PONTRYAGIN MAKSİMUM PRENSİBİ
VE
UYGULAMALARI

Musa DERELİ
Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı
Aralık - 2006

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Musa DERELİ'nin "**Pontryagin Maksimum Prensibi ve Uygulamaları**" başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 05.12.2006 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	**: Yard. Doç. Dr. EMRAH AKYAR**	**…..………..**
Üye	**: Prof. Dr. ERTUĞRUL YÖRÜKOĞULLARI**	**…………….**
Üye	**: Yard. Doç. Dr. HALUK HÜSEYİN**	**…………….**

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ………………. tarih ve ……………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PONTRYAGIN MAKSİMUM PRENSİBİ
ve
UYGULAMALARI

Musa DERELİ

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman Yard. Doç. Dr. Emrah AKYAR
2006, 51 sayfa

Bu çalışma, optimal kontrol teorinin önemli sonuçlarından olan ve bir çok alanda çeşitli uygulamaları bulunan Pontryagin Maksimum Prensibinin çeşitli kaynaklarda yer alan sonuçlarının ve uygulamalarının derlenmesi niteliğinde bir çalışmadır.

Çalışmada öncelikle gerekli olan ön bilgiler verildikten sonra, Pontryagin Maksimum Prensibi ifade edilerek, bu prensibin yardımıyla çeşitli optimal kontrol problemleri incelenmiştir. Daha sonra Pontryagin Maksimum Prensibi tam belirli olmayan hedef kümelere genelleştirilmiş ve otonom olmayan sistemler için ayrıca incelenmiştir. Ayrıca maliyet fonksiyonunun hedef konuma bağımlı olduğu durumlar da çalışılmış ve bütün bu durumların çeşitli örnekler üzerinde uygulamaları verilmiştir.

Son olarak ise Pontryagin Maksimum Prensibinin bir kanıtı verilerek, kanıt yöntemi bir örnek üzerinde uygulanarak gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kontrol Sistem, Pontryagin Maksimum Prensibi, Optimal Kontrol, Genelleştirilmiş Hedefler, Maliyet Fonksiyonu

ABSTRACT

Master Thesis

PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE
and
APPLICATIONS

Musa DERELİ

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Emrah AKYAR

2006, 51 pages

This thesis is a selection of some important results and numerous applications of the Pontryagin Maximum Principle which is one of the most important results of control theory and has applications to a variety of areas, from various literatures.

First, the preliminaries which are required for later discussion are given and Pontryagin Maximum Principle is stated and some optimal control problems examined through the Principle. The principle is, then, extended to general target sets and non-autonomous systems are considered as well. Moreover, the systems where the cost functions depend on time, state and control are also investigated and applications of all cases are given via several examples.

Finally, a proof of Pontryagin Maximum Principle is given and the proof method is demonstrated on an example.

Keywords: Control System, Pontryagin Maximum Principle, Optimal Control, General Targets, Cost Function

İçindekiler

Şekil Listesi

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$H = H(x, z, u)$	:	$z^T \dot{x}$, Hamiltonian
J	:	$F(x^1) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u)dt$ Maliyet fonksiyonu
$\mathbb{R}$	:	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	:	n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathscr{U}$	:	$\{u \in \mathbb{R}^m \| u_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., m\}$
$\mathscr{U}_b$	:	$\{u \in \mathbb{R}^m \| -1 \leq u_i \leq +1,\ i = 1, 2, ..., m\}$
$\mathscr{U}_{bb}$	:	$\{u \in \mathbb{R}^m \| u_i \in \{-1, +1\},\ i = 1, 2, ..., m\}$
x_i	:	x vektörünün i. bileşeni
x^0	:	$x(t_0)$
x^1	:	$x(t_1)$
x^T	:	x vektörünün transpozesi
$\\|x\\|$	:	x vektörünün normu
$\dot{x}$	:	$\dfrac{dx}{dt}$
$X(t, t_0)$	:	$\exp\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right)$, $n \times n$ boyutlu temel matris

1. GİRİŞ

Kontrol sistemler teorisi, çeşitli kontroller yardımıyla bir sistemin konumunu yönetme ile ilgilidir. Kontrol, sistem ve konum kavramlarının daha kolay anlaşılabilmesi için aşağıdaki örnekler verilebilir.

Bir ulusun ekonomisine tüketici ve üretici nüfusu, şirketler, ticaret, üretim imkanları, nakit ve kredi olanakları, ekonomik güven gibi öğelerden oluşan bir sistem gözüyle bakılabilir. Sistemin konumu kazançlar, zararlar, yatırımlar, hizmetler, işsizlik ve enflasyon oranları gibi öğelerle belirlenebilir. Hükümetler faiz oranları, vergilendirme politikaları gibi kontroller kullanarak bu sistemin konumunu etkileyebilir.

Bu örnekte ekonomiyi oluşturan öğelerin bütününe sistem, ekonominin bulunduğu seviyeye konum, ekonominin bulunduğu seviyeyi etkileyen öğeler ise kontrol olarak tanımlanabilir.

Bir başka örnek olarak otomobiller düşünülebilir. Bir otomobili kullanmak aslında otomobili kontrol etmek anlamındadır. Otomobili durdurmak, hızlandırmak, direksiyon ile aracın yönünü belirlemek en basit kontrollerden birkaçıdır.

Bu örnekleri birçok alanda çoğaltmak mümkündür. Hastalığa karşı ilaç kontrolü ile hastalığın seviyesini azaltmak ya da yok etmek, bitki yetiştirirken yapay ışık kullanarak bitkinin boyunun uzamasını hızlandırmak, kimyada tepkimeleri hızlandırıcı kontroller kullanmak, bir bölgedeki bazı böcek türlerini azaltmak için böcek ilaçları kullanmak örnek olarak verilebilir.

Eğer sistem zamana bağlı olarak değişiyorsa sisteme otonom olmayan sistem, sistem zamana bağlı değilse otonom sistem olarak adlandırılır.

Hedef küme sistemin getirilmesi istenilen konumudur. Sistemin hedef konumu $x \in \mathbb{R}^n$ şeklinde tek bir nokta olabileceği gibi, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ şeklinde bir küme de olabilir. Ayrıca hedef küme zamana bağlı olarak da değişebilir. Yukarıdaki ekonomi örneğinde hedef küme olarak işsizlik ve enflasyon oranının sıfır olması istenebilir. Ancak gerçekte böyle bir hedefe ulaşmak neredeyse mümkün olamayacağından daha gerçekçi hedefler seçilmelidir. Örneğin işsizlik oranının

%8 den daha az, enflasyon oranının ise %10 dan daha düşük olmasınının istenmesi daha anlamlı olacaktır.

Aynı şekilde anlamlı hedef küme seçmek gibi anlamlı kontroller de seçilmelidir. Doğal olarak kullanılan kontroller üzerinde bir takım kısıtlar bulunabilir. Mesela yukarıdaki ekonomi örneğinde çok aşırı vergi alınamayacağı gibi negatif faiz oranları da kullanılamayacaktır. Başka bir örnek vermek gerekirse, bir hastaya ilaç tedavisi uygulanarak hastalığın en kısa sürede iyileşmesi için hastaya gereğinden fazla ilaç verilmesi uygun değildir. Bu sebeplerden dolayı kontrol seçimlerinde bazı kısıtlamalar yapılacak ve bu çalışmada kontroller genelde aşağıda tanımlanan kümelerden seçilecektir.

$$\begin{aligned}
\mathscr{U} &= \{u \in \mathbb{R}^m \mid u_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., m\},\\
\mathscr{U}_b &= \{u \in \mathbb{R}^m \mid -1 \leq u_i \leq +1,\ i = 1, 2, ..., m\},\\
\mathscr{U}_{bb} &= \{u \in \mathbb{R}^m \mid u_i \in \{-1, +1\},\ i = 1, 2, ..., m\}.
\end{aligned}$$

Açıktır ki, $\mathscr{U}_{bb} \subset \mathscr{U}_b \subset \mathscr{U}$ olur.

Sistemin konumunu istenen konuma getiren kontrollere başarılı kontrol denir. Yukarıdaki örneklerde sistemi istenen konuma getiren birden fazla kontrol var olabilir. Fakat bu kontrollerin herbirinin ayrı maliyeti olacağından, başarılı kontrollerden en az maliyetli olan kontrolün seçilmesi istenebilir. Bu ise optimal kontrol problemlerini oluşturur. Burada maliyet olarak para, zaman, vb düşünülebilir.

Kontrol sistemler teorisinin en önemli sonuçlarından biri olan ve Pontryagin Maksimum Prensibi olarak bilinen teorem optimal kontrolün varlığı için gerek koşul vermesine rağmen, teoremin kontroller üzerinde eleyici özelliği nedeniyle optimal kontrolü bulmada yardımcı olabilir. Bu teorem ilk olarak L.S. Pontryagin tarafından 1958 yılında Edigburgh, İngiltere de düzenlenen bir kongrede sunulmuş ve 1962 yılında Pontryagin ile birlikte bir grup matematikçi tarafından ingilizce çevirisi yayınlanmıştır. Pontryagin bu çalışması ile 1961 yılında Lenin ödülünü almıştır [1].

2. ÖN BİLGİLER

Bu kesimde bundan sonraki bölümler için gerekli olan çeşitli tanım ve gösterimler verilecektir.

$x, y \in \mathbb{R}^n$ olsun. x ve y nin i. bileşeni sırasıyla x_i ve y_i ile gösterilsin ve x^T, x in transpozesi olsun. Bu durumda x ve y nin iç çarpımı

$$xy = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

x vektörünün normu ise

$$\|x\|^2 = xx = x^T x$$

şeklinde tanımlanabilir.

Adi diferansiyel denklem,

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.1.1}$$

denklemi ile verilsin. Burada x, n-boyutlu durum vektörü; f, n-boyutlu vektör değerli fonksiyon ve t bağımsız değişkeni gerçel sayı olmak üzere zamanı göstersin.

Denklem (2.1.1) için başlangıç-değer problemi (2.1.1) denklemini ve

$$x(t_0) = x^0 \tag{2.1.2}$$

başlangıç koşulunu sağlayan $x(t)$ fonksiyonunu bulma problemidir.

Picard Teoremine göre (bkz. [2]) $f(t, x)$ sürekli ise (2.1.1), (2.1.2) probleminin çözümü vardır. Ayrıca $f(t, x)$ Lipschitz koşulunu sağlıyorsa yani

$\forall\ y, z \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq K\|y - z\|$$

olacak şekilde $K > 0$ sayısı varsa çözüm tektir.

Lineer Diferansiyel Denklemlerin Genel Çözümü:

Genel olarak n-boyutlu lineer sistem,

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \ , \quad x(t_0) = x^0$$

şeklinde yazılabilir. Bu sistemin çözümü,

$$x(t) = X(t, t_0) \left(x^0 + \int_{t_0}^{t} X(t_0, \tau) b(\tau) d\tau \right)$$

ile verilir. Burada $X(t, t_0)$,

$$\exp \left(\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau \right)$$

şeklinde $n \times n$ boyutlu matristir (temel matris).

Eğer $\forall t > 0$ için $A(t) = A$ ve $t_0 = 0$ ise çözüm,

$$x(t) = \exp(At) \left(x^0 + \int_{0}^{t} \exp(-A\tau) b(\tau) d\tau \right)$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer sistem homojen yani $b = 0$ ise bu durumda çözüm

$$x(t) = X(t, t_0) x^0$$

şeklinde elde edilir ve

$$\dot{X}(t, t_0) = AX(t, t_0)$$

sağlanır.

