G_2 YAPISINA SAHİP MANİFOLDLAR

Sercan BALÇIN
Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Ağustos – 2007

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Sercan Balçın'ın " **G_2 Yapısına Sahip Manifoldlar"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 17.08.2007 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**:**	**Yard. Doç. Dr. NÜLİFER ÖZDEMİR**	....
Üye	**:**	**Prof. Dr. HÜSEYİN AZCAN**	....
Üye	**:**	**Yard. Doç. Dr. İ.İLKER AKÇA**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

G_2 YAPISINA SAHİP MANİFOLDLAR

Sercan BALÇIN

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: **Yard. Doç. Dr. Nülifer ÖZDEMİR**

2007, 94 sayfa

Bu çalışmada yapı grubu G_2 olan 7-boyutlu Riemannian Manifoldlar incelenmiştir. Bu amaçla beş bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde, G_2 grubu tanıtılarak, sağladığı temel özellikler sunulmuştur.

İkinci bölümde genel olarak vektör uzayları üzerinde 2-katlı vektör çarpımı tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde G_2 grubunun bazı düşük boyutlu indirgenemez temsilleri verilmiştir. Dördüncü bölümde temel 3-formun kovaryant türevlerinin uzayı çalışılmıştır.

Son bölümde ise G_2 grubunun 1,7,14 ve 27 boyutlu indirgenemez temsilleri ve manifold üzerindeki kovaryant türev kullanılarak yapı grubu G_2 olan 7-boyutlu Riemannian manifoldlar sınıflandırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Riemannian Manifoldlar, Kovaryant Türev, k-form, İndirgenemez Temsil

ABSTRACT

Master of Science Thesis

MANİFOLDS WITH THE STRUCTURE GROUP G_2

Sercan BALÇIN

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: **Assist. Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR**

2007, 94 pages

In this thesis 7-dimensional Riemannian manifolds with structure group G_2 are studied. The thesis consists of five chapters. In first chapter, the exceptional Lie group G_2 together with the properties it satisfies is introduced.

In second chapter 2-fold vector cross product is defined and its properties are studied. In third chapter some low dimensional irreducible representations of G_2 are given.

In fourth chapter, the space of covariant derivative of the fundamental 3-form is studied. In last chapter 7-dimensional Riemannian manifolds having the structure group G_2 are classified by using 1,7,14 and 27 dimensional irreducible representations of G_2.

Keywords : Riemannian Manifolds, Covariant Derivative, k-form, Irreducible Representation

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın başlangıcından bitimine kadar her aşamada çalışmayı yönlendiren, özverili yardımlarını esirgemeyen Hocam Yard. Doç. Dr. Nülifer Özdemir'e, tezin hazırlanmasında değerli katkılarını aldığım bütün hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim. Beni her zaman destekleyen aileme ve çalışmamın her anında maddi ve manevi desteğiyle yanımda olan Hakan Emek'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Sercan BALÇIN
Ağustos 2007

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

V^*	:	V vektör uzayının dual uzayı
$boy_{\mathbb{F}}(V)$	:	$\mathbb{F}$ cismi üzerinde V vektör uzayının boyutu
$\bigwedge^k V$	:	V vektör uzayı üzerinde k-vektörlerin uzayı
$\bigwedge^k V^*$	:	V vektör uzayı üzerinde k-formların uzayı
$Skew(V)$	:	V vektör uzayı üzerindeki anti-simetrik matrisler uzayı
$End(V)$	:	V'den V'ye lineer dönüşümlerin uzayı
$GL(V)$	:	V vektör uzayının genel lineer grubu
$Aut(V)$	:	V'den V'ye terslenebilir lineer dönüşümlerin uzayı
ÇekT	:	T dönüşümünün çekirdek uzayı
$A \oplus B$	:	A ve B uzaylarının direkt toplamı
$A \otimes B$	:	A ve B uzaylarının tensör çarpımı
$S^2(V^*)$	:	V vektör uzayı üzerindeki simetrik bilineer 2-formlar uzayı
A^*	:	A matrisinin eşlenik transpozu
A^t	:	A matrisinin transpozu
izA	:	A matrisinin izi
$\|G\|$	:	G grubunun eleman sayısı
$\star$	:	Hodge-star operatörü
$T_m M$	:	M manifoldunun $m \in M$ noktasındaki tanjant uzayı
$\lrcorner$	:	Kontraksiyon işlemi
$\nabla\Phi$	:	Φ formunun kovaryant türevi
$d\Phi$	:	Φ formunun exterior türevi
$\delta\Phi$	:	Φ formunun kotürevi
$\mathfrak{S}_{xyz}$	:	xyz üzerinden devirli toplam
$C^\infty(M, \mathbb{R})$	:	M'den $\mathbb{R}$'ye her mertebeden sürekli, türevlenebilir dönüşümlerin uzayı

1 NORMLU CEBİRLER VE G_2 GRUBU

Bu bölümde G_2 grubunun tanımlanmasında kullanılacak olan normlu cebirler üzerinde durulmuş, G_2 grubu tanımlanmış ve sağladığı özellikler ifade edilmiştir.

1.1 Normlu Cebirler

V sonlu boyutlu bir vektör uzayı, $\langle .,. \rangle$'da V üzerinde non-dejenere bir iç çarpım olsun. V vektör uzayında bir $v \in V$ vektörünün kare normu; $\|v\| := \langle v, v \rangle$ şeklinde alınsın.

Tanım 1.1.1. *V, reel sayılar cismi üzerinde sonlu boyutlu, birimli bir cebir ve $\langle .,. \rangle$, V üzerinde bir iç çarpım olsun. Bu iç çarpıma karşılık gelen kare norm, $\forall x, y \in V$ için,*

$$\|x.y\| = \|x\|.\|y\| \tag{1.1}$$

*şartını sağlıyorsa, V cebrine **normlu cebir** denir.*

$x, y, z \in V$ olmak üzere, $\|z\| = \langle z, z \rangle$ normunda, z yerine $x + y$ alınırsa;

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= \langle x+y, x+y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\| + 2\langle x, y \rangle + \|y\| \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\| - \|x\| - \|y\|)$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 1.1.2. *Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

$$\begin{aligned} \|x.y\| &= \|x\|.\|y\| \\ \langle xw, yw \rangle &= \langle x, y \rangle \|w\| && (1.2) \\ \langle wx, wy \rangle &= \|w\| \langle x, y \rangle && (1.3) \\ \langle xz, yw \rangle + \langle yz, xw \rangle &= 2\langle x, y \rangle \langle z, w \rangle && (1.4) \end{aligned}$$

Kanıt. **((1.1) ⇒ (1.2))**

(1.1) eşitliğinde x yerine $x+y$, y yerine w yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|(x+y).w\| &= \|x+y\|\|w\| \\
\langle (x+y)w, (x+y)w\rangle &= \langle x+y, x+y\rangle \|w\| \\
\langle xw+yw, xw+yw\rangle &= (\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle)\|w\| \\
\langle xw,xw\rangle + 2\langle xw,yw\rangle + \langle yw,yw\rangle &= (\|x\| + 2\langle x,y\rangle + \|y\|)\|w\| \\
\|xw\| + 2\langle xw,yw\rangle + \|yw\| &= \|x\|\|w\| + 2\langle x,y\rangle \|w\| + \|y\|\|w\| \\
\|x\|\|w\| + 2\langle xw,yw\rangle + \|y\|\|w\| &= \|x\|\|w\| + 2\langle x,y\rangle \|w\| + \|y\|\|w \\
\langle xw,yw\rangle &= \langle x,y\rangle \|w\|
\end{aligned}$$

olur.

((1.2) ⇒ (1.1))

(1.2) eşitliğinde y yerine x alınırsa,

$$\begin{aligned}
\langle xw,xw\rangle &= \langle x,x\rangle w \\
\|xw\| &= \|x\|\|w\|
\end{aligned}$$

olduğu için, (1.1) eşitliğine ulaşılır.

((1.1) ⇒ (1.3))

(1.1) eşitliğinde x yerine w, y yerine $x+y$ alındığında,

$$\begin{aligned}
\|w.(x+y)\| &= \|w\|.\|x+y\| \\
\langle w(x+y), w(x+y)\rangle &= \|w\|(\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle) \\
\langle wx+wy, wx+wy\rangle &= \|w\|(\|x\| + 2\langle x,y\rangle + \|y\|) \\
\langle wx,wx\rangle + 2\langle wx,wy\rangle + \langle wy,wy\rangle &= \|w\|\|x\| + 2\langle x,y\rangle \|w\| + \|w\|\|y\| \\
\|wx\| + 2\langle wx,wy\rangle + \|wy\| &= \|w\|\|x\| + 2\langle x,y\rangle \|w\| + \|w\|\|y\| \\
\|w\|\|x\| + 2\langle wx,wy\rangle + \|w\|\|y\| &= \|w\|\|x\| + 2\langle x,y\rangle \|w\| + \|w\|\|y\| \\
\langle wx,wy\rangle &= \langle x,y\rangle \|w\|
\end{aligned}$$

olduğundan, (1.3) eşitliği bulunur.

((1.3) ⇒ (1.1))

(1.3) eşitliğinde y yerine x yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\langle wx,wx\rangle &= \|w\| \langle x,x\rangle \\
\|wx\| &= \|w\|\|x\|
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, (1.1) ve (1.3) eşitlikleri de eşdeğerdir.

((1.2) ⇒ (1.4))

(1.2) eşitliğinde w yerine $z+w$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\langle x(z+w), y(z+w)\rangle &= \langle x,y\rangle \|z+w\| \\
\langle xz+xw, yz+yw\rangle &= \langle x,y\rangle (\|z\| + 2\langle z,w\rangle + \|w\|) \\
\langle xz,yz\rangle + \langle xz,yw\rangle + \langle xw,yz\rangle + \langle xw,yw\rangle &= \langle x,y\rangle (\|z\| + 2\langle z,w\rangle + \|w\|) \\
\langle x,y\rangle \|z\| + \langle xz,yw\rangle + \langle xw,yz\rangle + \langle x,y\rangle \|w\| &= \langle x,y\rangle (\|z\| + 2\langle z,w\rangle + \|w\|) \\
\langle xz,yw\rangle + \langle yz,xw\rangle &= 2\langle x,y\rangle \langle z,w\rangle
\end{aligned}$$

olduğundan, (1.4) eşitliğine ulaşılır.

((1.4) $\Rightarrow$ (1.2))

(1.4) eşitliğinde de z yerine w alınırsa,

$$\begin{aligned}
\langle xw,yw\rangle + \langle yw,xw\rangle &= 2\langle x,y\rangle \langle w,w\rangle \\
2\langle xw,yw\rangle &= 2\langle x,y\rangle \|w\| \\
\langle xw,yw\rangle &= \langle x,y\rangle \|w\|
\end{aligned}$$

olduğundan, (1.2)) ve (1.4) eşitliklerinin de özdeş olduğu görülür. $\square$

Bir V cebri üzerinde, $w \in V$ olmak üzere, w elemanı ile sağdan ve soldan çarpma R_w ve L_w dönüşümleri

$$\begin{aligned}
R_w : V &\longrightarrow V & \qquad L_w : V &\longrightarrow V \\
v &\longmapsto R_w(v) := v.w & v &\longmapsto L_w(v) := w.v
\end{aligned}$$

şeklindedir. R_w ve L_w dönüşümlerinin iyi tanımlı ve lineer oldukları kolayca görülebilir. Ayrıca; bu dönüşümler w'ye göre de $\mathbb{R}$-lineerdirler.

V normlu bir cebir olmak üzere; 1_V birim elemanının ürettiği alt uzay ReV ile gösterilsin. Yani; $ReV = span\{1_V\} = \{\alpha.1_V | \alpha \in \mathbb{R}\}$ olsun. $\forall x \in V$ için $\|x\| = \|x.1_V\| = \|x\|\|1_V\|$ olacağı için; V'nin birim elemanının normu 0 olamaz.

ImV ile ReV'nin dik tümleyeni olan uzay gösterilsin. Bu durumda; V'nin her elemanı tek türlü belirli bir ayrışıma sahiptir. Yani; $\forall x \in V$ için, $x_1 \in ReV$ ve $x_2 \in ImV$ olmak üzere; $x = x_1 + x_2$ olacak şekilde tek türlü belirli $x_1, x_2 \in V$ vardır. $\forall x \in V$ için; $Rex = x_1$ ve $Imx = x_2$'dir.

$x_1 \in ReV$ ve $x_2 \in ImV$ olmak üzere; $x = x_1 + x_2 \in V$ için, x'in **eşleniği** $\bar{x} = x_1 - x_2$ olarak tanımlıdır. Buradan;

$$x_1 = Rex = \tfrac{1}{2}(x + \bar{x})$$
$$x_2 = Imx = \tfrac{1}{2}(x - \bar{x})$$

eşitliklerine ulaşılır.

R_w ve L_w lineer dönüşümlerinin adjoint dönüşümlerinin sırasıyla, $R_{\bar{w}}$ ve $L_{\bar{w}}$ olduğu da kolayca görülebilir.

Yardımcı Teorem 1.1.3. *V normlu bir cebir olmak üzere, $\forall x, y \in V$ için, aşağıdaki eşitlikler doğrudur.*

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}} &= x & (1.5)\\ \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle &= \langle x, y \rangle & (1.6)\\ \langle x, y \rangle &= Rex\bar{y} = Re\bar{x}y & (1.7)\\ \overline{xy} &= \bar{x}\bar{y} & (1.8)\\ x\bar{x} &= \bar{x}x = \|x\| & (1.9) \end{aligned}$$

Kanıt. 1. $x_1 \in ReV$ ve $x_2 \in ImV$ olmak üzere $x = x_1 + x_2$ olsun. $\bar{x} = x_1 - x_2$ olduğundan, $\bar{\bar{x}} = x_1 + x_2 = x$ olur.

2. $x_1, y_1 \in ReV$ ve $x_2, y_2 \in ImV$ olmak üzere, $x = x_1 + x_2$ ve $y = y_1 + y_2$ olsun. Bu durumda; $\bar{x} = x_1 - x_2$ ve $\bar{y} = y_1 - y_2$ olur.

$$\begin{aligned} \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle &= \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \\ &= \langle x_1, y_1 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle - \langle x_2, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle \\ &= \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle \end{aligned}$$

Diğer taraftan;

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle \\ &= \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_1, y_2 \rangle + \langle x_2, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle \\ &= \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle \end{aligned}$$

olduğundan, (1.6) eşitliği elde edilir.

3. $\forall x, y \in V$ için, $x = 1_V x$ ve $y = 1_V y$'dir. O halde;

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle = \langle 1_V y, x \rangle \\ &= \langle R_y 1_V, x \rangle = \langle 1_V, R_{\bar{y}} x \rangle = \langle 1_V, x\bar{y} \rangle \\ &= \langle 1_V, Rex\bar{y} + Imx\bar{y} \rangle \\ &= \langle 1_V, Rex\bar{y} \rangle + \langle 1_V, Imx\bar{y} \rangle \\ &= Rex\bar{y} \end{aligned}$$

Diğer taraftan;

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \langle \bar{x}, \bar{y}\rangle = \langle \bar{y}, \bar{x}\rangle = \langle 1_V \bar{y}, \bar{x}\rangle \\
&= \langle R_{\bar{y}} 1_V, \bar{x}\rangle = \langle 1_V, R_y \bar{x}\rangle = \langle 1_V, \bar{x}y\rangle \\
&= \langle 1_V, Re\bar{x}y + Im\bar{x}y\rangle \\
&= \langle 1_V, Re\bar{x}y\rangle + \langle 1_V, Im\bar{x}y\rangle \\
&= Re\bar{x}y
\end{aligned}$$

olur. Buradan; $\langle x, y\rangle = Rex\bar{y} = Re\bar{x}y$ eşitliği görülür.

4. $\forall z \in V$ için;

$$\begin{aligned}
\langle \overline{xy}, z\rangle &= \left\langle \overline{\overline{xy}}, \bar{z}\right\rangle = \langle xy, \bar{z}\rangle \\
&= \langle L_x y, \bar{z}\rangle = \langle y, L_{\bar{x}} \bar{z}\rangle = \langle y, \bar{x}\bar{z}\rangle \\
&= \langle y, R_{\bar{z}} \bar{x}\rangle = \langle R_z y, \bar{x}\rangle = \langle yz, \bar{x}\rangle \\
&= \langle L_y z, \bar{x}\rangle = \langle z, L_{\bar{y}} \bar{x}\rangle = \langle z, \bar{y}\bar{x}\rangle \\
&= \langle \bar{y}\bar{x}, z\rangle
\end{aligned}$$

eşitliğinden ve iç çarpım non-dejenere olduğu için, $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$ eşitliği görülür.

5. $x_1 \in ReV$ ve $x_2 \in ImV$ olmak üzere, $x = x_1 + x_2$ olsun. x'in eşleniği, $\bar{x} = x_1 - x_2$ olduğundan,

$$x\bar{x} = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = x_1x_1 - x_1x_2 + x_2x_1 - x_2x_2 = x_1^2 - x_2^2$$

$$\bar{x}x = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = x_1x_1 + x_1x_2 - x_2x_1 - x_2x_2 = x_1^2 - x_2^2$$

eşitliklerinden, $x\bar{x} = \bar{x}x$ bulunur.

$$Rex\bar{x} = \frac{1}{2}(x\bar{x} + \overline{x\bar{x}}) = \frac{1}{2}(x\bar{x} + x\bar{x}) = x\bar{x}$$

olduğundan, $Rex\bar{x} = x\bar{x}$ bulunur. Ayrıca; $\langle x, y\rangle = Rex\bar{y} = Re\bar{x}y$ eşitliğinden $\langle x, x\rangle = Rex\bar{x} = x\bar{x}$ gelir. $\langle x, x\rangle = \|x\|$ normundan; $\|x\| = x\bar{x}$ olur. $x\bar{x} = \bar{x}x = \|x\|$ eşitliğine ulaşılır.

□

Tanım 1.1.4. *V bir normlu cebir olmak üzere, $\forall x, y, z \in V$ için,*

$$[x, y, z] := (xy)z - x(yz)$$

olarak tanımlı işlem, V'nin ***assossiyetırı*** *olarak adlandırılır.*

Yardımcı Teorem 1.1.5. *V normlu cebir olmak üzere x, y, z elemanlarından herhangi ikisi eşit ise, $[x, y, z] = 0$'dır.*

Kanıt. Eğer assossiyetırın değişkenlerinden birisi ReV'nin elemanı assossiyetır ise sıfırlanır. Gerçekten; $x \in ReV$ olsun. $x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x = 1_V x_0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} [x, y, z] &= (xy)z - x(yz) \\ &= ((1_V x_0)y)z - (1_V x_0)(yz) \\ &= x_0(1_V y)z - x_0 1_V (yz) \\ &= x_0(yz) - x_0(yz) = 0 \end{aligned}$$

olur.

Değişkenlerden ikisi birbirine eşit ve ImV'nin elemanı ise assossiyetır sıfırlanır. $w \in ImV$ ve $y = z = w$ olsun. $[x, y, z] = 0$ olduğu gösterilsin. Öncelikle, $\forall z \in V$ için,

$$\begin{aligned} \langle (xw)w, z \rangle &= \langle R_w xw, z \rangle = \langle xw, R_{\bar{w}} z \rangle \\ &= \langle xw, z\bar{w} \rangle = - \langle xw, zw \rangle \\ &= -\|w\| \langle x, z \rangle = \langle -\|w\| x, z \rangle \end{aligned}$$

olduğundan ve iç çarpım non-dejenere olduğu için, $(xw)w + \|w\|x = 0$ elde edilir. Dolayısıyla;

$$\begin{aligned} [x, y, z] &= [x, w, w] = (xw)w - x(ww) \\ &= (xw)w + x(w\bar{w}) \\ &= (xw)w + \|w\|x = 0 \end{aligned}$$

olur.

Son olarak, $x, y, z \in V$ için, $y = z$ iken $[x, y, z] = 0$ olduğu gösterilsin. $x_1, y_1 \in ReV$ ve $x_2, y_2 \in ImV$ olmak üzere, $x = x_1 + x_2$ ve $y = z = y_1 + y_2$ olsun.

$$\begin{aligned} [x, y, z] &= [x, y, y] \\ &= [x_1 + x_2, y_1 + y_2, y_1 + y_2] \\ &= ((x_1 + x_2)(y_1 + y_2))(y_1 + y_2) \\ &\quad -(x_1 + x_2)((y_1 + y_2)(y_1 + y_2)) \\ &= (x_1(y_1 + y_2) + x_2(y_1 + y_2))(y_1 + y_2) \\ &\quad -x_1((y_1 + y_2)(y_1 + y_2)) - x_2((y_1 + y_2)(y_1 + y_2)) \\ &= (x_1(y_1 + y_2))(y_1 + y_2) - x_1((y_1 + y_2)(y_1 + y_2)) \\ &\quad +(x_2(y_1 + y_2))(y_1 + y_2) - x_2((y_1 + y_2)(y_1 + y_2)) \\ &= [x_1, y_1 + y_2, y_1 + y_2] + (x_2(y_1 + y_2))(y_1 + y_2) \\ &\quad -x_2((y_1 + y_2)(y_1 + y_2)) \\ &= (x_2(y_1 + y_2))(y_1 + y_2) - x_2((y_1 + y_2)(y_1 + y_2)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x_2y_1 + x_2y_2)(y_1 + y_2) \\
&\quad -x_2(y_1y_1 + y_1y_2 + y_2y_1 + y_2y_2) \\
&= (x_2y_1)y_1 + (x_2y_1)y_2 + (x_2y_2)y_1 + (x_2y_2)y_2 \\
&\quad -x_2(y_1y_1) - x_2(y_1y_2) - x_2(y_2y_1) - x_2(y_2y_2) \\
&= [x_2, y_1, y_1] + [x_2, y_1, y_2] + [x_2, y_2, y_1] + [x_2, y_2, y_2] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olduğundan, $[x, y, y] = 0$ eşitliğine ulaşılır.

Benzer şekilde; $[x, x, z] = 0$ ve $[x, y, x] = 0$ olduğu kolayca görülebilir. $\square$

$[x, y, z]$'nin alterne olduğu şu şekilde görülür: Bunun için; $[x, y, z] = -[y, x, z]$, $[x, y, z] = -[x, z, y]$ ve $[x, y, z] = -[z, y, x]$ olduğu görülmelidir. Bir önceki yardımcı teorem'den dolayı; $\forall x, y, z \in V$ için, $[x + y, x + y, z] = 0$'dır.

$$
\begin{aligned}
0 &= [x + y, x + y, z] \\
&= ((x + y)(x + y))z - (x + y)((x + y)z) \\
&= (xx)z - x(xz) + (xy)z - x(yz) + (yx)z - y(xz) + (yy)z - y(yz) \\
&= [x, x, z] + [x, y, z] + [y, x, z] + [y, y, z] \\
&= [x, y, z] + [y, x, z]
\end{aligned}
$$

eşitliğinden $[x, y, z] = -[y, x, z]$ olduğu görülür. Diğer iki eşitlikte benzer şekilde kolayca görülebilir.

Tanım 1.1.6. *Assossiyetırı alterne olan bir cebir* ***alternatif cebir*** *olarak adlandırılır.*

Sonuç 1.1.7. *Normlu cebirler alternatiftir.*

1.2 Cayley-Dickson Metodu

Yardımcı Teorem 1.2.1. *V normlu bir cebir iken, $\forall x, y, w \in V$ için, aşağıdaki eşitlikler doğrudur.*

$$x(\bar{y}w) + y(\bar{x}w) = 2\langle x, y\rangle w \tag{1.10}$$

$$(w\bar{y})x + (w\bar{x})y = 2\langle x, y\rangle w \tag{1.11}$$

Kanıt. $\forall z \in V$ için; $\langle x(\bar{y}w) + y(\bar{x}w), z\rangle = \langle 2\langle x, y\rangle w, z\rangle$ olduğu gösterilirse iç çarpımın non-dejenere olmasından (1.10) eşitliği elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\langle x(\bar{y}w)+y(\bar{x}w),z\rangle &= \langle x(\bar{y}w),z\rangle+\langle y(\bar{x}w),z\rangle\\
&= \langle L_x\bar{y}w,z\rangle+\langle L_y\bar{x}w,z\rangle\\
&= \langle \bar{y}w,L_{\bar{x}}z\rangle+\langle \bar{x}w,L_{\bar{y}}z\rangle\\
&= \langle \bar{y}w,\bar{x}z\rangle+\langle \bar{x}w,\bar{y}z\rangle\\
&= \langle \bar{x}z,\bar{y}w\rangle+\langle \bar{y}z,\bar{x}w\rangle\\
&= 2\langle \bar{x},\bar{y}\rangle\langle z,w\rangle=2\langle x,y\rangle\langle z,w\rangle
\end{aligned}
$$

eşitliğinden ve

$$\langle 2\langle x,y\rangle w,z\rangle = 2\langle x,y\rangle\langle z,w\rangle$$

olduğu için,

$$\langle x(\bar{y}w)+y(\bar{x}w),z\rangle=\langle 2\langle x,y\rangle w,z\rangle$$

eşitliği elde edilir.

$\forall z\in V$ için; $\langle (w\bar{y})x+(w\bar{x})y,z\rangle = \langle 2\langle x,y\rangle w,z\rangle$ olduğu benzer şekilde gösterilir:

$$
\begin{aligned}
\langle (w\bar{y})x+(w\bar{x})y,z\rangle &= \langle (w\bar{y})x,z\rangle+\langle (w\bar{x})y,z\rangle\\
&= \langle R_xw\bar{y},z\rangle+\langle R_yw\bar{x},z\rangle\\
&= \langle w\bar{y},R_{\bar{x}}z\rangle+\langle w\bar{x},R_{\bar{y}}z\rangle\\
&= \langle w\bar{y},z\bar{x}\rangle+\langle w\bar{x},z\bar{y}\rangle\\
&= \langle z\bar{x},w\bar{y}\rangle+\langle w\bar{x},z\bar{y}\rangle\\
&= 2\langle \bar{x},\bar{y}\rangle\langle z,w\rangle\\
&= 2\langle x,y\rangle\langle z,w\rangle
\end{aligned}
$$

olduğundan ve

$$\langle 2\langle x,y\rangle w,z\rangle=2\langle x,y\rangle\langle z,w\rangle$$

eşitliğinden

$$\langle (w\bar{y})x+(w\bar{x})y,z\rangle=\langle 2\langle x,y\rangle w,z\rangle$$

sonucuna ulaşılır. İç çarpımın non-dejenere olmasından, (1.11) eşitliği elde edilir. □

Sonuç 1.2.2. *V normlu bir cebir olmak üzere, $x,y,w\in V$ için $x\perp y$ ise, aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir.*

$$x\bar{y} = -y\bar{x} \tag{1.12}$$

$$x(\bar{y}w) = -y(\bar{x}w) \tag{1.13}$$

$$(w\bar{y})x = -(w\bar{x})y \tag{1.14}$$

Kanıt. $x, y \in V$ için, $x \perp y$ olsun. Bu durumda; $\langle x, y\rangle = 0$'dır. (1.10) eşitliğinde, w yerine 1_V alınırsa, $x(\bar{y}1_V) + y(\bar{x}1_V) = 0$ olur ki; buradan, $x\bar{y} + y\bar{x} = 0$ bulunur.

$\langle x, y\rangle = 0$ olduğundan, (1.10) ve (1.11) eşitliklerinde bu ifade kullanılırsa, $x(\bar{y}w)+y(\bar{x}w) = 0$ ve $(w\bar{y})x+(w\bar{x})y = 0$ olacağı için; (1.13) ve (1.14) eşitlikleri elde edilir. □

Yardımcı Teorem 1.2.3. *B, birimi 1_B olan normlu bir cebir, A, B'nin bir alt cebiri ve $1_B \in A$ olsun. ϵ, A'ya dik bir birim vektör, yani, $\epsilon \in A^{\perp}$ olarak alınsın. Bu durumda; aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.*

1. *$A\epsilon$, A'ya diktir.*
2. *$\epsilon^2 = \mp 1 \iff \|\epsilon\| = \pm 1$*
3. *$\forall a, b, c, d \in A$ için, $\|\epsilon\| = +1$ iken $-\bar{d}b$, $\|\epsilon\| = -1$ iken $+\bar{d}b$ olmak üzere,*

$$(a + b\epsilon)(c + d\epsilon) = (ac \pm \bar{d}b) + (da + b\bar{c})\epsilon \tag{1.15}$$

   olur.

Kanıt. Öncelikle, $x \in A \iff \bar{x} \in A$ ifadesi ispatlanmalıdır: $x_1 \in ReA$ ve $x_2 \in ImA$ olmak üzere, $x = x_1 + x_2 \in A$'dır. $Rex = \frac{1}{2}(x + \bar{x})$ olduğundan, $\bar{x} = 2Rex - x$ olur. $Rex \in ReB$ olduğundan, $Rex = 1_B x_0$ olacak şekilde $x_0 \in \mathbb{R}$ vardır. $1_B \in A$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ve A alt cebir olduğu için; $1_B x_0 \in A$'dır. Dolayısıyla, $Rex \in A$'dır. $x \in A$ olduğu için, $2Rex - x = \bar{x} \in A$ olur. Diğer taraftan, $\bar{x} \in A$ ise $\bar{\bar{x}} \in A$ ve $\bar{\bar{x}} = x$ olduğundan $x \in A$ olur. Şimdi sırasıyla, diğer ifadeler ispatlanacaktır.

1. $\forall a, b \in A$ için, $\langle a, b\epsilon\rangle = 0$ olduğu görülmelidir:

$$\langle a, b\epsilon\rangle = \langle a, L_b\epsilon\rangle = \langle L_{\bar{b}}a, \epsilon\rangle = \left\langle \bar{b}a, \epsilon\right\rangle$$

   $b \in A$ olduğundan $\bar{b} \in A$'dır ve A alt cebir olduğu için $\bar{b}a \in A$ olur. $\epsilon \in A^{\perp}$ olduğu için, $\left\langle \bar{b}a, \epsilon\right\rangle = 0$, dolayısıyla $\langle a, b\epsilon\rangle = 0$ yada $A\epsilon \perp A$ sonucuna ulaşılır.

2. $\epsilon \in A^{\perp}$ ve $1_B \in A$ olduğundan $\epsilon \perp 1_B$ ve $\epsilon \in (ReB)^{\perp} = ImB$'dir. Bundan dolayı, $\bar{\epsilon} = -\epsilon$'dir. $\|\epsilon\| = \epsilon\bar{\epsilon}$ olduğundan $\|\epsilon\| = -\epsilon^2$ sonucuna ulaşılır.

3. (1.15) eşitliğinin sol tarafındaki çarpım yapılırsa,

$$(a + b\epsilon)(c + d\epsilon) = ac + a(d\epsilon) + (b\epsilon)c + (b\epsilon)(d\epsilon)$$

olduğundan toplamdaki terimlere karşılık gelen ifadeler hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}
a(d\epsilon) &= a(\overline{\overline{d\epsilon}}) &&= a(\overline{\bar{\epsilon}\bar{d}}) &&= a(\bar{\bar{d}}\bar{\bar{\epsilon}}) \\
&= -a(\bar{\bar{d}}\bar{\epsilon}) &&= -a(d\bar{\epsilon}) &&= a(\epsilon\bar{d}) \\
&= -\bar{\epsilon}(\bar{a}\bar{d}) &&= \epsilon(\bar{a}\bar{d}) &&= \epsilon(\overline{da}) \\
&= -(da)\bar{\epsilon} &&= (da)\epsilon
\end{aligned}$$

$$(b\epsilon)c = -(b\bar{c})\bar{\epsilon} = (b\bar{c})\epsilon$$

$$\begin{aligned}
(b\epsilon)(d\epsilon) &= -\bar{d}((\overline{b\epsilon})\epsilon) &&= -\bar{d}((\bar{\epsilon}\bar{b})\epsilon) &&= \bar{d}(-(\bar{\epsilon}\bar{b})\epsilon) \\
&= \bar{d}((\bar{\epsilon}\bar{\epsilon})b) &&= \bar{d}((-\epsilon\bar{\epsilon})b) &&= -\bar{d}((\epsilon\bar{\epsilon})b) \\
&= -\bar{d}(\|\epsilon\|b) &&= -\|\epsilon\|\bar{d}b
\end{aligned}$$

eşitliklerinden, $\|\epsilon\| = \pm 1$ olduğundan,

$$a(d\epsilon) = (da)\epsilon, \qquad (b\epsilon)c = (b\bar{c})\epsilon, \qquad (b\epsilon)(d\epsilon) = -\|\epsilon\|\bar{d}b = \mp\bar{d}b$$

bulunur. Bu eşitlikler yerine yazıldığında,

$$(a + b\epsilon)(c + d\epsilon) = ac + (da)\epsilon + (b\bar{c})\epsilon \mp \bar{d}b = (ac \mp \bar{d}b) + (da + b\bar{c})\epsilon$$

ifadesine ulaşılır.

□

Teorem 1.2.4. *(Cayley-Dickson) A normlu bir cebir olsun. Bir önceki teoremdeki yöntem kullanılarak, $A(+)$ ve $A(-)$ cebirleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

Vektör uzayı olarak her ikiside $A(\pm) = A \oplus A$ olsun. $(a, b), (c, d) \in A \oplus A$ olmak üzere, $A(+)$ üzerindeki çarpma,

$$(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c})$$

olarak, $A(-)$ üzerindeki çarpma,

$$(a, b)(c, d) = (ac + \bar{d}b, da + b\bar{c})$$

olarak tanımlansın.

- *$A(\pm)$ uzaylarında, tanımlanan bu çarpma işlemlerine göre, birimleri $(1, 0)$ olan cebirler olduğu ve A cebirinin bu cebirlerin alt cebiri olduğu kolayca görülebilir.*

- *A alt cebirindeki bir a elemanı $A(\pm)$ cebirlerinde $(a, 0)$ olarak alınabilir.*

- $\epsilon = (0, 1)$ *olsun. Bu durumda,* $A(+)$ *için* $\epsilon^2 = -1$ *ve* $A(-)$ *için* $\epsilon^2 = 1$ *olarak alınırsa,* $\forall(a, b) \in A(\underline{+})$ *için,*

$$(a, b) = a + b\epsilon$$

olarak yazılabilir.

- $\forall x = a + b\epsilon, y = c + d\epsilon \in A(\underline{+})$ *için, iç çarpım*

$$\langle x, y\rangle = \langle a, c\rangle \underline{+} \langle b, d\rangle$$

şeklindedir.

- $A(\underline{+})$ *cebirlerinin üzerinde doğal olarak tanımlı bir kare norm vardır. Bu norm,* $\forall(a, b) = a + b\epsilon \in A(\underline{+})$ *için,*

$$\|(a, b)\| = \|a\|\underline{+}\|b\|$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, $A(+)$ *için* $\|\epsilon\| = 1$ *ve* $A(-)$ *için* $\|\epsilon\| = -1$ *olur.*

- $\forall x = a+b\epsilon \in A(\underline{+})$ *için* x *elemanının eşleniği, aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$$\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b)$$

veya

$$\overline{a + b\epsilon} = \bar{a} - b\epsilon$$

.

Yardımcı Teorem 1.2.5. *A bir normlu cebir ve* $A(\underline{+})$ *Cayley-Dickson Metodu ile yukarıda tanımlanan cebirler olsunlar.* $\forall x = a + \alpha\epsilon, y = b + \beta\epsilon,$ $z = c + \gamma\epsilon \in A(\underline{+})$ *olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir.*

$$\overline{xy} = \bar{y}\bar{x} \tag{1.16}$$

$$x\bar{x} = \bar{x}x = \|x\| \tag{1.17}$$

$$\frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}) = Rex\bar{y} = \langle x, y\rangle \tag{1.18}$$

$$\frac{1}{2}[x, y] = \frac{1}{2}[a, b]\underline{+}Im\bar{\alpha}\beta + (\beta Ima - \alpha Imb)\epsilon \tag{1.19}$$

Ayrıca, A birleşmeli bir cebir ise,

$$[x, y, z] = \underline{+}[a, \bar{\gamma}\beta]\underline{+}[b, \bar{\alpha}\gamma]\underline{+}[c, \bar{\beta}\alpha] + \alpha[\bar{b}, \bar{c}]\epsilon + \beta[a, \bar{c}]\epsilon + \gamma[a, b]\epsilon\underline{+}(\alpha\bar{\beta}\gamma - \gamma\bar{\beta}\alpha)$$

$$[x, \bar{x}, y] = \underline{+}[\alpha, \bar{\beta}, \alpha] + [\alpha, \bar{b}, a]\epsilon$$

$$\|x\|\|y\| - \|xy\| = 2\underline{+}\left\langle \alpha, [\bar{\beta}, \alpha, \bar{b}]\right\rangle$$

eşitlikleri de sağlanır.

