KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SELEKTÖRLERİ, PARAMETRELENDİRİLMESİ VE UYGULAMALARI

Serpil ALTAY
Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Temmuz – 2006

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Serpil Altay'ın **"Küme Değerli Dönüşümlerin Selektörleri, Parametrelendirilmesi ve Uygulamaları"** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Doktora Tezi 15.06.2006 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	**Doç. Dr. HALUK HÜSEYİN**	....
Üye (II. Tez Danışmanı)	:	**Doç. Dr. VAKIF CAFER**	....
Üye	:	**Prof. Dr. ORHAN ÖZER**	....
Üye	:	**Prof. Dr. MEHMET ÜREYEN**	....
Üye	:	**Yrd. Doç. Dr. SELÇUK CANBEK**	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SELEKTÖRLERİ, PARAMETRELENDİRİLMESİ VE UYGULAMALARI

Serpil ALTAY

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışmanlar: **Doç. Dr. Haluk HÜSEYİN**
Doç. Dr. Vakıf CAFER

2006, 104 sayfa

Tezde küme değerli analizin bazı problemleri araştırılmaktadır. Konveks değerli olmayan sürekli küme değerli dönüşümlerin sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörlerinin varlığı incelenmiş ve iki veya daha fazla boyutlu uzayda tanımlı kompakt değerli sürekli küme değerli dönüşümün keyfi yeterli küçük $\varepsilon > 0$ için sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörünün olmayacağı örneklenmiştir. Verilen kapalı konveks değerli alttan yarı sürekli iki küme değerli dönüşümün toplamının sürekli selektörünün, keyfi $\varepsilon > 0$ için verilen küme değerli dönüşümlerin sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörlerinin toplamı biçiminde gösterilebilirliği kanıtlanmıştır. $\mathbb{R}^n$'in kompakt konveks alt kümeleri uzayı genişletilerek cebirsel yapı tanımlanmış ve değerleri genişletilmiş uzayda olan sürekli selektörial dönüşümlerin özellikleri incelenmiştir. Küme değerli dönüşümlerin parametrelendirilmesi uygulanarak ve diferansiyel oyunlar teorisinin yöntemleri kullanılarak davranışı diferansiyel içerme ile verilen konfliktli kontrol sistemler için yaklaşım probleminin çözümü incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Küme Değerli Dönüşüm, Selektör, Parametrelendirme, Diferansiyel İçerme, Yaklaşım Problemi

ABSTRACT

PhD Thesis

SELECTORS AND PARAMETRIZATION OF THE SET-VALUED MAPS AND APPLICATIONS

Serpil ALTAY

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisors: **Assoc. Prof. Dr. Haluk HÜSEYİN**
Assoc. Prof. Dr. Vakıf CAFER
2006, 104 pages

In this thesis, some problems of set-valued analysis are considered. The existence of continuous pointwise ε- approximate selectors of nonconvex valued and continuous set-valued maps is studied and an example is given, illustrating that if the compact valued continuous set-valued map is defined on the space the dimension of which is greater than one, then such a set-valued map need not have, in general, any continuous pointwise ε-approximate selector for every sufficently small $\varepsilon > 0$. It is proved that every continuous selector of the sum of two lower semicontinuous and convex closed valued maps can be represented as a sum of two continuous pointwise ε-approximate selectors of the given set-valued maps. Enlarging the space of compact convex subsets of $\mathbb{R}^n$, the algebraic stucture is defined and the properties of the continuous selectorial maps with values in enlarged space, is investigated. Applying the parametrization of the set-valued maps and using the methods of the differential game theory, a solution of an approach problem for conflict control system, described by differential inclusion is studied.

Keywords: Set-Valued Map, Selector, Parametrization, Differential Inclusions, Approach Problem

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Doç. Dr. Haluk HÜSEYİN ve Doç Dr. Vakıf CAFER'e, vakit ayırıp beni dinledikleri için sayın hocalarım Prof. Dr. Orhan ÖZER ve Prof. Dr. Mehmet ÜREYEN'e, her zaman beni destekleyen eşim Hüseyin ALTAY'a ve özverilerinden dolayı ailemin diğer üyelerine en içten teşekkürlerimi sunarım.

Serpil ALTAY

Temmuz 2006

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i

ABSTRACT ii

TEŞEKKÜR iii

İÇİNDEKİLER iv

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ vii

1. GİRİŞ 1

2. ÖN BİLGİLER 8

2.1. Temel Tanım ve Teoremler 8

2.2. Küme Değerli Dönüşümler. Küme Değerli Dönüşümlerin Sürekliliği 13

2.3. Küme Değerli Dönüşümlerin Selektörleri. Sürekli ve Sürekli Yaklaşık Selektörler 17

2.4. Marjinal Fonksiyonlar, Özellikleri ve Uygulamaları 19

2.5. Konveks Kümelerin ve Fonksiyonların Bazı Özellikleri 23

3. KONVEKS DEĞERLİ OLMAYAN SÜREKLİ KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SÜREKLİ SELEKTÖRLERİ VE SÜREKLİ YAKLAŞIK SELEKTÖRLERİ 27

3.1. Sürekli $F(\cdot):\mathbb{R}^n \to comp(\mathbb{R})$ Küme Değerli Dönüşümünün Sürekli Selektörü 27

3.2. Sürekli $F(\cdot):[t_0,\theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ Küme Değerli Dönüşümünün Sürekli Noktasal ε-Yaklaşık Selektörünün Varlığı 28

3.3. Lipschitz Sürekli $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$
Küme Değerli Dönüşümünün Lipschitz Sürekli
Selektörünün Varlığı 31
3.4. Sürekli Noktasal ε-Yaklaşık Selektörün
Olmadığı Durum 36

4. SÜREKLİ SELEKTÖRLERİN YAKLAŞIK SÜREKLİ SELEKTÖRLERE PARÇALANIŞI 44
4.1. Skaler Değişkenli Küme Değerli Dönüşümlerin
Afin İnterpolasyonu 44
4.2. Skaler Değişkenli Sürekli Küme Değerli
Dönüşümlerin Toplamının Sürekli Selektörünün
Sürekli Noktasal Yaklaşık Selektörlere Parçalanışı 48
4.3. Kompakt Küme Üzerinde Tanımlı Alttan Yarı
Sürekli Küme Değerli Dönüşümlerin Toplamının
Sürekli Selektörünün Sürekli Noktasal Yaklaşık
Selektörlere Parçalanışı 55

5. Conv($\mathbb{R}^n$) UZAYININ GENİŞLETİLMESİ 64
5.1. $(Conv(\mathbb{R}^n))^2$ Uzayı 64
5.2. $F(\cdot) : A \to B(conv(\mathbb{R}^n))$ Dönüşümleri ve Selektörial Dönüşümler.
Selektörial Dönüşümlerin Sürekliliği 68

6. KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN PARAMETRELENDİRİLMESİ VE UYGULAMALARI. 77
6.1. Sürekli/Yerel Lipschitz Sürekli $(t, x, u, v) \to F(t, x, u, v)$ Küme
Değerli Dönüşümünün Sürekli/Yerel
Lipschitz Sürekli Parametrelendirilmesi 77
6.2. Davranışı Diferansiyel İçerme İle Verilen Belirsiz
Dinamik Sistemler İçin Yaklaşım Problemi 87

7. SONUÇLAR **97**

KAYNAKLAR **99**

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	:	n-boyutlu Öklid uzayı
$\parallel x \parallel$	:	x vektörünün Öklid normu
$\langle x, y\rangle$	:	x ve y vektörlerinin iç çarpımları
$2^{\mathbb{R}^n}$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının boş kümeden farklı alt kümeleri uzayı
$comp(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının boş kümeden farklı kompakt alt kümeleri uzayı
$conv(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının boş kümeden farklı konveks kompakt alt kümeleri uzayı
$cl(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri uzayı
$cc(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının boş kümeden farklı kapalı konveks alt kümeleri uzayı
coA	:	A kümesinin konveks zarfı
B_n	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının açık birim yuvarı
$\overline{B}_n$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının kapalı birim yuvarı
$B_n(x_0, r)$	:	x_0 noktasının açık r komşuluğu
$\overline{B}_n(x_0, r)$	:	x_0 noktasının kapalı r komşuluğu
$d(x, A)$	:	x noktasının A kümesine uzaklığı
$B(A, r)$	:	A kümesinin açık r komşuluğu
$\overline{B}(A, r)$	:	A kümesinin kapalı r komşuluğu
$h(A, E)$	:	A ve E kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı
$grF(\cdot)$	:	$F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün grafiği
$(Pr)_E f$	:	$f \in \mathbb{R}^n$ noktasının $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesine izdüşümü
$\partial f(\cdot)$	:	$f(\cdot)$ fonksiyonunun subdiferansiyeli
$s_m(K)$	:	$K \subset conv(\mathbb{R}^m)$ kümesinin Steiner noktası
U_{pos}	:	Pozisyonlu stratejiler kümesi
$X(t_*, x_*, U_*, \Delta)$	:	(t_*, x_*) başlangıç pozisyonundan U_* pozisyonlu stratejisinin, $[t_*, \theta]$ aralığının Δ bölüntüsüne karşılık ürettiği adımlı yörüngeler kümesi
$X(t_*, x_*, U_*)$	:	(t_*, x_*) başlangıç pozisyonundan U_* pozisyonlu stratejisinin ürettiği yörüngeler kümesi

1 GİRİŞ

Tez Konusunun Güncelliği. Küme değerli analiz, günümüzde matematiğin gelişmiş çağdaş dallarından biri olmakla beraber, matematiğin birçok alanında uygulanabilmektedir. Küme değerli analizin geniş kapsamda uygulandığı alanlar olarak, kontrol sistemler teorisi, oyunlar teorisi, diferansiyel oyunlar teorisi, diferansiyel içermeler teorisi, Hamilton-Jacobi denklemler teorisi, düzgün olmayan analiz, matematiksel ekonominin bazı problemleri gösterilebilir. Aslında, küme değerli analizin birçok temel kavram ve yöntemleri ilk olarak kontrol sistemler teorisi kapsamında kullanılmış ve incelenmiştir (bkz., Aubin 1991; Aubin ve Cellina 1984; Blagodatskikh ve Filippov 1986; Clarke ve ark. 1998; Deimling 1992; Filippov 1958; Guseinov ve ark. 1985; Hu ve Papageorgiou 2000; Krasovskii ve Subbotin 1974; Krasovskii ve Subbotin 1988; Kurzhanskii 1977; Subbotin ve Chentsov 1981).

Genel olarak küme değerli analiz, küme değerli fonksiyonların, başka deyişle, küme değerli dönüşümlerin özelliklerini incelemektedir. Küme değerli analiz sadece klasik analizde bilinen problemlerin genel halde incelenmesi ile yetinmeyip, sadece kendisine has olan problemleri de incelemektedir. Bu problemlerden biri, klasik analizde benzeri olmayan ve küme değerli analiz kapsamında geniş kapsamda incelenen, küme değerli dönüşümün önceden verilen özelliğe sahip selektörünün varlığı problemidir (bkz., Ahmed 1976; Alo ve ark. 1979; Anchini ve ark. 1985; Antosiewicz ve Cellina 1975; Aubin ve Cellina 1984; Aubin ve Frankowska 1990; Ben-El Mechaiekh ve Oudadess 1995; Blagodatskikh ve Filippov 1986; Bressan ve Colombo 1988; Bressan ve Cortesi 1989; Castaing 1967; Castaing ve Valadier 1977; Cellina 1969a; Cellina 1969b; Cellina 1976; Cole 1971; Colombo ve Goncharov 2001; De Blasi ve Myjak 1985; De Blasi ve Pianigiani 1983; Deimling 1992; Deutsch 1983; Deutsch ve ark. 1988; Deutsch ve Kenderov 1983; Dolecki 1977; Dommisch 1987; Ekeland ve Valadier 1971; Evstigneev 1976; Filippov 1958; Filippov 1967; Fischer 1987; Fryszkowski 1983; Fryszkowski 1990; Goncharov ve Tolstonogov 1992; Gutev 1993; Hermes 1971; Hu ve Papageorgiou 1997; Kisielewicz 2003; Kuratowski ve Ryll-Nardzewski 1965; Lin 1994; Michael 1956a; Michael 1956b; Michael 1956c; Michael 1957; Michael 1959; Michael 1992; Michael ve Pixley 1980; Przeslawski 1985; Przeslawski ve Rybinski 1990; Reich 1978; Reider 1978; Repovs ve Semenov 1998; Repovs ve Semenov 1999; Srivatsa 1984; Tolstonogov 1995; Wagner 1975). Küme değerli analizde, verilen küme değerli dönüşümün ölçülebilir, sürekli, Lipschitz sürekli ve diferansiyellenebilir selektörlerinin varlığı problemleri incelenmektedir. Kapalı değerli ölçülebilir küme değerli dönüşümlerin ölçülebilir selektörünün varlığı "Alo (1979), Aubin ve Frankowska (1990), Castaing (1967), Castaing ve Valadier (1977), Dolecki (1977), Ekeland ve Valadier (1971), Evstigneev (1976), Hu ve Papageorgiou (1997), Kuratowski ve Ryll-Nardzewski (1965), Reider (1978), Srivatsa (1984), Wagner (1977) de incelenmiştir. Aubin ve Frankowska (1990), De Blasi ve Pianigiani (1983), Dommisch (1987), Hermes (1971), Hu ve Papageorgiou (19917), Positcelskii (1974), Przeslawski (1985)" de ise kapalı konveks değerli Lipschitz sürekli küme değerli dönüşümlerin Lipschitz sürekli selektörünün varlığı ispatlanmıştır. Küme değerli dönüşümün diferansiyellenebilir selektörünün varlığı "Blagodatskikh ve Filippov (1986), Dommisch (1987)" de incelenmektedir.