Adjoint Sistem:

Adjoint sistem $-A^T$ matrisi ile tanımlanır. Eğer sistemin temel matrisi X ve adjoint sistemin temel matrisi Y ise,

$$\dot{X} = AX \ , \quad \dot{Y} = -A^T Y \tag{2.1.3}$$

yazılabilir. İkinci denklemin her iki tarafının tranpozesi alınırsa

$$\dot{Y}^T = -Y^T A \tag{2.1.4}$$

elde edilir. Y^TX in türevi alnırsa (2.1.3) ve (2.1.4) ifadelerinden

$$\frac{d}{dt}(Y^TX) = Y^T\dot{X} + \dot{Y}^TX = 0$$

bulunur. Bu ise Y^TX matrisinin sabit olduğunu gösterir. X ve Y nin tanımından $t = t_0$ için her iki matris de birim matrise eşit ve Y^TX sabit olduğundan $Y^TX = I$ olur.

$$x(t) = X(t, t_0)x^0, \; y(t) = Y(t, t^0)y^0$$

için

$$xy = x^Ty = y^Tx = (y^0)^TY^TXx^0 = (y^0)^Tx^0 \tag{2.1.5}$$

elde edilir. O halde sistemin ve adjoint sistemin çözümlerinin skaler çarpımı sabit kalır.

Konveks Kümeler:

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ bir küme olsun. $\forall\lambda \in (0, 1)$ ve $\forall x, y \in C$ için

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$$

oluyorsa C kümesine konveks küme denir.

$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ax = p\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye $\mathbb{R}^n$ nin $n-1$ boyutlu hiperdüzlemi denir. Burada p skaler a ise hiperdüzlemin n boyutlu normal vektörüdür.

$C \subset \mathbb{R}^n$ konveks olsun. Her $y \in \partial C$ için C kümesi $\mathbb{P}$ hiperdüzleminin bir tarafında kalacak şekilde y yi bulunduran bir $\mathbb{P}$ hiperdüzlemi vardır [3].

Koni:

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ verilsin. $\forall x \in K$ için $\lambda \geq 0$ olmak üzere $\lambda x \in K$ oluyorsa K kümesine bir koni denir.

3. PONTRYAGIN MAKSİMUM PRENSİBİ (PMP)

3.1 Giriş

Kontrol sistemin davranışı,

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{3.1.1}$$

diferansiyel denklemi ile verilsin.

Burada x, sistemin n-boyutlu konum vektörü; u, m-boyutlu kontrol vektörü; f, n-boyutlu vektör değerli fonksiyon ve $t \geq 0$ zamanı göstermektedir. Sistemin $t = 0$ anındaki başlangıç konumu x^0 ve $t = t_1$ terminal zamanındaki konumu ise x^1 olsun. Terminal zaman t_1 sabit yada serbest olabilir.

Burada u fonksiyonunun parçalı sürekli ve f nin bileşenlerine göre sürekli türevlenebilir olduğu kabul edilecektir.

Maliyet fonksiyonu,

$$J = F(x^1) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u)dt \tag{3.1.2}$$

ile verilsin. Burada $F(x^1)$ sistemin son konumuna bağlı olan bir değerdir.

Sistemi x^0 noktasından x^1 noktasına getiren tüm kontrollerden (3.1.2) maliyet fonksiyonunu minimum yapan kontrole *optimal kontrol* denir.

Eğer x^0 noktasından x^1 noktasına hiç bir kontrolle gelinemiyorsa sisteme kontrol edilemez denir.

Eğer maliyet fonksiyonu

$$J = \int_0^{t_1} 1dt$$

şeklinde ise optimal u kontrolünü bulma problemi time-optimal problem olarak adlandırılır.

Açıktır ki otonom sistemler için u $[t_0, t_1]$ aralığında (3.1.2) fonksiyonu için optimal kontrol ise $[a, b] \subset [t_0, t_1]$ aralığında da optimal kontroldür. Aşağıdaki teorem ile bu ifadenin kanıtı verilmiştir.

Teorem 3.1.1. *Verilen* $\dot{x} = f(x,u)$ *otonom sistemi için* $[t_0, t_1]$ *aralığında* $u(\cdot)$ *optimal kontrol olsun ve* $x(t_0) = x^0, x(t_1) = x^1$ *sağlansın. Bu durumda* $[a,b] \subset [t_0,t_1]$ *için de* $u(\cdot)$ *kontrolü optimal kontroldür [4].*

Kanıt. Varsayalım ki $[a,b] \subset [t_0,t_1]$ için u optimal kontrol olmasın. Bu durumda $x(a)$ noktasını $x(b)$ noktasına u kontrolünden daha az maliyetle götüren bir u^* kontrolü vardır. u^* tarafından üretilen çözüm x^* ile gösterilecek olursa, $c \in [t_0,t_1]$ olmak üzere

$$\int_a^c f_0(x^*(s), u^*(s))ds < \int_a^b f_0(x(s), u(s))ds \tag{3.1.3}$$

yazılabilir.

$$u^{\#}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [t_0, a] \\ u^*(t), & t \in (a, c) \\ u(t-c+b), & t \in [c, t_1+c-b] \end{cases}$$

kontrolü tanımlansın ve bu kontrolün ürettiği çözüm,

$$x^{\#}(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [t_0, a] \\ x^*(t), & t \in (a, c) \\ x(t-c+b), & t \in [c, t_1+c-b] \end{cases}$$

olsun. Sistem otonom olduğundan

$$\dot{x}^{\#} = f(x^{\#}, u^{\#})$$

sağlanır ve

$$\begin{aligned} x^{\#}(t_0) &= x^0, \\ x^{\#}(t_1+c-b) &= x(t_1+c-b-c+b) = x(t_1) = x^1 \end{aligned}$$

olacağından $u^{\#}$ kontrolü başarılı kontroldür. $u^{\#}$ kontrolünün getirdiği maliyet,

$$\begin{aligned} J(u^{\#}) &= \int_{t_0}^{t_1+c-b} f_0(x^{\#}(s), u^{\#}(s))ds \\ &= \int_{t_0}^{a} f_0(x(s), u(s))ds + \int_a^c f_0(x^*(s), u^*(s))ds \\ &\quad + \int_c^{t_1+c-b} f_0(x(s-c+b), u(s-c+b))ds \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıda ki integralinden ikincisi yerine (3.1.3) eşitsizliğinden dolayı

$$\int_a^b f_0(x(s), u(s))ds$$

yazılırsa $J(u^{\#})$ değeri büyütülmüş olur. Üçüncü integralde ise $s - c + b = s$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_b^{t_1} f_0(x(s), u(s))ds$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} J(u^{\#}) &< \int_{t_0}^{a} f_0(x(s), u(s))ds + \int_a^b f_0(x(s), u(s))ds + \int_b^{t_1} f_0(x(s), u(s))ds \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(s), u(s))ds \\ &= J(u) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise u kontrolünün $[t_0, t_1]$ üzerinde optimal olması ile çelişir. □

Denklem (3.1.1) için

$$\dot{x}_0 = f_0(x, u)$$

olacak şekilde ek bir x_0 konum değişkeni tanımlansın. Bu durumda

$$x_0(0) = 0 \text{ ve } x_0(t_1) = J$$

olur. Yeni tanımlanan x_0 konum değişkeni de eklenerek $n + 1$ boyutlu

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, u)$$

sistemi elde edilir.

$H = H(\hat{x}, \hat{z}, u)$ olmak üzere,

$$H = \hat{z}^T \dot{\hat{x}} = \sum_{i=0}^{n} z_i \dot{x}_i$$

fonksiyoneli (Hamiltonian) tanımlansın. Burada $\hat{z}$; $n + 1$ boyutlu ve

$$\dot{\hat{z}} = -\frac{\partial H}{\partial \hat{x}} \tag{3.1.4}$$

şeklindedir.

H fonksiyoneli x_0 a bağlı olmadığından,

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= 0, \\ \dot{z}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, ..., n \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

3.2 PMP'nin Temel İfadesi

Yukarıdaki bilgiler yardımıyla Pontryagin Maksimum Prensibi artık ifade edilebilir.

Teorem 3.2.1 (Pontryagin Maksimum Prensibi, [5, 6])**.**
u^*, (3.1.1) sisteminin (3.1.2) maliyet fonksiyonu için optimal kontrol olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır.

(i) $z_0 = -1$,

(ii) $H(\hat{x}, \hat{z}, u^*) = \sup \{H(\hat{x}, \hat{z}, u) : u \in \mathscr{U}\}$,

(iii) Denklem (3.1.1) *in u^* tarafından üretilen ve*

$$x^*(t_0) = x^0 \ \text{ve} \ x^*(t_1) = x^1$$

olacak şekilde x^* çözümü vardır. Ayrıca (3.1.4) *sisteminin z^* çözümü vardır.*

(iv) H, x^* optimal çözüm boyunca sabittir. Ayrıca t_1 keyfi ise $H = 0$ olur. Yani,

$$H(\hat{x}^*, \hat{z}^*, u^*) = \begin{cases} \text{sabit}, & t_1 \ \text{sabit ise} \\ 0, & t_1 \ \text{keyfi ise} \end{cases}$$

olur.

PMP' nin tüm koşullarını sağlayan birden fazla çözüm olabilir. Bu durumda optimal kontrol olarak bu çözümler içinden (3.1.2) maliyet fonksiyonunu minimum yapan u kontrol fonksiyonu seçilir.

Eğer optimal çözüm yoksa PMP' nin koşullarından en az biri sağlanmaz. Şimdi buna bir örnek verelim.

3.3 Örnekler

Örnek 3.3.1. *Kontrol sistemin davranışı,*

$$\dot{x}_1 = x_1 + u_1$$

denklemi ile verilsin. Başlangıç ve hedef konum

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_1^0 = X > 0 \\ x_1(t_1) &= x_1^1 = 0 \end{aligned}$$

olsun. Ayrıca maliyet fonksiyonu

$$J = \int_0^{t_1} \frac{1}{2} u_1^2 dt$$

ile verilsin ve $u_1 \in \mathscr{U}$ *olsun.*

Sistem bir boyutlu lineer otonom sistemdir.

1. Adım: $\dot{x}_0 = f_0 = \frac{1}{2} u_1^2$ *olsun. Bu durumda* $x_0^0 = 0$; $x_0^1 = J$ *olur.*

2. Adım: $H = H(x_0, x_1, z_0, z_1, u_1)$ *şu şekilde yazılabilir:*

$$H = z_0 \dot{x}_0 + z_1 \dot{x}_1 = z_0 \frac{1}{2} u_1^2 + z_1 (x_1 + u_1) \tag{3.3.5}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= -\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0 \ ; \\ \dot{z}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -z_1 \end{aligned}$$

3. Adım: *PMP' nin (i) koşuluna göre* $z_0 = -1$ *olmalıdır. Ayrıca,* $\dot{z}_1 = -z_1$ *olduğundan* A *sabit olmak üzere*

$$z_1 = A e^{-t}$$

bulunur.

4. Adım: *Farzedelim ki optimal kontrol* u_1 *olsun. Bu durumda* u_1 *PMP' nin tüm koşullarını sağlayacaktır.* u_1*,* H *ye supremum değerini veren kontroldür. Bu yüzden* (3.3.5) *denkleminde* $\frac{1}{2}z_1^2$ *eklenip çıkarılırsa*

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2}u_1^2 + z_1x_1 + z_1u_1 \\ &= -\frac{1}{2}(u_1 - z_1)^2 + z_1x_1 + \frac{1}{2}z_1^2 \end{aligned}$$

olur. Açıktır ki H *nin supremum değerini alması için*

$$u_1 = z_1 = Ae^{-t}$$

seçilmesi gerekir.