Cayley-Dickson Metodu ile tanımlanan cebirler aşağıda verilmiştir:

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{C} & = & \mathbb{R}(+) & \text{Karmaşık Sayılar} \\ \mathbb{H} & = & \mathbb{C}(+) & \text{Quaterniyonlar} \\ \mathbb{O} & = & \mathbb{H}(+) & \text{Oktonyonlar} \\ \mathbb{L} & = & \mathbb{R}(-) & \text{Lorentz Sayıları} \\ M_2(\mathbb{R}) & = & \mathbb{C}(-) & 2\times 2\text{'lik Reel Matrisler} \\ \tilde{\mathbb{O}} & = & \mathbb{H}(-) & \text{Split Oktonyonlar} \end{array}$$

Teorem 1.2.6. *(Hurwitz) Reel sayılar cebri üzerinde tanımlanan normlu cebirler şunlardır [19]:*

$$\mathbb{R} \ , \ \mathbb{C} \ , \ \mathbb{L} \ , \ \mathbb{H} \ , \ M_2(\mathbb{R}) \ , \ \mathbb{O} \ , \ \tilde{\mathbb{O}}$$

1.3 Oktonyonlarda 2-Katlı Vektör Çarpım

Tanım 1.3.1. $\forall x, y \in \mathbb{O}$ *için,*

$$x \times y \ = \ \frac{1}{2}(\bar{y}x - \bar{x}y) = Im(\bar{y}x) \tag{1.20}$$

*işlemi x ve y oktonyonlarının **2-katlı vektör çarpımı** olarak adlandırılır.*

Yardımcı Teorem 1.3.2. $\forall x, y \in \mathbb{O}$ *için,*

1. $x \times y = -y \times x,$

2. $\|x \times y\| = \|x \wedge y\|.$

Kanıt. 1. Öncelikle, $\forall x, y \in \mathbb{O}$ için,

$$x \times y = -y \times x \Longleftrightarrow x \times x = 0$$

olduğu gösterilmelidir. $x \times y = -y \times x$ olsun. Bu eşitlikte, y yerine x alınırsa, $x \times x = -x \times x$ olur. Dolayısıyla, $x \times x = 0$ bulunur. Diğer taraftan; $x \times x = 0$ olsun. Bu eşitlikte, x yerine $x + y$ alınırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= (x+y) \times (x+y) \\ &= \tfrac{1}{2}(\overline{(x+y)}(x+y) - \overline{(x+y)}(x+y)) \\ &= \tfrac{1}{2}(\bar{x}+\bar{y})(x+y) - \tfrac{1}{2}(\bar{x}+\bar{y})(x+y) \\ &= \tfrac{1}{2}(\bar{x}x + \bar{x}y + \bar{y}x + \bar{y}y) - \tfrac{1}{2}(\bar{x}x + \bar{x}y + \bar{y}x + \bar{y}y) \\ &= \tfrac{1}{2}(\|x\| + \|y\|) - \tfrac{1}{2}(\|x\| + \|y\|) + \tfrac{1}{2}(\bar{x}y - \bar{y}x) + \tfrac{1}{2}(\bar{y}x - \bar{x}y) \\ &= \tfrac{1}{2}(\bar{x}y - \bar{y}x) + \tfrac{1}{2}(\bar{y}x - \bar{x}y) \\ &= (y \times x) + (x \times y) \end{aligned}$$

olur. Buradan, $x \times y = -y \times x$ eşitliğine ulaşılır.

$\forall x, y \in \mathbb{O}$ için, $x \times y = -y \times x \Longleftrightarrow x \times x = 0$ olduğundan ve $x \times x = \frac{1}{2}(\bar{x}x - \bar{x}x) = 0$ eşitliğinden, $x \times y = -y \times x$ elde edilir.

2.

$$\begin{aligned}
\|x \wedge y\| &= \langle x \wedge y, x \wedge y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle \langle y, x\rangle \\
&= \|x\|\|y\| - (\tfrac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}).(y\bar{x} + x\bar{y})) \\
&= \|x\|\|y\| - \tfrac{1}{4}(\|x\|\|y\| + (x\bar{y})(x\bar{y}) + (y\bar{x})(y\bar{x}) + \|x\|\|y\|) \\
&= \tfrac{1}{2}\|x\|\|y\| - \tfrac{1}{4}((x\bar{y})^2 + (y\bar{x})^2)
\end{aligned}$$

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\|x \times y\| &= \langle x \times y, x \times y\rangle \\
&= \left\langle \tfrac{1}{2}(\bar{y}x - \bar{x}y), \tfrac{1}{2}(\bar{y}x - \bar{x}y)\right\rangle \\
&= \tfrac{1}{4}\langle \bar{y}x, \bar{y}x\rangle - \tfrac{1}{4}\langle \bar{y}x, \bar{x}y\rangle - \tfrac{1}{4}\langle \bar{y}x, \bar{x}y\rangle + \tfrac{1}{4}\langle \bar{x}y, \bar{x}y\rangle \\
&= \tfrac{1}{4}\|yx\| + \tfrac{1}{4}\|xy\| - \tfrac{1}{2}\langle \bar{y}x, \bar{x}y\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}\|x\|\|y\| - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}(\bar{y}x)(\overline{\bar{x}y}) + (\bar{x}y)(\overline{\bar{y}x})) \\
&= \tfrac{1}{2}\|x\|\|y\| - \tfrac{1}{4}((\bar{y}x)^2 + (\bar{x}y)^2)
\end{aligned}$$

olduğundan, son iki eşitlikten, $\|x \times y\| = \|x \wedge y\|$ olduğu görülür.

□

Ayrıca, $\forall x, y \in \mathbb{O}$ için, $Re(x \times y) = 0$'dir:

$$\begin{aligned}
Re(x \times y) &= Re(\tfrac{1}{2}(\bar{y}x - \bar{x}y)) \\
&= \tfrac{1}{2}Re(\bar{y}x) - \tfrac{1}{2}Re(\bar{x}y) \\
&= \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}(\bar{y}x + \bar{x}y) - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}(\bar{x}y + \bar{y}x) \\
&= \tfrac{1}{4}(\bar{y}x + \bar{x}y) - \tfrac{1}{4}(\bar{x}y + \bar{y}x) = 0
\end{aligned}$$

Yardımcı Teorem 1.3.3. *$\forall x, y \in Im\mathbb{O}$ için, $[x, y] = xy - yx$ olarak tanımlı olmak üzere aşağıdaki eşitlik doğrudur.*

$$x \times y = \frac{1}{2}[x, y] = xy + \langle x, y\rangle \tag{1.21}$$

Kanıt.

$$x \times y = \frac{1}{2}(\bar{y}x - \bar{x}y) = \frac{1}{2}(-yx + xy) = \frac{1}{2}[x, y]$$

ve

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}[x, y] &= \tfrac{1}{2}(xy - yx) = xy - \tfrac{1}{2}xy - \tfrac{1}{2}yx \\
&= xy - \tfrac{1}{2}(xy + yx) = xy + \tfrac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}) \\
&= xy + \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$x \times y = \frac{1}{2}[x, y] = xy + \langle x, y\rangle$$

eşitliği gerçeklenir. $\square$

Yardımcı Teorem 1.3.4. *$\forall x, y \in Im\mathbb{O}$ için, $x \times y \in Im\mathbb{O}$ elemanı, x ve y'nin ürettiği alt uzaya diktir ve*

$$x \times (x \times y) \;=\; -\|x\|y + \langle x, y\rangle\, x \tag{1.22}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. $x \times y$'nin x ve y'ye dik olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$$\begin{aligned}
\langle x \times y, x\rangle &= \left\langle \tfrac{1}{2}[x, y], x\right\rangle = \tfrac{1}{2}\langle xy - yx, x\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}\langle xy, x\rangle - \tfrac{1}{2}\langle yx, x\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}\|x\|\langle y, 1\rangle - \tfrac{1}{2}\langle y, 1\rangle \|x\| \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan, $(x\times y)\perp x$'dir. Benzer şekilde, $(x\times y)\perp y$ olduğu kolayca görülebilir.

$$\begin{aligned}
x \times (x \times y) &= x \times (xy + \langle x, y\rangle) \\
&= \tfrac{1}{2}((\overline{xy + \langle x, y\rangle})x - \bar{x}(xy + \langle x, y\rangle)) \\
&= \tfrac{1}{2}((\bar{y}\bar{x} + \langle x, y\rangle)x + x(xy + \langle x, y\rangle)) \\
&= \tfrac{1}{2}((yx)x + \langle x, y\rangle\, x + x(xy) + \langle x, y\rangle\, x) \\
&= \tfrac{1}{2}((yx)x + x(xy) + 2\langle x, y\rangle\, x) \\
&= \tfrac{1}{2}(yx)x + \tfrac{1}{2}x(xy) + \langle x, y\rangle\, x
\end{aligned}$$

(1.10) ve (1.11) eşitliklerinde y yerine $\bar{x}$, w yerine y yazılırsa,

$$x(xy) + \bar{x}(\bar{x}y) = 2\langle x, \bar{x}\rangle\, y \qquad \text{ve} \qquad (yx)x + (y\bar{x})\bar{x} = 2\langle x, \bar{x}\rangle\, y$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan, $\bar{x} = -x$ ve $\bar{y} = -y$ olduğundan $x(xy) = -\|x\|y$ ve $(yx)x = -\|x\|y$ olur. Bu eşitliklerden

$$\begin{aligned}
x \times (x \times y) &= \tfrac{1}{2}(-\|x\|y) + \tfrac{1}{2}(-\|x\|y) + \langle x, y\rangle\, x \\
&= -\|x\|y + \langle x, y\rangle\, x
\end{aligned}$$

bulunur. $\square$

Tanım 1.3.5. *$\forall x, y, z \in \mathbb{O}$ için, x, y, z'nin* ***üçlü çarpımı***

$$x \times y \times z \;=\; \frac{1}{2}[x(\bar{y}z) - z(\bar{y}x)] \tag{1.23}$$

olarak tanımlıdır.

Yardımcı Teorem 1.3.6. $\forall x, y, z \in \mathbb{O}$ *için,*

1. *$x\times y\times z$ çarpımında herhangi iki elemanın yeri değiştirildiğinde çarpımın işareti değişir.*
2. *$\|x \wedge y \wedge z\| = \|x \times y \times z\|$'dir.*

Kanıt. 1. Öncelikle aşağıdaki ifadeler ispatlanacaktır:

$$x \times y \times z = -y \times x \times z \Longleftrightarrow x \times x \times z = 0$$

$$x \times y \times z = -x \times z \times y \Longleftrightarrow x \times y \times y = 0$$

$$x \times y \times z = -z \times y \times x \Longleftrightarrow x \times y \times x = 0$$

$x\times y\times z = -y\times x\times z$ olsun. Bu ifadede y yerine x alınırsa, $2(x\times x\times z) = 0$ olur. Buradan, $x \times x \times z = 0$ olur. Diğer taraftan, $x \times x \times z = 0$ olduğu kabul edilsin. Bu eşitlikte, x yerine $x+y$ alırsak, $(x+y)\times(x+y)\times z = 0$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
(x+y)\times(x+y)\times z &= \tfrac{1}{2}[(x+y)((\overline{x+y})z) - z((\overline{x+y})(x+y))] \\
&= \tfrac{1}{2}[x(\bar{x}z) + x(\bar{y}z) + y(\bar{x}z) + y(\bar{y}z) \\
&\quad -z(\bar{x}x) - z(\bar{x}y) - z(\bar{y}x) - z(\bar{y}y)] \\
&= \tfrac{1}{2}[x(\bar{x}z) - z(\bar{x}x) + x(\bar{y}z) - z(\bar{y}x) \\
&\quad +y(\bar{x}z) - z(\bar{x}y) + y(\bar{y}z) - z(\bar{y}y)] \\
&= (x \times x \times z) + (x \times y \times z) + (y \times x \times z) \\
&\quad (y \times y \times z) \\
&= (x \times y \times z) + (y \times x \times z)
\end{aligned}$$

olduğundan, $x\times y\times z = -y\times x\times z$ elde edilir. Diğer iki ifade de benzer şekilde gösterilebilir.

Bu eşitliklerden dolayı, $x \times y \times z$'nin alterne olduğunu göstermek için, $x \times x \times z = 0$, $x \times y \times y = 0$ ve $x \times y \times x = 0$ olduğunun gösterilmesi yetecektir.

$$\begin{aligned}
x \times x \times z &= \tfrac{1}{2}[x(\bar{x}z) - z(\bar{x}x)] \\
&= \tfrac{1}{2}[x(\bar{x}z) - z\|x\|]
\end{aligned}$$

(1.10) eşitliğinde, y yerine x, w yerine z yazılırsa;
$x(\bar{x}z) + x(\bar{x}z) = 2\langle x, x\rangle z$ yani, $x(\bar{x}z) = \|x\|z$ olur. Bu durumda,

$$x \times x \times z \;=\; \tfrac{1}{2}[\|x\|z - \|x\|z] \;=\; 0$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} x \times y \times y &= \tfrac{1}{2}[x(\bar{y}y) - y(\bar{y}x)] \\ &= \tfrac{1}{2}[x\|y\| - y(\bar{y}x)] \end{aligned}$$

(1.10) eşitliğinde, x yerine y, w yerine x yazılırsa;
$y(\bar{y}x) + y(\bar{y}x) = 2\langle y, y\rangle x$ yani, $y(\bar{y}x) = \|y\|x$ elde edilir. Buradan,

$$x \times y \times y \;=\; \tfrac{1}{2}[x\|y\| - \|y\|x] \;=\; 0$$

olur. Son olarak tanımdan,

$$x \times y \times x \;=\; \tfrac{1}{2}[x(\bar{y}x) - x(\bar{y}x)] \;=\; 0$$

eşitliği elde edilir.

2.

$$\begin{aligned} \|x \wedge y \wedge z\| &= \|x\|\|y\|\|z\| + 2\langle x, y\rangle \langle y, z\rangle \langle x, z\rangle \\ &\quad -\|x\| \;\langle y, z\rangle^2 - \|y\|\langle x, z\rangle^2 - \|z\|\langle x, y\rangle^2 \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \|x \times y \times z\| &= \langle x \times y \times z, x \times y \times z\rangle \\ &= \tfrac{1}{4}[\langle x(\bar{y}z), x(\bar{y}z)\rangle - \langle x(\bar{y}z), z(\bar{y}x)\rangle \\ &\quad - \langle z(\bar{y}x), x(\bar{y}z)\rangle + \langle z(\bar{y}x), z(\bar{y}x)\rangle] \\ &= \tfrac{1}{4}[\|x(\bar{y}z)\| - 2\langle x(\bar{y}z), z(\bar{y}x)\rangle + \|z(\bar{y}x)\|] \\ &= \tfrac{1}{4}[\|x\|\|y\|\|z\| - 2\langle x(\bar{y}z), z(\bar{y}x)\rangle + \|x\|\|y\|\|z\|] \\ &= \tfrac{1}{2}\|x\|\|y\|\|z\| - \tfrac{1}{2}\langle x(\bar{y}z), z(\bar{y}x)\rangle \end{aligned}$$

olur. Şimdi, $\langle x(\bar{y}z), z(\bar{y}x)\rangle$ ifadesinin eşiti bulunmalıdır. (1.10) eşitliğinde, w yerine z alınırsa, $x(\bar{y}z) + y(\bar{x}z) = 2\langle x, y\rangle z$ eşitliği, x yerine z, w yerine x alınırsa $z(\bar{y}x) + y(\bar{z}x) = 2\langle z, y\rangle x$ elde edilir. Buradan,

$$x(\bar{y}z) = 2\langle x, y\rangle z - y(\bar{x}z) \qquad \text{ve} \qquad z(\bar{y}x) = 2\langle z, y\rangle x - y(\bar{z}x)$$

eşitlikleri elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned} \langle x(\bar{y}z), z(\bar{y}x)\rangle &= \langle 2\langle x, y\rangle z - y(\bar{x}z), 2\langle z, y\rangle x - y(\bar{z}x)\rangle \\ &= 4\langle x, y\rangle \langle y, z\rangle \langle x, z\rangle - 2\langle x, y\rangle \langle \bar{y}z, \bar{z}x\rangle \\ &\quad -2\langle y, z\rangle \langle \bar{x}z, \bar{y}x\rangle + \langle y(\bar{x}z), y(\bar{z}x)\rangle \end{aligned}$$

olur. (1.4) eşitliğinde, x yerine $\bar{y}$, y yerine $\bar{z}$ ve w yerine x alınırsa, $\langle \bar{y}z, \bar{z}x\rangle + \langle \bar{z}z, \bar{y}x\rangle = 2\langle \bar{y}, \bar{z}\rangle \langle z, x\rangle$ eşitliği, x yerine $\bar{x}$, y yerine $\bar{y}$ ve w

yerine x alınırsa, $\langle \bar{x}z, \bar{y}x\rangle + \langle \bar{y}z, \bar{x}x\rangle = 2\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle \langle z, x\rangle$ eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\langle \bar{y}z, \bar{z}x\rangle &= 2\langle y, z\rangle \langle x, z\rangle - \|z\| Re\bar{y}x \\
\langle \bar{x}z, \bar{y}x\rangle &= 2\langle x, y\rangle \langle x, z\rangle - \|x\| Re\bar{y}z
\end{aligned}$$

olur. $Re\bar{x}y = Rex\bar{y} = \langle x, y\rangle$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\langle \bar{y}z, \bar{z}x\rangle &= 2\langle y, z\rangle \langle x, z\rangle - \|z\| \langle x, y\rangle \\
\langle \bar{x}z, \bar{y}x\rangle &= 2\langle x, y\rangle \langle x, z\rangle - \|x\| \langle y, z\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, (1.3) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\langle y(\bar{x}z), y(\bar{z}x)\rangle &= \|y\| \langle \bar{x}z, \bar{z}x\rangle \\
&= \|y\|(2\langle x, z\rangle^2 - \|z\|\|x\|) \\
&= 2\|y\|\langle x, z\rangle^2 - \|x\|\|y\|\|z\|
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\langle x(\bar{y}z), z(\bar{y}x)\rangle &= 4\langle x, y\rangle \langle y, z\rangle \langle x, z\rangle \\
&\quad -2\langle x, y\rangle (2\langle y, z\rangle \langle x, z\rangle - \|z\| \langle x, y\rangle) \\
&\quad -2\langle y, z\rangle (2\langle x, y\rangle \langle x, z\rangle - \|x\| \langle y, z\rangle) \\
&\quad +2\|y\|\langle x, z\rangle^2 - \|x\|\|y\|\|z\| \\
&= -\|x\|\|y\|\|z\| - 4\langle x, y\rangle \langle y, z\rangle \langle x, z\rangle + 2\|x\|\langle y, z\rangle^2 \\
&\quad +2\|y\|\langle x, z\rangle^2 + 2\|z\|\langle x, y\rangle^2
\end{aligned}$$

olur. O halde;

$$\begin{aligned}
\|x \times y \times z\| &= \tfrac{1}{2}\|x\|\|y\|\|z\| + \tfrac{1}{2}\|x\|\|y\|\|z\| + 2\langle x, y\rangle \langle y, z\rangle \langle x, z\rangle \\
&\quad -\|x\|\langle y, z\rangle^2 - \|y\|\langle x, z\rangle^2 - \|z\|\langle x, y\rangle^2 \\
&= \|x\|\|y\|\|z\| + 2\langle x, y\rangle \langle y, z\rangle \langle x, z\rangle \\
&\quad -\|x\|\langle y, z\rangle^2 - \|y\|\langle x, z\rangle^2 - \|z\|\langle x, y\rangle^2
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla;

$$\|x \wedge y \wedge z\| = \|x \times y \times z\|$$

olur.

□

1.4 Φ Temel 3- Formu

Tanım 1.4.1. $\Phi : (Im\mathbb{O})^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $\forall x, y, z \in Im\mathbb{O}$ *için,*

$$\Phi(x, y, z) = \langle x, yz\rangle \tag{1.24}$$

olarak tanımlansın. Bu form $Im\mathbb{O}$ *için* ***temel 3-form*** *olarak adlandırılır.*

Φ'ye girilen herhengi iki değer eşitse, Φ temel 3-formu sıfırlanır. Yani, $\forall x, y, z \in Im\mathbb{O}$ için, $\Phi(x,x,z) = 0, \Phi(x,y,y) = 0, \Phi(x,y,x) = 0$' dır.

$$\begin{aligned}\Phi(x,x,z) &= \langle x, xz\rangle = \tfrac{1}{2}(x(\overline{xz}) + (xz)\bar{x}) \\ &= \tfrac{1}{2}(x(\bar{z}\bar{x}) + (xz)\bar{x}) = \tfrac{1}{2}(x(zx) - (xz)x) \\ &= -\tfrac{1}{2}((xz)x - x(zx)) = -\tfrac{1}{2}[x,z,x] = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,y) &= \langle x, yy\rangle = \tfrac{1}{2}(x(\overline{yy}) + (yy)\bar{x}) \\ &= \tfrac{1}{2}(x(\bar{y}\bar{y}) + (yy)\bar{x}) = \tfrac{1}{2}(x(yy) - (yy)x)\end{aligned}$$

(1.10) ve (1.11) eşitliklerinde, y yerine $\bar{y}$, w yerine y yazılırsa,

$$\begin{aligned}x(yy) + \bar{y}(\bar{x}y) &= 2\langle x, \bar{y}\rangle y \\ (yy)x + (y\bar{x})\bar{y} &= 2\langle x, \bar{y}\rangle y\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden,

$$\begin{aligned}x(yy) + y(xy) &= -2\langle x, y\rangle y \\ (yy)x + (yx)y = &= -2\langle x, y\rangle y\end{aligned}$$

olduğu için,

$$\begin{aligned}x(yy) &= -2\langle x, y\rangle y - y(xy) \\ (yy)x &= -2\langle x, y\rangle y - (yx)y\end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır. Buradan,

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,y) &= \tfrac{1}{2}(x(yy) - (yy)x) \\ &= \tfrac{1}{2}(-2\langle x, y\rangle y - y(xy) + 2\langle x, y\rangle y + (yx)y) \\ &= \tfrac{1}{2}((yx)y - y(xy)) = \tfrac{1}{2}[y,x,y] = 0\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,x) &= \langle x, yx\rangle = \tfrac{1}{2}(x(\overline{yx}) + (yx)\bar{x}) \\ &= \tfrac{1}{2}(x(\bar{x}\bar{y}) + (yx)\bar{x}) = \tfrac{1}{2}(x(xy) - (yx)x)\end{aligned}$$

(1.10) ve (1.11) eşitliklerinde, y yerine $\bar{x}$, w yerine y yazılırsa,

$$\begin{aligned}x(xy) + \bar{x}(\bar{x}y) &= 2\langle x, \bar{x}\rangle y \\ (yx)x + (y\bar{x})\bar{x} &= 2\langle x, \bar{x}\rangle y\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} x(xy) &= -\|x\|y \\ (yx)x &= -\|x\|y \end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır. Bu durumda,

$$\Phi(x,y,x) = \frac{1}{2}(-\|x\|y + \|x\|y) = 0$$

bulunur.

Φ 3-formunun alterne olduğu, yani; $\forall x,y,z \in Im\mathbb{O}$ için,

$$\begin{aligned} \Phi(x,y,z) &= -\Phi(y,x,z) \\ \Phi(x,y,z) &= -\Phi(x,z,y) \\ \Phi(x,y,z) &= -\Phi(z,y,x) \end{aligned}$$

olduğu gösterilmelidir.

$\Phi(x,x,z) = 0$ olduğundan; bu eşitlikte x yerine $x+y$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 = \Phi(x+y,x+y,z) &= \langle x+y,(x+y)z\rangle = \langle x+y, xz+yz\rangle \\ &= \langle x,xz\rangle + \langle x,yz\rangle + \langle y,xz\rangle + \langle y,yz\rangle \\ &= \Phi(x,x,z) + \Phi(x,y,z) + \Phi(y,x,z) + \Phi(y,y,z) \\ &= \Phi(x,y,z) + \Phi(y,x,z) \end{aligned}$$

olduğu için; $\Phi(x,y,z) = -\Phi(y,x,z)$ olur.

$\Phi(x,y,y) = 0$ olduğu için; bu eşitlikte y yerine $y+z$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 = \Phi(x,y+z,y+z) &= \langle x,(y+z)(y+z)\rangle = \langle x, yy+yz+zy+zz\rangle \\ &= \langle x,yy\rangle + \langle x,yz\rangle + \langle x,zy\rangle + \langle x,zz\rangle \\ &= \Phi(x,y,y) + \Phi(x,y,z) + \Phi(x,z,y) + \Phi(x,z,z) \\ &= \Phi(x,y,z) + \Phi(x,z,y) \end{aligned}$$

olduğundan; $\Phi(x,y,z) = -\Phi(x,z,y)$ olur.

$\Phi(x,y,x) = 0$ olduğundan; bu eşitlikte x yerine $x+z$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 = \Phi(x+z,y,x+z) &= \langle x+z,y(x+z)\rangle = \langle x+z, yx+yz\rangle \\ &= \langle x,yx\rangle + \langle x,yz\rangle + \langle z,yx\rangle + \langle z,yz\rangle \\ &= \Phi(x,y,x) + \Phi(x,y,z) + \Phi(z,y,x) + \Phi(z,y,z) \\ &= \Phi(x,y,z) + \Phi(z,y,x) \end{aligned}$$

olduğu için; $\Phi(x,y,z) = -\Phi(z,y,x)$ olur.

Dolayısıyla; Φ alterne olduğu için; $\Phi \in \bigwedge^3 (Im\mathbb{O})^*$'dır.

Yardımcı Teorem 1.4.2. *$\forall x,y,z \in Im\mathbb{O}$ için, aşağıdaki eşitlikler doğrudur.*

1. *$Re(x \times y \times z) = \Phi(x \wedge y \wedge z)$*

2. *$Im(x \times y \times z) = \frac{1}{2}[x,y,z]$*

Kanıt. Öncelikle, eşitlik (1.23)'ten ve $x,y,z \in Im\mathbb{O}$ olduğundan,

$$x \times y \times z = \frac{1}{2}(z(yx) - x(yz))$$

olur.

1. Eşitlik (1.7)'den ve Φ'nin tanımından dolayı,

$$\begin{aligned} Re(z(yx)) &= \langle z, \overline{yx}\rangle = \langle z, \bar{x}\bar{y}\rangle = \langle z, xy\rangle \\ &= \Phi(z \wedge x \wedge y) = -\Phi(x \wedge z \wedge y) \\ &= \Phi(x \wedge y \wedge z) \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} Re(x(yz)) &= \langle x, \overline{yz}\rangle = \langle x, \bar{z}\bar{y}\rangle = \langle x, zy\rangle \\ &= \Phi(x \wedge z \wedge y) = -\Phi(x \wedge y \wedge z) \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen eşitlikler kullanıldığında,

$$\begin{aligned} Re(x \times y \times z) &= \tfrac{1}{2}Re(z(yx) - x(yz)) \\ &= \tfrac{1}{2}Re(z(yx)) - \tfrac{1}{2}Re(x(yz)) \\ &= \tfrac{1}{2}\Phi(x \wedge y \wedge z) + \tfrac{1}{2}\Phi(x \wedge y \wedge z) \\ &= \Phi(x \wedge y \wedge z) \end{aligned}$$

olur.

2. $\forall x \in \mathbb{O}$ için, $Imx = \frac{1}{2}(x - \bar{x})$ olduğundan,

$$Im(x \times y \times z) = \frac{1}{2}((x \times y \times z) - (\overline{x \times y \times z}))$$

olur. $x \times y \times z = \frac{1}{2}(z(yx) - x(yz))$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \overline{x \times y \times z} &= \tfrac{1}{2}(\overline{z(yx) - x(yz)}) = \tfrac{1}{2}(\overline{z(yx)} - \overline{x(yz)}) \\ &= \tfrac{1}{2}((\overline{yx})\bar{z} - (\overline{yz})\bar{x}) = \tfrac{1}{2}((\bar{x}\bar{y})\bar{z} - (\bar{z}\bar{y})\bar{x}) \\ &= \tfrac{1}{2}((zy)x - (xy)z) \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
Im(x \times y \times z) &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}(z(yx) - x(yz)) - \tfrac{1}{2}((zy)x - (xy)z)) \\
&= \tfrac{1}{4}(z(yx) - x(yz) - (zy)x + (xy)z) \\
&= \tfrac{1}{4}(z(yx) - (zy)x) + \tfrac{1}{4}((xy)z - x(yz)) \\
&= -\tfrac{1}{4}((zy)x - z(yx)) + \tfrac{1}{4}((xy)z - x(yz)) \\
&= -\tfrac{1}{4}[z, y, x] + \tfrac{1}{4}[x, y, z] \\
&= \tfrac{1}{4}([x, y, z] + [x, y, z]) \\
&= \tfrac{1}{2}[x, y, z]
\end{aligned}$$

elde edilir.

□

1.5 G_2 Lie Grubu

Tanım 1.5.1. *G_2 olarak adlandırılan grup, oktonyonların otomorfizmlerinin grubudur. Yani;*

$$G_2 \;=\; \{A \in GL(\mathbb{O}) \mid \forall x, y \in \mathbb{O} \;\; i\c{c}in \;\; A(xy) = A(x)A(y)\}$$

olur.

Yardımcı Teorem 1.5.2. *A normlu bir cebir ve ImA'nın ortogonal grubu $O(ImA)$ ise,*

$$Aut(A) \subset O(ImA)$$

olur.

Kanıt. $g \in Aut(A)$ olsun.

1. 1_A, A'nın çarpmaya göre birim elemanı olmak üzere, $g(1_A) = 1_A$'dır:
$\forall a \in A$ için, $a.1_A = a$ olduğundan ve $g(a) = g(1_A.a) = g(1_A)g(a)$ olduğundan, $g(1_A)$ A'nın birim elemanıdır. Birim eleman tek olduğu için; $g(1_A) = 1_A$'dir.

2. g otomorfizmi ReA'daki bir elemanı ReA'daki bir elemana, ImA'daki bir elemanı ImA'daki bir elemana götürür:
$a \in ReA$ ise $a_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $a = a_0.1_A$ olarak yazılır. Bu durumda, $g(a) = g(a_0.1_A) = a_0.g(1_A) = a_0.1_A = a$ olur. O halde; $g(a) \in ReA$'dır.
$a \in ImA$ olsun. Eğer $g(a) \in ReA$ olsaydı öyle bir $a^* \in \mathbb{R}$ bulunabilirdi ki $g(a) = a^*.1_A$ olurdu. g^{-1}'de otomorfizma olduğundan;

$$a = a^*.g^{-1}(1_A) = a^*.1_A$$

olacağından $a \in ReA$ olurdu. Bu $a \in ImA$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla; $g(a) \in ImA$'dır.

3. $x \in A$ için; "$x^2 \in ReA \Longleftrightarrow x \in ReA$ veya $x \in ImA$" ifadesi doğrudur: Öncelikle; $x \in A$ için; $x = Rex + Imx$ olduğundan,

$$x^2 = (Rex)^2 + (Imx)^2 + 2(Rex).(Imx)$$

dir. Ayrıca;
$\|Imx\| = Imx.\overline{Imx} = Imx.(-Imx) = -Imx.Imx = -(Imx)^2$'dir. Dolayısıyla, $(Imx)^2 \in ReA$'dır.

$x^2 \in ReA$ olsun. $x^2 = (Rex)^2 + (Imx)^2 + 2(Rex).(Imx)$ olduğundan, $2Rex.Imx \in ReA$'dır. Bu durumda; $2Rex.Imx = 0$'dır. Buradan; $Rex = 0$ veya $Imx = 0$'dır. Yani; $x \in ReA$ veya $x \in ImA$ olur.
Tersine, $x \in ReA$ ise $Imx = 0$ yani, $x^2 = (Rex)^2$'dir. Dolayısıyla, $x^2 \in ReA$ olur. Eğer, $x \in ImA$ ise $Rex = 0$ yani, $x^2 = (Imx)^2$'dir. $(Imx)^2 = -\|Imx\|$ olduğundan; $(Imx)^2 \in ReA$'dır. Buradan; $x^2 \in ReA$ olur.

4. $g \in GL(ImA)$'dır: Bunun için; $x \in ImA$ iken $g(x) \in ImA$ olduğu gösterilmelidir. $x \in ImA$ ise $(g(x))^2 = g(x).g(x) = g(x^2)$ olur. $x^2 \in ReA$ olduğundan $g(x^2) \in ReA$, dolayısıyla $(g(x))^2 \in ReA$'dır. 3. adımdan, $g(x) \in ReA$ veya $g(x) \in ImA$'dır. $x \in ImA$ olduğundan $g(x) \in ImA$ olur. Yani; $g : ImA \longrightarrow ImA$ olur. Buradan, $g \in GL(ImA)$ sonucuna ulaşılır. Bu durumda, $Aut(A) \subset GL(ImA)$'dır.

5. $x \in ImA$ için; $\overline{g(x)} = g(\bar{x})$'dir: Gerçekten,

$$\overline{g(x)} = -g(x) = g(-1_A.x) = g(-x) = g(\bar{x})$$

olur.

6. $g \in O(ImA)$'dır: Öncelikle;

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &= g(x).\overline{g(x)} = g(x).g(\bar{x}) \\ &= g(x.\bar{x}) = g(\|x\|) \\ &= \|x\|.g(1_A) = \|x\|.1_A \\ &= \|x\| \end{aligned}$$

olduğundan, $\|g(x)\| = \|x\|$ olur.
İkinci olarak, $\forall x \in ImA$ için,

$$"\|g(x)\| = \|x\| \Longleftrightarrow \langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle"$$

ifadesi doğrudur:
$\|g(x)\| = \|x\|$ eşitliğinde x yerine $x+y$ yazılırsa, $\|g(x+y)\| = \|x+y\|$ olur.

$$\begin{aligned}
\|g(x+y)\| &= \langle g(x+y), g(x+y)\rangle \\
&= \langle g(x)+g(y), g(x)+g(y)\rangle \\
&= \langle g(x), g(x)\rangle + 2\langle g(x), g(y)\rangle + \langle g(y), g(y)\rangle \\
&= \|g(x)\| + 2\langle g(x), g(y)\rangle + \|g(y)\| \\
&= \|x\| + 2\langle g(x), g(y)\rangle + \|y\|
\end{aligned}$$

Diğer taraftan;

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\| + 2\langle x, y\rangle + \|y\|
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\langle g(x), g(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

olur.
Tersine; $\langle g(x), g(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ eşitliğinde y yerine x alırsak;

$$\begin{aligned}
\langle g(x), g(x)\rangle &= \langle x, x\rangle \\
\|g(x)\| &= \|x\|
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda; $\forall x, y \in ImA$ için, $\langle g(x), g(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ olduğundan, $g \in O(ImA)$ olur ve

$$Aut(A) \subset O(ImA)$$

sonucuna ulaşılır.

□

Yardımcı Teorem 1.5.3. *$g \in Aut(\mathbb{O})$ ise g, $\mathbb{O}$ üzerinde tanımlanmış olan Φ temel 3-formu korur.*

Kanıt. Φ temel 3−formu; $\forall x, y, z \in Im\mathbb{O}$ için, $\Phi(x, y, z) = \langle x, yz\rangle$ olarak tanımlandığından herhangi bir $g \in Aut(\mathbb{O}) \subset O(Im\mathbb{O})$ için,

$$\begin{aligned}
\Phi(g(x), g(y), g(z)) &= \langle g(x), g(y)g(z)\rangle = \langle g(x), g(yz)\rangle \\
&= \langle x, yz\rangle = \Phi(x, y, z)
\end{aligned}$$

bulunur. □

Φ temel 3$-$formunun $(Im\mathbb{O})^*$ için seçilen bir taban için, bu taban elemanları cinsinden ifadesi de elde edilebilir: $\mathbb{O} = \mathbb{H} \bigoplus \mathbb{H}$ olduğundan; $Im\mathbb{O}$ için,

$$e_1 = (i,0), \quad e_2 = (j,0), \quad e_3 = (k,0), \quad e_4 = (0,i), \quad e_5 = (0,j),$$
$$e_6 = (0,k), \quad e_7 = (0,1)$$

tabanı seçilsin. Burada,

$$i.j = k, \quad j.k = i, \quad k.i = j, \quad j.i = -k,$$
$$k.j = -i, \quad i.k = -j, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

dir. $\forall\ k, m \in \{1, 2, ..., 7\}$ için, $e_k.e_m$ yani, taban elemanlarının birbirleriyle çarpımları aşağıdaki tablado verilmiştir.

.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_3	$-e_2$	$-e_7$	$-e_6$	e_5	e_4
e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	$-e_7$	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	-1	$-e_5$	e_4	$-e_7$	e_6
e_4	e_4	$-e_7$	e_6	-1	$-e_3$	e_2	$-e_1$
e_5	e_7	e_4	$-e_5$	e_3	-1	$-e_1$	$-e_2$
e_6	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_2$	e_1	-1	$-e_3$
e_7	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	e_1	e_2	e_3	-1

Tablo 1.1: Cayley-Dickson metoduna göre taban elemanlarının çarpım tablosu

Şimdi; $(Im\mathbb{O})^*$'ın taban elemanları, $e_i^* : Im\mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{R}$, $e_i^*(e_j) := \delta_{ij}$ olmak üzere, $\{e_1^*, e_2^*, ..., e_7^*\}$ olsun. O halde, Φ temel 3$-$ formunun bu taban elemanları cinsinden tek türlü belirli bir yazılışı vardır. Kısalık açısından, $\forall i, j, k$ için $e_i^* \wedge e_j^* \wedge e_k^* = e_{ijk}^*$ gösterimi kullanıldığında, $\Phi = \sum_{i<j<k} a_{ijk} e_i^* e_j^* e_k^*$ olarak ifade edilip, a_{ijk} katsayıları bulunursa, Φ belirlenmiş olur. Bunun için, $Im\mathbb{O}$'nun taban elemanları Φ'ye girilirse, $\Phi(e_i, e_j, e_k) = a_{ijk}$ olduğu görülür. Diğer taraftan, $\Phi(e_i, e_j, e_k) = \langle e_i, e_j e_k \rangle$ olduğu için, $a_{ijk} = \langle e_i, e_j e_k \rangle$ olur ve a_{ijk} katsayısı hesaplanır. Son durumda, Φ temel 3$-$formu, $e_1^*, e_2^*, ..., e_7^*$ taban elemanları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\Phi \quad = \quad e_{123}^* - e_{147}^* - e_{156}^* + e_{246}^* - e_{257}^* - e_{345}^* - e_{367}^* \tag{1.25}$$

$$(g^*\Phi)(x,y,z) := \Phi(g(x),g(y),g(z))$$

olmak üzere, $g \in G_2$ için, bir önceki yardımcı teoremden; $g^*\Phi = \Phi$ olur. Bu ifadenin tersi de doğrudur. Yani, $g^*\Phi = \Phi$ ise $g \in G_2$'dir. Bu nedenle, G_2 grubu aşağıdaki teoremdeki gibi de karakterize edilebilir.

