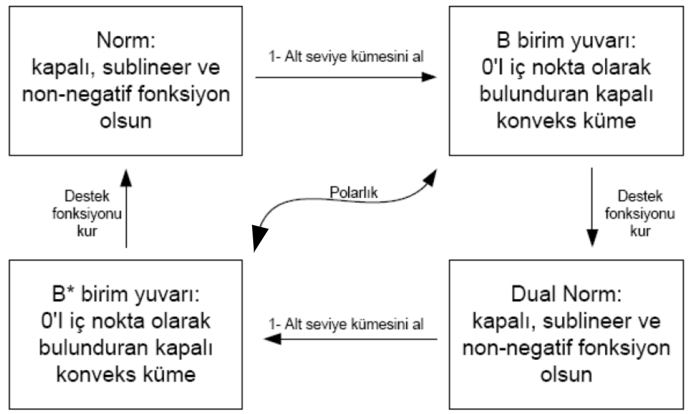
Ek olarak $s \neq 0$ ve $x \neq 0$ olduğu durumda önerme 3.1.4'den

$$\frac{s}{\|s\|} \in F_{B^*}(x) \Longleftrightarrow \frac{x}{\|x\|} \in F_B(s)$$

oluyorsa

$$\langle s, x\rangle = \|s\|^* \|x\|$$

eşitliği gerçeklenir. Buradan bir norm otomatik olarak (duali) olan başka bir norm üretir. Bu operasyon simetriktir, yani dualin duali yine kendisine eşit



Şekil 3.18: Bir norm ile duali ve birim yuvarları arasındaki ilişkiler

olur.

$$\begin{aligned}
\|s\|^* &= maks\,\{\langle s,x\rangle : \|x\| \leq 1\} \text{ ve} \\
\|x\| &= maks\,\{\langle s,x\rangle : \|s\|^* \leq 1\}
\end{aligned}$$

dönüşümleri kapalı sublineer fonksiyonlar ailesi içindeki kapalı sublineer sonlu değer alan, simetrik ve (0) orijin hariç pozitif olan fonksiyonların ailesi içinde (kısaca Normlar ailesi içinde) bir duallik bağıntısı (eşlemesi) kurar.
Bu analitik operasyonların Geometrik dünyada bir karşılığı vardır. Kapalı konveks, sınırlı , simetrik ve 0'ı iç nokta olarak bulunduran B kümesi ,kısaca B birim yuvarı,yardımıyla önce γ_B Minkowski fonksiyoneli kurulur ki bu $\|\cdot\|$ normudur. Bu norm kapalı sublineer olduğundan bir B^* kümesini destekleyen fonksiyondur yani $\gamma_B = \sigma_{B^*}$ dir. Bu B^* kümesi B'nin polarıdır. Bu $B^* \longleftrightarrow B$ karşılık getirme işlemine polarlık denir. B'nin Polar Kümesi

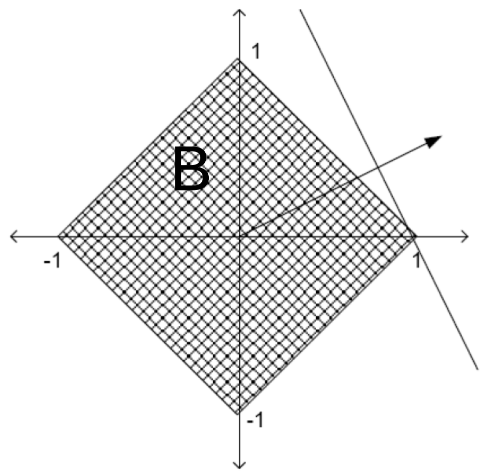
$$\begin{aligned}
B^* &= \{s : \langle s,x\rangle \leq \|x\|\} = \left\{s : \left\langle s, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \leq 1\right\}, \frac{x}{\|x\|} \in \partial B \text{ olduğundan} \\
B^* &= \{s : \forall x \in B \text{ için } \langle s,x\rangle \leq 1\} \quad \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ 'nin pozitif homojenliğinden} \\
B^{**} &= \{s \in \mathbb{R}^n : \forall s \in B^* \text{ için } \langle s,x\rangle \leq 1\} \\
&= cl\,(B) = B \ (B \text{ Kapalı olduğundan})
\end{aligned}$$

Şekil 3.18 dual normlar ve polar kümelerin nasıl oluştuğunu verir.

Örnek 3.16. $\|(x_1,x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$ *normu verilsin*

$$\begin{aligned} B &= \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|(x_1,x_2)\|_1 \le 1\right\} \\ &= \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \le 1\right\} \end{aligned}$$

birim yuvarını ve bunun destek fonksiyonunu oluşturalım.B'nin extreme nok-

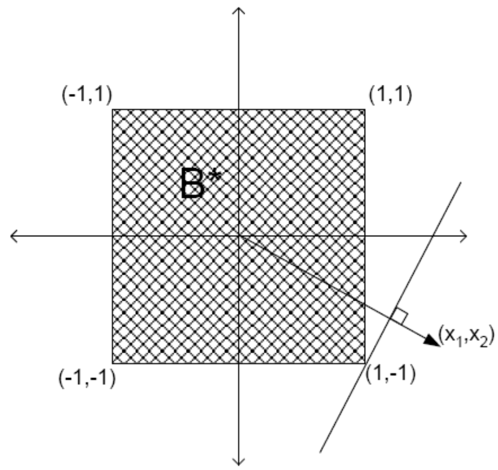


Şekil 3.19: $B = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \le 1\}$ kümesi

taları $(0,\pm 1), (\pm 1, 0)$ *olduğundan* $(s_1,s_2) \in \mathbb{R}^2$ *için*

$$\begin{aligned} \sigma_B(s_1,s_2) &= \sup\{\langle (s_1,s_2),(x_1,x_2)\rangle : (x_1,x_2) \in B\} \\ &= \sup\left\{\begin{array}{c} \langle (s_1,s_2),(1,0)\rangle, \langle (s_1,s_2),(0,1)\rangle, \\ \langle (s_1,s_2),(-1,0)\rangle, \langle (s_1,s_2),(0,-1)\rangle \end{array}\right\} \\ &= \sup\{s_1,-s_1,s_2,-s_2\} \\ &= maks\{|s_1|,|s_2|\} \\ &= \|(s_1,s_2)\|_1^* \\ &= \|(s_1,s_2)\|_\infty \end{aligned}$$

olur.(şekil 3.19) Şimdi de B^* *ı ve onun destek fonksiyonunu oluşturalım.*B^**'nin*



Şekil 3.20: B kümesinin poları

extreme noktaları $(\pm 1, \pm 1)$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} B^* &= \{(s_1, s_2) : \|(s_1, s_2)\|_\infty \leq 1\} \\ &= \{(s_1, s_2) : maks\{|s_1|, |s_2|\} \leq 1\} \\ &= \{(s_1, s_2) : |s_1| \leq 1 \vee |s_2| \leq 1\} \\ &= [-1, 1] \times [-1, 1] \end{aligned}$$

olur(şekil 3.20) ve

$$\begin{aligned} \sigma_{B^*}(x_1, x_2) &= \sup\{\langle (x_1, x_2), (s_1, s_2)\rangle : (s_1, s_2) \in B^*\} \\ &= maks \left\{ \begin{array}{c} \langle (x_1, x_2), (1, 1)\rangle, \langle (x_1, x_2), (-1, 1)\rangle, \\ \langle (x_1, x_2), (1, -1)\rangle, \langle (x_1, x_2), (-1, -1)\rangle \end{array} \right\} \\ &= maks\{x_1 + x_2, x_1 - x_2, -x_1 + x_2, -x_1 - x_2\} \\ &= |x_1| + |x_2| \\ &= \|(x_1, x_2)\|_\infty^* \\ &= \|(x_1, x_2)\|_1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.17 (Kuadratik norm)**.** *Diğer bir önemli norm tipi, Q simetrik pozitif tanımlı bir lineer operatör olmak üzere*

$$\|x\|_Q := \sqrt{\langle Qx, x\rangle}$$

ile tanımlı Quadratik normdur. Bu normlar R^n'de

$$\langle x,y\rangle_Q := \langle Qx,y\rangle$$

biçiminde tanımlı iç çarpımdan türemiştir. Q simetrik matrisi pozitif tanımlı olduğundan 1- seviye kümesi

$$E_Q = \{s \in R^n : \langle Qs,s\rangle \leq 1\}$$

eliptik kümesidir. Bunun destek fonksiyonu $\forall d \in R^n$ için

$$\sigma_{E_Q}(d) := maks\,\{\langle s,d\rangle : \langle Qs,s\rangle \leq 1\}$$

dir. Q'nun karekökü $Q^{\frac{1}{2}}$ olmak üzere; $P = Q^{\frac{1}{2}}s$ değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned}\sigma_{E_Q}(d) &= maks\,\{\langle s,d\rangle : \langle Qs,s\rangle \leq 1\} \\ &= maks\left\{\left\langle P, Q^{-\frac{1}{2}}d\right\rangle : \|P\|^2 \leq 1\right\}\end{aligned}$$

$d \neq 0$ için sağ yanın tek çözümü (Cauchy Schwarz'dan) $P = \frac{Q^{-\frac{1}{2}}d}{\left\|Q^{-\frac{1}{2}}d\right\|}$ dir ve sonuç olarak

$$\sigma_{E_Q}(d) = \left\|Q^{-\frac{1}{2}}d\right\| = \sqrt{\langle d, Q^{-1}d\rangle}$$

Burada E_Q'nun Minkowski fonksiyoneli olan $x \to \sqrt{\langle Qx,x\rangle}$ ile E_Q'nun destek fonksiyonu olan $\sigma_{E_Q}(d) = \sqrt{\langle d, Q^{-1}d\rangle}$'nin birbirinin duali olduğu gözlenir. Q'nun sadece simetrik pozitif tanımlı olduğu durumda E_Q eliptik silindirinin asimtotik konisi $KerQ$ dur. Bu durumda destek fonksiyonunun tanım kümesinin kapanışı $KerQ$'nun polarıdır. Yani

$$cldom\sigma_{E_Q} = (\ker Q)^o = (\ker Q)^{\perp} = \operatorname{Im} Q$$

$d \in \operatorname{Im} Q$ ise $\sigma_{E_Q}(d) = \sqrt{\langle d, Q^{-1}d\rangle}$ sonludur ve $Q^{-1}d$, $Qp = d$ olan $p \in R^n$ ile belirlenir. Böylece $\|x\|_Q = \sqrt{\langle Qx,x\rangle}$ normunun duali

$$\left(\|s\|_Q\right)^* = \sqrt{\langle s, Q^{-1}s\rangle} = \|s\|_{Q^{-1}}$$

$Q = I_n$ ise $\langle\cdot,\cdot\rangle^{\frac{1}{2}}$ Euclid normuna döneriz. Böylece $\|\cdot\|^* = \|\cdot\|$ olurki Euclid

normunun duali kendisi olur. Bilinen iç çarpımla bu özelliğe sahip tek normdur.

Polarlık, simetri, sınırlılık veya 0'ın kümenin iç noktası olmasına bağlı bir kavram olmamasına karşın B kümesi 0'ı bulunduran kapalı ve konveks bir küme olarak alınacaktır.Bu durumda

$$B^* = \{s : \forall x \in B \ için \ \langle s, x \rangle \leq 1\}$$

ve

$$B = (B^*)^* = \{x : \forall s \in B^* \ için \ \langle s, x \rangle \leq 1\}$$

yi sağlar.

Önerme 3.14. *[12,17]C, 0'ı bulunduran kapalı konveks bir küme olsun. C'nin Minkowski fonksiyoneli γ_C, kapalı konveks ve 0'ı bulunduran*

$$C^o := \{s \in R^n : \forall d \in C \ için \ \langle s, d \rangle \leq 1\}$$

kümesinin (support) destek fonksiyonudur.(Burada C^o, C'nin polar kümesini gösteriyor).

Kanıt. γ_C Minkowski fonksiyoneli kapalı, sublineer ve negatif olmayan bir fonksiyon olduğndan kapalı konveks ve 0'ı bulunduran bir D kümesinin destek fonksiyonudur. (σ bir sublineer fonksiyon ise σ,
$S_\sigma = \{s \in R^n : \forall d \in C \text{ için } \langle s, d \rangle \leq \sigma(d)\}$ kümesinin destek fonksiyonudur.)

$$D = \{s \in R^n : \forall (d, r) \in epi\gamma_C \text{ için } \langle s, d \rangle \leq r\}$$

$epi\gamma_C$, $C \times \{1\}$ kümesinin kapalı konveks zarf'ı olduğundan pozitif homojenliği kullanarak

$$D = \{s \in R^n : \gamma_C(d) \leq 1 \text{ olan } d\text{'ler için } \langle s, d \rangle \leq r\}$$

olduğunu yazabiliriz $\gamma_C(d) \leq 1$ olan d'lerin kümesi tanım olarak C kümesini oluşturacağından D'nin indeks kümesi C'dir. Yani

$$D = \{s \in R^n : \forall d \in C \text{ için } \langle s, d \rangle \leq 1\} = C^o$$

olur. Kanıt biter. ■

$epi\gamma_C$'nin polar konisi olan $(epi\gamma_C)^o$'nin (-1)'deki kesiti $(C^o)^o$'yi verecektir. Fakat kapalı konveks kümelerin polarının poları kendisi olduğundan $((epi\gamma_C)^o)^o$ orjinal $epi\gamma_C$'yi verir. Diğer bir deyişle $C^{oo} = C$ olur.

Önerme 3.14 aşağıdaki dual versiyonuna sahiptir.

Sonuç 3.3. *[4,12]C 0'ı bulunduran kapalı konveks küme olsun.Bu durumda* $\sigma_C = \gamma_{C^o}$ *dir.*

Uyarı 3.7. $C^o = \{s \in R^n : d \in C \text{ için } \langle s, d\rangle \leq 1\}$ *den esinlenerek polarlığı kuran* $s \to H(s) := H_{s,1} = \{y \in R^n : \langle s, y\rangle = 1\}$ *elemanter dönüşümü sıfırdan farklı s vektörlerine, 0'ı bulundurmayan afin hiperdüzlemleri 1-1 olarak karşı getiren bir dönüşümdür.*

Örnek 3.18. $H^- := \{y = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi \leq 2\}$ *yarı uzayının poları* $(H^-)^o = \{(\delta, u) : \forall (\xi, \eta) \in H^- \text{ için } \langle(\xi, \eta), (\delta, u)\rangle \leq 1\}$ *dir.*

$$\langle(\xi, \eta), (\delta, u)\rangle \leq 1 \implies \xi\delta + \eta u \leq 1$$

η sınırlandırılmadığından $u > 0$ $(u < 0)$ için $\eta \to \infty$ $(\eta \to -\infty)$ iken $\eta u \to \infty$ olur.Bu sebeple $u = 0$ dır. Böylelikle $\xi\delta + \eta u \leq 1$ eşitsizliği $\xi\delta \leq 1$ haline gelir. $\delta < 0$ için $\xi \to -\infty$ iken $\xi\delta \to \infty$ olur. Bu yüzden $\delta \geq 0$ olmalıdır. $\xi \leq 2$ eşitsizliğinin δ katını alalım.

$$(\xi\delta \leq 2\delta \text{ ve } \xi\delta \leq 1) \implies 2\delta \leq 1 \implies \delta \leq \frac{1}{2}$$

olur. Böylece

$$\left(H^-\right)^o = \left\{(\delta, 0) : \ 0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}\right\}$$

olarak bulunur.

3.7 Destek Fonksiyonlarının Özellikleri

$\mathbb{R}^n$deki kümeler ailesi üzerinde var olan hesaplamalara benzer biçimde sublineer fonksiyonlar ailesi de hesap yapılmaya elverişli bir yapıya sahiptir.

Şu soruyu sormak doğaldır. Kümeler ailesi üzerindeki operasyonlarla destek fonksiyonlar ailesi üzerindeki hangi operasyonları ne ölçüde ilişkilendirebiliriz.

Teorem 3.7. *i)$\sigma_{S_1}, \sigma_{S_2}$ boş olmayan kapalı konveks S_1, S_2 kümelerinin destek fonksiyonları olsunlar. $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ (pozitif gerçel sayılar) iseler $t_1\sigma_{S_1} + t_2\sigma_{S_2}$ fonksiyonuda $cl(t_1\sigma_{S_1} + t_2\sigma_{S_2})$ kümesinin destek fonksiyonu olur.*
ii) $\{\sigma_{S_j}\}_{j\in J}$ boş olmayan kapalı konveks $\{S_j\}_{j\in J}$ kümelerinin destek fonksiyonları ise $\sup\limits_{j\in J}\sigma_{S_j}$ fonksiyonu $cl(co(\bigcup\limits_{j\in J} S_j))$ kümesinin destek fonksiyonudur.
iii) ii)'deki hipotezlere ek olarak $S' := \bigcap\limits_{j\in J} S_j \neq \emptyset$ ise

$$\sigma_{S'} = cl(co\{\inf_{j\in J}\sigma_{S_j}\})$$

olur.

Kanıt. i) $S = cl(t_1S_1{+}t_2S_2)$ diyelim. Tanımdan bunun destek fonksiyonu $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sigma_S(d) = \sup\{\langle t_1 s_1 + t_2 s_2, d\rangle : s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2\}$$

dir. s_1 ve s_2 noktaları, indeks kümeleri olan S_1, S_2 kümelerini birbirinden bağımsız bir şekilde tarayacaklarından ve t_1, t_2 pozitif gerçel sayılar olduklarından $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sigma_S(d) = t_1 \sup_{s_1\in S_1} \langle s_1, d\rangle + t_2 \sup_{s_2\in S_2} \langle s_2, d\rangle = t_1\sigma_{S_1}(d) + t_2\sigma_{S_2}(d)$$

olur. Böylelikle $\sigma_S = t_1\sigma_1 + t_2\sigma_2$ elde edilir.
ii) $S := \bigcup\limits_{j\in J} S_j$ diyelim. $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sigma_S(d) = \sup_{s\in S} \langle s, d\rangle = \sup_{j\in J}(\sup_{s_j\in S_j} \langle s_j, d\rangle) = \sup_{j\in J}\sigma_{S_j}(d)$$

ve $\sigma_S = \sigma_{\overline{co}S}$ olduğundan $\sigma_{\overline{co}S} = \sup\limits_{j\in J}\sigma_{S_j}$ eşitliğine ulaşılır.
iii) $S' := \bigcap\limits_{j\in J} S_j \neq \emptyset$ olsun. $\sigma_{S'}$ vardır.

$$\begin{aligned} s \in S' \quad &\Longleftrightarrow \ \forall j \in J \text{ için } s \in S_j \ \Longleftrightarrow \ \forall j \in J \text{ için } \langle s, \cdot\rangle \le \sigma_{S_j}(.) \\ &\Longleftrightarrow \ \langle s, \cdot\rangle \le \inf_{j\in J}\sigma_{S_j}(.) \ \Longleftrightarrow \ \langle s, \cdot\rangle \le cl(co(\inf_{j\in J}\sigma_{S_j}(\cdot)) \end{aligned}$$

son ifade bir fonksiyonun kapalı konveks zarfının tanımından çıkar. Sonuç 3.2 $cl(co(\inf \sigma_S))$ fonksiyonunun S'nin destek fonksiyonu olduğunu verir. ∎

Uyarı 3.8. *i)'de S_2 sınırlı ise $t_1S_1 + t_2S_2$ otomatik olarak kapalıdır.*

(Kompakt bir küme ile kapalı bir kümenin toplamı kapalı küme olacağından)

Teorem 3.7'de i) koşulundan $t > 0$ ve $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sigma_{tS}(d) = \sup_{ts \in tS} \langle d, ts \rangle = \sup_{s \in S} \langle td, s \rangle = \sigma_S(td)$$

eşitliğinden $\sigma_{tS}(d) = \sigma_S(td)$ olduğu görülür. Bu eşitlik $t < 0$ ise de geçerlidir.

Daha genel olarak

Önerme 3.15. *$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($\mathbb{R}^m$ üzerindeki bir $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ iç çarpımına göre) A^* adjointine sahip bir doğrusal dönüşüm olsun. $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için $\forall y \in \mathbb{R}^m$ için*

$$\sigma_{cl(A(S))}(y) = \sigma_S(A^*y)$$

dir.

Kanıt.

$$\sigma_{A(S)}(y) = \sup_{s \in S} \langle\langle As, y \rangle\rangle = \sup_{s \in S} \langle\langle s, A^*y \rangle\rangle = \sigma_S(A^*y)$$

ve $\sigma_{A(S)}(y) = \sigma_{cl(A(S))}(y)$ olduğundan sonuç elde edilir. ■

Önerme 3.16. *$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ bir lineer dönüşüm, A^*, A'nın ($\mathbb{R}^m$ üzerindeki bir $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ iç çarpımına göre) adjointi ve σ_S boş olmayan kapalı konveks $S \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin destek fonksiyonu olsun. $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için σ_S, $A^{-1}(d) = \{p \in \mathbb{R}^m : Ap = d\}$ üzerinde alttan sınırlı ise $(A^*)^{-1}(S)$ kümesinin destek fonksiyonu A altında σ_S'nin görüntü fonksiyonu $A\sigma_S$'nin kapanış fonksiyonudur. ($A\sigma_S(x) := \inf\{\sigma_S(y) : Ay = x\} = \inf\{\sigma_S(y) : y \in A^{-1}(x)\}$)*

Kanıt. Teorem 2.5'den $A\sigma_S \in Conv\mathbb{R}^n$ dir. $A\sigma_S$'nin pozitif homojenliği açıktır gerçekten: $\forall d \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ için

$$(A\sigma_S)(td) = \inf_{Ap=td} \sigma_S(p) = \inf_{A(\frac{p}{t})=d} t\sigma_S(\frac{p}{t}) = t \inf_{A(q)=d} \sigma_S(q) = t(A\sigma_S)d$$

$cl(A\sigma_S)$ kapalı sublineer fonksiyon olduğundan bir S' kümesinin destek fonksiyonudur. Bu S' kümesinin ne olduğunu da biliyoruz.

$$\begin{aligned} s \in S' \iff & \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s, d\rangle \leq A\sigma_S(d) \\ \iff & \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s, d\rangle \leq \inf\{\sigma_S(p) : Ap = d \end{aligned}$$

bunun anlamı $\forall p \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle s, Ap\rangle \leq \sigma_S(p)$$

$\langle s, Ap\rangle = \langle\langle A^*s, p\rangle\rangle$ olduğundan $A^*s \in S$ olur. Buradan $s \in (A^*)^{-1}(S)$ olur. $(A^*)^{-1}(S)$ kümesi kapalıdır. Çünkü S kapalı kümesinin A^* sürekli fonksiyon altındaki ters resmidir. ■

S sınırlı ise σ_S her yerde sonlu ve A örten olacağından $A\sigma_S$ her yerde sonlu olur. Bu $(A^*)^{-1}(S)$'nin kompakt olması demektir.