5. Adım: *Sistemde* u_1 *yerine* Ae^{-t} *yazarak* $x_1(0) = X$ *başlangıç koşuluyla diferansiyel denklemi çözelim.*

$$\dot{x}(t) + P(t)x(t) = Q(t) \tag{3.3.6}$$

denkleminin genel çözümü

$$x(t) = e^{-\int P(t)dt}\left[\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt + c\right]$$

olduğundan (bkz. [2]) sistemin çözümü

$$x_1 = -\frac{1}{2}Ae^{-t} + \left(X + \frac{1}{2}A\right)e^t$$

bulunur.

$x_1(t_1) = 0$ *olduğundan*

$$A = -\frac{2X}{1 - e^{-2t_1}} \tag{3.3.7}$$

elde edilir.

Optimal kontrolün getirdiği maliyet ise

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{t_1} \frac{1}{2}u_1^2 dt \\ &= \int_0^{t_1} \frac{1}{2}A^2e^{-2t}dt \\ &= \frac{X^2}{1 - e^{-2t_1}} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} H &= z_1\left(x_1+\frac{1}{2}z_1\right) \\ &= Ae^{-t}\left(X+\frac{1}{2}A\right)e^t \\ &= A\left(X+\frac{1}{2}A\right) \end{aligned}$$

olduğundan H nin optimal yörünge boyunca sabit olduğu görülür.

t_1 *keyfi olduğundan bu değer sıfıra eşit olmalıdır. Ancak,*

$$A\left(X+\frac{1}{2}A\right)=0$$

olması için ya A sıfır ya da $X+\frac{1}{2}A=0$ olmalıdır.

Denklem (3.3.7) *gereği A sıfır olamayacağından*

$$X+\frac{1}{2}A=0$$

olmalıdır. Bu denklemde A nın değerini yerine yazarsak

$$1-e^{-2t_1}=1$$

bulunur. Bu ise sonlu t_1 için doğru olmadığından optimal çözüm yoktur.

Şimdi PMP' nin tüm koşullarının sağlandığı çeşitli örnekler verelim.

Örnek 3.3.2. *Bir bahçıvan başlangıçda boyu sıfır birim olan bir bitkinin boyunun bir birim zaman sonra iki birim olmasını istiyor. Bu sistem,*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1+u_1 \\ x_1(0) &= 0 \\ x_1(1) &= 2 \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

ile verilsin. Burada terminal zaman $t_1=1$ sabittir. Ayrıca maliyet fonksiyonu

$$J=\int_0^{t_1}\frac{1}{2}u_1^2dt$$

olsun. Bu durumda $\dot{x}_0 = \frac{1}{2}u_1^2$ *olur. Buradan*

$$H = \frac{1}{2}z_0u_1^2 + z_1(1+u_1) \tag{3.3.9}$$

elde edilir ve

$$\dot{z}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$$

olur.

O halde A sabit olmak üzere $z_1 = A$ *bulunur. Ayrıca PMP' nin (i) koşuluna göre;* $z_0 = -1$ *olmalıdır. Denklem* (3.3.9) *da* $\frac{1}{2}z_1^2$ *eklenip çıkarılırsa,*

$$H = -\frac{1}{2}(u_1 - z_1)^2 + z_1 + \frac{1}{2}z_1^2$$

bulunur. Bu denklem en büyük değerini

$$u_1 = z_1 = A$$

iken alır. O halde u_1, (3.3.8) *ifadesinde yerine yazılırsa*

$$\dot{x}_1 = 1 + A$$

elde edilir.

Başlangıç koşulları kullanılırsa $A = 1$ *bulunur. Her t için* $u_1 = 1$ *kontrolü kullanılırsa hedefe ulaşılır ve maliyet* $J = \dfrac{1}{2}$ *olur.*

Bulunan değerler (3.3.9) *Hamiltonian denkleminde yerine yazılırsa* $H = \dfrac{3}{2}$ *bulunur. Yani optimal yörünge boyunca H nin sabit olduğu görülmüş olur.*

Örnek 3.3.3. *Gut hastalığı* [1] *kandaki ürik asitin fazlalığından kaynaklanmaktadır. Kandaki ürik asit fazlalığı* x_1 *ile gösterilirse sistem şu şekilde tanımlanabilir.*

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 1 - u_1 \tag{3.3.10}$$

[1] Gut, bazı eklemlerde ani ve şiddetli gelişen ağrı, hassasiyet, kızarıklık, şişme ve sıcaklık artışı nöbetlerine neden olan bir hastalıktır. Genellikle tek eklemi, sıklıkla da ayak baş parmağını etkiler. Bununla birlikte diz, ayak bileği, ayak, el, el bileği ve dirsek eklemleri de etkilenebilir. Nadiren bazı hastalarda ilerleyen dönemlerde omuz, kalça ve omurga tutulumu gelişebilir.

Burada u_1 kullanılan ilaç miktarını göstermektedir.

$t = 0$ iken yani ilaç kullanılmaya başlamadan önce $x_1 = 1$ olsun. Amaç ilaç kullanarak bu seviyeyi sıfıra indirmektir. Burada ilacın zamana göre sürekli olarak verildiği kabul edilecektir. Bu durumda sistemin başlangıç ve bitiş koşulları

$$x_1(0) = 1 \ \textit{ve} \ x_1(t_1) = 0$$

olur.

Ürik asit seviyesini olabildiğince çabuk düşürmek için çok yüksek dozda ilaç verilirse ilacın yan etkileri olacak, ayrıca maliyet de artacaktır. Diğer taraftan ilaç az dozda kullanılırsa hedefe ulaşmak uzun zaman alabilir. Bu yüzden pozitif bir k sabiti ile bu denge sağlanarak maliyet fonksiyonu,

$$J = \int_0^{t_1} \frac{1}{2}(k^2 + u_1^2)dt \quad (k > 0)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda Hamiltonian,

$$H = -\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}u_1^2 + z_1(-x_1 + 1 - u_1)$$

olur ve $\dot{z}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = z_1$ dir. H en büyük değerini $u_1 = -z_1 = Ae^t$ iken alır.

t_1 sabit olmadığından PMP' nin (iv) koşuluna göre optimal yörünge boyunca $H = 0$ olmalıdır. Özel olarak $t = 0$ için

$$-\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}u_1^2 + z_1(-x_1 + 1 - u_1) = 0$$

denkleminden $A = k$ bulunur. u_1 in değeri (3.3.10) *denkleminde yerine yazılırsa,*

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 1 - ke^t$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklem çözülürse,

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}ke^t + \frac{1}{2}ke^{-t}$$

bulunur. $t = t_1$ anında $x_1(t_1) = 0$ olacağından,

$$t_1 = \sinh^{-1}(\frac{1}{k})$$

olarak bulunur. Bu durumda maliyet ise;

$$J = \frac{1}{2}k^2 \sinh^{-1}(\frac{1}{k}) + \frac{1}{2}[1 + (k^2 + 1)^{1/2}]$$

olur. Buradan $k \to 0$ *iken* $J \to 1$ *ve* $t \to \infty$ *olduğundan optimal çözüm yoktur.* $k \to \infty$ *iken* $t_1 \approx 1$ *ve* $J \approx k$ *olur. O halde* k *nın uygun seçimiyle maliyetin azaltılması ya da sürenin kısaltılması ayarlanabilir.*

Örnek 3.3.4. *Sistemin davranışı,*

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = u_1$$

şeklinde verilsin. Burada x_1 *yol,* x_2 *yolun zamana göre türevi hız ve* u_1 *hızın zamana göre türevi ivmeyi göstermektedir.*

Maliyet fonksiyonu

$$J = \int_0^{t_1} 1dt$$

ve başlangıç-hedef koşulları

$$x_1(0) = X_1,\ x_2(0) = X_2$$

$$x_1(t_1) = 0,\ x_2(t_1) = 0$$

şeklinde verilsin. Ayrıca $u_1 \in \mathscr{U}_b = \{u \mid -1 \leq u \leq 1\}$ *olsun.*

Amaç hedef konuma en kısa sürede ulaşmaktır. Bu durumda Hamiltonian,

$$H = -1 + z_1 x_2 + z_2 u_1$$

olur. Buradan,

$$\dot{z}_1 = 0 \text{ ve } \dot{z}_2 = -z_1$$

olduğundan A *ve* B *sabit olmak üzere*

$$z_1 = A \text{ ve } z_2 = B - At$$

elde edilir.

u_1 kontrol fonksiyonu -1 ile $+1$ arasında sınırlı olduğundan H en büyük değerini; $z_2 > 0$ iken $u_1 = +1$ ve $z_2 < 0$ iken $u_1 = -1$ ile alır.

$z_2 = 0$ denkleminin kökü tek olduğundan u_1 kontrol fonksiyonu sadece bir kere değiştirilecektir.

u_1 için sadece uç değerler kullanılacağından aslında $u_1 \in \mathscr{U}_{bb}$ dir. Bu problemi sondan başa doğru çözmek daha elverişlidir:

Eğer hedefe $u_1 = +1$ kontrolü ile ulaşılmışsa,

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \int_{t_1}^{t} 1 d\tau \\ &= t - t_1 \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

ve

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_{t_1}^{t} (t - t_1) d\tau \\ &= \frac{1}{2}(t - t_1)^2 \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

bulunur. O halde (3.3.11) *ve* (3.3.12) *den*

$$x_2^2(t) = 2x_1(t)$$

elde edilir.

Başlangıçta $u_1 = -1$ kontrolü kullanıldığından başlangıç yörüngesi,

$$x_2(t) = X_2 - t \tag{3.3.13}$$

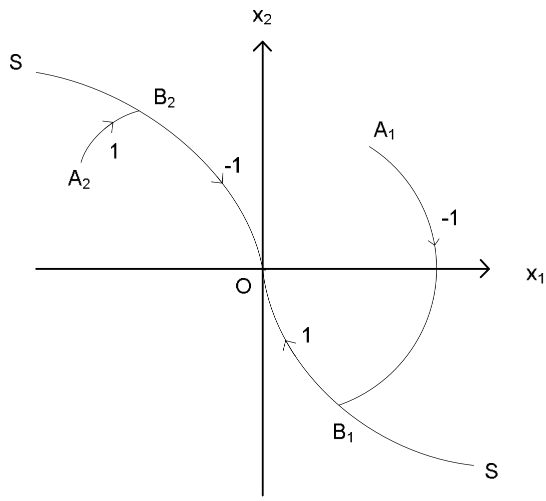
$$x_1(t) = X_1 + X_2 t - \frac{1}{2}t^2 \tag{3.3.14}$$

şeklindedir. Böylece (3.3.13) *ve* (3.3.14) *ifadelerinden*

$$x_2^2(t) + 2x_1(t) = X_2^2 + 2X_1$$

elde edilir. Eğer $0 \leq t_2 \leq t_1$ anında kontrol değiştirildiyse t_2 anında başlangıç ve bitiş yörüngeleri aynı değere sahip olacağından

$$t_2 = X_2 + (X_1 + \frac{1}{2}X_2^2)^{1/2}$$



Şekil 3.1: Örnek 3.3.4 için çözümlerin grafikleri: A_1 ve A_2 başlangıç, O hedef, B_1 ve B_2 u_1 kontrolünün değiştirildiği noktaları göstermektedir

olur ve optimal zaman t_1 *ise,*

$$\begin{aligned} t_1 &= t_2 - x_2 \\ &= X_2 + 2(X_1 + \frac{1}{2}X_2^2)^{1/2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durum şekil 3.1 *de gösterilmiştir. Bu ifadelerin anlamlı olabilmesi için,* $X_2 > 0$ *iken* $X_1 > -\frac{1}{2}X_2^2$ *ve* $X_2 \leq 0$ *iken* $X_1 > \frac{1}{2}X_2^2$ *olmalıdır.*

Örnek 3.3.5. *Bir önceki örneği yakıt maliyeti ile tekrar ele alalım. Sistemin davranışı,*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \end{aligned}$$

ve maliyet fonksiyonu

$$J = \int_0^{t_1} (k + |u_1|) dt$$

ile verilsin. Burada $k > 0$ *zaman ve yakıt arasında dengeleyici bir sabittir. Sistemin başlangıç ve bitiş konumları*

$$x_1(0) = X,\ x_2(0) = 0 \text{ ve } x_1(t_1) = 0,\ x_2(t_1) = 0$$

ile verilsin ve $u_1 \in \mathscr{U}_b$ *olsun.*

Bu durumda Hamiltonian,

$$H = -k - |u_1| + z_1 x_2 + z_2 u_1$$

olur ve buradan $\dot{z}_1 = 0,\ \dot{z}_2 = -z_1$ *elde edilir. O halde*

$$z_1 = A, z_2 = B - At\ (A, B\ sabit)$$

bulunur.

u_1 *optimal kontrolünü seçmek için*

$$q = z_2 u_1 - |u_1|$$

alınırsa, q nun en büyük değerini bulmak gereklidir.