Teorem 1.5.4. (**Bryant**)

$$G_2 \;=\; \{g \in GL(Im\mathbb{O})|\ g^*\Phi = \Phi\} \tag{1.26}$$

Kanıt. $A = \{g \in GL(Im\mathbb{O})|\ g^*\Phi = \Phi\}$ olsun. Bir an için;

"$g \in GL(Im\mathbb{O})$ elemanı $g^*\Phi = \Phi$ özelliğini sağlıyorsa $g \in O(Im\mathbb{O})$"

olduğu varsayılsın ve

$$B = \{g \in GL(Im\mathbb{O})|\forall x,y,\in Im\mathbb{O} \text{ için } g(x\times y) = g(x)\times g(y)\}$$

olsun. $g \in A$ ise $\forall x,y,z \in Im\mathbb{O}$ için,

$$\begin{aligned}
\langle g(x), g(y\times z)\rangle &= \langle x, y\times z\rangle = \langle x, Im(y.z)\rangle \\
&= \langle x, yz\rangle = \Phi(x\wedge y\wedge z) \\
&= g^*\Phi(x\wedge y\wedge z) \\
&= \Phi(g(x)\wedge g(y)\wedge g(z)) \\
&= \langle g(x), g(y)\times g(z)\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, iç çarpım non-dejenere olduğu için,

$$\forall y,z \in Im\mathbb{O} \ \text{ için } \ g(y\times z) = g(y)\times g(z)$$

olur. Bu durumda, $g \in B$ ve $A \subseteq B$ olur.

Ayrıca,

$$G_2 = \{g \in GL(\mathbb{O})|\forall x,y \in \mathbb{O} \text{ için } g(x.y) = g(x).g(y)\}$$

olarak tanımlıydı. Bu adımda, $B = G_2$ olduğu gösterilecektir. $g \in B$ olsun. $g : Im\mathbb{O} \longrightarrow Im\mathbb{O}$ olduğundan g'nin, $g : \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{O}$ olarak tanımlı olması için, g $Re\mathbb{O}$'yu da $Re\mathbb{O}$'ya götürecek şekilde genişletilsin. Yani; $g(1) = 1$ olsun. Şimdi; $g : \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{O}$, $g(1) = 1$ ve $\forall x,y \in Im\mathbb{O}$ için $g(x\times y) = g(x)\times g(y)$ şartlarını sağlayan bir dönüşüm olarak alınabilir. $\forall x,y \in \mathbb{O}$ için $g(x.y) = g(x).g(y)$ olduğunu görelim. $x,y \in \mathbb{O}$ ise $x_1,y_1 \in Re\mathbb{O}$ ve $x_2,y_2 \in Im\mathbb{O}$ olmak üzere,

$x = x_1 + x_2$ ve $y = y_1 + y_2$ olarak ifade edilebilir. Ayrıca; $x_1, y_1 \in Re\mathbb{O}$ olduğu için, $x_1 = x_0.1$ ve $y_1 = y_0.1$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ vardır.

$$\begin{aligned}
g(x.y) &= g((x_1 + x_2).(y_1 + y_2)) \\
&= g(x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2) \\
&= g(x_1y_1) + g(x_1y_2) + g(x_2y_1) + g(x_2y_2) \\
&= g((x_01)(y_01)) + g((x_01)y_2) + g(x_2(y_01)) + g(x_2y_2) \\
&= g((x_0y_0)1) + g(x_0(1y_2)) + g((x_21)y_0) + g(x_2y_2) \\
&= x_0y_0g(1) + x_0g(1y_2)) + y_0g(x_21) + g(x_2y_2) \\
&= x_0y_0 + x_0g(y_2) + y_0g(x_2) + g(x_2y_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(x).g(y) &= g(x_1 + x_2).g(y_1 + y_2) \\
&= (g(x_1) + g(x_2)).(g(y_1) + g(y_2)) \\
&= g(x_1)g(y_1) + g(x_1)g(y_2) + g(x_2)g(y_1) + g(x_2)g(y_2) \\
&= g(x_01)g(y_01) + g(x_01)g(y_2) + g(x_2)g(y_01) + g(x_2)g(y_2) \\
&= x_0g(1)y_0g(1) + x_0g(1)g(y_2) + g(x_2)y_0g(1) + g(x_2)g(y_2) \\
&= x_0y_01 + x_01g(y_2) + y_0g(x_2)1 + g(x_2)g(y_2) \\
&= x_0y_0 + x_0g(y_2) + y_0g(x_2) + g(x_2)g(y_2)
\end{aligned}$$

Bu durumda,

$$g(x.y) = x_0y_0 + x_0g(y_2) + y_0g(x_2) + g(x_2y_2)$$

$$g(x).g(y) = x_0y_0 + x_0g(y_2) + y_0g(x_2) + g(x_2)g(y_2)$$

eşitliklerine ulaşılır. Son iki eşitlikten görülüyor ki, $g(x_2y_2) = g(x_2)g(y_2)$ olduğu gösterilirse, $g(x.y) = g(x).g(y)$ eşitliği ispatlanmış olur. $\forall\ a, b \in Im\mathbb{O}$ için, $g(a \times b) = g(a) \times g(b)$ olduğundan, $g(x_2 \times y_2) = g(x_2) \times g(y_2)$'dir. $x_2 \times y_2 = x_2y_2 + \langle x_2, y_2 \rangle$ olduğu için,

$$g(x_2 \times y_2) = g(x_2y_2 + \langle x_2, y_2 \rangle)$$

$$g(x_2) \times g(y_2) = g(x_2)g(y_2) + \langle g(x_2), g(y_2) \rangle$$

eşitliklerine ulaşılır. İç çarpım non-dejenere olduğundan, $\forall\ z \in Im\mathbb{O}$ için,

$$\langle g(x_2 \times y_2), z \rangle = \langle g(x_2) \times g(y_2), z \rangle$$

dir. Son eşitlik kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\langle g(x_2y_2 + \langle x_2, y_2 \rangle), z \rangle &= \langle g(x_2)g(y_2) + \langle g(x_2), g(y_2) \rangle, z \rangle \\
\langle g(x_2y_2) + g(\langle x_2, y_2 \rangle), z \rangle &= \langle g(x_2)g(y_2) + \langle g(x_2), g(y_2) \rangle, z \rangle \\
\langle g(x_2y_2), z \rangle + \langle g(\langle x_2, y_2 \rangle), z \rangle &= \langle g(x_2)g(y_2), z \rangle + \langle \langle g(x_2), g(y_2) \rangle, z \rangle \\
\langle g(x_2y_2), z \rangle + \langle \langle x_2, y_2 \rangle g(1), z \rangle &= \langle g(x_2)g(y_2), z \rangle + \langle \langle g(x_2), g(y_2) \rangle, z \rangle \\
\langle g(x_2y_2), z \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle \langle g(1), z \rangle &= \langle g(x_2)g(y_2), z \rangle + \langle g(x_2), g(y_2) \rangle \langle 1, z \rangle \\
\langle g(x_2y_2), z \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle \langle 1, z \rangle &= \langle g(x_2)g(y_2), z \rangle + \langle g(x_2), g(y_2) \rangle \langle 1, z \rangle
\end{aligned}$$

$z \in Im\mathbb{O}$ olduğu için, $\langle 1, z\rangle = 0$ olur. Dolayısıyla,

$$\langle g(x_2y_2), z\rangle = \langle g(x_2)g(y_2), z\rangle$$

eşitliğine ulaşılır. $\forall\ z \in Im\mathbb{O}$ için, $\langle g(x_2y_2), z\rangle = \langle g(x_2)g(y_2), z\rangle$ olduğundan, $g(x_2y_2) = g(x_2)g(y_2)$ olur. Sonuç olarak, $\forall x, y \in \mathbb{O}$ için $g(x.y) = g(x).g(y)$ olduğundan, $g \in G_2$'dir. O halde,

$$B \ \subseteq \ G_2 \tag{1.27}$$

olur. Şimdi, $g \in G_2$ olsun. $\forall x, y, z \in Im\mathbb{O}$ için,

$$\begin{aligned}
\langle g(x \times y), z\rangle &= \langle g(x.y + \langle x, y\rangle), z\rangle \\
&= \langle g(x.y) + g(\langle x, y\rangle), z\rangle \\
&= \langle g(x.y), z\rangle + \langle g(\langle x, y\rangle), z\rangle \\
&= \langle g(x.y), z\rangle + \langle \langle x, y\rangle\, g(1), z\rangle \\
&= \langle g(x.y), z\rangle + \langle x, y\rangle\, \langle g(1), z\rangle \\
&= \langle g(x.y), z\rangle + \langle x, y\rangle\, \langle 1, z\rangle \\
&= \langle g(x.y), z\rangle
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\langle g(x) \times g(y), z\rangle &= \langle g(x).g(y) + \langle g(x), g(y)\rangle\, , z\rangle \\
&= \langle g(x).g(y), z\rangle + \langle \langle g(x), g(y)\rangle\, , z\rangle \\
&= \langle g(x).g(y), z\rangle + \langle g(x), g(y)\rangle\, \langle 1, z\rangle \\
&= \langle g(x).g(y), z\rangle
\end{aligned}$$

olduğu için,

$$\langle g(x \times y), z\rangle = \langle g(x.y), z\rangle$$

$$\langle g(x) \times g(y), z\rangle = \langle g(x).g(y), z\rangle$$

eşitliklerine ulaşılır. $g(x.y) = g(x).g(y)$ olduğundan ve iç çarpımın non-dejenere olmasından,

$$g(x \times y) = g(x) \times g(y)$$

olur. Yani, $g \in B$'dir. O halde,

$$G_2 \ \subseteq \ B \tag{1.28}$$

elde edilir. (1.27) ve (1.28)'dan $G_2 = B$'dir. Daha önce, $A \subseteq B$ olduğunu gösterilmişti. Bu durumda,

$$A \ \subseteq \ G_2 \tag{1.29}$$

olur. $G_2 \subseteq A$ ifadesinin de doğru olduğu bilindiğine göre,

$$G_2 \;=\; A \tag{1.30}$$

sonucuna ulaşılır.

Başlangıçta varsayılan;

"$g \in GL(Im\mathbb{O})$ elemanı $g^*\Phi = \Phi$ özelliğini sağlıyorsa $g \in O(Im\mathbb{O})$'dır."

ifadesi ispatlanısa teoremin ispatı tamamlanmış olur. Öncelikle ispat içinde kullanılacak olan;

$$(x\lrcorner\Phi) \wedge (x\lrcorner\Phi) \wedge \Phi \;=\; 6\|x\|\lambda \tag{1.31}$$

eşitliği ispatlanacaktır. Burada, $\lambda = e_1^* \wedge e_2^* \wedge .... \wedge e_7^*$, $Im\mathbb{O}$ için standart hacim elemanıdır.

$\{e_1, e_2, ..., e_7\}$, $Im\mathbb{O}$ için standart taban olmak üzere, $x \in Im\mathbb{O}$ için, $x = \sum_{i=1}^{7} x_i.e_i$ olacak şekilde $x_i \in \mathbb{R}$ sayıları vardır. Bu durumda, kontraksiyon dönüşümü, $\lrcorner$ lineer olduğundan; $x\lrcorner\Phi = (\sum_{i=1}^{7} x_i.e_i)\lrcorner\Phi = \sum_{i=1}^{7} x_i.(e_i\lrcorner\Phi)$'dir. ψ bir $p-$form ve η bir $q-$form olmak üzere,

$$\psi \wedge \eta = (-1)^{p.q}\eta \wedge \psi$$

olduğundan ve $\forall i \in \{1, 2, ..., 7\}$ için, $e_i\lrcorner\Phi$'ler $2-$form olduğundan, $i \neq j$ için, $(e_i\lrcorner\Phi) \wedge (e_j\lrcorner\Phi) = (e_i\lrcorner\Phi) \wedge (e_j\lrcorner\Phi)$ olur. $(x\lrcorner\Phi) \wedge (x\lrcorner\Phi)$'yi hesaplanırken bu ifade kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
(x\lrcorner\Phi) \wedge (x\lrcorner\Phi) \;=\; & \textstyle\sum_{i=1}^{7} x_i^2.(e_i\lrcorner\Phi) \wedge (e_i\lrcorner\Phi) \\
& +2\textstyle\sum_{i=2}^{7} x_1.x_i(e_1\lrcorner\Phi) \wedge (e_i\lrcorner\Phi) \\
& +2\textstyle\sum_{i=3}^{7} x_2.x_i(e_2\lrcorner\Phi) \wedge (e_i\lrcorner\Phi) \\
& +2\textstyle\sum_{i=4}^{7} x_3.x_i(e_3\lrcorner\Phi) \wedge (e_i\lrcorner\Phi) \\
& +2\textstyle\sum_{i=5}^{7} x_4.x_i(e_4\lrcorner\Phi) \wedge (e_i\lrcorner\Phi) \\
& +2\textstyle\sum_{i=6}^{7} x_5.x_i(e_5\lrcorner\Phi) \wedge (e_i\lrcorner\Phi) \\
& +2x_6.x_7(e_6\lrcorner\Phi) \wedge (e_7\lrcorner\Phi)
\end{aligned}$$

olur. $\{e_1^*, e_2^*, ..., e_7^*\}$ tabanı kullanıldığında ve gerekli hesaplamalar yapıldığında, $(x\lrcorner\Phi) \wedge (x\lrcorner\Phi)$ $4-$formunun standart taban elemanları türünden yazılışı, aşağıdaki gibidir: $i, j, k, l \in \{1, 2, ..., 7\}$ için $e_i^* \wedge e_j^* \wedge e_k^* \wedge e_l^* = e_{ijkl}^*$ olarak gösterilirse,

$$\begin{aligned}
(x \lrcorner \Phi) \wedge (x \lrcorner \Phi) &= x_1^2(-2e^*_{2347} - 2e^*_{2356} + 2e^*_{4567}) \\
&\quad + x_2^2(-2e^*_{1346} + 2e^*_{1357} + 2e^*_{4567}) \\
&\quad + x_3^2(-2e^*_{1245} - 2e^*_{1267} + 2e^*_{4567}) \\
&\quad + x_4^2(-2e^*_{1267} + 2e^*_{1357} - 2e^*_{2356}) \\
&\quad + x_5^2(-2e^*_{1267} - 2e^*_{1346} - 2e^*_{2347}) \\
&\quad + x_6^2(-2e^*_{1245} + 2e^*_{1357} - 2e^*_{2347}) \\
&\quad + x_7^2(-2e^*_{1245} - 2e^*_{1346} - 2e^*_{2356}) \\
&\quad + 2x_1x_2(e^*_{2346} - e^*_{2357} + e^*_{1347} + e^*_{1356}) \\
&\quad + 2x_1x_3(-e^*_{2345} - e^*_{2367} - e^*_{1247} - e^*_{1256}) \\
&\quad + 2x_1x_4(e^*_{1237} - e^*_{2467} + e^*_{3457} - e^*_{1567}) \\
&\quad + 2x_1x_5(e^*_{1236} + e^*_{1467} - e^*_{2567} + e^*_{3456}) \\
&\quad + 2x_1x_6(-e^*_{1235} - e^*_{1457} - e^*_{2456} - e^*_{3567}) \\
&\quad + 2x_1x_7(-e^*_{1234} - e^*_{2457} - e^*_{3467} + e^*_{1456}) \\
&\quad + 2x_2x_3(e^*_{1345} + e^*_{1367} + e^*_{1246} - e^*_{1257}) \\
&\quad + 2x_2x_4(-e^*_{1236} + e^*_{1467} - e^*_{3456} - e^*_{2567}) \\
&\quad + 2x_2x_5(e^*_{1237} + e^*_{2467} + e^*_{1567} + e^*_{3457}) \\
&\quad + 2x_2x_6(e^*_{1234} + e^*_{1456} + e^*_{3467} - e^*_{2457}) \\
&\quad + 2x_2x_7(-e^*_{1235} + e^*_{2456} + e^*_{1457} - e^*_{3567}) \\
&\quad + 2x_3x_4(e^*_{1235} - e^*_{1457} + e^*_{2456} - e^*_{3567}) \\
&\quad + 2x_3x_5(-e^*_{1234} - e^*_{1456} - e^*_{2457} + e^*_{3467}) \\
&\quad + 2x_3x_6(e^*_{1237} - e^*_{3457} + e^*_{1567} - e^*_{2467}) \\
&\quad + 2x_3x_7(-e^*_{1236} + e^*_{3456} + e^*_{1467} + e^*_{2567}) \\
&\quad + 2x_4x_5(-e^*_{1347} + e^*_{2346} + e^*_{1356} + e^*_{2357}) \\
&\quad + 2x_4x_6(e^*_{1247} - e^*_{1256} + e^*_{2357} - e^*_{2345}) \\
&\quad + 2x_4x_7(-e^*_{1257} - e^*_{1367} - e^*_{1246} + e^*_{1345}) \\
&\quad + 2x_5x_6(e^*_{1246} - e^*_{1367} + e^*_{1257} + e^*_{1345}) \\
&\quad + 2x_5x_7(-e^*_{1256} + e^*_{1247} - e^*_{2367} + e^*_{2345}) \\
&\quad + 2x_6x_7(-e^*_{1356} + e^*_{2346} + e^*_{1347} + e^*_{2357})
\end{aligned}$$

olur. Φ'nin taban elemanları türünden yazılışı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
(x \lrcorner \Phi) \wedge (x \lrcorner \Phi) \wedge \Phi &= (6x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 6x_4^2 + 6x_5^2 + 6x_6^2 + 6x_7^2)e^*_{1234567} \\
&= 6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2)e^*_{1234567} \\
&= 6\|x\|e^*_{1234567} \\
&= 6\|x\|\lambda
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte, x yerine $x + y$ yazılırsa,

$$((x + y) \lrcorner \Phi) \wedge ((x + y) \lrcorner \Phi) \wedge \Phi = 6\|x + y\|\lambda$$

olur. Eşitliğin sol tarafı,

$$\begin{aligned}((x\lrcorner\Phi)+(y\lrcorner\Phi))\wedge((x\lrcorner\Phi)+(y\lrcorner\Phi))\wedge\Phi &= (x\lrcorner\Phi)\wedge((x\lrcorner\Phi)+(y\lrcorner\Phi)\wedge\Phi)\\ &\quad+(y\lrcorner\Phi)\wedge((x\lrcorner\Phi)+(y\lrcorner\Phi)\wedge\Phi)\\ &= ((x\lrcorner\Phi)\wedge(x\lrcorner\Phi)\wedge\Phi)\\ &\quad+((x\lrcorner\Phi)\wedge(y\lrcorner\Phi)\wedge\Phi)\\ &\quad+((y\lrcorner\Phi)\wedge(x\lrcorner\Phi)\wedge\Phi)\\ &\quad+((y\lrcorner\Phi)\wedge(y\lrcorner\Phi)\wedge\Phi)\\ &= 6\|x\|\lambda+((x\lrcorner\Phi)\wedge(y\lrcorner\Phi)\wedge\Phi)\\ &\quad+((y\lrcorner\Phi)\wedge(x\lrcorner\Phi)\wedge\Phi)+6\|y\|\lambda\end{aligned}$$

olur. Eşitliğin sağ tarafı ise,

$$\begin{aligned}6\langle x+y,x+y\rangle\lambda &= 6(\langle x,x\rangle+2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle)\lambda\\ &= 6(\|x\|+2\langle x,y\rangle+\|y\|)\lambda\\ &= 6\|x\|\lambda+12\langle x,y\rangle\lambda+6\|y\|\lambda\end{aligned}$$

olduğundan,

$$((x\lrcorner\Phi)\wedge(y\lrcorner\Phi)\wedge\Phi)+((y\lrcorner\Phi)\wedge(x\lrcorner\Phi)\wedge\Phi)=12\langle x,y\rangle\lambda$$

eşitliğine ulaşılır. $x\lrcorner\Phi$ ve $y\lrcorner\Phi$ $2-$formlar olduklarından,
$(y\lrcorner\Phi)\wedge(x\lrcorner\Phi)=(x\lrcorner\Phi)\wedge(y\lrcorner\Phi)$'dir. Bu eşitlik kullanılırsa,

$$(x\lrcorner\Phi)\wedge(y\lrcorner\Phi)\wedge\Phi = 6\langle x,y\rangle\lambda \tag{1.32}$$

elde edilir.

$g\in GL(Im\mathbb{O})$ ve $g^*\Phi=\Phi$ olsun. g^* eşitlik (1.32)'e uygulanırsa,

$$\begin{aligned}g^*((x\lrcorner\Phi)\wedge(y\lrcorner\Phi)\wedge\Phi) &= g^*(6\langle x,y\rangle\lambda)\\ g^*(x\lrcorner\Phi)\wedge g^*(y\lrcorner\Phi)\wedge g^*\Phi &= 6\langle x,y\rangle g^*(\lambda)\end{aligned}$$

olur. $g^*(x\lrcorner\Phi)=g^{-1}(x)\lrcorner\Phi$ ve $g^*(\lambda)=detg.\lambda$ eşitlikleri yerine konulduğunda,

$$(g^{-1}(x)\lrcorner\Phi)\wedge(g^{-1}(y)\lrcorner\Phi)\wedge\Phi=6\langle x,y\rangle detg.\lambda$$

bulunur. Ayrıca, $(x\lrcorner\Phi)\wedge(y\lrcorner\Phi)\wedge\Phi=6\langle x,y\rangle\lambda$ eşitliğinde x yerine $g^{-1}(x)$, y yerine $g^{-1}(y)$ yazılırsa,

$$(g^{-1}(x)\lrcorner\Phi)\wedge(g^{-1}(y)\lrcorner\Phi)\wedge\Phi=6\left\langle g^{-1}(x),g^{-1}(y)\right\rangle\lambda$$

eşitliği elde edilir. Son iki eşitliğin sol taraflarının eşitliğinden dolayı,

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle detg.\lambda &= \langle g^{-1}(x),g^{-1}(y)\rangle\lambda\\ (\langle x,y\rangle detg-\langle g^{-1}(x),g^{-1}(y)\rangle)\lambda &= 0\\ \langle x,y\rangle detg-\langle g^{-1}(x),g^{-1}(y)\rangle &= 0\\ \langle x,y\rangle detg &= \langle g^{-1}(x),g^{-1}(y)\rangle\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikte, x yerine $g(x)$, y yerine $g(y)$ yazılırsa,

$$\langle g(x), g(y)\rangle \, detg = \left\langle g^{-1}(g(x)), g^{-1}(g(y))\right\rangle$$

olur ki, buradan,

$$\begin{aligned} \langle g(x), g(y)\rangle \, detg &= \langle x, y\rangle \\ \langle g(x), g(y)\rangle &= \frac{1}{detg}\langle x, y\rangle \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $detg = 1$ olduğu gösterilirse $g \in O(Im\mathbb{O})$ olduğu ispatlanmış olur. $\lambda = e_1^* \wedge e_2^* \wedge .... \wedge e_7^*$ olmak üzere, $\forall x_1, x_2, ..., x_7 \in Im\mathbb{O}$ için,

$$(\lambda(x_1, x_2, ..., x_7))^2 = det(\langle x_i, x_j\rangle)_{i,j=1}^7$$

dir. Yukarıdaki eşitlikte, $\forall i$ için x_i yerine $g^{-1}(e_i)$ yazılırsa,

$$(\lambda(g^{-1}(e_1), g^{-1}(e_2), ..., g^{-1}(e_7)))^2 = det(\left\langle g^{-1}(e_i), g^{-1}(e_j)\right\rangle)_{i,j=1}^7$$

olur. $\langle x, y\rangle .detg = \langle g^{-1}(x), g^{-1}(y)\rangle$ ve
$\lambda(g^{-1}(e_1), g^{-1}(e_2), ..., g^{-1}(e_7)) = detg^{-1}.\lambda(e_1, e_2, ..., e_7)$ olduğundan,

$$(detg^{-1}.\lambda(e_1, e_2, ..., e_7))^2 = det(detg.(\langle e_i, e_j\rangle)_{i,j=1}^7)$$

olur. $\lambda(e_1, e_2, ..., e_7) = 1$ ve $(\langle e_i, e_j\rangle)_{i,j=1}^7$ 7×7'lik bir matris olduğundan,

$$(detg^{-1})^2 = (detg)^7.det(\langle e_i, e_j\rangle)_{i,j=1}^7$$

bulunur. $detg^{-1} = (detg)^{-1}$ ve $(\langle e_i, e_j\rangle)_{i,j=1}^7$ birim matris olduğundan,

$$\begin{aligned} ((detg)^{-1})^2 &= (detg)^7.1 \\ (detg)^{-2} &= (detg)^7 \\ (detg)^9 &= 1 \\ detg &= 1 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda, $g \in SO(Im\mathbb{O})$ dolayısıyla, $g \in O(Im\mathbb{O})$ olur. □

Φ temel 3−formu kullanılarak aşağıdaki dönüşüm tanımlansın.

$$\begin{aligned} d : End(Im\mathbb{O}) &\longrightarrow \textstyle\bigwedge^3(Im\mathbb{O})^* \\ A &\longrightarrow d(A) := A^*\Phi \end{aligned}$$

Burada, $A^*\Phi$, $(v_1, v_2, v_3) \in (Im\mathbb{O})^3$ için $A^*\Phi(v_1, v_2, v_3) := \Phi(Av_1, Av_2, Av_3)$ olarak tanımlıdır. Bu dönüşüm lineer değildir. Bu dönüşümü, $I \in End(Im\mathbb{O})$

noktasında lineerleştirmek için I noktasında A yönündeki yönlü türevi gözönüne alınsın. Bu dönüşümün türev fonksiyonu,

$$\begin{array}{rlcl} D: & T_I(End(Im\mathbb{O})) & \longrightarrow & T_\Phi(\bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*) \\ & A & \longmapsto & D(A) := \frac{d}{dt}(I+tA)^*\Phi|_{t=0} \end{array}$$

şeklindedir. Burada, $T_I(End(Im\mathbb{O})) \cong End(Im\mathbb{O})$ ve $T_\Phi(\bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*) \cong \bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*$'dır. O halde; D, $End(Im\mathbb{O})$'dan $\bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*$'a lineer bir fonksiyondur.

Şimdi; $\forall x, y, z \in Im\mathbb{O}$ için,

$$\begin{aligned} D(A)(x\wedge y\wedge z) &= (\tfrac{d}{dt}(I+tA)^*\Phi|_{t=0})(x\wedge y\wedge z) \\ &= \tfrac{d}{dt}((I+tA)^*\Phi)(x\wedge y\wedge z)|_{t=0} \\ &= \tfrac{d}{dt}(\Phi((I+tA)x\wedge(I+tA)y\wedge(I+tA)z))|_{t=0} \\ &= \tfrac{d}{dt}(\Phi((x+tAx)\wedge(y+tAy)\wedge(z+tAz)))|_{t=0} \\ &= \tfrac{d}{dt}(\Phi((x+tAx)\wedge(y+tAy)\wedge z) \\ &\quad +\Phi((x+tAx)\wedge(y+tAy)\wedge tAz))|_{t=0} \\ &= \tfrac{d}{dt}(\Phi((x+tAx)\wedge y\wedge z)+\Phi((x+tAx)\wedge tAy\wedge z) \\ &\quad +\Phi((x+tAx)\wedge y\wedge tAz) \\ &\quad +\Phi((x+tAx)\wedge tAy\wedge tAz))|_{t=0} \\ &= \tfrac{d}{dt}(\Phi(x\wedge y\wedge z)+\Phi(tAx\wedge y\wedge z)+\Phi(x\wedge tAy\wedge z) \\ &\quad +\Phi(tAx\wedge tAy\wedge z)+\Phi(x\wedge y\wedge tAz)+\Phi(tAx\wedge y\wedge tAz) \\ &\quad +\Phi(x\wedge tAy\wedge tAz)+\Phi(tAx\wedge tAy\wedge tAz))|_{t=0} \\ &= \tfrac{d}{dt}(\Phi(x\wedge y\wedge z)+t\Phi(Ax\wedge y\wedge z)+t\Phi(x\wedge Ay\wedge z) \\ &\quad +t^2\Phi(Ax\wedge Ay\wedge z)+t\Phi(x\wedge y\wedge Az) \\ &\quad +t^2\Phi(Ax\wedge y\wedge Az)+t^2\Phi(x\wedge Ay\wedge Az) \\ &\quad +t^3\Phi(Ax\wedge Ay\wedge Az))|_{t=0} \\ &= 0+(\Phi(Ax\wedge y\wedge z))|_{t=0}+(\Phi(x\wedge Ay\wedge z))|_{t=0} \\ &\quad +(2t\Phi(Ax\wedge Ay\wedge z))|_{t=0}+(\Phi(x\wedge y\wedge Az))|_{t=0} \\ &\quad +(2t\Phi(Ax\wedge y\wedge Az))|_{t=0}+(2t\Phi(x\wedge Ay\wedge Az))|_{t=0} \\ &\quad +(3t^2\Phi(Ax\wedge Ay\wedge Az))|_{t=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 0 + \Phi(Ax \wedge y \wedge z) + \Phi(x \wedge Ay \wedge z) \\ &\quad +0 + \Phi(x \wedge y \wedge Az) \\ &= \Phi(Ax \wedge y \wedge z) + \Phi(x \wedge Ay \wedge z) + \Phi(x \wedge y \wedge Az) \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. D fonksiyonunun lineerliği, türev fonksiyonunun lineer olmasından yararlanarak elde edilen yukarıdaki eşitlik, $\wedge$ çarpımı ve Φ temel 3-formunun lineerliğinden kolayca görülür.

Yardımcı Teorem 1.5.5. *$D : End(Im\mathbb{O}) \longrightarrow \bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*$ lineer dönüşümü çekirdek uzayı $14-$boyutlu, örten bir dönüşümdür.*

Kanıt. $boy_{\mathbb{R}}(End(Im\mathbb{O})) = 49$, $boy(\bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*) = 35$, Boyut teoreminden, *boy (ÇekD)+boy (GörD)=boy*$(End(Im\mathbb{O}))$ ve
boy(GörD)$\leq$*boy*$(\bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*)$ olduğundan,

$$boy(\text{Çek}D) \geq 14 \tag{1.33}$$

tür. D dönüşümünün örten olduğunu görmek için, boy(Çek D)$=14$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Bunun için,

$$boy(\text{Çek}D) \leq 14 \tag{1.34}$$

ifadesi ispatlanmalıdır.

İlk olarak, $D(A)$ için başka bir açılım yazılabilir.
$End(Im\mathbb{O}) \cong (Im\mathbb{O})\otimes(Im\mathbb{O})^*$ olduğundan, $A \in End(Im\mathbb{O})$ için, $\alpha \in (Im\mathbb{O})^*$ ve $u \in Im\mathbb{O}$ olmak üzere,

$$A := u \otimes \alpha \tag{1.35}$$

olarak yazılabilir ve $\forall x \in Im\mathbb{O}$ için, $Ax := \alpha(x).u$ şeklinde alındığında,

$$\begin{aligned} D(A)(x \wedge y \wedge z) &= D(u \otimes \alpha)(x \wedge y \wedge z) \\ &= \Phi((u \otimes \alpha)x \wedge y \wedge z) + \Phi(x \wedge (u \otimes \alpha)y \wedge z) \\ &\quad +\Phi(x \wedge y \wedge (u \otimes \alpha)z) \\ &= \Phi((\alpha(x).u) \wedge y \wedge z) + \Phi(x \wedge (\alpha(y).u) \wedge z) \\ &\quad +\Phi(x \wedge y \wedge (\alpha(z).u)) \\ &= \alpha(x)\Phi(u \wedge y \wedge z) - \alpha(y)\Phi(u \wedge x \wedge z) \\ &\quad +\alpha(z)\Phi(u \wedge x \wedge y) \\ &= \Phi(u \wedge (\alpha(x)y) \wedge z) - \Phi(u \wedge (\alpha(y)x) \wedge z) \\ &\quad +\Phi(u \wedge (\alpha(z)x) \wedge y) \\ &= (u \lrcorner \Phi)((\alpha(x)y) \wedge z) - (u \lrcorner \Phi)((\alpha(y)x) \wedge z) \\ &\quad +(u \lrcorner \Phi)((\alpha(z)x) \wedge y) \\ &= (u \lrcorner \Phi)((\alpha(x)y) \wedge z - (\alpha(y)x) \wedge z + (\alpha(z)x) \wedge y) \end{aligned}$$

$$D(u \otimes \alpha)(x \wedge y \wedge z) = (u \lrcorner \Phi)((\alpha(x)y) \wedge z - (\alpha(y)x) \wedge z + (\alpha(z)x) \wedge y)$$

eşitliğine ulaşılır. Şimdi, $\forall x, y, z \in Im\mathbb{O}$ için,

$$\begin{aligned}
(\alpha \wedge (u \lrcorner \Phi))(x \wedge y \wedge z) &= \alpha(x)((u \lrcorner \Phi)(y \wedge z)) - \alpha(y)((u \lrcorner \Phi)(x \wedge z)) \\
&\quad + \alpha(z)((u \lrcorner \Phi)(x \wedge y)) \\
&= (u \lrcorner \Phi)((\alpha(x)y) \wedge z) - (u \lrcorner \Phi)((\alpha(y)x) \wedge z) \\
&\quad + (u \lrcorner \Phi)((\alpha(z)x) \wedge y) \\
&= (u \lrcorner \Phi)((\alpha(x)y) \wedge z - (\alpha(y)x) \wedge z + (\alpha(z)x) \wedge y)
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(\alpha \wedge (u \lrcorner \Phi))(x \wedge y \wedge z) = (u \lrcorner \Phi)((\alpha(x)y) \wedge z - (\alpha(y)x) \wedge z + (\alpha(z)x) \wedge y)$$

eşitliği elde edilir. Son iki eşitlikten dolayı,

$$D(u \otimes \alpha) = \alpha \wedge (u \lrcorner \Phi) \tag{1.36}$$

bulunur.

$S^2(Im\mathbb{O})^*$, $Im\mathbb{O}$'da tanımlı simetrik bilineer formların uzayı olmak üzere, B lineer dönüşümü,

$$B : \bigwedge^3 (Im\mathbb{O})^* \longrightarrow S^2(Im\mathbb{O})^*$$

$\forall x, y \in Im\mathbb{O}$ ve $\beta \in \bigwedge^3 (Im\mathbb{O})^*$ için,

$$\star B(\beta)(x, y) := (x \lrcorner \Phi) \wedge (y \lrcorner \Phi) \wedge \beta \tag{1.37}$$

olarak tanımlansın. Şimdi,

$$\frac{1}{2} BD(A) = A + A^* + (izA)I \tag{1.38}$$

eşitliğinin doğru olduğu varsayılsın. Burada, $A^* = A^t$'dir. Eğer $A \in \text{Çek}D$ ise $\frac{1}{2}BD(A) = 0$ olacağından,

$$A + A^* + (izA).I = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte her iki tarafın izi alınırsa, $izA = 0$ olur. Bu durumda,

$$A \in \text{Çek}D \Rightarrow A + A^* = 0$$

ifadesine ulaşılır. Yani, $A \in \text{Çek}D$ ise $A^* = -A$ olur. Diğer bir ifadeyle, $Skew(Im\mathbb{O}) = \{A \in End(Im\mathbb{O}) \mid A = -A^*\}$ olduğundan, $A \in \text{Çek}D$ ise $A \in Skew(Im\mathbb{O})$ olur ve

$$\text{Çek}D \subset Skew(Im\mathbb{O}) \tag{1.39}$$

ifadesi elde edilir.

$u \in Im\mathbb{O}$ olmak üzere, A_u dönüşümü,

$$\begin{array}{rccl} A_u: & Im\mathbb{O} & \longrightarrow & Im\mathbb{O} \\ & x & \longmapsto & A_u x := u \times x \end{array}$$

olarak tanımlansın.

Şimdi, $End(Im\mathbb{O})$ uzayının $L := \{A_u | u \in Im\mathbb{O}\}$ altuzayı gözönüne alınsın. $\{e_1, e_2, ..., e_7\}$ kümesi, $Im\mathbb{O}$'nun standart tabanı olmak üzere, L uzayı için, $\{A_{e_1}, A_{e_2}, ..., A_{e_7}\}$ kümesi bir tabandır. Dolayısıyla, L uzayının boyutu 7'dir. Bu kümenin lineer bağımsız olduğu ve L uzayını gerdiği kolaylıkla gösterilebilir.

$A_u \in L$ ve $\forall x, y \in Im\mathbb{O}$ için,

$$\begin{aligned} \langle A_u x, y\rangle &= \langle u \times x, y\rangle = \left\langle \tfrac{1}{2}[u, x], y\right\rangle = \left\langle \tfrac{1}{2}(ux - xu), y\right\rangle \\ &= \left\langle \tfrac{1}{2}ux, y\right\rangle - \left\langle \tfrac{1}{2}xu, y\right\rangle = \tfrac{1}{2}\langle ux, y\rangle - \tfrac{1}{2}\langle xu, y\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\langle x, \bar{u}y\rangle - \tfrac{1}{2}\langle x, y\bar{u}\rangle = \tfrac{1}{2}\langle x, -uy\rangle - \tfrac{1}{2}\langle x, -yu\rangle \\ &= -\tfrac{1}{2}\langle x, uy\rangle + \tfrac{1}{2}\langle x, yu\rangle = \left\langle x, -\tfrac{1}{2}uy + \tfrac{1}{2}yu\right\rangle \\ &= \left\langle x, \tfrac{1}{2}(yu - uy)\right\rangle = \langle x, y \times u\rangle \\ &= \langle x, -u \times y\rangle = \langle x, -A_u y\rangle \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\langle A_u x, y\rangle = \langle x, -A_u y\rangle$$

eşitliğine ulaşılır. Ayrıca, $\langle A_u x, y\rangle = \langle x, A_u^* y\rangle$ olduğundan, $\forall x, y \in Im\mathbb{O}$ için, $\langle x, A_u^* y\rangle = \langle x, -A_u y\rangle$ elde edilir. İç çarpımın non-dejenere olmasından, $A_u^* = -A_u$ olur. Böylece, $A_u \in Skew(Im\mathbb{O})$ olacağından,

$$L \subset Skew(Im\mathbb{O}) \tag{1.40}$$

ifadesine ulaşılır.