Uyarı 3.9. *Önerme 3.16'ün hipotezindeki koşulun tam anlamı $A\sigma_S$'nin hiç bir yerde $-\infty$ değerini almamasıdır. Diğer bir değişle $A\sigma_S$'nin kapanışı $cl(A\sigma_S)$ fonksiyonunun $(A^*)^{-1}(S) \neq \emptyset$ kümesinin destek fonksiyonu olmasıdır. $(A^*)^{-1}(S) \neq \emptyset$ koşulu*

$$S \cap \operatorname{Im} A^* \neq \emptyset \ \textit{veya} \theta \in S \backslash \operatorname{Im} A^* = S + (\ker A)^{\perp}$$

koşullarından biri ile de verilebilir.
Görüntü fonksiyonunun alınmasının önemli bir operasyon olduğundan daha önce söz edilmişti. Bundan birçok değişik yapılarak kurulabilir. Bunlar görüntü fonksiyonunun işlendiği bölümde yapıldı. Şimdi bu yapılardan etkilenerek oluşturacağımız bir örnek vereceğiz
σ_S boş olmayan kapalı konveks $S \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ kümesinin destek fonksiyonu ve $A(x, y) := x$ olsun. σ_S'nin A altındaki görüntü fonksiyonu

$$\begin{aligned} A\sigma_S : \ \mathbb{R}^n \ & \rightarrow \quad \mathbb{R} \\ x \ & \rightarrow \ (A\sigma_S) \ \ (x) = \inf\{\sigma_S(x, y) : y \in \mathbb{R}^p\} \end{aligned}$$

ile tanımlanır. A nın adjointi A^* ise

$$\begin{aligned} A\sigma_S : \ \mathbb{R}^n \ & \rightarrow \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \\ x \ & \rightarrow \ (A^*)(x) \ \ = (x, 0) \end{aligned}$$

olur. $cl(A\sigma_S)$ *fonksiyonu,* $S' = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,\theta) \in S\}$ *kesit kümesinin* $\sigma_{S'}$ *destek fonksiyonudur.* S' *kümesi,*S*'nin* $\mathbb{R}^n$*'ye izdüşümü ile karıştırılmamalıdır. Önerme 3.15'e göre bu destek fonksiyonu*

$$x \to \sigma_S(x,\theta)$$

dır.

4 SONLU KONVEKS FONKSİYONLARIN SUBDİFERANSİYELLERİ

4.1 Giriş

3. Bölümde konveks fonksiyonlara bir nokta civarında sublineer fonksiyonlarla birinci mertebeden yaklaşılabileceğinden bahsedilmişti. Bu bölümde öncelikle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks ve $x \in \mathbb{R}^n$ sabit ise

$$d \mapsto f'(x,d) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$$

ile tanımlı f' fonksiyonunun varlığı kapalı, sonlu ve sublineer olduğu gösterilecektir. Ayrıca f' nün

$$f(x+h) = f(x) + f'(x,h) + o(\|h\|) \tag{4.1}$$

anlamında f 'ye x civarındaki yaklaşımı olduğu gösterilecektir. Sublineer fonksiyonlar ve kompakt konveks kümelerin arasındaki ilişki düşünüldüğünde, $f'(x,\cdot)$ her $d \in \mathbb{R}^n$ için ve boştan farklı kompakt konveks en az bir S kümesi için

$$f'(x,d) = \sigma_S(d) = maks\{\langle s, d\rangle : s \in S\}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu S kümesine f nin x deki subdiferansiyeli denir ve $\partial f(x)$ ile gösterilir. f, x de $\nabla f(x)$ gradyantı ile diferansiyellenebiliyorsa, 4.1 $f'(x,\cdot)$ in lineer olduğunu ve S nin sadece $\nabla f(x)$ i bulundurduğunu gösterir. Bundan dolayı sublineerlik lineerliğin genellemesi olduğu gibi subdiferansiyel kavramı da gradyantın genellemesidir.

Subdiferansiyel alma sıradan diferansiyel almanın genellemesi olması beklenir. Bu yüzden diferansiyel analizde karşılaşılan sonuçların çoğunu burda da görmek mümkündür:1. mertebeden Taylor açılımları, ortalama-değer teoremleri, hesaplama kuralları vb.Bu hesaplama kurallarının önemi konveks analizde bir kat daha artmaktadır.Çünkü konveks fonksiyonlar üzerindeki bazı işlemler diferansiyellenebilmeyi yok etmekte fakat konveksliği korumaktadır. Önemli bir örnek maks-işlemidir. maks-fonksiyonlarının subdiferansiyelleriyle ilgili kurallar detaylı bir şekilde işlenecektir.

Aksi söylenmedikçe bundan sonra

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ konvekstir.}$$

Bu f nin sürekliliğini ve yerel Lipschitz sürekliliğini gerektirecektir.

4.2 Subdiferansiyel: Tanımlar ve Yorumlar

Şimdi bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sonlu konveks fonksiyonu için üç değişik yoldan subdiferansiyelini tanımlayalım.

4.2.1 Yönlü türevler kullanılarak subdiferansiyelin tanımı

Yardımcı Teorem 4.1. *x ve d, $\mathbb{R}^n$ de sabit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. f nin x de d yönündeki fark bölümü $q : \mathbb{R}_+ \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$*

$$q(t) := \frac{f(x+td) - f(x)}{t}, \quad t > 0 \tag{4.2}$$

alınsın. Bu durumda $q(t)$ fonksiyonu monoton artandır (yani $0 < s \leq t$ ise $q(s) \leq q(t)$ dir).

Kanıt. f nin konveksliğinden $0 < s \leq t$ için

$$\begin{aligned} f(x+sd) - f(x) &= f(\frac{s}{t}(x+td) + \frac{t-s}{t}x) - f(x) \\ &\leq \frac{s}{t}f(x+td) + \frac{t-s}{t}f(x) - f(x) \\ &= \frac{s}{t}[f(x+td) - f(x)] \end{aligned}$$

olur. Buradan ise

$$\frac{f(x+sd) - f(x)}{s} \leq \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$$

yani $q(s) \leq q(t)$ elde edilir. ■

Teorem 4.1. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall d \in \mathbb{R}^n$ yönü ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için t, 0' a sağdan yaklaşırken $q(t)$ nin limiti yani*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$$

vardır.

Kanıt. $x, d \in \mathbb{R}^n$ keyfi olarak seçip sabitliyelim. f nin konveksliğinden $\forall t > 0$ için

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\frac{1}{1+t}(x+td) + \frac{t}{1+t}(x-d)) \\ &\leq \frac{1}{1+t}f(x+td) + \frac{t}{1+t}f(x-d) \end{aligned}$$

olacağından

$$(1+t)f(x) \leq f(x+td) + tf(x-d)$$

elde edilir. Bu ise

$$f(x) - f(x-d) \leq \frac{1}{t}[f(x+td) - f(x)] = q(t)$$

eşitsizliğini verir. Buradan q fark bölümü fonksiyonunun alttan sınırlı olduğu çıkar. Ayrıca q yardımcı teorem 4.1den monoton artan olduğu için

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$$

vardır. ■

Tanım 4.1. *f nin x de d yönündeki yönlü türevi*

$$f'(x,d) := \lim_{t \to 0^+} q(t) = \inf\{q(t) : t > 0\} \tag{4.3}$$

olara tanımlanır.

$\varphi(t) := f(x+td)$ bir boyutlu fonksiyonu için

$$f'(x,d) = D_+\varphi(0) \tag{4.4}$$

φ ın 0 daki sağ türevidir. 4.2 de d yi $-d$ ile değiştirirsek

$$f'(x,-d) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x-td) - f(x)}{t} = \lim_{\tau \to 0^-} \frac{f(x+\tau d) - f(x)}{-\tau}$$

olur. Bu ise φ ın 0 daki sol türevinin ters işaretlisidir.

$$f'(x,-d) = -D_-\varphi(0) \tag{4.5}$$

Önerme 4.1. *Sabit bir x için $f'(x,\cdot)$ fonksiyonu sonlu sublineerdir.*

Kanıt. *$d_1, d_2 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ve $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ olsun. f nin konveksliğinden her $t \in \mathbb{R}$ için*

$$\begin{aligned} & f(x + t(\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2)) - f(x) \\ &= f(\alpha_1(x + td_1) + \alpha_2(x + td_2)) - \alpha_1 f(x) - \alpha_2 f(x) \\ &\leq \alpha_1 f(x + td_1) + \alpha_2 f(x + td_2) - \alpha_1 f(x) - \alpha_2 f(x) \\ &= \alpha_1 \left[f(x + td_1) - f(x)\right] + \alpha_2 \left[f(x + td_2) - f(x)\right] \end{aligned}$$

Her iki tarafı $t > 0$ ye bölüp $t \to 0^+$ yaklaştırılırsa

$$f'(x, \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2) \leq \alpha_1 f'(x, d_1) + \alpha_2 f'(x, d_2)$$

elde edilir. Böylece d değişkenine bağlı f' yönlü türevinin konveksliği kanıtlanır.

Pozitif homojenlik aşikardır: $\lambda > 0$ için

$$f'(x, \lambda d) = \lim_{t \to 0^+} \lambda \frac{f(x + \lambda td) - f(x)}{\lambda t} = \lambda \lim_{\tau \to 0^+} \frac{f(x + \tau d) - f(x)}{\tau} = \lambda f'(x, d)$$

Son olarak $\|d\| = 1$ olsun. f sonlu konveks olduğundan x etrafında Lipschitz süreklidir.

$$|f(x + td) - f(x)| \leq Lt \qquad (0 \leq t \leq \varepsilon \text{ için})$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ ve $L > 0$ vardır. Bu yüzden

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{|f(x + td) - f(x)|}{t} \leq L \qquad (0 < t \leq \varepsilon \quad \text{için})$$

yani $|f'(x, d)| \leq L$ olur. $d \in \mathbb{R}^n$ ise pozitif homojenlikten

$$f'(x, d) = f'(x, \frac{d}{\|d\|} \cdot \|d\|) = f'(x, \frac{d}{\|d\|}) \cdot \|d\|$$

yazılabilir. $\frac{d}{\|d\|}$ ise normu 1 olduğundan yönlü türev L ile sınırlıdır yani üstteki ifade $\left| f'(x, \frac{d}{\|d\|}) \|d\| \right| \leq L \|d\|$ olur. Bu ise $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için

$$|f'(x, d)| \leq L \|d\| \tag{4.6}$$

verir. Böylece $f'(x,\cdot)$ sonludur. ■

Uyarı 4.1. *Üstteki kanıtın sonuna göre f nin x etrafındaki yerel Lipschitz sabiti olan L, $f'(x,\cdot)$'nün de Lipschitz sabitidir. $f'(x,\cdot)$ kapalı sublineer ve sonlu olduğundan en iyi Lipschitz sabiti $L = \sup\{f'(x,d) : \|d\| = 1\}$ olacaktır. Bu L $f'(y,\cdot)$ için aynı zamanda mutlak Lipschitz sabitidir.Doğal olarak bu sabit $f'(y,\cdot)$ için y, x'in $B(x,\delta)$ δ-komşuluğunda olduğunda da geçerlidir.Bu*

$$\|y-x\| < \delta \Rightarrow \forall d_1, d_2 \in \mathbb{R}^n \text{ için } |f'(y,d_1) - f'(y,d_2)| \leq L\,\|d_1 - d_2\|$$

olan L bir Lipschitz sabiti ve bir δ nın var olması demektir.

Önerme 4.1 nin bir sonucu olarak $f'(x,\cdot)$ bir destek fonksiyonudur. Bu nedenle aşağıdaki tanım geçerlidir.

Tanım 4.2. *Destek fonksiyonu $f'(x,\cdot)$ olan $\mathbb{R}^n$ in boştan farklı kompakt konveks $\partial f(x)$ kümesine, f'nin x deki subdiferansiyeli denir*, *yani f nin x deki subdiferansiyeli*

$$\partial f(x) := \{s \in \mathbb{R}^n : \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s, d\rangle \leq f'(x,d)\} \tag{4.7}$$

kümesidir. Bir $s \in \partial f(x)$ vektörüne f nin x deki bir subgradyantı denir.

İlk gözlem olarak subdiferansiyel kavramının bir iç çarpımla ilişkilendirildiği söylenebilir. Bu iç çarpım değişirse ∂f in değişeceği de açıktır.

Kompakt konveks kümeler ile sonlu sublineer fonksiyonlar arasındaki ilişkiye bağlı tüm özellikler $\partial f(x)$ ile $f'(x,\cdot)$ için yeniden düzenlenebilir. Örnek olarak d yönündeki $\partial f(x)$ in genişliği (breadth)

$$f'(x,d) + f'(x,-d) = D_+\varphi(0) - D_-\varphi(0) \geq 0$$

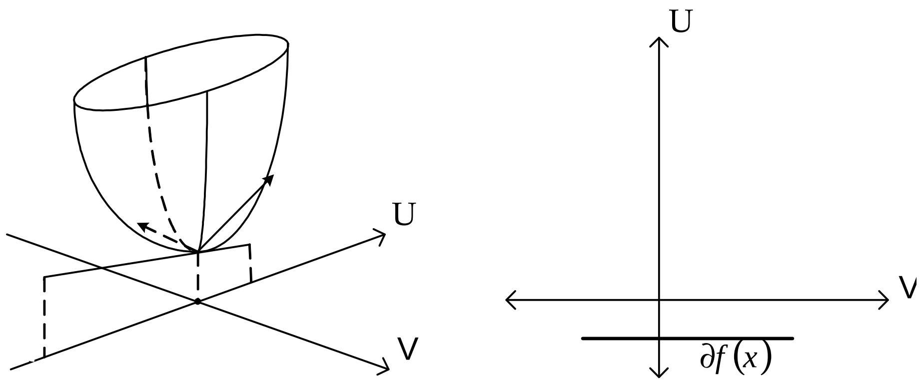
dır. Bu toplam(ve ya fark) φ fonksiyonunun "diferansiyellenebilme eksiği"ni verir.

Uyarı 4.2. *Özel olarak $f'(x,\cdot)$ sublineer fonksiyonunun U doğrusallık altuzayındaki d yönü için φ, 0'da diferansiyellenebilirdir. $f'(x,\cdot)$ sublineer fonksiyonunun U ya kısıtlanmışı lineerdir ve s, $\partial f(x)$ den keyfi olarak seçilen bir* *vektör olmak üzere* $\langle s,\cdot\rangle$ *ye eşittir . Kısaca* $U,\ h \longmapsto f(x+h)\ \ h=0$ *da diferansiyellenebilen bir fonksiyon gibi davranmasını sağlayan* h *'lardan oluşan bir kümedir. Şekil 4.1 e bakınız:* $\partial f(x)\ U$ *ya dik bir hiperdüzlemin içinde bulunmaktadır. Başka türlü söylersek* $U\quad \partial f(x)$ *in* 0 *genişliğe sahip olduğu tüm yönlerin kümesidir.*

Tanım 3.4 den hatırlanacağı gibi

$$\forall (s,d)\in \partial f(x)\times \mathbb{R}^n \ \textit{için} \quad -f'(x,-d)\le \langle s,d\rangle \le f'(x,d)$$

dir.



Şekil 4.1: Yönlü türevin lineerlik uzayı

Tanım 4.2 diğer taraftan ele alınırsa; $f'(x,d)=\sup\{\langle s,d\rangle : s\in\partial f(x)\}$ olur. $\partial f(x)$ kompakt olduğundan, bu supremuma bir s de varılır ve $s,\ d$ ye bağlıdır. Diğer bir deyişle, herhangi bir $d\in\mathbb{R}^n$ alındığında $t\ge 0$ için

$$f(x+td)=f(x)+t\,\langle s_d,d\rangle+\varepsilon_d(t) \tag{4.8}$$

olacak şekilde $s_d\in\partial f(x)$ vardır. Burada $t\to 0^+$ için $\varepsilon_d\,(t)\to 0$ ve ε_d nin d den bağımsız yapılabileceği ilerde görülecektir. $s_d,\ t$ den bağımsız bir subgradyanttır ve en büyük $\langle s,d\rangle$ değerini verir. Subdiferansiyel oluşturuluşundan f nin birinci mertebeden tanımlanışıyla ilgili bilgilere sahiptir.

Sonlu konveks bir fonksiyon olarak $d\mapsto f'(x,d)$ nin kendisi de yönlü türev ve subdiferansiyellere sahiptir. $d=0$ için bunlar aşağıdaki önermede görülecektir.

Önerme 4.2. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sonlu konveks fonksiyon ise $\sigma(d) := f'(x,d)$ ile tanımlanan $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sonlu sublineer fonksiyonu aşağıdakileri sağlar*

$$\sigma'(0,\delta) = f'(x,\delta) \qquad \forall \delta \in \mathbb{R}^n; \tag{4.9}$$

$$\sigma(\delta) = \sigma(0) + \sigma'(0,\delta) = \sigma'(0,\delta) \qquad \forall \delta \in \mathbb{R}^n; \tag{4.10}$$

$$\partial\sigma(0) = \partial f(x) \tag{4.11}$$

Kanıt. *σ pozitif homojen ve $\sigma(0) = 0$ olduğundan*

$$\forall t > 0 \text{ için } \frac{\sigma(t\delta) - \sigma(0)}{t} = \frac{t\sigma(\delta) - 0}{t} = \sigma(\delta) = f'(x,\delta)$$
$$\text{ve } \sigma'(0,\delta) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sigma(0 + t\delta) - \sigma(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} f'(x,\delta) = f'(x,\delta)$$

olur. Böylece 4.9 kanıtlanır. $f'(x,\delta) = \sigma(\delta)$ olduğundan $\sigma(\delta) = \sigma'(0,\delta) = \sigma(0)+\sigma'(0,\delta)$ olur. Bu da (4.10) kanıtlar. $\forall \delta \in \mathbb{R}^n$ için $\sigma'(0,\delta) = f'(x,\delta)$ olduğu için $\sigma'(0,\cdot)$, $f'(x,\cdot)$ kapalı sublineer fonksiyonları aynıdır. Dolayısyla aynı kapalı kompakt konveks kümeyi desteklerler, yani $\partial\sigma(0) = \partial f(x)$ olur.

■

4.9 a şaşırmamak gerekir: teğet olma kendini üreten bir işlemdir. $f'(x,\cdot)$ in grafiği *gr* f e $(x, f(x))$ de teğet olan doğrularla (ışınlarla) oluşturulduğundan, aynı küme *gr* $f'(x,\cdot)$ ne teğet doğrular (ışınlar) alınırken de oluşmalıdır.4.10 ise sublineer bir fonksiyonu 0 da birinci mertebeden yaklaşımınıoluştururken, doğrusallaştırma hatası olmadığını belirtir yani (4.8) $f(x + td) = f(x) + t\langle s_d, d\rangle + \varepsilon_d(t)$ eşitliği $\varepsilon_d \equiv 0$ için sağlanır.

4.2.2 Afin fonksiyonla alttan yaklaşarak subdiferansiyelin tanımı

Subdiferansiyelin önceki tanımı 4.1 iki aşamalıydı:
İlk olarak yönlü türevi hesaplama ve sonra bu fonksiyonun desteklediği kümeyi belirleme.Subdiferansiyel için türev almadan doğrudan bir tanım verilebilir.

Tanım 4.3 (Subdiferansiyel II)**.** $\forall y \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle \tag{4.12}$$

sağlayan $s \in \mathbb{R}^n$ vektörlerinin kümesine , f nin x deki subdiferansiyeli denir ve bu küme $\partial f(x)$ ile gösterilir.

Önceki tanımla (Tanım 4.2) bu tanımın çakıştığı gösterilecektir. Bazı farklılıklar ise şöyle sıralanabilir:

-Son tanım tek taraflıdır: 4.12 deki eşitsizliğin sağlanması için $y \mapsto f(x) + \langle s, y - x \rangle$ afin fonksiyonunun f yi minorize etmesi ve $y = x$ için f ile çakışması gerekir.

-Son tanım ; 4.12 deki eşitsizliğin bütün $y \in \mathbb{R}^n$ ler için sağlanması gerektiğini söyler.

-Bu iki gözlem tanım 4.3'ün türevleme kavramından ayrıldığını göstermektedir, şöyle ki:

(i) Bu tanımda kalan terim yoktur;

(ii) x e yakın değil bütün y ler işin içindedir.

Aşağıdaki teorem aslında

(i') fazladan $o(\|y - x\|)$ i 4.12 e eklemenin bir şeyi değiştirmeyeceğini veya

(ii') Eşitsizlik 4.12 nin x e yakın y ler içinde sağlanması gerektiğini gösterecektir.

Tabii ki, bu iki özellik (i') ve (ii') f nin konveksliğine dayanır; daha açık olarak fark bölümünün (difference quotient) monotonluğuna dayanır.