- *Eğer* $u_1 \geq 0$ *iken,*

  * $z_2 > 1$ *ise* $u_1 = 1$
  * $z_2 < 1$ *ise* $u_1 = 0$

- *Eğer* $u_1 \leq 0$ *iken,*

  * $z_2 > -1$ *ise* $u_1 = 0$
  * $z_2 < -1$ *ise* $u_1 = -1$

seçilirse q en büyük değerini alır. Yani,

$$u_1 = \begin{cases} +1\ , & z_2 > 1 \\ 0\ , & -1 < z_2 < 1 \\ -1\ , & z_2 < -1 \end{cases}$$

olmalıdır.

Sırasıyla $\{-1, 0, 1\}$ *kontrolleri kullanılsın.*

Başlangıç yörüngesi,

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -t \\ x_1(t) &= X - \frac{1}{2}t^2 \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan

$$x_1(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t) = X$$

elde edilir. Bitiş yörüngesi,

$$\begin{aligned} x_2(t) &= t - t_1 \\ x_1(t) &= \frac{1}{2}(t_1 - t)^2 \end{aligned}$$

şeklindedir ve bu yörüngeden

$$x_1(t) - \frac{1}{2}x_2^2(t) = 0$$

bulunur. $u_1 = 0$ *için,*

$$\begin{aligned} x_2(t) &= a \\ x_1(t) &= b + at \end{aligned}$$

elde edilir (a, b sabit).

$0 < t_2 < t_3 < t_1$ *için*

$$-t_2 = a \ , \quad t_3 - t_1 = a \tag{3.3.15}$$

$$X - \frac{1}{2}t_2^2 = b + at_2 \tag{3.3.16}$$

$$\frac{1}{2}(t_1 - t_3)^2 = b + at_3 \tag{3.3.17}$$

elde edilir. (3.3.16) *ve* (3.3.17) *denklemlerini taraf tarafa çıkarırsak;*

$$X = t_2 t_3$$

bulunur. z_2, -1 *ve* $+1$ *olduğunda kontroller değişeceğinden;*

$$\begin{aligned} B - At_2 &= -1 \\ B - At_3 &= 1 \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

denklemlerinden

$$A = -2/(t_3 - t_2)$$

$$B = -t_1/(t_3 - t_2)$$

elde edilir. Bu problemde t_1 keyfi olduğundan optimal yörünge boyunca $H = 0$ olmalıdır.

Buradan özel olarak $t = 0$ için $u_1 = -1$ ve $x_2 = 0$ olduğundan

$$H = -k - 1 - B = 0$$

olur. Buradan

$$B = -(k+1)$$

bulunur.

$$-(k+1) = -t_1/(t_3 - t_2)$$

ifadesinden,

$$t_3 = t_2 + \frac{t_1}{k+1} \tag{3.3.19}$$

elde edilir.

(3.3.18) *denklemlerinden*

$$t_2 = \frac{\frac{k}{2}t_3}{1 + \frac{k}{2}}$$

bulunur. Bu sonuç (3.3.19) *denkleminde yazılırsa ve $p = 1/(k+1)$ alınırsa,*

$$\begin{aligned} t_3 &= \tfrac{1}{2}pt_1(k+2) \\ t_3 - t_2 &= pt_1 \\ t_2 &= \tfrac{1}{2}pt_1k \end{aligned}$$

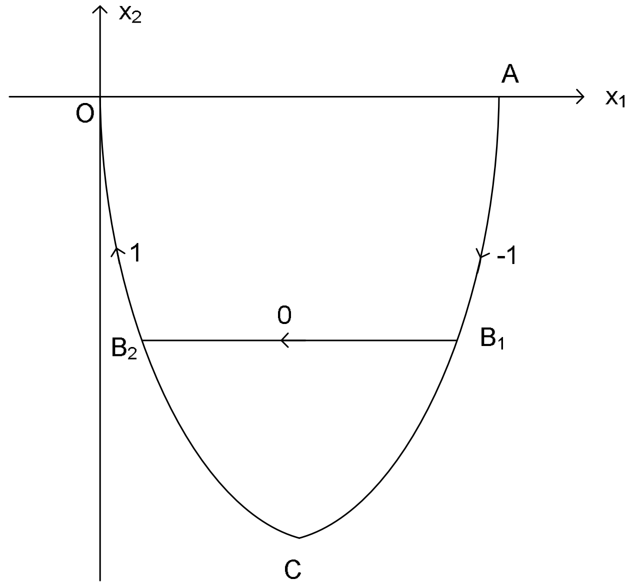
olur. $X = t_2t_3$ olduğundan,

$$X = \frac{1}{4}k(k+2)p^2t_1^2$$

elde edilir. Buradan

$$t_1 = 2(k+1)\left(\frac{X}{k(k+2)}\right)^{1/2}$$

bulunur.



Şekil 3.2: Örnek 3.3.5 için çözümlerin grafikleri: O hedef, A başlangıç, B_1 ve B_2 u_1 kontrolünün değiştirildiği noktalardır

Optimal maliyet ise,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{t_2}(k+1)dt + \int_{t_2}^{t_3} kdt + \int_{t_3}^{t_1}(k+1)dt \\ &= kt_1 + t_2 + (t_1 - t_3) \\ &= \frac{t_1}{p} - pt_1 \\ &= 2k^{1/2}(k+2)^{1/2}X^{1/2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bakınız şekil 3.2.

Örnek 3.3.6. *Bir odadaki sinek populasyonu örümcekler olmaksızın eksponansiyel olarak artmaktadır. Eğer t anındaki sineklerin sayısına $x_1(t)$, örümceklerin sayısına ise $x_2(t)$ denilirse sistem,*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $|u_1| \leq 1$ dir. Başlangıç ve bitiş koşulları ile maliyet fonksiyonu,

$$x_1(0) = X, \;\; x_2(0) = 0, \;\; 0 < X < 1$$

$$x_1(t_1) = 0,\ x_2(t_1) = 0,$$
$$J = \int_0^t 1dt$$

ile verilsin. Buradan Hamiltonian

$$H = -1 + z_1(x_1 - x_2) + z_2 u_1$$

şeklinde elde edilir.

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -z_1 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = z_1\end{aligned}$$

Hamilton denklemlerinden

$$\begin{aligned}z_1 &= Ae^{-t} \\ z_2 &= B - Ae^{-t}\end{aligned}$$

bulunur.

H supremum değerini $u_1 = \mathrm{sgn}(z_2)$ *iken alır. Eğer* $u_1 = +1$ *kontrolü ile başlanırsa ve sistem çözülürse,*

$$\begin{aligned}x_2 &= t \\ x_1 &= t + 1 + e^t(X - 1)\end{aligned}$$

bulunur. t_2 *anında kontrol* $u_1 = -1$ *ile değiştirilirse ve sistem tekrar çözülürse,*

$$\begin{aligned}x_2 &= 2t_2 - t \\ x_1 &= -t - 1 + 2t_2 + (2e^{-t_2} + X - 1)e^t\end{aligned}$$

elde edilir. $t_2 = (1/2)t_1$ *ve* $t = t_1$ *için* $x_1(t_1) = 0$ *olduğundan*

$$\begin{aligned}t_2 &= -2\ln\left(1 - X^{1/2}\right) \\ t_1 &= -\ln\left(1 - X^{1/2}\right)\end{aligned}$$

olarak bulunur.

4. PMP'nin Genelleştirilmesi

Bu kesimde otonom olmayan sistemler ve tam belirli olmayan hedef kümeler için PMP' nin genelleştirilmesi verilecektir. Ayrıca maliyet fonksiyonunun hedef kümeye de bağımlı olması durumu incelenecektir.

4.1 Genel Hedefler

Çoğunlukla sistemin hedef konumunun tam olarak bilinmesine gerek olmayabilir. Örneğin, konum değişkeninin bir bileşeninin belirli bir değere ulaşması istenirken diğer bileşenlerin hangi değerleri alacağı önemli olmayabilir.

Hedef, $\mathbb{R}^n$ nin $n-k$ boyutlu bir yüzeyi olarak tanımlansın. Bu yüzey k tane $n-1$ boyutlu yüzeyin kesişimi şeklinde yazılabilir. Bu k tane $n-1$ boyutlu yüzeyin denklemi

$$g_i(x) = 0, \ \ i = 1, 2, ..., k \tag{4.1.1}$$

şeklinde olsun.

Örneğin, $n = 3$ ve $k = 2$ ise bu 2–boyutlu, iki yüzeyi özel olarak düzlem gibi düşünebiliriz. Hedef bu iki düzlemin arakesit doğrusu üzerinde herhangi bir nokta olabilir.

Aşağıda bundan sonraki kesimlerde sıkça kullanılacak olan önemli bir koşulu verelim.

Transversality Koşulu: $z^1 = z(t_1)$ vektörü hedef kümeye diktir.

Buna göre, z^1 vektörü, $g_i(x) = 0, \ i = 1, 2, ..., k$ yüzeylerinin normallerinin lineer birleşimi şeklinde yazılabilir. O halde $c_i, \ i = 1, 2, ..., k$ sabit ve en az biri sıfırdan farklı olmak üzere,

$$z^1 = \sum_{i=1}^{k} c_i \ \mathrm{grad} g_i(x^1)$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek olarak $n = 3$ olsun.

- $k = 3$ ise,
  hedef, 3 tane 2–boyutlu yüzeyin kesişimi yani tek noktadır. Bu noktayı özel olarak $x^1 = 0$ seçebiliriz. Bu durumda z^1 keyfi olur.

- $k = 2$ ise,
  özel olarak $g_1(x) = x_1$, $g_2(x) = x_2$ alınırsa hedef x_3 ekseni olur. Bu durumda z^1, $x_3 = 0$ düzlemi üzerindedir. t_1 anında $x_1^1 = 0$, $x_2^1 = 0$, $z_3^1 = 0$ diyebiliriz.

- $k = 1$ ise,
  Hedef özel olarak 2–boyutlu $g_1(x) = x_1 + x_2$ düzlemi seçilebilir. Bu durumda $x_1^1 + x_2^1 = 0$ ve $z_3^1 = 0$ seçilebilir.

- $k = 0$ ise,
  hedef tüm R^3 olur. Bu durumda $z^1 = 0$ olur.

Aşağıda hedef kümenin tam belirli olmadığı duruma bir örnek verilmiştir.

Örnek 4.1.1. *Sistemin davranışı,*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u_1\end{aligned}$$

ve başlangıç-bitiş koşulları

$$x_1^0 = X \neq 0,\ x_2^0 = 0,$$

$$x_1^1 = 0,\ x_2^1 \ keyfi$$

olsun. Maliyet fonksiyonu

$$J = \int_0^{t_1} \frac{1}{2} u_1^2 dt$$

ile verilsin.