Bu adımda da, $\forall x, y, z \in Im\mathbb{O}$ için,

$$D(A_u)(x \wedge y \wedge z) = -\frac{3}{2}\langle u, [x, y, z]\rangle \tag{1.41}$$

olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned} D(A_u)(x \wedge y \wedge z) &= \Phi(A_u x \wedge y \wedge z) + \Phi(x \wedge A_u y \wedge z) + \Phi(x \wedge y \wedge A_u z) \\ &= \Phi((u \times x) \wedge y \wedge z) + \Phi(x \wedge (u \times y) \wedge z) \\ &\quad + \Phi(x \wedge y \wedge (u \times z)) \\ &= \langle u \times x, yz\rangle + \langle x, (u \times y)z\rangle + \langle x, y(u \times z)\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\langle ux, yz\rangle - \tfrac{1}{2}\langle xu, yz\rangle + \tfrac{1}{2}\langle x, (uy)z\rangle \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\langle x, (yu)z\rangle + \tfrac{1}{2}\langle x, y(uz)\rangle - \tfrac{1}{2}\langle x, y(zu)\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\langle u, (yz)\bar{x}\rangle - \tfrac{1}{2}\langle u, \bar{x}(yz)\rangle + \tfrac{1}{2}\langle x\bar{z}, uy\rangle \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\langle x\bar{z}, yu\rangle + \tfrac{1}{2}\langle \bar{y}x, uz\rangle - \tfrac{1}{2}\langle \bar{y}x, zu\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\langle u, -(yz)x\rangle - \tfrac{1}{2}\langle u, -x(yz)\rangle + \tfrac{1}{2}\langle \bar{u}(x\bar{z}), y\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\tfrac{1}{2}\left\langle (x\bar{z})\bar{u}, y\right\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle \bar{u}(\bar{y}x), z\right\rangle - \tfrac{1}{2}\left\langle (\bar{y}x)\bar{u}, z\right\rangle \\
= & -\tfrac{1}{2}\left\langle u, (yz)x\right\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle u, x(yz)\right\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle \bar{u}, y(z\bar{x})\right\rangle \\
& -\tfrac{1}{2}\left\langle \bar{u}, (z\bar{x})y\right\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle \bar{u}, z(\bar{x}y)\right\rangle - \tfrac{1}{2}\left\langle \bar{u}, (\bar{x}y)z\right\rangle \\
= & -\tfrac{1}{2}\left\langle u, (yz)x\right\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle u, x(yz)\right\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle u, y(zx)\right\rangle \\
& -\tfrac{1}{2}\left\langle u, (zx)y\right\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle u, z(xy)\right\rangle - \tfrac{1}{2}\left\langle u, (xy)z\right\rangle \\
= & \ \tfrac{1}{2}\left\langle u, y(zx) - (yz)x\right\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle u, x(yz) - (xy)z\right\rangle \\
& \ \tfrac{1}{2}\left\langle u, z(xy) - (zx)y\right\rangle \\
= & \ \tfrac{1}{2}\left\langle u, -[y,z,x]\right\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle u, -[x,y,z]\right\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle u, -[z,x,y]\right\rangle \\
= & \ \tfrac{1}{2}\left\langle u, [y,x,z]\right\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle u, -[x,y,z]\right\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle u, [x,z,y]\right\rangle \\
= & \ \tfrac{1}{2}\left\langle u, -[x,y,z]\right\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle u, -[x,y,z]\right\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle u, -[x,y,z]\right\rangle \\
= & \ \tfrac{3}{2}\left\langle u, -[x,y,z]\right\rangle = -\tfrac{3}{2}\left\langle u, [x,y,z]\right\rangle
\end{aligned}
$$

$ÇekD \cap L = \{0\}$'dır: $A_u \in ÇekD \cap L$ ve $A_u \neq 0$ olsun. $A_u \in ÇekD$ ve $A_u \in L$'dir. Dolayısıyla, $D(A_u) = 0$ yani; $\forall x, y, z \in Im\mathbb{O}$ için, $D(A_u)(x \wedge y \wedge z) = 0$'dır. O halde, $\forall x, y, z \in Im\mathbb{O}$ için, $-\frac{3}{2}\left\langle u, [x,y,z]\right\rangle = 0$ olur. İç çarpım non-dejenere olduğundan, $u = 0$'dır. $\forall\ x \in Im\mathbb{O}$ için, $A_u x = u \times x = 0$ olacağından, $A_u = 0$ olur. Bu durum, hipotezle çelişir. $ÇekD \cap L = \{0\}$ sonucuna ulaşılır.

Bu durumda; ÇekD $\subset Skew(Im\mathbb{O})$, L$\subset Skew(Im\mathbb{O})$, $ÇekD \cap L = \{0\}$, $boyL = 7$ ve $boySkew(Im\mathbb{O}) = 21$ olduğu için, $ÇekD$'nin boyutu en fazla 14 olabilir. Yani, $boy(ÇekD) \leq 14$'tür. Diğer taraftan, $boy(ÇekD) \geq 14$ olduğu bilindiğine göre, $boy(ÇekD) = 14$ olur. Dolayısıyla, D dönüşümü örtendir.

Son olarak; ispatı tamamlamak için, $\frac{1}{2}BD(A) = A + A^* + (izA)I$ eşitliği gösterilecektir: $\frac{1}{2}BD(A) = \frac{1}{2}BD(u \otimes \alpha) = \frac{1}{2}B(\alpha \wedge (u \lrcorner \Phi))$'dır. $x \in Im\mathbb{O}$ için, (x,x) ikilisi $\frac{1}{2}BD(A)$ dönüşümüne uygulanırsa,

$$\frac{1}{2}BD(A)(x,x) = \frac{1}{2}B(\alpha \wedge (u \lrcorner \Phi))(x,x) = \frac{1}{2} \star ((x \lrcorner \Phi) \wedge (x \lrcorner \Phi) \wedge \alpha \wedge (u \lrcorner \Phi))$$

olur. Kolayca görülebilecek

$$(u \lrcorner \Phi) \wedge (x \lrcorner \Phi) \wedge (x \lrcorner \Phi) = 2(\|x\| u + 2\left\langle x, u\right\rangle x) \lrcorner \lambda$$

eşitliğinin her iki tarafının α ile $\wedge$ çarpımı alınırsa, daha sonra $\frac{1}{2}$ ile çarpılırsa ve her iki tarafa $\star$ operatörü uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
(u \lrcorner \Phi) \wedge (x \lrcorner \Phi) \wedge (x \lrcorner \Phi) \wedge \alpha &= 2((\|x\| u + 2\left\langle x, u\right\rangle x) \lrcorner \lambda) \wedge \alpha \\
\tfrac{1}{2}((u \lrcorner \Phi) \wedge (x \lrcorner \Phi) \wedge (x \lrcorner \Phi) \wedge \alpha) &= \tfrac{1}{2}2(((\|x\| u + 2\left\langle x, u\right\rangle x) \lrcorner \lambda) \wedge \alpha) \\
\tfrac{1}{2} \star ((u \lrcorner \Phi) \wedge (x \lrcorner \Phi) \wedge (x \lrcorner \Phi) \wedge \alpha) &= \star(((\|x\| u + 2\left\langle x, u\right\rangle x) \lrcorner \lambda) \wedge \alpha)
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. $\|x\| u + 2\left\langle x, u\right\rangle x = v$ olsun. $v \in Im\mathbb{O}$ olduğu için, $v_1, v_2, ..., v_7 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $v = v_1e_1 + v_2e_2 + ... + v_7e_7$ olarak yazılır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} v\lrcorner\lambda &= (v_1e_1+v_2e_2+...+v_7e_7)\lrcorner\lambda \\ &= ((v_1e_1)\lrcorner\lambda)+((v_2e_2)\lrcorner\lambda)+...+((v_7e_7)\lrcorner\lambda) \\ &= v_1(e_1\lrcorner\lambda)+v_2(e_2\lrcorner\lambda)+...+v_7(e_7\lrcorner\lambda) \end{aligned}$$

$\forall i$ için, $e_i\lrcorner\lambda$ 6-form olduğundan $e_i\lrcorner\lambda$ 6-formu, $\bigwedge^6(Im\mathbb{O})^*$ uzayının taban elemanları türünden yazılabilir. $a_1,a_2,...,a_7\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} e_i\lrcorner\lambda &= a_1e^*_{123456}+a_2e^*_{123457}+a_3e^*_{123467}+a_4e^*_{123567} \\ &\quad +a_5e^*_{124567}+a_6e^*_{134567}+a_7e^*_{234567} \end{aligned}$$

olarak ifade edildiğinde ve gerekli hesaplamalar yapıldığında,

$$\begin{aligned} e_1\lrcorner\lambda &= e^*_{234567} \\ e_2\lrcorner\lambda &= -e^*_{134567} \\ e_3\lrcorner\lambda &= e^*_{124567} \\ e_4\lrcorner\lambda &= -e^*_{123567} \\ e_5\lrcorner\lambda &= e^*_{123467} \\ e_6\lrcorner\lambda &= -e^*_{123457} \\ e_7\lrcorner\lambda &= e^*_{123456} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan, α'da 1-form olduğu için, taban elemanları türünden, $\alpha=\alpha_1e^*_1+\alpha_2e^*_2+...+\alpha_7e^*_7$ olarak yazılabilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} (v\lrcorner\lambda)\wedge\alpha &= v_1((e_1\lrcorner\lambda)\wedge\alpha)+v_2((e_2\lrcorner\lambda)\wedge\alpha)+...+v_7((e_7\lrcorner\lambda)\wedge\alpha) \\ &= v_1((e_1\lrcorner\lambda)\wedge\alpha_1e^*_1)+v_2((e_2\lrcorner\lambda)\wedge\alpha_2e^*_2)+...+v_7((e_7\lrcorner\lambda)\wedge\alpha_7e^*_7) \\ &= \alpha_1v_1((e_1\lrcorner\lambda)\wedge e^*_1)+\alpha_2v_2((e_2\lrcorner\lambda)\wedge e^*_2) \\ &\quad +...+\alpha_7v_7((e_7\lrcorner\lambda)\wedge e^*_7) \\ &= \alpha_1v_1\lambda+\alpha_2v_2\lambda+\alpha_3v_3\lambda+\alpha_4v_4\lambda+\alpha_5v_5\lambda+\alpha_6v_6\lambda+\alpha_7v_7\lambda \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\star((v\lrcorner\lambda)\wedge\alpha)=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+\alpha_4v_4+\alpha_5v_5+\alpha_6v_6+\alpha_7v_7$$

olur. Dolayısıyla,

$$\star((v\lrcorner\lambda)\wedge\alpha)=\alpha(v)$$

bulunur.

$$\alpha(v)=\alpha(\|x\|u+2\langle x,u\rangle x)=\|x\|\alpha(u)+2\langle x,u\rangle\alpha(x)$$

olacağından,

$$\star((\|x\|u+2\langle x,u\rangle x)\lrcorner\lambda)\wedge\alpha=\|x\|\alpha(u)+2\langle x,u\rangle\alpha(x)$$

olur. O halde,

$$\frac{1}{2}\star(u\lrcorner\Phi)\wedge(x\lrcorner\Phi)\wedge(x\lrcorner\Phi)\wedge\alpha=\|x\|\alpha(u)+2\langle x,u\rangle\alpha(x)$$

veya

$$\frac{1}{2}\star(x\lrcorner\Phi)\wedge(x\lrcorner\Phi)\wedge\alpha\wedge(u\lrcorner\Phi)=\|x\|\alpha(u)+2\langle x,u\rangle\alpha(x)$$

olur. Son olarak,

$$\frac{1}{2}BD(A)(x,x) = \|x\|\alpha(u)+2\alpha(x)\langle x,u\rangle \qquad (1.42)$$

eşitliği bulunur.

Diğer taraftan, (x,x) ikilisi $A+A^*+(izA).I$'ya uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\langle (A+A^*+(izA).I)x,x\rangle &= \langle Ax,x\rangle+\langle A^*x,x\rangle+\langle (izA).Ix,x\rangle\\
&= \langle Ax,x\rangle+\langle x,Ax\rangle+(izA)\langle x,x\rangle\\
&= \langle \alpha(x)u,x\rangle+\langle x,\alpha(x)u\rangle+(izA)\|x\|\\
&= 2\langle \alpha(x)u,x\rangle+(izA)\|x\|\\
&= 2\alpha(x)\langle u,x\rangle+(izA)\|x\|
\end{aligned}$$

A'nın izi, $izA=\Sigma_{i=1}^{7}\langle Ae_i,e_i\rangle$ olarak da ifade edilebileceğinden, $u=\Sigma_{i=1}^{7}u_ie_i\in Im\mathbb{O}$ için,

$$\begin{aligned}
izA &= \langle \alpha(e_1)u,e_1\rangle+\langle \alpha(e_2)u,e_2\rangle+...+\langle \alpha(e_7)u,e_7\rangle\\
&= \alpha(e_1)\langle u,e_1\rangle+\alpha(e_2)\langle u,e_2\rangle+...+\alpha(e_7)\langle u,e_7\rangle\\
&= \langle u,\alpha(e_1)e_1\rangle+\langle u,\alpha(e_2)e_2\rangle+...+\langle u,\alpha(e_7)e_7\rangle\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7}\langle u_ie_i,\alpha(e_j)e_j\rangle\\
&= \langle u_1e_1,\alpha(e_1)e_1\rangle+\langle u_2e_2,\alpha(e_2)e_2\rangle+...+\langle u_7e_7,\alpha(e_7)e_7\rangle\\
&= u_1\alpha(e_1)\langle e_1,e_1\rangle+u_2\alpha(e_2)\langle e_2,e_2\rangle+...+u_7\alpha(e_7)\langle e_7,e_7\rangle\\
&= \alpha(u_1e_1+u_2e_2+...+u_7e_7)\\
&= \alpha(u)
\end{aligned}$$

olduğu için, $izA=\alpha(u)$'dur. Bu durumda,

$$\langle (A+A^*+(izA).I)x,x\rangle = 2\alpha(x)\langle u,x\rangle+\alpha(u)\|x\| \qquad (1.43)$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik, (1.42) ve (1.43)'den $\forall x\in Im\mathbb{O}$ için,

$$\frac{1}{2}BD(A)(x,x)=\langle (A+A^*+(izA).I)x,x\rangle$$

olur. Sonuç olarak,

$$\frac{1}{2}BD(A)=A+A^*+izA$$

ifadesi elde edilir. □

Sonuç 1.5.6.
$$G_2 = \{A \in End(Im\mathbb{O}) | A^*\Phi = \Phi\}$$
olarak tanımlı G_2, $End(Im\mathbb{O})$ uzayının kapalı 14-boyutlu bir alt manifoldudur.

Kanıt. Bu ifade **Kapalı Fonksiyon Teoremi**'nin bir sonucudur: Daha önceden tanımlanan
$$\begin{array}{rccc} d: & End(Im\mathbb{O}) & \longrightarrow & \bigwedge^3(Im\mathbb{O})^* \\ & A & \longrightarrow & A^*\Phi \end{array}$$
dönüşümü göz önüne alındığında, $d^{-1}(\Phi) = G_2$'dir. Yani, Φ'yi koruyan A endomorfizmalarının uzayı G_2'dir. Bu dönüşümün I noktasındaki türev dönüşümü,
$$\begin{array}{rccl} D: & End(Im\mathbb{O}) & \longrightarrow & \bigwedge^3(Im\mathbb{O})^* \\ & A & \longmapsto & D(A) := \frac{d}{dt}(I + tA)^*\Phi|_{t=0} \end{array}$$
lineer dönüşümüdür. D dönüşümü örten bir dönüşümken herhangi bir $B \in G_2$ için,
$$D_B: \ T_B(End(Im\mathbb{O})) \longrightarrow T_\Phi(\textstyle\bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*)$$
dönüşümü de örtendir. Çünkü,
$$\begin{array}{rccl} F: & T_B(End(Im\mathbb{O})) & \longrightarrow & T_I(End(Im\mathbb{O})) \\ & g & \longmapsto & F(g) := g.B^{-1} \end{array}$$
olarak tanımlı dönüşüm örtendir (Öteleme Dönüşümü). Yani; her $B \in d^{-1}(\Phi)$ elemanı için, D_B örten bir dönüşüm olduğundan kapalı fonksiyon teoreminin koşulları sağlanmış olur. Bu durumda, G_2 grubu $End(Im\mathbb{O})$'nun bir alt manifoldu olur. Ayrıca, $\{\Phi\}$ tek nokta kümesi kapalı olduğundan, $d^{-1}(\Phi)$'de kapalıdır. O halde, G_2, $End(Im\mathbb{O})$'nun kapalı bir altmanifoldudur. Ek olarak, herhangi bir M manifoldu için, $boyM$ ile manifoldun boyutu, yani; bir noktasındaki tanjant uzayının boyutu kastedilmek üzere,
$$boy(End(Im\mathbb{O})) - boy(d^{-1}(\Phi)) = boy(\bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*) - boy(\{\Phi\})$$
dir. $boy(\{\Phi\}) = 0$, $boy(End(Im\mathbb{O})) = 49$ ve $boy(\bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*) = 35$ olduğundan, $boy(d^{-1}(\Phi)) = 14$ olur. O halde, G_2, $End(Im\mathbb{O})$'nun kapalı, 14-boyutlu bir altmanifoldudur[2]. $\square$

Sonuç 1.5.7. *$GL(Im\mathbb{O})$'nun $\bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*$ üzerindeki hareketi altında Φ'nin orbiti, $\bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*$'ın açık alt kümesidir.*

Kanıt. Bu önermenin ispatı için, Orbit-Stabilizer teoremini kullanalım. $GL(Im\mathbb{O})$ grubu ve $\bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*$ uzayı göz önüne alınsın.

$$\begin{array}{ccc} GL(Im\mathbb{O}) \times \bigwedge^3(Im\mathbb{O}) & \longrightarrow & \bigwedge^3(Im\mathbb{O})^* \\ (A,\eta) & \longmapsto & A.\eta := (A^{-1})^*\eta \end{array}$$

olarak tanımlı dönüşümün bir hareket olduğunu görelim.

- I, $GL(Im\mathbb{O})$'nun birim elemanı olmak üzere, $\forall \eta \in \bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*$ için, $I.\eta = (I^{-1})^*\eta = \eta$ olduğu için, $I\eta = \eta$ olur.
- $\forall A, B \in GL(Im\mathbb{O})$ ve $\forall \eta \in \bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*$ için, $v_1, v_3, v_3 \in Im\mathbb{O}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} ((AB)\eta)(v_1,v_2,v_3) &= ((AB)^{-1})^*\eta(v_1,v_2,v_3) \\ &= \eta((AB)^{-1}v_1, (AB)^{-1}v_2, (AB)^{-1}v_3) \\ &= \eta((B^{-1}A^{-1})v_1, (B^{-1}A^{-1})v_2, (B^{-1}A^{-1})v_3) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (A(B\eta))(v_1,v_2,v_3) &= A((B^{-1})^*\eta)(v_1,v_2,v_3) \\ &= ((A^{-1})^*(B^{-1})^*\eta)(v_1,v_2,v_3) \\ &= \eta((B^{-1}A^{-1})v_1, (B^{-1}A^{-1})v_2, (B^{-1}A^{-1})v_3) \end{aligned}$$

olduğundan, $(AB)\eta = A(B\eta)$'dır.

$\eta \in \bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*$'ın stabilizeri,

$$S(\eta) = \{A \in GL(Im\mathbb{O}) | A.\eta = \eta\}$$

olarak tanımlıdır. Φ, 3-formu için de stabilizer,

$$\begin{aligned} S(\Phi) &= \{A \in GL(Im\mathbb{O}) | A.\Phi = \Phi\} \\ &= \{A \in GL(Im\mathbb{O}) | (A^{-1})^*\Phi = \Phi\} \\ &= \{B \in GL(Im\mathbb{O}) | B^*\Phi = \Phi\} \\ &= G_2 \end{aligned}$$

olur. Orbit-Stabilizer Teoreminden, $O(\Phi) = GL(Im\mathbb{O}) \diagup G_2$'dir. Yine boyutla kastedilen bir manifoldun boyutu olmak üzere, $boy(GL(Im\mathbb{O})) = 49$, $boyG_2 = 14$ ise teoremden dolayı, $Boy\,O(\Phi) = 35$'tir. $O(\Phi) = \{A\Phi | A \in GL(Im\mathbb{O})\} \subseteq \bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*$ ve $boy(\bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*) = 35$ olduğundan, $O(\Phi)$ açıktır. O halde, $GL(Im\mathbb{O})$ nun $\bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*$ üzerindeki hareketi göz önüne alındığında, Φ'nin orbiti $\bigwedge^3(Im\mathbb{O})^*$ nın açık bir altkümesidir [3, 4]. $\square$

2 VEKTÖR UZAYLARINDA 2-KATLI VEKTÖR ÇARPIMI

Tanım 2.0.8. *V, $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $\langle .\, ,. \rangle$ V üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olsun. $\forall\ x, y \in V$ için, V üzerinde*

$$\begin{aligned} \langle P(x,y), x\rangle &= \langle P(x,y), y\rangle = 0 && (2.1)\\ \|P(x,y)\|^2 &= \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2 && (2.2)\end{aligned}$$

*koşullarını sağlayan bilineer bir $P : V \times V \longrightarrow V$ dönüşümüne **2-katlı vektör çarpım** denir.*

Tanımdan $\forall x \in V$ için, $P(x,x) = 0$ olduğu hemen görülebilir.
Ayrıca; $\forall x, y \in V$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= P(x-y, x-y)\\ &= P(x,x) - P(x,y) - P(y,x) + P(y,y)\\ &= -P(x,y) - P(y,x)\end{aligned}$$

olduğundan $P(x,y) = -P(y,x)$ olur. Yani, P dönüşümü anti-simetriktir. Dolayısıyla, P dönüşümü $P : \bigwedge^2 V \longrightarrow V$ şeklinde bir lineer dönüşüm olarak göz önüne alınabilir.

Ayrıca, V vektör uzayı üzerindeki $\langle .\, ,. \rangle$ iç çarpım da $\bigwedge^k V$ uzayına, $v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k, w_1 \wedge w_2 \wedge ... \wedge w_k \in \bigwedge^k V$ için,

$$\langle v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k, w_1 \wedge w_2 \wedge ... \wedge w_k\rangle = \det(\langle v_i, w_j\rangle)_{i,j}$$

olarak genişletilir[2].

2-katlı vektör çarpım tanımının (2.2) şartından dolayı, $\forall\ x, y \in \bigwedge^2 V$ için,

$$\|P(x \wedge y)\|^2 = \|x \wedge y\|^2 \qquad (2.3)$$

eşitliği sağlanır. Çünkü,

$$\begin{aligned} \|x \wedge y\|^2 &= \langle x \wedge y, x \wedge y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle \langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2\\ &= \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2\end{aligned}$$

dir. Ayrıca; $\forall x, y, z \in V$ için, $\langle P((x+y) \wedge z), x+y \rangle = 0$ olduğundan,

$$\langle P(x \wedge z), y \rangle = -\langle P(y \wedge z), x \rangle \tag{2.4}$$

eşitliğinin doğruluğu görülür.

Tanım 2.0.9. *V vektör uzayı üzerinde P, 2-katlı vektör çarpımı olsun. $\forall\ x, y, z \in V$ için,*

$$\begin{aligned} \Phi : \bigwedge^3 V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \wedge y \wedge z &\longmapsto \Phi(x \wedge y \wedge z) = \langle P(x \wedge y), z \rangle \end{aligned} \tag{2.5}$$

*olarak tanımlanan Φ 3-formuna **temel 3-form** denir.*

Gerçekten, Φ 3-formdur: Çünkü; $x, y, z \in V$ için,

$$\Phi(x \wedge y \wedge z) = \langle P(x \wedge y), z \rangle = -\langle P(y \wedge x), z \rangle = -\Phi(y \wedge x \wedge z)$$

$$\Phi(x \wedge y \wedge z) = \langle P(x \wedge y), z \rangle = -\langle P(z \wedge y), x \rangle = -\Phi(z \wedge y \wedge x)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x \wedge y \wedge z) &= \langle P(x \wedge y), z \rangle = -\langle P(y \wedge x), z \rangle = \langle P(z \wedge x), y \rangle \\ &= -\langle P(x \wedge z), y \rangle = -\Phi(x \wedge z \wedge y) \end{aligned}$$

olur.

Yardımcı Teorem 2.0.10. *$\forall\ x, y, z \in V$ için,*

$$\langle P(x \wedge y), P(x \wedge z) \rangle = \langle x \wedge y, x \wedge z \rangle \tag{2.6}$$

$$P(x \wedge P(x \wedge y)) = -\|x\|^2 y + \langle x, y \rangle x \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} P(x \wedge P(y \wedge z)) + P(y \wedge P(x \wedge z)) &= -2\langle x, y \rangle z + \langle x, z \rangle y \\ &\quad + \langle y, z \rangle x \end{aligned} \tag{2.8}$$

eşitlikleri doğrudur.

Kanıt. 1. Eşitlik, (2.3)'de y yerine $y+z$ alınırsa,

$$\|P(x \wedge (y+z))\|^2 = \|x \wedge (y+z)\|^2$$

eşitliği elde edilir. Buradan eşitliğin sol tarafı,

$$\begin{aligned} \|P(x \wedge (y+z))\|^2 &= \langle P((x \wedge y) + (x \wedge z)), P((x \wedge y) + (x \wedge z)) \rangle \\ &= \langle P(x \wedge y) + P(x \wedge z), P(x \wedge y) + P(x \wedge z) \rangle \\ &= \langle P(x \wedge y), P(x \wedge y) \rangle + 2\langle P(x \wedge y), P(x \wedge z) \rangle \\ &\quad + \langle P(x \wedge z), P(x \wedge z) \rangle \\ &= \|P(x \wedge y)\|^2 + 2\langle P(x \wedge y), P(x \wedge z) \rangle \\ &\quad + \|P(x \wedge z)\|^2 \\ &= \|x \wedge y\|^2 + 2\langle P(x \wedge y), P(x \wedge z) \rangle + \|x \wedge z\|^2 \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan, eşitliğin sağ tarafı,

$$\begin{aligned}
\|x \wedge (y+z)\|^2 &= \langle (x \wedge y) + (x \wedge z), (x \wedge y) + (x \wedge z) \rangle \\
&= \langle x \wedge y, x \wedge y \rangle \ + 2 \langle x \wedge y, x \wedge z \rangle \ + \langle x \wedge y, x \wedge z \rangle \\
&= \|x \wedge y\|^2 + 2 \langle x \wedge y, x \wedge z \rangle \ + \|x \wedge z\|^2
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan,

$$\langle P(x \wedge y), P(x \wedge z) \rangle = \langle x \wedge y, x \wedge z \rangle$$

eşitliği elde edilir.

2. İşlemlerde kolaylık sağlamak için, $P(x \wedge P(x \wedge y)) = A$ ve $-\|x\|^2 y + \langle x, y \rangle x = B$ olsun.

$$\begin{aligned}
\|A - B\|^2 &= \langle A - B, A - B \rangle \\
&= \langle A, A \rangle - 2 \langle A, B \rangle + \langle B, B \rangle
\end{aligned}$$

olduğundan, toplamdaki terimlerin karşılıkları bulunduğunda,

$$\begin{aligned}
\langle A, A \rangle &= \langle P(x \wedge P(x \wedge y)), P(x \wedge P(x \wedge y)) \rangle \\
&= \langle x \wedge P(x \wedge y), x \wedge P(x \wedge y) \rangle \\
&= \langle x, x \rangle . \langle P(x \wedge y), P(x \wedge y) \rangle - \langle x, P(x \wedge y) \rangle . \langle P(x \wedge y), x \rangle \\
&= \langle x, x \rangle . \langle P(x \wedge y), P(x \wedge y) \rangle \\
&= \langle x, x \rangle . \langle x \wedge y, x \wedge y \rangle \\
&= \|x\|^2 . \|x \wedge y\|^2 \\
&= \|x\|^2 (\|x\|^2 . \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2) \\
&= \|x\|^4 . \|y\|^2 - \|x\|^2 . \langle x, y \rangle^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle B, B \rangle &= \langle -\|x\|^2 y + \langle x, y \rangle x, -\|x\|^2 y + \langle x, y \rangle x \rangle \\
&= \langle -\|x\|^2 y, -\|x\|^2 y \rangle + 2 \langle -\|x\|^2 y, \langle x, y \rangle x \rangle \\
&\quad + \langle \langle x, y \rangle x, \langle x, y \rangle x \rangle \\
&= \|x\|^4 \langle y, y \rangle - 2\|x\|^2 \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle^2 \langle x, x \rangle \\
&= \|x\|^4 \|y\|^2 - 2\|x\|^2 \langle x, y \rangle^2 + \|x\|^2 \langle x, y \rangle^2 \\
&= \|x\|^4 \|y\|^2 - \|x\|^2 \langle x, y \rangle^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle A, B \rangle &= \langle P(x \wedge P(x \wedge y)), -\|x\|^2 y + \langle x, y \rangle x \rangle \\
&= \langle P(x \wedge P(x \wedge y)), -\|x\|^2 y \rangle + \langle P(x \wedge P(x \wedge y)), \langle x, y \rangle x \rangle \\
&= -\|x\|^2 \langle P(x \wedge P(x \wedge y)), y \rangle + \langle x, y \rangle \langle P(x \wedge P(x \wedge y)), x \rangle \\
&= -\|x\|^2 \langle P(x \wedge P(x \wedge y)), y \rangle \\
&= \|x\|^2 \langle P(P(x \wedge y) \wedge x), y \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\|x\|^2 \langle P(y \wedge x), P(x \wedge y) \rangle \\
&= \|x\|^2 \langle P(x \wedge y), P(x \wedge y) \rangle \\
&= \|x\|^2 \langle x \wedge y, x \wedge y \rangle \\
&= \|x\|^2 (\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)
\end{aligned}$$

$$\langle A, A \rangle = \|x\|^4 . \|y\|^2 - \|x\|^2 . \langle x, y \rangle^2 \tag{2.9}$$

$$\langle B, B \rangle = \|x\|^4 . \|y\|^2 - \|x\|^2 . \langle x, y \rangle^2 \tag{2.10}$$

$$\langle A, B \rangle = \|x\|^4 . \|y\|^2 - \|x\|^2 . \langle x, y \rangle^2 \tag{2.11}$$

eşitliklerine ulaşılır. Eşitlik (2.9), (2.10) ve (2.11)'den

$$\begin{aligned}
\|A - B\|^2 &= \langle A, A \rangle - 2 \langle A, B \rangle + \langle B, B \rangle \\
&= \|x\|^4 . \|y\|^2 - \|x\|^2 . \langle x, y \rangle^2 - 2(\|x\|^4 . \|y\|^2 - \|x\|^2 . \langle x, y \rangle^2) \\
&\quad + \|x\|^4 . \|y\|^2 - \|x\|^2 . \langle x, y \rangle^2 \\
&= \|x\|^4 . \|y\|^2 - \|x\|^2 . \langle x, y \rangle^2 - 2\|x\|^4 . \|y\|^2 + 2\|x\|^2 . \langle x, y \rangle^2 \\
&\quad + \|x\|^4 . \|y\|^2 - \|x\|^2 . \langle x, y \rangle^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğu için, $\|A - B\|^2 = 0$ olur. Buradan, $\|A - B\| = 0$ ve dolayısıyla, $A = B$ olur. Yani,

$$P(x \wedge P(x \wedge y)) = -\|x\|^2 y + \langle x, y \rangle x$$

eşitliğine ulaşılır.

3. Eşitlik (2.7)'de x yerine $x + z$ yazılırsa,

$$P((x + z) \wedge P((x + z) \wedge y)) = -\|x + z\|^2 y + \langle x + z, y \rangle (x + z)$$

olur. Bu eşitliğin sol tarafı,

$$\begin{aligned}
P((x + z) \wedge P((x + z) \wedge y)) &= P(x \wedge P((x + z) \wedge y)) \\
&\quad + P(z \wedge P((x + z) \wedge y)) \\
&= P(x \wedge P(x \wedge y)) + P(x \wedge P(z \wedge y)) \\
&\quad + P(z \wedge P(x \wedge y)) + P(z \wedge P(z \wedge y)) \\
&= -\|x\|^2 y + \langle x, y \rangle x + P(x \wedge P(z \wedge y)) \\
&\quad + P(z \wedge P(x \wedge y)) - \|z\|^2 y + \langle z, y \rangle z
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned} -\|x+z\|^2 y + \langle x+z, y\rangle (x+z) &= -(\|x\|^2 + 2\langle x,z\rangle + \|z\|^2)y \\ &\quad +(\langle x,y\rangle + \langle z,y\rangle)(x+z) \\ &= -\|x\|^2 y - 2\langle x,z\rangle y - \|z\|^2 y \\ &\quad + \langle x,y\rangle x + \langle x,y\rangle z \\ &\quad + \langle z,y\rangle x + \langle z,y\rangle z \end{aligned}$$

olacağından,

$$P(x \wedge P(z \wedge y)) + P(z \wedge P(x \wedge y)) = -2\langle x,z\rangle y + \langle x,y\rangle z + \langle z,y\rangle x$$

elde edilir. Bu eşitlikte y yerine z, z yerine y alınırsa,

$$P(x \wedge P(y \wedge z)) + P(y \wedge P(x \wedge z)) = -2\langle x,y\rangle z + \langle x,z\rangle y + \langle y,z\rangle x$$

eşitliğine ulaşılır.

□

$(V, \langle .,. \rangle)$ vektör uzayı üzerinde 2-katlı bir vektör çarpım varsa $boyV = 3$ veya $boyV = 7$'dir [5, 6]. Eğer $dimV = 3$ ise bu $\mathbb{R}^3$'deki bilinen vektör çarpımdır. Bu çalışmada 7-boyutlu Riemannian manifoldlar inceleneceğinden $boyV = 7$ alınacaktır.

7-boyutta P'nin basit ve açık inşaası için, Cayley sayıları (oktonyonlar) kullanılacaktır. Cayley sayıları $\mathbb{R}$ üzerinde, 8-boyutlu, birimli, normlu ve ortonormal bir tabanı da, 1 birim elemanı göstermek üzere, $\{1, e_0, e_1, ..., e_6\}$ olan bir cebir olarak alınabilir. Bu cebir üzerindeki çarpma işlemi de şu şekilde verilir [7, 8]: $\forall i \in \mathbb{Z}_7$ için,

$$\begin{array}{ccc} e_i^2 = -1 & e_i e_{i+1} = e_{i+3} & e_{i+3} e_i = e_{i+1} \\ e_{i+1} e_{i+3} = e_i & e_i e_j = -e_j e_i \ (i \neq j) & \end{array}$$

Tanım 2.0.11. *$V = \{1\}^{\perp}$, Cayley sayılarının pür imajiner 7-boyutlu altuzayı olsun. V üzerindeki 2-katlı vektör çarpım, $\forall\ x, y \in V$ için,*

$$P(x \wedge y) = x.y + \langle x, y\rangle .1$$

şeklindedir. Burada $x.y$, x ve y elemanlarının cebirdeki çarpmasıdır.

Bu tabana göre P'nin taban elemanları üzerindeki 2-katlı vektör çarpımı aşağıdaki tabloyla verilebilir:

P	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_0	0	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$
e_1	$-e_3$	0	e_4	e_0	$-e_2$	e_6	$-e_5$
e_2	$-e_6$	$-e_4$	0	e_5	e_1	$-e_3$	e_0
e_3	e_1	$-e_0$	$-e_5$	0	e_6	e_2	$-e_4$
e_4	$-e_5$	e_2	$-e_1$	$-e_6$	0	e_0	e_3
e_5	e_4	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_0$	0	e_1
e_6	e_2	e_5	$-e_0$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	0

Tablo 2.1: Cayley tabanına göre oktonyonların verilen taban elemanlarının 2-katlı vektör çarpımı

Tanım 2.0.12. $\{e_0, e_1, ..., e_6\}$ *kümesi* V*'nin ortonormal bir tabanı olsun.* $\forall\, x \in V$ *için,*

$$\begin{aligned} p : V &\longrightarrow \bigwedge^2 V \\ x &\longmapsto p(x) = -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{6} e_i \wedge P(e_i \wedge x) \end{aligned} \tag{2.12}$$

olarak verilen p *dönüşümü* V *vektör uzayı üzerindeki 2-katlı vektör çarpımı* P*'nin adjoint dönüşümüdür.*

Yardımcı Teorem 2.0.13. $p : V \longrightarrow \bigwedge^2 V$ *dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar.*

1. *p, P dönüşümünün adjoint dönüşümüdür. Yani;* $x \in V$ *ve* $\xi \in \bigwedge^2 V$ *için,*

$$\langle p(x), \xi \rangle = \langle x, P(\xi) \rangle . \tag{2.13}$$

2. $x \in V$ *için,*

$$P(p(x)) = 3x. \tag{2.14}$$

3. $\{e_0, e_1, ..., e_6\}$ *kümesi* V *için Cayley tabanı ise* $\forall\ i \in \mathbb{Z}_7$ *için,*

$$p(e_i) \;=\; e_{i+1} \wedge e_{i+3} + e_{i+2} \wedge e_{i+6} + e_{i+4} \wedge e_{i+5}. \qquad (2.15)$$

Kanıt. 1. $x \in V$ ve $\xi \in \bigwedge^2 V$ olsun. $\xi \in \bigwedge^2 V$ olduğundan, $w_{lk} \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\xi = \sum_{l<k} w_{lk} e_l \wedge e_k$ olarak yazıldığında,

$$\begin{aligned} \langle p(x), \xi \rangle &= \left\langle -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i=0}^{6} e_i \wedge P(e_i \wedge x), \sum_{l<k} w_{lk} e_l \wedge e_k \right\rangle \\ &= -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i=0}^{6} \left\langle e_i \wedge P(e_i \wedge x), \sum_{l<k} w_{lk} e_l \wedge e_k \right\rangle \\ &= -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i=0}^{6} \sum_{l<k} w_{lk} \langle e_i \wedge P(e_i \wedge x), e_l \wedge e_k \rangle \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadede $i = l$ veya $i = k$ ise, örneğin; $i = l$ ise $\langle e_i \wedge P(e_i \wedge x), e_l \wedge e_k \rangle$ ifadesine bakıldığında,

$$\begin{aligned} \langle e_i \wedge P(e_i \wedge x), e_l \wedge e_k \rangle &= \langle e_i \wedge P(e_i \wedge x), e_i \wedge e_k \rangle \\ &= \langle P(e_i \wedge P(e_i \wedge x)), P(e_i \wedge e_k) \rangle \\ &= \langle -\|e_i\|^2 x + \langle e_i, x \rangle e_i, P(e_i \wedge e_k) \rangle \\ &= \langle -\|e_i\|^2 x, P(e_i \wedge e_k) \rangle \\ &\quad + \langle e_i, x \rangle \langle e_i, P(e_i \wedge e_k) \rangle \\ &= \langle -\|e_i\|^2 x, P(e_i \wedge e_k) \rangle \\ &= \langle -x, P(e_i \wedge e_k) \rangle \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $i = k$ için de,

$$\langle e_i \wedge P(e_i \wedge x), e_l \wedge e_k \rangle = \langle -x, P(e_l \wedge e_i) \rangle$$

olur. Diğer durumlarda bu toplam 0'dır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \langle p(x), \xi \rangle &= -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i<k} w_{ik} \langle -x, P(e_i \wedge e_k) \rangle \\ &\quad -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{l<i} w_{li} \langle -x, P(e_l \wedge e_i) \rangle \\ &= -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i<j} w_{ij} \langle -x, P(e_i \wedge e_j) \rangle \\ &\quad -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i<j} w_{ij} \langle -x, P(e_i \wedge e_j) \rangle \\ &= -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i<j} w_{ij} (2 \langle -x, P(e_i \wedge e_j) \rangle) \\ &= \textstyle\sum_{i<j} w_{ij} \langle x, P(e_i \wedge e_j) \rangle \\ &= \left\langle x, \textstyle\sum_{i<j} w_{ij} P(e_i \wedge e_j) \right\rangle \\ &= \left\langle x, P(\textstyle\sum_{i<j} w_{ij} e_i \wedge e_j) \right\rangle \\ &= \langle x, P(\xi) \rangle \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

2. $x \in V$ için, $x_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x = \sum_{k=0}^{6} x_k.e_k$ olarak yazılabileceğinden,

$$\begin{aligned} P(p(x)) &= P(-\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=0}^{6} e_i \wedge P(e_i \wedge x)) \\ &= -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=0}^{6} P(e_i \wedge P(e_i \wedge x)) \\ &= -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=0}^{6}(-\|e_i\|^2 x + \langle e_i, x\rangle e_i) \\ &= -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=0}^{6}(-x + \langle e_i, x\rangle e_i) \\ &= \tfrac{1}{2}7x - \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=0}^{6} \langle e_i, x\rangle e_i \\ &= \tfrac{1}{2}7x - \tfrac{1}{2}x = 3x \end{aligned}$$

Dolayısıyla; $x \in V$ için, $P(p(x)) = 3x$ elde edilir.