- 4.3 de bütün subgradyantlar aynı zamanda belirlenmiştir. Her bir d için yönlü türev ile subdiferansiyel kümesinin bir düzlemsel yüzeyi ortaya çıkarılmakta ve bu yüzeylere uygulanan konveks bileşimlerle subdiferansiyel kümesi elde edilmektedir.

Teorem 4.2. *Subdiferansiyel için verilen iki tanım denktir.*

$$\begin{aligned} \partial f(x) &= \{s \in \mathbb{R}^n : \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s, d \rangle \leq f'(x, d)\} \\ &= \{s \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle \ \ \forall y \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

Kanıt. *$s \in \{t \in \mathbb{R}^n : \forall d \in \mathbb{R}^n$ için $\langle t, d\rangle \leq f'(x,d)\}$ olsun. Yani*

$$\forall d \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s, d\rangle \leq f'(x,d) \tag{4.13}$$

ve

$$f'(x,d) = \inf\{\frac{f(x+td)-f(x)}{t} : t > 0\}$$

olduğundan buna denk olarak

$$\forall d \in \mathbb{R}^n \text{ ve } \forall t > 0 \text{ için } \ \langle s, d\rangle \leq \frac{f(x+td)-f(x)}{t} \tag{4.14}$$

yazılabilir. d, $\mathbb{R}^n$ yi; t, $\mathbb{R}^+_*$ ı tararken, $y := x + td$ $\mathbb{R}^n$ nin tamamını taramaktadır. Bu sayede

$$\langle s, d\rangle \leq \frac{f(y)-f(x)}{t} \iff \langle s, td\rangle \leq f(y) - f(x)$$

olur. td yerine eşiti olan $y - x$ yazıldığında bunun da

$$f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle$$

olduğu görülürki bu $s \in \{s \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle \ \forall y \in \mathbb{R}^n\}$ demektir.Buradan

$$\begin{aligned}\{s &\in \mathbb{R}^n : \forall d \in \mathbb{R}^n \text{için } \langle s, d\rangle \leq f'(x,d)\} \\ &\subseteq \{s \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle \, \forall y \in \mathbb{R}^n\}\end{aligned}$$

kapsamı elde edilir.Aynı düşünceyle ters yönde gidilirse eşitlik elde edilir. ■

Üstteki kanıt y ler x in bir komşuluğuna kısıtlandığında da geçerlidir. Gerçekten $d \in B(0,1)$ için $\langle s, d\rangle \leq f'(x,d)$ varsa yönlü türev pozitif homojen olduğundan $\lambda > 0$ için $\lambda \langle s, d\rangle = \langle s, \lambda d\rangle \leq f'(x, \lambda d) = \lambda f'(x,d)$ olacaktır. λ değiştikçe $\lambda B(0,1)$ tüm uzayı kapsayacak, böylelikle $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için $\langle s, d\rangle \leq f'(x,d)$ eşitsizliği sağlanacaktır. Diğer taraftan

$$t \in (0, \varepsilon] \text{ için } \ \langle s, d\rangle \leq \frac{f(x+td)-f(x)}{t}$$

varsa fark bölümü artan bir fonksiyon olduğu için

$$\langle s, d\rangle \leq \inf_{t \in (0,\varepsilon]} \frac{f(x+td)-f(x)}{t} \leq \inf_{t \in \mathbb{R}^+_*} \frac{f(x+td)-f(x)}{t} = f'(x,d)$$

olacaktır. Bu sayede 4.14 deki eşitsizlik $\forall(d,t) \in B(0,1) \times (0,\varepsilon]$ için sağlandığında $\forall(d,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_*^+$ için de sağlanır.

f nin birinci mertebeden yaklaşımı açısından 4.12, 4.8 e yeni bilgiler eklemektedir: $\varepsilon_d(t)$ hiç bir $t \geq 0$ için negatif değildir. Diğer taraftan 4.8, belirli bir s (y değişkenine bağlı) ve x' e çok yakın y ler için 4.12 nerdeyse bir eşitlikmiş gibi sağlanır.

Şimdi yönlü türev−subdiferansiyel ilişkisi tersten oluşturulabilir: 4.12 de tanımlanan küme,

- $\partial f(x)$ kümesi boştan farklıdır çünkü bir konveks fonksiyonu $x \in ridomf$ te minorize eden en az bir afin fonksiyon vardır.

- $\partial f(x)$ kümesi kapalı ve konvekstir.Gerçekten: $s_1, s_2 \in \partial f(x)$ ve $\alpha \in (0,1)$ ise

$$\begin{aligned}
&f(x) + \langle \alpha s_1 + (1-\alpha)s_2, y - x\rangle = \\
&= f(x) + \alpha \langle s_1, y - x\rangle + (1-\alpha)\langle s_2, y - x\rangle \\
&= \alpha(f(x) + \langle s_1, y - x\rangle) + (1-\alpha)(f(x) + \langle s_2, y - x\rangle) \\
&\leq \alpha f(y) + (1-\alpha) f(y) = f(y) \\
&\Rightarrow f(y) \geq f(x) + \langle \alpha s_1 + (1-\alpha)s_2, y - x\rangle
\end{aligned}$$

$\alpha s_1 + (1-\alpha)s_2 \in \partial f(x)$ olur ki $\partial f(x)$ kümesi konvekstir.

Şimdi $\partial f(x)$ kümesinin kapalı olduğunu görelim.$s \in cl(\partial f(x))$ alalım.Bu durumda $s_k \to s$ olanen az bir $(s_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \partial f(x)$ dizisi vardır. Bu durumda $\forall k \in \mathbb{N}$ için $f(y) \geq f(x) + \langle s_k, y - x\rangle$ olur. İki taraftan limit alınır ve iç çarpımın sürekliliği kullanılırsa

$$\lim_{k\to\infty} f(y) \geq \lim_{k\to\infty} (f(x) + \langle s_k, y - x\rangle\ )$$
$$f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle$$

$s \in \partial f(x)$ olur ki bu $cl(\partial f(x)) \subseteq \partial f(x)$ kapsamını verir.Ters kapsam her zaman doğrudur. Böylece $cl(\partial f(x)) = \partial f(x)$ eşitliği elde edilir.$\partial f(x)$ kümesi kapalıdır.

- $\partial f(x)$ kümesi sınırlıdır.Gerçekten:

  Her $0 \neq s \in \partial f(x)$ için $f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle$ tir. Keyfi $\delta > 0$ için $y = x + \delta \frac{s}{\|s\|}$ alınırsa $y - x = \delta \frac{s}{\|s\|}$ olur.

$$f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle = f(x) + \left\langle s, \delta \frac{s}{\|s\|} \right\rangle = f(x) + \frac{\delta}{\|s\|} \langle s, s \rangle$$
$$= f(x) + \frac{\delta}{\|s\|} \|s\|^2 = f(x) + \delta \|s\|$$

  olur. Ayrıca f konveks olduğundan $B(x, \delta)$ kompakt konveks kümesinde Lipschitzdir. L bu kümedeki Lipschitz sabiti ise

$$y = x + \delta \frac{s}{\|s\|} \in B(x, \delta) \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq L \|y - x\|$$
$$\Rightarrow f(y) - f(x) \leq L \left\| \delta \frac{s}{\|s\|} \right\| = L\delta \Rightarrow f(y) \leq f(x) + L\delta$$

  olur. Buradan $f(x) + \delta \|s\| \leq f(y) \leq f(x) + L\delta$ veya $\|s\| \leq L$ elde edilir.Her $s \in \partial f(x)$ için $\|s\| \leq L$ olacağından $\partial f(x)$ kümesi sınırlıdır.

$$\partial f(x) = \{s \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle \; \forall y \in \mathbb{R}^n\}$$

  kümesi boştan farklı kapalı ve konveks olduğundan destek fonksiyona sahiptir. Ayrıca sınırlı olduğundan destek fonksiyonu sonlu değerlidir. Teorem 4.2 den bu destek fonksiyonunun 4.3 deki $f'(x, \cdot)$ yönlü türevi olduğu görülebilir.

Uyarı 4.3. *Bir σ (sonlu) sublineer fonksiyonunun bir konveks fonksiyon gibi subdiferansiyeli vardır. σ nın 0 daki subdiferansiyeli*

$$\partial \sigma(0) = \{s : \forall d \in \mathbb{R}^n \text{ için } \langle s, d \rangle \leq \sigma(d)\}$$

olarak tanımlanır.$\sigma'(0, d) = \sigma(d)$ olduğu için bu tanım doğrudur. Bu tanım destek fonksiyonundan bir kümeyi oluşturmak için (3.15) den daha derli toplu bir yol sunar: Bir σ (sonlu) sublineer fonksiyonu 0 daki subdiferansiyelinin destek fonksiyonudur.

$$\sigma(d) = \sup\{\langle s, d \rangle : s \in \partial \sigma(0)\}$$

Şekil 3.11 deki "$\langle s, d \rangle \leq \sigma(d)$ olan d'leri seç" ifadesi yerine artık "σ nın 0 daki subdiferansiyelini al" ifadesi konabilir.

4.2.3 Normal koniler kullanılarak subdiferansiyelin tanımı

Tanım 4.3'de $\partial f(x)$ in elemanları olan subgradyantlar *epi* f'yi $(x, f(x))$'de destekleyen hiperdüzlemlerin eğimleridir .Bu teğet ve normal koniler cinsinden aşağıdaki sonuçla ifade edilecektir. Bu ifade ise subdiferansiyel ve yönlü türevin üçüncü tanımı olarak düşünülebilir.

Önerme 4.3. *(i) Bir $s \in \mathbb{R}^n$ vektörünün f nin x deki subgradyantı olması için gerek ve yeter koşul $(s, -1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ in epi f'ye $(x, f(x))$'de normal olmasıdır.*
Diğer bir deyişle:

$$N_{epi\ f}(x, f(x)) = \{(\lambda s, -\lambda) : s \in \partial f(x), \lambda \geq 0\} \text{ dir.}$$

(ii) epi f kümesinin $(x, f(x))$'deki teğet konisi, $d \longmapsto f'(x, d)$ yönlü türev fonksiyonunun epigrafıdır:

$$T_{epi\ f}(x, f(x)) = \{(d, r) : r \geq f'(x, d)\}.$$

Kanıt.
(i) $(s, -1) \in N_{epi\ f}(x, f(x))$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall (y, r) \in$ epi f için $\langle (s, -1), (y, r) - (x, f(x)) \rangle \leq 0$ olmasıdır.

$$\begin{aligned} \langle (s, -1), (y, r) - (x, f(x)) \rangle \leq 0 &\iff \langle s, y - x \rangle + (-1)[r - f(x)] \leq 0 \\ &\iff \langle s, y - x \rangle + f(x) \leq r \end{aligned}$$

buna denk biçimde ($\forall (y, r) \in$ epi f için $f(y) \leq r$) ve özel olarak $\forall (y, f(y)) \in$ epi f olduğundan $\forall y \in \mathbb{R}^n$ için $f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle$ yazılabilir. Bu da s, f'nin x'deki bir subgradyantı demektir. dom $f = \mathbb{R}^n$ olduğundan $x \in$ ridom f 'tir. Bu sayede $(s, -1)$' leri bu konveks koninin tabanı olarak düşünebiliriz. Böylece

$$N_{epi\ f}(x, f(x)) = \{\lambda(s, -1) : s \in \partial f(x), \lambda \geq 0\}$$
$$N_{epi\ f}(x, f(x)) = \{(\lambda s, -\lambda) : s \in \partial f(x), \lambda \geq 0\}$$

bulunur.

(ii) epi f'nin teğet konisi üstteki normal koninin polarıdır, yani

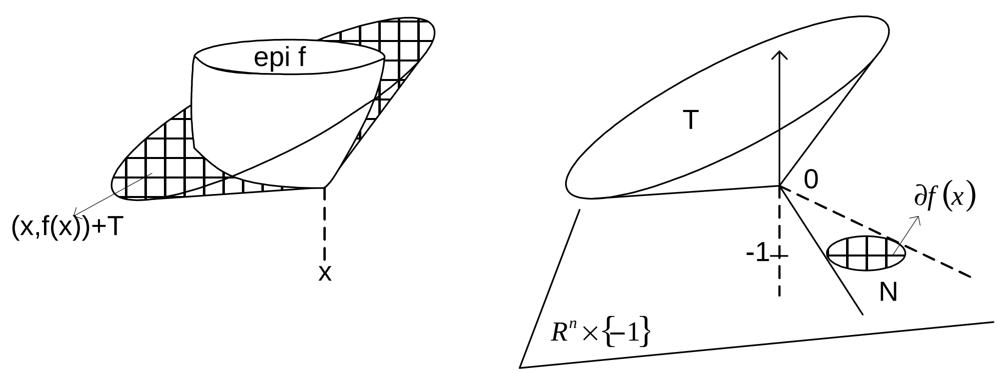
$$\forall s \in \partial f(x) \text{ ve } \lambda \geq 0 \text{ için } \langle \lambda s, d \rangle + (-\lambda) r \leq 0$$

sağlayan $(d, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*'lerin kümesidir.* $\lambda = 0$ *için eşitlik sağlanır.* $\lambda \neq 0$ *için her iki tarafı* $\lambda > 0$ *a bölersek* $\forall s \in \partial f(x)$ *için* $r \geq \langle s, d \rangle$ *;burdan da*

$$r \geq \max\{\langle s, d \rangle : s \in \partial f(x)\} = f'(x, d)$$

bulunur. ■

Şekil 4.2 bu sonucu göstermektedir. Sağ taraftaki çizim *epi* f'nin $(x, f(x))$ deki N normal konisini ve T teğet konisini göstermektedir. N'nin $\mathbb{R}^n \times \{-1\}$ ile kesişimi $\partial f(x) \times \{-1\}$'dir. Sol taraftaki çizimde orijin T konisi $(x, f(x))$'e kaydırılmıştır ve bu kaydırılmış koni *epi* f 'ye teğettir. $T + (x, f(x))$'in sınırı (konveks olmayan) bir konidir ve f'nin grafiğine teğettir. Ayrıca $T + (x, f(x))$, $f'(x, \cdot)$'nun grafiğinin $(x, f(x))$'e kaydırılmış halidir.



Şekil 4.2: Epigrafa çizilen teğet ve normal koniler

x'in dahil olduğu altdüzey kümesi

$$Sf(x) := S_{f(x)}(f) = \{y \in \mathbb{R}^n : f(y) \leq f(x)\} \tag{4.15}$$

incelemek gerekir. Bu küme $\partial f(x)$ ile yakından ilişkilidir.

Yardımcı Teorem 4.2. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu ve $Sf(x)$ altdüzey kümesi için*

$$T_{Sf(x)}(x) \subset \{d : f'(x,d) \leq 0\} \tag{4.16}$$

sağlanır.

Kanıt. *Keyfi olarak $y \in Sf(x)$ ve $t > 0$ alalım ve $d := t(y-x)$ olsun. Bu durumda $d \in \mathbb{R}^+[Sf(x) - x]$ olur ve*

$$0 \geq t[f(y) - f(x)] = \frac{f(x + \frac{d}{t}) - f(x)}{\frac{1}{t}} \geq f'(x,d)$$

olur. Böylece $d \in \{d : f'(x,d) \leq 0\}$ olur ve

$$\mathbb{R}^+[Sf(x) - x] \subset \{d : f'(x,d) \leq 0\} \tag{4.17}$$

olduğu kanıtlanmış olur.(Burada $d = 0$ da dahil edilmiştir; çünkü $0 \in Sf(x) - x$ tir.)
$f'(x,\cdot)$ kapalı sublineer fonksiyon olduğundan, 4.17 ün sağ tarafındaki küme kapalıdır. $T_{Sf(x)}(x)$ de 4.17 ün sol tarafındaki kümenin kapanışı olduğundan iki tarafın kapanışı alınırsa kanıt biter.

$$cl\ (\mathbb{R}^+[Sf(x) - x]) \subset cl\{d : f'(x,d) \leq 0\}$$
$$T_{Sf(x)}(x) \subset \{d : f'(x,d) \leq 0\}$$

■

4.16 ters kapsam sağlanmak zorunda değildir. Örneğin $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ buna ters örnektir.Gerçekten $Sf(0)$ alt düzey kümesi $\{0\}$ tek nokta kümesidir ve $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için $f'(0,d) = 0$ olduğundan $\{d : f'(x,d) \leq 0\} = \mathbb{R}^n$ dır. Bu durumda$\{d : f'(x,d) \leq 0\} = \mathbb{R}^n \nsubseteq \{0\} = T_{Sf(0)}(0)$ olur. Ters yönün sağlanması için ek bir varsayıma ihtiyaç vardır.

Önerme 4.4. *$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve $g(x_0) < 0$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda*

$$cl\ \{z : g(z) < 0\} = \{z : g(z) \leq 0\}, \tag{4.18}$$

$$\{z : g(z) < 0\} = int\ \{z : g(z) \leq 0\}. \tag{4.19}$$

Buradan da

$$bd\ \{z : g(z) \leq 0\} = \{z : g(z) = 0\} \tag{4.20}$$

olur.

Kanıt. *g sürekli ve* $(-\infty, 0]$ *kapalı küme olduğundan* $\{z : g(z) \leq 0\} = g^{-1}((-\infty, 0])$ *ters görüntü kümesi kapalıdır. Ayrıca* $cl\ \{z : g(z) < 0\} \subset cl\ = \{z : g(z) \leq 0\}$ *olduğundan*

$$cl\ \{z : g(z) < 0\} \subset \{z : g(z) \leq 0\}$$

olur.

Diğer taraftan $\bar{z} \in \{z : g(z) \leq 0\}$ *alalım* $g(\bar{z}) \leq 0$ *olur. Hipotezden* $g(x_0) < 0$ *idi her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $z_k := \frac{1}{k}x_0 + (1 - \frac{1}{k})\bar{z}$ *olsun. g nin konveksliğinden*

$$g(z_k) = g(\frac{1}{k}x_0 + (1 - \frac{1}{k})\bar{z}) \leq \frac{1}{k}g(x_0) + (1 - \frac{1}{k})g(\bar{z}) < 0$$

her eşitsizliğin her iki yanından $k \to +\infty$ *giderken limitini alırsak*

$$\lim_{k\to\infty} g(z_k) \leq \lim_{k\to\infty} [\frac{1}{k}g(x_0) + (1 - \frac{1}{k})g(\bar{z})]$$
$$\lim_{k\to\infty} g(z_k) \leq 0 + g(\bar{z}) = g(\bar{z})$$

olur. $z_k \in \{z : g(z) < 0\}$ *ve* $z_k \to \bar{z}$ *olduğundan* $\bar{z} \in cl\ \{z : g(z) < 0\}$ *bulunur ki bu*

$$\{z : g(z) \leq 0\} \subseteq cl\ \{z : g(z) < 0\}$$

demektir. Böylece $cl\ \{z : g(z) < 0\} = \{z : g(z) \leq 0\}$ *olur.*

g sürekli , $(-\infty, 0)$ *açık küme ve* $g^{-1}((-\infty, 0)) = \{z : g(z) < 0\}$ *açık ve konveks bir kümedir.konveks* $\{z : g(z) < 0\}$ *kümesi için int* $(cl\{z : g(z) < 0\}) = int\ \{z : g(z) < 0\}$ *olacağından*

$$int\ (cl\{z : g(z) < 0\}) = int\ \{z : g(z) \leq 0\}$$
$$\{z : g(z) < 0\} = int\ \{z : g(z) \leq 0\}$$

olur. ■

Buradan önermedeki koşulu sağlayan bir x_0 varsa alt düzey kümelerinin kapanış, iç ve sınırını almak için tanımlarına sırasıyla $\leq$, $<$, ve $=$ işaretlerini koymak yeterli olacaktır. Burada g'nin konveksliği gerekli bir koşuldur. Konveksliğin olmadığı durumlarda bu sağlanmayabilir. Ters örnek olarak $g(z) := \min\{0, |z| - 1\}$ e bakmak yeterlidir.

Şimdi alt düzey kümesinin teğetsel elemanlarını karakterize edebiliriz.

Teorem 4.3. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks ve $0 \notin \partial f(x)$ olsun. Bu durumda $Sf(x)$ alt düzey kümesi için*

$$T_{Sf(x)}(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : f'(x,d) \leq 0\} \tag{4.21}$$

$$int\ [T_{Sf(x)}(x)] = \{d \in \mathbb{R}^n : f'(x,d) < 0\} \tag{4.22}$$

Kanıt. *$\partial f(x) = \{s \in \mathbb{R}^n : \forall d \in \mathbb{R}^n$ için $\langle s, d\rangle \leq f'(x,d)\}$ tanımına göre $0 \notin \partial f(x)$ ise $f'(x,d) < 0$ olacak şekilde $d \in \mathbb{R}^n$ vardır. $0 > f'(x,d) = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{f(x+td)-f(x)}{t}$ olduğundan $t > 0$ yeterince küçük ise $f(x+td) < f(x)$ sağlanır; $x + td \in Sf(x)$ ve $d = \frac{1}{t}((x+td) - x) \in \mathbb{R}^+[Sf(x) - x]$ olur. Böylece*

$$\{d : f'(x,d) < 0\} \subset \mathbb{R}^+[Sf(x) - x] \subset T_{Sf(x)}(x) \tag{4.23}$$

olur. $f'(x,d) < 0$ sağlayan $d \in \mathbb{R}^n$ var ve $f'(x,d)$ konveks olduğundan önerme 4.4 den $\{d : f'(x,d) < 0\} \subset \mathbb{R}^+[Sf(x) - x]$ kapsamında her iki tarafın kapanışı alınırsa

$$cl\ \{d : f'(x,d) < 0\} \subset \mathbb{R}^+[Sf(x) - x] \Rightarrow \{d : f'(x,d) \leq 0\} \subset T_{Sf(x)}(x)$$

olur. Yardımcı teorem 4.2 den $T_{Sf(x)}(x) \subset \{d : f'(x,d) \leq 0\}$ bilindiğinden

$$T_{Sf(x)}(x) = \{d : f'(x,d) \leq 0\}$$

kanıtlanır. Önerme 4.4 den iki tarafın içi alındığında

$$\begin{aligned} int\ T_{Sf(x)}(x) &= int\ \{d : f'(x,d) \leq 0\} \\ &\Rightarrow int\ T_{Sf(x)}(x) = \{d : f'(x,d) < 0\} \end{aligned}$$

bulunur. ■

Üstteki sonuç normal konilerle formüle edilebilir.