Küme değerli dönüşümün belli özelliği olan selektörlerinden en fazla incelenen, sürekli selektörün varlığı problemidir. (bkz., Antosiewicz ve Cellina 1975; Aubin ve Frankowska 1990; Ben-El Mechaiekh ve Oudadess 1995; Blagodatskikh ve Filippov 1986; Bogatyrev 1983; Bressan ve Colombo 1988; Bressan ve Cortesi 1989; Cole 1971; Colombo ve Goncharov 2001; De Blasi ve Myjak 1985; Deutsch 1983; Deutsch ve ark. 1988; Deutsch ve Kenderov 1983; Filippov 1967; Fischer 1987; Fryszkowski 1983; Fryszkowski 1990; Goncharov ve Tolstonogov 1992; Gutev 1993; Hermes 1971; Hu ve Papageorgiou 1997; Kisielewicz 2003; Lin 1994; Michael 1956a; Michael 1956b; Michael

1956c; Michael 1957; Michael 1959; Michael 1992; Michael ve Pixley 1980; Olech 1984; Przeslawski ve Rybinski 1992; Repovs ve Semenov 1998; Repovs ve Semenov 1999; Tolstonogov 1995) Sürekli selektörün varlığı için en ünlü sonuç "Michael (1956a), Michael (1956b)" de elde edilmiştir. Bu çalışmada, kapalı konveks değerli, alttan yarı sürekli küme değerli dönüşümün sürekli selektörünün varlığı kanıtlanmıştır. Eğer küme değerli dönüşümün konveks değerli olması varsayılamıyorsa, yani küme değerli dönüşüm sadece kapalı veya kompakt değerli ve hatta sürekli ise bu tür küme değerli dönüşümlerin sürekli selektörü olmayabilir (bkz., Aubin ve Cellina 1984; Blagodatskikh ve Filippov 1986; Filippov 1967; Hu ve Papageorgiou 1997).

Eğer küme değerli dönüşüm, kapalı konveks değerli ve üstten yarı sürekli ise, bu durumda da küme değerli dönüşümün sürekli selektörü olmayabilir (bkz., Aubin ve Frankowska 1990; Blagodatskikh ve Filippov 1983). Küme değerli dönüşüm konveks değerli ve üstten yarı sürekli iken verilen küme değerli dönüşümün keyfi $\varepsilon > 0$ için sürekli ε-yaklaşık selektörünün varlığı "Cellina (1969a), Cellina (1969b)" de kanıtlanmıştır.

Kompakt değerli üstten yarı sürekli küme değerli dönüşümlerin sürekli ε-yaklaşık selektörlerinin varlığı "Anchini ve ark. (1985)" de incelenmiştir. Kapalı değerli alttan yarı sürekli küme değerli dönüşümlerin sürekli selektörlerinin varlığı "Ben-El Mechaiekh ve Oudadess (1995), Bressan ve Colombo (1988), Colombo ve Goncharov (2001), Filippov (1967), Fryszkowski (1983), Goncharov ve Tolstonogov (1992), Hermes (1971), Hu ve Papageorgiou(1997), Michael (1992), Michael ve Pixley (1980), Olech (1984), Repovs ve Semenov (1998), Repovs ve Semenov (1999), Tolstonogov (1995)" de ele alınmıştır. Bogatyrev (1983), Bressan ve Colombo (1988), Bressan ve Cortesi (1989), Colombo ve Goncharov (2001), Deutsch (1983), Fryszkowski (1990), Goncharov ve Tolstonogov (1992), Olech (1984), Tolstonogov (1995)" de kapalı (decomposable) ayrılabilir değerli alttan yarı sürekli küme değerli dönüşümlerin sürekli selektörlerinin varlığı araştırılmıştır. "Kisielewicz (2003)" de kapalı fonksiyonel konveks değerli, alttan yarı sürekli olmayan küme değerli dönüşümlerin sürekli selektörünün varlığı incelenmiştir. Konveks değerli hemen hemen alttan yarı sürekli küme değerli dönüşümlerin sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörlerinin varlığı “Deutsch (1983), Deutsch ve ark. (1988), Deutsch ve Kenderov (1983), Hu ve Papageorgiou (1997)” de ele alınmıştır. “Hu ve Papageorgiou (1997)” de kapalı sınırlı aralıkta tanımlı kompakt değerli sürekli küme değerli dönüşümün sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörünün varlığı kanıtlanmıştır. “De Blasi ve Myjak (1985), Przeslawski ve Rybinski (1992)”de kapalı konveks değerli zayıf alttan yarı sürekli küme değerli dönüşümlerin sürekli selektörlerinin varlığı incelenmiştir.

Küme değerli dönüşümün değerleri kümeler olduğundan, küme değerli dönüşümün değer aldığı uzay genelde doğrusal uzay değildir. Örneğin, eğer küme değerli dönüşümün değerleri $\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı konveks kompakt alt kümeleri uzayında, yani $conv(\mathbb{R}^n)$ uzayında ise, $conv(\mathbb{R}^n)$ bir doğrusal uzay değildir. $conv(\mathbb{R}^n)$ uzayı kümeler arasında tanımlanan Hausdorff uzaklığına göre yalnız bir metrik uzaydır (bkz., Aubin ve Frankowska 1990; Blagodatskikh ve Filippov 1986; Hu ve Papageoergiou 1997). Küme değerli dönüşümlerin değer aldığı uzayda cebirsel yapının olmaması bazen bu dönüşümlerin özelliklerini incelemekte bazı zorluklar bulundurmaktadır. “Banks ve Jacobs (1970)” de $conv(\mathbb{R}^n)$ uzayı genişletilerek, genişletilmiş uzayda toplama ve skalerle çarpma işlemleri tanımlanmış ve genişletilmiş uzayın bir normlu doğrusal uzay olduğu gösterilmiştir. “Banks ve Jacobs (1970)” de ayrıca, genişletilmiş uzayda verilen yapılar kullanılarak, küme değerli dönüşümün diferansiyeli kavramı tanımlanmıştır. Küme değerli dönüşümün diğer farklı diferansiyel kavramları “Aubin ve Cellina (1984), Aubin ve Frankowska (1990), Clarke ve ark. (1998), Guseinov ve ark. (1985)” de verilmiştir.

Küme değerli analizin irdelediği önemli konulardan biri de küme değerli dönüşümlerin parametrelendirilmesi konusudur (bkz., Aubin ve Frankowska 1990; Ledonne ve Marchi 1980; Lojasiewicz 1991; Ornelas 1990). Sürekli ve sürekli/Lipschitz sürekli küme değerli dönüşümlerin sürekli ve sürekli/Lipschitz sürekli parametrelendirilmesi kullanılarak, davranışı diferansiyel içerme ile verilen dinamik sistemler, davranışı diferansiyel denklem ile verilen dinamik sistem olarak incelenebilir.

Tezde Yapılan Araştırmaların Amacı. Tez kapsamında yapılan araştırmalarda amaç kompakt değerli sürekli küme değerli dönüşümün sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörünün varlığını araştırmak, kapalı konveks değerli alttan yarı sürekli küme değerli dönüşümlerin toplamının sürekli selektörünün keyfi $\varepsilon > 0$ için bu küme değerli dönüşümlerin sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörlerinin toplamı biçiminde gösterilebilmesini incelemek, $\mathbb{R}^n$'in kompakt konveks alt kümeleri uzayını genişleterek, değerleri genişletilmiş uzaylarda olan sürekli selektörial dönüşümlerin özelliklerini araştırmak, küme değerli dönüşümlerin parametrelendirilmesi uygulanarak, davranışı diferansiyel içerme ile verilen konfliktli kontrol sistemler için yaklaşım problemini incelemektir.

Araştırma Yöntemleri. Tezde yapılan araştırmalarda klasik analizin, fonksiyonel analizin, diferansiyel oyunlar teorisinin, küme değerli analizin yöntemleri kullanılmaktadır.

Tezde Elde Edilen Bilimsel Yenilik. Tez kapsamında yapılan araştırmalarda, aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. Konveks değerli olmayan sürekli küme değerli dönüşümlerin sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörlerinin varlığı incelenmiştir. İki veya daha fazla boyutlu uzayda tanımlı kompakt değerli sürekli küme değerli dönüşümün keyfi yeterli küçük $\varepsilon > 0$ için sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörünün olmadığı örneklenmiştir.

2. Verilen kapalı konveks değerli alttan yarı sürekli iki küme değerli dönüşümün toplamının sürekli selektörünün, keyfi $\varepsilon > 0$ için verilen küme değerli dönüşümlerin sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörlerinin toplamı biçiminde gösterilebileceği kanıtlanmıştır.

3. $\mathbb{R}^n$'in kompakt konveks alt kümeleri uzayı genişletilerek cebirsel yapı tanımlanmış ve değerleri genişletilmiş uzayda olan sürekli selektörial dönüşümlerin özellikleri incelenmiştir.

4. Küme değerli dönüşümlerin parametrelendirilmesi uygulanarak, davranışı diferansiyel içerme ile verilen konfliktli kontrol sistemler için yaklaşım probleminin çözümü incelenmiştir. Diferansiyel oyunlar teorisinde kullanılan yapılara benzer olarak, verilen sisteme göre u-kararlı köprüye ekstremal stratejinin, ele alınan yaklaşım probleminin çözümü olduğu gösterilmiştir.

Tezde Elde Edilen Sonuçların Teorik ve Pratik Değeri. Tezde elde edilen sonuçlar teorik niteliktedir. Yaklaşık sürekli selektörlerin varlık teoremleri, sürekli selektörlerin sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörlere parçalanışı, sürekli selektörial dönüşümlerin özellikleri, küme değerli analizde bulunan sonuçları genişletmektedir. Davranışı diferansiyel içerme ile verilen konfliktli kontrol sistemlerin küme değerli dönüşümlerin parametrelendirilmesi yöntemiyle incelenmesi, belirsizliği olan kontrol sistemlerin incelenmesinde uygulanabilir.

Tezin Yapısı. Tez ilk bölüm giriş olmak üzere altı bölüm ve sonuçtan oluşmaktadır.

İkinci bölümde, konveks analiz ve küme değerli analizin tezde yapılan araştırmalarda gerekli olan bazı temel tanım ve teoremleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, konveks değerli olmayan sürekli küme değerli dönüşümlerin sürekli selektörünün ve sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörlerinin varlığı incelenmiştir. "Hu ve Papageorgiou (1997)" de kanıtlanan kapalı sınırlı aralıkta tanımlı kompakt değerli sürekli küme değerli dönüşümün keyfi $\varepsilon > 0$ için sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörünün varlığını gösteren teorem verilmiştir. Tanım kümesi iki veya daha fazla boyutlu uzayda olan kompakt değerli sürekli küme değerli dönüşümün her zaman sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörünün olmayacağı örneklenmiştir. "Hermes (1971)" de verilen ve kapalı aralıkta tanımlı kompakt değerli Lipschitz sürekli küme değerli dönüşümün grafiğinin keyfi noktasından geçen Lipschitz sürekli selektörünün varlığını ifade eden teorem verilmiştir.

Dördüncü bölümde, iki konveks kapalı değerli küme değerli dönüşümün toplamının sürekli selektörünün bu küme değerli dönüşümlerin sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörlerinin toplamı biçiminde gösterilmesi problemi incelenmiştir. Önce, küme değerli dönüşümlerin afin interpolasyonu kullanılarak, aralıkta tanımlı konveks kompakt değerli sürekli iki küme değerli dönüşümün toplamının keyfi sürekli selektörünün, keyfi $\varepsilon > 0$ için bu küme değerli dönüşümlerin sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörlerinin toplamı biçiminde gösterilebilirliği kanıtlanmıştır. Birimin sürekli parçalanışı kullanılarak bu sonuç genişletilmiş ve sonlu boyutlu uzayda kompakt küme üzerinde tanımlı konveks kapalı değerli alttan yarı sürekli iki küme değerli dönüşümün toplamının keyfi sürekli selektörünün, keyfi $\varepsilon > 0$ için bu küme değerli dönüşümlerin sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörlerinin toplamı biçiminde gösterilebilirliği ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde n-boyutlu Euclid uzayının konveks kompakt alt kümeleri uzayının, yani $conv(\mathbb{R}^n)$ uzayının özellikleri incelenmiştir. Genelde $conv(\mathbb{R}^n)$ uzayı bir metrik uzaydır. $conv(\mathbb{R}^n)$ uzayının "Banks ve Jacobs (1970)" de verilen genişletilmesi ele alınarak bu uzayda cebirsel yapı ve norm tanımlanmıştır. Değerleri $conv(\mathbb{R}^n)$ uzayının genişetilmesinde olan selektörial dönüşümlerin süreklilik özellikleri incelenmiştir.

Altıncı bölümde konveks kompakt değerli sürekli küme değerli dönüşümlerin sürekli ve yerel Lipschitz sürekli parametrelendirilmesi uygulanarak, davranışı diferansiyel içerme ile verilen konfliktli kontrol sistemler için yaklaşım problemi incelenmiştir. Diferansiyel oyunlar teorisinde bulunan sonuçlara benzer olarak, ele alınan yaklaşım probleminde kararlı köprüye ekstremal olan pozisyonlu stratejinin, verilen yaklaşım probleminin çözümü olduğu gösterilmiştir.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde sonraki bölümlerde gerekli olacak temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

$\mathbb{R}^n$ ile n boyutlu Öklid uzayı gösterilsin.

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için, x ve y vektörlerinin iç çarpımı $\langle x, y \rangle$ olarak gösterilsin ve

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlansın.

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için x vektörünün normu

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

olarak tanımlansın.

$A \subset \mathbb{R}^n, \quad E \subset \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} A + E &= \{a + e : a \in A, e \in E\} \\ \lambda A &= \{\lambda a : a \in A\} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Açıktır ki $A + E = E + A$ dır.

Tanım 2.1.1. *$K \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer $\forall x, y \in K$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için*

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in K$$

oluyorsa, K kümesine konveks küme denir.

$\mathbb{R}^n$ uzayının boş kümeden farklı alt kümeleri ailesi $2^{\mathbb{R}^n}$ ile, $\mathbb{R}^n$ uzayının boş kümeden farklı kompakt alt kümeleri uzayı $comp(\mathbb{R}^n)$ ile, $\mathbb{R}^n$ uzayının boş kümeden farklı kompakt konveks alt kümeleri uzayı $conv(\mathbb{R}^n)$ ile, $\mathbb{R}^n$

uzayının boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri uzayı $cl(\mathbb{R}^n)$ ile, $\mathbb{R}^n$ uzayının boş kümeden farklı kapalı konveks alt kümeleri uzayı ise $cc(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilsin.