Transversality koşuluna göre z^1, hedef kümeye dik olacağından z_1^1 keyfi ve $z_2^1 = 0$ olmalıdır.

Eğer t_1 keyfi ise kontrol kullanılmadan hedefe ulaşılabilir ve maliyette sıfır olur. Gerçekten $u_1 = 0$ ise sistem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{aligned}$$

şeklindedir ve bu diferansiyel denklem sisteminin başlangıç koşullarıyla birlikte çözümü,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X \cos t \\ x_2(t) &= -X \sin t \end{aligned}$$

şeklindedir.

$$x_1(t_1) = 0 = X \cos t_1$$

ve $X \neq 0$ olduğundan,

$$\cos t_1 = 0$$

olur ve buradan

$$t_1 = \frac{1}{2}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}^+$$

elde edilir. Sistem kontrol kullanılmadan hedefe ilk olarak $t_1 = \frac{1}{2}\pi$ zaman sonra ulaşır.

Ancak $t_1 < \dfrac{1}{2}\pi$ sabitse bir u_1 kontrolünün kullanılması gerekir. Bu durumda Hamiltonian

$$H = -\frac{1}{2}u_1^2 + z_1 x_2 + z_2(-x_1 + u_1) \tag{4.1.2}$$

şeklindedir ve

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -z_1 \end{aligned}$$

olur. Bu denklemleri

$$\begin{aligned} Dz_2 + z_1 &= 0 \\ Dz_1 - z_2 &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazıp çözelim. Birinci denklemin türevi alınıp taraf tarafa çıkarılırsa,

$$D^2 z_2 + z_2 = 0$$

olur ve karakteristik denkleminin kökleri

$$\begin{aligned} m^2 + 1 &= 0 \\ m &= \pm i \\ z_2 &= c_1 \cos t + c_2 \sin t \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $z_1^1 = z_1(t_1) = 0$ *olduğundan;*

$$z_2(t_1) = c_1 \cos t_1 + c_2 \sin t_1 = 0$$

elde edilir ve buradan

$$c_1 = -\frac{c_2 \sin t_1}{\cos t_1}$$

bulunur. Ayrıca $0 < t_1 < \dfrac{1}{2}\pi$ *olduğundan* $\cos t_1 \neq 0$ *dır.* c_1 *yerine yazılır ve denklem* $\cos t_1$ *ile çarpılırsa*

$$z_2 = A \sin (t_1 - t)$$

bulunur. $\dot{z}_2 = -z_1$ *olduğundan*

$$z_1 = A \cos (t_1 - t)$$

olur.

(4.1.2) *denkleminde* $\frac{1}{2} z_2^2$ *eklenip çıkarılırsa* H *en büyük değerini*

$$u_1 = z_2 = A \sin (t_1 - t)$$

iken aldığı görülür. Sistem tekrar yazılırsa

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + A \sin (t_1 - t)$$

oiur. Bu denklemler

$$\begin{aligned} Dx_1 - x_2 &= 0 \\ Dx_2 + x_1 &= A\sin(t_1 - t) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Birinci denklemin türevi alınır taraf tarafa toplanırsa;

$$(D^2+1)x = A\sin(t_1 - t)$$

olur ve karakteristik denkleminin kökleri

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow \ m = \pm i \Rightarrow \ x_{1_c} = c_1\cos t + c_2\sin t$$

şeklinde bulunur ve UC fonksiyonu

$$U = \{\sin(t_1 - t), \cos(t_1 - t)\};$$

$$\tilde{U} = \{t\sin(t_1 - t), t\cos(t_1 - t)\}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} x_{1_p} &= mt\sin(t_1 - t) + nt\cos(t_1 - t) \\ \dot{x}_{1_p} &= m\sin(t_1 - t) - mt\cos(t_1 - t) + n\cos(t_1 - t) \\ &+ \ nt\sin(t_1 - t) \\ \ddot{x}_{1_p} &= -2m\cos(t_1 - t) - mt\sin(t_1 - t) + 2n\sin(t_1 - t) \\ &- \ nt\cos(t_1 - t) \\ \ddot{x}_{1_p} + x_{1_p} &= -2m\cos(t_1 - t) - mt\sin(t_1 - t) + 2n\sin(t_1 - t) \\ &- \ nt\cos(t_1 - t) + mt\sin(t_1 - t) + nt\cos(t_1 - t) \\ &= A\sin(t_1 - t) \end{aligned}$$

ve

$$-2m\cos(t_1 - t) + 2n\sin(t_1 - t) = A\sin(t_1 - t)$$

olduğundan

$$m = 0 \ \ ve \ n = A/2$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{1_p} + x_{1_c} \\ &= c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{A}{2} t \cos(t_1 - t) = x_1(t) \\ x_1(0) &= X = c_1 + \frac{1}{2} 0 \cos 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$c_1 = X, \;\; c_2 = B$$

elde edilir.

$$x_1(t) = X \cos t + B \sin t + \frac{A}{2} t \cos(t_1 - t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -x_1 + u_1 \\ &= -X \cos t - B \sin t - \frac{A}{2} \cos(t_1 - t) + A \sin(t_1 - t) \\ x_2(t) &= -X \sin t + B \cos t + A \cos(t_1 - t) + A \sin(t_1 - t) \\ & \quad + \frac{A}{2} t \sin(t_1 - t) - \frac{A}{2} \cos(t_1 - t) \end{aligned}$$

$x_2^0 = 0$ *ve* $x_1^1 = 0$ *koşulları ile*

$$\begin{aligned} B &= -\frac{A}{2} \cos t_1, \\ A &= -\frac{2X \cos t_1}{t_1 - \sin t_1 \cos t_1}, \\ J &= \frac{X^2 \cos^2 t_1}{t_1 - \sin t_1 \cos t_1} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$t_1 \to 0 \;\; \textit{için} \;\; J \to \infty$$

olur.

4.2 Maliyet Fonksiyonunun Hedef Konuma Bağımlılığı

Maliyet fonksiyonu, ek olarak konuma da bağlıysa maliyet fonksiyonu

$$J = F(x^1) + \int_0^{t_1} f_0(x,u)d\tau \tag{4.2.3}$$

şeklinde yazılabilir. Burada F skaler bir fonksiyondur.

Eğer hedef sabit ise yukarıdaki denklemin ilk parçası bilindiğinden çözüm açıktır. Ancak hedef bir önceki bölümdeki gibi tam belirli değil ise çözüm kolay olmayabilir. Bu durumda x_0 konum değişkeni

$$\dot{x}_0 = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} f_i,$$

$$x_0^0 = F(x^0),\ x_0^1 = J$$

şeklinde yazılır. Bu durumda Hamiltonian $H'(\hat{x}, \hat{\zeta}, u)$,

$$H' = \zeta_0 f_0 + \zeta_0 \sum_1^n \frac{\partial F}{\partial x_i} f_i + \sum_1^n \zeta_i f_i$$

olur. Burada

$$\dot{\zeta}_i = -\frac{\partial H'}{\partial x_i}$$

ve

$$\zeta^1 = \sum_1^k c_i \mathrm{grad} g_i(x^1)$$

şeklindedir. Bu yeni değişkenlerle

$$\begin{aligned} z_0 &= \zeta_0 = -1, \\ z_i &= \zeta_i + \zeta_0 \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, ..., n \end{aligned}$$

için Hamiltonian $H = \hat{z}^T \hat{f}$ standart formunda tekrar yazılırsa,

$$H(\hat{x}, \hat{z}, u) \equiv H'(\hat{x}, \hat{\zeta}, u)$$

için

$$\dot{z}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

ve

$$z^1 = -\mathrm{grad}F(x^1) + \sum_1^k c_i \mathrm{grad} g_i(x^1)$$

olur.

Maliyet fonksiyonunun konuma bağımlılığı ile ilgili örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.2.1. *Enfeksiyon kapmış bir hastanın ameliyatı için, eğer enfeksiyonun kaybolmasını bekleyip sonra ameliyat yapılırsa gecikilmiş olur; diğer taraftan ameliyat hemen yapılırsa enfeksiyon ciddi seviyelere ulaşabilir. Doktorun bu durumda yapması gereken ameliyat için optimal zamanı bulup bunların arasındaki dengeyi sağlamak olmalıdır.*

$x_1(t)$, *enfeksiyonun seviyesini göstersin ve* $x_1(0) = X > 0$ *olsun.*

$u_1(t)$, *enfeksiyonun seviyesini azaltan kontrol ve verilebilecek en yüksek doz* $u_1 = 1$ *olsun. (Burada* u_1 *kontrolünün sürekli olduğu kabul edilmektedir.)*

Sistemin davranışı,

$$\dot{x}_1 = -x_1 - u_1$$

ile verilsin ve maliyet fonksiyonu,

$$J = \frac{1}{2}(x_1^1)^2 + \int_0^{t_1} 2dt$$

olsun.

Belirli bir hedef yoktur.

Hamiltonian,

$$H = -2 + z_1(-x_1 - u_1)$$

olduğundan

$$\dot{z}_1 = z_1$$

bulunur.

Sistem bir boyutludur. Eğer $k = 1$ *ise hedef tek noktadan oluşur, fakat hedef belirli olmadığından dolayı* $k = 0$ *olmalıdır.*

Bu durumda

$$z_1^1 = -gradF(x^1) = -x_1^1$$

olur. Buradan

$$z_1 = Ae^t$$

elde edilir. H *en büyük değerini*

$$u_1 = -\mathrm{sgn}(z_1)$$

iken alır. t_1 *keyfi olduğundan optimal yörünge boyunca* $H = 0$ *olmalıdır.*

Özel olarak $t = 0$ *için* $-2 + A(-X - 1) = 0$ *olduğundan sistem çözülürse,*

$$x_1 = -1 + (X + 1)e^{-t}$$

bulunur. Ayrıca transversality koşulundan;

$$-\frac{2}{X+1}e^{t_1} = 1 - (X + 1)e^{t_1}$$

olur. Buradan

$$t_1 = \ln\left[\frac{X+1}{2}\right]$$

elde edilir ve maliyet ise

$$J = \frac{1}{2} + 2\ln\left[\frac{X+1}{2}\right]$$

olur.

Eğer $X > 1$ *ise doktor maksimum dozda ilaç vererek enfeksiyon seviyesini azaltmalı ve bu seviye 1 olduğu anda ameliyata başlamalıdır.*

Ancak $0 < X \leq 1$ *ise doktor* $t = 0$ *anında yani hemen ameliyata başlamalıdır.*

4.3 Otonom Olmayan Sistemler

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

sisteminin maliyet fonksiyonu,

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u)dt$$

şeklinde olsun. Otonom olmayan sistemlerde yeni bir x_{n+1} değişkeni tanımlansın öyle ki, $\dot{x}_{n+1} = 1$ ve $x_{n+1}^0 = t_0$ olsun.

Bu tanımlanan değişken sisteme eklenirse $\hat{x}$, $\hat{f}$ ve $\hat{z}$ $n+2$ boyutlu olur. Bu durumda

$$H = \hat{z}^T \hat{f} \ , \ \dot{z}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad i = 1, 2, ..., n+1$$

ve

$$\begin{aligned} z_0 &= -1 \ , \\ z_{n+1} &= -\int_{t_1}^{t} \sum_{0}^{n} z_k \frac{\partial f_k(\tau, x, u)}{\partial \tau} d\tau + z_{n+1}^1 \end{aligned}$$

olur. Hedef $(n+1)$-boyutludur. Burada x_i^1, $i = 1, 2, ..., n$ sabit ve $x_{n+1}^1 = t_1$ keyfi ya da sabit olabilir.