Teorem 4.4. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks ve $0 \notin \partial f(x)$ olsun. Bu durumda d (yön) vektörünün $Sf(x)$ e x'de normaldir ancak ve ancak $d = ts$ olacak şekilde $\exists t \geq 0$ ve $\exists s \in \partial f(x)$ vardır:*

$$N_{Sf(x)}(x) = \mathbb{R}^+ \partial f(x).$$

Kanıt. $T_{Sf(x)}(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : f'(x,d) \leq 0\} = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle s, d\rangle \leq 0, \forall s \in \partial f(x)\}$ olduğundan $\langle s, d\rangle \leq 0$ yerine ($\forall \lambda \geq 0$ için $\langle \lambda s, d\rangle = \lambda \langle s, d\rangle \leq 0$ yazılabileceğinden

$$\begin{aligned} T_{Sf(x)}(x) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \forall \lambda \geq 0 \text{ için } \langle \lambda s, d\rangle \leq 0 \text{ ve } s \in \partial f(x)\} \\ &= [\mathbb{R}^+ \partial f(x)]^\circ \end{aligned}$$

olur. $\partial f(x)$ boştan farklı konveks ve kompakt bir küme ayrıca $0 \notin co[\partial f(x)] = \partial f(x)$ olduğundan $\overline{cone}(\partial f(x)) = \mathbb{R}^+ co[\partial f(x)] = \mathbb{R}^+ \partial f(x)$ olur.Yani $\mathbb{R}^+ \partial f(x)$ kapalı bir konidir.Şimdi üstteki eşitlikte iki tarafın da polar konisi alınırsa

$$N_{Sf(x)}(x) = cl[\mathbb{R}^+ \partial f(x)] = \mathbb{R}^+ \partial f(x)$$

elde edilir. ■

Uyarı 4.4. $0 \notin \partial f(x)$; *üstteki iki sonuç için gerekli olan bu varsayım bir kaç değişik yolla formüle edilebilir:*

-Tanım 4.2 açısından, $f'(x, d_0) < 0$ olacak şekilde en az bir d_0 vardır.

$$\left[\begin{array}{c} \forall d \in \mathbb{R}^n \textit{ için } \langle s, d\rangle \leq f'(x,d) \textit{ dir ancak ve ancak } s \in \partial f(x)\textit{'dir.} \\ \forall d \in \mathbb{R}^n \textit{ için } 0 = \langle 0, d\rangle \leq f'(x,d) \textit{ olsaydı } 0 \in \partial f(x) \textit{ olurdu.} \\ \textit{Bu sebeple } \exists d_0 \in \mathbb{R}^n \textit{ için } f'(x,d) < 0 \textit{ olmalıdır.} \end{array}\right]$$

-Tanım 4.3'den, $f(x_0) < f(x)$ olacak şekilde $\exists x_0$ vardır.

$$\left[\begin{array}{l} s \in \partial f(x)\textit{'dir ancak ve ancak } \forall y \in \mathbb{R}^n \textit{ için } f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x\rangle \textit{ 'dir.} \\ 0 \notin \partial f(x) \textit{ ise } f(x_0) < f(x) + \langle 0, x_0 - x\rangle = f(x) \\ \textit{olacak şekilde } \exists x_0 \in \mathbb{R}^n \textit{ vardır.} \end{array}\right]$$

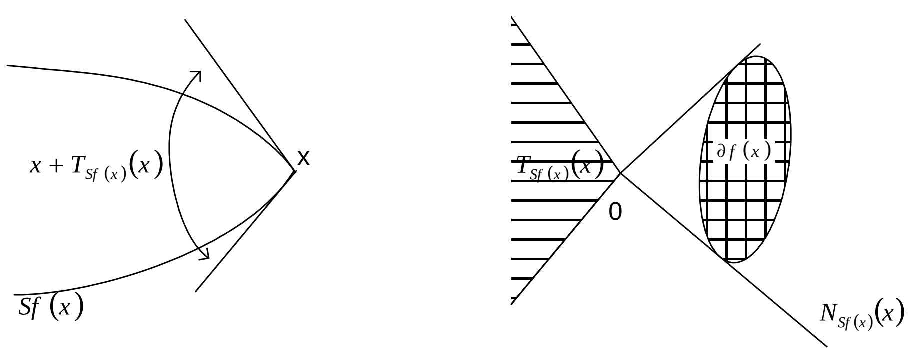
-Üstteki varsayım $f(\cdot) = f(x)$ düzey kümesinin her noktasında geçerlidir ($f(x_0) < f(x)$ ise $y \in \{y : f(y) = f(x)\}$ için $f(x_0) < f(y)$ dir).

Bunun bir sonucu olarak $0 \notin \partial f(x)$ olacak şekilde bir x noktasının varlığı, $Sf(x)$ alt düzey kümelerine her noktalarındaki teğet ve normal konilerinin hesaplanmasını sağlar: alt düzey kümesinin içinde (aşikar durum) olduğu gibi sınırında da (4.20'dan $f(\cdot) = f(x)$ düzey kümesinde de) bu koniler hesaplanır.

Şekil 4.3 bu sonuçları resmetmektedir. Şekil 4.2'in benzeridir, fakat $\mathbb{R}^n$de çizilmiştir. Sol taraf şekil 4.2'in $f(x)$ düzeyindeki yatay kesitini göstermektedir. Gerçekten $0 \notin \partial f(x)$ ise

$$\begin{aligned} T_{epi\ f}(x, f(x)) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) &= \{(d,r) : r \geq f'(x,d)\} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \\ &= \{(d,0) : f'(x,d) \leq 0\} = \{d : f'(x,d) \leq 0\} \times \{0\} \\ &= T_{Sf(x)}(x) \times \{0\} \end{aligned}$$

olduğundan bu kesit $T_{Sf(x)}(x) \times \{0\}$ dir. Bu küme $\mathbb{R}^n$ de düşünülürse $T_{Sf(x)}(x)$ olur. Yani $Sf(x)$'in x'deki teğet konisi olur. Sağ tarafta ise subdiferansiyel çizilmiştir, şekil 4.2'deki düşey bileşenler atılmıştır.



Şekil 4.3: ($0 \notin \partial f(x)$ iken) $Sf(x)$ alt düzey kümesinin teğet ve normal konileri

$0 \notin \partial f(x)$ için $N_{Sf(x)}(x) = \mathbb{R}^+ \partial f(x)$ olduğundan $\partial f(x)$'in tamamı $N_{Sf(x)}(x)$'e dahildir. Ayrıca $N_{Sf(x)}(x)$'in $N_{epi\ f}(x, f(x))$'in bir izdüşümü olduğu görülmektedir:

$$N_{epi\ f}(x, f(x)) = \{\lambda(s, -1) : s \in \partial f(x), \lambda \geq 0\}$$

kümesinin $\mathbb{R}^n \times \{0\}$'a izdüşümü

$$\begin{aligned}\{\lambda s \quad &: \quad s \in \partial f(x), \lambda \geq 0\} \times \{0\} = \mathbb{R}^+\{s : s \in \partial f(x)\} \times \{0\} \\ &= \quad \mathbb{R}^+\partial f(x) \times \{0\} = N_{Sf(x)}(x) \times \{0\}\end{aligned}$$

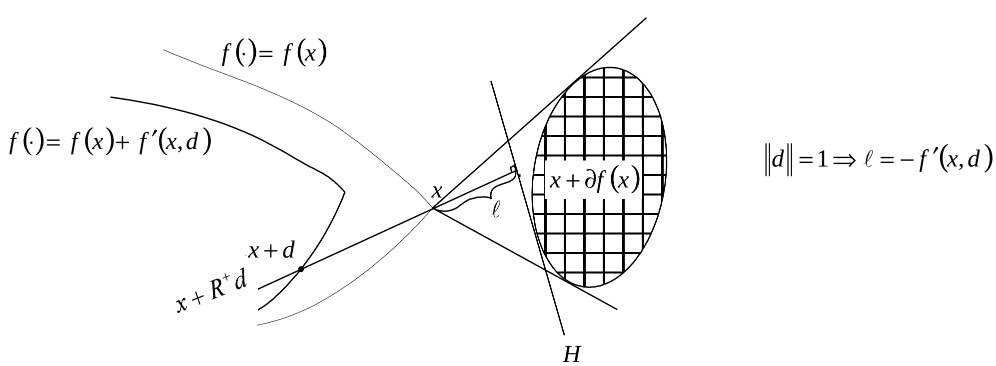
olur. $\mathbb{R}^n$de düşünülürse bu küme $N_{Sf(x)}(x)$dir.

Bütün bunlar subdiferansiyelin gradyantı nasıl genelleştirildiğini gösterir: Eğer $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$ tek noktadan ibaret ise $f(\cdot) = f(x)$ düzey kümesinin $(x, f(x))$'de teğet hiperdüzlemi vardır; $T_{Sf(x)}(x)$ konisi $\nabla f(x)$'in ters yönündeki yarı uzaydır; $N_{Sf(x)}(x)$ konisi $\mathbb{R}^+\nabla f(x)$ ışınıdır. $\partial f(x)$ genişledikçe, $Sf(x)$'de x etrafında daralacaktır.

Bir alt düzey kümesine normal koni çizerek,yani subgradyantın negatif olmayan katlarını düşünerek x etrafında yerel olarak alt düzey kümeleri tanımlayabiliriz. Fakat bu aynı zamanda gradyantların büyüklüğü hakkındaki bilgiyi yok eder. Tabii ki yönlü türevlerin büyüklüklerini de; şekil 4.4 bundan $\mathbb{R}^n$ de bile nasıl kurtulacağımızı göstermektedir. Şekil 4.3'e benzeyen çizimi şekil 3.8 ile karşılaştırırsak destek hiperdüzlemi

$$H := \{s \in \mathbb{R}^n : \langle d, s - x\rangle = f^{'}(x, d)\}$$

d'ye diktir. $\|d\| = 1$ ise H'nin x'e (cebirsel) uzaklığı $-f'(x, d)$ dir. $t \geq 0$ için $t \mapsto f(x + td)$ afin bir fonksiyonsa $x + \mathbb{R}_+ d$ ışınında $\|d\|$ birim d yönünde ilerlersek fonksiyonumuzdaki değişim $f'(x, d)$ kadar olacaktır.



Şekil 4.4: Bir yöndeki azalış miktarı

4.3 Subdiferansiyelin Yerel Özellikleri

Bu bölümde gradyant kavramının genellemesi olarak kabul edilen $\partial f(x)$ in verilen bir noktada bazı özellikleri incelenecektir.

4.3.1 Birinci mertebeden yaklaşım

Bir sonlu konveks fonksiyonun yönlü birinci mertebeden yaklaşımının var olduğu söylendi 4.8; önemli bir sonuç da 4.8 deki bu yakınsaklığın sınırlı bir kümede d ye göre düzgün olduğudur; ε_d, normu 1 olan d vektöründen bağımsız olarak alınabilir.

Yardımcı Teorem 4.3. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için*

$$\|h\| \leq \delta \;\Rightarrow \left| f(x+h) - f(x) - f^{'}(x,h) \right| \leq \varepsilon \|h\| \tag{4.24}$$

olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ vardır.

Kanıt. Kabul edelim ki bu gerektirme sağlanmasın. Bu durumda bir $\varepsilon_0 > 0$ ve her $\delta > 0$ için $\|h_\delta\| \leq \delta$ en az bir $h_\delta \in \mathbb{R}^n$ vardır öyleki

$$\left| f(x+h_\delta) - f(x) - f^{'}(x,h_\delta) \right| > \varepsilon_0 \|h_\delta\|$$

olur.Özel olarak $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\delta = \dfrac{1}{k}$ seçilirse $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|h_k\| := t_k \leq \dfrac{1}{k}$ ve

$$\left| f(x+h_k) - f(x) - f^{'}(x,h_k) \right| > \varepsilon_0 t_k$$

olan bir $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır.(h_k) nın $\dfrac{h_k}{t_k} \to d$ ve $\|d\| = 1$ olacak şekilde $(h_k)_{k\in K\subset\mathbb{N}}$ alt dizisi vardır. f nin x'teki yerel Lipschitz olduğundan yerel Lipschitz sabitlerinden biri L olsun.

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0 t_k < \left| f(x+h_k) - f(x) - f^{'}(x,h_k) \right| \\
\leq\;& |f(x+h_k) - f(x+t_k d)| + \left| f(x+t_k d) - f(x) - f^{'}(x,t_k d) \right| \\
&+ \left| f^{'}(x,t_k d) - f^{'}(x,h_k) \right| \\
\leq\;& L\|h_k - t_k d\| + \left| f(x+t_k d) - f(x) - f^{'}(x,t_k d) \right| + L\|t_k d - h_k\| \\
\leq\;& 2L\|h_k - t_k d\| + \left| f(x+t_k d) - f(x) - f^{'}(x,t_k d) \right|
\end{aligned}$$

Uyarı 4.1 ten f' nün ve f nin Lipschitz katsayısı aynı L olduğundan yukarıdaki 3 .satırda bu kullanıldı. Çıkan eşitsizliğin her tarafı $t_k > 0$ e bölünüp limit alınırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{t_k \downarrow 0} \frac{\varepsilon_0 t_k}{t_k} &< \lim_{t_k \downarrow 0} 2L \left\| \frac{h_k}{t_k} - \frac{t_k d}{t_k} \right\| + \left| \lim_{t_k \downarrow 0} \frac{f(x+t_k d) - f(x)}{t_k} - \lim_{t_k \downarrow 0} \frac{f'(x, t_k d)}{t_k} \right| \\
\varepsilon_0 &\le 2L \|d - d\| + \left| f'(x,d) - f'(x,d) \right| \\
\varepsilon_0 &\le 0
\end{aligned}$$

çelişkisine ulaşılır ki bu varsayımımızın yanlış onermenin doğru olduğunu söyler. ■

Denklem 4.24 in bir diğer yazılışı

$$f(x+h) = f(x) + f'(x,h) + o(\|h\|) \tag{4.25}$$

birinci mertebeden açılımıdır. Bir diğeri de

$$\lim_{t \to 0^+ \, d' \to d} \frac{f(x+td') - f(x)}{t} = f'(x,d)$$

biçimindedir. Gerçekten $\left| f(x+h) - f(x) - f'(x,h) \right| \le \varepsilon \|h\|$ (4.24) ; $\varphi(h) := f(x+h) - f(x) - f'(x,h)$ dersek $\|\varphi(h)\| \le \varepsilon \|h\|$ olur. Yani $f(x+h) - f(x) - f'(x,h) = o(\|h\|)$ Buradan $f(x+h) = f(x) + f'(x,h) + o(\|h\|)$ elde edilir. (Burada $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni \|h\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(h)\| \le \varepsilon \|h\|$ ise $\varphi(h)$ fonksiyonu $o(\|h\|)$ ile gösterilir.) $f'(x,\cdot)$ sublineer olduğundan sürekliliği kullanarak

$$\lim_{t \to 0^+ \, d' \to d} \frac{f(x+td') - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0^+ \, d' \to d} \frac{f(x) + f'(x,td') + o(\|td'\|) - f(x)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0^+ \, d' \to d} \frac{tf'(x,d') + o\left(\|td'\|\right)}{t} = \lim_{t \to 0^+ \, d' \to d} f'(x,d') = f'(x,d)$$ eşitliği yazılır.

Uyarı 4.5. *Yardımcı teorem 4.3 deki konvekslik yönlü türevin varlığında kullanılmıştır. Bunun dışında tek şey f nin ve $f'(x,\cdot)$ in Lipschitz özelliğidir. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bağlı olarak $x \in \mathbb{R}^n$ de $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ türevini tanımlarken, $h \to 0$ için*

$$\frac{f(x+h) - f(x) - D(h)}{h} \to 0 \tag{4.26}$$

özelliğini kullanırız. Klasik analizde D lineer iken, burada $D(\cdot) = f'(x,\cdot)$ sublineerdir. Aslında D nin bağlı olduğu fonksiyonlar sınıfını belirtmeden de

h yle ilgili yakınsaklığın türüne bağlı olarak çeşitli türevler tanımlanabilir.

(i) Gâteaux: Her bir $d \in \mathbb{R}$ sabiti, $\mathbb{R}$ de $t \to 0$ ve $h = td$ için 4.26 geçerli

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+td)-f(x)-D(td)}{\|td\|} = \frac{1}{\|d\|}\lim_{t\to 0}\frac{f(x+td)-f(x)-D(td)}{t} \to 0$$

(ii) Fréchet: $h \to 0$ için 4.26 geçerli

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-D(h)}{\|h\|} \to 0$$

(iii) Yönlü Türev: (i) deki gibi fakat $t > 0$ için

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+td)-f(x)-D(td)}{\|td\|} = \frac{1}{\|d\|}\lim_{t\downarrow 0}\frac{f(x+td)-f(x)-D(td)}{t} \to 0$$

(iv) Dini'nin Yönlü Türevi: $t \downarrow 0$ ve $\mathbb{R}^n$ de $d' \to d$ iken $h = td'$ için

$$\lim_{t_k\downarrow 0\ d'\to d}\frac{f(x+td')-f(x)-D(td')}{\|td'\|} = \frac{1}{\|d\|}\lim_{t\downarrow 0}\frac{f(x+td')-f(x)-D(td')}{t} \to 0$$

Üstteki yardımcı teoremden görüleceği gibi eğer yaklaşım fonksiyonu D nin lineerliği veya sublineerliği belirtilmişse bu dört çeşit yakınsaklık f x te yerel Lipschitz iken denktir.

4.25 yi 4.8 ile karşılaştıralım: $t > 0$ için h yerine td , $f'(x,h)$ yerine ($\partial f(x)$ kümesindeki en az bir s_d için) $t\langle s_d, d\rangle$ vardır. s_d , $\langle s, d\rangle$ yi maksimize eden subgradyantlardan herhangi biridir. Böyle bir s_d ise $\partial f(x)$ in d ile belirlenen yüzündedir (Tanım 3.6). Denk olarak, d, $\partial f(x)$ in s_d deki normal konisinin elemanıdır; s_d, $s_d + d$ nin $\partial f(x)$ üzerine bir izdüşümüdür. Böylelikle yardımcı teorem 4.3 bir başka şekilde şöyle ifade edebiliriz:

Önerme 4.5. *[12] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks olsun. Herhangi bir x için*

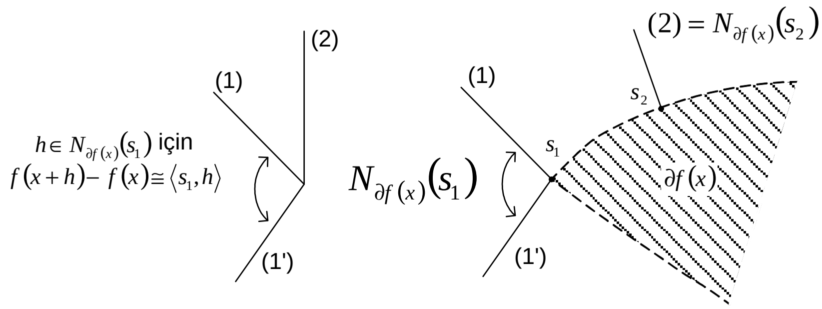
$$s \in F_{\partial f(x)}(h) \Leftrightarrow h \in N_{\partial f(x)}(s) \Leftrightarrow s = P_{\partial f(x)}(s+h)$$

denk koşulları sağladığında

$$f(x+h) = f(x) + \langle s, h\rangle + o(\|h\|)$$

olur.

$h, \partial f(x)$ in sabit bir normal konisinde değişirken, f diferansiyellenebilir gibi gözükür; bu normal koniye karşılık gelen ortaya konmuş yüzdeki (exposed face) herhangi bir subgradyantını bir "yerel gradyant"ı olarak düşünülebilir. Bu yerel gradyant sadece belirtilen konide aktiftir. h başka bir normal koniye geçtiğinde, bir başka yerel gradyant aktif olur (şekil 4.5).



Şekil 4.5: Normal koniler ile diferansiyel hesaplama

$\partial f(x)$ kompakt olduğu için, herhangi boştan farklı $h \in \mathbb{R}^n$, boştan farklı bir yüz ortaya koyar. $h, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ da değişirken ortaya konan yüzler $\partial f(x)$ in sınırını kaplar: Bu, Önerme 3.12 ($\partial f(x)$ boştan farklı kapalı konveks küme olduğundan $bd\ \partial f(x) = \cup\{F_{\partial f(x)}(h) : h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$) ten dolayı söylenebilir. Özel durumlardan biri $\partial f(x)$ in ortaya konan sadece bir yüzü olması yani $\partial f(x)$ in sadece bir elemandan oluşmasıdır. Bu durumda $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} = \langle s, d \rangle$$

olacak şekilde sabit bir $s \in \mathbb{R}^n$ vardır. Bu ise f nin x te yönlü türevlenebilir olduğunun ifadesidir. d ve t yi sırasıyla $-d$ ve $-t$ ile değiştirildiğinde f nin x Gâteaux türevlenebilir olduğu görülür:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \to 0^-} \frac{f(x+\tau d) - f(x)}{\tau} &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x-td) - f(x)}{t} \\ &= -\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+t(-d)) - f(x)}{t} \\ &= -\langle s, -d \rangle \\ &= \langle s, d \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x-td) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x-td) - f(x)}{t} = \langle s, d \rangle$$

$\therefore f$ Gâteaux türevlenebilirdir.