$A \in comp(\mathbb{R}^n)$ olsun. A kümesini içeren en küçük konveks kümeye A'nın konveks zarfı denir ve coA olarak gösterilir.

Önerme 2.1.2. *$A \in comp(\mathbb{R}^n)$, $E \in comp(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman*

$$\begin{aligned} \alpha(A+E) &= \alpha A + \alpha E \\ \alpha(\beta A) &= (\alpha\beta)A \\ 1A &= A \end{aligned}$$

olur.

Önerme 2.1.3. *$A \in conv(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ olsun. O zaman*

$$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$$

olur.

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$$

$$\overline{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

olsun. Yani B_n kümesi ile $\mathbb{R}^n$ uzayının açık birim yuvarı, yani merkezi orijinde, yarıçapı bir birim olan açık yuvar, $\overline{B}_n$ kümesi ile ise $\mathbb{R}^n$ uzayının kapalı birim yuvarı, yani merkezi orijinde, yarıçapı bir birim olan kapalı yuvar gösterilsin.

$x_0 \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ için

$$\begin{aligned} B_n(x_0, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\} \\ \overline{B}_n(x_0, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\} \end{aligned}$$

olsun. $B_n(x_0, r)$, x_0 noktasının açık r komşuluğu, $\overline{B}_n(x_0, r)$ ise x_0 noktasının kapalı r komşuluğu olur.

$A \in comp(\mathbb{R}^n)$ kümesinin dayanak fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.4. *$A \in comp(\mathbb{R}^n)$ ve $s \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\sigma(s, A) = \sup\{\langle s, a\rangle : a \in A\}$$

olsun. $\sigma(\cdot, A) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna A kümesinin dayanak fonksiyonu denir.

Tanım 2.1.4 ile verilen dayanak fonksiyonunun bazı özellikleri verilsin.

1. $\sigma(\cdot, A) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu pozitif homojen fonksiyondur. Yani, $\forall\lambda \geq 0$ ve $\forall p \in \mathbb{R}^n$ için $\sigma(\lambda p, A) = \lambda\sigma(p, A)$ dır.

2. $\sigma(\cdot, A) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yarı toplamsaldır. Yani, $\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$ için $\sigma(p_1 + p_2, A) \leq \sigma(p_1, A) + \sigma(p_2, A)$ dır.

Önerme 2.1.5. *(Aubin 1998) $A \in comp(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman*

$$coA = \{x \in \mathbb{R}^n : \sup_{s\in\mathbb{R}^n}[\langle s, x\rangle - \sigma(s, A)] \leq 0\}$$

olur.

Verilen konveks kümenin dayanak fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki önerme kanıtlanabilir.

Önerme 2.1.6. *$A \in conv(\mathbb{R}^n)$, $E \in conv(\mathbb{R}^n)$, $D \in conv(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer $A + D = E + D$ ise $A = E$ olur.*

Kanıt. Keyfi $s \in \mathbb{R}^n$ alınsın ve sabitlensin. O zaman

$$\begin{aligned} \sigma(s, A + D) &= \max_{x\in A+D}\langle s, x\rangle = \max_{a\in A,\ f\in D}\langle s, a + f\rangle \\ &= \max_{a\in A}\langle s, a\rangle + \max_{f\in D}\langle s, f\rangle \qquad (2.1.1) \\ &= \sigma(s, A) + \sigma(s, D) \end{aligned}$$

olur. Benzer olarak

$$\sigma(s, E + D) = \sigma(s, E) + \sigma(s, D) \qquad (2.1.2)$$

dir. O halde $A + D = E + D$ olduğundan, (2.1.1) ve (2.1.2)'den

$$\sigma(s, A) + \sigma(s, D) = \sigma(s, E) + \sigma(s, D)$$

ve

$$\sigma(s, A) = \sigma(s, E) \tag{2.1.3}$$

olur. $s \in \mathbb{R}^n$ keyfi sabitlenmiş olduğundan (2.1.3) keyfi $s \in \mathbb{R}^n$ için doğru olur. $A \in conv(\mathbb{R}^n)$, $E \in conv(\mathbb{R}^n)$ olduğundan, Önerme 2.1.5'den ve (2.1.3)'den

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R}^n : \sup_{s \in \mathbb{R}^n} [\langle s, x\rangle - \sigma(s, A)] \leq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \sup_{s \in \mathbb{R}^n} [\langle s, x\rangle - \sigma(s, E)] \leq 0\} = E \end{aligned}$$

olur. Böylece önerme kanıtlanır. □

$A \in comp(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için, x noktasından A kümesine olan uzaklık $d(x, A)$ ile gösterilir ve

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$$

olarak tanımlanır.

$A \subset \mathbb{R}^n$, $r > 0$ için A kümesinin açık r komşuluğu $B(A, r)$ ile, kapalı r komşuluğu ise $\overline{B}(A, r)$ ile gösterilir ve

$$B(A, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) < r\}$$

$$\overline{B}(A, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \leq r\}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 2.1.7. *$A \subset \mathbb{R}^n$ kapalı küme ve $r > 0$ olsun. O zaman*

$$B(A, r) = A + r \cdot B_n$$

$$\overline{B}(A, r) = A + r \cdot \overline{B}_n$$

olur.

$A \in 2^{\mathbb{R}^n}$ ve $E \in 2^{\mathbb{R}^n}$ için A ve E kümeleri arasında Hausdorff uzaklığı $h(A, E)$ olarak gösterilir ve

$$h(A, E) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, E), \sup_{y \in E} d(y, A)\}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 2.1.8. *$A \in 2^{\mathbb{R}^n}$ ve $E \in 2^{\mathbb{R}^n}$ için*

$$h(A, E) = \inf\{r > 0 : A \subset E + rB_n, E \subset A + rB_n\}$$

dir.

Kanıtlanabilir ki $h(\cdot, \cdot) : comp(\mathbb{R}^n) \times comp(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $comp(\mathbb{R}^n)$ de tanımlı metriktir.

Önerme 2.1.9. *(Blagodatskikh ve Filippov 1983; Hu ve Papageorgiou 1997) $(comp(\mathbb{R}^n), h(\cdot, \cdot))$ ve $(conv(\mathbb{R}^n), h(\cdot, \cdot))$ tam metrik uzaydır.*

Aşağıda iki küme arasındaki Hausdorff uzaklığının bazı özellikleri verilmektedir.

Önerme 2.1.10. *(Hu ve Papageorgiou 1997) $A \in conv(\mathbb{R}^n)$, $E \in conv(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman*

$$h(A, E) = \sup\{|\sigma(x, A) - \sigma(x, E)| : \|x\| \leq 1\}$$

dir.

Önerme 2.1.11. *(Hu ve Papageorgiou 1997) $A \in comp(\mathbb{R}^n)$, $E \in comp(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman*

$$h(A, E) = \sup\{|d(x, A) - d(x, E)| : x \in \mathbb{R}^n\}$$

dir.

Önerme 2.1.12. *(Hu ve Papageorgiou 1997) $A \in comp(\mathbb{R}^n)$, $E \in comp(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman*

$$h(\lambda A, \lambda E) = |\lambda| h(A, E)$$

dir.

Önerme 2.1.13. *(Hu ve Papageorgiou 1997)* $A_1 \in comp(\mathbb{R}^n)$, $A_2 \in comp(\mathbb{R}^n)$, $E_1 \in comp(\mathbb{R}^n)$, $E_2 \in comp(\mathbb{R}^n)$ *olsun. O zaman*

$$h(A_1 + A_2, E_1 + E_2) \leq h(A_1, E_1) + h(A_2, E_2)$$

olur.

Önerme 2.1.14. *(Hu ve Papageorgiou 1997)* $A \in comp(\mathbb{R}^n)$, $E \in comp(\mathbb{R}^n)$ *olsun. O zaman*

$$h(coA, coE) \leq h(A, E)$$

dir.

2.2 Küme Değerli Dönüşümler. Küme Değerli Dönüşümlerin Sürekliliği

Önce küme değerli dönüşüm tanımı verilsin.

Tanım 2.2.1. $A \subset \mathbb{R}^n$ *ve her* $x \in A$ *için* $F(x) \subset \mathbb{R}^m$ *olsun. Bu durumda,* $F(\cdot)$ *dönüşümüne küme değerli dönüşüm ya da küme değerli fonksiyon denir ve* $F(\cdot) : A \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ *şeklinde gösterilir. Ayrıca*

$$\{(x, y) \in A \times \mathbb{R}^m : y \in F(x)\}$$

olarak tanımlanan kümeye $F(\cdot)$ *küme değerli dönüşümünün grafiği denir ve* $gr_A F(\cdot)$ *ile gösterilir.*

Ayrıca, eğer keyfi $x \in A$ *için* $F(x) \in 2^{\mathbb{R}^m}$ $(F(x) \in comp(\mathbb{R}^m)$ *veya* $F(x) \in conv(\mathbb{R}^m)$ *veya* $F(x) \in cl(\mathbb{R}^m)$ *veya* $F(x) \in cc(\mathbb{R}^m))$ *ise* $F(\cdot) : A \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ *küme değerli dönüşümü* $F(\cdot) : A \to 2^{\mathbb{R}^m}$ $(F(\cdot) : A \to comp(\mathbb{R}^m)$, $F(\cdot) : A \to conv(\mathbb{R}^m)$, $F(\cdot) : A \to cl(\mathbb{R}^m)$, $F(\cdot) : A \to cc(\mathbb{R}^m))$ *olarak da gösterilir.*

Küme değerli dönüşümlerin alttan ve üstten yarı sürekliliğinin tanımları aşağıdaki şekilde verilir.

Tanım 2.2.2. *(Aubin ve Frankowska 1990; Hu ve Papageorgiou 1997) X, Y topolojik uzaylar $F(\cdot) : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşüm, $x_0 \in X$ olsun. $F(x_0)$ kümesinin her $\mathcal{N}(F(x_0))$ komşuluğu için $\forall x \in \mathcal{N}(x_0)$ iken*

$$F(x) \subset \mathcal{N}(F(x_0))$$

olacak biçimde x_0 noktasının en az bir $\mathcal{N}(x_0)$ komşuluğu varsa $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne x_0 noktasında üstten yarı süreklidir denir.

Tanım 2.2.3. *(Aubin ve Frankowska 1990; Hu ve Papageorgiou 1997) X, Y topolojik uzaylar, $F(\cdot) : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşüm, $x_0 \in X$ olsun. Keyfi $y \in F(x_0)$ ve y noktasının her $\mathcal{N}(y)$ komşuluğu için $\forall x \in \mathcal{N}(x_0)$ iken*

$$F(x) \cap \mathcal{N}(y) \neq \emptyset$$

olacak biçimde x_0 noktasının en az bir $\mathcal{N}(x_0)$ komşuluğu varsa $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne x_0 noktasında alttan yarı süreklidir denir.

Alttan ve üstten yarı süreklilik kavramları kullanılarak küme değerli dönüşümün sürekliliği aşağıdaki şekilde verilir.

Tanım 2.2.4. *(Aubin ve Frankowska 1990; Hu ve Papageorgiou 1997) X, Y topolojik uzaylar olsun. $F(\cdot) : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümü $x_0 \in X$ noktasında hem alttan yarı sürekli hem de üstten yarı sürekli ise $F(\cdot) : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümüne x_0 noktasında süreklidir denir.*

$\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^m$'e tanımlı kapalı değerli küme değerli dönüşümler için alttan yarı süreklilik aşağıdaki önerme ile karakterize edilir.

Önerme 2.2.5. *(Aubin ve Frankowska 1990; Hu ve Papageorgiou 1997) $K \subset \mathbb{R}^n$, $F(\cdot) : K \to cl(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşüm, $\varepsilon > 0$ ve $x_0 \in K$ olsun. $F(\cdot) : K \to cl(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşümünün $x_0 \in K$ noktasında alttan yarı sürekli olması için gerek ve yeter kosul, keyfi $y \in F(x_0)$ ve $\forall z \in B_n(x_0, \delta(\varepsilon, x_0))$ için*

$$B_m(y, \varepsilon) \cap F(z) \neq \emptyset$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ *sayısının var olmasıdır.*

$\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^m$'e tanımlı kompakt değerli küme değerli dönüşümlerin üstten ve alttan yarı sürekliliği ise aşağıdaki önermelerle verilir.

Önerme 2.2.6. *(Aubin ve Cellina 1984; Hu ve Papageorgiou 1997)* $F(\cdot) : \mathbb{R}^n \to comp(\mathbb{R}^m)$ *küme değerli dönüşüm ve* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *olsun. O zaman* $F(\cdot) : \mathbb{R}^n \to comp(\mathbb{R}^m)$ *küme değerli dönüşümünün* x_0 *noktasında üstten yarı sürekli olması için gerek ve yeter koşul* $\forall \varepsilon > 0$ *için* $x \in B_n(x_0, \delta(\varepsilon, x_0))$ *iken*

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B_m$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ *var olmasıdır.*

Önerme 2.2.7. *(Aubin ve Cellina 1984; Hu ve Papageorgiou 1997)* $F(\cdot) : \mathbb{R}^n \to comp(\mathbb{R}^m)$ *küme değerli dönüşüm ve* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *olsun. O zaman* $F(\cdot) : \mathbb{R}^n \to comp(\mathbb{R}^m)$ *küme değerli dönüşümünün* x_0 *noktasında alttan yarı sürekli olması için gerek ve yeter koşul* $\forall \varepsilon > 0$ *için* $x \in B_n(x_0, \delta(\varepsilon, x_0))$ *iken*

$$F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon B_m$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ *var olmasıdır.*

Önerme 2.2.6 ve Önerme 2.2.7'den, aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 2.2.8. *(Aubin ve Cellina 1984; Hu ve Papageorgiou 1997)* $F(\cdot) : \mathbb{R}^n \to comp(\mathbb{R}^m)$ *küme değerli dönüşüm ve* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *olsun. O zaman* $F(\cdot) : \mathbb{R}^n \to comp(\mathbb{R}^m)$ *küme değerli dönüşümünün* x_0 *noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul* $\forall \varepsilon > 0$ *için* $x \in B_n(x_0, \delta(\varepsilon, x_0))$ *iken*

$$F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon B_m$$

ve

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B_m$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ *var olmasıdır.*

Önerme 2.2.8'den, Hausdorff uzaklığı kullanılarak, $F(\cdot) : \mathbb{R}^n \to comp(\mathbb{R}^m)$ biçiminde verilen küme değerli dönüşümün sürekliliği aşağıdaki önerme ile verilir.