Bu durumda Hamiltonian,

$$H = \sum_{i=0}^{n} z_i f_i + z_{n+1} = \bar{H} + z_{n+1}$$

olur.

Eğer t_1 keyfi ise transversality koşuluna göre $z_{n+1}^1 = 0$ ve optimal yörünge boyunca $H = 0$ olacağından $\bar{H} = 0$ elde edilir.

Eğer t_1 sabit ise optimal yörünge boyunca H sabittir. Fakat z_{n+1}^1 değeri belirli değildir. Ancak yine de $H = 0$ alınabilir. Yani otonom olmayan sistemlerde her durumda optimal yörünge boyunca $H = 0$ alınabilir. Aşağıda bu duruma uygun örnekler verilmektedir.

Örnek 4.3.1. *Bir su deposuna yukarıdan $u_1(t)$ ile su dolduruluyor. Deponun alt tarafından ise $v(t)$ ile su boşaltılıyor. x_1 su seviyesini göstermek üzere sistem*

$$\dot{x}_1 = -v + u_1$$

ile verilsin ve

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0, \\ x_1(t_1) &= 1 \end{aligned}$$

başlangıç-bitiş koşulları sağlansın.

Maliyet birim zamanda akan su miktarının karesiyle orantılı

$$J = \int_0^{t_1} \frac{1}{2} u_1^2 dt$$

olsun.

$v = t$ *olsun.*

Problemi, $t_1 = 1$ belirli zaman problemi ve keyfi zaman problemi olarak iki farklı şekilde çözelim:

Yeni bir x_2 değişkeni tanımlansın öyle ki

$$\dot{x}_2 = 1 \text{ ve } x_2(0) = 0$$

olsun. Bu iki koşuldan

$$x_2 = t = v$$

yazılabilir.

Buna göre sistem tekrar yazılırsa,

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \frac{1}{2} u_1^2 dt, \\ \dot{x}_1 &= -x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= 1 \end{aligned}$$

ve

$$x_0^0 = 0, \; x_1^0 = 0, \; x_2^0 = 0,$$

$$x_0^1 = J,\ x_1^1 = 1,\ x_2^1 = t_1$$

olur.

Hamiltonian,

$$H = -\frac{1}{2}u_1^2 + z_1(-x_2 + u_1) + z_2$$

şeklindedir.

$$\dot{z}_1 = 0 \ ve\ \dot{z}_2 = z_1$$

koşullarından

$$z_1 = A \ ve\ z_2 = At + B,\ (A, B \ sabit)$$

elde edilir.

H en büyük değerini $u_1 = z_1 = A$ *iken alır.* u_1 *sistemde yerine yazılıp sistem çözülürse,*

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2}A^2 t, \\ x_1 &= -\frac{1}{2}t^2 + At, \\ x_2 &= t \end{aligned}$$

bulunur.

Buna göre Hamiltonian tekrar yazılırsa,

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2}A^2 + A(-t + A) + B + At \\ &= B + \frac{1}{2}A^2 \end{aligned}$$

olur. Optimal yörünge boyunca

$$H = B + \frac{1}{2}A^2 = 0$$

ve

$$x_1(t_1) = -\frac{1}{2}t_1^2 + At_1 = 1$$

olduğundan $t_1 = 1$ *için* $A = 3/2$ *ve* $J = 9/8 = 1,125$ *bulunur.*

Problem keyfi zaman problemi olarak çözülecek olursa;

t_1 *keyfi olduğundan* x_2^1 *keyfidir. Transversality koşuluna göre*

$$z_2^1 = At_1 + B = 0$$

yazılabilir. Buradan

$$t_1 = -\frac{B}{A}$$

elde edilir.

$$H = B + \frac{1}{2}A^2 = 0$$

olduğundan

$$A^2 = -2B$$

ve

$$\begin{aligned} 1 &= x_1(t_1) \\ &= -\tfrac{1}{2}t_1^2 + At_1 \\ &= -\tfrac{B^2}{2A^2} - B \end{aligned}$$

olur. O halde

$$B = -4/3$$

$$A = 2\sqrt{2}/\sqrt{3}$$

bulunur. Bu değerler yerine yazılırsa,

$$t_1 = \sqrt{2}/\sqrt{3}$$

$$J = 4\sqrt{2}/3\sqrt{3} \approx 1,089 < 1,125$$

bulunur.

Yani zaman keyfi ise daha kısa zamanda daha az maliyetle hedefe ulaşabiliriz.

Otonom olmayan sistemlerle ilgili bir başka örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.3.2. *Bir motorlu, duran bir polis arabasının yanından sabit hızla geçiyor. Polis arabasının amacı minimum maliyet ile motorla aynı hızla yan yana gitmek olsun. Bu sistem*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u_1 \\ \dot{x}_3 = 1 \end{cases}$$

ile verilsin.

Motorlunun hızını genelliği bozmaksızın 1 birim olarak kabul edelim. Bu durumda başlangıç-bitiş koşulları ise

$$x_0^0 = 0,\ x_1^0 = 0,\ x_2^0 = 0,$$

$$x_1^1 = t_1\ ,\ x_2^1 = 1\ ,\ x_3^1 = t_1$$

şeklinde yazılabilir. Maliyet fonksiyonu ise zaman ve yakıta bağlı olarak

$$J = \int_0^{t_1} \left(2 + \frac{1}{2}u_1^2\right) dt$$

ile verilsin. Polis motorla aynı hizaya geldiğinde motorun hızı 1 olduğundan alınan yol ile geçen zaman aynı olmalı ayrıca polisin hızı 1 olmalıdır. Bu durumda (4.1.1) *ile verilen* $g_i \quad (i = 1, 2)$ *fonksiyonu*

$$g_1(x) = x_1 - x_3$$

$$g_2(x) = x_2 - 1$$

şeklinde olur. Transversality koşulundan

$$\begin{aligned} z^1 &= \sum_{i=1}^{2} c_i \mathrm{grad} g_i(x^1) \\ &= c_1(1, 0, -1) + c_2(0, 1, 0) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$z_1^1 = c_1\ ,\ z_2^1 = c_2\ ,\ z_3^1 = -c_1$$

elde edilir.

Buradan

$$H = -\left(2 + \frac{1}{2}u_1^2\right) + z_1x_2 + z_2u_1 + z_3$$

olur. H *en büyük değerini* $u_1 = z_2$ *için alır. Böylece*

$$\dot{z}_1 = 0\ ,\ \dot{z}_2 = -z_1\ ,\ \dot{z}_3 = 0$$

elde edilir.

Bu denklemler çözülürse A *ve* B *sabit olmak üzere,*

$$z_1 = A\ ,\ z_2 = B - At\ ,\ z_3 = -A$$

elde edilir. Buradan,

$$\dot{x}_2 = B - At \Rightarrow\ x_2 = Bt - \frac{1}{2}At^2$$

$$\dot{x}_1 = Bt - \frac{1}{2}At^2 \Rightarrow\ x_1 = \frac{B}{2}t^2 - \frac{1}{6}At^3$$

olur ve

$$Bt_1 - \frac{1}{2}At_1^2 = 1 \tag{4.3.4}$$

$$\frac{B}{2}t_1^2 - \frac{1}{6}At_1^3 = t_1 \tag{4.3.5}$$

elde edilir.

Optimal yörünge boyunca $H = 0$ *olduğundan özel olarak* $t = 0$ *için*

$$-2 + \frac{1}{2}B^2 - A = 0 \tag{4.3.6}$$

olur.

Denklem (4.3.4) *ve* (4.3.5) *ifadelerinde* A *yok edilirse*

$$Bt_1 = 4 \tag{4.3.7}$$

bulunur. Bu sonuç (4.3.4) *de yerine yazılırsa*

$$B^2 = \frac{8A}{3}$$

elde edilir ve bu eşitlik (4.3.6) *denklemi ile birlikte çözülürse* $A = 6$, $B = 4$ *ve* $t_1 = 1$ *bulunur.*

Optimal kontrol

$$u_1 = B - At = 4 - 6t$$

olur ve

$$\dot{x}_2 = u_1 = 4 - 6t \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4t - 3t^2$$
$$\dot{x}_1 = x_2 = 4t - 3t^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2t^2 - t^3$$

bulunur. Optimal maliyet ise

$$J = \int_0^1 \left(2 + \frac{1}{2}(4 - 6t)^2 \right) dt = 4$$

olur. Takip $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ *iken biter. Eğer* $t > 1$ *ise kontrol kapatılır. Yani sabit hızla iki araç yanyana gider.*

5. PMP'nin KANITI

Kanıt yapılırken hedef nokta sabitlenmiş, kontrol parçalı sürekli ve sistem ise otonom sistem olarak kabul edilecektir.

5.1 Perturbasyon Konisi

Bu kesimde küçük bir zaman aralığında kontrolün değiştirilmesi ile çözümün nasıl değiştiği incelenecektir.

$[0, t_1]$ zaman aralığında bir τ zamanı seçilsin. $\varepsilon > 0$ için $(\tau - \varepsilon, \tau)$ aralığında u optimal kontrolü bir başka v kontrolü ile değiştirilsin. Bu durumda $\tau - \varepsilon$ anında aynı noktadan çıkan iki farklı yörünge elde edilir. Bakınız Şekil 5.1.

$$\hat{x}(\tau) = \hat{x}(\tau - \varepsilon) + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \hat{f}(x, u)dt$$

ve

$$\hat{y}(\tau) = \hat{x}(\tau - \varepsilon) + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \hat{f}(x, v)dt$$

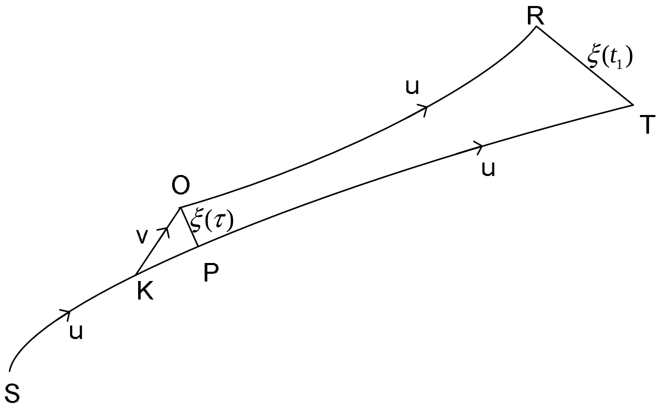
olsun. Burada u ile üretilen çözüm $\hat{x}$, v ile üretilen çözüm ise $\hat{y}$ ile gösterilmiştir. Bu iki yörünge arasındaki fark $\hat{\xi}$ ile gösterilirse,

$$\hat{\xi}(\tau) = \varepsilon[\hat{f}(x, v) - \hat{f}(x, u)] \tag{5.1.1}$$

elde edilir. ε pozitif sayısı yeterince küçük tutularak u optimal kontrol fonksiyonunun $(\tau - \varepsilon, \tau)$ aralığında sürekli olması sağlanabilir. Bu nedenle u nun bu aralıkta sürekli olduğu kabul edilecektir.