$\partial f(x)$ tek elemanına s dersek yani $\partial f(x)$ =$\{s\}$ ise $\forall h \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} h \ & \in N_{\partial f(x)}(s) = \left\{h^{'} : \left\langle h^{'}, s - s^{'} \right\rangle \geq 0, \forall s^{'} \in \partial f(x)\right\} = \left\{h^{'} : \left\langle h^{'}, 0\right\rangle \geq 0\right\} \\ & = \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

olur. Önerme 4.5 ten $f(x+h) = f(x) + f^{'}(x,h) + o(\|h\|), \forall h \in \mathbb{R}^n$ yazılır. $D(h) = \langle s, h \rangle$ dersek $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x) - D(h)}{\|h\|} = 0$ olur. Yani f x te Frechet türevlenebilirdir. Kısaca f ye x te türevlenebilir diyeceğiz. Yukarıdan görüleceği gibi bu şüphe götürmeyen bir terminoloji olacaktır.

Bulunanlar özetlenirse

Sonuç 4.4. *f konveks fonksiyonu x te (Gâteaux) türevlenebilirse, x teki tek subgradyantı onun gradyantı olan $\nabla f(x)$ tir. Tersine eğer $\partial f(x)$ in sadece bir elemanı varsa yani $\partial f(x) = \{s\}$ ise f, x te Fréchet türevlenebilirdir ve $\nabla f(x) = s$ dir.*

Kanıt. f Gâteaux türevlenebilirse $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$$

var olmalıdır ve ayrıca

$$G(d) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$$

sürekli ve lineer bir fonksiyon olmalıdır. Bu yüzden

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} = \langle s, d \rangle$$

olacak şekilde $s \in \mathbb{R}^n$ vardır. $\forall d \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} = \langle s, d \rangle$$

olacağından

$$\partial f(x) = \{s^{'} : \left\langle s^{'}, d \right\rangle \leq f^{'}(x,d), \forall d \in \mathbb{R}^n\} = \{s\}$$

olur. Yani subdiferansiyel tek elemanlıdır bu da $\nabla f(x)$ tir. Tersi yukarıda açıklanmıştır. ■

Önerme3.4'ün bir sonucu; eğer $\{d_1, d_2, \cdots d_k\}$ vektör kümesi tüm uzayı üretiyorsa ve eğer $i = 1, 2, \cdots, k$ için $f^{'}(x, d_i) := -f^{'}(x, -d_i)$ ise f, x te türevlenebilirdir. Özel olarak ($\{d_i\} = \{e_i\}$ yani $\mathbb{R}^n$ nin standart tabanı alınırsa) yalnızca $i = 1, 2, \cdots, n$ için $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f^{'}(x, e_i) = -f^{'}(x, -e_i)$ kısmi türevlerinin varlığı konveks f nin $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de türevlenebilirliğini garanti eder.

$\partial f(x)$ in bir noktadan oluşmadığı genel durum için, ortaya konan yüzleri tanımlamak için başka bir yol vardır: $f^{'}(x, \cdot)$ konveks olduğundan kendisine ait subdiferansiyelleri vardır. Bu subdiferansiyeller tam olarak $\partial f(x)$ in ortaya koymuş olduğu yüzlerdir.

Önerme 4.6. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks olsun. Her $x, d \in \mathbb{R}^n$ için $F_{\partial f(x)}(d) = \partial[f^{'}(x, \cdot)](d)$ dir.*

Kanıt. $s \in F_{\partial f(x)}(d)$ olsun. Tanımından $\langle s, d\rangle = f^{'}(x, d)$ olur. Ayrıca $s \in \partial f(x)$ olacağından $\forall d^{'} \in \mathbb{R}^n$ için $\left\langle s, d^{'}\right\rangle \leq f^{'}(x, d^{'})$ olur. Bu eşitsizlik $f^{'}(x, d)$ -$\langle s, d\rangle = 0$ ile taraf tarafa toplanırsa $\forall d^{'} \in \mathbb{R}^n$ için

$$f^{'}(x, d^{'}) \geq f^{'}(x, d) + \left\langle s, d^{'}\right\rangle - \langle s, d\rangle$$

$$\Rightarrow f^{'}(x, d^{'}) \geq f^{'}(x, d) + \left\langle s, d^{'} - d\right\rangle \tag{4.27}$$

olur.Bu ise $s \in \partial[f^{'}(x, \cdot)](d)$ yi verir.
Tersine $s \in \partial[f^{'}(x, \cdot)](d)$ ise $\forall d^{'} \in \mathbb{R}^n$ için

$$f^{'}(x, d^{'}) \geq f^{'}(x, d) + \left\langle s, d^{'} - d\right\rangle$$

Ayrıca $d^{''} = d^{'} - d$ dersek $f^{'}(x, \cdot)$ in sublineer olduğu için alt toplamsallıktan $f^{'}(x, d^{'}) = f^{'}(x, (d^{'} - d) + d) \leq f^{'}(x, d^{'} - d) + f^{'}(x, d) = f^{'}(x, d^{''}) + f^{'}(x, d)$ olur. Bu iki eşitsizliği yan yana getirirsek

$$f^{'}(x, d^{''}) + f^{'}(x, d) \geq f^{'}(x, d^{'}) \geq f^{'}(x, d) + \left\langle s, d^{''}\right\rangle$$

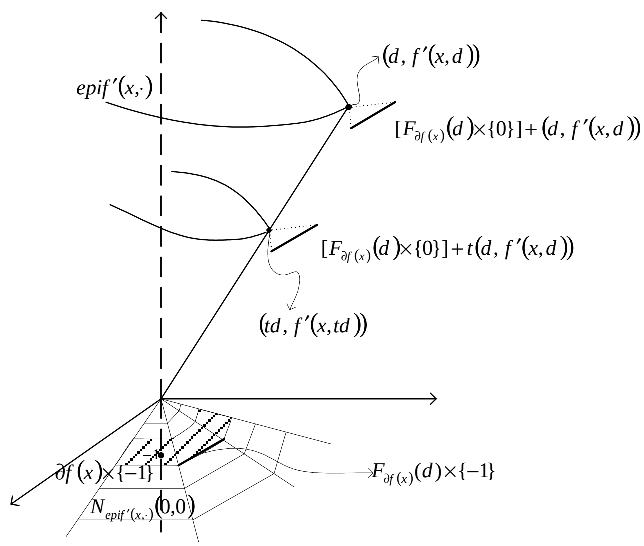
$$\Rightarrow \forall d^{''} \in \mathbb{R}^n \text{ için } f^{'}(x, d^{''}) \geq \left\langle s, d^{''}\right\rangle$$

bulunur. Bu ise $s \in \partial f(x)$ demektir. 4.27 te $d^{'} = 0$ alırsak

$$\begin{aligned} f^{'}(x,0) &\geq f^{'}(x,d) + \langle s, -d \rangle \\ 0 &\geq f^{'}(x,d) - \langle s, d \rangle \\ \langle s, d \rangle &\geq f^{'}(x,d) \end{aligned}$$

Böylece özel olarak d için $f^{'}(x,d) = \langle s, d \rangle$ vardır. Yani $s \in F_{\partial f(x)}(d)$ olur. ■

Bu sonuç şekil 4.6da resmedilmiştir. $f^{'}(x,\cdot)$ in "td" noktasındaki subdiferansiyeli $t > 0$ a bağlı değildir; fakat t 0'a ulaştığında subdiferansiyel $\partial f(x)$ in tamamı olur.



Şekil 4.6: Subdiferansiyelin yüzleri

Tanım 4.4. *$\partial f(x)$ in birden fazla elemanı olduğu -yani f nin türevlenemediği- x noktasına f nin köşe noktası (kinki) denir.*

f konveks fonksiyonu hemen hemen her yerde türevlenebilir olduğundan köşe noktalarının kümesinin ölçümü 0'dır. Pratikte çoğu örnekte, bu küme $\mathbb{R}^n$ de sonlu sayıda cebirsel yüzeyin birleşimidir.

4.3.2 Minimallik durumları

Subdiferansiyelin tanımından aşağıdaki temel sonuç verilebilir.

Teorem 4.5. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu için aşağıdaki üç özellik denktir*

(i) x *f nin $\mathbb{R}^n$ üzerinde minimal noktasıdır, yani*

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \text{ için } f(y) \geq f(x)$$

p(ii) $0 \in \partial f(x)$

(iii) $\forall d \in \mathbb{R}^n$ *için* $f'(x, d) \geq 0$

Kanıt.

$[(i) \Leftrightarrow (ii)]$

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \text{ için } f(y) \geq f(x) \Leftrightarrow f(y) \geq f(x) + \langle 0, y - x \rangle \Leftrightarrow 0 \in \partial f(x)$$

$[(ii) \Leftrightarrow (iii)]$

$$0 \in \partial f(x) \Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{R}^n \quad \text{için} \quad f'(x, d) \geq \langle 0, d \rangle = 0$$

■

$0 \in \partial f(x)$ ise x "durağan" (stationary) veya kritik olarak adlandırılabilir. $(i) \Leftrightarrow (iii)$ denkliği; f nin x de minimal olması için gerek ve yeter koşul $f'(x, \cdot)$ teğetsel yaklaşımının 0 da minimal ($f'(x, 0) = \inf f'(x, d)$ ve $f'(x, d) \geq 0$ olduğundan $f'(x, \cdot)$ 0 da minimaldir.) olmasıdır, demektir. Burada iki noktayı vurgulamak gerekir.

• x f de yerel minimum (yani x in bir komşuluğundaki her y için $f(x) \leq f(y)$) ise $f'(x, \cdot)$ 0 da minimaldir. Bu ise f nin x te minimal olmasını verir. Yani konvekslik yerel minimumun otomatik olarak global minumum olmasını verir.

• Düzgün durumda $f(\cdot) - f(x)$ in yerel teğetsel yaklaşımı $\langle \nabla f(x), \cdot \rangle$ lineerdir ve 0 a eşittir. Fakat fonksiyon düzgün değilse $f'(x, \cdot)$ teğetsel yaklaşımının 0 a eşit olması gerekmez. Bunun yerine $f(\cdot) - f(x)$ i minorize eden bir $\ell = 0$ lineer fonksiyonu vardır. Bu lineer fonksiyonun teğet olması gerekmez.

Uyarı 4.6. *$0 \in \partial f(x)$ özelliği düzgün durumda daha önce bilinen "$\nabla f(x) = 0$" şartının genelleştirilmesidir. Hemen hemen her yerde x in gradyantı olsa bile bir konveks fonksiyonun minumum noktasında gradyantı olmayabilir.Ancak varsa 0 dır.*

4.3.3 Ortalama değer teoremleri

Farklı iki x, y noktası verilsin.Bu kesimde iki sorunun yanıtını arayacağız.Bu sorulardan birincisi, "Subdiferansiyellenebilen bir f fonksiyonu için $[x, y]$ doğru parçası üzerinde f 'nin $f(y) - f(x)$ farkı subdiferansiyel kullanılarak hesaplanabilir mi?". İkincisi ise, "$f(y) - f(x)$ farkı bir integralle ifade edilebilir mi?"dir.

Bu problemleri $[x, y]$ doğru parçası üzerinde f 'yi bir boyutlu bir konveks fonksiyona indirgeyerek çözeceğiz. Bunun için

$$\forall t \in [0,1] \text{ için } \varphi(t) := f\left(ty + (1-t)x\right) \tag{4.28}$$

olarak tanımlayalım

$$f(y) - f(x) = \varphi(1) - \varphi(0)$$

olur. Önce φ nin t deki subdiferansiyelinin f nin $ty+(1-t)x$ deki subdiferansiyeli cinsinden nasıl hesaplanacağını görelim.

$x, y \in \mathbb{R}^n$ de seçildikten sonra sabit noktalar olmak üzere $\forall t \in [0,1]$ için

$$x_t := ty + (1-t)x$$

gösterimi kullanılacaktır.

Yardımcı Teorem 4.4. *φ ın subdiferansiyeli*

$$\partial\varphi(t) := \{\langle s, y - x\rangle : s \in \partial f(x_t)\}$$

veya daha sembolik olarak

$$\partial\varphi(t) := \langle \partial f(x_t), y - x\rangle$$

dir.

Kanıt. Sol ve sağ türevleri alırsak

$$\begin{aligned} D_+\varphi(t) &= \lim_{\tau\to 0^+} \frac{f(x_t+\tau(y-x))-f(x_t)}{\tau} = f'(x_t, y-x), \\ D_-\varphi(t) &= \lim_{\tau\to 0^-} \frac{f(x_t+\tau(y-x))-f(x_t)}{\tau} = -f'(x_t, -(y-x)); \end{aligned}$$

diğer taraftan

$$\begin{aligned} f'(x_t, y-x) &= \max_{s\in\partial f(x_t)} \langle s, y-x\rangle, \\ -f'(x_t, -(y-x)) &= \min_{s\in\partial f(x_t)} \langle s, y-x\rangle, \end{aligned}$$

olduğundan

$$\partial\varphi(t) := [D_-\varphi(t), D_+\varphi(t)] = \{\langle s, y-x\rangle : s\in\partial f(x_t)\}$$

elde edilir. ■

Uyarı 4.7. *Sayılabilir bir küme dışında φ ,$\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilirdir. Bu f 'nin (x, y) aralığında sayılabilir nokta dışında türevlenebilir olduğu anlamına gelmez. Örneğin $f(\xi, \eta) := |\xi|$, $x := (0,0), y := (0,1)$ için f , (x, y) 'nin hiçbir noktasında türevlenemez. Önermenin garanti ettiği şudur; $\partial f(x_t)$ $y-x$ yönünde hemen hemen her t için 0-genişliğe sahiptir: $f'(x_t, y-x) + f'(x_t, x-y) = 0$*

Teorem 4.6. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Sabit iki farklı nokta $x, y\in\mathbb{R}^n$ de seçilsin. Bu durumda*

$$f(y) - f(x) = \langle s, y-x\rangle \tag{4.29}$$

diğer bir deyişle

$$f(y) - f(x) \in \bigcup_{t\in(0,1)} \{\langle\partial f(x_t), y-x\rangle\}$$

olacak şekilde $t\in(0,1)$ ve $s\in\partial f(x_t)$ vardır.

Kanıt. *4.28 de tanımlanan φ fonksiyonunu kullanarak*

$$\psi(t) := \varphi(t) - \varphi(0) - t\,[\varphi(1) - \varphi(0)]$$

yardımcı fonksiyonunu oluşturalım. $-\varphi(0) - t\,[\varphi(1) - \varphi(0)]$ *afin bir fonksiyondur yani konvekstir.* $\psi(t)$ *iki konveks fonksiyonun toplamı olduğundan konvekstir*
Yönlü türevleri hesaplarsak

$$\partial\psi(t) = \partial\varphi(t) - [\varphi(1) - \varphi(0)]$$

elde edilir. ψ *konveks olduğu için* $[0,1]$ *aralığında süreklidir ve* $\psi(0) = \psi(1) = 0$ *dır. Bu yüzden* $\exists t \in (0,1)$ *de minimaldir. Teorem 4.5 e göre bu* t *değerinde* $0 \in \partial\psi(t)$ *dir.* $\partial\psi(t) = \partial\varphi(t) - [\varphi(1) - \varphi(0)]$ *a eşit olduğundan*

$$0 \in \partial\varphi(t) - [\varphi(1) - \varphi(0)]$$

olur. Yardımcı teorem 4.4 den

$$0 \in \{\langle s, y - x\rangle : s \in \partial f(x_t)\} - [\varphi(1) - \varphi(0)]$$

$$\exists s \in \partial f(x_t) \quad \text{için} \quad 0 = \langle s, y - x\rangle - [\varphi(1) - \varphi(0)]$$

olur. Bu ise $\exists s \in \partial f(x_t)$ *için*

$$\langle s, y - x\rangle = \varphi(1) - \varphi(0) = f(y) - f(x)$$

olduğunu verir. ■

Ortalama değer teoremi integral formunda da verilebilir.

Teorem 4.7. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *konveks fonksiyon olsun.* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \langle \partial f(x_t), y - x\rangle \, dt \tag{4.30}$$

Kanıt. $f(y) - f(x) = \varphi(1) - \varphi(0)$ *dır.* φ, $(0,1)$ *aralığında hemen hemen her yerde türevlenebilir olduğundan (Teorem 2.9)*

$$\int_0^1 \partial\varphi(t)dt = \varphi(1) - \varphi(0)$$

dır. $\varphi(t)$ *yerine de* $\langle \partial f(x_t), y - x\rangle$ *yazılırsa*

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \langle \partial f(x_t), y - x\rangle \, dt$$

bulunur. ■

Denklem 4.30 ün anlamı şudur: Eğer $\{s_t : t \in (0,1)\}$ f nin $[x,y]$ doğru parçasındaki subgradyantlarının herhangi bir seçimi ise (bir diğer deyişle $\forall t \in [0,1]$ için $s_t \in \partial f(x_t)$ ise) $\int\limits_0^1 \langle s_t, y-x\rangle \, dt$ bu seçimden bağımsızdır ve $f(y) - f(x)$ değerine eşittir.

Ortalama Değer Teoremleri türevlenemeyen fonksiyonlara (genel) diferansiyel analizde uygulandığı gibi uygulanabilir.

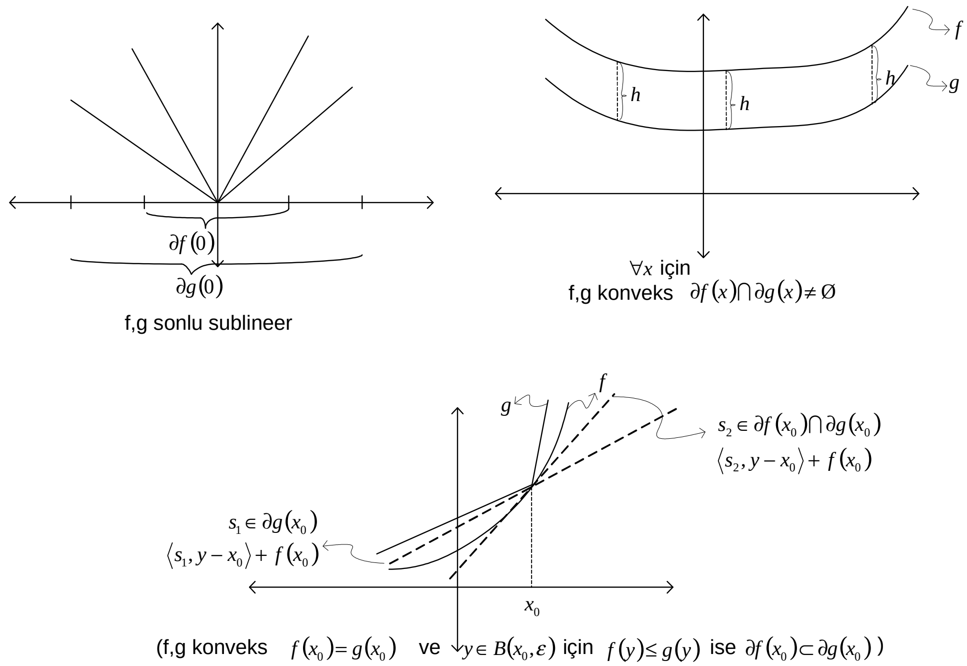
Örnek 4.1. *f, g iki konveks fonksiyon ve $f(x) = g(x)$ ve x in bir komşuluğundaki her y için $f(y) \leq g(y)$ ise $\partial f(x) \subset \partial g(x)$ olur. Gerçekten: $s \in \partial f(x)$ olsun subdiferansiyelin tanımından $\forall y \in \mathbb{R}^n$ için $f(y) \geq f(x) + \langle s, y-x\rangle$ olur. Hipotezden $f(x) = g(x)$ ve x in bir komşuluğundaki her y için $f(y) \leq g(y)$ olduğundan x in bir komşuluğundaki her y için $g(y) \geq f(y) \geq g(x) + \langle s, y-x\rangle$ olur.Subdiferansiyel konusunun sonundaki açıklamadan $\forall y \in \mathbb{R}^n$ için $g(y) \geq g(x) + \langle s, y-x\rangle$ olurki bu $\partial f(x) \subset \partial g(x)$ demektir.*

Tersine her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\partial f(x) \subset \partial g(x)$ olduğunda yada daha genel olarak her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\partial f(x) \cap \partial g(x) \neq \emptyset$ olduğunda f ile g karşılaştırılabilir mi? Bu sorunun yanıtı Ortalama Değer teoremlerinde yatıyor $\partial f(x) \cap \partial g(x) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $f - g$ sabit bir fonksiyondur. Gerçekten bir $t \in (0,1)$ için $s_t \in \partial f(x) \cap \partial g(x)$ seçersek

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \langle s_t, y-x\rangle \, dt = g(y) - g(x)$$

olur. Böylece $f(y) - g(y) = f(x) - g(x)$ elde edilir. Yani $f - g$ fonksiyonu sabit fonksiyondur.

Özel olarak f ve g nin sonlu sublineer iseler. Bu durumda bir sublineer fonksiyon 0 daki subdiferansiyelinin destek fonksiyonu olacağından " $f \leq g$ olması için gerek ve yeterli koşul $\partial f(0) \subset \partial g(0)$ dir."(şekil 4.7)



Şekil 4.7: f ve g sonlu sublineer fonksiyonlar iken $f \leq g$ olması için gerek ve yeterli koşul $\partial f(0) \subset \partial g(0)$ dir

4.4 Örnekler

Bu kesimde iyi bilinen bazı fonksiyonların subdiferansiyellerini bulacağız.