Önerme 2.2.9. *(Aubin ve Cellina 1984; Hu ve Papageorgiou 1997) $F(\cdot) : \mathbb{R}^n \to comp(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşüm, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. $F(\cdot) : \mathbb{R}^n \to comp(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşümünün $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul, $\forall \varepsilon > 0$ için $x \in B_n(x_0, \delta(\varepsilon, x_0))$ iken*

$$h(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısının varolmasıdır.

Tanım 2.2.10. *(Aubin ve Frankowska 1990) $F(\cdot) : \mathbb{R}^n \to comp(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşüm olsun. Eğer $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ için*

$$h(F(x_1), F(x_2)) \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|$$

olacak biçimde $L \geq 0$ varsa, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü L sabiti ile Lipschitz süreklidir denir.

Tanım 2.2.11. *$F(\cdot) : \mathbb{R}^n \to comp(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşüm olsun. Eğer her kompakt $D \subset \mathbb{R}^n$ ve $x_1, x_2 \in D$ için*

$$h(F(x_1), F(x_2)) \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|$$

olacak biçimde $L = L(D) \geq 0$ varsa, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne yerel Lipschitz süreklidir denir.

Tanım 2.2.12. *(Aubin ve Frankowska 1990; Hu ve Papageorgiou 1997) $F(\cdot) : \mathbb{R}^m \to cl(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer keyfi açık $V \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için*

$$F^{-1}(V) = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \cap V \neq 0\}$$

kümesi ölçülebilir ise, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne ölçülebilir küme değerli dönüşüm denir.

2.3 Küme Değerli Dönüşümlerin Selektörleri. Sürekli ve Sürekli Yaklaşık Selektörler

Bu kesimde bazı tür küme değerli dönüşümlerin sürekli ve sürekli yaklaşık selektörlerinin varlığı gösterilecektir. Önce küme değerli dönüşümün selektörünün tanımı verilsin.

Tanım 2.3.1. *(Aubin ve Frankowska 1990; Blagodatskikh ve Filippov 1986; Hu ve Papageorgiou 1997) $D \subset \mathbb{R}^m$, $F(\cdot) : D \to 2^{\mathbb{R}^n}$ küme değerli dönüşüm olsun. $\forall x \in D$ için $f(x) \in F(x)$ koşulunu sağlayan $f(\cdot) : D \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün D kümesinde belirlenmiş selektörü denir.*

Alttan yarı sürekli $F(\cdot) : D \to cc(\mathbb{R}^n)$, $(D \subset \mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşümünün sürekli selektörünün varlığı aşağıdaki Michael teoremi ile verilir.

Teorem 2.3.2. *(Michael 1956a; Michael 1956b) $D \subset \mathbb{R}^m$ kompakt küme, $F(\cdot) : D \to cc(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü alttan yarı sürekli olsun. O zaman $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün D kümesinde tanımlanmış sürekli selektörü vardır.*

$F(\cdot) : A \to 2^{\mathbb{R}^n}$ küme değerli dönüşüm için yaklaşık selektör kavramları aşağıda verilmiştir. Burada $A \subset \mathbb{R}^m$'dir. Önce $F(\cdot) : A \to 2^{\mathbb{R}^n}$ küme değerli dönüşümünün ε-yaklaşık selektörünün tanımı verilsin.

Tanım 2.3.3. *(Aubin ve Frankowska 1990; Cellina 1969a; Cellina 1969b) $\varepsilon > 0$, $A \subset \mathbb{R}^m$, $F(\cdot) : A \to 2^{\mathbb{R}^n}$, $f(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer*

$$gr_A f(\cdot) \subset gr_A F(\cdot) + \varepsilon B_{n\times m}$$

ise, yani $f(\cdot)$ fonksiyonunun grafiği $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün grafiğinin ε-komşuluğunda ise, $f(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna, $F(\cdot) : A \to 2^{\mathbb{R}^n}$ küme değerli dönüşümünün ε-yaklaşık selektörü denir.

Önerme 2.3.4. *$A \subset \mathbb{R}^m$ ve $f(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $F(\cdot) : A \to 2^{\mathbb{R}^n}$ küme değerli dönüşümünün selektörü olsun. O zaman keyfi $\varepsilon > 0$ için $f(\cdot)$ fonksiyonu $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün ε-yaklaşık selektörüdür.*

Verilen $F(\cdot) : A \to cc(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün sürekli ε-yaklaşık selektörlerinin varlığı "Aubin ve Frankowska (1990), Cellina (1969a), Cellina (1969b)" de incelenmiştir.

Teorem 2.3.5. *(Cellina 1969a; Cellina 1969b) $\varepsilon > 0$, $A \subset \mathbb{R}^m$ kompakt küme, $F(\cdot) : A \to cc(\mathbb{R}^n)$ üstten yarı sürekli küme değerli dönüşüm olsun. O zaman $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sürekli ε-yaklaşık selektörü vardır.*

$A \subset \mathbb{R}^m$ olmak üzere $F(\cdot) : A \to 2^{\mathbb{R}^n}$ küme değerli dönüşümünün noktasal ε-yaklaşık selektörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.3.6. $\varepsilon > 0$, $A \subset \mathbb{R}^m$, $F(\cdot) : A \to 2^{\mathbb{R}^n}$, $f(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ *olsun. Eğer* $\forall x \in A$ *için*

$$f(x) \in F(x) + \varepsilon B_n$$

ise $f(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna, $F(\cdot) : A \to 2^{\mathbb{R}^n}$ küme değerli dönüşümünün noktasal ε-yaklaşık selektörü denir.

Önerme 2.3.7. *$A \subset \mathbb{R}^m$ $f(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $F(\cdot) : A \to cl(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün selektörü olsun. O zaman keyfi $\varepsilon > 0$ için $f(\cdot)$ fonksiyonu $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün noktasal ε-yaklaşık selektörüdür.*

Önerme 2.3.8. *$\varepsilon > 0$, $A \subset \mathbb{R}^m$ ve $f(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $F(\cdot) : A \to cl(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün noktasal ε-yaklaşık selektörü olsun. O zaman $f(\cdot)$ fonksiyonu $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün ε-yaklaşık selektörü olur.*

Kanıt. $f(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $F(\cdot) : A \to cl(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün noktasal ε-yaklaşık selektörü olduğundan keyfi $x \in A$ için

$$f(x) \in F(x) + \varepsilon B_n \tag{2.3.1}$$

olur. O halde (2.3.1)'den $\forall x \in A$ içn

$$d(f(x), F(x)) \leq \varepsilon \tag{2.3.2}$$

olur. (2.3.2)'den $\forall x \in A$ için

$$d((x, f(x)), (x, F(x))) = d(f(x), F(x)) \leq \varepsilon$$

yani $\forall x \in A$ için

$$(x, f(x)) \in gr_A f(\cdot) \subset gr_A F(\cdot) + \varepsilon B_{n\times m}$$

olur. Bu ise, $f(\cdot)$ fonksiyonunun $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün ε-yaklaşık selektörü olması demektir. $\square$

Böylece Önerme 2.3.7'den, eğer verilen küme değerli dönüşümünün sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörü varsa, o zaman bu küme değerli dönüşümün sürekli ε-yaklaşık selektörünün varlığı da elde edilir. Ancak bu hükmün tersi doğru değildir.

Verilen küme değerli dönüşümün sürekli ε-yaklaşık selektörü varken, bu küme değerli dönüşümün sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörü olmayabilir. Bu durumu bir örnekle inceleyelim.

Örnek 2.3.9. $x \in [-5, 5]$ *için*

$$F(x) = \begin{cases} [-1, 1], & x = 0 \\ 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \tag{2.3.3}$$

olmak üzere $F(\cdot) : [-5, 5] \to conv(\mathbb{R})$ *küme değerli dönüşümü verilsin. Açıktır ki,* $F(\cdot) : [-5, 5] \to conv(\mathbb{R})$ *küme değerli dönüşümü üstten yarı sürekli küme değerli dönüşümdür.*

Keyfi sabitlenmiş $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ *için (2.3.3) ile verilen* $F(\cdot)$ *küme değerli dönüşümünün sürekli* ε*-yaklaşık selektörü vardır. Ancak* $F(\cdot)$ *küme değerli dönüşümünün sürekli noktasal* ε*-yaklaşık selektörü yoktur.*

2.4 Marjinal Fonksiyonlar, Özellikleri ve Uygulamaları

Marjinal fonksiyonların optimizasyon teorisinde, kontrol teoride, diferansiyel oyunlar teorisinde, uygulamalı küme değerli analizde önemli bir yeri vardır. Kontrol teoride ve diferansiyel oyunlar teorisinde, verilen kontrol probleminin veya oyunun değer fonksiyonları marjinal fonksiyonlar olarak ortaya çıkmaktadır. Marjinal fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.4.1. *(Aubin ve Frankowska 1990; Hu ve Papageorgiou 1997)* $F(\cdot) : \mathbb{R}^m \to 2^{\mathbb{R}^n}$ *küme değerli dönüşüm,* $f(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *fonksiyon olsun.*

$$g(x) = \sup_{y \in F(x)} f(x, y)$$

biçiminde tanımlanan $g(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *fonksiyonuna marjinal fonksiyon denir.*

Aşağıdaki teorem marjinal fonksiyonun sürekliliğini karakterize etmektedir.

Teorem 2.4.2. *(Aubin ve Frankowska 1990; Hu ve Papageorgiou 1997)* $f(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sürekli fonksiyon,* $F(\cdot) : \mathbb{R}^m \to comp(\mathbb{R}^n)$ *sürekli küme değerli dönüşüm olsun. O zaman*

$$g(x) = \max_{y \in F(x)} f(x, y) \tag{2.4.1}$$

şeklinde tanımlı $g(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *marjinal fonksiyonu da süreklidir.*

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.4.3. $F(\cdot) : \mathbb{R}^m \to comp(\mathbb{R}^n)$ *sürekli küme değerli dönüşüm olsun. O zaman*

$$g(x) = \max_{y \in F(x)} \parallel y \parallel$$

şeklinde tanımlı $g(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu da süreklidir.*

Sonuç 2.4.4. $F(\cdot) : \mathbb{R}^n \to comp(\mathbb{R}^m)$ *sürekli küme değerli dönüşüm,* $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *sürekli fonksiyon olsun. O zaman keyfi* $x \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$h(x) = d(f(x), F(x)) = \min_{y \in F(x)} \parallel y - f(x) \parallel$$

olarak tanımlı $h(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ *fonksiyonu sürekli fonksiyondur.*

Önerme 2.4.5. *$f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $g(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ sürekli fonksiyonlar olsunlar. O zaman $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için*

$$G(x) = B(f(x), g(x))$$

olmak üzere $G(\cdot) : \mathbb{R}^n \to conv(\mathbb{R}^k)$ küme değerli dönüşümü süreklidir.

Teorem 2.4.6. *(Aubin ve Frankowska 1990; Hu ve Papageorgiou 1997) $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yerel Lipschitz sürekli fonksiyon, $F(\cdot) : \mathbb{R}^m \to comp(\mathbb{R}^n)$ yerel Lipschitz sürekli küme değerli dönüşüm olsun. O zaman*

$$g(x) = \max_{y \in F(x)} f(x, y)$$

şeklinde tanımlı $g(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu yerel Lipschitz süreklidir.

Teorem 2.4.6'dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.4.7. *$F(\cdot) : \mathbb{R}^m \to comp(\mathbb{R}^n)$ yerel Lipschitz sürekli küme değerli dönüşüm olsun. O zaman*

$$g(x) = \max_{y \in F(x)} \parallel y \parallel$$

olarak tanımlı $g(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu yerel Lipschitz süreklidir.

Şimdi verilen noktanın verilen kümeye izdüşümü tanımlansın.

Tanım 2.4.8. *$E \subset \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^n$ için*

$$(Pr)_E f = \{f_* \in E : \|f - f_*\| = d(f, E)\}$$

olmak üzere $(Pr)_E f$'e f'in E kümesine izdüşümü denir. Açıktır ki $(Pr)_E f$ kümesi f'e E'deki en yakın olan noktalar kümesidir.

Önerme 2.4.9. *(Aubin 1998) $E \subset \mathbb{R}^n$ konveks ve kapalı, $f \in \mathbb{R}^n$ olsun. O zaman E kümesinin f noktasına en yakın elemanı vardır ve bu en yakın eleman tektir. Başka deyişle*

$$(Pr)_E f = \{f_*\} \text{ ve } f_* \in E$$

dir.

Aşağıdaki önerme sürekli fonksiyonun, konveks kompakt değerli sürekli küme değerli dönüşüm üzerine izdüşümünün sürekli fonksiyon olduğunu göstermektedir.

Önerme 2.4.10. *$A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme, $F(\cdot) : A \to conv(\mathbb{R}^n)$ sürekli küme değerli dönüşüm, $f(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyon olsun. O zaman $\forall x \in A$ için*

$$\varphi(x) = (Pr)_{F(x)} f(x)$$

olmak üzere $\varphi(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu süreklidir ve $\forall x \in A$ için $\varphi(x) \in F(x)$ olur.

Kanıt. Keyfi $x \in A$ alınsın ve sabitlensin. O zaman Önerme 2.4.9'dan $(Pr)_{F(x)} f(x) \neq \varnothing$ dır, tek elemanlı kümedir, yani $(Pr)_{F(x)} f(x) = \varphi(x)$ biçimindedir ve $\varphi(x) \in F(x)$ dir. Bu durumda $\varphi(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ iyi tanımlı fonksiyondur.