Diğer adımda τ dan t_1 e kadar her iki yörüngede de tekrar u optimal konrolü kullanılsın. $\hat{f}$ nin bileşenleri sürekli türevlenebilir olduğundan bu iki yörünge arasındaki fark küçük kalacaktır ve

$$\hat{\xi}(t) = \hat{y}(t) - \hat{x}(t)$$



Şekil 5.1: Optimal ve perturbasyon yörüngeler: $SKPT$ optimal yörünge, $SKOR$ ise perturbasyon yörüngesidir

ifadesinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\xi}} &= \hat{f}(x,v)-\hat{f}(x,u)\\ &= \frac{\hat{f}(x,v)-\hat{f}(x,u)}{\hat{y}(\tau)-\hat{x}(\tau)}\left(\hat{y}(\tau)-\hat{x}(\tau)\right)\\ &= \frac{\partial\hat{f}(x,u)}{\partial\hat{x}}\hat{\xi}\\ &= A\hat{\xi}\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

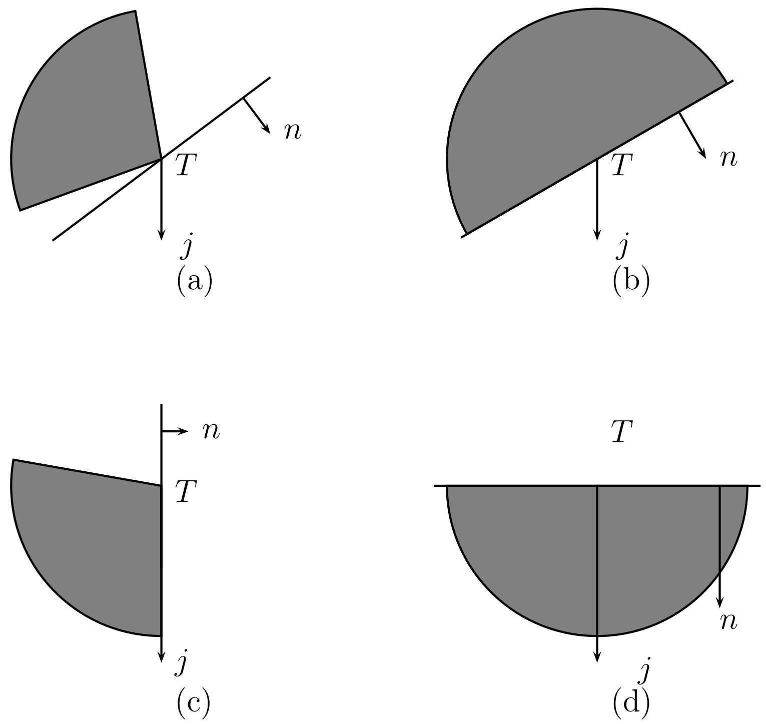
denklemi elde edilir. Burada

$$A = A_{ij} = \frac{\partial\hat{f}_i(x,u)}{\partial\hat{x}_j}$$

Jacobian matrisidir. $\hat{\xi}(t_1)$ değeri (5.1.1) başlangıç koşuluyla birlikte $\dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi}$ denklemi çözülerek bulunabilir.

Denklem (5.1.2) lineer olduğundan v ler değiştirilirse $\hat{\xi}(t_1)$ değerleri tepe noktası $\hat{x}^1$ olan bir koni oluşturur. Bu koniye perturbasyon konisi denir. İki perturbasyon vektörünün toplamı yine bir perturbasyon vektörü olacağından bu koni konveks olur.

$\hat{j}$, x_0 ekseninin negatif yönündeki birim vektör olsun. $\hat{j}$ vektörüne göre bu perturbasyon konisinin aşağıda gösterilen çeşitli konumları söz konusu olabilir.



Şekil 5.2: j vektörüne göre perturbasyon konilerinin durumları

1. Durum: Koni ve $\hat{j}$ vektörü, koninin tepe noktasından geçen hiperdüzlemin farklı tarafında kalır. Hiperdüzlemin normal vektörünün x_0 bileşeni negatiftir. Buradan $\hat{n}$ hiperdüzlemin normal vektörünü göstermek üzere $\hat{n}\hat{j} > 0$ yazılabilir. Bakınız şekil 5.2 (a),(b)

2. Durum: $\hat{j}$ koninin üreteci olabilir. Bu durumda hiperdüzlemin normal vektörünün x_0 bileşeni sıfırdır. ($\hat{j}$ koniye dahil olabilirde olmayabilirde.) Buradan $\hat{n}\hat{j} = 0$ dir. Bakınız şekil 5.2 (c).

3. Durum: $\hat{j}$ koninin içinde olabilir. Bu ise $\hat{j}$ vektörü x_0 ekseninin negatif yönünde olduğundan daha az maliyetle hedefe ulaşılması anlamına gelir. Bu ise u nun optimal kontrol olması ile çelişir. Bu nedenle bu durum göz ardı edilecektir. Bakınız şekil 5.2 (d).

I. Durum:

H nin tanımından

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}_i &= -\frac{\partial H}{\partial \hat{x}_i} \\
&= -\left(\frac{z_0 \partial f_0}{\partial x_i} + \frac{z_1 \partial f_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{z_n \partial f_n}{\partial x_i}\right) \\
&= -\sum_{j=0}^{n} \frac{z_j \partial f_j}{\partial x_i} \\
\dot{\hat{z}} &= -A^T \hat{z}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise $\dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi}$ sisteminin adjointi olur. Bu adjoint sistemin başlangıç koşulunu $(z(t_1))$ Transversality koşulu da göz önüne alınarak hiperdüzlemin normal vektörüne paralel olacak şekilde seçilebilir.

$$
\hat{z}^1 = (z_0^1, z^1), \quad \hat{j} = (-1, \mathbf{0})
$$

ve $\hat{z}^1\hat{j} > 0$ olduğundan $z_0^1 < 0$ elde edilir. Genelliği bozmadan $z_0^1 = -1$ alınabilir. Adjoint sistemin özelliklerinden $z_0 = -1$ dir. O halde Teorem $3.2.1 - (i)$ koşulu sağlanır.

Konideki her bir $\hat{\xi}(t_1)$ vektörü için $\hat{n}\hat{\xi}(t_1) \leq 0$ olduğundan

$$
\hat{z}\hat{\xi}(t_1) \leq 0
$$

yazılabilir. $\hat{z}$ ve $\hat{\xi}$ sistemleri adjoint olduğundan $\tau \leq t \leq t_1$ için

$$
\hat{z}\hat{\xi}(t) \leq 0
$$

yazılabilir. $\hat{\xi}(\tau)$ için (5.1.1) değeri yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
\hat{z}\hat{\xi}(\tau) &\leq 0 \\
\hat{z}\varepsilon[\hat{f}(x,v) - \hat{f}(x,u)] &\leq 0 \\
\hat{z}\hat{f}(x,v) &\leq \hat{z}\hat{f}(x,u) \\
H(\hat{x},\hat{z},v) &\leq H(\hat{x},\hat{z},u) \qquad (5.1.3)
\end{aligned}
$$

bulunur. Yukarıdaki (5.1.3) eşitsizliği ile Teorem 3.2.1-(ii) koşulu (Maksimum Prensibi) gösterilmiş olur.

t_1 keyfi olsun (sonlu, pozitif). Terminal zaman t_1 , $t_1 + \delta$ ile değiştirilsin (δ pozitif yada negatif olabilir). Kontrol değiştirilmeyeceğinden dolayı yörünge optimal yörünge boyunca devam edecektir. Fakat bitiş noktası $x(t_1)$ den önce yada sonra olabilir. Bu değişikliği $\xi(t_1)$ ile gösterirsek,

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}(t_1) &= \hat{x}(t_1 + \delta) - \hat{x}(t_1) \\
&= \frac{\hat{x}(t_1 + \delta) - \hat{x}(t_1)}{\delta}\delta \\
&= \dot{\hat{x}}(t_1)\delta \\
&= \delta \hat{f}(x^1, u^1)
\end{aligned}$$

Zaman üzerinden yapılan bu perturbasyon vektörleri ile kontrol üzerinden yapılan perturbasyon vektörleri toplanırsa hiperdüzlem $\hat{f}(x^1, u^1)$ vektörünü içerecektir (bakınız şekil 5.3). $\hat{z}^1$ ile n vektörleri paralel olduğundan,

$$H(\hat{x}^1, \hat{z}^1, u^1) = (\hat{z}^1)^T \hat{f}(x^1, u^1) = 0 \tag{5.1.4}$$

yazılabilir. Yani t_1 anında H sıfırdır.

u için bir kısıtlama yoksa ve u sürekli ise Maksimum prensibinden $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$ yazılabilir. Buradan

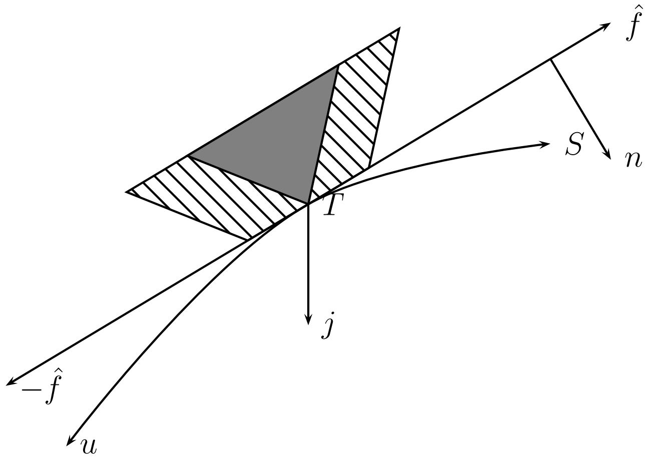
$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial H}{\partial \hat{x}}\dot{\hat{x}} + \frac{\partial H}{\partial \hat{z}}\dot{\hat{z}} \\
&= \frac{\partial H}{\partial \hat{x}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial H}{\partial \hat{z}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \hat{x}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde H optimal yörünge boyunca sabittir. H t_1 anında sıfır olduğundan bu sabit sıfırdır.

Ancak u kontrolü her zaman sürekli olmayabilir. Bu sonucu genelleştirmek için

$$p(t, t') = H(\hat{x}(t), \hat{z}(t), u(t'))$$

fonksiyonu tanımlansın. Burada $p(t,t)$ H nin t anındaki değeridir. O halde $p(t,t) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.



Şekil 5.3: Zaman üzerinden yapılan perturbasyonlarla birlikte tüm perturbasyon vektörleri

Maksimum prensibinden,

$$p(t,t) \geq p(t,t') \tag{5.1.5}$$

ve

$$p(t',t') \geq p(t',t) \tag{5.1.6}$$

yazılabilir. Ayrıca H, $\hat{x}$ ve $\hat{z}$ ye göre türevlenebilir olduğundan

$$|p(t',t) - p(t,t)| < \delta \tag{5.1.7}$$

ve

$$|p(t,t') - p(t',t')| < \delta' \tag{5.1.8}$$

olur. Burada δ ve δ' pozitif ve $t' - t \to 0$ iken $\delta \to 0$ ve $\delta' \to 0$ dır. Yukarıdaki (5.1.7) ve (5.1.8) eşitsizliklerinden

$$-\delta' < p(t,t') - p(t',t') < p(t,t) - p(t',t') < p(t,t) - p(t',t) < \delta$$

$$-\delta' < p(t,t) - p(t',t') < \delta$$

elde edilir. Bu ise u nun sürekli olmamasına karşın $p(t,t)$ nin t ye göre sürekli bir fonksiyon olduğunu gösterir.

u nun sürekli olduğu bir t' anında $\frac{d}{dt}p(t',t') = 0$ olduğu gösterilirse H nin optimal yörünge boyunca sabit olduğu ve bu sabitin (5.1.4) gereğince sıfır olduğu gösterilmiş olur.

u parçalı sürekli olduğundan t' ni içine alan bir aralık vardır öyle ki u bu aralıkta süreklidir. t bu aralıkta olsun. Yukarıdaki (5.1.5) ve (5.1.6) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} p(t,t) - p(t',t') &\leq p(t,t) - p(t',t) \\ p(t,t) - p(t',t') &\geq p(t,t') - p(t',t') \end{aligned}$$

yazılabilir. $t > t'$ için

$$\begin{aligned} \frac{p(t,t) - p(t',t')}{t - t'} &\leq \frac{H(\hat{x},\hat{z},u) - H(\hat{x},\hat{z}',u)}{t - t'} \\ &+ \frac{H(\hat{x},\hat{z}',u) - H(\hat{x}',\hat{z}',u)}{t - t'} \qquad (5.1.9) \\ \frac{p(t,t) - p(t',t')}{t - t'} &\geq \frac{H(\hat{x},\hat{z},u') - H(\hat{x},\hat{z}',u')}{t - t'} \\ &+ \frac{H(\hat{x},\hat{z}',u') - H(\hat{x}',\hat{z}',u')}{t - t'} \qquad (5.1.10) \end{aligned}$$

elde edilir. $t \to t'$ için H, $\hat{x}$ ve $\hat{z}$ ye göre türevlenebilir ve

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{x}}\dot{\hat{x}} + \frac{\partial H}{\partial \hat{z}}\dot{\hat{z}} = \frac{\partial H}{\partial \hat{x}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial H}{\partial \hat{z}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \hat{x}} = 0$$

olduğundan (5.1.9) ve (5.1.10) eşitsizliklerinin sağ tarafı sıfıra yakınsar. O halde

$$\lim_{t \to t'} \frac{p(t,t) - p(t',t')}{t - t'} = \dot{p}(t',t') = 0$$

bulunur. Benzer eşitsizlikler $t < t'$ olduğu zamanda bulunabilir.

t_1 in sabit olması durumunda ise zaman üzerinden perturbasyon yapılamayacağından dolayı bu sabit sıfır olmayabilir. Yani t_1 sabit ise H sabittir.