3. $\forall\ i \in \mathbb{Z}_7$ için, $p(e_i)$'nin hesaplanmasında, $P(e_i \wedge e_j) = \begin{cases} 0 & , \quad i = j \\ e_i e_j & , \quad i \neq j \end{cases}$ idi.

$$\begin{aligned} p(e_0) &= -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=0}^{6} e_i \wedge P(e_i \wedge e_0) \\ &= -\tfrac{1}{2}(e_0 \wedge 0 + e_1 \wedge (-e_3) + e_2 \wedge (-e_6) + e_3 \wedge e_1 \\ &\quad + e_4 \wedge (-e_5) + e_5 \wedge e_4 + e_6 \wedge e_2) \\ &= -\tfrac{1}{2}(-e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_6 - e_1 \wedge e_3 \\ &\quad - e_4 \wedge e_5 - e_4 \wedge e_5 - e_2 \wedge e_6) \\ &= -\tfrac{1}{2}(-2e_1 \wedge e_3 - 2e_2 \wedge e_6 - 2e_4 \wedge e_5) \\ &= e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_6 + e_4 \wedge e_5 \end{aligned}$$

Benzer şekilde; $p(e_1), p(e_2), ... p(e_6)$ hesaplandığında, $\forall\ i \in \mathbb{Z}_7$ için,

$$p(e_i) = e_{i+1} \wedge e_{i+3} + e_{i+2} \wedge e_{i+6} + e_{i+4} \wedge e_{i+5}$$

olduğu görülür.

$\square$

Tanım 2.0.14. *P ve p dönüşümleri lineer olarak aşağıdaki uzaylara genişletilebilir. $P_k : \bigwedge^{k+1} V \longrightarrow \bigwedge^{k} V$, $p_k : \bigwedge^{k} V \longrightarrow \bigwedge^{k+1} V$ ve $v_1, v_2, ..., v_{k+1} \in V$ olmak üzere,*

$$P_k(v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_{k+1}) = \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j+1}(P(v_i \wedge v_j) \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge \hat{v}_i ... \wedge \hat{v}_j ... \wedge v_{k+1})$$

$$p_k(v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1}(p(v_i) \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge \hat{v}_i ... \wedge v_k).$$

Özel olarak, $\forall\ x, y, z \in V$ ve $k = 2$ için, $p_2 : \bigwedge^2 V \longrightarrow \bigwedge^3 V$, $P_2 : \bigwedge^3 V \longrightarrow \bigwedge^2 V$ lineer dönüşümleri aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} p_2(x \wedge y) &= p(x) \wedge y - p(y) \wedge x \\ P_2(x \wedge y \wedge z) &= P(x \wedge y) \wedge z - P(x \wedge z) \wedge y + P(y \wedge z) \wedge x \end{aligned}$$

Çalışmanın bundan sonraki kısmında, $P : \bigwedge^2 V \longrightarrow V$ 2-katlı vektör çarpımı P_1 ile adjoint dönüşümüde p_1 ile gösterilecektir.

V vektör uzayı için, Cayley tabanı kullanıldığında,
$p_1(e_i) = e_{i+1} \wedge e_{i+3} + e_{i+2} \wedge e_{i+6} + e_{i+4} \wedge e_{i+5}$ elde edilmişti. Yine aynı taban kullanılırsa, ve gerekli hesaplar yapılırsa,

$$\begin{aligned} p_2(p_1(e_i)) &= 3(e_{i+1} \wedge e_{i+2} \wedge e_{i+5} - e_{i+1} \wedge e_{i+4} \wedge e_{i+6} \\ &\quad -e_{i+2} \wedge e_{i+3} \wedge e_{i+4} + e_{i+3} \wedge e_{i+5} \wedge e_{i+6}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3(p_2(p_1(e_i))) &= 9(e_i \wedge e_{i+1} \wedge e_{i+2} \wedge e_{i+4} + e_i \wedge e_{i+2} \wedge e_{i+3} \wedge e_{i+5} \\ &\quad +e_i \wedge e_{i+3} \wedge e_{i+4} \wedge e_{i+6} + e_i \wedge e_{i+1} \wedge e_{i+5} \wedge e_{i+6}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4(p_3(p_2(p_1(e_i)))) &= -36 e_i \wedge \{-e_{i+1} \wedge e_{i+2} \wedge e_{i+3} \wedge e_{i+6} \\ &\quad +e_{i+1} \wedge e_{i+3} \wedge e_{i+4} \wedge e_{i+5} \\ &\quad +e_{i+2} \wedge e_{i+4} \wedge e_{i+5} \wedge e_{i+6}\}, \end{aligned}$$

$$p_5(p_4(p_3(p_2(p_1(e_i))))) = 108(e_{i+1} \wedge e_{i+2} \wedge e_{i+3} \wedge e_{i+4} \wedge e_{i+5} \wedge e_{i+6})$$

olur. Buradan, $(p_6 \circ p_5 \circ p_4 \circ p_3 \circ p_2 \circ p_1)(e_i) = 0$ bulunur. Dolayısıyla;

$$V \xrightarrow{P_1} \bigwedge^2 V \xrightarrow{P_2} \bigwedge^3 V \xrightarrow{P_3} \bigwedge^4 V \xrightarrow{P_4} \bigwedge^5 V \xrightarrow{P_5} \bigwedge^6 V \xrightarrow{P_6} \bigwedge^7 V$$

dizisi elde edilir.

Tanım 2.0.15. *$\bigwedge(V) = \bigoplus_{i=0}^{7} \bigwedge^k V$ olmak üzere, $L : \bigwedge(V) \longrightarrow \bigwedge(V)$ lineer dönüşümü, $\forall\ \xi \in \bigwedge^k V$ ve $\forall\ \eta \in \bigwedge(V)$ için,*

$$L(\xi \wedge \eta) = L(\xi) \wedge \eta + (-1)^k \xi \wedge L(\eta) \tag{2.16}$$

şartını sağlıyorsa; L dönüşümüne $\bigwedge(V)$ uzayında bir ***antiderivasyondur*** *denir.*

p dönüşümü $\bigwedge(V)$ uzayına genişletilebilir. Öncelikle, $p_0 : \mathbb{R} \longrightarrow V$ ve $p_7 : \bigwedge^7(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümlerini $r \in \mathbb{R}$ ve $v_7 \in \bigwedge^7(V)$ olmak üzere, sırasıyla $p_0(r) = 0$ ve $p_7(v_7) = 0$ olarak tanımlansın. Bu genişlemede, $v_i \in \bigwedge^i V$ olmak üzere, $\alpha = \sum_{i=0}^{7} v_i \in \bigwedge(V)$ elemanının görüntüsü, $p(\alpha) = \sum_{i=0}^{7} p_i(v_i)$ olarak tanımlanır.

Yardımcı Teorem 2.0.16. *$p : \bigwedge(V) \longrightarrow \bigwedge(V)$ dönüşümü $\bigwedge(V)$ uzayının bir antiderivasyonudur.*

Kanıt. $\xi \in \bigwedge^k(V)$ ve $\eta \in \bigwedge(V)$ olsun. Her bir $k = 0, 1, ..., 6$ için, p'nin $\bigwedge(V)$'nin antiderivasyonu olduğu gösterilecektir.

- $k = 0$ ise: $\xi \in \mathbb{R}$ ve $\eta \in \bigwedge(V)$ ise $p(\xi \wedge \eta) = p(\xi) \wedge \eta + \xi \wedge p(\eta) = \xi \wedge p(\eta)$ olduğu gösterilmelidir. $\eta \in \bigwedge(V)$ olduğu için;
  $\eta = a_0 r + a_1.v_{11} + a_2 v_{12} \wedge v_{22} + a_3 v_{13} \wedge v_{23} \wedge v_{33} + ... + a_7 v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77}$
  olarak yazılır. $\xi \in \mathbb{R}$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
p(\xi \wedge \eta) &= p(\xi \wedge (a_0 r)) + p(\xi \wedge (a_1.v_{11})) + p(\xi \wedge (a_2 v_{12} \wedge v_{22})) \\
&\quad + p(\xi \wedge (a_3 v_{13} \wedge v_{23} \wedge v_{33})) + ... \\
&\quad + p(\xi \wedge (a_7 v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77})) \\
&= a_0 p(\xi.r) + a_1 p(\xi.v_{11}) + a_2 p(\xi.v_{12} \wedge v_{22}) \\
&\quad + a_3 p(\xi.v_{13} \wedge v_{23} \wedge v_{33}) + ... \\
&\quad + a_7 p(\xi.v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77}) \\
&= a_0.\xi p(r) + a_1.\xi p(v_{11}) + a_2.\xi p(v_{12} \wedge v_{22}) \\
&\quad + a_3.\xi p(v_{13} \wedge v_{23} \wedge v_{33}) + ... \\
&\quad + a_7.\xi p(v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77}) \\
&= \xi(a_0 p(r) + a_1 p(v_{11}) + a_2 p(v_{12} \wedge v_{22}) \\
&\quad + a_3 p(v_{13} \wedge v_{23} \wedge v_{33}) + ... \\
&\quad + a_7 p(v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77})) \\
&= \xi \wedge (a_0 p(r) + a_1 p(v_{11}) + a_2 p(v_{12} \wedge v_{22}) \\
&\quad a_3 p(v_{13} \wedge v_{23} \wedge v_{33}) + ... \\
&\quad a_7 p(v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77})) \\
&= \xi \wedge p(a_0 r + a_1 v_{11} + a_2 v_{12} \wedge v_{22} \\
&\quad a_3 v_{13} \wedge v_{23} \wedge v_{33} + ... \\
&\quad a_7 v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77}) \\
&= \xi \wedge p(\eta)
\end{aligned}
$$

  eşitliğinden, $k = 0$ için, p dönüşümü $\bigwedge(V)$'nin bir antiderivasyonudur.

- k=1 için, ξ ∈V ve $\eta \in \bigwedge(V)$ ise $p(\xi \wedge \eta) = p(\xi) \wedge \eta - \xi \wedge p(\eta)$'dir:

$$\begin{aligned}
p(\xi \wedge \eta) &= p(\xi \wedge (a_0 r) + \xi \wedge (a_1 v_{11}) + \xi \wedge (a_2 v_{12} \wedge v_{22}) \\
&\quad + \xi \wedge (a_3 v_{13} \wedge v_{23} \wedge v_{33}) + ... \\
&\quad + \xi \wedge (a_7 v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77})) \\
&= a_0 p(\xi \wedge r) + a_1 p(\xi \wedge v_{11}) + a_2 p(\xi \wedge v_{12} \wedge v_{22}) \\
&\quad + a_3 p(\xi \wedge v_{13} \wedge v_{23} \wedge v_{33}) + ... \\
&\quad + a_7 p(\xi \wedge v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77}) \\
&= a_0 r p(\xi) + a_1 p(\xi) \wedge v_{11} - a_1 p(v_{11}) \wedge \xi + a_2 p(\xi) \wedge v_{12} \wedge v_{22} \\
&\quad - a_2 p(v_{12}) \wedge \xi \wedge v_{22} + a_2 p(v_{22}) \wedge \xi \wedge v_{12} + ... \\
&\quad + a_7 p(\xi) \wedge v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77} \\
&\quad - a_7 p(v_{17}) \wedge \xi \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77} \\
&\quad + a_7 p(v_{27}) \wedge \xi \wedge v_{17} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77} - ... \\
&\quad - a_7 p(v_{77}) \wedge \xi \wedge v_{17} \wedge v_{27} \wedge ... \wedge v_{67} \\
&= p(\xi) \wedge (a_0 r + a_1 v_{11} + a_2 v_{12} \wedge v_{22} + ... \\
&\quad + a_7 v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77}) \\
&\quad - a_1 \xi \wedge p(v_{11}) - a_2 \xi \wedge p(v_{12}) \wedge v_{22} + a_2 \xi \wedge p(v_{22}) \wedge v_{12} + ... \\
&\quad - a_7 \xi \wedge p(v_{17}) \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77} \\
&\quad + a_7 \xi \wedge p(v_{27}) \wedge v_{17} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77} - ... \\
&\quad - a_7 \xi \wedge p(v_{77}) \wedge v_{17} \wedge v_{27} \wedge ... \wedge v_{67} \\
&= p(\xi) \wedge \eta - \xi \wedge (a_1 p(v_{11}) + a_2 p(v_{12} \wedge v_{22}) + ... \\
&\quad a_7 p(v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77})) \\
&= p(\xi) \wedge \eta - \xi \wedge p(a_1 v_{11} + a_2 v_{12} \wedge v_{22} + ... \\
&\quad a_7 v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77}) \\
&= p(\xi) \wedge \eta - \xi \wedge p(\eta)
\end{aligned}$$

olduğu için, $k = 1$ için, p, $\bigwedge(V)$'nin bir antiderivasyonudur.

- $k = 2$ için, p'nin $\bigwedge(V)$'nin antiderivasyonu olduğu şu şekilde görülür: $\xi \in \bigwedge^2(V)$ ve $\eta \in \bigwedge(V)$ ise $p(\xi \wedge \eta) = p(\xi) \wedge \eta + \xi \wedge p(\eta)$ olduğu gösterilmelidir. $\xi \in \bigwedge^2(V)$ olduğu için, $x_i, y_i \in V$ ve $\xi_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\xi = \sum_{i=0}^{6} \xi_i x_i \wedge y_i$ olarak yazılır.

$$\begin{aligned}
p(\xi \wedge \eta) &= p((\textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i x_i \wedge y_i) \wedge (a_0 r) + (\sum_{i=0}^{6} \xi_i x_i \wedge y_i) \wedge (a_1 v_{11}) \\
&\quad + (\textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i x_i \wedge y_i) \wedge (a_2 v_{12} \wedge v_{22}) \\
&\quad + (\textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i x_i \wedge y_i) \wedge (a_3 v_{13} \wedge v_{23} \wedge v_{33}) + ... \\
&\quad + (\textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i x_i \wedge y_i) \wedge (a_7 v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77}))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_0 r \textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i p(x_i \wedge y_i) + a_1 \sum_{i=0}^{6} \xi_i p(x_i) \wedge y_i \wedge v_{11} \\
&\quad -a_1 \textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i p(y_i) \wedge x_i \wedge v_{11} + a_1 \sum_{i=0}^{6} \xi_i p(v_{11}) \wedge x_i \wedge y_i \\
&\quad +a_2 \textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i p(x_i) \wedge y_i \wedge v_{12} \wedge v_{22} \\
&\quad -a_2 \textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i p(y_i) \wedge x_i \wedge v_{12} \wedge v_{22} \\
&\quad +a_2 \textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i p(v_{12}) \wedge x_i \wedge y_i \wedge v_{22} \\
&\quad -a_2 \textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i p(v_{22}) \wedge x_i \wedge y_i \wedge v_{12} + ... \\
&\quad +a_7 \textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i p(x_i) \wedge y_i \wedge v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77} \\
&\quad -a_7 \textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i p(y_i) \wedge x_i \wedge v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77} + ... \\
&\quad +a_7 \textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i p(v_{77}) x_i \wedge y_i \wedge v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{67} \\
&= a_0 r p(\textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i x_i \wedge y_i) + a_1 p(\sum_{i=0}^{6} \xi_i x_i \wedge y_i) \wedge v_{11} \\
&\quad +a_2 p(\textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i x_i \wedge y_i) \wedge v_{12} \wedge v_{22} + ... \\
&\quad a_7 p(\textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i x_i \wedge y_i) \wedge v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77} \\
&\quad +(\textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i x_i \wedge y_i) \wedge p(a_1 v_{11}) \\
&\quad +(\textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i x_i \wedge y_i) \wedge p(a_2 v_{12} \wedge v_{22}) + ... \\
&\quad +(\textstyle\sum_{i=0}^{6} \xi_i x_i \wedge y_i) \wedge p(a_7 v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77}) \\
&= a_0 r p(\xi) + a_1 p(\xi) \wedge v_{11} + a_2 p(\xi) \wedge v_{12} \wedge v_{22} + ... \\
&\quad a_7 p(\xi) \wedge v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77} \\
&\quad +\xi \wedge p(a_1 v_{11}) + \xi \wedge p(a_2 v_{12} \wedge v_{22}) + ... \\
&\quad +\xi \wedge p(a_7 v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77}) \\
&= p(\xi) \wedge (a_0 r + a_1 v_{11} + a_2 \wedge v_{12} \wedge v_{22} + ... \\
&\quad a_7 v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77}) \\
&\quad +\xi \wedge p(a_1 v_{11} + a_2 v_{12} \wedge v_{22} + ... \\
&\quad +a_7 v_{17} \wedge v_{27} \wedge v_{37} \wedge ... \wedge v_{77}) \\
&= p(\xi) \wedge \eta + \xi \wedge p(\eta)
\end{aligned}
$$

olduğundan, $k = 2$ için, p, $\bigwedge(V)$'nin bir antiderivasyonudur.

Benzer şekilde, $k = 3, 4, 5, 6, 7$ için, $p : \bigwedge(V) \longrightarrow \bigwedge(V)$ dönüşümünün $\bigwedge(V)$ uzayının bir antiderivasyonu olduğu görülebilir. $\square$

$\star : \bigwedge(V) \longrightarrow \bigwedge(V)$ Hodge-star dönüşümü göz önüne alındığında,

$$\star(\bigwedge^{k}(V)) \;=\; \bigwedge^{7-k}(V) \tag{2.17}$$

olur [2, 3, 9].

Yardımcı Teorem 2.0.17. *$p : \bigwedge^{k}(V) \longrightarrow \bigwedge^{k+1}(V)$ olmak üzere $\forall k$ için,*

$$p_k \;=\; (-1)^{k+1} \star P_{6-k} \star \tag{2.18}$$

olur.

Kanıt. • $k = 0$ için, $p_0 : \bigwedge^0(V) = \mathbb{R} \longrightarrow \bigwedge^1(V) = V$ olduğundan ve bu durumda,

$$\begin{array}{rcl} p_0 : \mathbb{R} & \longrightarrow & V \\ r & \longmapsto & p(r) = 0 \end{array}$$

olarak tanımlı olduğu için, $r \in \mathbb{R}$ için, $-\star P_6 \star(r) = 0$ olduğu gösterilmelidir. $\star(r) = r(e_0 \wedge e_1 \wedge ... \wedge e_6)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
-\star P_6 \star (r) &= -\star(P_6(r(e_0 \wedge e_1 \wedge ... \wedge e_6))) \\
&= -r\star(P_6(e_0 \wedge e_1 \wedge ... \wedge e_6)) \\
&= -r\star(P_1(e_0 \wedge e_1) \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 \\
&\quad -P_1(e_0 \wedge e_2) \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 \\
&\quad +P_1(e_0 \wedge e_3) \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 \\
&\quad -P_1(e_0 \wedge e_4) \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_5 \wedge e_6 \\
&\quad +P_1(e_0 \wedge e_5) \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_6 \\
&\quad -P_(e_0 \wedge e_6) \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \\
&\quad +P_1(e_1 \wedge e_2) \wedge e_0 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 \\
&\quad -P_1(e_1 \wedge e_3) \wedge e_0 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 \\
&\quad +P_1(e_1 \wedge e_4) \wedge e_0 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_5 \wedge e_6 \\
&\quad -P_1(e_1 \wedge e_5) \wedge e_0 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_6 \\
&\quad +P_1(e_1 \wedge e_6) \wedge e_0 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \\
&\quad +P_1(e_2 \wedge e_3) \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 \\
&\quad -P_1(e_2 \wedge e_4) \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge e_5 \wedge e_6 \\
&\quad +P_1(e_2 \wedge e_5) \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_6 \\
&\quad -P_1(e_2 \wedge e_6) \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \\
&\quad +P_1(e_3 \wedge e_4) \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_5 \wedge e_6 \\
&\quad -P_(e_3 \wedge e_5) \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_6 \\
&\quad +P_1(e_3 \wedge e_6) \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_5 \\
&\quad +P_1(e_4 \wedge e_5) \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_6 \\
&\quad -P_1(e_4 \wedge e_6) \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_5 \\
&\quad +P_1(e_5 \wedge e_6) \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \\
&= -r\star(e_3 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 \\
&\quad -e_6 \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 \\
&\quad -e_1 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 \\
&\quad -e_5 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_5 \wedge e_6 \\
&\quad -e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_6 \\
&\quad +e_2 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \\
&\quad +e_4 \wedge e_0 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 \\
&\quad -e_0 \wedge e_0 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-e_2 \wedge e_0 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_5 \wedge e_6\\
&-e_6 \wedge e_0 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_6\\
&-e_5 \wedge e_0 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5\\
&+e_5 \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6\\
&-e_1 \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge e_5 \wedge e_6\\
&-e_6 \wedge e_0 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_6\\
&-e_5 \wedge e_0 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5\\
&+e_5 \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6\\
&-e_1 \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge e_5 \wedge e_6\\
&-e_3 \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_6\\
&-e_0 \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5\\
&+e_6 \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_5 \wedge e_6\\
&-e_2 \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_6\\
&-e_4 \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_5\\
&+e_0 \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_6\\
&-e_3 \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_5\\
&+e_1 \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) = -r \star (0) = 0
\end{aligned}
$$

olduğundan, $k = 0$ için, (2.18) eşitliği sağlanır.

- $k = 1$ için, $p_1 : V \longrightarrow \bigwedge^2(V)$ olduğundan, her bir e_i taban elemanı için, $p_1 = \star P_5 \star$ olduğunun gösterilmesi yetecektir. $i = 0$ için,

$$
\begin{aligned}
\star P_5 \star (e_0) &= \star P_5(\star(e_0)) = \star P_5(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6)\\
&= \star(P_1(e_1 \wedge e_2) \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6\\
&\quad -P_1(e_1 \wedge e_3) \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6\\
&\quad +P_1(e_1 \wedge e_4) \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_5 \wedge e_6\\
&\quad -P_1(e_1 \wedge e_5) \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_6\\
&\quad +P_1(e_1 \wedge e_6) \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5\\
&\quad +P_1(e_2 \wedge e_3) \wedge e_1 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6\\
&\quad -P_1(e_2 \wedge e_4) \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge e_5 \wedge e_6\\
&\quad +P_1(e_2 \wedge e_5) \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_6\\
&\quad -P_1(e_2 \wedge e_6) \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5\\
&\quad +P_1(e_3 \wedge e_4) \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_5 \wedge e_6\\
&\quad -P_1(e_3 \wedge e_5) \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_6\\
&\quad +P_1(e_3 \wedge e_6) \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_5\\
&\quad +P_1(e_4 \wedge e_5) \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_6\\
&\quad -P_1(e_4 \wedge e_6) \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_5\\
&\quad +P_1(e_5 \wedge e_6) \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \star(e_4 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 - e_0 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 \\
&\quad -e_2 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_5 \wedge e_6 - e_6 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_6 \\
&\quad -e_5 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 + e_5 \wedge e_1 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 \\
&\quad -e_1 \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge e_5 \wedge e_6 - e_3 \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_6 \\
&\quad -e_0 \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 + e_6 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_5 \wedge e_6 \\
&\quad -e_2 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_6 - e_4 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_5 \\
&\quad +e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_6 - e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_5 \\
&\quad +e_1 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \\
&= \star(-e_0 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 - e_0 \wedge e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \\
&\quad +e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_6) \\
&= e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_6 + e_4 \wedge e_5
\end{aligned}
$$

eşitliğinden,

$$\star P_5 \star (e_0) = e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_6 + e_4 \wedge e_5$$

bulunur. Eşitlik (2.15)'den dolayı,

$$p_1(e_0) = e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_6 + e_4 \wedge e_5$$

olduğundan, $p_1(e_0) = \star P_5 \star (e_0)$ olur. Benzer hesaplama yoluyla, $\forall i \in \{1, ..., 6\}$ için, $p_1(e_i) = \star P_5 \star (e_i)$ olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda, $p_1 = \star P_5 \star$ eşitliği gerçeklenir.

Benzer yöntemler kullanılarak, sıradan hesap işlemleriyle $k = 2, 3, 4, 5, 6$ için de, (2.18) eşitliğinin gerçeklendiği görülebilir. □

Yardımcı Teorem 2.0.18. *$\forall x, y, z \in V$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.*

$$P_1(P_2(x \wedge y \wedge z)) = 3P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z) - 3 \langle x, z \rangle y + 3 \langle y, z \rangle x \quad (2.19)$$

$$\|P_1(P_2(x \wedge y \wedge z))\|^2 = 9\{\|x \wedge y \wedge z\|^2 - \Phi(x \wedge y \wedge z)^2\} \quad (2.20)$$

Kanıt. 1. Eşitlik (2.16), (2.8)'den ve P_1'in lineerliğinden dolayı,

$$
\begin{aligned}
P_1(P_2(x \wedge y \wedge z)) &= P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z - P_1(x \wedge z) \wedge y \\
&\quad +P_1(y \wedge z) \wedge x) \\
&= P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z) - P_1(P_1(x \wedge z) \wedge y) \\
&\quad +P_1(P_1(y \wedge z) \wedge x)) \\
&= P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z) + P_1(y \wedge P_1(x \wedge z)) \\
&\quad +P_1(P_1(y \wedge z) \wedge x)) \\
&= P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z) + (-P_1(x \wedge P_1(y \wedge z)) \\
&\quad -2 \langle x, y \rangle z + \langle x, z \rangle y + \langle y, z \rangle x) \\
&\quad +P_1(P_1(y \wedge z) \wedge x))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z) + (-P_1(x \wedge P_1(y \wedge z)) \\
&\quad -2\langle x, y\rangle z + \langle x, z\rangle y + \langle y, z\rangle x) \\
&\quad -P_1(x \wedge P_1(y \wedge z)) \\
&= P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z) - 2P_1(x \wedge P_1(y \wedge z)) \\
&\quad -2\langle x, y\rangle z + \langle x, z\rangle y + \langle y, z\rangle x \\
&= P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z) + 2P_1(x \wedge P_1(z \wedge y)) \\
&\quad -2\langle x, y\rangle z + \langle x, z\rangle y + \langle y, z\rangle x \\
&= P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z) + 2(-P_1(z \wedge P_1(x \wedge y)) \\
&\quad -2\langle z, x\rangle y + \langle z, y\rangle x + \langle x, y\rangle z) \\
&\quad -2\langle x, y\rangle z + \langle x, z\rangle y + \langle y, z\rangle x \\
&= P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z) + 2P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z) \\
&\quad -4\langle z, x\rangle y + 2\langle z, y\rangle x + 2\langle x, y\rangle z \\
&\quad -2\langle x, y\rangle z + \langle x, z\rangle y + \langle y, z\rangle x \\
&= 3P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z) - 3\langle x, z\rangle y + 3\langle y, z\rangle x
\end{aligned}
$$

olduğundan, (2.19) eşitliği elde edilir.

2.

$$
\begin{aligned}
\|P_1(P_2(x \wedge y \wedge z))\|^2 &= \langle P_1(P_2(x \wedge y \wedge z)), P_1(P_2(x \wedge y \wedge z))\rangle \\
&= \langle 3P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z), 3P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z)\rangle \\
&\quad + \langle 3P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z), -3\langle x, z\rangle y\rangle \\
&\quad + \langle 3P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z), 3\langle y, z\rangle x\rangle \\
&\quad + \langle -3\langle x, z\rangle y, 3P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z)\rangle \\
&\quad + \langle -3\langle x, z\rangle y, -3\langle x, z\rangle y\rangle \\
&\quad + \langle -3\langle x, z\rangle y, 3\langle y, z\rangle x\rangle \\
&\quad + \langle 3\langle y, z\rangle x, 3P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z)\rangle \\
&\quad + \langle 3\langle y, z\rangle x, -3\langle x, z\rangle y\rangle \\
&\quad + \langle 3\langle y, z\rangle x, 3\langle y, z\rangle x\rangle \\
&= 9\langle P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z), P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z)\rangle \\
&\quad -9\langle x, z\rangle \langle P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z), y\rangle \\
&\quad +9\langle y, z\rangle \langle P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z), x\rangle \\
&\quad -9\langle x, z\rangle \langle y, P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z)\rangle \\
&\quad +9\langle x, z\rangle \langle x, z\rangle \langle y, y\rangle \\
&\quad -9\langle x, z\rangle \langle y, z\rangle \langle y, x\rangle \\
&\quad +9\langle y, z\rangle \langle x, P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z)\rangle \\
&\quad -9\langle y, z\rangle \langle x, z\rangle \langle x, y\rangle \\
&\quad +9\langle y, z\rangle \langle y, z\rangle \langle x, x\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \; & 9 \langle P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z), P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z)\rangle \\
& -18 \langle x, z\rangle \langle P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z), y\rangle \\
& +18 \langle y, z\rangle \langle P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z), x\rangle \\
& +9 \langle x, z\rangle^2 \|y\|^2 + 9 \langle y, z\rangle^2 \|x\|^2 \\
& -18 \langle x, y\rangle \langle y, z\rangle \langle x, z\rangle
\end{aligned}
$$

Elde edilen son ifadedeki bazı terimlerin karşılıkları ise:

$$
\begin{aligned}
\langle P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z), P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z)\rangle &= \langle P_1(x \wedge y) \wedge z, P_1(x \wedge y) \wedge z\rangle \\
&= \|P_1(x \wedge y)\|^2 \|z\|^2 \\
&\quad - \langle P_1(x \wedge y), z\rangle^2 \\
&= \|x \wedge y\|^2 \|z\|^2 \\
&\quad - \langle P_1(x \wedge y), z\rangle^2 \\
&= (\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y\rangle)\|z\|^2 \\
&\quad - \langle P_1(x \wedge y), z\rangle^2 \\
&= \|x\|^2 \|y\|^2 \|z\|^2 - \langle x, y\rangle \|z\|^2 \\
&\quad - \langle P_1(x \wedge y), z\rangle^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z), y\rangle &= -\langle P_1(y \wedge z), P_1(x \wedge y)\rangle \\
&= \langle P_1(y \wedge z), P_1(y \wedge x)\rangle \\
&= \langle y \wedge z, y \wedge x\rangle \\
&= \|y\|^2 \langle x, z\rangle - \langle x, y\rangle \langle y, z\rangle \\
\langle P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z), x\rangle &= -\langle P_1(x \wedge z), P_1(x \wedge y)\rangle \\
&= -\langle x \wedge z, x \wedge y\rangle \\
&= \langle x, y\rangle \langle x, z\rangle - \|x\|^2 \langle y, z\rangle
\end{aligned}
$$

olduğundan, bu ifadeler yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
\|P_1(P_2(x \wedge y \wedge z))\|^2 &= 9(\|x\|^2 \|y\|^2 \|z\|^2 - \langle x, y\rangle \|z\|^2 \\
&\quad - \langle P_1(x \wedge y), z\rangle^2) - 18 \langle x, z\rangle (\|y\|^2 \langle x, z\rangle \\
&\quad - \langle x, y\rangle \langle y, z\rangle) + 18 \langle y, z\rangle (\langle x, y\rangle \langle x, z\rangle \\
&\quad - \|x\|^2 \langle y, z\rangle) + 9 \langle x, z\rangle^2 \|y\|^2 \\
&\quad + 9 \langle y, z\rangle^2 \|x\|^2 - 18 \langle x, y\rangle \langle y, z\rangle \langle x, z\rangle \\
&= 9\|x\|^2 \|y\|^2 \|z\|^2 - 9\|z\|^2 \langle x, y\rangle \\
&\quad - 9 \langle P_1(x \wedge y), z\rangle^2 - 18\|y\|^2 \langle x, z\rangle \langle x, z\rangle \\
&\quad + 18 \langle x, z\rangle \langle x, y\rangle \langle y, z\rangle + 18 \langle y, z\rangle \langle x, y\rangle \langle x, z\rangle \\
&\quad - 18\|x\|^2 \langle y, z\rangle \langle y, z\rangle + 9\|y\|^2 \langle x, z\rangle^2 \\
&\quad + 9\|x\|^2 \langle y, z\rangle^2 - 18 \langle x, y\rangle \langle y, z\rangle \langle x, z\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 9\|x\|^2\|y\|^2\|z\|^2 - 9\|z\|^2 \langle x, y\rangle \\
&\quad -9 \langle P_1(x\wedge y), z\rangle^2 - 18\|y\|^2 \langle x, z\rangle^2 \\
&\quad +18 \langle x, y\rangle \langle x, z\rangle \langle y, z\rangle + 18 \langle x, y\rangle \langle x, z\rangle \langle y, z\rangle \\
&\quad -18\|x\|^2 \langle y, z\rangle^2 + 9\|y\|^2 \langle x, z\rangle^2 \\
&\quad +9\|x\|^2 \langle y, z\rangle^2 - 18 \langle x, y\rangle \langle x, z\rangle \langle y, z\rangle \\
&= 9\|x\|^2\|y\|^2\|z\|^2 - 9\|x\|^2 \langle y, z\rangle^2 \\
&\quad -9\|y\|^2 \langle x, z\rangle^2 - 9\|z\|^2 \langle x, y\rangle \\
&\quad +18 \langle x, y\rangle \langle x, z\rangle \langle y, z\rangle - 9 \langle P_1(x\wedge y), z\rangle^2 \\
&= 9(\|x\|^2\|y\|^2\|z\|^2 - \|x\|^2 \langle y, z\rangle^2 \\
&\quad -\|y\|^2 \langle x, z\rangle^2 - \|z\|^2 \langle x, y\rangle \\
&\quad +2 \langle x, y\rangle \langle x, z\rangle \langle y, z\rangle) - 9 \langle P_1(x\wedge y), z\rangle^2 \\
&= 9\|x\wedge y\wedge z\|^2 - 9 \langle P_1(x\wedge y), z\rangle^2 \\
&= 9\|x\wedge y\wedge z\|^2 - 9\Phi(x\wedge y\wedge z)^2 \\
&= 9\{\|x\wedge y\wedge z\|^2 - \Phi(x\wedge y\wedge z)^2\}
\end{aligned}
$$

olduğundan, (2.20) eşitliğine ulaşılır.

□

Yardımcı Teorem 2.0.19. *Herhangi $w, x, y, z \in V$ elemanları için aşağıdaki eşitlik doğrudur:*

$$
\begin{aligned}
(\star\Phi)(w\wedge x\wedge y\wedge z) &= \frac{1}{3}\langle w, P_1(P_2(x\wedge y\wedge z))\rangle \\
&= \langle w, P_1(P_1(x\wedge y)\wedge z)\rangle + \langle w\wedge z, x\wedge y\rangle \quad (2.21)
\end{aligned}
$$

Kanıt. $w, x, y, z \in$V için, ψ 4-formu,

$$
\psi(w\wedge x\wedge y\wedge z) := \langle w, P_1(P_2(x\wedge y\wedge z))\rangle \quad (2.22)
$$

olarak tanımlansın. Öncelikle, $\{e_0, e_1, ..., e_6\}$ Cayley tabanı için,

$$
\psi(e_i\wedge e_1\wedge e_2\wedge e_3) = -3\delta_{i6} = 3(\star\Phi)(e_i\wedge e_1\wedge e_2\wedge e_3) \quad (2.23)
$$

olduğu gösterilsin.

$$
\begin{aligned}
\psi(e_i\wedge e_1\wedge e_2\wedge e_3) &= \langle e_i, P_1(P_2(e_1\wedge e_2\wedge e_3))\rangle \\
&= \langle e_i, 3P_1(P_1(e_1\wedge e_2)\wedge e_3) - 3\langle e_1, e_3\rangle e_2 + 3\langle e_2, e_3\rangle e_1\rangle \\
&= \langle e_i, 3P_1(P_1(e_1\wedge e_2)\wedge e_3)\rangle \\
&= 3\langle e_i, P_1(e_4\wedge e_3)\rangle \\
&= 3\langle e_i, -e_6\rangle \\
&= -3\langle e_i, e_6\rangle = -3\delta_{i6}
\end{aligned}
$$

olduğundan,

$$\psi(e_i \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \;=\; -3\delta_{i6} \tag{2.24}$$

eşitliğine ulaşılır.