$x \to \varphi(x) = (Pr)_{F(x)} f(x)$ fonksiyonunun tanımından dolayı

$$(Pr)_{F(x)} f(x) = \{y_* \in F(x) : \|f(x) - y_*\| = \min_{y \in F(x)} \|f(x) - y\|\}$$

olur.

$\sigma(x, y) = \|f(x) - y\|$ dersek, $\sigma(\cdot, \cdot) : A \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyondur. Şimdi

$$c(x) = \min_{y \in F(x)} \sigma(x, y) \tag{2.4.2}$$

$$Y_*(x) = \{y_* \in F(x) : c(x) = \sigma(x, y_*)\} \tag{2.4.3}$$

diyelim. Açıktır ki $\forall x \in A$ için

$$Y_*(x) = (Pr)_{F(x)} f(x) = \varphi(x) \tag{2.4.4}$$

olur. $x \to Y_*(x)$, $x \in A$, küme değerli dönüşümü (2.4.2) ile tanımlanan $c(\cdot) : A \to \mathbb{R}$ marjinal fonksiyonun marjinal küme değerli dönüşümüdür. $x \to Y_*(x)$ küme değerli dönüşümü üstten yarı süreklidir (bkz., Aubin ve Cellina 1984 sayfa 53 Teorem 6). Ayrıca Önerme 2.4.9 ve (2.4.4)'den

$x \to Y_*(x)$ tek değerli dönüşümdür, yani $Y_*(x) = \{\varphi(x)\}$ dir. O halde tek değerli küme değerli dönüşümün üstten yarı sürekliliği, bu küme değerli dönüşümü tanımlayan fonksiyonun sürekliliğini gerektirdiğinden $x \to \varphi(x)$, $x \in A$, fonksiyonu süreklidir. □

2.5 Konveks Kümelerin ve Fonksiyonların Bazı Özellikleri

Konveks fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.5.1. *(Aubin 1998; Rockafellar 1970)* $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$ *ve* $\forall \alpha \in [0, 1]$ *için*

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

koşulunu sağlayan $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.*

Aşağıdaki teorem konveks fonksiyonların sürekliliğini karakterize etmektedir.

Teorem 2.5.2. *(Aubin 1998; Rockafellar 1970)* $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu konveks fonksiyon ise* $\forall x_0 \in \mathbb{R}^m$ *için* $f(\cdot)$ *fonksiyonu süreklidir.*

Konveks fonksiyon diferansiyellenebilir olmayabilir. Bu nedenle konveks fonksiyonun diferansiyeli yerine daha genel bir kavram, konveks fonksiyonun subdiferansiyeli kavramı tanımlanarak teori ve uygulamalarda kullanılmaktadır.

Tanım 2.5.3. *(Aubin 1998; Rockafellar 1970)* $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu konveks fonksiyon ve* $x_0 \in \mathbb{R}^m$ *olsun.*

$$\partial f(x_0) = \{p \in \mathbb{R}^m : \forall x \in \mathbb{R}^m, \quad \langle p, (x - x_0)\rangle \leq f(x) - f(x_0)\}$$

kümesine $f(\cdot)$ *fonksiyonunun subdiferansiyeli denir.*

Konveks fonksiyon subdiferansiyellenebilirdir.

Önerme 2.5.4. *(Aubin 1998; Rockafellar 1970)* $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *konveks fonksiyon olsun. O zaman* $\forall x_0 \in \mathbb{R}^m$ *için* $\partial f(x_0)$ *boş olmayan, konveks, kapalı, sınırlı kümedir.*

Önerme 2.5.5. *$f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konveks ve $x_0 \in \mathbb{R}^m$ noktasında diferansiyellenebilir ise, o zaman*

$$\partial f(x_0) = \nabla \partial f(x_0)$$

olur. Burada $\nabla \partial f(x_0) = \{\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}\}$ olarak tanımlıdır.

Önerme 2.5.6. *(Aubin 1998; Rockafellar 1970) $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. O zaman $x \to \partial f(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ küme değerli dönüşümü üstten yarı süreklidir.*

Önerme 2.5.6'dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.5.7. *$f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. O zaman $\partial f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to conv(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşümü ölçülebilir küme değerli dönüşümdür.*

Teorem 2.5.8. *(Aubin 1998; Demyanov ve Vasilyev 1981; Rockafellar 1970) $G \subset \mathbb{R}^k$ kompakt bir küme, $\varphi(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^m \times G \to \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $\varphi(\cdot, y)$ konveks fonksiyon ve $f(x) = \max\limits_{y \in G} \varphi(x, y)$ olsun. O zaman $\forall x_0 \in \mathbb{R}^m$ için $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun subdiferansiyeli vardır ve*

$$\partial f(x_0) = co\{\partial \varphi(x_0, y) : y \in G(x_0)\}$$

olur. Burada $G(x_0) = \{y_0 \in G : \varphi(x_0, y_0) = \max\limits_{y \in G} \varphi(x_0, y)\}$ ve $\partial \varphi(x_0, y)$ sabitlenmiş her $y \in G$ için $x \to \varphi(\cdot, y)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki subdiferansiyelidir.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.5.9. *$K \subset \mathbb{R}^n$ konveks, kompakt küme, $p \in \mathbb{R}^n$*

$$\sigma(K, p) = \max_{x \in K} \langle p, x \rangle$$

olsun. O zaman

$$\partial \sigma(K, p) = \{x_* \in K : \langle p, x_* \rangle = \sigma(K, p)\}$$

olur.

Ayrıca, Sonuç 2.5.7'den $\partial\sigma(K,\cdot):\mathbb{R}^m \to conv(\mathbb{R}^m)$ *küme değerli dönüşümü ölçülebilir küme değerli dönüşümdür.*

Küme değerli analizde, yoğun kullanılan kavramlardan biri de verilen konveks kompakt kümenin Steiner noktasıdır. Steiner noktası kavramı, Lipschitz sürekli küme değerli dönüşümlerin Lipschitz sürekli selektörlerinin varlık teoremlerinde ve küme değerli dönüşümlerin parametrelendirilmesinde kullanılan önemli bir kavramdır.

$K \in conv(\mathbb{R}^m)$ kümesinin Steiner noktası aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.5.10. *(Aubin ve Frankowska 1990; Positcelskii 1974; Przeslawski 1985; Schneider 1971; Shepard 1966; Shepard 1968)* $K \in conv(\mathbb{R}^m)$ *kümesi için Steiner noktası* $s_m(K)$ *ile gösterilir ve*

$$s_m(K) = \begin{cases} \frac{\sigma(K,+1)}{2} - \frac{\sigma(K,-1)}{2}, & m = 1 \\ m\displaystyle\int_{S_{m-1}} p \cdot \sigma(K,p)\omega dp, & m \geq 2 \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Burada S_{m-1}, $\mathbb{R}^m$*'de birim kürenin yüzeyini gösterir, yani* $S_{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : \| x \| = 1\}$*'dir,* $\sigma(K,\cdot):\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ K*'nın dayanak fonksiyonudur ve* ω $\omega(S_{m-1}) = 1$ *koşulunu sağlayan Lebesgue ölçümü ile orantılı olarak* S_{m-1}*'de ölçümdür.*

Aşağıdaki teorem K kompakt konveks kümenin Steiner noktasını karakterize etmektedir.

Teorem 2.5.11. *(Aubin ve Frankowska 1990; Positcelskii 1974; Przeslawski 1985; Schneider 1971; Shepard 1966; Shepard 1968) Keyfi* $K \in conv(\mathbb{R}^m)$ *için*

$$s_m(K) = \frac{1}{Vol(B_m)} \int_{B_m} m(\partial\sigma(K,p))dp$$

dir ve $s_m(K) \in K$*'dır.*

Ayrıca $\forall K, L \in conv(\mathbb{R}^m)$ *için*

$$\|s_m(K) - s_m(L)\| \leq m \cdot h(K,L)$$

dir. Yani $s_m(\cdot) : conv(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$ *dönüşümü* m *sabiti ile Lipschitz süreklidir.*

Burada $Vol(B_m)$, $\quad B_m \subset \mathbb{R}^m$ *olan m-boyutlu birim kürenin ölçümüdür.*

Küme değerli dönüşümleri parametrelendirirken kullanılacak bir başka teorem verilsin.

Teorem 2.5.12. *(Aubin ve Frankowska 1990) Keyfi* $K \in conv(\mathbb{R}^m)$ *ve* $\forall y \in \mathbb{R}^m$ *için*

$$P(y, K) = K \bigcap \overline{B}_m(y, 2d(y, K))$$

olmak üzere $P(\cdot) : \mathbb{R}^m \times conv(\mathbb{R}^m) \to conv(\mathbb{R}^m)$ *dönüşümü* 5 *sayısı ile Lipschitz süreklidir. Yani* $\forall K, L \in \mathcal{K}$ *ve* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$h(P(x, K), P(y, L)) \leq 5(h(K, L) + \|x - y\|)$$

dir.

3 KONVEKS DEĞERLİ OLMAYAN SÜREKLİ KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SÜREKLİ SELEKTÖRLERİ VE SÜREKLİ YAKLAŞIK SELEKTÖRLERİ

Bu bölümde kompakt değerli, ancak konveks değerli olmayan sürekli küme değerli dönüşümlerin sürekli selektörünün varlığı problemi incelenecektir.

3.1 Sürekli $F(\cdot) : \mathbb{R}^n \to comp(\mathbb{R})$ Küme Değerli Dönüşümünün Sürekli Selektörü

Genel olarak kompakt değerli ancak konveks değerli olmayan küme değerli dönüşümlerin sürekli selektörü olmayabilir. Yani $A \subset \mathbb{R}^m$ olmak üzere, sürekli $F(\cdot) : A \to comp(\mathbb{R}^n)$ biçimindeki küme değerli dönüşümün sürekli selektörü olmayabilir. Bu tür küme değerli dönüşümlerin sürekli selektörünün olmadığını gösteren örnekler "Aubin ve Frankowska (1990), Blagodatskikh ve Filippov (1986), Filippov (1967), Hu ve Papageorgiou (1997)" de verilmiştir. Ayrıca sürekli $F(\cdot) : A \to comp(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün sürekli selektörünün olmadığını gösteren bir örnek ileride Bölüm 3.4 de verilecektir.

Ancak $A \subset \mathbb{R}^m$ olmak üzere, $F(\cdot) : A \to comp(\mathbb{R})$ olan sürekli dönüşümler için durum farklıdır. Aşağıda, $F(\cdot) : A \to comp(\mathbb{R})$ biçiminde sürekli küme değerli dönüşümün sürekli selektörünün varlığını gösteren bir teorem verilmiştir.

Teorem 3.1.1. *$A \subset \mathbb{R}^m$, $F(\cdot) : A \to comp(\mathbb{R})$ sürekli küme değerli dönüşüm olsun. O zaman $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sürekli selektörü vardır.*

Kanıt. $(x, y) \in A \times \mathbb{R}$ için

$$\sigma(x, y) = y \tag{3.1.1}$$

olmak üzere $\sigma(\cdot,\cdot) : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuu tanımlansın. Açıktır ki, $\sigma(\cdot,\cdot) : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli fonksiyondur. Şimdi $x \in A$ için

$$c(x) = \max_{y \in F(x)} \sigma(x,y) = \max_{y \in F(x)} y \qquad (3.1.2)$$

olmak üzere $c(\cdot) : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın. (3.1.1) ile tanımlı $\sigma(\cdot,\cdot) : A\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon, $F(\cdot) : A \to comp(\mathbb{R})$ sürekli küme değerli dönüşüm olduğundan, Teorem 2.4.2 gereği (3.1.2) ile tanımlı $c(\cdot) : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli fonksiyondur.

$\forall x \in A$ için $F(x) \subset \mathbb{R}$ kompakt küme olduğundan, (3.1.2)'den $\forall x \in A$ için $c(x) = y(x)$ olacak biçimde $y(x) \in F(x)$ vardır. O halde $\forall x \in A$ için $c(x) \in F(x)$ olur. Böylece, $\forall x \in A$ için $c(x) \in F(x)$ olmak üzere $c(\cdot) : A \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olur. Bu ise $c(\cdot) : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $F(\cdot) : A \to comp(\mathbb{R})$ küme değerli dönüşümünün sürekli selektörü olması demektir. $\square$

3.2 Sürekli $F(\cdot) : [t_0,\theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ Küme Değerli Dönüşümünün Sürekli Noktasal ε-Yaklaşık Selektörünün Varlığı

Bu bölümde, aralıkta tanımlı, yani $F(\cdot) : [t_0,\theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ biçiminde sürekli küme değerli dönüşümün sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörünün varlığı incelenecektir. Genellikle, $n > 1$ iken $F(\cdot) : [t_0,\theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ biçiminde sürekli küme değerli dönüşümün sürekli selektörü yoktur.

Aşağıdaki teorem keyfi $\varepsilon > 0$ için $F(\cdot) : [t_0,\theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ biçiminde olan sürekli küme değerli dönüşümün, bu küme değerli dönüşümün grafiğinin keyfi noktasından geçen sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörün varolduğunu göstermektedir.

Teorem 3.2.1. *(Hu ve Papageorgiou 1997) $F(\cdot) : [t_0,\theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ sürekli küme değerli dönüşüm, $(t_*,x_*) \in gr_{[t_0,\theta]}F(\cdot)$, $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman $\forall\, t \in [t_0,\theta]$ için $f^\varepsilon(t) \in F(t)+\varepsilon B_n$ ve $f^\varepsilon(t_*) = x_*$ olacak şekilde $f^\varepsilon(\cdot) : [t_0,\theta] \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonu vardır. Yani $\forall\, \varepsilon > 0$ için $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün bu* *küme değerli dönüşümün grafiğinin keyfi noktasından geçecek sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörü vardır.*

Kanıt. $\varepsilon > 0$ alınsın ve sabitlensin. $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü $[t_0, \theta]$'da sürekli olduğundan düzgün süreklidir. Yani $\varepsilon > 0$ için $|t - \tau| < \delta(\varepsilon)$ iken

$$h(F(t), F(\tau)) < \varepsilon/2 \tag{3.2.1}$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır.