Örnek 4.2. *(Destek Fonksiyonları)*
C boştan farklı konveks kompakt küme ve σ_C bu kümenin destek fonksiyonu olsun. σ_C nin orijindeki 1.mertebeden diferansiyel elemanları için sublineer bir fonksiyonun 0 daki subdiferansiyeli ve yönlü türev tanımlarını kullanırsak Uyarı 4.3 den

$$\partial \sigma_C(0) = \{s : \langle s, d \rangle \leq \sigma(d) \quad \forall d \in C\} = C$$

ve

$$(\sigma_C)'(0, \cdot) = \sigma_{\partial[\sigma_C(0)]}$$

yada

$$"\partial \sigma_C(0) = C" \text{ ve } (\sigma_C)'(0, \cdot) = \sigma_{\partial \sigma_C(0)} = \sigma_C$$

olduğu görülür. Önerme 4.2den $\partial \sigma_C(0) = \partial f(x) = C$ vardır. Bu nedenle herhangi konveks kompakt C kümesi,sonlu konveks bir f fonksiyonun x teki *subdiferansiyeli olarak düşünülebilir.*

Diğer taraftan $x \neq 0$ *ise* $C = \partial f(x)$ *için Önerme 4.6 ten* $F_C(d) = \partial\left[f\,'(x,\cdot)\right](d)$ *vardır.* $f\,'(x,\cdot)$ *yerine* $\sigma_{\partial f(x)}$ *yazarsak* $F_C(d) = \partial\left[\sigma_{\partial f(x)}\right](d) = \partial\sigma_C(d)$ *olur. Böylelikle*

$$\partial\sigma_C(x) = F_C(x)$$

olur. $(\sigma_C)^{'}(x,\cdot) = \sigma_{\partial[\sigma_C(x)]}$ *ve* $\partial\sigma_C(x) = F_C(x)$ *yada* $\partial\sigma_C(x) = F_C(x)$ *olur.Buradan*

$$(\sigma_C)^{'}(x,\cdot) = \sigma_{F_C(x)}$$

olur.

Böylece $(\sigma_C)^{'}(x,d)$ ifadesi

$$\sigma_{F_C(x)}(d) = \max_{s\in F_C(x)} \langle d,s\rangle \text{ ve } F_C(d) = \{s \in C : \ \langle s,x\rangle = \sigma_C(x)\}$$

olacağından aşağıdaki optimizasyon probleminin optimal değeridir. (s değişken, x ve d sabit, amaç fonksiyonu doğrusal, C yi tanımlayanların dışında ek bir doğrusal kısıt vardır):

$$\begin{aligned} \max\langle d,s\rangle, s &\in C, \\ \langle s,x\rangle &= \sigma_C(x) \end{aligned}$$

Örnek 4.3. *Bir önceki örneğin bir özel durumu olarak, bir* $\|\cdot\|$ *normunu alalım.*

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \text{ ve } B^* = \{s : \langle s,x\rangle \leq 1, \quad \forall s \in B\}$$

olmak üzere $\|x\| = \gamma_B(x) = \sigma_{B^*}(x)$ *olduğunu biliyoruz. Bir önceki örnekten*

$$\partial\|\cdot\|(0) = \partial\sigma_{B^*}(0) = B^* = \left\{s \in \mathbb{R}^n : \max_{\|d\|\leq 1}\langle s,d\rangle \leq 1\right\}$$

dir. Genel olarak bir $x \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$\partial\|\cdot\|(x) = \partial\sigma_{B^*}(x) = F_{B^*}(x) = \{s \in B^* : \langle s,x\rangle = \sigma_{B^*}(x) = \|x\|\} \quad (4.31)$$

olur.Ayrıca $\partial\|\cdot\|(x) = \left\{s \in B^* : \left\langle s, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle = \max_{u\in B^*}\left\langle u, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle = 1\right\}$ *dolayısıyla* *bir* $s \in \partial \|\cdot\|(x)$ *için* $\|s\|^* = \max_{\|d\|=1} \langle s, d\rangle = 1$ *olduğundan* $\partial \|\cdot\|(x)$ *i oluşturan elemanların dual normları 1 dir ve ayrıca bu elemanlar* B^* *ın* x *tarafından belirlenen yüzünü oluştururlar.*

Örnek 4.4. *(Minkowski Fonksiyoneli)*

C kapalı konveks bir küme ve orijin bu kümenin bir iç noktası olsun. Bu durumda γ_C *konveks sonlu bir fonksiyondur. (Teorem 3.2). C nin*

$$C^\circ := \{x : \forall s \in C \text{ için, } \langle s, x\rangle \leq 1\}$$

polar kümesi kullanılarak

$$\partial\gamma_C(0) = \partial\sigma_{C^\circ}(0) = C^\circ \text{ ve } (\gamma_C)'(0,\cdot) = (\sigma_{C^\circ})'(0,\cdot) = \sigma_{C^\circ} = \gamma_C$$

yada

$$\partial\gamma_C(0) = C^\circ, \quad (\gamma_C)'(0,\cdot) = \gamma_C$$

olduğunu söyleyebiliriz.Ayrıca $x \neq 0$ *için Önerme 4.6 uygulanırsa*

$$\partial\gamma_C(x) = \partial\sigma_{C^\circ}(x) = F_{C^\circ}(x) \text{ ve } (\gamma_C)'(x,\cdot) = (\sigma_{C^\circ})'(x,\cdot) = \sigma_{F_{C^\circ}(x)}$$

olur.

Elliptik kümelerin Minkowski fonksiyonellerine ve destek fonksiyonlarına özel olarak bakmak gerekir.

Simetrik, yarı pozitif tanımlı Q operatörü verilsin. $\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto f(x) := \sqrt{\langle Qx, x\rangle}$ fonksiyonu $\{x : f(x) \leq 1\}$ alt düzey kümesinin Minkowski fonksiyonelidir. $x \notin$ çekQ için

$$\nabla\sqrt{\langle Qx, x\rangle} = 2Qx\frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle^{-\frac{1}{2}} = \frac{Qx}{f(x)}$$

olduğundan $x \notin$ çekQ için

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\} = \left\{\frac{Qx}{f(x)}\right\}$$

$x \in$ çekQ için s$\in \partial f(x)$ ancak ve ancak her $y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle s, y - x\rangle \leq \sqrt{\langle Qy, y\rangle} - \underbrace{\sqrt{\langle Qx, x\rangle}}_{0} = \sqrt{\langle Qy, y\rangle}$$

(Diğer taraftan $\langle Q(y-x), y-x\rangle = \langle Qy, y\rangle + \langle Qx, x\rangle + 2\langle Qx, y\rangle$,
$(x \in \text{çek}Q) \Rightarrow \langle Q(y-x), y-x\rangle = \langle Qy, y\rangle$)

$$\begin{aligned} \langle s, y-x\rangle &\leq \sqrt{\langle Q(y-x), y-x\rangle} = \sqrt{\left\langle Q^{\frac{1}{2}}(y-x), Q^{\frac{1}{2}}(y-x)\right\rangle} \\ &= \left\| Q^{\frac{1}{2}}(y-x)\right\| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle s, y-x\rangle \leq \left\| Q^{\frac{1}{2}}(y-x)\right\|$$

İki tarafı da $\|y-x\|$ e bölersek

$$\left\langle s, \frac{y-x}{\|y-x\|}\right\rangle \leq \left\| Q^{\frac{1}{2}} \frac{y-x}{\|y-x\|}\right\|$$

$\|d\| = 1$ için

$$\langle s, d\rangle \leq \left\| Q^{\frac{1}{2}} d\right\|$$

$b \in B(0,1)$ için

$$\left\langle Q^{\frac{1}{2}} b, d\right\rangle = \left\langle Q^{\frac{1}{2}} d, b\right\rangle \leq \left\| Q^{\frac{1}{2}} d\right\| \|b\| \leq \left\| Q^{\frac{1}{2}} d\right\|$$

olduğundan $\partial f(x) = Q^{\frac{1}{2}} B(0,1)$ dir.

Örnek 4.5. *(Uzaklık Fonksiyonları)*

C kapalı ve konveks bir küme olsun. $d_C(x) := \min\{\|y-x\| : y \in C\}$ uzaklık fonksiyonu sonlu ve konvekstir. $d_C(x)$, x için minimum değerini x in C ye izdüşümünde alır yani $P_C(x)$ de alır.

$$\partial d_C(x) = \left\{ \begin{array}{ll} N_C(x) \cap B(0,1), & x \in C \text{ ise} \\ \left\{ \dfrac{x - P_C(x)}{\|x - P_C(x)\|} \right\}, & x \notin C \text{ ise} \end{array} \right\}$$

Şimdi bunu kanıtlayalım. İlk olarak $x \notin C$ olsun. $d_C(x) > 0$ olur.

$$\nabla d_C(x) = \nabla \sqrt{d_C^2(x)} = \frac{\nabla d_C^2(x)}{2 d_C(x)}$$

olduğu analizden açıktır. $\nabla d_C^2(x) = 2[x - P_C(x)]$ olduğu gösterilirse $x \notin C$ kısmı kanıtlanmış olacaktır. $A := d_C^2(x+h) - d_C^2(x)$ olsun.

$$d_C^2(x) = (\min\{\|y-x\| : y \in C\})^2 \leq \|x - P_C(x+h)\|^2$$

olduğundan

$$\begin{aligned} A &= \|x - P_C(x+h)\|^2 - \|x - P_C(x)\|^2 \\ &= \langle h + x - P_C(x+h), h + x - P_C(x+h)\rangle - \|x - P_C(x)\|^2 \\ &= \|h\|^2 + 2\langle h, x - P_C(x+h)\rangle + \|x - P_C(x)\|^2 - \|x - P_C(x)\|^2 \\ &= \|h\|^2 + 2\langle h, x - P_C(x+h)\rangle \\ &= \|h\|^2 + 2\langle h, x - P_C(x) + P_C(x) - P_C(x+h)\rangle \\ &= \|h\|^2 + 2\langle h, x - P_C(x)\rangle + 2\langle h, P_C(x) - P_C(x+h)\rangle \end{aligned}$$

($|\langle h, P_C(x) - P_C(x+h)\rangle| \leq \|h\| \|P_C(x) - P_C(x+h)\|$
$\leq \|h\| \|x - (x+h)\| = \|h\| \|h\| = \|h\|^2 \Rightarrow -\|h\|^2 \leq \langle h, P_C(x) - P_C(x+h)\rangle \leq$
$\|h\|^2$*)*

$$\begin{aligned} A &\geq \|h\|^2 + 2\langle h, x - P_C(x)\rangle - 2\|h\|^2 \\ &\geq 2\langle h, x - P_C(x)\rangle - \|h\|^2 \end{aligned}$$

olur. x *ve* $x+h$ *nin yerleri değiştirilirse*

$$\begin{aligned} A &= \|x + h - P_C(x+h)\|^2 - \|x - P_C(x)\|^2 \\ &\leq \|x + h - P_C(x)\|^2 - \|x - P_C(x)\|^2 \\ &= \|h\|^2 + 2\langle h, x - P_C(x)\rangle + \|x - P_C(x)\|^2 - \|x - P_C(x)\|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A \leq \|h\|^2 + 2\langle h, x - P_C(x)\rangle$$

olur. Bu iki eşitsizlik beraber alınırsa

$$2\langle h, x - P_C(x)\rangle - \|h\|^2 \leq A \leq \|h\|^2 + 2\langle h, x - P_C(x)\rangle$$

$$\Longrightarrow -\|h\|^2 \leq A - 2\langle h, x - P_C(x)\rangle \leq \|h\|^2$$

$$\Longrightarrow |A - 2\langle h, x - P_C(x)\rangle| \leq \|h\|^2$$

$\|h\| < \varepsilon$ *için* $|A - 2\langle h, x - P_C(x)\rangle| \leq \|h\|^2 < \varepsilon \|h\|$ *olduğundan*

$$A - 2\langle h, x - P_C(x)\rangle = o(\|h\|)$$

yada

$$A = 2\langle h, x - P_C(x)\rangle + o(\|h\|)$$

olur. $A = d_C^2(x+h) - d_C^2(x)$ *olduğundan*

$$d_C^2(x+h) = d_C^2(x) + \langle 2\left[x - P_C(x)\right], h\rangle + o(\|h\|)$$

.elde edilir.Böylece

$$\nabla d_C^2(x) = 2\left[x - P_C(x)\right]$$

olduğu kanıtlanmış olur.

Şimdi de ikinci duruma bakalım $x \in C$ *ve* $s \in \partial d_C(x)$ *olsun, yani* $\forall y \in \mathbb{R}^n$ *için* $d_C(x) = 0$ *olduğundan*

$$d_C(y) \geq d_C(x) + \langle s, y - x\rangle \Rightarrow d_C(y) \geq \langle s, y - x\rangle$$

olsun, $\forall y \in C$ *için*

$$\langle s, y - x\rangle \leq d_C(y) = 0$$

olur ve $s \in N_C(x)$ *tir. Ayrıca* $y = x + s$ *alırsak*

$$d_C(x+s) \geq \langle s, x + s - x\rangle = \langle s, s\rangle = \|s\|^2$$

olur. $x \in C$ *olduğundan* $d_C(x+s) \leq \|x + s - x\| = \|s\|$ *olur. Böylelikle* $\|s\|^2 \leq d_C(x+s) \leq \|s\| \Rightarrow \|s\|^2 \leq \|s\|$ *olur. Bu ise* $s \in B(0,1)$ *olması demektir ki buradan* $s \in N_C(x) \cap B(0,1)$ *olur. Böylece*

$$\partial d_C(x) \subseteq N_C(x) \cap B(0,1)$$

dir.

Tersine $s \in N_C(x) \cap B(0,1)$ *ise* $\forall y \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$\langle s, y - x\rangle = \langle s, y - P_C(y) + P_C(y) - x\rangle = \langle s, y - P_C(y)\rangle + \langle s, P_C(y) - x\rangle$$

dir. $s \in N_C(x)$ *olduğundan* $\langle s, P_C(y) - x\rangle \leq 0$ *olur.* $\|s\| \leq 1$ *olduğundan*

$$\langle s, y - P_C(y)\rangle \leq \|s\| \|y - P_C(y)\| \leq \|y - P_C(y)\| = d_C(y)$$

olur ki buradan

$$d_C(y) \geq \langle s, y - P_C(y)\rangle \geq \langle s, y - x\rangle$$

elde edilir,bu ise $s \in \partial d_C(x)$ olması demektir. Böylece

$$\partial d_C(x) \supseteq N_C(x) \cap B(0,1)$$

olur. Sonuç olarak

$$\partial d_C(x) = N_C(x) \cap B(0,1)$$

elde edilmiş olur.

$$\partial d_C(x) = \left\{ \begin{array}{ll} N_C(x) \cap B(0,1), & x \in C \ ise \\ \left\{ \dfrac{x - P_C(x)}{\|x - P_C(x)\|} \right\}, & x \notin C \ ise \end{array} \right\}$$

dir.

Ek olarak $x \in intC$ için $\exists \delta > 0 \ni d_C\left(B(0,1)\right) = 0$ olacağından $B(x,\delta)$ da $\nabla d_C(x) = 0$ olacaktır. C nin sınırında ($x \in \partial C$ için) $N_C(x) \neq 0$ olacağından $N_C(x)$ en az bir ışını kapsayacak dolayısıyla $\partial d_C(x) = N_C(x) \cap B(0,1)$ birden fazla elemanı kapsayacağından x bir köşe noktası olacaktır. Böylece d_C nin köşe noktaları C nin sınırıdır.

$K := N_C(x)$ kapalı konveks konisi için $K^\circ = T_C(x)$ dir. C.3.3.2 den $\sigma_{K \cap B(0,1)} = d_{K^\circ}$ ve $d_{C'}(x,\cdot) = \sigma_{\partial d_C(x)}$ olduğundan $\forall x \in C$ için

$$d_{C'}(x,\cdot) = d_{T_C(x)}$$

olur.

Örnek 4.6. *(Parçalı Afin Fonksiyonlar)*

$j = 1,\cdots,m$ için $f_j(x) := r_j + \langle s_j, x\rangle$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ye afin fonksiyonlar olsunlar. $f(x) := \max\{f_j(x) : j = 1,\cdots,m\}$ fonksiyonunu düşünelim.

$j = 1,\cdots,m$ için $e_j := f(x) - r_j - \langle s_j, x\rangle = f(x) - f_j(x) \geq 0$ olarak tanımlarsak

$$\begin{aligned} f(y) &= \max\{f_j(x) + \langle s_j, y-x\rangle : j = 1,\cdots,m\} \\ &= \max\{f(x) - [f(x) - f_j(x)] + \langle s_j, y-x\rangle : j = 1,\cdots,m\} \\ &= f(x) + \max\{-e_j + \langle s_j, y-x\rangle : j = 1,\cdots,m\} \end{aligned}$$

elde edilir.

x etrafındaki uzayında $f(x+td)$ düşünüldüğünde yeterince küçük $t > 0$ için

$e_j > 0$ yapan j leri hesaba katmaya gerek yoktur.

$$J(x) := \{j : e_j = 0\} = \{j : f_j(x) = f(x)\}$$

kümesi alınırsa $t > 0$ yeterince küçük iken

$$f_j(x + td) = f_j(x) + t\{\langle s_j, d\rangle : j \in J(x)\}$$

ve

$$f(x + td) = f(x) + t\max\{\langle s_j, d\rangle : j \in J(x)\}$$

dir. Bundan dolayı da

$$f_j'(x, d) = \langle s_j, d\rangle$$

ve

$$f'(x, d) = \max\{\langle s_j, d\rangle : j \in J(x)\}$$

olur. $\forall j \in J(x)$ için $\langle s_j, d\rangle$, $\partial f_j(x) = \{s_j\}$ nin destek fonksiyonudur. Teorem 3.7 (ii) den

$$\sup_{j\in J} f_j'(x, d) = \max_{j\in J}\langle s_j, d\rangle = \sigma_{\overline{co}\{\cup\partial f_j(x):j\in J(x)\}}$$

$\partial f_j(x) = s_j \Rightarrow \underset{j\in J}{\cup}\partial f_j(x) = \{s_j : j \in J(x)\}$ kümesi sonlu sayıda noktadan oluştuğu için kapalıdır. Dolayısıyla

$$\overline{co}\{\cup\partial f_j(x) : j \in J(x)\} = cocl\{s_j : j \in J(x)\} = co\{s_j : j \in J(x)\}$$

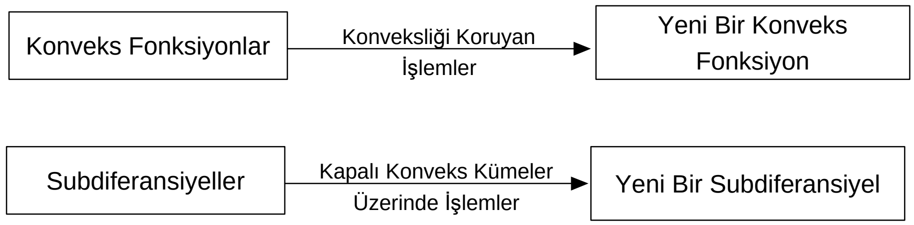
Böylelikle

$$f'(x, d) = \sigma_{\overline{co}\{s_j:j\in J(x)\}}$$

olur. $f'(x, d)$, $\partial f(x)$ in destek fonksiyonu olduğundan

$$\partial f(x) = \{s_j : j \in J(x)\} \tag{4.32}$$

bulunur.



Şekil 4.8: Subdiferansiyel hesaplar

4.5 Subdiferansiyelle İlgili Hesap Kuralları

Konveks fonksiyonların subdiferansiyelleriyle ilgili hesaplar adi diferansiyel analizde olduğu gibi önemlidir. f, f_j konveks fonksiyonların oluşturulduğunda ise problem ∂f yi ∂f_j lerin cinsinden hesaplamaktır (Bakınız şekil.4.8)

4.5.1 Fonksiyonların pozitif kombinasyonları

Teorem 4.8. *f_1, f_2 $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye iki konveks fonksiyon ve $t_1, t_2 > 0$ olsun. Bu durumda $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\partial\left(t_1 f_1 + t_2 f_2\right) = t_1 \partial f_1\left(x\right) + t_2 \partial f_2\left(x\right) \tag{4.33}$$

olur.

Kanıt. $\partial\left(f_1\right), \partial\left(f_2\right)$ kompakt konveks küme olduklarından $t_1, t_2 > 0$ için $t_1 \partial\left(f_1\right) + t_2 \partial\left(f_2\right)$ kompakt konveks küme olur. Bu küme kompakt olduğundan kapanışı kendisine eşittir. Teorem 3.7 (i) yi uygularsak

$$cl\left(t_1 \partial\left(f_1\right) + t_2 \partial\left(f_2\right)\right) = t_1 \partial f_1\left(x\right) + t_2 \partial f_2\left(x\right)$$

in destek fonksiyonu

$$t_1 f_1'(x, \cdot) + t_2 f_2'(x, \cdot) \tag{4.34}$$

olur.