Φ 3-formunun tanımı kullanılarak, Φ'nin $\bigwedge^3(V^*)$ uzayının taban elemanları cinsinden ifadesi kolaylıkla bulunabilir. $\forall i, j, k$ için, $e_i^* \wedge e_j^* \wedge e_k^* = e_{ijk}^*$ olarak gösterilirse, Φ 3-formu,

$$\Phi \;=\; e_{013}^* + e_{026}^* + e_{045}^* + e_{124}^* + e_{156}^* + e_{235}^* + e_{346}^* \tag{2.25}$$

olarak ifade edilir. Hodge-star operatörünün tanımı kullanılarak, $\star\Phi$'nin taban elemanları cinsinden ifadesinin de,

$$\star\Phi \;=\; -e_{2456}^* - e_{1345}^* + e_{0356}^* - e_{0234}^* - e_{0146}^* + e_{0125}^* + e_{1236}^* \tag{2.26}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. $(\star\Phi)(e_i \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)$ ifadesinin eşiti şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
(\star\Phi)(e_i \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) &= (-e_{2456}^* - e_{1345}^* + e_{0356}^* - e_{0234}^* \\
&\quad -e_{0146}^* + e_{0125}^* + e_{1236}^*)(e_i \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \\
&= -e_{2456}^*(e_i \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) - e_{1345}^*(e_i \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \\
&\quad +e_{0356}^*(e_i \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) - e_{0234}^*(e_i \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \\
&\quad -e_{0146}^*(e_i \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) + e_{0125}^*(e_i \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \\
&\quad +e_{1236}^*(e_i \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \\
&= e_{1236}^*(e_i \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \\
&= -e_{1236}^*(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_i) \\
&= -e_1^*(e_1).e_2^*(e_2).e_3^*(e_3).e_6^*(e_i) \\
&= -e_6^*(e_i) = -\delta_{i6}
\end{aligned}$$

$$3(\star\Phi)(e_i \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \;=\; -3\delta_{i6} \tag{2.27}$$

Eşitlik (2.24) ve (2.27)'ten (2.23) ifadesine ulaşılır. Bu eşitlik herhangi bir Cayley tabanı için sağlandığından, $\forall w, x, y, z \in$V için,

$$\psi(w \wedge x \wedge y \wedge z) \;=\; 3(\star\Phi)(w \wedge x \wedge y \wedge z) \tag{2.28}$$

eşitliği elde edilir. Buradan, ψ'nin tanımı kullanılırsa,

$$(\star\Phi)(w \wedge x \wedge y \wedge z) \;=\; \frac{1}{3}\langle w, P_1(P_2(x \wedge y \wedge z))\rangle \tag{2.29}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi, (2.21) ifadesinin ikinci kısmı için,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{3}\langle w, P_1(P_2(x \wedge y \wedge z))\rangle &= \tfrac{1}{3}\langle w, 3P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z) - 3\langle x, z\rangle y + 3\langle y, z\rangle x\rangle \\
&= \langle w, P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z)\rangle - \langle w, \langle x, z\rangle y\rangle \\
&\quad + \langle w, \langle y, z\rangle x\rangle \\
&= \langle w, P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z)\rangle - \langle x, z\rangle \langle w, y\rangle \\
&\quad + \langle y, z\rangle \langle w, x\rangle \\
&= \Big\langle w, P_1(P_(x \wedge y) \wedge z)\Big\rangle + \langle w \wedge z, x \wedge y\rangle
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\frac{1}{3}\langle w, P_1(P_2(x \wedge y \wedge z))\rangle \quad = \quad \langle w, P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z)\rangle + \langle w \wedge z, x \wedge y\rangle$$

eşitliği bulunur. Eşitlik (2.29) ve son eşitlikten, (2.21) sağlanır. $\square$

3 G_2'NİN BAZI KÜÇÜK BOYUTLU TEMSİLLERİ

G_2 grubunun indirgenemez temsillerinin boyutlarının 1,7,14,27 ve 64 olduğu Weyl'in formülleriyle görülebilir [10, 11]. Bu bölümde G_2'nin 1,7,14 ve 27 boyutlu indirgenemez temsilleri incelenecektir. Bölüm 1'de

$$G_2 \;=\; \{g \in O(7) \mid \forall x, y \in V \text{ için } P(gx \wedge gy) = gP(x \wedge y)\} \tag{3.1}$$

olduğu görülmüştü. 2-katlı vektör çarpım yoluyla, 7-boyutta G_2'nin indirgenemez temsili elde edilir. G_2'nin 14-boyutlu temsili ise adjoint temsildir.

Tanım 3.0.20. *$P_k^* : \bigwedge^k(V^*) \longrightarrow \bigwedge^{k+1}(V^*)$ ve $p_k^* : \bigwedge^k(V^*) \longrightarrow \bigwedge^{k-1}(V^*)$ dönüşümleri; $\alpha \in \bigwedge^k(V^*)$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned} P_k^*(\alpha) &:= \alpha \circ P_k \\ p_k^*(\alpha) &:= \alpha \circ p_k \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Tanımdan aşağıdaki tam olmayan diziler elde edilir.

$$V^* \xrightarrow{P_1^*} \bigwedge^2 V^* \xrightarrow{P_2^*} \bigwedge^3 V^* \xrightarrow{P_3^*} \bigwedge^4 V^* \xrightarrow{P_4^*} \bigwedge^5 V^* \xrightarrow{P_5^*} \bigwedge^6 V^*$$

$$\bigwedge^6 V^* \xrightarrow{p_5^*} \bigwedge^5 V^* \xrightarrow{p_4^*} \bigwedge^4 V^* \xrightarrow{p_3^*} \bigwedge^3 V^* \xrightarrow{p_2^*} \bigwedge^2 V^* \xrightarrow{p_1^*} V^*$$

Her $k = 0, 1, ..., 6$ için; G_2'nin $\bigwedge^k(V^*)$ üzerindeki temsillerinin indirgenemez bileşenlerinin hesaplanması için Hodge-star operatörü

$$\star : \bigwedge^k(V^*) \longrightarrow \bigwedge^{7-k}(V^*)$$

kullanılacaktır. $\star$ operatörünün özelliğinden dolayı, $\bigwedge^k(V^*)$ ve $\bigwedge^{7-k}(V^*)$ uzayları izomorf olduklarından, G_2'nin $\bigwedge^k(V^*)$ ve $\bigwedge^{7-k}(V^*)$ üzerindeki temsilleri aynıdır. Bu nedenle, G_2'nin V^*, $\bigwedge^2(V^*)$ ve $\bigwedge^3(V^*)$ üzerindeki temsillerinin incelenmesi yeterli olacaktır.

Ayrıca, G_2'nin V^* üzerindeki temsili 7-boyutlu indirgenemez temsildir. Fakat, $\bigwedge^2(V^*)$ ve $\bigwedge^3(V^*)$ üzerindeki temsilleri indirgenebilir temsillerdir. Bu temsillerden indirgenemez temsiller elde etmek için, 2-katlı vektör çarpımı kullanılacaktır.

Diğer taraftan, burada, $\{e_0, e_1, ..., e_6\}$ kümesi V vektör uzayının bir tabanı olmak üzere, $\bigwedge^k(V^*)$ uzayı üzerindeki iç çarpım, $\alpha, \beta \in \bigwedge^k(V^*)$ için,

$$\langle \alpha, \beta \rangle \;=\; \sum_{i_1, i_2, ..., i_k = 0}^{6} \alpha(e_{i_1} \wedge e_{i_2} ... \wedge e_{i_k}) \beta(e_{i_1} \wedge e_{i_2} ... \wedge e_{i_k})$$

olarak alınacaktır.

$P_1^* : V^* \longrightarrow \bigwedge^2 V^*$ ve $p_1^* : \bigwedge^2 V^* \longrightarrow V^*$ dönüşümleri kullanılarak aşağıdaki alt uzaylar tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}
\bigwedge\nolimits_1^2(V^*) &= \{\alpha \in \bigwedge\nolimits^2(V^*) \mid p_1^*(\alpha) = 0\} \\
\bigwedge\nolimits_2^2(V^*) &= \{\alpha \in \bigwedge\nolimits^2(V^*) \mid 3\alpha = P_1^*(p_1^*(\alpha))\} \\
\bigwedge\nolimits_1^3(V^*) &= \langle \Phi \rangle \\
\bigwedge\nolimits_2^3(V^*) &= \{\alpha \in \bigwedge\nolimits^3(V^*) \mid p_1^*(\alpha) = 0, \ \sum_{i,j=0}^{6} \alpha(e_i \wedge e_j \wedge P_1(e_i \wedge e_j)) = 0\} \\
\bigwedge\nolimits_3^3(V^*) &= \{\alpha \in \bigwedge\nolimits^3(V^*) \mid \forall x, y \in V \text{ için, } \alpha(x \wedge y \wedge P_1(x \wedge y)) = 0\}
\end{aligned}$$

Yardımcı Teorem 3.0.21.

$$\bigwedge\nolimits^2(V^*) \;=\; \bigwedge\nolimits_1^2(V^*) \oplus \bigwedge\nolimits_2^2(V^*) \tag{3.2}$$

Ayrıca, G_2 grubu $\bigwedge_1^2(V^*)$ ve $\bigwedge_2^2(V^*)$ uzayları üzerinde indirgenemez temsile sahiptir ve

$$boy \bigwedge\nolimits_1^2(V^*) = 14 \qquad\qquad boy \bigwedge\nolimits_2^2(V^*) = 7$$

dir.

Kanıt. $\bigwedge^k(V)$ uzayındaki birim dönüşüm I_k ile, $\bigwedge^k(V^*)$ uzayındaki birim dönüşüm ise I_k^* ile gösterilsin. $P_1^* : V^* \longrightarrow \bigwedge^2(V^*)$ ve $p_1^* : \bigwedge^2(V^*) \longrightarrow V^*$ dönüşümleri göz önüne alındığında $\alpha \in V^*$ için,

$$\begin{aligned}
(p_1^* \circ P_1^*)(\alpha) &= p_1^*(P_1^*(\alpha)) = p_1^*(\alpha \circ P_1) \\
&= (\alpha \circ P_1) \circ p_1 = \alpha \circ (P_1 \circ p_1) \\
&= \alpha \circ (3I_1) = 3(\alpha \circ I_1) = 3I_1^*(\alpha)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$p_1^* \circ P_1^* \;=\; 3I_1^* \tag{3.3}$$

bulunur.

Öncelikle, $\alpha \in \bigwedge^2(V^*)$ elemanının $\alpha_1 \in \bigwedge_1^2(V^*)$ ve $\alpha_2 \in \bigwedge_2^2(V^*)$ olmak üzere, $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$ olarak yazılabildiği gösterilecektir: Herhangi bir $\alpha \in \bigwedge^2(V^*)$ elemanı için

$$\alpha = I_1^*(\alpha) = \frac{1}{3}(P_1^* \circ p_1^*)(\alpha) + \alpha - \frac{1}{3}(P_1^* \circ p_1^*)(\alpha)$$

olarak yazılabilir ve $\frac{1}{3}(P_1^* \circ p_1^*)(\alpha) \in \bigwedge_2^2(V^*)$ ve $\alpha - \frac{1}{3}(P_1^* \circ p_1^*)(\alpha) \in \bigwedge_1^2(V^*)$'dir:

$$\begin{aligned} P_1^*(p_1^*(\tfrac{1}{3}(P_1^* \circ p_1^*)(\alpha)) &= \tfrac{1}{3}P_1^* p_1^* P_1^*(p_1^*(\alpha)) \\ &= \tfrac{1}{3}(P_1^*(3I_1^*)(p_1^*(\alpha))) \\ &= 3(\tfrac{1}{3}(P_1^* \circ p_1^*)(\alpha)) \end{aligned}$$

olduğu için, $\frac{1}{3}(P_1^* \circ p_1^*)(\alpha) \in \bigwedge_2^2(V^*)$'dır.

$$\begin{aligned} p_1^*(\alpha - \tfrac{1}{3}(P_1^* \circ p_1^*)(\alpha)) &= p_1^*(\alpha) - \tfrac{1}{3}p_1^*((P_1^* \circ p_1^*)(\alpha)) \\ &= p_1^*(\alpha) - \tfrac{1}{3}(p_1^* \circ P_1^*)(p_1^*(\alpha)) \\ &= p_1^*(\alpha) - \tfrac{1}{3}3I_1^*(p_1^*(\alpha)) \\ &= p_1^*(\alpha) - p_1^*(\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $\alpha - \frac{1}{3}(P_1^* \circ p_1^*)(\alpha) \in \bigwedge_1^2(V^*)$'dir.

Böylece α, $\alpha_1 = \alpha - \frac{1}{3}(P_1^* \circ p_1^*)(\alpha) \in \bigwedge_1^2(V^*)$ ve $\alpha_2 = \frac{1}{3}(P_1^* \circ p_1^*)(\alpha) \in \bigwedge_2^2(V^*)$ olmak üzere, $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$ olarak yazılmış olur. $\bigwedge_1^2(V^*) \bigcap \bigwedge_2^2(V^*) = \{0\}$ olduğu görülürse bu yazılış tek türlü olacağından, $\bigwedge^2(V^*) = \bigwedge_1^2(V^*) \oplus \bigwedge_2^2(V^*)$ olur.

$$Çek p_1^* = \{\alpha \in \bigwedge^2(V^*) \mid p_1^*(\alpha) = 0\} = \bigwedge_1^2(V^*)$$

olduğu açıktır.

$$Gör P_1^* = \{\alpha \in \bigwedge^2(V^*) \mid \exists \beta \in V^* \ni \alpha = P_1^*(\beta)\} \quad = \quad \bigwedge_2^2(V^*)$$

olduğu aşağıdaki şekilde görülebilir: Herhangi bir $\alpha \in \bigwedge_2^2(V^*)$ elemanı için, $P_1^*(p_1^*(\alpha)) = 3\alpha$'dir. Buradan, $P_1^*(\frac{1}{3}p_1^*(\alpha)) = \alpha$ olduğu için, $\alpha \in Gör P_1^*$ ve

$$\bigwedge_2^2(V^*) \quad \subseteq \quad Gör P_1^* \tag{3.4}$$

dir. Tersine $\alpha \in Gör P_1^*$ elemanı için, $\alpha = P_1^*(\beta)$ olcak şekilde en az bir $\beta \in V^*$ vardır. Buradan,

$$p_1^*(P_1^*(\beta)) \quad = \quad p_1^*(\alpha)$$

olduğundan,

$$3\beta = 3I_1^*(\beta) = p_1^*(\alpha)$$

dır. Bu eşitliğe P_1^* uygulanırsa,

$$\begin{aligned} P_1^*(3\beta) &= P_1^*(p_1^*(\alpha)) \\ 3P_1^*(\beta) &= P_1^*(p_1^*(\alpha)) \\ 3\alpha &= P_1^*(p_1^*(\alpha)) \end{aligned}$$

olduğundan, $\alpha \in \bigwedge_2^2(V^*)$'dır. Dolayısıyla,

$$GörP_1^* \subseteq \bigwedge\nolimits_2^2(V^*) \tag{3.5}$$

ifadesine ulaşılır. (3.4) ve (3.5) ifadelerinden, $GörP_1^* = \bigwedge_2^2(V^*)$ eşitliği elde edilir.

Şimdi, $\alpha \in$ Ç$ekp_1^* \bigcap GörP_1^*$ olsun. Bu durumda, $p_1^*(\alpha) = 0$ ve $\alpha = P_1^*(\beta)$ olacak şekilde bir $\beta \in V^*$ elemanın varlığından,

$$\begin{aligned} p_1^*(P_1^*(\beta)) &= p_1^*(\alpha) \\ p_1^*(P_1^*(\beta)) &= 0 \\ 3I_1^*(\beta) &= 0 \\ 3\beta &= 0 \\ \beta &= 0 \end{aligned}$$

ve P_1^* bir lineer dönüşüm olduğundan, $\alpha = P_1^*(0) = 0$ olur. Dolayısıyla, Ç$ekp_1^* \cap GörP_1^* = \{0\}$'dir.

Ayrıca, $boy \bigwedge_1^2(V^*) = 14$ ve $boy \bigwedge_2^2(V^*) = 7$'dir:
Öncelikle, P_1 ve p_1^* dönüşümleri örten, p_1 ve P_1^* dönüşümleri bire-birdir. Çünkü;

- Her e_i taban elemanı için, $P_1(e_k \wedge e_m) = e_i$ olacak şekilde e_k ve e_m elemanları olduğundan, $P_1 : \bigwedge^2 V \longrightarrow V$ dönüşümü örtendir.

- $x \in V$ alalım. $p_1(x) = 0$ olsun. Bu durumda, $3x = P_1(p_1(x)) = 0$ olduğundan, $x = 0$ yani; Ç$ekp_1 = \{0\}$ olduğu için, $p_1 : V \longrightarrow \bigwedge^2 V$ dönüşümü birebirdir.

- $\alpha \in V^*$ ve $P_1^*(\alpha) = 0$ olsun. Bu durumda, $\alpha \circ P_1 = 0$'dır. Buradan, her $x \wedge y \in \bigwedge^2 V$ için, $(\alpha \circ P_1)(x \wedge y) = 0$'dır. P_1 örten olduğundan, her $v \in V$ için, $P_1(x \wedge y) = v$ olacak şekilde $x \wedge y \in \bigwedge^2 V$ elemanı vardır. Bu durumda, $\forall v \in V$ için $\alpha(v) = 0$'dır. Yani, $\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R}$, 0 dönüşümüdür. Ç$ekP_1^* = \{0\}$ olduğundan $P_1^* : V^* \longrightarrow \bigwedge^2(V^*)$ dönüşümü birebirdir.

- $p_1^* : \bigwedge^2(V^*) \longrightarrow V^*$ dönüşümü ise örtendir: Her $\alpha \in V^*$ için, $p_1^*(P_1^*(\alpha)) = 3\alpha$ olduğu için, $\alpha = \frac{1}{3}p_1^*(P_1^*(\alpha))$, dolayısıyla $\alpha = p_1^*(\frac{1}{3}P_1^*(\alpha))$ dır. Bu durumda, p_1^* örtendir.

$P_1^* : V^* \longrightarrow \bigwedge^2(V^*)$ birebir olduğundan, *boy*V^* = *boy(GörP*$_1^*$*)*'dir. *boy*$V^* = 7$ olduğu için, *boy(GörP*$_1^*$*)* $= 7$'dir. *GörP*$_1^* = \bigwedge_2^2(V^*)$ olduğu için de *boy* $\bigwedge_2^2(V^*) = 7$ olur.

Benzer şekilde, p_1^* örten olduğundan *boy(Görp*$_1^*$*)* = *boy*V^*'dir. Boyut teoreminden, *boy* $\bigwedge^2(V^*)$ = *boy(Görp*$_1^*$*)* + *boy*(Ç*ekp*$_1^*$) olduğuna göre, *boy* $\bigwedge^2(V^*)$ = *boy*V^*+*boy*(Ç*ekp*$_1^*$)'dır. *boy* $\bigwedge^2(V^*) = 21$ ve *boy*$V^* = 7$ olduğu için, *boy*Ç*ekp*$_1^* = 14$ olur. Ç*ekp*$_1^* = \bigwedge_1^2(V^*)$ olduğu için, *boy* $\bigwedge_1^2(V^*) = 14$ eşitliği elde edilir.

G_2'nin 1-boyutlu temsili indirgenemez ve aşikar (trivial) temsildir [12]. G_2'nin 7-boyutta temsili indirgenebilir olsaydı, arada başka boyutlu bir temsil olmadığından ancak 1-boyutlu temsillere indirgenebilirdi. 1-boyutlu temsil aşikar temsil olduğundan, bu 7-boyutlu temsilin aşikar olmasını gerektirirdi. Fakat, G_2'nin 7-boyutta temsili aşikar olmayan (non-trivial) temsil olduğundan, bu durum hipotezle çelişir. O halde, G_2'nin 7-boyutta temsili indirgenemezdir. G_2'nin 14-boyutta adjoint temsilinin de indirgenemez olduğu benzer bir şekilde ifade edilebilir. G_2'nin 14 boyutta temsillinin indirgenemez olması da benzer şekilde açıklanabilir[10, 13]. □

Yardımcı Teorem 3.0.22.

$$\bigwedge^3(V^*) \;=\; \bigwedge_1^3(V^*) \oplus \bigwedge_2^3(V^*) \oplus \bigwedge_3^3(V^*) \qquad (3.6)$$

Ayrıca, G_2 grubu $\bigwedge_1^3(V^*)$, $\bigwedge_3^2(V^*)$ ve $\bigwedge_3^3(V^*)$ uzayları üzerinde indirgenemez temsillere sahiptir ve

$$boy\bigwedge_1^3(V^*) = 1 \qquad boy\bigwedge_2^3(V^*) = 27 \qquad boy\bigwedge_3^3(V^*) = 7$$

olur.

Kanıt. $\bigwedge^3(V^*)$ uzayında $\{x \wedge y \wedge P(x \wedge y) \mid x, y \in V\}$ formundaki elemanlar tarafından üretilen alt uzay A ile gösterilsin. $P_1 \circ P_2 : \bigwedge^3 V \longrightarrow V$ dönüşümü için, Ç$ek(P_1 \circ P_2) = A$'dır: $\alpha = \sum_i x_i \wedge y_i \wedge P(x_i \wedge y_i) \in A$ olsun. (2.19) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}(P_1 \circ P_2)(\alpha) &= \textstyle\sum_i (P_1 \circ P_2)(x_i \wedge y_i \wedge P_1(x_i \wedge y_i)) \\ &= \textstyle\sum_i \{3P_1(P_1(x_i \wedge y_i) \wedge P_1(x_i \wedge y_i) - 3\langle x_i, P_1(x_i \wedge y_i)\rangle y \\ &\quad +3\langle y_i, P_1(x_i \wedge y_i)\rangle x)\} = 0\end{aligned}$$

olduğundan, $\alpha \in$ Çek$(P_1 \circ P_2)$ olur. Dolayısıyla, $A \subseteq$ Çek$P_1 \circ P_2$ elde edilir. Ters kapsama da benzer şekilde gösterilebilir. $P_1 \circ P_2$ dönüşümü örten olduğundan ve *boy* $\bigwedge^3 V = 35$, *boy(Gör*$(P_1 \circ P_2)) =$ *boy*$V = 7$ olduğundan boyut teoreminden, *boy(Çek(*$P_1 \circ P_2)) = 28$'dir. Çek$(P_1 \circ P_2) = A$ olduğu için de *boy*$A = 28$ bulunur.

A'yı sıfırlayan formaların kümesi

$$B = \{\alpha \in \bigwedge^3 (V^*) \mid w \in A \text{ için, } \alpha(w) = 0\}$$

olsun.

$\bigwedge^3(V^*)$ uzayında, Çek$(P_1 \circ P_2)$ altuzayının $\bigwedge^3(V) =$ Çek$(P_1 \circ P_2) \oplus B$ olacak şekilde bir B altuzayı vardır. Bu uzayların dualleri düşünüldüğünde, $\bigwedge^3(V^*) =$ Çek$(P_1 \circ P_2)^* \oplus B^*$ uzayından alınan herhangi bir $\alpha \in \bigwedge^3(V^*)$ elemanı, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$; $\alpha_1 \in$ Çek$(P_1 \circ P_2)^*$ ve $\alpha_2 \in B^*$ şeklinde tek türlü yazılabilir. A kümesi üzerinde sıfırlayan formların uzayı B^*'dır. *boy*(Çek$(P_1 \circ P_2)) = 28$ olduğndan, *boy*$B =$ *boy*$B^* = 7$ olur. Böylece, *boy* $\bigwedge^3_3(V^*) = 7$ olur.

$p_1^* \circ p_2^* : \bigwedge^3(V^*) \longrightarrow V^*$ dönüşümü göz önüne alınsın. Bu dönüşüm örten olduğundan, *boy* $\bigwedge^3(V^*) = 35$ ve *boy(Gör*$(p_1^* \circ p_2^*)) =$ *boy*$V^* = 7$ olduğundan, *boy*(Çek$(p_1^* \circ p_2^*)) = 28$'dir.

Şimdi; $\bigwedge^3_1(V^*) \oplus \bigwedge^2_3(V^*) =$ Çek$(p_1^* \circ p_2^*)$ olduğu gösterilsin.
$\bigwedge^3_1(V^*) \subseteq$ Çek$(p_1^* \circ p_2^*)$'dır: $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\alpha = k\Phi \in \bigwedge^3_1(V^*)$ olsun. $\forall\, x \in V$ için,

$$\begin{aligned}
(p_1^* \circ p_2^*)(\alpha)(x) &= (p_1^* \circ p_2^*)(k\Phi)(x) \\
&= (p_2^*)(k\Phi)(-\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=0}^{6} e_i \wedge P(e_i \wedge x)) \\
&= -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=0}^{6}(k\Phi)(p_2(e_i \wedge P(e_i \wedge x))) \\
&= -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=0}^{6}(k\Phi)(p_1(e_i) \wedge P(e_i \wedge x) - p_1(P(e_i \wedge x) \wedge e_i)) \\
&= -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=0}^{6}(k\Phi)\{-\tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{6} e_j \wedge P(e_j \wedge e_i) \wedge P(e_i \wedge x) \\
&\quad +\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{k=0}^{6} e_k \wedge P(e_k \wedge P(e_i \wedge x)) \wedge e_i\} \\
&= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{i,j=0}^{6} k\Phi(e_j \wedge P(e_j \wedge e_i) \wedge P(e_i \wedge x)) \\
&\quad -\tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{i,k=0}^{6} k\Phi(e_k \wedge P(e_k \wedge P(e_i \wedge x)) \wedge e_i) \\
&= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{i,j=0}^{6} k\,\langle P(e_j \wedge P(e_j \wedge e_i)), P(e_i \wedge x)\rangle \\
&\quad -\tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{i,k=0}^{6} k\,\langle P(e_k \wedge P(e_k \wedge P(e_i \wedge x)), e_i\rangle \\
&= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{i,j=0}^{6} k\,\langle -e_i + \langle e_i, e_j\rangle e_j, P(e_i \wedge x)\rangle \\
&\quad -\tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{i,k=0}^{6} k\,\langle -P(e_i \wedge x) + \langle e_k, P(e_i \wedge x)\rangle e_k, e_i\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan $\alpha \in$ Çek$(p_1^* \circ p_2^*)$'dır. $\bigwedge^3_2(V^*) \subseteq$ Çek$(p_1^* \circ p_2^*)$'dır: $\alpha \in \bigwedge^3_2(V^*)$ olsun. $\bigwedge^3_2(V^*)$ uzayının tanımından, $p_2^*(\alpha) = 0$'dır. Dolayısıyla, $(p_1^* \circ p_2^*)(\alpha) = 0$ olur.

$\alpha \in Çek(p_1^* \circ p_2^*)$ sonucuna ulaşılır. Ayrıca, $\bigwedge_1^3(V^*) \cap \bigwedge_2^3(V^*) = \{0\}$ olduğundan, $\alpha \in \bigwedge_1^3(V^*) \oplus \bigwedge_2^3(V^*)$ için, $\alpha \in Çek(p_1^* \circ p_2^*)$'dır ve $\bigwedge_1^3(V^*) \oplus \bigwedge_2^3(V^*) \subseteq Çek(p_1^* \circ p_2^*)$ sonucuna ulaşılır. $\bigwedge_2^3(V^*) = \bigwedge_1^3(V^*)^\perp$ olduğu gösterildiğinde, ters kapsam da görülmüş olur. $boy(Çek(p_1^* \circ p_2^*)) = 28$ ve $boy \bigwedge_1^3(V^*) = 1$ olduğundan, $boy \bigwedge_2^3(V^*) = 27$ elde edilir.

G_2'nin bu uzaylar üzerindeki temsillerinin indirgenemez olması da bir önceki yardımcı teoremdeki gibi açıklanabilir. $\square$

4 Φ TEMEL 3-FORMUNUN KOVARYANT TÜREVLERİNİN UZAYI

Bu bölümde 2-katlı bir vektör çarpımdan elde edilen Φ temel 3-formunun $\nabla\Phi$ kovaryant türevi incelenecektir. $\nabla\Phi$ kovaryant türevi çeşitli özelliklere sahiptir. Bu özellikleri incelemek için, aşağıdaki W uzayı tanımlanacak ve G_2 grubunun temsilleri ile bu uzay ayrıştırılacaktır.

$$W \;=\; \{\alpha \in V^* \otimes \bigwedge^3 V^* \mid \forall x, y, z \in V \text{ için } \alpha(x, y \wedge z \wedge P_1(y \wedge z) = 0\}$$

Yardımcı Teorem 4.0.23.

$$boy W \;=\; 49 \tag{4.1}$$

Kanıt. Öncelikle,

$$W \cong V^* \otimes \bigwedge\nolimits_3^3 V^*$$

olduğu gösterilmelidir:

$$\begin{array}{rcccl} \Psi & : & V^* \otimes \bigwedge_3^3 V^* & \longrightarrow & W \\ & & \alpha & \longmapsto & \Psi(\alpha) := \alpha \end{array}$$

dönüşümü tanımlansın. Ψ'nin lineer olduğu açıktır. Öncelikle $\alpha \in V^* \otimes \bigwedge_3^3 V^*$ ise $\Psi(\alpha) = \alpha \in W$'dir: $\alpha_i \in V^*$ ve $w_i \in V^* \otimes \bigwedge_3^3 V^*$ olmak üzere, $\alpha = \sum_i \alpha_i \otimes w_i$'dir. $\forall x, y, z \in V$ için,

$$\begin{aligned} \alpha(x, y \wedge z \wedge P_1(y \wedge z)) &= (\textstyle\sum_i \alpha_i \otimes w_i)(x, y \wedge z \wedge P_1(y \wedge z) \\ &= \textstyle\sum_i \alpha_i(x).w_i(y \wedge z \wedge P_1(y \wedge z) \\ &= \textstyle\sum_i \alpha_i(x).0 = 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $\alpha \in W$'dir. Ayrıca, Ψ dönüşümünün birebir olduğu tanımdan kolayca görülebilir. Ψ'nin örten olduğu şu şekilde görülebilir: $\alpha \in W \subseteq V^* \otimes \bigwedge^3 V^*$ olsun. Bu durumda, $\forall x, y, z \in V$ için, $\alpha(x, y \wedge z \wedge P_1(y \wedge z) = 0$'dir ve $\alpha_i \in V^*$ ve $w_i \in \bigwedge^3 V^*$ olmak üzere, $\alpha = \sum_i \alpha_i \otimes w_i$ olarak yazılabilir. Öte yandan, $\alpha_i \in V^*$ olduğundan, $\alpha_i = \sum_{j=0}^{6} \alpha_{ij} e_j^*$ şeklinde taban elemanlarının lineer toplamı olarak ifade edilebilir. O halde,

$$\begin{aligned} \alpha &= \textstyle\sum_i \alpha_i \otimes w_i \\ &= \textstyle\sum_i (\sum_{j=0}^{6} \alpha_{ij} e_j^*) \otimes w_i \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{6} e_j^* \otimes \beta_j' \end{aligned}$$

olur. Burada, $\beta'_j = \sum_i \alpha_{ij} w_i$'dir. $\forall x, y, z \in V$ için, $\alpha(x, y \wedge z \wedge P_1(y \wedge z)) = 0$ olduğundan, özel olarak $x = e_k$ taban elemanı olarak alındığında,

$$0 = \alpha(e_k, y \wedge z \wedge P_1(y \wedge z)) = \sum_{j=0}^{6} e_j^*(e_k) \otimes \beta'_j(y \wedge z \wedge P_1(y \wedge z))$$

eşitliğinden, $k = 0, 1, ..., 6$ için, $\beta'_k(y \wedge z \wedge P_1(y \wedge z)) = 0$ olur. Böylece, Ψ dönüşümünün izomorfizm olduğu görülür. Bu durumda, $boy V^* = 7$ ve $boy \bigwedge_3^3 V^* = 7$ olduğundan, $boy W = boy(V^* \otimes \bigwedge_3^3 V^*) = 49$ bulunur. $\square$

W uzayı üzerinde tanımlı doğal bir iç çarpım vardır. Bu iç çarpım, $\{e_0, e_1, ..., e_6\}$ kümesi, V uzayı için ortonormal bir taban olmak üzere, $\forall \alpha, \beta \in W$ için,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i,j,k,l=0}^{6} \alpha(e_i, e_j \wedge e_k \wedge e_l) \beta(e_i, e_j \wedge e_k \wedge e_l)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, W'nin ayrışımında kullanılacak olan, $i = 0, 1, 2$ için, $L_i : W \longrightarrow \bigwedge^i(V^*)$ lineer dönüşümleri, $\forall x, y \in V$ ve $\alpha \in W$ için,

$$\begin{aligned} L_2(\alpha)(x \wedge y) &= \sum_{i=0}^{6} \alpha(e_i, e_i \wedge x \wedge y) \\ L_1(\alpha)(x) &= \sum_{i,j=0}^{6} \alpha(P_1(e_i \wedge e_j), e_i \wedge e_j \wedge x) \\ L_0(\alpha) &= \sum_{i,j,k=0}^{6} \alpha(P_1(P_1(e_i \wedge e_j) \wedge e_k), e_i \wedge e_j \wedge e_k) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Çalışmanın bundan sonraki kısmında kısalık açısından, $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_k}$ yerine $e_{i_1 i_2 ... i_k}$ gösterimi kullanılacaktır.

Yardımcı Teorem 4.0.24. *Her $x \in V$ ve $\alpha \in W$ için,*

$$L_0(\alpha) = \langle \alpha, \star\Phi \rangle \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} L_1(\alpha)(x) &= \sum_{i,j=0}^{6} \alpha(e_i, e_j \wedge P_1(e_i \wedge e_j) \wedge x) \\ &= -2(p_1^*(L_2(\alpha)))(x) \end{aligned} \tag{4.3}$$

eşitlikleri doğrudur.

Kanıt.

$$\begin{array}{rcl} \langle \alpha, \star\Phi \rangle & = & \sum_{i,j,k,l=0}^{6} \alpha(e_i, e_{jkl})(\star\Phi)(e_{ijkl}) \\ & = & \sum_{i,j,k,l=0}^{6} \alpha(e_i, e_{jkl})(\langle e_i, P_1(P_1(e_j \wedge e_k) \wedge e_l)\rangle + \langle e_i \wedge e_l, e_j \wedge e_k \rangle) \\ & = & \sum_{i,j,k,l=0}^{6} \alpha(e_i, e_{jkl}) \langle e_i, P_1(P_1(e_j \wedge e_k) \wedge e_l)\rangle \\ & & + \sum_{i,j,k,l=0}^{6} \alpha(e_i, e_{jkl}) \langle e_i \wedge e_l, e_j \wedge e_k \rangle) \end{array}$$

Bu ifadedeki toplamlara bakılırsa, $\sum_{i,j,k,l=0}^{6} \alpha(e_i, e_{jkl}) \langle e_i, P_1(P_1(e_j \wedge e_k) \wedge e_l)\rangle$ toplamında, $P_1(P_1(e_j \wedge e_k) \wedge e_l) = e_i$ ise, toplam;

$$\sum_{j,k,l=0}^{6} \alpha(P_1(P_1(e_j \wedge e_k) \wedge e_l), e_{jkl})$$

olur ve bu toplam $L_0(\alpha)$'dır. Diğer durumda, $P(P(e_j \wedge e_k) \wedge e_l) \neq e_i$ ise, toplam 0 olur. Ayrıca,

$$\sum_{i,j,k,l}^{6} \alpha(e_i, e_{jkl}) \langle e_i \wedge e_l, e_j \wedge e_k \rangle \quad = \quad 0$$

olduğu kolayca görülebilir. Buradan, $\langle \alpha, \star\Phi \rangle = L_0(\alpha)$ elde edilir.

e_i taban elemanı ve her $j = 0, 1, ..., 6$ için, $e_j = P(e_i \wedge e_k)$ olacak şekilde bir e_k taban elemanı vardır. Bu ifade $L_1(\alpha)$'nın tanımında yerine yazılırsa,

$$\begin{array}{rcl} L_1(\alpha)(x) & = & \sum_{i,j=0}^{6} \alpha(P_1(e_i \wedge e_j), e_i \wedge e_j \wedge x) \\ & = & \sum_{i,k=0}^{6} \alpha(P_1(e_i \wedge P_1(e_i \wedge e_k)), e_i \wedge P_1(e_i \wedge e_k) \wedge x) \\ & = & \sum_{i,k=0}^{6} \alpha(-\|e_i\|^2 e_k + \langle e_i, e_k \rangle e_i, e_i \wedge P_1(e_i \wedge e_k) \wedge x) \\ & = & \sum_{i,k=0}^{6} \alpha(-e_k, e_i \wedge P_1(e_i \wedge e_k) \wedge x) \\ & & + \sum_{i,k=0}^{6} \alpha(\langle e_i, e_k \rangle e_i, e_i \wedge P_1(e_i \wedge e_k) \wedge x) \\ & = & -\sum_{i,k=0}^{6} \alpha(e_k, e_i \wedge P_1(e_i \wedge e_k) \wedge x) + 0 \\ & = & -\sum_{i,j=0}^{6} \alpha(e_j, e_i \wedge P_1(e_i \wedge e_j) \wedge x) \\ & = & -\sum_{i,j=0}^{6} \alpha(e_i, e_j \wedge P_1(e_j \wedge e_i) \wedge x) \\ & = & \sum_{i,j=0}^{6} \alpha(e_i, e_j \wedge P_1(e_i \wedge e_j) \wedge x) \end{array}$$

olduğundan,

$$L_1(\alpha)(x) \quad = \quad \sum_{i,j=0}^{6} \alpha(e_i, e_j \wedge P_1(e_i \wedge e_j) \wedge x) \tag{4.4}$$

ifadesi elde edilir.