II. ve III. Durum:

$\hat{j}$ vektörü perturbasyon konisinin üreteci olabilir. Bu durumda $\hat{j}$ vektörü hiperdüzlemin üzerindedir. Buradan

$$\begin{aligned}\hat{z}^1\hat{j} &= 0\\ (z_0^1, z^1)(-1, \mathbf{0}) &= 0\\ z_0^1 &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise maliyet fonksiyonunun Hamiltoniana etki etmediğini gösterir. Bu durumda maliyetine bakmaksızın H yi maksimum yapan herhangi bir kontrol optimal kontrol olabilir. Bu ise optimal kontrol problemlerinin amacı dışına çıkması anlamına gelir. Zaten uygulamada da böyle bir durum yoktur.

Eğer j vektörü perturbasyon konisinin içinde ise bu daha az maliyetle hedefe ulaşılabilir anlamındadır. Bu ise u nun optimal kontrol olması ile çelişir.

Sonuç olarak II. ve III. durumlar göz ardı edilecektir.

Aşağıda kanıtın yapılış yöntemine bir örnek verilmiştir.

Örnek 5.1.1. *Kontrol sistemin davranışı*

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= f_0(x_1, u_1) = \frac{1}{2}u_1^2\\ \dot{x}_1 &= f_1(x_1, u_1) = x_1 + u_1\end{aligned}$$

ile verilsin. Başlangıç ve hedef koşullar

$$x_1(0) = 0,\ x_1(1) = 1$$

olsun. Hamiltonian

$$H = -\frac{1}{2}u_1^2 + z_1(x_1 + u_1)$$

olur ve $\dot{z}_1 = -z_1$ dir. H en büyük değerini $u_1 = z_1 = Ae^t$ iken alır. Buna göre sistemde u_1 yerine Ae^t yazıp sistem başlangıç değerleri ile birlikte çözülürse,

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{\sinh t}{\sinh 1}\\ x_0 &= \frac{1 - e^{-2t}}{4\sinh^2 1}\\ z_1 &= u_1 = \frac{1}{e^2 - 1}\end{aligned}$$

bulunur. Perturbasyon konisini elde etmek için $(0,1)$ *aralığında bir* τ *zamanı seçilsin ve küçük bir* ε *için* $(\tau-\varepsilon,\tau)$ *aralığında* u_1 *kontrolü yerine* v *kontrolü kullanılsın. İki yörünge arasındaki fark* $\xi(t)$ *ile gösterilsin. Özel olarak* $\xi(\tau)$ *anındaki fark yazılırsa,*

$$\begin{aligned}\xi_0(\tau) &= \varepsilon[f_0(x_1,v)-f_0(x_1,u_1)]\\ &= \frac{1}{2}\varepsilon\left(v^2-\frac{e^{-2\tau}}{\sinh^2 1}\right)\\ \xi_1(\tau) &= \varepsilon[f_1(x_1,v)-f_1(x_1,u_1)]\\ &= \varepsilon\left(v-\frac{e^{-\tau}}{\sinh 1}\right)\end{aligned}$$

yörüngeleri elde edilir. $(\tau,1)$ *aralığında her iki yörüngede de* u *kontrolü kullanılsın.*

$$A = A_{ij} = \frac{\partial \hat{f}_i(x,u)}{\partial \hat{x}_j}$$

olmak üzere

$$\dot{\xi} = A\xi$$

lineer denkleminden,

$$\dot{\xi}_0 = 0,$$

$$\dot{\xi}_1 = \xi_1$$

elde edilir. Bu denklemler çözülürse,

$$\xi_0 = A,$$

$$\xi_1 = Be^t$$

bulunur. $t=1$ *için*

$$\begin{aligned}\xi_0^1 &= \frac{1}{2}\varepsilon\left(v^2-\frac{e^{-2\tau}}{\sinh^2 1}\right)\\ \xi_1^1 &= \varepsilon\left(v-\frac{e^{-\tau}}{\sinh 1}\right)e^{1-\tau}\end{aligned}$$

olur. $z(1)=(-1,\dfrac{e^{-1}}{\sinh 1})$ *vektörü hiperdüzlemin normaline paralel olarak seçildiğinden,* $z(1)$ *vektörüne dik ve* $(x_0^1,x_1^1)=(\dfrac{1}{e^2-1},1)$ *noktasından geçen doğrunun denklemi*

$$z_0(x_0-x_0^1)+z_1(x_1-x_1^1)=0$$

ile çözülürse

$$x_0 - \frac{e^{-1}}{\sinh 1} x_1 = \frac{1}{e^2 - 1} - \frac{e^{-1}}{\sinh 1}$$

elde edilir. Hiperdüzlem koni ile j vektörünü ayırdığından perturbasyon vektörleri hiperdüzlemin üst tarafında kalacaktır. Adjoint sistemden

$$\dot{z}_0 = 0 \text{ ve } \dot{z}_1 = -z_1$$

yazılırsa $z_0^1 = -1, z_1^1 = \dfrac{e^{-1}}{\sinh 1}$ *koşulları ile*

$$z_0(\tau) = -1 \text{ ve } z_1(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{\sinh 1}$$

elde edilir. $t = 1$ anında perturbasyon vektörleri ile z vektörü hiperdüzlemin ayrı taraflarında olduğundan

$$z_0^1 \xi_0^1 + z_1^1 \xi_1^1 \leq 0$$

yazılabilir. Adjoint sistemlerin özelliğinden her t için bu eşitsizlik sağlanır. $t = \tau$ için eşitsizlik tekrar yazılırsa

$$z_0(\tau)[f_0(x_1, v) - f_0(x_1, u_1)] + z_1(\tau)[f_1(x_1, v) - f_1(x_1, u_1)] \leq 0$$

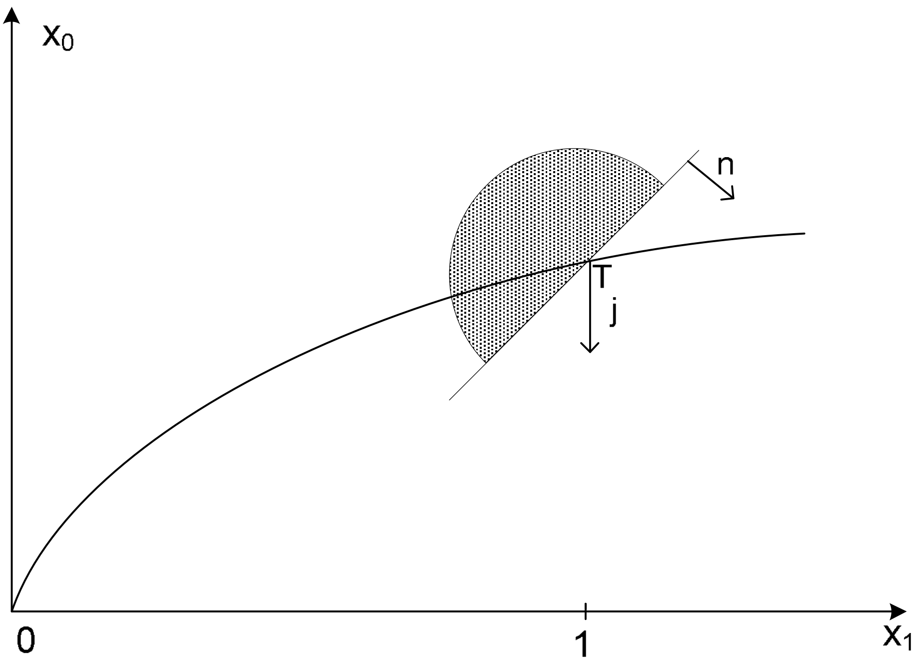
elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} z_0 f_0(x_1, v) - z_1 f_1(x_1, v) &\leq z_0 f_0(x_1, u_1) + z_1 f_1(x_1, u_1) \\ H(x_1, z_0, z_1, v) &\leq H(x_1, z_0, z_1, u_1) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise maksimum prensibini doğrular. Ayrıca

$$\begin{aligned} H(x_1, z_0, z_1, u_1) &= z_0 \dot{x}_0 + z_1 \dot{x}_1 \\ &= \frac{-1}{e^2 - 1} + \frac{e^{-t}}{\sinh 1} \left(\frac{\sinh t}{\sinh 1} + \frac{1}{e^2 - 1} \right) \\ &= \frac{-1}{e^2 - 1} + \frac{2e^{-t}}{e - e^{-1}} \left(\frac{e^t - e^{-t}}{e - e^{-1}} + \frac{1}{e^2 - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2 \sinh^2 1} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Hamiltonianın sabit olduğu görülmüş olur.



Şekil 5.4: Örnek 5.4 için perturbasyon konisi

6. SONUÇ

Bu tezde, kontrol sistemler teorinin en önemli sonuçlarından biri olan Pontryagin Maksimum Prensibi ifade edilip kanıtlanmıştır. Pontryagin Maksimum Prensibi optimal kontrolün varlığı için gerek koşul olmasına rağmen, teoremin kontroller üzerinde eleyici özelliği nedeniyle optimal kontrolü bulmada yardımcı olabilir.

Çalışmada verilen örnekler Pontryagin Maksimum Prensibinin ekonomi, mühendislik, tıp ve daha bir çok alanda kullanılabildiğini gösterir.

Pontryagin Maksimum Prensibi otonom olmayan sistemler, tam belirli olmayan hedef kümeler ve maliyet fonksiyonunun hedef konuma bağımlı olduğu durumlara da genelleştirilip, çeşitli uygulamaları verilmiştir.

Kaynaklar

[1] Naidu, D.S., *Optimal Control Systems*, CRC Press, Florida, USA, 2002.

[2] Aydın, M., Gündüz, G. ve Kuryel, B., *Diferansiyel denklemler ve uygulamaları*, E.Ü. Mühendislik Fakültesi Ders Kitapları yayınları ; **14**, İzmir, 2003.

[3] Rockafellar, R.T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, USA, 1970.

[4] Macki, J. ve Strauss, A., *Introduction to Optimal Control Theory*, Springer Verlag, New York, USA, 1982.

[5] Pontrayagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, V.R. ve Mishchenko, E.F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience Publishers, New York, USA, 1962.

[6] Hocking, L.M., *Optimal Control, An Introduction to the Theory with Applications*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1991.