$[t_0, \theta]$ aralığının $t_{i_*} = t_*$ ve $\Delta = t_{i+1} - t_i < \delta(\varepsilon)$ olacak biçimde $\Gamma = \{t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{i_*-1} < t_{i_*} < t_{i_*+1} < \cdots < t_m = \theta\}$ düzgün bölüntüsünü alınsın. Eğer $t_* = t_0$ veya $t_* = \theta$ ise, o halde $t_{i_*} = t_0$ veya $t_{i_*} = t_m = \theta$ olarak alınır.

$\Delta < \delta(\varepsilon)$ olduğundan (3.2.1)'den $\forall i = 0, 1, 2, \cdots, m-1$ için

$$h(F(t_i), F(t_{i+1})) \leq \varepsilon/2 \tag{3.2.2}$$

ve $t \in [t_i, t_{i+1}]$ için

$$h(F(t), F(t_i)) \leq \varepsilon/2 \tag{3.2.3}$$

$$h(F(t), F(t_{i+1})) \leq \varepsilon/2 \tag{3.2.4}$$

olur.

Keyfi t_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ için $F(t_0), F(t_1), \ldots, F(t_m)$ kompakt kümelerdir ve $F(t_{i_*}) = F(t_*)$ dır. $(t_*, x_*) \in gr_{[t_0,\theta]}F(\cdot)$ olduğundan $x_* \in F(t_*)$ dır. O halde (3.2.2)'den

$$\|x_{i_*-1} - x_*\| \leq \varepsilon/2$$

olacak şekilde $x_{i_*-1} \in F(t_{i_*-1})$ vardır. Benzer şekilde

$$\|x_* - x_{i_*+1}\| \leq \varepsilon/2$$

olacak şekilde $x_{i_*+1} \in F(t_{i_*+1})$ vardır. Böyle devam edilirse

$$\|x_m - x_{m-1}\| \leq \varepsilon/2$$

olacak şekilde $x_m \in F(t_m)$ ve

$$\|x_0 - x_1\| \leq \varepsilon/2$$

olacak şekilde $x_0 \in F(t_0)$ vardır.

Böylece keyfi $i = 0, 1, \cdots, m$ için $x_i \in F(t_i)$, ayrıca $x_* = x_{i_*} \in F(t_{i_*}) = F(t_*)$ ve $\forall i = 0, 1, \cdots, m-1$ için

$$\|x_{i+1} - x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.2.5}$$

olacak biçimde x_i'ler $(i = 0, 1, \cdots, m)$ bulunur.

Şimdi $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \cdots, i_* - 1, i_*, i_* + 1, \cdots, m-1$ için

$$f^\varepsilon(t) = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) x_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} x_{i+1}$$

fonksiyonu tanımlansın. Açıktır ki $f^\varepsilon(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyondur ve keyfi $i = 0, 1, 2, \cdots, i_* - 1, i_*, i_* + 1, \cdots, m$ için $f^\varepsilon(t_i) = x_i \in F(t_i)$'dir.

Keyfi $t \in [t_0, \theta]$ ve $t \neq t_i$, $i = 0, 1, 2, \cdots, i_* - 1, i_*, i_* + 1, \cdots, m-1$ için $d(f^\varepsilon(t), F(t))$'ye bakalım. $t \in [t_0, \theta]$ ve $t \neq t_i$, $i = 0, 1, 2, \cdots, m$ olduğundan $t \in (t_i, t_{i+1})$ olacak biçimde $i = 0, 1, 2, \cdots, m-1$ vardır. O zaman (3.2.3)'den

$$\|x_t - x_i\| \leq \varepsilon/2 \tag{3.2.6}$$

olacak biçimde $x_t \in F(t)$ vardır. (3.2.5) ve (3.2.6)'dan

$$\|x_t - x_{i+1}\| \leq \|x_t - x_i\| + \|x_i - x_{i+1}\| \leq \varepsilon \tag{3.2.7}$$

olur. (3.2.6) ve (3.2.7)'den

$$\begin{aligned} d(f^\varepsilon(t), F(t)) &\leq \|f^\varepsilon(t) - x_t\| = \left\| \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) x_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} x_{i+1} - x_t \right\| \\ &\leq \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \|x_i - x_t\| + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \|x_{i+1} - x_t\| \\ &\leq \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} = \left(1 + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $f^\varepsilon(t) \in F(t) + \varepsilon B_n$ olur. □

Sonuç 3.2.2. *$F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ sürekli küme değerli dönüşüm, $\varepsilon > 0$, $\delta(\varepsilon) > 0$ Teorem 3.2.1'in kanıtındaki gibi bulunmuş olsun. O zaman $[t_0, \theta]$ aralığının $\Delta = t_{i+1} - t_i < \delta(\varepsilon)$ olacak biçimdeki keyfi düzgün $\Gamma = \{t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = \theta\}$bölüntüsü için $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $\forall t \in [t_0, \theta]$ için*

$$f^{\varepsilon}(t) \in F(t) + \varepsilon B_n$$

$$f^{\varepsilon}(t_i) \in F(t_i) \quad i = 0, 1, 2, \cdots m - 1$$

olacak biçimde sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörü vardır.

3.3 Lipschitz Sürekli $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ Küme Değerli Dönüşümünün Lipschitz Sürekli Selektörünün Varlığı

Bölüm 3.2'de verilen sürekli $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörünün varlığı kanıtlandı. Genellikle, sürekli $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün sürekli selektörünün olmadığı "Aubin ve Frankowska (1990), Blagodatskikh ve Filippov (1986), Filippov (1967), Hu ve Papageorgiou (1997)" de örneklenmiştir.

Ancak $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü Lipschitz sürekli iken durum farklı olur. $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü Lipschitz sürekli iken, bu küme değerli dönüşümün Lipschitz sürekli selektörü her zaman vardır. Aşağıdaki teorem $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ biçiminde olan Lipschitz sürekli küme değerli dönüşümün, bu küme değerli dönüşümün grafiğinin keyfi noktasından geçen Lipschitz sürekli selektörünün varolduğunu göstermektedir.

Teorem 3.3.1. *(Hermes 1971) $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü $L > 0$ sabitiyle Lipschitz sürekli ve $(t_*, x_*) \in gr_{[t_0,\theta]}F(\cdot)$ olsun. O zaman $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün (t_*, x_*) noktasından geçen Lipschitz sürekli selektörü vardır.*

Kanıt. $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü L sabitiyle Lipschitz sürekli olduğundan $\forall\ t, \tau \in [t_0, \theta]$ ve $\tau > t$ için

$$h(F(\tau), F(t)) \leq L(\tau - t)$$

dir. $[t_0, \theta]$ aralığının

$$\Gamma^{(k)} = \{t_0^{(k)} < t_1^{(k)} < t_2^{(k)} < \ldots t_{j(k)-1}^{(k)} < t_{j(k)}^{(k)} = t_* < t_{j(k)+1}^{(k)} < \ldots < t_{m(k)}^{(k)} = \theta\}$$

düzgün bölüntüler dizisi alınsın. $\Delta^{(k)} = t_{i+1}^{(k)} - t_i^{(k)}$ ve $k \to \infty$ iken $\Delta^{(k)} \to 0$ olsun. O zaman $\forall\ i = 0, 1, 2, \cdots j(k)-1, j(k), j(k)+1, \cdots, m(k)-1$ için

$$h(F(t_{i+1}^{(k)}), F(t_i^{(k)})) \leq L \cdot \Delta^{(k)} \tag{3.3.1}$$

dır. $\forall\ t \in \left[t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)}\right]$ için

$$h(F(t_i^{(k)}), F(t)) \leq L(t - t_i^{(k)}) \leq L \cdot \Delta^{(k)} \tag{3.3.2}$$

ve

$$h(F(t_{i+1}^{(k)}), F(t)) \leq L(t_{i+1}^{(k)} - t) \leq L \cdot \Delta^{(k)} \tag{3.3.3}$$

dır.

Keyfi $t_i^{(k)}$, $i = 0, 1, 2, \cdots j(k) - 1, j(k), j(k) + 1, \cdots, m(k) - 1$ için $F(t_0^{(k)}), F(t_1^{(k)}), \cdots, F(t_{j(k)-1}^{(k)}), F(t_{j(k)}^{(k)}), F(t_{j(k)+1}^{(k)}), \cdots, F(t_{m(k)}^{(k)})$ kompakt kümelerdir ve $\forall k$ için $F(t_{j(k)}^{(k)}) = F(t_*)$ dır. $(t_*, x_*) \in gr_{[t_0,\theta]}F(\cdot)$ olduğundan $x_* \in F(t_*) = F(t_{j(k)}^{(k)})$ dır. O halde (3.3.1)'den

$$\left\| x_* - x_{j(k)-1}^{(k)} \right\| \leq L \cdot \Delta^{(k)}$$

olacak şekilde $x_{j(k)-1}^{(k)} \in F(t_{j(k)-1}^{(k)})$ vardır. Benzer şekilde

$$\left\| x_{j(k)+1}^{(k)} - x_* \right\| \leq L \cdot \Delta^{(k)}$$

olacak şekilde $x_{j(k)+1}^{(k)} \in F(t_{j(k)+1}^{(k)})$ vardır. Aynı şekilde

$$\left\| x_{j(k)-2}^{(k)} - x_{j(k)-1}^{(k)} \right\| \leq L \cdot \Delta^{(k)}$$

ve

$$\left\| x^{(k)}_{j(k)+2} - x^{(k)}_{j(k)+1} \right\| \leq L \cdot \Delta^{(k)}$$

olacak şekilde $x^{(k)}_{j(k)-2} \in F(t^{(k)}_{j(k)-2})$, $x^{(k)}_{j(k)+2} \in F(t^{(k)}_{j(k)+2})$ vardır. Böyle devam edilirse

$$\left\| x^{(k)}_{m(k)} - x^{(k)}_{m(k)-1} \right\| \leq L \cdot \Delta^{(k)}$$

ve

$$\left\| x^{(k)}_{1} - x^{(k)}_{0} \right\| \leq L \cdot \Delta^{(k)}$$

olacak şekilde $x^{(k)}_{m(k)} \in F(t^{(k)}_{m(k)})$ ve $x^{(k)}_0 \in F(t^{(k)}_0)$ vardır.

Böylece keyfi $i = 0, 1, 2, \cdots j(k) - 1, j(k), j(k) + 1, \cdots, m(k)$ için $x^{(k)}_{i(k)} \in F(t^{(k)}_{i(k)})$, ayrıca $x_* = x^{(k)}_{j(k)} \in F(t^{(k)}_{j(k)}) = F(t_*)$ ve $i = 0, 1, 2, \cdots j(k) - 1, j(k), j(k) + 1, \cdots, m(k) - 1$ için

$$\| x^{(k)}_{i(k)+1} - x^{(k)}_{i(k)} \| \leq L \cdot \Delta^{(k)} \tag{3.3.4}$$

olacak biçimde $x^{(k)}_{i(k)}$'lar bulunur.

Şimdi $t \in \left[t^{(k)}_{i(k)}, t^{(k)}_{i(k)+1} \right]$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, m(k) - 1)$ için

$$f_{\Delta^{(k)}}(t) = \left(1 - \frac{t - t^{(k)}_{i(k)}}{t^{(k)}_{i(k)+1} - t^{(k)}_{i(k)}} \right) x^{(k)}_{i(k)} + \frac{t - t^{(k)}_{i(k)}}{t^{(k)}_{i(k)+1} - t^{(k)}_{i(k)}} x^{(k)}_{i(k)+1}$$

fonksiyonu tanımlansın.

Keyfi $i = 0, 1, 2, \cdots j(k) - 1, j(k), j(k) + 1, \cdots, m(k)$ için $f_{\Delta^{(k)}}(t^{(k)}_{i(k)}) = x^{(k)}_{i(k)} \in F(t^{(k)}_{i(k)})$ ve $\forall k = 1, 2, \cdots$ için $f_{\Delta^{(k)}}(t^{(k)}_{j(k)}) = x_* \in F(t_*)$ dır.

Keyfi $t \in [t_0, \theta]$ ve $t \neq t^{(k)}_i$ $i = 0, 1, 2, \cdots j(k) - 1, j(k)$, $j(k) + 1, \cdots, m(k) - 1$ için $d(f_{\Delta^{(k)}}(t), F(t))$ uzaklığına bakılsın.

$t \in [t_0, \theta]$ olduğundan $t \in \left(t^{(k)}_{i(k)}, t^{(k)}_{i(k)+1} \right)$ olacak biçimde $i(k)$ vardır. $x^{(k)}_{i(k)} \in F(t^{(k)}_{i(k)})$ olduğundan (3.3.2)'den

$$\left\| x_t - x^{(k)}_{i(k)} \right\| \leq L \cdot \Delta^{(k)} \tag{3.3.5}$$

olacak şekilde $x_t \in F(t)$ vardır. Ayrıca (3.3.4) ve (3.3.5)'den

$$\left\| x_t - x^{(k)}_{i(k)+1} \right\| \leq \left\| x_t - x^{(k)}_{i(k)} \right\| + \left\| x^{(k)}_{i(k)} - x^{(k)}_{i(k)+1} \right\| \leq 2L \cdot \Delta^{(k)} \tag{3.3.6}$$

dır. (3.3.5) ve (3.3.6)'dan

$$\begin{aligned}
d(f_{\Delta^{(k)}}(t), F(t)) &\leq \|f_{\Delta^{(k)}}(t) - x_t\| \\
&= \left\| \left(1 - \frac{t - t_{i(k)}^{(k)}}{t_{i(k)+1}^{(k)} - t_{i(k)}^{(k)}}\right) x_{i(k)}^{(k)} + \frac{t - t_{i(k)}^{(k)}}{t_{i(k)+1}^{(k)} - t_{i(k)}^{(k)}} x_{i(k)+1}^{(k)} - x_t \right\| \\
&\leq \left(1 - \frac{t - t_{i(k)}^{(k)}}{t_{i(k)+1}^{(k)} - t_{i(k)}^{(k)}}\right) \left\| x_{i(k)}^{(k)} - x_t \right\| \qquad (3.3.7) \\
&\quad + \frac{t - t_{i(k)}^{(k)}}{t_{i(k)+1}^{(k)} - t_{i(k)}^{(k)}} \left\| x_{i(k)+1}^{(k)} - x_t \right\| \\
&\leq \left(1 + \frac{t - t_{i(k)}^{(k)}}{t_{i(k)+1}^{(k)} - t_{i(k)}^{(k)}}\right) L \cdot \Delta^{(k)} \leq 2L \cdot \Delta^{(k)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $f_{\Delta^{(k)}}(t) \in F(t) + 2L \cdot \Delta^{(k)} B_n$ olur.