Diğer taraftan,

$$\begin{array}{rcl} -2(p_1^*(L_2(\alpha)))(x) & = & -2L_2(\alpha)(p_1(x)) \\ & = & -2L_2(\alpha)(-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{6} e_i \wedge P_1(e_i \wedge x)) \\ & = & -2.(-\frac{1}{2})\sum_{i=0}^{6} L_2(\alpha)(e_i \wedge P_1(e_i \wedge x) \\ & = & \sum_{i=0}^{6}(\sum_{j=0}^{6} \alpha(e_j, e_j \wedge e_i \wedge P_1(e_i \wedge x))) \\ & = & \sum_{i,j=0}^{6} \alpha(e_i, e_i \wedge e_j \wedge P_1(e_j \wedge x)) \end{array}$$

olur. $\alpha \in W$ olduğundan, $\forall\ x, y_1, y_2, z \in V$ için,
$\alpha(x, (y_1 + y_2) \wedge z \wedge P_1((y_1 + y_2) \wedge z)) = 0$ olur. α'nın P_1'nin ve $\wedge$ çarpımının lineerliği kullanılırsa,

$$\alpha(x, y_1 \wedge z \wedge P_1(y_2 \wedge z)) = -\alpha(x, y_2 \wedge z \wedge P_1(y_1 \wedge z))$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte, x yerine e_i, y_1 yerine x, z yerine e_j, y_2 yerine e_i ve z yerine e_j yazılırsa,

$$\alpha(e_i, x \wedge e_j \wedge P_1(e_i \wedge e_j)) = -\alpha(e_i, e_i \wedge e_j \wedge P_1(x \wedge e_j))$$

olur. Buradan,

$$\alpha(e_i, e_j \wedge P_1(e_i \wedge e_j) \wedge x) = \alpha(e_i, e_i \wedge e_j \wedge P_1(e_j \wedge x))$$

eşitliğine ulaşılır. Bu ifade yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$-2(p_1^*(L_2(\alpha)))(x) = \sum_{i,j=0}^{6} \alpha(e_i, e_j \wedge P_1(e_i \wedge e_j) \wedge x) \tag{4.5}$$

olur. (4.4) ve (4.5)'den,

$$L_1(\alpha)(x) = -2(p_1^*(L_2(\alpha)))(x) \tag{4.6}$$

bulunur. □

Yardımcı Teorem 4.0.25. *$\forall x, y, z \in V$ için,*

$$\begin{aligned} \alpha(P_1(x \wedge y), x \wedge y \wedge z) &= a\{\alpha(x, P_1(x \wedge y) \wedge y \wedge z) \\ &\quad -\alpha(y, P_1(x \wedge y) \wedge x \wedge z)\} \end{aligned} \tag{4.7}$$

eşitliğini sağlayan bir a sabitinin olduğu varsayılsın. Eğer, $a \neq -\frac{1}{2}$ ise $p_1^*(L_2(\alpha)) = 0$ olur.

Kanıt. Her $x \in V$ için, bir önceki yardımcı teoremden,

$$\begin{aligned} (p_1^*(L_2(\alpha)))(x) &= -\tfrac{1}{2} L_1(\alpha)(x) \\ &= -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i,j=0}^{6} \alpha(P_1(e_i \wedge e_j), e_i \wedge e_j \wedge x) \\ &= -\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i,j=0}^{6} a(\alpha(e_i, P_1(e_i \wedge e_j) \wedge e_j \wedge x) \\ &\quad -\alpha(e_j, P_1(e_i \wedge e_j) \wedge e_i \wedge x)) \\ &= -\tfrac{a}{2} \textstyle\sum_{i,j=0}^{6} \alpha(e_i, P_1(e_i \wedge e_j) \wedge e_j \wedge x) \\ &\quad +\tfrac{a}{2} \textstyle\sum_{i,j=0}^{6} \alpha(e_j, P_1(e_i \wedge e_j) \wedge e_i \wedge x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\tfrac{a}{2}\textstyle\sum_{i,j=0}^{6} \alpha(e_i, P_1(e_i \wedge e_j) \wedge e_j \wedge x) \\
&\quad +\tfrac{a}{2}\textstyle\sum_{i,j=0}^{6} \alpha(e_i, P_1(e_j \wedge e_i) \wedge e_j \wedge x) \\
&= -\tfrac{a}{2}\textstyle\sum_{i,j=0}^{6} \alpha(e_i, P_1(e_i \wedge e_j) \wedge e_j \wedge x) \\
&\quad -\tfrac{a}{2}\textstyle\sum_{i,j=0}^{6} \alpha(e_i, P_1(e_i \wedge e_j) \wedge e_j \wedge x) \\
&= -a\textstyle\sum_{i,j=0}^{6} \alpha(e_i, P_1(e_i \wedge e_j) \wedge e_j \wedge x) \\
&= a\textstyle\sum_{i,j=0}^{6} \alpha(e_i, e_j \wedge P_1(e_i \wedge e_j) \wedge x) \\
&= aL_1(\alpha)(x) \\
&= -2a(p_1^*(L_2(\alpha)))(x)
\end{aligned}
$$

eşitliğinden,

$$-2a(p_1^*(L_2(\alpha)))(x) = (p_1^*(L_2(\alpha)))(x)$$

olur. Buradan,

$$(-2a-1)(p_1^*(L_2(\alpha)))(x) = 0$$

bulunur. $a \neq -\frac{1}{2}$ ise, $\forall x \in V$ için, $(p_1^*(L_2(\alpha)))(x) = 0$ elde edilir. □

Daha önce tanımlanan W uzayının bazı alt uzayları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \langle \star\Phi \rangle \\
W_2 &= \{\alpha \in W \mid \forall x, y, z, w \in W \text{ için}, \quad \alpha(w, x \wedge y \wedge z) - \alpha(x, w \wedge y \wedge z) \\
&\quad +\alpha(y, w \wedge x \wedge z) - \alpha(z, w \wedge x \wedge y) = 0\} \\
W_3 &= \{\alpha \in W \mid L_2(\alpha) = L_0(\alpha) = 0\} \\
W_4 &= \{\alpha \in W \mid \forall x, y, z, w \in W \text{ için}, \quad 12\alpha(w, x \wedge y \wedge z) \\
&\quad = \mathfrak{S}_{xyz}(-(p_1^* L_2)(\alpha)(x)\Phi(x \wedge y \wedge z) + 3\langle w, x\rangle L_2(\alpha)(y \wedge z))\}
\end{aligned}
$$

Yardımcı Teorem 4.0.26.

$$W_1 \;=\; \{\alpha \in W \mid \alpha = (\frac{1}{168})L_0(\alpha) \star \Phi\} = W \cap \bigwedge^4 V^* \tag{4.8}$$

Kanıt. $\{\alpha \in W \mid \alpha = (\frac{1}{168})L_0(\alpha) \star \Phi\} = A$ olsun ve $W_1 = \langle \star\Phi \rangle$ olduğundan $A \subseteq W_1$ olduğu açıktır. Tersine; $\alpha \in W_1$ elemanı için, $\alpha = a.\star\Phi$ olacak şekilde $a \in \mathbb{R}$ vardır. O halde,

$$
\begin{aligned}
(\tfrac{1}{168})L_0(\alpha) &= (\tfrac{1}{168})L_0(a.\star\Phi) \\
&= (\tfrac{1}{168})a.L_0(\star\Phi) \\
&= (\tfrac{a}{168})\langle \star\Phi, \star\Phi \rangle \\
&= (\tfrac{a}{168})\|\star\Phi\|^2 \\
&= \tfrac{a}{168}.168 = a
\end{aligned}
$$

olduğundan,

$$\alpha = (\frac{1}{168})L_0(\alpha) \star \Phi$$

olarak yazılacağı için, $\alpha \in A$ bulunur. Bu durumda, $W_1 \subseteq A$ olur ve $W_1 = A$ sonucuna ulaşılır.

$W_1 \subseteq W$ ve $W_1 \subseteq \bigwedge^4 V^*$ olduğundan, $W_1 \subseteq W \cap \bigwedge^4 V^*$ ifadesi açıktır. Ters kapsamda kolaylıkla görülebilir ve (4.8) eşitliği elde edilir. □

Yardımcı Teorem 4.0.27. *W_1, W_2 ve W_3 uzayları ikişer ikişer birbirine diktir ve*

$$W_1 \oplus W_3 = \c{C}ekL_2$$

$$\begin{aligned} W_1 \oplus W_2 &= \{\alpha \in W \mid \forall x, y, z \in W \quad \alpha(P_1(x \wedge y), x \wedge y \wedge z) \\ &\qquad = \alpha(x, P_1(x \wedge y) \wedge y \wedge z) - \alpha(y, P_1(x \wedge y) \wedge x \wedge z)\} \end{aligned}$$

Kanıt. $W_1 \perp W_3$: Herhangi $\alpha \in W_1$ ve $\beta \in W_3$ elemanları için, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ olduğu gösterilmelidir. $\alpha \in W_1$ olduğundan, $\alpha = (\frac{1}{168})L_0(\alpha) \star \Phi$'dir. Ayrıca, $\beta \in W_3$ olduğundan, $L_0(\beta) = L_2(\beta) = 0$'dır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle &= \left\langle (\tfrac{1}{168})L_0(\alpha) \star \Phi, \beta \right\rangle \\ &= (\tfrac{1}{168})L_0(\alpha) \langle \star\Phi, \beta \rangle \\ &= (\tfrac{1}{168})L_0(\alpha)L_0(\beta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

$W_1 \perp W_2$: $\alpha \in W_1$ ve $\beta \in W_2$ olsun. $\alpha \in W_1$ ise $\alpha = (\frac{1}{168})L_0(\alpha) \star \Phi$ olarak ifade edilir. Buradan, $\langle \alpha, \beta \rangle$ ifadesi,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle &= (\tfrac{1}{168})L_0(\alpha) \langle \star\Phi, \beta \rangle \\ &= (\tfrac{1}{168})L_0(\alpha) \textstyle\sum_{i,j,k,l=0}^{6} (\star\Phi)(e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_l)\beta(e_i, e_j \wedge e_k \wedge e_l) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Taban elemanları cinsinden,

$$\star\Phi = e^*_{0125} - e^*_{0146} - e^*_{0234} + e^*_{0356} + e^*_{1236} - e^*_{1345} - e^*_{2456}$$

olduğundan ve $\star\Phi$'nin tanımında yer almayan bir taban elemanı için, $(\star\Phi)(e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_l) = 0$ olacağından yukarıdaki ifade böyle elemanlar için 0'dır. $\star\Phi$'nin tanımında yer alan elemanlar için bu toplama bakıldığında,

$$\begin{aligned} (\star\Phi)(e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_5)\beta(e_0, e_1 \wedge e_2 \wedge e_5) &= \beta(e_0, e_1 \wedge e_2 \wedge e_5) \\ (\star\Phi)(e_1 \wedge e_0 \wedge e_2 \wedge e_5)\beta(e_1, e_0 \wedge e_2 \wedge e_5) &= -\beta(e_1, e_0 \wedge e_2 \wedge e_5) \\ (\star\Phi)(e_2 \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_5)\beta(e_2, e_0 \wedge e_1 \wedge e_5) &= \beta(e_2, e_0 \wedge e_1 \wedge e_5) \\ (\star\Phi)(e_5 \wedge e_0 \wedge e_1 \wedge e_2)\beta(e_5, e_0 \wedge e_1 \wedge e_2) &= -\beta(e_5, e_0 \wedge e_1 \wedge e_2) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda, $\beta \in W_2$ olduğu için,

$$\beta(e_0, e_1 \wedge e_2 \wedge e_5) - \beta(e_1, e_0 \wedge e_2 \wedge e_5) + \beta(e_2, e_0 \wedge e_1 \wedge e_5) - \beta(e_5, e_0 \wedge e_1 \wedge e_2) = 0$$

olur.

$$\begin{aligned}
(\star\Phi)(e_0 \wedge e_1 \wedge e_5 \wedge e_2)\beta(e_0, e_1 \wedge e_5 \wedge e_2) &= -\beta(e_0, e_1 \wedge e_5 \wedge e_2)\\
(\star\Phi)(e_1 \wedge e_0 \wedge e_5 \wedge e_2)\beta(e_1, e_0 \wedge e_5 \wedge e_2) &= \beta(e_1, e_0 \wedge e_5 \wedge e_2)\\
(\star\Phi)(e_5 \wedge e_1 \wedge e_0 \wedge e_2)\beta(e_5, e_1 \wedge e_0 \wedge e_2) &= \beta(e_5, e_1 \wedge e_0 \wedge e_2)\\
(\star\Phi)(e_2 \wedge e_1 \wedge e_0 \wedge e_5)\beta(e_2, e_1 \wedge e_0 \wedge e_5) &= -\beta(e_2, e_1 \wedge e_0 \wedge e_5)
\end{aligned}$$

$$-\beta(e_0, e_1 \wedge e_5 \wedge e_2) + \beta(e_1, e_0 \wedge e_5 \wedge e_2) + \beta(e_5, e_1 \wedge e_0 \wedge e_2) - \beta(e_2, e_1 \wedge e_0 \wedge e_5) = 0$$

$$\begin{aligned}
(\star\Phi)(e_0 \wedge e_2 \wedge e_1 \wedge e_5)\beta(e_0, e_2 \wedge e_1 \wedge e_5) &= -\beta(e_0, e_2 \wedge e_1 \wedge e_5)\\
(\star\Phi)(e_1 \wedge e_2 \wedge e_5 \wedge e_0)\beta(e_1, e_2 \wedge e_5 \wedge e_0) &= -\beta(e_1, e_2 \wedge e_5 \wedge e_0)\\
(\star\Phi)(e_2 \wedge e_1 \wedge e_5 \wedge e_0)\beta(e_2, e_1 \wedge e_5 \wedge e_0) &= \beta(e_2, e_1 \wedge e_5 \wedge e_0)\\
(\star\Phi)(e_5 \wedge e_2 \wedge e_2 \wedge e_0)\beta(e_5, e_2 \wedge e_2 \wedge e_0) &= \beta(e_5, e_2 \wedge e_1 \wedge e_0)
\end{aligned}$$

$$-\beta(e_0, e_2 \wedge e_1 \wedge e_5) - \beta(e_1, e_2 \wedge e_5 \wedge e_0) + \beta(e_2, e_1 \wedge e_5 \wedge e_0) + \beta(e_5, e_2 \wedge e_1 \wedge e_0) = 0$$

$$\begin{aligned}
(\star\Phi)(e_0 \wedge e_2 \wedge e_5 \wedge e_1)\beta(e_0, e_2 \wedge e_5 \wedge e_1) &= \beta(e_0, e_2 \wedge e_5 \wedge e_1)\\
(\star\Phi)(e_1 \wedge e_2 \wedge e_0 \wedge e_5)\beta(e_1, e_2 \wedge e_0 \wedge e_5) &= \beta(e_1, e_2 \wedge e_0 \wedge e_5)\\
(\star\Phi)(e_2 \wedge e_0 \wedge e_5 \wedge e_1)\beta(e_2, e_0 \wedge e_5 \wedge e_1) &= -\beta(e_1, e_0 \wedge e_5 \wedge e_1)\\
(\star\Phi)(e_5 \wedge e_2 \wedge e_0 \wedge e_1)\beta(e_5, e_2 \wedge e_0 \wedge e_1) &= -\beta(e_5, e_2 \wedge e_0 \wedge e_1)
\end{aligned}$$

$$\beta(e_0, e_2 \wedge e_5 \wedge e_1) + \beta(e_1, e_2 \wedge e_0 \wedge e_5) - \beta(e_2, e_0 \wedge e_5 \wedge e_1) - \beta(e_5, e_2 \wedge e_0 \wedge e_1) = 0$$

$$\begin{aligned}
(\star\Phi)(e_0 \wedge e_5 \wedge e_1 \wedge e_2)\beta(e_0, e_5 \wedge e_1 \wedge e_2) &= \beta(e_5, e_2 \wedge e_0 \wedge e_1)\\
(\star\Phi)(e_5 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_0)\beta(e_5, e_1 \wedge e_2 \wedge e_0) &= -\beta(e_5, e_1 \wedge e_2 \wedge e_0)\\
(\star\Phi)(e_1 \wedge e_5 \wedge e_2 \wedge e_0)\beta(e_1, e_5 \wedge e_2 \wedge e_0) &= \beta(e_1, e_5 \wedge e_2 \wedge e_0)\\
(\star\Phi)(e_2 \wedge e_5 \wedge e_1 \wedge e_0)\beta(e_2, e_5 \wedge e_1 \wedge e_0) &= -\beta(e_2, e_5 \wedge e_1 \wedge e_0)
\end{aligned}$$

$$\beta(e_5, e_2 \wedge e_0 \wedge e_1) - \beta(e_5, e_1 \wedge e_2 \wedge e_0) + \beta(e_1, e_5 \wedge e_2 \wedge e_0) - \beta(e_2, e_5 \wedge e_1 \wedge e_0) = 0$$

$$\begin{aligned}
(\star\Phi)(e_0 \wedge e_5 \wedge e_2 \wedge e_1)\beta(e_0 \wedge e_5 \wedge e_2 \wedge e_1) &= -\beta(e_0 \wedge e_5 \wedge e_2 \wedge e_1)\\
(\star\Phi)(e_5 \wedge e_0 \wedge e_2 \wedge e_1)\beta(e_5 \wedge e_0 \wedge e_2 \wedge e_1) &= \beta(e_5 \wedge e_0 \wedge e_2 \wedge e_1)\\
(\star\Phi)(e_2 \wedge e_5 \wedge e_0 \wedge e_1)\beta(e_2 \wedge e_5 \wedge e_0 \wedge e_1) &= \beta(e_2 \wedge e_5 \wedge e_0 \wedge e_1)\\
(\star\Phi)(e_1 \wedge e_5 \wedge e_0 \wedge e_2)\beta(e_1 \wedge e_5 \wedge e_0 \wedge e_2) &= -\beta(e_1 \wedge e_5 \wedge e_0 \wedge e_2)
\end{aligned}$$

$$-\beta(e_0 \wedge e_5 \wedge e_2 \wedge e_1) + \beta(e_5 \wedge e_0 \wedge e_2 \wedge e_1) + \beta(e_2 \wedge e_5 \wedge e_0 \wedge e_1) - \beta(e_1 \wedge e_5 \wedge e_0 \wedge e_2) = 0$$

$\star\Phi$'nin tanımında yer alan diğer taban elemanları için de bu hesaplama yapılırsa, toplamın 0 olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ olacağından, $W_1 \perp W_2$ sonucuna ulaşılır.

$W_2 \perp W_3$: $\alpha \in W_2$ ve $\beta \in W_3$ elemanları için,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i,j,k,l=0}^{6} \alpha(e_i, e_j \wedge e_k \wedge e_l)\beta(e_i, e_j \wedge e_k \wedge e_l)$$

olarak ifade edilir. $\alpha \in W_2$ olduğundan,

$$\alpha(e_i, e_j \wedge e_k \wedge e_l) = \alpha(e_j, e_i \wedge e_k \wedge e_l) - \alpha(e_k, e_i \wedge e_j \wedge e_l) + \alpha(e_l, e_i \wedge e_j \wedge e_k)$$

dir. Bu ifade yukarıdaki toplamda yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle = & \sum_{i,j,k,l=0}^{6} \alpha(e_j, e_i \wedge e_k \wedge e_l)\beta(e_i, e_j \wedge e_k \wedge e_l) \\ & - \sum_{i,j,k,l=0}^{6} \alpha(e_k, e_i \wedge e_j \wedge e_l)\beta(e_i, e_j \wedge e_k \wedge e_l) \\ & + \sum_{i,j,k,l=0}^{6} \alpha(e_l, e_i \wedge e_j \wedge e_k)\beta(e_i, e_j \wedge e_k \wedge e_l) \end{aligned}$$

olur. Bu toplamdaki terimler tek tek hesaplanır ve $\beta \in W_3$ olduğundan $L_2(\beta) = L_0(\beta) = 0$ olması da kullanılırsa, ifadenin 0 olduğu görülebilir.

$W_1 \subseteq \text{Çek}L_2$: $\alpha \in W_1$ olsun. O halde, $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\alpha = k. \star \Phi$'dir. $\forall\, x, y \in V$ için, $\star\Phi$ 4-form olduğundan,

$$\begin{aligned} L_2(\alpha)(x \wedge y) &= \sum_{i=0}^{6} \alpha(e_i, e_i \wedge x \wedge y) \\ &= \sum_{i=0}^{6} k.(\star\Phi)(e_i, e_i \wedge x \wedge y) = 0 \end{aligned}$$

olur.

$W_3 \subseteq \text{Çek}L_2$ ifadesi de W_3 uzayının tanımından açıktır.

$W_1^{\perp} = \{\alpha \in \text{Çek}L_2 \mid \forall\, \beta \in W_3 \quad \text{için} \quad \langle \alpha, \beta \rangle = 0\}$ olarak tanımlansın.

$W_1^{\perp} = W_3$'dir: $\alpha \in W_1^{\perp}$ olsun. Bu durumda, $\forall \beta \in W_1$ için, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$'dır. İşlemlerimizi $\text{Çek}L_2$ uzayı içinde yaptığımızdan, $L_2(\alpha) = 0$'dır.

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \left\langle \alpha, \frac{1}{168} L_0(\beta) \star \Phi \right\rangle = \frac{1}{168} L_0(\beta) \langle \alpha, \star\Phi \rangle = \frac{1}{168} L_0(\beta) L_0(\alpha) = 0$$

olduğundan, $L_0(\alpha) = 0$'dır. $L_0(\beta) = 0$ olsaydı, $\beta \in \text{Çek}L_0$ olurdu. Diğer taraftan, $\beta \in W_1 \subseteq \text{Çek}L_2$ olduğundan, $\beta \in W_1 \cap W_3$ olurdu. $W_1 \cap W_3 = \{0\}$ olduğu için, bu durum $\beta \in W_1$ olmasıyla çelişirdi. Dolayısıyla, $L_0(\beta) = 0$ olamaz. Sonuç olarak, $L_0(\alpha) = L_2(\alpha) = 0$ olduğundan, $\alpha \in W_3$ olur ve $W_1^{\perp} \subseteq W_3$ bulunur. Tersine, $\alpha \in W_3$ olsun. O halde, $L_0(\alpha) = L_2(\alpha) = 0$ olur. $\beta \in W_1$ için,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \left\langle \alpha, \frac{1}{168} L_0(\beta) \star \Phi \right\rangle = \frac{1}{168} L_0(\beta) \langle \alpha, \star\Phi \rangle = \frac{1}{168} L_0(\beta) L_0(\alpha) = 0$$

olduğundan, $\alpha \in W_1^{\perp}$ olur ve $W_1^{\perp} = W_3$ eşitliği elde edilir.

Bu durumda, $W_3 = W_1^{\perp}$ olduğundan ve Çek$L_2 = W_1 \oplus W_1^{\perp}$ olarak yazılabileceğinden, Çek$L_2 = W_1 \oplus W_3$ elde edilir.

$$\begin{aligned} A &= \{\alpha \in W \mid \ \forall x, y, z \in W \ \ \alpha(P_1(x \wedge y), x \wedge y \wedge z) \\ &\quad = \alpha(x, P_1(x \wedge y) \wedge y \wedge z) - \alpha(y, P_1(x \wedge y) \wedge x \wedge z)\} \end{aligned}$$

olarak alındığında, $A = W_1 \oplus W_2$'dir:

$W_1 \oplus W_2 \subseteq A$ olduğunu görmek için, $\alpha \in W_1 \oplus W_2$ olsun. $\alpha_1 \in W_1$ ve $\alpha_2 \in W_2$ olmak üzere, α elemanı $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ olarak tek türlü yazılabilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2)(P_1(x \wedge y), x \wedge y \wedge z) &= (\alpha_1 + \alpha_2)(x, P_1(x \wedge y) \wedge y \wedge z) \\ &\quad -(\alpha_1 + \alpha_2)(y, P_1(x \wedge y) \wedge x \wedge z) \end{aligned}$$

olduğu görülmelidir.
$\alpha_1 \in W_1$ olduğundan, $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\alpha_1 = k \star \Phi$ olur. Buradan, $\star\Phi$'nin (2.21) eşitliğindeki ifadesi de kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \alpha_1(P_1(x \wedge y), x \wedge y \wedge z) &= k \star \Phi(P_1(x \wedge y), x \wedge y \wedge z) \\ &= k \langle P_1(x \wedge y), P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z) \rangle \\ &\quad + k \langle P_1(P_1(x \wedge y) \wedge z), x \wedge y \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(x, P_1(x \wedge y) \wedge y \wedge z) &= k \star \Phi(x, P_1(x \wedge y) \wedge y \wedge z) \\ &= k \langle x, P_1(P_1(P_1(x \wedge y) \wedge y) \wedge z) \rangle \\ &\quad + k \langle x \wedge z, P_1(x \wedge y) \wedge y \rangle \\ &= -k \langle P_1(x \wedge z), P_1(P_1(x \wedge y) \wedge y) \rangle \\ &\quad - k \langle x, y \rangle \langle z, P_1(x \wedge y) \rangle \\ &= -k \langle P_1(x \wedge z), -\|y\|^2 x + \langle x, y \rangle y \rangle \\ &\quad - k \langle x, y \rangle \langle z, P_1(x \wedge y) \rangle \\ &= k \langle x, y \rangle \langle P_1(z \wedge x), y \rangle - k \langle x, y \rangle \langle z, P_1(x \wedge y) \rangle \\ &= k \langle x, y \rangle \langle P_1(x \wedge y), z \rangle - k \langle x, y \rangle \langle z, P_1(x \wedge y) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(y, P_1(x \wedge y) \wedge x \wedge z) &= k \star \Phi(y, P_1(x \wedge y) \wedge x \wedge z) \\ &= k \langle y, P_1(P_1(P_1(x \wedge y) \wedge x) \wedge z) \rangle \\ &\quad + k \langle y \wedge z, P_1(x \wedge y) \wedge x \rangle \\ &= k \langle P_1(y \wedge z), P_1(x \wedge P_1(x \wedge y)) \rangle \\ &\quad + k \langle y \wedge z, P_1(x \wedge y) \wedge x \rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= k\left\langle P_1(y\wedge z), -\|x\|^2 y + \langle x,y\rangle x\right\rangle \\
&\quad +k\left\langle y\wedge z, P_1(x\wedge y)\wedge x\right\rangle \\
&= -k\|x\|^2\left\langle P_1(y\wedge z), y\right\rangle + k\langle x,y\rangle\left\langle P_1(y\wedge z), x\right\rangle \\
&\quad -k\langle x,y\rangle\left\langle z, P_1(x\wedge y)\right\rangle \\
&= k\langle x,y\rangle\left\langle P_1(y\wedge z), x\right\rangle - k\langle x,y\rangle\left\langle z, P_1(x\wedge y)\right\rangle \\
&= k\langle x,y\rangle\left\langle P_1(y\wedge z), x\right\rangle - k\langle x,y\rangle\left\langle P_1(y\wedge z), x\right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\alpha_2(P(x\wedge y), x\wedge y\wedge z) = \alpha_2(x, P(x\wedge y)\wedge y\wedge z) - \alpha_2(y, P(x\wedge y)\wedge x\wedge z)$$

eşitliğinin gösterilmesi gerekir: $\alpha_2 \in W_2 \subseteq W$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
\alpha_2(P_1(x\wedge y), x\wedge y\wedge z) &= \alpha_2(x, P_1(x\wedge y)\wedge y\wedge z) - \alpha_2(y, P_1(x\wedge y)\wedge x\wedge z) \\
&\quad +\alpha_2(z, P_1(x\wedge y)\wedge x\wedge y) \\
&= \alpha_2(x, P_1(x\wedge y)\wedge y\wedge z) - \alpha_2(y, P_1(x\wedge y)\wedge x\wedge z) \\
&= \alpha_2(x, P_1(x\wedge y)\wedge y\wedge z) - \alpha_2(y, P_1(x\wedge y)\wedge x\wedge z)
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla, $\alpha \in A$ olur ve $W_1 \oplus W_2 \subseteq A$ sonucuna ulaşılır.

$A \subseteq W_1 \oplus W_2$ olduğunun ispatı için, $T : W \longrightarrow \bigwedge^4 V^*$ lineer dönüşümü, $\forall\ w, x, y, z \in$V için,

$$T(\alpha)(w\wedge x\wedge y\wedge z) = \frac{1}{4}\{\alpha(w, x\wedge y\wedge z) - \alpha(x, w\wedge y\wedge z) + \alpha(y, w\wedge x\wedge z) - \alpha(z, w\wedge x\wedge y)\}$$

olarak tanımlansın. $T(\alpha) \in \bigwedge^4 V^*$ olduğu kolayca görülebilir.

$\alpha \in W$ elemanı $\forall\ x, y, z \in V$ için,

$$
\begin{aligned}
\alpha(P_1(x\wedge y), x\wedge y\wedge z) &= \alpha(x, P_1(x\wedge y)\wedge y\wedge z) \\
&\quad -\alpha(y, P_1(x\wedge y)\wedge x\wedge z) \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

koşulunu sağlıyorsa, $T(\alpha) \in W$'dir: $\forall x, y, z \in V$ için,

$$
\begin{aligned}
T(\alpha)(x, y\wedge z\wedge P_1(y\wedge z) &= \tfrac{1}{4}\{\alpha(x, y\wedge z\wedge P_1(y\wedge z) - \alpha(y, x\wedge z\wedge P_1(y\wedge z)) \\
&+ \alpha(z, x\wedge y\wedge P_1(y\wedge z)) - \alpha(P_1(y\wedge z), x\wedge y\wedge z)\}.
\end{aligned}
$$

Şimdi, (4.9) eşitliğinde x yerine z, z yerine x alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\alpha(P_1(z\wedge y), z\wedge y\wedge x) &= \alpha(z, P_1(z\wedge y)\wedge y\wedge x) - \alpha(y, P_1(z\wedge y)\wedge z\wedge x) \\
\alpha(y, P_1(z\wedge y)\wedge z\wedge x) &= \alpha(z, P_1(z\wedge y)\wedge y\wedge x) - \alpha(P_1(z\wedge y), z\wedge y\wedge x) \\
\alpha(y, x\wedge z\wedge P_1(y\wedge z)) &= \alpha(z, x\wedge y\wedge P_1(y\wedge z)) - \alpha(P_1(y\wedge z), x\wedge y\wedge z)
\end{aligned}
$$

olur. Bu ifade yukarıdaki eşitlikte yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
T(\alpha)(x, y \wedge z \wedge P_1(y \wedge z) &= \tfrac{1}{4}\{\alpha(x, y \wedge z \wedge P_1(y \wedge z)) - \alpha(z, x \wedge y \wedge P_1(y \wedge z)) \\
&\quad +\alpha(P_1(y \wedge z), x \wedge y \wedge z) + \alpha(z, x \wedge y \wedge P_1(y \wedge z)) \\
&\quad -\alpha(P_1(y \wedge z), x \wedge y \wedge z)\} \\
&= \tfrac{1}{4}\alpha(x, y \wedge z \wedge P_1(y \wedge z) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan, $T(\alpha) \in W$ sonucuna ulaşılır.

Ayrıca, $T^2 = T$'dir: $\forall\ \alpha \in W$ ve $\forall\ w, x, y, z \in$V için,

$$\begin{aligned}
T^2(\alpha)(w \wedge x \wedge y \wedge z) &= \tfrac{1}{4}\{T(\alpha)(w, x \wedge y \wedge z) - T(\alpha)(x, w \wedge y \wedge z) \\
&\quad +T(\alpha)(y, w \wedge x \wedge z) - T(\alpha)(z, w \wedge x \wedge y)\} \\
&= \tfrac{1}{4}\{\tfrac{1}{4}(\alpha(w, x \wedge y \wedge z) - \alpha(x, w \wedge y \wedge z) \\
&\quad +\alpha(y, w \wedge x \wedge z) - \alpha(z, w \wedge x \wedge y)) \\
&\quad -\tfrac{1}{4}(\alpha(x, w \wedge y \wedge z) - \alpha(w, x \wedge y \wedge z) \\
&\quad +\alpha(y, x \wedge w \wedge z) - \alpha(z, x \wedge w \wedge y)) \\
&\quad +\tfrac{1}{4}(\alpha(y, w \wedge x \wedge z) - \alpha(w, y \wedge x \wedge z) \\
&\quad +\alpha(x, y \wedge w \wedge z) - \alpha(z, y \wedge w \wedge x)) \\
&\quad -\tfrac{1}{4}(\alpha(z, w \wedge x \wedge y) - \alpha(w, z \wedge x \wedge y) \\
&\quad +\alpha(x, z \wedge w \wedge y) - \alpha(y, z \wedge w \wedge x)) \\
&= \tfrac{1}{16}\{\alpha(w, x \wedge y \wedge z) - \alpha(x, w \wedge y \wedge z) + \alpha(y, w \wedge x \wedge z) \\
&\quad -\alpha(z, w \wedge x \wedge y) - \alpha(x, w \wedge y \wedge z) + \alpha(w, x \wedge y \wedge z) \\
&\quad +\alpha(y, w \wedge x \wedge z) - \alpha(z, w \wedge x \wedge y) + \alpha(y, w \wedge x \wedge z) \\
&\quad +\alpha(w, x \wedge y \wedge z) - \alpha(x, w \wedge y \wedge z) - \alpha(z, w \wedge x \wedge y) \\
&\quad -\alpha(z, w \wedge x \wedge y) + \alpha(w, x \wedge y \wedge z) - \alpha(x, w \wedge y \wedge z) \\
&\quad +\alpha(y, w \wedge x \wedge z) \\
&= \tfrac{1}{16}\{4\alpha(w, x \wedge y \wedge z) - 4\alpha(x, w \wedge y \wedge z) \\
&\quad +4\alpha(y, w \wedge x \wedge z) - 4\alpha(z, w \wedge x \wedge y) \\
&= \tfrac{1}{4}\{\alpha(w, x \wedge y \wedge z) - \alpha(x, w \wedge y \wedge z) \\
&\quad +\alpha(y, w \wedge x \wedge z) - \alpha(z, w \wedge x \wedge y) \\
&= T(\alpha)(w \wedge x \wedge y \wedge z)
\end{aligned}$$

olduğundan, $T^2 = T$ sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla, T dönüşümü A'dan $W \cap \bigwedge^4 V^*$ uzayına bir projeksiyondur. $W \bigcap \bigwedge^4 V^* = W_1$ olduğundan, $T(A) = W_1$'dir. Ayrıca, W_2 uzayının tanımınından $ÇekT = W_2$ olduğu açıktır.

$\alpha \in A$ ise $T(\alpha) \in W$ olduğunu biliyoruz. $\alpha = \alpha - T(\alpha) + T(\alpha)$ olarak yazılırsa, $T(\alpha) \in ImT = W_1$'dir. Diğer taraftan,

$T(\alpha - T(\alpha)) = T(\alpha) - T^2(\alpha) = 0$ olduğundan, $\alpha - T(\alpha) \in$ ÇekT yani, $\alpha - T(\alpha) \in W_2$'dir. Bu durumda,

$$\alpha \in W_1 \oplus W_2$$

bulunur. Buradan,

$$A \subseteq W_1 \oplus W_2$$

sonucu elde edilir. □

Yardımcı Teorem 4.0.28.

$$W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \quad = \quad \text{Ç}ekp_1^* L_2 \tag{4.10}$$

Kanıt. $W_2 \cap$Ç$ekL_2 = \{0\}$'dır. Ayrıca, $\alpha \in W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ için, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ olacak şekilde $\alpha_i \in W_i$ vardır. Bir önceki yardımcı teoremden $L_2(\alpha_1 + \alpha_3) = 0$'dır. Dolayısıyla, $(\alpha_1 + \alpha_3) \in$ Ç$ekp_1^* L_2$'dir. $\alpha_2 \in W_2$ iken (4.7) eşitliğindeki a sabiti 1 olduğundan $p_1^* L_2(\alpha_2) = 0$'dır. O halde, $\alpha \in$ Ç$ekp_1^* L_2$ olur. Dolayısıyla, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \subseteq$ Ç$ekp_1^* L_2$ elde edilir. O halde, $boy(W_1 \oplus W_2 \oplus W_3) \leq boy($Ç$ekp_1^* L_2)$'dir.

L_2 dönşümünün örten olduğu gösterildiğinde, p_1^* dönüşümünün de örten olduğu bilindiğinden, $p_1^* L_2 : W \longrightarrow V^*$ dönüşümü örten olur. Boyut teoreminden, $boy($Ç$ekp_1^* L_2) = 42$ bulunur. Bu durumda, $boy(W_1 \oplus W_2 \oplus W_3) \leq 42$ eşitliğine ulaşılır.

Diğer taraftan, $T : W \longrightarrow \bigwedge^4 V^*$ dönüşümü göz önüne alınırsa, boyut teoreminden, $boyW_2 = boy($Ç$ekT) \geq 14$ olur. Ayrıca, L_2 örten bir dönüşüm ve Ç$ekL_2 = W_1 \oplus W_3$ olduğundan, $boy(W_1 \oplus W_3) = 28$ elde edilir. Buradan, $boy(W_1 \oplus W_2 \oplus W_3) \geq 42$ olacağı için, her iki uzayın boyutu da 42 olduğundan (4.10) eşitliği elde edilir. □

Yardımcı Teorem 4.0.29. *$\alpha \in W$ olmak üzere, Ç$ekp_1^* L_2(\alpha) \neq 0$ ve $\forall\ w, x, y, z \in V$ için,*

$$\begin{aligned} \alpha(w, x \wedge y \wedge z) \quad = \quad & \mathfrak{S}_{xyz}\{a p_1^* L_2(\alpha)(x)\Phi(w \wedge y \wedge z) \\ & + b \langle w, x \rangle L_2(\alpha)(y \wedge z\} \end{aligned} \tag{4.11}$$

ise, $a = -\frac{1}{12}$, $b = \frac{1}{4}$ ve $P_1^* p_1^* L_2(\alpha) = 3L_2(\alpha)$ olur.