Diğer taraftan $\partial\left(t_1 f_1 + t_2 f_2\right)$ in destek fonksiyonu $\left(t_1 f_1 + t_2 f_2\right)'\left(x, \cdot\right)$ dir.

$$\left(t_1 f_1 + t_2 f_2\right)'\left(x, \cdot\right) = t_1 f_1'(x, \cdot) + t_2 f_2'(x, \cdot)$$

olduğundan $\partial\left(t_1 f_1+t_2 f_2\right)$ ve $t_1 \partial f_1(x)+t_2 \partial f_2(x)$ kapalı kümelerinin destek fonksiyonları aynı olduğundan kendileri de aynı olmalıdır. $\blacksquare$

Uyarı 4.8. *t_1, t_2 nin 4.33 de pozitif alınması yeni oluşan fonksiyonun konveksliğini garanti eder. Asıl önemli sebep ise pozitif alınmadığında ise ortaya çıkabilecek sorunlardır: $f_1(x)=f_2(x)=\|x\|, t_1=-t_2=1$ alalım. $t_1 f_1+t_2 f_2=f_1-f_2=0$ olur. $t_1 \partial f_1(0)+t_2 \partial f_2(0)=B(0,2)$ iken asıl subdiferansiyel $\partial\left(t_1 f_1+t_2 f_2\right)(0)=\{0\}$ dır. Bu da çok büyük bir hata olacaktır.*

Bu kurala örnek vermek gerekirse; $f_1: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ ye $f_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ye iki konveks fonksiyon olsunlar. $f: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2)=f_1(x_1)+f_2(x_2)$$

olarak tanımlansın. $\widetilde{f_1}: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ ye fonksiyonu

$$\widetilde{f_1}(x_1, x_2)=f_1(x_1)$$

f_1 in $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ ya genişlemesi olsun. $\partial\, \widetilde{f_1}(x_1, x_2)=\partial f_1(x_1) \times\{0\}$ dır. Çünkü $d=(d_1, d_2)$ ve $d_1 \in \mathbb{R}^p, d_2 \in \mathbb{R}^q$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}_1'\left((x_1, x_2), d\right) & =\lim _{\|t\| \rightarrow 0^{+}} \frac{\widetilde{f_1}(x_1+t_1 d_1, x_2+t_2 d_2)-\widetilde{f_1}(x_1, x_2)}{\|t\|} \\
& =\lim _{t_1 \rightarrow 0^{+}} \frac{f_1(x_1+t d_1)-f_1(x_1)}{t_1} \\
& =f_1'(x_1, d_1)
\end{aligned}$$

dir.

$\partial \widetilde{f_1}(x_1, x_2)=\left\{s \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q:\langle s, d\rangle \leq \widetilde{f}_1'\left((x_1, x_2), d\right), \forall d \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q\right\}$

$=\left\{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q:\langle(s_1, s_2),(d_1, d_2)\rangle \leq f_1'(x_1, d_1), \forall d=(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q\right\}$

$=\left\{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q:\langle s_1, d_1\rangle+\langle s_2, d_2\rangle \leq f_1'(x_1, d_1), \forall d=(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q\right\}$

Her d için bu eşitsizliğin geçerli olması için $s_2=0$ olmalıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\partial \widetilde{f_1}(x_1, x_2) & =\left\{(s_1, 0):\langle s_1, d_1\rangle \leq f_1'(x_1, d_1), d_1 \in \mathbb{R}^p\right\} \\
& =\partial f_1(x_1) \times\{0\}_{\mathbb{R}_q}
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $\widetilde{f_2}(x_1, x_2)=f_2(x_2)$ olarak tanımlarsak $\widetilde{f_2}, f_2$ nin $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ ya genişlemesi olur. Ayrıca $\partial \widetilde{f_2}(x_1, x_2)=\{0\}_{\mathbb{R}_p} \times \partial f_2(x_2)$ olacaktır. Böylece

$f(x_1,x_2) = \widetilde{f}_1(x_1,x_2) + \widetilde{f}_2(x_1,x_2)$ olduğu için $\partial f(x_1,x_2)$ yukarıdaki kuraldan

$$\begin{aligned} \partial f(x_1,x_2) &= \partial \widetilde{f}_1(x_1,x_2) + \partial \widetilde{f}_2(x_1,x_2) \\ &= \partial f_1(x_1) \times \{0\}_{\mathbb{R}_q} + \{0\}_{\mathbb{R}_p} \times \partial f_2(x_2) \\ &= \partial f_1(x_1) + \partial f_2(x_2) \end{aligned}$$

olur.

$$\partial f(x_1,x_2) = \partial f_1(x_1) + \partial f_2(x_2) \tag{4.35}$$

Uyarı 4.9. *$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu verildiğinde,bir alt düzey kümesi f'nin epigrafına eşit olan $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir konveks fonksiyonu*

$$g(x,r) := f(x) - r$$

olarak tanımlayabiliriz.Gerçekten g'nin $0-$ alt düzey kümesi epi f olur. Ayrıca $\forall\,(d,\rho) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} g'(x,f(x);d,\rho) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{g\left(x+td, f(x)+t\rho\right) - g\left(x, f(x)\right)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+td) - f(x) - t\rho - [f(x) - f(x)]}{t} \\ &= f'(x,d) - \rho \end{aligned}$$

olduğundan g'nin subdiferansiyeli $f_1(x) = f(x)$ ve $f_2(r) = -r$ denirse bunlar konveks ve $g(x,r) = f_1(x) + f_2(r)$ olduğundan.4.35 kullanılırsa $\forall(x,r)$ için

$$\begin{aligned} \partial g(x,r) &= \partial f_1(x) + \partial f_2(r) \\ &= \partial f(x) \times \{-1\} \end{aligned}$$

olur. Özel olarak $r = f(x)$ alınırsa $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\partial g(x,f(x)) = \partial f(x) \times \{-1\} \text{ ve } 0 \notin \partial g(x,f(x))$$

olur. Teorem 4.3 uygulanırsa

$$\begin{aligned} T_{S_0(g)}(x,f(x)) &= \{(d,\rho) : g'(x,f(x);d,\rho) \le 0\} \\ T_{epif}(x,f(x)) &= \{(d,\rho) : f'(x,d) - \rho \le 0\} \\ T_{epif}(x,f(x)) &= \{(d,\rho) : f'(x,d) \le \rho\} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} int\left[T_{S_{0(g)}}(x,f(x))\right] &= \{(d,\rho) : g'(x,f(x);d,\rho) < 0\} \\ int\left[T_{epif}(x,f(x))\right] &= \{(d,\rho) : f'(x,d) < \rho\} \end{aligned}$$

olur. $0 \notin \partial g(x)$ *olduğundan Teorem 4.4 uygulanırsa*

$$\begin{aligned} N_{S_0 g}(x,f(x)) &= \mathbb{R}^+ \partial g(x) \\ N_{epif}(x,f(x)) &= \mathbb{R}^+\left[\partial f(x) \times \{-1\}\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle önerme 4.3 deki ifadeler bir diğer şekliyle elde edilmiş oldu.

4.5.2 Bir afin fonksiyonla sağdan bileşke

Teorem 4.9. $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *bir afin fonksiyon olsun. (*A_0 *doğrusal ve* $b \in \mathbb{R}^m$ *için* $Ax = A_0 x + b$*) ve* g $\mathbb{R}^m$ *de sonlu konveks fonksiyon olsun. Bu durumda* $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$\partial\left(g \circ A\right)(x) = A_0^* \partial g(Ax) \tag{4.36}$$

olur.

Kanıt. $x, d \in \mathbb{R}^n$ için

$$(g \circ A)'(x,d) = \lim_{t \to 0^+} \frac{(g \circ A)(x+td) - (g \circ A)(x)}{t}$$

dir. $A(x+td) = A_0(x+td) + b = A_0 x + b + tA_0 d = Ax + tA_0 d$ olduğundan yukarıdaki limit aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{g\left(Ax + tA_0 d\right) - g(A(x)}{t}$$

Bu limit ise $g'(Ax, A_0 d)$ yönlü türevidir. Yani

$$(g \circ A)'(x,d) = g'(Ax, A_0 d)$$

olur. $g'(Ax, A_0 d) = \sigma_{\partial g(Ax)}(A_0 d)$ olduğu görülür.
$\partial\left(g \circ A\right)(x) \neq \emptyset$ ve $\left(A_0^*\right)^* = A_0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sigma_{\partial(g\circ A)(x)}(A_0 d) &= \sup_{s \in \partial(g \circ A)(x)} \langle s, A_0 d \rangle \\ &= \sup_{s \in \partial(g \circ A)(x)} \langle\langle A_0^* s, d \rangle\rangle \\ &= \sup_{t \in A_0^* \partial(g \circ A)(x)} \langle\langle t, d \rangle\rangle = \sigma_{A_0^* \partial(g\circ A)(x)}(d) \end{aligned}$$

olur. $\sigma_{\partial(g\circ A)(x)}(d) = (g\circ A)'(x,d) = g'(Ax, A_0 d) = \sigma_{A_0^*\partial(g\circ A)(x)}(d)$ eşitliğinden $\partial(g\circ A) = A_0^*\partial g(Ax)$ bulunur. ■

Bu sonuç yardımcı teorem 4.4 de görülebilir: $x, y \in \mathbb{R}^n$ de sabit iken $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, At := x + t(y-x)$ fonksiyonunu düşünelim. Bu durumda $A_0 t = t(y-x)$ ve $s \in \mathbb{R}^n$ için $\langle A_0 t, s\rangle = \langle t(y-x), s\rangle = t\langle (y-x), s\rangle = tA_0^*(s)$ olacağından $A_0^*(s) = \langle y-x, s\rangle$ olur. Teorem 4.9 deki (n,m,x,g) yerine (1,n,t,f) alındığında

$$\partial(f\circ A)(t) = A_0^*\partial f(At) = \langle y-x, \partial f(At)\rangle = \langle \partial f(At), y-x\rangle$$

olur ve $x_t := x + t(y-x) = At$ için bu aşağıdakine eşittir:

$$\partial(f\circ A)(t) = \langle \partial f(x_t), y-x\rangle$$

Verilebilecek bir diğer örnek: $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu alınsın ve $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$

$$Ax_1 = (x_1, x_2)$$

afin bir fonksiyon olsun. $Ax_1 = (0, x_2) + (x_1, 0)$ olarak yazıldığında A nın doğrusal kısmı $A_0 x_1 = (x_1, 0)$ olur. $s \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ için

$$\langle A_0 x_1, s\rangle = \langle (x_1, 0), (s_1, s_2)\rangle = \langle x_1, s_1\rangle + \langle 0, s_2\rangle = \langle x_1, s_1\rangle$$

olur. Bu ise $\langle x_1, A_0^* s\rangle$ eşit olduğundan

$$A_0^* s = A_0^*(s_1, s_2) = s_1$$

bulunur. $(f\circ A)(x_1) = f(x_1, x_2) =: f_{x_2}^{(1)}(x_1)$ fonksiyonunu düşünürsek Teorem 4.9 uygulandığında

$$\partial(f\circ A)(x_1) = \partial f_{x_2}^{(1)}(x_1) = A_0^*\partial f(Ax_1) = A_0^*\partial f(x_1, x_2)$$

olur. Böylece

$$\partial f_{x_2}^{(1)}(x_1) = \{s_1 \in \mathbb{R}^p : \exists s_2 \in \mathbb{R}^q \ni (s_1, s_2) \in \partial f(x_1, x_2)\}$$

olduğu görülür. Bu ise $\partial f(x_1, x_2)$ nin $\mathbb{R}^p$ ye izdüşümüdür. Aynı şekilde $f_{x_1}^{(2)}(x_2)$ tanımlanırsa bu $\partial f(x_1, x_2)$ nin $\mathbb{R}^q$ ya izdüşümüdür. Böylece

$$\partial f(x_1, x_2) \subset f_{x_2}^{(1)}(x_1) \times f_{x_1}^{(2)}(x_2) \tag{4.37}$$

olduğu görülür.

Uyarı 4.10. *4.35 te ve bu izdüşümlerden biri tek noktadan oluştuğu durumda (yani $f_{x_2}^{(1)}$ veya $f_{x_1}^{(2)}$ diferansiyellenebildiğinde) 4.37 eşitlik olarak sağlanır. Bir ters örnek vermek gerekirse $p = q = 1$ alsın ve*

$$f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| + \frac{1}{2}(x_1 + 1)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + 1)^2$$

olsun.

$$\begin{aligned}
f_{x_2=0}^{(1)}(x_1) &= |x_1 - 0| + \frac{1}{2}(x_1 + 1)^2 + \frac{1}{2}(0 + 1)^2 \\
&= |x_1| + \frac{1}{2}(x_1 + 1)^2 + \frac{1}{2} \\
f_{x_2=0}^{(1)}(0) &= \partial(|\cdot|)(0) + \partial\left[\frac{1}{2}(x_1 + 1)^2\right](0) + \partial\left(\frac{1}{2}\right)(0) \\
&= [-1, 1] + \{1\} + \{0\} \\
&= [0, 2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{x_1=0}^{(2)}(x_2) &= |0 - x_2| + \frac{1}{2}(0 + 1)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + 1)^2 \\
&= |-x_2| + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x_2 + 1)^2 \\
f_{x_1=0}^{(2)}(0) &= \partial(|-(\cdot)|)(0) + \partial\left(\frac{1}{2}\right)(0) + \partial\left[\frac{1}{2}(x_2 + 1)^2\right](0) \\
&= [-1, 1] + \{1\} + \{0\} \\
&= [0, 2]
\end{aligned}$$

Böylece $\partial f_{x_2=0}^{(1)}(0) \times \partial f_{x_1=0}^{(2)}(0) = [0, 2] \times [0, 2]$ olduğu görülür. Diğer taraftan

$\partial f(0,0)$ ı bulmak için öncelikle $f'((0,0),(d_1,d_2))$ hesap edilecektir.

$$\begin{aligned}
f'((0,0),(d_1,d_2)) &= \lim_{t\to 0^+}\frac{f[(0,0)+t(d_1,d_2)]-f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+}\frac{t|d_1-d_2|+\frac{1}{2}(td_1+1)^2+\frac{1}{2}(td_2+1)^2-1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+}\frac{t|d_1-d_2|+\frac{t^2}{2}d_1^2+td_1+\frac{t^2}{2}d_2^2+td_2}{t} \\
&= |d_1-d_2|+d_1+d_2
\end{aligned}$$

olur.

$$\partial f(0,0)=\{(s_1,s_2):\langle(s_1,s_2),(d_1,d_2)\rangle\le|d_1-d_2|+d_1+d_2\}$$

yazılır

$d_1\ge d_2$ ise

$$\begin{aligned}
\langle(s_1,s_2),(d_1,d_2)\rangle &\le |d_1-d_2|+d_1+d_2 \\
s_1d_1+s_2d_2 &\le 2d_1 \\
(2-s_1)\,d_1 &\le s_2d_2
\end{aligned}$$

$\forall d_1,d_2\in\mathbb{R}$ ve $d_1\ge d_2$ için $(2-s_1)\,d_1\le s_2d_2$ olması gerektiğinden $d_1\ge d_2$ eşitsizliğinin iki taraftan aynı pozitif katı alınırsa ancak eşitsizlik bozulmaz. Bu yüzden $2-s_1=s_2\ge 0$ olur. Böylelikle $d_1\ge d_2$ için $s_2\ge 0$, $s_1\le 2$ ve $s_1+s_2=2$ olmalıdır.

$d_1<d_2$ ise

$$\begin{aligned}
\langle(s_1,s_2),(d_1,d_2)\rangle &\le |d_1-d_2|+d_1+d_2 \\
s_1d_1+s_2d_2 &\le 2d_2
\end{aligned}$$

Yukarıdaki adımlar aynı şekilde uygulandığında $s_2\le 2$, $s_1\ge 0$ ve $s_1+s_2=2$ olması gerektiği bulunur.

Subdiferansiyel kümesi oluşturulurken $\forall d_1,d_2\in\mathbb{R}$ için verilen eşitsizliklerin sağlanması gerekir. $d_1\ge d_2$ ve $d_1<d_2$ durumlarının ortak çözümleri alınmalıdır. Yani

$$0\le s_1\le 2, 0\le s_2\le 2 \quad \text{ve } s_1+s_2=2$$

Böylelikle $\partial f(0,0) = \{(t, 2-t) : t \in [0,2]\}$ *olarak elde edilir.*

$f(x_1, x_2)$ *fonksiyonu için*

$$(0,0) \notin \partial f(0,0) = \{(t, 2-t) : t \in [0,2]\}$$

iken

$$(0,0) \in \partial f^{(1)}_{x_2=0}(0) \times \partial f^{(2)}_{x_1=0}(0) = [0,2] \times [0,2]$$

dir. Böylece

$$\partial f(x_1, x_2) \neq f^{(1)}_{x_2}(x_1) \times f^{(2)}_{x_1}(x_2)$$

olduğu gösterilmiş olur.

4.5.3 Çok değişkenli ve artan bir konveks fonksiyonla soldan bileşke

$f_1, f_2, \cdots, f_m$ $\mathbb{R}^m$ den $\mathbb{R}$ ye konveks fonksiyonlar olsun. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ yi

$$F(x) := (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))$$

olarak tanımlayalım ve $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ye konveks ve bileşenlerine bağlı olarak artansa; yani $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m), z = (z_1, z_2, \cdots, z_m) \in \mathbb{R}^m$ için $i = 1, 2, \cdots, m$ için $\mathrm{y}_i \geq z_i$ ise $g(y) \geq g(z)$ dir. $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı $(g \circ F)(x)$ fonksiyonunun konveks olduğu bir kaç adımda görülebilir.

$x, x' \in dom \quad g \circ F$ için $x_\alpha := \alpha x + (1-\alpha)x'$ olarak tanımlansın. $\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ için $f(x_\alpha) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x')$ olacağından g nin artanlığından

$$\begin{aligned}
(g \circ F)(x_\alpha) &= g(f_1(x_\alpha), f_2(x_\alpha), \cdots, f_m(x_\alpha)) \\
&\leq g(\alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_1(x'), \cdots, \alpha f_m(x) + (1-\alpha) f_m(x')) \\
&= g(\alpha F(x) + (1-\alpha) F(x'))
\end{aligned}$$

olur ve g nin konveksliği kullanılarak

$$(g \circ F)(x_\alpha) \leq \alpha g(F(x)) + (1-\alpha) g(F(x')) = \alpha (g \circ F)(x) + (1-\alpha)(g \circ F)(x)$$

elde edilir.

Belirtilmesi gereken bir diğer nokta da g artan oluğundan herhangi bir noktadaki subgradyantının bileşenlerinin hiçbiri negatif değildir. Gerçekten $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ $\mathbb{R}^m$ de kanonik bir taban ve $(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m) \in \partial g(y)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} g(y) &\geq g(y - e_j) \geq g(y) + \langle (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m), (-e_j) \rangle \\ &= g(y) - \rho_j \end{aligned}$$

olur. Bu yüzden $\forall j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ için $\rho_j \geq 0$ dır.

Teorem 4.10. $f_1, f_2, \cdots, f_m$ $\mathbb{R}^m$ *den* $\mathbb{R}$ *ye konveks fonksiyonlar olsun.* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *yi*

$$F(x) := (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))$$

olarak tanımlayalım ve $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *ye konveks ve bileşenlerine bağlı olarak artan olsun. Bu durumda.* $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$\partial (g \circ F)(x) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \rho_i s_i : (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m) \in \partial g F(x), i = 1, 2, \cdots, m \text{ için } s_i \in \partial f_i(x) \right\} \tag{4.38}$$

dır.

Kanıt. Sağdaki kümeye S densin. S nin kompakt ve konveks bir küme olduğu ve bu kümenin destek foksiyonunun $(g \circ F)'(x, \cdot)$ olduğu gösterilirse kanıt biter.

Öncelikle S, ∂g ve ∂f_i ler kapalı ve sınırlı olduğundan kapalı ve sınırlıdır yani kompakttır.

S sınırlıdır: $a \in S$ ise $a = \sum_{i=1}^{m} \rho_i s_i$ olacak şekilde $(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m) \in \partial g(F(x))$ ve $(s_1, s_2, \cdots, s_m) \in \partial F(x)$ vardır.

$$\begin{aligned} \|a\| &= \left\| \sum_{i=1}^{m} \rho_i s_i \right\| \\ &= \langle (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m), (s_1, s_2, \cdots, s_m) \rangle \\ &\leq \|(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m)\| \, \|(s_1, s_2, \cdots, s_m)\| \end{aligned}$$

$\partial g(F(x))$ ve $\partial F(x)$ kompakt olduklarından sınırlıdır. Dolayısıyla da $\|a\| < \infty$ olur. S sınırlıdır.

S kapalıdır:$(a_n) \subset S$ ve $(a_n) \to a$ olsun. $j = 1, .., m$ için $a_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i(j) s_i(j)$ olacak şekilde $(\rho_1(j), \cdots, \rho_m(j)) \in \partial g(F(x))$ ve $(s_1(j), \cdots, s_m(j)) \in \partial F(x)$ vardır.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \rho_i(n) s_i(n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle (\rho_1(n), ...\rho_m(n)), (s_1(n), ...s_m(n)) \rangle \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $\partial g(F(x))$ ve $\partial F(x)$ kompakt olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} (\rho_1(n), ...\rho_m(n)) \text{ ile } \lim_{n\to\infty} (s_1(n), ...s_m(n))$$

limitleri vardır ve

$$\begin{aligned} (\rho_1, \cdots, \rho_m) &= \lim_{n\to\infty} (\rho_1(n), ...\rho_m(n)) \in \partial g(F(x)) \\ (s_1, ...s_m) &= \lim_{n\to\infty} (s_1(n), ...s_m(n)) \in \partial F(x) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to\infty} a_n = \left\langle \lim_{n\to\infty} (\rho_1(n), ...\rho_m(n)), \lim_{n\to\infty} (s_1(n), ...s_m(n)) \right\rangle \\ &= \langle (\rho_1, \cdots, \rho_m), (s_1, ...s_m) \rangle = \sum_{i=1}^{m} \rho_i s_i \end{aligned}$$

olur. Yani $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in S$ olur

S kümesinin konveks olduğunu göstermek için $\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i s_i, \sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i' s_i' \in S$ nin konveks bileşimlerine bakılacaktır . $\alpha \in (0, 1)$ olsun.

$$s = \alpha \sum_{i=1}^{m} \rho_i s_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{m} \rho_i' s_i' = \sum_{i=1}^{m} [\alpha \rho_i s_i + (1-\alpha) \rho_i' s_i']$$

$\rho_i^\alpha := \alpha \rho_i + (1-\alpha) \rho_i'$ olarak tanımlanırsa konveks bileşim

$$s = \sum_{i=1}^{m} \left[\rho_i^\alpha \left(\frac{\alpha \rho_i}{\rho_i^\alpha} s_i + \frac{(1-\alpha) \rho_i'}{\rho_i} s_i' \right) \right]$$

şeklinde yazılabilir. $(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m), (\rho_1', \rho_2', \cdots, \rho_m') \in \partial g F(x)$ konveks olduğundan

$$(\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha, \cdots, \rho_0^\alpha) \in \partial g F(x)$$

olur. $\dfrac{\alpha\rho_i}{\rho_i^\alpha}+\dfrac{(1-\alpha)\,\rho_i'}{\rho_i}=1$ ve $s_i, s_i' \in \partial f_i(x)$ konveks olduğundan

$$\frac{\alpha\rho_i}{\rho_i^\alpha}s_i+\frac{(1-\alpha)\,\rho_i'}{\rho_i}s_i' \in \partial f_i(x)$$

olur. Böylelikle $s \in S$ elde edildiğinden S konvekstir.