Şimdi $\forall\ i = 0, 1, 2, \cdots j(k) - 1, j(k), j(k) + 1, \cdots, m(k)$ için $\left[t_{i(k)}^{(k)}, t_{i(k)+1}^{(k)}\right]$ aralıklarında $f_{\Delta^{(k)}}(\cdot)$ fonksiyonunun L sabitiyle Lipschitz sürekli olduğu gösterilsin. $\tau_1, \tau_2 \in \left[t_{i(k)}^{(k)}, t_{i(k)+1}^{(k)}\right]$ alınsın. (3.3.4)'den

$$\begin{aligned}
\|f_{\Delta^{(k)}}(\tau_2) - f_{\Delta^{(k)}}(\tau_1)\| &= \left\| \left(1 - \frac{\tau_2 - t_{i(k)}^{(k)}}{t_{i(k)+1}^{(k)} - t_{i(k)}^{(k)}}\right) x_{i(k)}^{(k)} + \frac{\tau_2 - t_{i(k)}^{(k)}}{t_{i(k)+1}^{(k)} - t_{i(k)}^{(k)}} x_{i(k)+1}^{(k)} \right. \\
&\quad \left. - \left(1 - \frac{\tau_1 - t_{i(k)}^{(k)}}{t_{i(k)+1}^{(k)} - t_{i(k)}^{(k)}}\right) x_{i(k)}^{(k)} - \frac{\tau_1 - t_{i(k)}^{(k)}}{t_{i(k)+1}^{(k)} - t_{i(k)}^{(k)}} x_{i(k)+1}^{(k)} \right\| \\
&= \left\| \frac{\tau_2 - \tau_1}{t_{i(k)+1}^{(k)} - t_{i(k)}^{(k)}} x_{i(k)+1}^{(k)} - \frac{\tau_2 - \tau_1}{t_{i(k)+1}^{(k)} - t_{i(k)}^{(k)}} x_{i(k)}^{(k)} \right\| \\
&\leq \frac{\tau_2 - \tau_1}{t_{i(k)+1}^{(k)} - t_{i(k)}^{(k)}} \left\| x_{i(k)+1}^{(k)} - x_{i(k)}^{(k)} \right\| \qquad (3.3.8) \\
&\leq \frac{L \cdot \Delta^{(k)}}{\Delta^{(k)}} (\tau_2 - \tau_1) = L \cdot (\tau_2 - \tau_1)
\end{aligned}$$

olur.

O halde $\forall\ i = 0, 1, 2, \cdots j(k) - 1, j(k), j(k) + 1, \cdots, m(k)$ için $\left[t_{i(k)}^{(k)}, t_{i(k)+1}^{(k)}\right]$ aralıklarında $f_{\Delta^{(k)}}(\cdot)$ fonksiyonu L sabitiyle Lipschitz sürekli olur.

Şimdi $\forall\ i = 0, 1, 2, \cdots j(k) - 1, j(k), j(k) + 1, \cdots, m(k)$ için $\left[t^{(k)}_{i(k)}, t^{(k)}_{i(k)+1}\right]$ aralıklarında $f_{\Delta^{(k)}}(\cdot)$ fonksiyonu L sabitiyle Lipschitz olurken $[t_0, \theta]$ aralığında da aynı L sabitiyle Lipschitz sürekli olduğu gösterilsin.

$\tau_1 \in \left[t^{(k)}_{i(k)}, t^{(k)}_{i(k)+1}\right]$, $\tau_2 \in \left[t^{(k)}_{l(k)}, t^{(k)}_{l(k)+1}\right]$, $\tau_1 < \tau_2$ $(i(k) < l(k))$ alalım.(3.3.8) den

$$\begin{aligned}
\|f_{\Delta^{(k)}}(\tau_2) - f_{\Delta^{(k)}}(\tau_1)\| &\leq \left\|f_{\Delta^{(k)}}(\tau_2) - f_{\Delta^{(k)}}(t^{(k)}_{l(k)})\right\| \\
&\quad + \left\|f_{\Delta^{(k)}}(t^{(k)}_{l(k)}) - f_{\Delta^{(k)}}(t^{(k)}_{l(k)-1})\right\| + \dots \\
&\quad + \left\|f_{\Delta^{(k)}}(t^{(k)}_{i(k)+1}) - f_{\Delta^{(k)}}(\tau_1)\right\| \\
&\leq L \cdot \left(\tau_2 - t^{(k)}_{l(k)}\right) + L \cdot \left(t^{(k)}_{l(k)} - t^{(k)}_{l(k)-1}\right) + \dots \\
&\quad + L \cdot \left(t^{(k)}_{i(k)+1} - \tau_1\right) = L \cdot (\tau_2 - \tau_1)
\end{aligned}$$

olur. Yani $f_{\Delta^{(k)}}(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, \theta]$ aralığında aynı L sabitiyle Lipschitz sürekli olur.

Keyfi k için $\Delta^{(k)} \leq r = \theta - t_0$ olduğundan, $\forall k = 1, 2, \cdots$ ve $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için

$$f_{\Delta^{(k)}}(t) \in F(t) + 2L\Delta^{(k)} \cdot B_n \subset F(t) + 2Lr \cdot B_n \tag{3.3.9}$$

olur. $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ Lipschitz sürekli olduğundan,

$$F_* = F([t_0, \theta]) = \bigcup_{t \in [t_0, \theta]} F(t)$$

kompakt kümedir. O halde (3.3.9)'dan $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için

$$f_{\Delta^{(k)}}(t) \in F_* + 2Lr \cdot B_n \tag{3.3.10}$$

olur. $F_* \subset \mathbb{R}^n$ kompakt olduğundan (3.3.10)'dan $\forall k = 1, 2, \cdots$ ve $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|f_{\Delta^{(k)}}(t)\| \leq K \tag{3.3.11}$$

olacak biçimde $K \geq 0$ vardır. Böylece $\{f_{\Delta^{(k)}}(\cdot) : k = 1, 2, \cdots\}$ fonksiyonlar ailesi düzgün sınırlıdır.

$\forall k = 1, 2, \cdots$ için $f_{\Delta^{(k)}}(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları aynı L sabiti ile Lipschitz sürekli olduğundan $\{f_{\Delta^{(k)}}(\cdot) : k = 1, 2, \cdots\}$ fonksiyonlar ailesi eş sürekli fonksiyonlar ailesi olur. O halde Arzela-Askoli teoreminden $\{f_{\Delta^{(k)}}(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisinin yakınsak alt dizisi vardır. Genelliği bozmadan $k \to \infty$ iken $f_{\Delta^{(k)}}(\cdot) \to f_*(\cdot)$ olduğu varsayılsın. (3.3.7)'den $\forall k = 1, 2, \cdots$ ve $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için

$$f_{\Delta^{(k)}}(t) \in F(t) + 2L\Delta^{(k)} \cdot B_n$$

dir. $k \to \infty$ iken $\Delta^{(k)} \to 0$, $f_{\Delta^{(k)}}(\cdot) \to f_*(\cdot)$, $F(t) \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme olduğundan $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için

$$f_*(t) \in F(t)$$

olur.

Ayrıca, $\forall t_{j(k)}^{(k)} \in \Gamma^{(k)}$ için $f_{\Delta^{(k)}}(t_{j(k)}^{(k)}) = f_{\Delta^{(k)}}(t_*) = x_* \in F(t_*)$, $k \to \infty$ iken $f_{\Delta^{(k)}}(\cdot) \to f_*(\cdot)$ olduğundan $f_*(t_*) = x_* \in F(t_*)$ olur.

Keyfi $k = 1, 2, \cdots$ için $f_{\Delta^{(k)}}(\cdot)$ fonksiyonları aynı L sabiti ile Lipschitz sürekli, $k \to \infty$ iken $f_{\Delta^{(k)}}(\cdot) \to f_*(\cdot)$ olduğundan $f_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu da L sabiti ile Lipschitz sürekli olur.

Böylece $f_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu L sabiti ile Lipschitz sürekli, $f_*(t_*) = x_*$ ve $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için $f_*(t) \in F(t)$ olur. □

3.4 Sürekli Noktasal ε-Yaklaşık Selektörün Olmadığı Durum

Bölüm 3.2.'de sürekli $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörünün varolduğu kanıtlandı. Eğer $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü bir boyutlu uzayın alt kümesinde değil, daha büyük boyutlu uzayın alt kümesinde tanımlı ise, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörü olmayabilir. Yani $D \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, olmak üzere sürekli $F(\cdot) : D \to comp(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörü olmayabilir.

Bu bölümde $\mathbb{R}^2$'nin birim yuvarından yine kendisinin kompakt altkümelerine giden sürekli bir küme değerli dönüşümün sürekli noktasal $\varepsilon-$yaklaşık selektörü olamayabileceğine ilişkin bir örnek verilecektir.

Örnek 3.4.1. *$\overline{B}_2$ ile $\mathbb{R}^2$'nin kapalı birim yuvarı gösterilsin.* $Q = \{(\rho, \theta) : 0 < \rho \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ *olsun.* $(x, y) \in \overline{B}_2 \backslash \{(0,0)\}$ *için* $(\rho, \theta) \in Q$,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ve

$$P(x, y) = (\rho, \theta)$$

olmak üzere

$$P(\cdot, \cdot) : \overline{B}_2 \backslash \{(0,0)\} \to Q$$

fonksiyonu tanımlanasın.

$r \in (0, 1)$ *alınsın ve sabitlensin. Daha sonra r somut olarak 0'a yakın bir sayı olarak seçilecektir.*

Şimdi $(\rho, \theta) \in Q$ *için*

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, \theta) &= \{(-(1-r)\cos(\theta + \alpha), -(1-r)\sin(\theta+\alpha)) \in \mathbb{R}^2 : \\ &\quad -\pi(1-\rho) \leq \alpha \leq \pi(1-\rho)\} \end{aligned}$$

olmak üzere $\Phi(\cdot, \cdot) : Q \rightsquigarrow \mathbb{R}^2$ *küme değerli dönüşümü tanımlansın. Keyfi* (ρ, θ) *alınsın ve* $(f_1, f_2) \in \Phi(\rho, \theta)$ *olsun. O halde*

$$(f_1, f_2) = (-(1-r)\cos(\theta + \alpha_*), -(1-r)\sin(\theta + \alpha_*)) \tag{3.4.1}$$

olacak biçimde $\alpha_* \in [-\pi(1-\rho), \pi(1-\rho)]$ *vardır. (3.4.1) den*

$$\|(f_1, f_2)\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{(1-r)^2} = 1 - r < 1 \tag{3.4.2}$$

olur. O zaman (3.4.2)'den $(f_1, f_2) \in \overline{B}_2$ *olduğu bulunur. Böylece* $\forall(\rho,\theta) \in Q$ *için* $\Phi(\rho,\theta) \subset \overline{B}_2$ *olur.*

Son olarak $F(\cdot) : \overline{B}_2 \rightsquigarrow \mathbb{R}^2$*küme değerli dönüşümü*

$$F(x,y) = \begin{cases} (1-r)\overline{B}_2 & , \quad (x,y) = (0,0) \\ \Phi(P(x,y)) & , \quad (x,y) \in \overline{B}_2 \backslash \{(0,0)\} \end{cases} \tag{3.4.3}$$

olarak tanımlansın. Açıktır ki $\forall(x,y) \in \overline{B}_2$ *için* $F(x,y) \subset \overline{B}_2$ *dir.*

$r = \dfrac{1}{10^{10}}$, $\varepsilon_* = \dfrac{1}{10^{20}}$ *seçelim.* $(x_*, y_*) = (0,0)$ *için*

$$\begin{aligned} F(0,0) + \varepsilon_* \overline{B}_2 &= (1-r)\overline{B}_2 + \varepsilon_* \overline{B}_2 \\ &= (1 - \frac{1}{10^{10}})\overline{B}_2 + \frac{1}{10^{20}}\overline{B}_2 \\ &= (1 - \frac{1}{10^{10}} + \frac{1}{10^{20}})\overline{B}_2 \subset \overline{B}_2 \end{aligned}$$

dir.

$(x_*, y_*) \neq (0,0)$ *için* $(x_*, y_*) \to P(x_*, y_*) = (\rho_*, \theta_*)$ *olup*

$$\begin{aligned} F(x_*, y_*) &= \{(-(1 - \frac{1}{10^{10}})\cos(\theta_* + \alpha), -(1 - \frac{1}{10^{10}})\sin(\theta_* + \alpha)) \\ &: \quad -\pi(1-\rho_*) \leq \alpha \leq \pi(1-\rho_*)\} \end{aligned}$$

dır.