Kanıt. (4.11) eşitliğinde $x = e_i$, $y = e_j$ ve $z = P(e_i \wedge e_j)$ alınır ve i, j indisleri üzerinden toplam alınırsa, $\alpha \in W$ olduğundan eşitliğin sol tarafı, 0 olur. Yani,

$$\sum_{i,j=0}^{6} \alpha(w, e_i \wedge e_j \wedge P(e_i \wedge e_j)) = 0$$

olur. Eşitliğin sağ tarafı ise,

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{S}_{e_ie_jP(e_i\wedge e_j)}\{ap_1^*L_2(\alpha)(e_i)\Phi(w\wedge e_j\wedge P(e_i\wedge e_j)) \\
& +b\langle w,e_i\rangle L_2(\alpha)(e_j\wedge P(e_i\wedge e_j))\} \\
= & \textstyle\sum_{i,j=0}^6\{ap_1^*L_2(\alpha)(e_i)\Phi(w\wedge e_j\wedge P(e_i\wedge e_j)) \\
& +b\langle w,e_i\rangle L_2(\alpha)(e_j\wedge P(e_i\wedge e_j)) \\
& +ap_1^*L_2(\alpha)(e_j)\Phi(w\wedge P(e_i\wedge e_j)\wedge e_i)+b\langle w,e_j\rangle L_2(\alpha)(P(e_i\wedge e_j)\wedge e_i) \\
& +ap_1^*L_2(\alpha)(P(e_i\wedge e_j))\Phi(w\wedge e_i\wedge e_j)+b\langle w,P(e_i\wedge e_j)\rangle L_2(\alpha)(e_i\wedge e_j)\} \\
= & a(L_2(\alpha)\circ p_1^*)\textstyle\sum_{i,j=0}^6\{\Phi(w\wedge e_j\wedge P(e_i\wedge e_j)).e_i \\
& +\Phi(w\wedge P(e_i\wedge e_j)\wedge e_i).e_j+\Phi(w\wedge e_i\wedge e_j).P(e_i\wedge e_j)\} \\
& +bL_2(\alpha)\textstyle\sum_{i,j=0}^6\{\langle w,e_i\rangle(e_j\wedge P(e_i\wedge e_j))+\langle w,e_j\rangle(P(e_i\wedge e_j)\wedge e_i) \\
& +\langle w,P(e_i\wedge e_j)\rangle(e_i\wedge e_j) \\
= & a(L_2(\alpha)\circ p_1^*)(\textstyle\sum_{i,j=0}^6\langle P(w\wedge e_j),P(e_i\wedge e_j)\rangle e_i \\
& -\textstyle\sum_{i,j=0}^6\langle P(w\wedge e_i),P(e_i\wedge e_j)\rangle e_j \\
& +\textstyle\sum_{i,j=0}^6\langle P(e_i\wedge e_j),w\rangle P(e_i\wedge e_j)) \\
& +bL_2(\alpha)(-\textstyle\sum_{i,j=0}^6 e_j\wedge P(e_j\wedge(\langle w,e_i\rangle)e_i) \\
& -\textstyle\sum_{i,j=0}^6 e_i\wedge P(e_i\wedge(\langle w,e_j\rangle)e_j)) \\
& -\textstyle\sum_{i,k=0}^6 e_i\wedge P(e_i\wedge(\langle w,e_k\rangle)e_k))) \\
= & a(L_2(\alpha)\circ p_1^*)(\textstyle\sum_{i,j=0}^6(\langle w,e_i\rangle e_i-\langle w,e_j\rangle\langle e_i,e_j\rangle e_i) \\
& -\textstyle\sum_{i,j=0}^6(-\langle w,e_i\rangle\langle e_i,e_j\rangle e_j+\langle w,e_j\rangle e_j)+\sum_{k=0}^6(6\langle e_k,w\rangle e_k)) \\
& +bL_2(\alpha)(-\textstyle\sum_{j=0}^6 e_j\wedge P(e_j\wedge w)-\sum_{i=0}^6 e_i\wedge P(e_i\wedge w) \\
& -\textstyle\sum_{i,k=0}^6 e_i\wedge P(e_i\wedge w)) \\
= & a(L_2(\alpha)\circ p_1^*)(6w+6w+6w)+bL_2(\alpha)(2p(w)+2p(w)+2p(w)) \\
= & a(L_2(\alpha)\circ p_1^*)(18w)+bL_2(\alpha)(6p(w)) \\
= & 18a(L_2(\alpha)\circ p_1^*)(w)+6b(L_2(\alpha)\circ p_1^*)(w)=(18a+6b)(L_2(\alpha)\circ p_1^*)(w)
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(18a+6b)p_1^*(L_2(\alpha)) \;=\; 0 \tag{4.12}$$

eşitliğine ulaşılır. Diğer taraftan, L_2 dönüşümü α ya uygulanır ve (4.11) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
L_2(\alpha)(y\wedge z) &= \textstyle\sum_{i=0}^6\alpha(e_i,e_i\wedge y\wedge z) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^6\{ap_1^*L_2(\alpha)(e_i)\Phi(e_i\wedge y\wedge z)+b\langle e_i,e_i\rangle L_2(\alpha)(y\wedge z) \\
&\quad +ap_1^*L_2(\alpha)(y)\Phi(e_i\wedge z\wedge e_i)+b\langle e_i,y\rangle L_2(\alpha)(z\wedge e_i) \\
&\quad +ap_1^*L_2(\alpha)(z)\Phi(e_i\wedge e_i\wedge y)+b\langle e_i,z\rangle L_2(\alpha)(e_i\wedge y)\} \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^6 ap_1^*L_2(\alpha)(e_i)\langle P(y\wedge z),e_i\rangle+bL_2(\alpha)(y\wedge z) \\
&\quad +\textstyle\sum_{i=0}^6 b\langle e_i,y\rangle L_2(\alpha)(z\wedge e_i)+b\langle e_i,z\rangle L_2(\alpha)(e_i\wedge y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= aP_1^*p_1^*L_2(\alpha)(y\wedge z) + 7bL_2(\alpha)(y\wedge z) \\ &\quad -bL_2(\alpha)(y\wedge z) - bL_2(\alpha)(y\wedge z) \\ &= aP_1^*p_1^*L_2(\alpha)(y\wedge z) + 5bL_2(\alpha)(y\wedge z) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$(1-5b)L_2(\alpha) = aP_1^*p_1^*L_2(\alpha) \tag{4.13}$$

eşitliği elde edilir. (4.13) eşitliğinin her iki tarafına p_1^* dönüşümü uygulanırsa, $p_1^*P_1^* = 3I_1^*$ olduğundan,

$$(1-5b-3a)p_1^*L_2(\alpha) = 0 \tag{4.14}$$

eşitliğine ulaşılır. Eşitlik (4.13) ve (4.14)'ten $pL_2(\alpha) \neq 0$ kabul edildiğinden,

$$\begin{aligned} 5b+3a &= 1 \\ 18a+6b &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde, $a = -\frac{1}{12}$ ve $b = \frac{1}{4}$ bulunur. Bu değerler (4.13) eşitliğinde yerine yazılırsa, $P_1^*p_1^*L_2(\alpha) = 3L_2(\alpha)$ eşitliği elde edilir. □

Yardımcı Teorem 4.0.30.

$$W_1 \oplus W_3 \oplus W_4 = \{\alpha \in W \mid P_1^*p_1^*L_2(\alpha) = 3L_2(\alpha)\} \tag{4.15}$$

Kanıt. $\{\alpha \in W \mid P_1^*p_1^*L_2(\alpha) = 3L_2(\alpha)\} = A$ olsun. $\text{Çek}L_2 = W_1 \oplus W_3 \subseteq A$ olduğu açıktır. Ayrıca, $W_4 \subseteq A$ olduğuda bir önceki yardımcı teoremden görülebilir. Ayrıca, $\text{Çek}L_2 \cap W_4 = \{0\}$'dır. O halde, $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4 \subseteq A$'dır.

Şimdi, $U : V^* \longrightarrow V^* \otimes \bigwedge^3(V^*)$ dönüşümü,

$$U(\gamma)(w, x\wedge y\wedge z) := -\frac{1}{12}\mathfrak{S}_{xyz}\{\gamma(x)\Phi(w\wedge y\wedge z) - \langle w, x\rangle\,\gamma(P(y\wedge z))\}$$

olarak tanımlansın. U'nun birebir bir dönüşümdür. Dolayısıyla, U lineer olduğundan, $\text{Çek}U = \{0\}$'dır. Ayrıca, U'nun tanımından, $\text{Gör}U = W_4$ olduğu açıktır. Boyut teoreminden, $boyV^* = 7$ ve $boy(\text{Çek}U) = 0$ olduğundan, $boyW_4 = 7$'dir. $boy(W_1 \oplus W_3) = boy(\text{Çek}L_2) = 28$ olduğu için, $boy(W_1 \oplus W_3 \oplus W_4) = 35$'tir.

A uzayının boyutunun 35 olduğu şu şekilde görülebilir:
$A = \text{Çek}((P_1^*p_1^* - 3I_2^*) \circ L_2)$ olduğu açıktır. $(P_1^*p_1^* - 3I_2^*) : \bigwedge^2 V^* \longrightarrow \bigwedge_1^2 V^*$ ve L_2 dönüşümü örten olduğundan, $(P_1^*p_1^* - 3I_2^*) \circ L_2 : W \longrightarrow \bigwedge_1^2 V^*$ dönüşümü de örtendir. Dolayısıyla, boyut teoreminden, $boyA = 35$'tir. İki uzayın boyutlarının eşitliğinden, (4.15) ifadesi elde edilir. □

Yardımcı Teorem 4.0.31.

$$W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \quad = \quad W \tag{4.16}$$

Bu toplam G_2'nin W üzerindeki temsillerini tarafından korunur. Ayrıca, G_2 grubunun $i = 1, 2, 3, 4$ için, W_i üzerindeki temsilleri indirgenemezdir. boy$W_1 = 1$, boy$W_2 = 14$, boy$W_3 = 27$ ve boy$W_4 = 7$'dir.

Kanıt. Daha önceki yardımcı teoremlerde $i, j = 1, 2, 3, 4$ için W_i uzayının boyutu hesaplanmıştı. $i \neq j$ için, $W_i \cap W_j = \{0\}$ olduğu görülebilir. Ayrıca, *boy*$W = 49$ olduğundan $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 = W$'dir. G_2'nin 1,7,14 ve 27 boyutta temsillerinin indirgenemez olması bir önceki bölümde ifade edilmişti. W_i uzaylarının boyutları da 1,7,14 ve 27 olduğundan, G_2'nin bu uzaylar üzerindeki temsilleri de indirgenemezdir.

□

5 YAPI GRUBU G_2 OLAN RIEMANNIAN MANİFOLDLARIN SINIFLANDIRILMASI

7-boyutlu bir vektör uzayı üzerinde 2-katlı bir vektör çarpımın varlığı önceki bölümlerde gösterilmiş ve özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, 7-boyutlu vektör uzayı üzerinde 2-katlı vektör çarpımı kullanılarak, vektör uzayı üzerinde bir 3-form tanımlanmış ve bu 3-form temel 3-form olarak adlandırılmıştır. M 7-boyutlu bir Riemannian manifoldu olmak üzere, daha önce tanımlanan temel 3-form her biri lifi $\mathbb{R}^7$'ye izomorf olan M'nin tanjant demedi üzerine nasıl taşınabilir? Bu sorunun cevabı şu şekilde verilebilir:

$U \cap V \neq \emptyset$ olmak üzere, U ve V M'nin iki açığı ve $x \in U \bigcap V$ olsun. U ve V açıkları üzerindeki demet kartları,

$$\Psi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^7 \qquad \Psi_V : \pi^{-1}(V) \longrightarrow V \times \mathbb{R}^7$$

diffeomorfizmleri olsunlar. Buradan,

$$\Psi_U \mid_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \longrightarrow \mathbb{R}^7 \qquad \Psi_V \mid_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \longrightarrow \mathbb{R}^7$$

kısıtlanmış dönüşümleri birer izomorfizmdirler. $\Psi_U \mid_{\pi^{-1}(x)}$ ve $\Psi_V \mid_{\pi^{-1}(x)}$ izomorfizmleri kullanılarak $\mathbb{R}^7$ üzerinde tanımlanmış olan $\Phi-$temel 3-formu $x \in M$ noktasındaki $\pi^{-1}(x) = T_xM$ uzayına taşınabilir. Yani; $(\Psi_U \mid_{\pi^{-1}(x)})^*(\Phi)$ ve $(\Psi_V \mid_{\pi^{-1}(x)})^*(\Phi)$, T_xM üzerindeki temel 3-formlardır. T_xM uzayında tek bir temel 3-form elde etmek için, yani kartların uyumlu olması için,

$$(\Psi_U \mid_{\pi^{-1}(x)})^*(\Phi) = (\Psi_V \mid_{\pi^{-1}(x)})^*(\Phi)$$

olmalıdır. Bu eşitlikten ise,

$$((\Psi_V \mid_{\pi^{-1}(x)})^{-1} \circ (\Psi_U \mid_{\pi^{-1}(x)}))^*(\Phi) = (\Phi)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul,

$$(\Psi_V \mid_{\pi^{-1}(x)})^{-1} \circ (\Psi_U \mid_{\pi^{-1}(x)}) : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^7$$

dönüşümünün G_2 grubunun elemanı olmasıdır. Çünkü,

$$G_2 = \{A \in GL(\mathbb{R}^7)| \ \ A^*\Phi = \Phi\}$$

olduğu gösterilmişti. Böylece, 7-boyutlu bir M manifoldunun yapı grubunun G_2 olması için gerek ve yeter koşul her $m \in M$ noktasındaki T_mM tanjant uzayı üzerine tanjant demedinin kartlarından bağımsız olacak şekilde $\mathbb{R}^7$ üzerindeki temel 3-formun taşınabilmesidir.

$\chi(M)$, M manifoldu üzerindeki C^∞ vektör alanlarının Lie cebrini göstersin. Eğer M manifoldunun yapı grubu G_2 ise her $m \in M$ noktasındaki T_mM tanjant uzayı üzerindeki temel 3-form yada 2-katlı vektör çarpımı $\chi(M)$ üzerine genişletilebilir. Bu durumda, P, 2-katlı vektör çarpımı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$P : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ öyle ki $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}\langle P(X,Y), X\rangle &= \langle P(X,Y), Y\rangle = 0 \\ \langle P(X,Y), P(X,Y)\rangle &= \langle X \wedge Y, X \wedge Y\rangle = \langle X, X\rangle \langle Y, Y\rangle - \langle X, Y\rangle^2\end{aligned}$$

koşulları sağlanır.

Benzer şekilde, temel 3-formda,

$$\begin{array}{rcll}\Phi & : & \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) & \longrightarrow & C^\infty(M, \mathbb{R}^7) \\ & & (X, Y, Z) & \longmapsto & \Phi(X, Y, Z) := \langle P(X,Y), Z\rangle\end{array}$$

olarak $\chi(M)$'e genişletilebilir.

∇, M Riemannian manifoldu üzerindeki kovaryant türev olsun. P ve Φ'nin kovaryant türevleri, ∇P ve $\nabla\Phi$, $\forall\ W, X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}\nabla_X(P)(Y,Z) &= \nabla_X(P(Y,Z)) - P(\nabla_X Y, Z) \\ &\quad -P(Y, \nabla_X Z) \qquad (5.1)\\ \nabla_W(\Phi)(X,Y,Z) &= W\Phi(X,Y,Z) - \Phi(\nabla_W X, Y, Z) \\ &\quad -\Phi(X, \nabla_W Y, Z) - \Phi(X, Y, \nabla_W Z) \qquad (5.2)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır [9, 14, 15]. Buradan, eğer ∇ Levi-Civita konneksiyonu ise,

$$\nabla_W(\Phi)(X,Y,Z) = \langle \nabla_W(P)(X,Y), Z\rangle \qquad (5.3)$$

bulunur. Çünkü,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_W(P)(X,Y),Z\rangle &= \langle \nabla_W(P(X,Y)),Z\rangle - \langle P(\nabla_W X,Y),Z\rangle \\
&\quad - \langle P(X,\nabla_W Y),Z\rangle \\
&= \langle \nabla_W(P(X,Y)),Z\rangle - \Phi(\nabla_W X,Y,Z) \\
&\quad -\Phi(X,\nabla_W Y,Z) \\
&= W\langle P(X,Y),Z\rangle - \langle P(X,Y),\nabla_W Z\rangle \\
&\quad -\Phi(\nabla_W X,Y,Z) - \Phi(X,\nabla_W Y,Z) \\
&= W\Phi(X,Y,Z) - \Phi(X,Y,\nabla_W Z) \\
&\quad -\Phi(\nabla_W X,Y,Z) - \Phi(X,\nabla_W Y,Z) \\
&= \nabla_W(\Phi)(X,Y,Z)
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda, P'nin kovaryant türevi ile çalışmak Φ'nin kovaryant türeviyle çalışmaya denk olur.

Yardımcı Teorem 5.0.32. *$W,X,Y,Z \in \chi(M)$ olmak üzere,*

$$\nabla_W(\Phi)(X,Y,Z) = -\nabla_W(\Phi)(Y,X,Z) = -\nabla_W(\Phi)(X,Z,Y) \tag{5.4}$$

$$\nabla_W(\Phi)(X,Y,P(X,Y)) = 0 \tag{5.5}$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt. Eşitlik (5.2) ve Φ'nin anti-simetrikliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
-\nabla_W(\Phi)(Y,X,Z) &= -W\Phi(Y,X,Z) + \Phi(\nabla_W Y,X,Z) \\
&\quad +\Phi(Y,\nabla_W X,Z) + \Phi(Y,X,\nabla_W Z) \\
&= W\Phi(X,Y,Z) - \Phi(X,\nabla_W Y,Z) \\
&\quad -\Phi(\nabla_W X,Y,Z) - \Phi(X,Y,\nabla_W Z) \\
&= \nabla_W(\Phi)(X,Y,Z)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
-\nabla_W(\Phi)(X,Z,Y) &= -W\Phi(X,Z,Y) + \Phi(\nabla_W X,Z,Y) \\
&\quad +\Phi(X,\nabla_W Z,Y) + \Phi(X,Z,\nabla_W Y) \\
&= W\Phi(X,Y,Z) - \Phi(\nabla_W X,Y,Z) \\
&\quad -\Phi(X,Y,\nabla_W Z) - \Phi(X,\nabla_W Y,Z) \\
&= \nabla_W(\Phi)(X,Y,Z)
\end{aligned}$$

olduğundan, (5.4) ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\nabla_W(\Phi)(X,Y,P(X,Y)) &= W\Phi(X,Y,P(X,Y)) - \Phi(\nabla_W X,Y,P(X,Y)) \\
&\quad -\Phi(X,\nabla_W Y,P(X,Y)) - \Phi(X,Y,\nabla_W P(X,Y)) \\
&= W\langle P(X,Y),P(X,Y)\rangle - \langle P(\nabla_W X,Y),P(X,Y)\rangle \\
&\quad - \langle P(X,\nabla_W Y),P(X,Y)\rangle \\
&\quad - \langle P(X,Y),\nabla_W P(X,Y)\rangle \\
&= \langle \nabla_W P(X,Y),P(X,Y)\rangle \\
&\quad + \langle \nabla_W P(X,Y),P(X,Y)\rangle \\
&\quad + \langle P(P(X,Y),Y),\nabla_W X\rangle \\
&\quad - \langle P(P(X,Y),X),\nabla_W Y\rangle \\
&\quad - \langle P(X,Y),\nabla_W P(X,Y)\rangle \\
&= \langle P(X,Y),\nabla_W P(X,Y)\rangle + \langle -\|Y\|^2 X,\nabla_W X\rangle \\
&\quad + \langle \langle X,Y\rangle Y,\nabla_W X\rangle + \langle -\|X\|^2 Y,\nabla_W Y\rangle \\
&\quad + \langle \langle X,Y\rangle X,\nabla_W Y\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}W\langle P(X,Y),P(X,Y)\rangle - \|Y\|^2\langle X,\nabla_W X\rangle \\
&\quad + \langle X,Y\rangle\langle Y,\nabla_W X\rangle - \|X\|^2\langle Y,\nabla_W Y\rangle \\
&\quad + \langle X,Y\rangle\langle X,\nabla_W Y\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}W\{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2\} - \|Y\|^2\langle X,\nabla_W X\rangle \\
&\quad + \langle X,Y\rangle\langle Y,\nabla_W X\rangle - \|X\|^2\langle Y,\nabla_W Y\rangle \\
&\quad + \langle X,Y\rangle\langle X,\nabla_W Y\rangle
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}W\{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2\}$ ise

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}W\{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2\} &= \tfrac{1}{2}W\|X\|^2\|Y\|^2 - \tfrac{1}{2}W\langle X,Y\rangle^2 \\
&= \tfrac{1}{2}W(\|X\|^2)\|Y\|^2 + \tfrac{1}{2}W(\|Y\|^2)\|X\|^2 \\
&\quad -\tfrac{1}{2}2\langle X,Y\rangle W(\langle X,Y\rangle) \\
&= \tfrac{1}{2}\|Y\|^2 2\langle X,\nabla_W X\rangle + \tfrac{1}{2}\|X\|^2 2\langle Y,\nabla_W Y\rangle \\
&\quad - \langle X,Y\rangle\langle \nabla_W X,Y\rangle + \langle X,\nabla_W Y\rangle \\
&= \|Y\|^2\langle X,\nabla_W X\rangle + \|X\|^2\langle Y,\nabla_W Y\rangle \\
&\quad - \langle X,Y\rangle\langle \nabla_W X,Y\rangle - \langle X,Y\rangle\langle X,\nabla_W Y\rangle
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\nabla_W(\Phi)(X,Y,P(X,Y)) &= \|Y\|^2\langle X,\nabla_W X\rangle + \|X\|^2\langle Y,\nabla_W Y\rangle \\
&\quad - \langle X,Y\rangle\langle \nabla_W X,Y\rangle - \langle X,Y\rangle\langle X,\nabla_W Y\rangle \\
&\quad -\|Y\|^2\langle X,\nabla_W X\rangle + \langle X,Y\rangle\langle Y,\nabla_W X\rangle \\
&\quad -\|X\|^2\langle Y,\nabla_W Y\rangle + \langle X,Y\rangle\langle X,\nabla_W Y\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. $\square$

Yapı grubu G_2 olan 7-boyutlu bir M Riemannian manifoldu gözönüne alınsın. $\forall m \in M$ noktasındaki tanjant uzay M_m için daha önceki bölümde tanımlanmış olan W uzayının tanımına benzer şekilde her m noktası için,

$$W_m = \{\alpha \in M_m^* \otimes \bigwedge^3 (M_m^*) \mid \forall x, y, z \in M_m, \quad \alpha(x, y \wedge z \wedge P_m(y \wedge z) = 0\}$$

uzayı tanımlanabilir. G_2'nin W_m üzerindeki temsili düşünüldüğünde, bu temsil (W uzayındaki benzer şekilde),

$$W_m = W_{m_1} \oplus W_{m_2} \oplus W_{m_3} \oplus W_{m_4}$$

alt uzaylarının toplamı şeklinde yazılabilir ve W_m'in 16 alt uzayı elde edilmiş olur:

$$\{0\}, W_{m_1}, W_{m_2}, W_{m_3}, W_{m_4}, W_{m_1} \oplus W_{m_2}, ..., W$$

M manifoldu üzerindeki temel 3-formun $\nabla\Phi$ kovaryant türevi düşünüldüğünde bu kovaryant türevin bundan sonraki teoremde belirtilen 16 sınıftan hangisine ait olduğuna göre G_2 yapısı sınıflandırılmış olur. Yada U_m bu 16 sınıftan herhangi birini göstermek üzere, $\forall m \in M$ için, $(\nabla\Phi)_m \in U_m$ ise M manifoldu bu sınıftan bir G_2 yapıya sahip olur.

M Riemannian manifoldunun üzerinde d ile exterior türev, δ ile cotürev gösterilsin. η, M manifoldu üzerinde bir 3-form ise $d\eta$ ve $\delta\eta$ aşağıdaki şekilde tanımlanır [9, 14, 16]:

Her $W, X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\{E_0, E_1, ..., E_6\}$ vektör alanlarının lokal çatısı olmak üzere,

$$\begin{aligned} d\eta &= \nabla_W(\eta)(X \wedge Y \wedge Z) - \nabla_X(\eta)(W \wedge Y \wedge Z) \\ &\quad +\nabla_Y(\eta)(W \wedge X \wedge Z) - \nabla_Z(\eta)(W \wedge X \wedge Y) \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\delta\eta = -\sum_{i=0}^{6} \nabla_{E_i}(\eta)(E_i \wedge Y \wedge Z) \tag{5.7}$$

şeklindedir.

7-boyutlu bir M Riemannian Manifoldu üzerinde 2-katlı vektör çarpım P, temel 3-form da Φ olmak üzere, daha önceki bölümlerde vektör uzayı üzerinde tanımlanmış olan L_0, L_1 ve L_2 dönüşümleri vektör alanlarına genellenebilir. Böylece,

$$L_2(\nabla\Phi) = \sum_{i=0}^{6} \nabla_{E_i}(\Phi)(E_i \wedge Y \wedge Z)$$

olduğundan,

$$L_2(\nabla\Phi) = -\delta\Phi \tag{5.8}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde, L_0 ve L_1'in tanımlarından, $X \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} L_0(\nabla\Phi) &= \sum_{i,j,k=0}^{6} \nabla_{P(P(E_i\wedge E_j)\wedge E_k)}(\Phi)(E_i \wedge E_j \wedge E_k) && (5.9) \\ L_1(\nabla\Phi)(X) &= \sum_{i,j=0}^{6} \nabla_{P(E_i\wedge E_j)}(\Phi)(E_i \wedge E_j \wedge X) && (5.10) \end{aligned}$$

bulunur.

Bir önceki bölümde elde edilen eşitliklerden,

$$\begin{aligned} L_0(\nabla\Phi) &= \langle \nabla\Phi, \star\Phi \rangle && (5.11) \\ L_1(\nabla\Phi) &= 2p\delta\Phi && (5.12) \end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır.

Teorem 5.0.33. *M 7-boyutlu yapı grubu G_2 olan bir Riemannian Manifoldu ise M üzerindeki Φ temel 3-formunun kovaryant türevine göre aşağıdaki tabloda verilen sınıflardan birine aittir.*

sınıf	tanımlama bağıntısı
I	$\nabla\Phi = 0$
W_1	$\nabla_X(\Phi)(X \wedge Y \wedge Z) = 0$ veya $d\Phi = 4\nabla\Phi$ veya $\nabla\Phi = \frac{1}{168}\langle\nabla\Phi, \star\Phi\rangle \star \Phi$
W_2	$d\Phi = 0$
W_3	$\delta\Phi = \langle\nabla\Phi, \star\Phi\rangle = 0$
W_4	$12\nabla_W(\Phi)(X \wedge Y \wedge Z) = \mathfrak{S}_{xyz}\{p\ \delta\Phi(X)\ \Phi(W \wedge Y \wedge Z)$ $-3\langle W, X\rangle\, \delta\Phi(Y \wedge Z)\}$
$W_1 \oplus W_2$	$\nabla_{P(X\wedge Y)}(\Phi)(X \wedge Y \wedge Z) = \nabla_X(\Phi)(P(X \wedge Y) \wedge Y \wedge Z)$ $-\nabla_Y(\Phi)(P(X \wedge Y) \wedge X \wedge Z)$
$W_1 \oplus W_3$	$\delta\Phi = 0$
$W_2 \oplus W_3$	$p\ \delta\Phi = \langle\nabla\Phi, \star\Phi\rangle = 0$
$W_1 \oplus W_4$	$\nabla_W(\Phi)(X \wedge Y \wedge Z) - \frac{1}{12}\mathfrak{S}_{xyz}\{p\ \delta\Phi(X)\ \Phi(W \wedge Y \wedge Z)$ $-3\langle W, X\rangle\, \delta\Phi(Y \wedge Z)\}$ $= \frac{1}{168}\langle\nabla\Phi, \star\Phi\rangle \star \Phi(W \wedge X \wedge Y \wedge Z)$
$W_2 \oplus W_4$	$d\Phi = -\frac{1}{4}p\ \delta\Phi \wedge \Phi$
$W_3 \oplus W_4$	$3\delta\Phi = Pp\ \delta\Phi$ ve $\langle\nabla\Phi, \star\Phi\rangle = 0$
$W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$	$p\ \delta\Phi = 0$
$W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$	$d\Phi = -\frac{1}{4}p\ \delta\Phi \wedge \Phi + \frac{1}{42}\langle\nabla\Phi, \star\Phi\rangle \star \Phi$
$W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$	$3\delta\Phi = Pp\ \delta\Phi$ veya $12\nabla_X(\Phi)(X \wedge Y \wedge Z) = p\ \delta\Phi(X)\ \Phi(W \wedge Y \wedge Z)$ $-3\{\lVert X\rVert^2\delta\Phi(Y \wedge Z) - \langle X, Y\rangle\, \delta\Phi(X \wedge Z)$ $+\langle X, Z\rangle\, \delta\Phi(X \wedge Y)\}$
$W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$	$\langle\nabla\Phi, \star\Phi\rangle = 0$
W	bağıntı yok.

Tablo 5.1: Yapı grubu G_2 olan 7-boyutlu Riemannian manifoldların sınıfları

6 EK: ÇALIŞMADA KULLANILAN TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 6.0.34. *$T : V \longrightarrow V$ bir lineer dönüşüm olmak üzere, $\forall x, y \in V$ için; $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$ şartını sağlayan $T^* : V \longrightarrow V$ lineer dönüşümüne T dönüşümünün* ***adjoint dönüşümü*** *denir [17].*

Tanım 6.0.35. *A sonlu boyutlu bir cebir ise, A'nın otomorfizma grubu*

$$Aut(A) := \{g \in GL(A) \mid g(x.y) = g(x).g(y) \quad \forall x, y \in A\}$$

olarak tanımlıdır.

Teorem 6.0.36. ***(Kapalı Fonksiyon Teoremi)*** *$f : M \longrightarrow N$ C^∞ bir dönüşüm, $\forall p \in N$ ve $\forall x \in M$ için, $f(x) = p$ iken $df : T_xM \longrightarrow T_pN$ örten ise $f^{-1}(p)$ bir alt manifold ve boyM-boy($f^{-1}(p)$)=boyN-boy(p)'dir. boy$(p) = 0$ olduğundan, boyM-boy($f^{-1}(p)$)=boyN olur.*

Tanım 6.0.37. *G bir grup ve V sonlu boyutlu bir kompleks vektör uzayı olsun.*

$$\begin{array}{rccl} \sigma: & G \times V & \longrightarrow & V \\ & (g, v) & \longmapsto & \sigma(g, v) := g.v \end{array}$$

olarak tanımlı dönüşüm,

1. *$\forall v \in V$ için,*
$$1_G.v = v$$
2. *$\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall v \in V$ için,*
$$g_1.(g_2.v) = (g_1g_2).v$$

şartlarını sağlıyorsa, σ'ya G'nin V üzerinde bir hareketi denir.

Tanım 6.0.38. *G bir grup ve V sonlu boyutlu bir kompleks vektör uzayı olsun.*

$$\begin{array}{rcccccl} \Psi: & G & \longrightarrow & GL(V) & & & \\ & g & \longmapsto & \Psi(g): & V & \longrightarrow & V \\ & & & & v & \longmapsto & \Psi(g)v := g.v \end{array}$$

olarak tanımlı Ψ dönüşümü grup homomorfizması ise Ψ dönüşümü G'nin V üzerindeki kompleks temsili olarak adlandırılır.

Tanım 6.0.39. *σ, bir G grubunun bir V vektör uzayı üzerindeki temsili olsun. $\sigma(W) \subset W$ olacak şekilde bir $W \neq \{0\} \subset V$ alt uzayı varsa σ'ya indirgenebilir bir temsil denir.*

Eğer böyle bir W altuzayı yoksa σ indirgenemez temsil olarak adlandırılır.

Tanım 6.0.40. *G bir grup ve X bir küme olsun.*

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & g.x \end{array}$$

dönüşümü G'nin X üzerindeki bir hareketi olsun. $x \in X$ elemanı için, x'in orbiti,

$$O(x) = \{g.x | g \in G\}$$

kümesidir.

Tanım 6.0.41. *$X \times X$ kümesi üzerinde,*

$$R = \{(x,y) \in X \times X | \exists g \in G \quad y = g.x\}$$

bağıntısı tanımlansın. R'nin bir denklik bağıntısı olduğu kolayca görülebilir.

R'nin tanımından dolayı; $x \in X$'in denklik sınıfı,

$$[x] = \{y \in X | \exists g \in G \quad y = g.x\} = O(x)$$

tir. Dolayısıyla, $X \times X \diagup R = \{O(x) | x \in X\}$ olur.

Tanım 6.0.42. *$x \in X$ noktasının stabilizeri,*

$$S(x) = \{g \in G | g.x = x\}$$

olarak tanımlıdır ve G grubunun bir alt grubudur.

Yardımcı Teorem 6.0.43. *Aynı orbite ait noktalar konjuge stabilizerlere sahiptir. Yani, $x, y \in O(x)$ ise öyle bir $g \in G$ vardır ki $gS(x)g^{-1} = S(y)$'dir.*

Teorem 6.0.44. ***(Orbit-Stabilizer Teoremi)*** *$G \diagup S(x)$ bir grup yapısına sahip olmadığından, $G \diagup S(x)$ ile $S(x)$'in G'deki sol denklik sınıflarının kümesi gösterildiğinde,*

$$\begin{array}{ccc} O(x) & \longrightarrow & G \diagup S(x) \\ g.x & \longmapsto & g.S(x) \end{array}$$

olarak tanımlı dönüşüm birebir ve örtendir [18].

Bu teoremden dolayı; $|O(x)| = |G \diagup S(x)|$'dir. Yani; $|O(x)| = \frac{|G|}{|S(x)|}$ ve $|G| = |O(x)||S(x)|$ olur.

Teorem 6.0.45. ***(Sayma Teoremi)*** *$X^g = \{x \in X | g.x = x\}$ olarak tanımlansın. X'teki farklı orbitlerin sayısı, $\frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X^g|$'dir[18].*

Tanım 6.0.46. *M smooth bir manifold olsun. $\chi(M)$, M üzerindeki vektör alanlarının uzayı olmak üzere, $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ fonksiyonu, $V, W \in \chi(M)$ olmak üzere,*

1. *$\nabla_V W$ ifadesi V'ye göre $C^\infty(M, \mathbb{R})$-lineerdir. Yani, $V_1, V_2 \in \chi(M)$ ve $f, g \in \mathbb{F}(M)$ için,*

$$\nabla_{fV_1 + gV_2} W = f.\nabla_{V_1} W + g.\nabla_{V_2} W.$$

2. *$\nabla_V W$ ifadesi W'ye göre $\mathbb{R}$-lineerdir. Yani, $W_1, W_2 \in \chi(M)$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için,*

$$\nabla_V (aW_1 + bW_2) = a\nabla_V W_1 + b\nabla_V W_2.$$

3. *$f \in \mathbb{F}(M)$ için,*

$$\nabla_V (fW) = V(f).W + f.\nabla_V W.$$

koşullarını sağlıyorsa, ∇ fonksiyonuna M üzerinde bir konneksiyon denir. $\nabla_V W$ vektör alanına da W'nin V yönündeki kovaryant türevi denir.

Teorem 6.0.47. *$(M, \langle ., . \rangle)$ Riemannian manifoldu olsun. M manifoldu üzerinde, $\forall\ V, W, X \in \chi(M)$ için,*

1. *$[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$*
2. *$X \langle V, W \rangle = \langle \nabla_X V, W \rangle + \langle V, \nabla_X W \rangle$*

koşullarını sağlayan tek türlü belirli bir ∇ konneksiyonu vardır.

Teoremdeki iki şartı da sağlayan tek türlü belirli bu konneksiyona $(M, \langle ., . \rangle)$ Riemannian manifoldu üzerinde bir **Levi-Civita konneksiyonu** denir.

KAYNAKLAR

[1] Kantor, I.L. ve Solodovnikov A.S., *Hypercomplex Numbers*, Springer Verlag, New York, 1989.

[2] Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer Verlag, New York, 1983.

[3] Lee, J.M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer Verlag, New York, c2003.

[4] Baker, A., *Matrix Groups : An Introduction To Lie Group Theory*, Springer Verlag, New York, 2002.

[5] Eldeque, A., *Vector Cross Products*, Preprint, 1990.

[6] Brown, R.B. ve Gray, A., *Vector Cross Products*, Comment. Math. Helv., **42**, 222-236, 1967.

[7] Fernández, M. ve Gray, A., *Riemannian Manifolds with Structure Group* G_2, Ann. Mat. Pura appl(IV), **32**, 19-45, 1982.

[8] Cartan, E., *Sur Des Familles Remarquables D'hypersurfaces Isoparametriques Dans Les Sphériques*, Math. Z., **45**, 335-367, 1939.

[9] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1983.

[10] Samelson, H., *Lie Algebras*, Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies, no:23, 1969.

[11] Fulton, W. ve Harris, J., *Representation Theory*, Springer Verlag, New York, 1991.

[12] Bröcker, T. ve Dieck, T., *Representations of Compact Lie Groups*, Springer Verlag, New York, 1985.

[13] Fulton, W. ve Harris, J., *Representation Theory*, Springer Verlag, New York, 1991.

[14] Lee, J.M., *Riemannian manifolds : An Introduction to Curvature*, Springer Verlag, New York, c1997.

[15] Nakahara, M., *Geometry, Topology and Physics*, Adam Hilger, New York, 1990.

[16] Lang, S., *Differentials and Riemannian Manifolds*, Springer Verlag, New York, 1995.

[17] Hoffman, K. ve Kunze, R., *Linear Algebra*, Prentice Hall, New York, c1971

[18] Armstrong, M. A., *Groups and Symmetry*, Springer Verlag, New York, 1988.

[19] Harvey, R., *Spinors and Calibrations*, Academic Press, San Diego, 187-200, 1990.