Şimdi $\partial\,(g\circ F)$ ile S nin destek fonksiyonlarının aynı olduğu kanıtlanacaktır. $\partial\,(g\circ F)$ nin destek fonksiyonu

$$(g\circ F)'\,(x,d)=\lim_{t\to 0^+}\frac{(g\circ F)\,(x+td)-(g\circ F)\,(x)}{t}$$

dir. $t>0$ için $F(x+td)=F(x)+tF'(x,d)+o(t)$ şeklinde açılabilir. $[F(x+td)-(F(x)+tF'(x,d))]=o(t)$ ve g yerel Lipschitz olduğundan

$$\|g\,(F(x+td))-(g\,(F(x)+tF'(x,d)))\|=o(t)$$

olur. Böylelikle

$$(g\circ F)\,(x+td)=(g\,(F(x)+tF'(x,d)))+o(t)$$

olur ve

$$(g\,(F(x)+tF'(x,d)))=g(F(x)+tg'(F(x),F'(x,d)))+o(t)$$

şeklinde açılırsa

$$(g\circ F)\,(x+td)=g(F(x)+tg'(F(x),F'(x,d)))+o(t)$$

olarak elde edilir. Şimdi bu $(g\circ F)'\,(x,d)$ de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}(g\circ F)'\,(x,d) &= \lim_{t\to 0^+}\frac{g(F(x)+tg'(F(x),F'(x,d)))+o(t)-g\,(F(x))}{t}\\ &= g'(F(x),F'(x,d))\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu fonksiyon S nin de desteğidir. Şöyle ki $s=\sum\limits_{i=1}^{m}\rho_i s_i$ alınsın.

$$\begin{aligned}\langle s,d\rangle &= \left\langle\sum_{i=1}^{m}\rho_i s_i,d\right\rangle \le \sum_{i=1}^{m}\rho_i\,\langle s_i,d\rangle \le \sum_{i=1}^{m}\rho_i f_i'(x,d)\\ &= \langle(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_m)\,,(f_1'(x,d),f_2'(x,d),\cdots,f_m'(x,d))\rangle\\ &= \langle(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_m)\,,F'(x,d)\rangle\end{aligned}$$

$(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m) \in \partial g F(x)$ olduğundan

$$\langle (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m), F'(x,d) \rangle \leq g'(F(x), F'(x,d))$$

olur. Bu sayede

$$\langle s, d \rangle \leq g'(F(x), F'(x,d)) \tag{4.39}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $\partial g(F(x))$ kapalı olduğundan

$$g'(F(x), F'(x,d)) = \langle (\overline{\rho_1}, \overline{\rho_2}, \cdots, \overline{\rho_m}), F'(x,d) \rangle$$

olacak şekilde $\exists\, (\overline{\rho_1}, \overline{\rho_2}, \cdots, \overline{\rho_m}) \in \partial g F(x)$ vardır. Öte yandan $\partial f_i(x)$ ler de kapalı olduğundan $\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ için

$$\langle \overline{s_i}, d \rangle = f_i'(x,d)$$

olacak şekilde $\exists \overline{s_i}$ vardır. Böylelikle $\overline{s} = \sum_{i=1}^{m} \overline{\rho_i s_i} \in S$ için

$$\langle \overline{s}, d \rangle = g'(F(x), F'(x,d))$$

bulunur. Bu da $g'(F(x), F'(x,\cdot))$ fonksiyonun S nin desteği olduğunu kanıtlar.

$\partial\,(g \circ F)(x)$ ve S kompakt konveks kümeleri aynı destek fonksiyonuna sahip olduklarından

$$\begin{aligned} &\partial\,(g \circ F)(x) = S \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{m} \rho_i s_i : (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m) \in \partial g F(x), i = 1, 2, \cdots, m \text{ için } s_i \in \partial f_i(x) \right\} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. ■

i)$g\,(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ $F(x)$ te diferansiyellenebilirse

$$\partial\,(g \circ F)(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}\,(F(x))\,\partial f_i(x)$$

tir. Özel olarak $g\,(y_1, y_2, \cdots, y_m) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} (y_i^+)^2$ alınırsa

$$\partial \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} (f_i^+)^2 \right] = \sum_{i=1}^{m} f_i^+ \partial f_i$$

olur. Gerçekten $F=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$ için

$$\frac{\partial g}{\partial y_i}=\left\{\begin{array}{cc} 0, & y_i<0 \\ y_i, & y_i\geq 0 \end{array}\right\}=y_i^+$$

olduğundan

$$\frac{\partial g}{\partial y_i}(F)=\frac{\partial g}{\partial y_i}\left(f_1,f_2,\cdots,f_m\right)=\left\{\begin{array}{cc} 0, & f_i<0 \\ f_i, & f_i\geq 0 \end{array}\right\}=f_i^+$$

elde edilir. Böylece eşitlik sağlanır.

ii)$g\left(y_1,y_2,\cdots,y_m\right)=\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i^+)$ alınsın.

$$I_0(x)=\{i:f_i(x)=0\}\,,\; I_+(x)=\{i:f_i(x)>0\}\;\; I_-(x)=\{i:f_i(x)<0\}$$

indeks kümeleri tanımlansın. Bu durumda $F=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$ için

$$\partial\left(g\circ F\right)(x)=\partial\left(\sum_{i=1}^{m}f_i^+\right)(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial y_i}\left(F(x)\right)\partial f_i(x)$$

hesaplamak gerekecektir.

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial y_i}F(x)=\left\{\begin{array}{cc} 0, & f_i(x)<0 \\ [0,1], & f_i(x)=0 \\ 1, & f_i(x)>0 \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{cc} 0, & i\in I_-(x) \\ [0,1], & i\in I_0(x) \\ 1, & i\in I_+(x) \end{array}\right\}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial y_i}\left(F(x)\right)\partial f_i(x) &= \sum_{i\in I_-(x)}0.\partial f_i(x)+\sum_{i\in I_0(x)}[0,1].\partial f_i(x)+\sum_{i\in I_+(x)}1.\partial f_i(x)\\ &= \sum_{i\in I_+(x)}1.\partial f_i(x)+\sum_{i\in I_0(x)}[0,1].\partial f_i(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da yerine yazılırsa

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{m}\max\{0,f_i\}\right)(x)=\sum_{i\in I_+(x)}1.\partial f_i(x)+\sum_{i\in I_0(x)}[0,1].\partial f_i(x)$$

eşitliğine ulaşılır.

Sonuç 4.5. *[12,16]$f_1,f_2,\cdots,f_m$ $\mathbb{R}^m$ den $\mathbb{R}$ ye konveks fonksiyonlar olsun ve*

$$f:=\max\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$$

olarak tanımlansın.

$$I(x) = \{i : f_i(x) = f(x)\}$$

aktif indeks kümeleri tanımlansın. Bu durumda

$$\partial f(x) = co\,\{s \in \cup \partial f_i(x) : i \in I(x)\} \tag{4.40}$$

dir.

Kanıt. $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ için $g(y) = \max\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ olarak tanımlansın. $F(x) := (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))$ şeklinde tanımlanırsa

$$f = g \circ F = \max\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$$

olur. Öncelikle $\partial g(y)$ bulunacaktır. $i = 1, 2, \cdots, m$ için $h_i(y) = \langle e_i, y\rangle = y_i$ denirse

$$\begin{aligned} g(y) &= \max\{h_i(y) : i \in \{1, 2, \cdots, m\}\} \\ &= \max\{\langle e_i, y\rangle : i \in \{1, 2, \cdots, m\}\} \end{aligned}$$

olur. Aktif indeks kümesi $J(y) = \{i : h_i(y) = g(y)\}$ olarak alınırsa Örnek 4.6 ten

$$\partial g(y) = co\,\{e_i : i \in J(y)\}$$

şeklinde elde edilir. Bu da açık yazılırsa

$$\partial g(y) = \left\{ (y_1, y_2, \cdots, y_m) : \begin{array}{l} i \notin J(y) \text{ için } y_i = 0 \\ i \in J(y) \text{ için } y_i \geq 0 \end{array}, \sum_{i=1}^{m} y_i = 1 \right\}$$

olur.

Şimdi $y = F(x)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} J(y) &= J(F(x)) \\ &= \{i : h_i(F(x)) = g(F(x))\} \\ &= \{i : f_i(x) = (g \circ F)(x) = f(x)\} \\ &= I(x) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\partial g(F(x)) = \left\{ (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m) : \begin{array}{c} i \notin I(x) \text{ için } \rho_i = 0 \\ i \in I(x) \text{ için } \rho_i = 0 \end{array}, \sum_{i=1}^{m} \rho_i = 1 \right\}$$

olur. 4.38 i kullanarak

$$\partial (g \circ F)(x) = \left\{ \sum_{i \in I(x)} \rho_i s_i : i \in I(x) \text{ için } \rho_i \geq 0, s_i \in \partial f_i(x) \text{ ve } \sum_{i \in I(x)} \rho_i = 1 \right\}$$

yazılır. Sağdaki küme $\{s \in \cup \partial f_i(x) : i \in I(x)\}$ kümesinin konveks zarfı olduğundan

$$\partial (g \circ F)(x) = co \{s \in \cup \partial f_i(x) : i \in I(x)\}$$

olduğu kanıtlanır. ■

4.5.4 Konveks fonksiyonların supremumu

Bu kısımda max fonksiyonu için sonuç 4.5 de kanıtlanan supremum fonksiyonuna genelleştirilecektir.

Yardımcı Teorem 4.5. *$j \in J$ için $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ye konveks fonksiyonlar olsun. $f(x) := \sup \{f_j(x) : j \in J\}$ ve*

$$J(x) = \{j \in J : f_j(x) = f(x)\} \tag{4.41}$$

olarak tanımlansın ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$için $f(x) < \infty$ kabul edilsin. Bu durumda

$$\partial f(x) \supset \overline{co} \left(\underset{j \in J}{\cup} \partial f_j(x) \right)$$

Kanıt. $j \in J$ ve $s \in \partial f_j(x)$ olsun. Subdiferansiyel tanımından $\forall y \in \mathbb{R}^n$için

$$f(y) = \sup_{j \in J} f_j(y) \geq f_j(y) \geq f_j(x) + \langle s, y - x \rangle$$

olur. Sağ tarafın supremumu alınırsa

$$f(y) \geq \sup_{j \in J} f_j(y) + \langle s, y - x \rangle = f(x) + \langle s, y - x \rangle$$

elde edilir. Yani $s \in \partial f_j(x)$ ise $s \in \partial f(x)$ tir. Dolayısıyla

$$\partial f(x) \supset \underset{j \in J}{\cup} \partial f_j(x)$$

tir. $\partial f(x)$ kapalı ve konveks bir küme olduğundan sağ taraftaki kümenin kapalı konveks zarfını içerir. Böylelikle

$$\partial f(x) \supset \overline{co}\left(\underset{j\in J}{\cup}\partial f_j(x)\right)$$

olduğu kanıtlanır. ■

Teorem 4.11. *[12,19]J kompakt bir küme (bir metrik uzayda), f_j ler, f ve $J(x)$ yukarıdaki yardımcı teoremde olduğu gibi tanımlansın. Her bir $x \in \mathbb{R}^n$ için $f_{(\cdot)}(x) : J \to \mathbb{R}$ fonksiyonları üstten yarı sürekli olsun. Bu durumda*

$$\partial f(x) = co\left(\underset{j\in J}{\cup}\partial f_j(x)\right) \tag{4.42}$$

tir.

4.5.5 Lineer fonksiyon altında bir fonksiyonun görüntüsü

$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun ve $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ lineer bir fonksiyon olsun. Her x için g, $A^{-1}(x)$ kümesi üzerinde alttan yarı sürekli olduğundan $Ag : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$(Ag)(x) : = \inf\{g(y) : A(y) = x\} \tag{4.43}$$

fonksiyonu konvekstir. Ayrıca A örten ise Ag her yerde sonludur. 4.41'deki indeks kümesine benzer şekilde

$$Y(x) : = \{y \in \mathbb{R}^m : A(y) = x,\ g(y) = (Ag)(x)\} \tag{4.44}$$

ile 4.43'deki kümeyi minimize eden noktaların kümesi gösterilecektir.

Teorem 4.12. *4.43, 4.44 ve A' nın örten olduğu kabul edilsin. $Y(x)$'in boştan farklı olduğu en az bir x olsun. Bu durumda keyfi bir $y \in Y(x)$ için*

$$\partial(Ag)(x) = \{s \in \mathbb{R}^n : A^*s \in \partial g(y)\} = (A^*)^{-1}[\partial g(y)] \tag{4.45}$$

olur. (Bu küme y'nin seçilişinden bağımsızdır.)

Kanıt. Tanımdan dolayı $s \in \partial(Ag)(x)$ dir ancak ve ancak $\forall x' \in \mathbb{R}^n$ için

$$(Ag)(x') \geq (Ag)(x) + \langle s, x' - x \rangle$$

dir. $y \in Y(x)$, yani $g(y) = (Ag)(x)$ ve $A(y) = x$ olduğundan buna denk olarak $\forall x' \in \mathbb{R}^n$ için

$$(Ag)(x') \geq g(y) + \langle s, x' - A(y) \rangle$$

yazılabilir. Diğer taraftan A örten olduğundan $\forall x' \in \mathbb{R}^n$ için $A(y') = x'$ olacak şekilde $\exists y' \in \mathbb{R}^m$ vardır. Ayrıca $A(y') = x'$ için $(Ag)(x') = \inf\{g(y') : A(y') = x'\} \leq g(y')$ olduğundan üstteki eşitsizliğe denk olarak $\forall y' \in \mathbb{R}^m$ için

$$\begin{aligned} g(y') &\geq g(y) + \langle s, A(y') - A(y) \rangle \\ &= g(y) + \langle s, A(y' - y) \rangle \\ &= g(y) + \langle A^* s, y' - y \rangle \end{aligned}$$

olur. Bu da $A^* s \in \partial g(y)$ demektir. Kanıt biter. ■

Sonuç 4.6. *Teorem 4.12 in varsayımları kabul edilsin. g bir $y \in Y(x)$'de diferansiyellenebilir ise Ag, x'de diferansiyellenebilirdir.*

Kanıt. g, diferansiyellenebilir olduğundan $\partial g(y) = \nabla g(y)$ dir. A örten olduğundan $A^*(s) = \nabla g(y)$ olacak şekilde $\exists s \in \mathbb{R}^n$ vardır. $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^n$ için $A^*(s_1) = A^*(s_2) = \nabla g(y)$ olduğu kabul edilsin. A bir fonksiyon olduğundan her noktanın tek bir görüntüsü olmalıdır. Dolayısıyla $A(\nabla g(y)) = s_1 = s_2$ olur. Bu yüzden $\{s \in \mathbb{R}^n : A^*(s) = \nabla g(y)\}$ kümesi tek nokta kümesidir. Bu sebeple $\partial(Ag)(x) = \nabla(Ag)(x)$ olur. Yani Ag, x'de diferansiyellenebilirdir.
■

Görüntü fonksiyonuna bir örnek: A, bir çarpım uzayında bir kısıtlanış ve g, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ üzerinde bir konveks fonksiyon olsun. g'nin kısmî minimizasyonuyla oluşturulan marjinal fonksiyon düşünülsün: $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(x) := \inf\{g(x, y) : y \in \mathbb{R}^m\} \tag{4.46}$$

olarak tanımlanan f fonksiyonu aslında bir görüntü fonksiyonudur. $A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunu $A(x, y) := x$ olarak alınırsa $f = Ag$ olur.

Sonuç 4.7. *Denklem4.46'daki g'nin subdiferansiyeliyle ilişkili iç çarpımın* $\langle\langle .,. \rangle\rangle$ *çarpım uzayın yapısını koruduğu kabul edilsin:* $x, x' \in \mathbb{R}^n$ *ve* $y, y' \in \mathbb{R}^m$ *için*

$$\langle\langle (x,y),(x',y') \rangle\rangle = \langle x, x' \rangle_n + \langle y, y' \rangle_m$$

olsun. Verilen $x \in \mathbb{R}^n$ *için 4.46'ü çözen* y *keyfi olarak alınsın. Bu durumda*

$$\partial f(x) = \{ s \in \mathbb{R}^n : (s,0) \in \partial_{(x,y)} g(x,y) \}$$

olur.

Kanıt. $A(x,y) = x$ fonksiyonu için

$$\langle A(x,y), x' \rangle_n = \langle\langle (x,y), A^*(x') \rangle\rangle_{n\times m}$$

olur. Bu eşitlikte sol tarafta $A(x,y) = x$ yerine yazılır ve sağ tarafta $A^*(x') = (x^*, y^*)$ denirse

$$\begin{aligned} \langle x, x' \rangle_n &= \langle\langle (x,y),(x^*,y^*) \rangle\rangle_{n\times m} \\ \langle x, x' \rangle_n &= \langle x, x^* \rangle_n + \langle y, y^* \rangle_m \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin sağlanması için $y^* = 0$ ve $x^* = x'$ olmalıdır. Böylelikle $\forall s \in \mathbb{R}^n$ için $A^*(s) = (s,0)$ olur. Şimdi de teorem 4.12 uygulanırsa

$$\begin{aligned} \partial f(x) &= \{ s \in \mathbb{R}^n : A^*(s) \in \partial_{(x,y)} g(x,y) \} \\ \partial f(x) &= \{ s \in \mathbb{R}^n : (s,0) \in \partial_{(x,y)} g(x,y) \} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Eğer g, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ diferansiyellenebilir ve "sonlu bir uzaklıkta" 4.46'deki minimum değerini alsın. Bu durumda f sonuç 4.6'ye göre diferansiyellenebilirdir. Aslında $\nabla_{(x,y)} g(x,y) = (\nabla_x g(x,y), \nabla_y g(x,y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ve verilen x için g'nin minimum değerini aldığı y'de $\nabla_y g(x,y) = 0$ olduğundan bu y'ler için $\nabla f(x) = \nabla_x g(x,y)$ olur.

Uyarı 4.11. *Marjinal fonksiyonu minimum yapan y'nin varlığının gerekliliğini aşağıdaki örnek göstermektedir:*

$$g(x,y) := \sqrt{x^2 + e^{2y}}$$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *konveks fonksiyonu düzgündür (perfectly smooth), fakat minimum değerini aldığı bir nokta yoktur (her* x *için* $(x, -\infty)$ *da minimaldir). Marjinal fonksiyon* $f(x) = |x|$ *ise düzgün fonksiyon değildir.*

$$\partial f(0) = [-1, 1] \text{ iken } \nabla_x g(0, y) = \frac{0}{\sqrt{0^2 + e^{2y}}} = 0$$

dır. Yani

$$[-1, 1] = \partial f(0) \neq \{s \in \mathbb{R}^n : (s, 0) \in \partial_{(x,y)} g(0, y)\} = \{0\}$$

dır.

Uyarı 4.12. *§4.4'deki* max *işleminin diferansiyellenebilmesi için* arg max*'ın tekliği yeterlidir. Fakat §4.5'deki min fonksiyonunun diferansiyellenebilmesi* arg min *ile ilgili değil teorem 4.12'de ve 4.7'deki temel fonksiyon g'nin konveksliğine bağlıdır(Çünkü ancak g konveks ise bu* min *fonksiyonu da konvekstir).*

KAYNAKLAR

[1] Aubin, J.P. ve Cellina, A., Differential Inclusions. Set Valued Maps and Viability Theory. Springer Verlag, Berlin, 1984.

[2] Clarke, F.H., Ledyayev, Yu.S., Stern, R.J. ve Wolenski P.R., Nonsmooth Analysis and Control Theory, Springer Verlag, New York, 1998.

[3] Deimling, J.P., Multivalued Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[4] Hu, S. ve Papageorgiou, N.S., Handbook of Multivalued Analysis Vol.II. Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2001.

[5] Krasovskii, N.N. ve Subbotin, A.I., Game-Theoretical Control Problems, Springer Verlag, New York, 1988.

[6] Clarke, F.H., Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley Interscience, New York, 1983.

[7] Aubin, J.P. ve Frankowska, H., Set Valued Analysis, Birkhauser, Boston, 1990.

[8] Hu, S., ve Papageorgiou, N.S., Handbook of Multivalued Analysis. Vol.I. Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1997.

[9] Aubin, J.P. ve Ekeland,I., Applied Nonlinear Analysis, John Willey&Sons, Newyork, 1984.

[10] Jahn, J., Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[11] Jahn, J., Vector Optimization, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[12] Urruty, J.B.H. ve Lemaréchal, C., Fundamentals of Convex Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 2001

[13] Rockafellar, R.T. ve Wets, R.G.B., Variational Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[14] Luenberger, D.G., Optimization by Vector Space Methods, John Wiley and Sons, New York, 1969.

[15] Heuser, H.G., Functional Analysis, John Wiley and Sons, New York, 1982.

[16] Lay, S.R., Convex Sets and Their Applications, Krieger Publishing Co.,1992.

[17] Rockafellar R.T., Convex Analysis, Princeton University Press, New Jersey, 1972.

[18] Rockafellar R.T., The Theory of Subgradients and its Applications to Problems of Optimization, Convex and Nonconvex Function, Helderman Verlag, Berlin, 1981.

[19] Phelps, R.R., Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability, Springer-Verlag, 1989.