$u_* = (\varphi_*, \psi_*) \in F(x_*, y_*) + \dfrac{1}{10^{20}}\overline{B}_2$ *alınsın. O zaman*

$$u_* = (-(1 - \frac{1}{10^{10}})\cos(\theta_* + \alpha_*) + \frac{1}{10^{20}}b_1, -(1 - \frac{1}{10^{10}})\sin(\theta_* + \alpha_*) + \frac{1}{10^{20}}b_2)$$

dir. Burada $(b_1, b_2) \in \overline{B}_2$ *yani*

$$b_1^2 + b_2^2 = 1, \quad -\pi(1-\rho_*) \leq \alpha_* \leq \pi(1-\rho_*)$$

dir.

$$\|u_*\|^2 = (1 - \frac{1}{10^{10}})^2 + \frac{1}{10^{40}} - 2(1 - \frac{1}{10^{10}})\frac{1}{10^{20}}(b_1\cos(\theta_* + \alpha_*) + b_2\sin(\theta_* + \alpha_*)) \tag{3.4.4}$$

dır. $|b_1| \leq 1, |b_2| \leq 1$ *olduğundan (3.4.4)'den*

$$\|u_*\|^2 \leq (1 - \frac{1}{10^{10}})^2 + \frac{1}{10^{40}} + 4(1 - \frac{1}{10^{10}})\frac{1}{10^{20}}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \|u_*\|^2 &\leq (1 - \frac{1}{10^{10}})^2 + \frac{1}{10^{40}} + 4(1 - \frac{1}{10^{10}})\frac{1}{10^{20}} \\ &= 1 - \frac{2}{10^{10}} + \frac{1}{10^{20}} + \frac{1}{10^{40}} + 4\frac{1}{10^{20}} - 4\frac{1}{10^{30}} \qquad (3.4.5) \\ &= 1 - \frac{1}{10^{10}}(2 + \frac{5}{10^{10}} - \frac{4}{10^{20}} + \frac{1}{10^{30}}) < 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $u_* = (\varphi_*, \psi_*) \in \overline{B}_2$ *olur.* $u_* \in F(x_*, y_*) + \varepsilon_* \overline{B}_2$, $(\varepsilon_* = \frac{1}{10^{20}})$ *keyfi seçildiğinden (3.4.5)'den* $F(x_*, y_*) + \frac{1}{10^{20}}\overline{B}_2 \subset \overline{B}_2$ *olduğu elde edilir. Yani*

$$F(\cdot) + \varepsilon_* \overline{B}_2 : \overline{B}_2 \rightsquigarrow \overline{B}_2 \quad (\varepsilon_* = \frac{1}{10^{20}})$$

dir.

Keyfi $(x, y) \in \overline{B}_2$ *için* $f(x, y) \in F(x, y) + \varepsilon_* \overline{B}_2$ *olacak şekilde* $f(\cdot) : \overline{B}_2 \to \mathbb{R}^2$ *sürekli fonksiyonun varolduğunu kabul edilsin* $(\varepsilon_* = \frac{1}{10^{20}})$.

Keyfi $(x, y) \in \overline{B}_2$ *için* $F(x, y) + \varepsilon_* \overline{B}_2 \subset \overline{B}_2$ *olduğundan* $\forall (x, y) \in \overline{B}_2$ *için* $f(x, y) \in \overline{B}_2$ *olur. Yani* $f(\cdot) : \overline{B}_2 \to \overline{B}_2$ *sürekli fonksiyon olur. O zaman* $f(\cdot)$ *fonksiyonunun sabit noktası vardır. Yani* $f(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ *olacak şekilde* $u_0 = (x_0, y_0) \in \overline{B}_2$ *vardır.*

$P(x_0, y_0) = (\rho_0, \theta_0) \in Q$ *olsun. O halde*

$$\rho_0 = \|u_0\| = \|(x_0, y_0)\|$$

olur.

$$f(x_0, y_0) \in F(x_0, y_0) + \varepsilon_* \overline{B}_2$$

olduğundan

$$(x_0, y_0) \in F(x_0, y_0) + \varepsilon_* \overline{B}_2$$

olup

$$(x_0,y_0)=(-(1-\frac{1}{10^{10}})\cos(\theta_0+\alpha_0)+\frac{1}{10^{20}}b_1^0,-(1-\frac{1}{10^{10}})\sin(\theta_0+\alpha_0)+\frac{1}{10^{20}}b_2^0) \tag{3.4.6}$$

dır. Burada

$$\left(b_1^0\right)^2+\left(b_2^0\right)^2=1,\quad -\pi(1-\rho_0)\leq\alpha_0\leq\pi(1-\rho_0)$$

biçimindedir.

$$\begin{aligned}\|u_0\|^2 &= \|(x_0,y_0)\|^2=(1-\frac{1}{10^{10}})^2+\frac{1}{10^{40}}\\ &\quad -2(1-\frac{1}{10^{10}})\frac{1}{10^{20}}(b_1^0\cos(\theta_0+\alpha_0)+b_2^0\sin(\theta_0+\alpha_0))\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\rho_0^2 &= \|u_0\|^2\geq 1-\frac{2}{10^{10}}+\frac{1}{10^{20}}+\frac{1}{10^{40}}-\frac{4}{10^{20}}+\frac{4}{10^{30}}\\ &= 1-\frac{2}{10^{10}}-\frac{3}{10^{20}}+\frac{4}{10^{30}}+\frac{1}{10^{40}}>1-\frac{5}{10^{10}}>1-\frac{1}{10^{9}}\end{aligned}$$

elde edilir. (3.4.5)'e benzer olarak $\|u_0\|^2<1$ *olduğu gösterilebilir.*

$$1-\frac{1}{10^9}<\rho_0^2=\|u_0\|^2<1$$

olduğundan

$$1-\frac{1}{10^4}<\rho_0<1 \tag{3.4.7}$$

dir. Buradan da

$$-\pi(1-\rho_0)\leq\alpha_0\leq\pi(1-\rho_0)$$

olduğundan $\alpha_0\in\left(-\frac{\pi}{10^4},\frac{\pi}{10^4}\right)$ *elde edilir.* $P(x_0,y_0)=(\rho_0,\theta_0)$ *olduğundan* $x_0=\rho_0\cos\theta_0$, $y_0=\rho_0\sin\theta_0$ *olur. O halde (3.4.6) dan*

$$\begin{aligned}\rho_0\cos\theta_0 &= -(1-\frac{1}{10^{10}})\cos(\theta_0+\alpha_0)+\frac{1}{10^{20}}b_1^0\\ \rho_0\sin\theta_0 &= -(1-\frac{1}{10^{10}})\sin(\theta_0+\alpha_0)+\frac{1}{10^{20}}b_2^0\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Düzenlenirse

$$\begin{aligned}\rho_0\cos\theta_0+(1-\frac{1}{10^{10}})\cos(\theta_0+\alpha_0) &= \frac{1}{10^{20}}b_1^0\\ \rho_0\sin\theta_0+(1-\frac{1}{10^{10}})\sin(\theta_0+\alpha_0) &= \frac{1}{10^{20}}b_2^0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise

$$\left|\rho_0\cos\theta_0+(1-\frac{1}{10^{10}})\cos(\theta_0+\alpha_0)\right| = \frac{1}{10^{20}}\left|b_1^0\right| \tag{3.4.8}$$

ve

$$\left|\rho_0\sin\theta_0+(1-\frac{1}{10^{10}})\sin(\theta_0+\alpha_0)\right| = \frac{1}{10^{20}}\left|b_2^0\right| \tag{3.4.9}$$

olur.

$|\cos\theta_0|\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *olduğu varsayılsın.* $\alpha_0\in\left(-\dfrac{\pi}{10^4},\dfrac{\pi}{10^4}\right)$ *olduğundan*

$$\begin{aligned}|\cos(\theta_0+\alpha_0)-\cos\theta_0| &= 2\left|\sin\frac{\theta_0+\theta_0+\alpha_0}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{\alpha_0}{2}\right|\\ &\leq 2\left|\sin\frac{\alpha_0}{2}\right|\leq 2\frac{|\alpha_0|}{2}<\frac{\pi}{10^4}\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\cos(\theta_0+\alpha_0)=\cos\theta_0+r_*\frac{\pi}{10^4} \tag{3.4.10}$$

olacak biçimde $r_*\in[-1,1]$ *vardır. O halde (3.4.7) ve (3.4.10)'dan*

$$\begin{aligned}&\left|\rho_0\cos\theta_0+(1-\frac{1}{10^{10}})\cos(\theta_0+\alpha_0)\right|\\ &=\left|\rho_0\cos\theta_0+(1-\frac{1}{10^{10}})\cos\theta_0+r_*\frac{\pi}{10^4}(1-\frac{1}{10^{10}})\right|\\ &\geq\left(\rho_0+(1-\frac{1}{10^{10}})\right)|\cos\theta_0|-|r_*|\,\frac{\pi}{10^4}(1-\frac{1}{10^{10}}) \qquad (3.4.11)\\ &>\left[\left(1-\frac{1}{10^4}\right)+(1-\frac{1}{10^{10}})\right]\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{10^4}\\ &>\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{10^4}>\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

olur.

$(b_1^0, b_2^0) \in \overline{B}_2$ *,yani* $(b_1^0)^2 + (b_2^0)^2 \leq 1$ *olduğundan,* $|b_1^0| \leq 1$ *dir. O halde (3.4.8)'den*

$$\left|\rho_0 \cos\theta_0 + (1 - \frac{1}{10^{10}}) \cos(\theta_0 + \alpha_0)\right| = \frac{1}{10^{20}} \left|b_1^0\right| \leq \frac{1}{10^{20}} \tag{3.4.12}$$

dir.

Böylece (3.4.11) ve (3.4.12) eşitsizlikleri (3.4.8) eşitliği ile çelişir. Yani $|\cos\theta_0| \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *iken (3.4.8) doğru olamaz.*

Eğer $|\cos\theta_0| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *ise o zaman* $|\sin\theta_0| \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *olur. Benzer olarak* $|\sin\theta_0| \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *iken (3.4.9) eşitliğinin doğru olmayacağı kanıtlanabilir.*

$|\sin\theta_0| \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *olduğu varsayılsın.* $\alpha_0 \in \left(-\dfrac{\pi}{10^4}, \dfrac{\pi}{10^4}\right)$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} |\sin(\theta_0 + \alpha_0) - \sin\theta_0| &= 2\left|\cos\frac{\theta_0 + \theta_0 + \alpha_0}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{\alpha_0}{2}\right| \\ &\leq 2\left|\sin\frac{\alpha_0}{2}\right| \leq 2\frac{|\alpha_0|}{2} < \frac{\pi}{10^4} \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\sin(\theta_0 + \alpha_0) = \sin\theta_0 + r_* \frac{\pi}{10^4} \tag{3.4.13}$$

olacak biçimde $r_* \in [-1, 1]$ *vardır. O halde (3.4.7) ve (3.4.13)'den*

$$\begin{aligned} &\left|\rho_0 \sin\theta_0 + (1 - \frac{1}{10^{10}}) \sin(\theta_0 + \alpha_0)\right| \\ &= \left|\rho_0 \sin\theta_0 + (1 - \frac{1}{10^{10}}) \sin\theta_0 + r_* \frac{\pi}{10^4}(1 - \frac{1}{10^{10}})\right| \\ &\geq \left(\rho_0 + (1 - \frac{1}{10^{10}})\right) |\sin\theta_0| - |r_*| \frac{\pi}{10^4}(1 - \frac{1}{10^{10}}) \qquad (3.4.14) \\ &> \left[\left(1 - \frac{1}{10^4}\right) + (1 - \frac{1}{10^{10}})\right] \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{10^4} \\ &> \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{10^4} > \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

olur.

$(b_1^0, b_2^0) \in \overline{B}_2$, *yani* $(b_1^0)^2 + (b_2^0)^2 \leq 1$ *olduğundan,* $|b_2^0| \leq 1$ *dir. O halde (3.4.9)'dan*

$$\left|\rho_0 \sin\theta_0 + (1 - \frac{1}{10^{10}}) \sin(\theta_0 + \alpha_0)\right| = \frac{1}{10^{20}} \left|b_2^0\right| \leq \frac{1}{10^{20}} \tag{3.4.15}$$

dir.

Böylece (3.4.14) ve (3.4.15) eşitsizlikleri (3.4.9) eşitliği ile çelişir. Yani $|\cos\theta_0| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *iken (3.4.9) doğru olamaz.*

O halde, varsayım doğru değildir ve $F(\cdot,\cdot) : \overline{B}_2 \rightsquigarrow \overline{B}_2$ *kompakt değerli küme değerli dönüşümünün* $(r = \dfrac{1}{10^{10}})$ *sürekli noktasal* ε_*-*yaklaşık selektörü* $(\varepsilon_* = \dfrac{1}{10^{20}})$ *yoktur.*

Böylece, Örnek 3.4.1 ile verilen ve (3.4.3) ile tanımlı $F(\cdot) : \overline{B}_2 \to \overline{B}_2$, $(r = \dfrac{1}{10^{10}})$ küme değerli dönüşümünün $\varepsilon_* = \dfrac{1}{10^{20}}$ iken sürekli noktasal ε_*-yaklaşık selektörü yoktur. (Bu durumda keyfi $(x, y) \in \overline{B}_2$ için $F(x, y) + \varepsilon_* \overline{B}_2 \subset \overline{B}_2$ olur.) O halde (3.4.3) ile tanımlı $F(\cdot) : \overline{B}_2 \to \overline{B}_2$, $(r = \dfrac{1}{10^{10}})$ sürekli küme değerli dönüşümünün, keyfi $\varepsilon < \varepsilon_* = \dfrac{1}{10^{20}}$ içinde sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörü yoktur. Ayrıca, (3.4.3) ile tanımlı sürekli $F(\cdot) : \overline{B}_2 \to \overline{B}_2$, $(r = \dfrac{1}{10^{10}})$ küme değerli dönüşümünün sürekli selektörü de yoktur.

4 SÜREKLİ SELEKTÖRLERİN YAKLAŞIK SÜREKLİ SELEKTÖRLERE PARÇALANIŞI

4.1 Skaler Değişkenli Küme Değerli Dönüşümlerin Afin İnterpolasyonu

$F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün interpolasyonu tanımlansın. $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ verilen bir küme değerli dönüşüm, $\Delta = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_N = \theta\}$ ise verilen $[t_0, \theta]$ aralığının bir bölüntüsü olsun.

$$diam(\Delta) = \max\{t_{i+1} - t_i : i = 0, 1, \cdots, N-1\}$$

olarak tanımlanan $diam(\Delta)$'ya verilen Δ bölüntüsünün çapı denir. Şimdi her $i = 0, 1, \cdots, N-1$ ve $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\begin{aligned} F^*_\Delta(t) &= \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) F(t_i) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} F(t_{i+1}) \\ F^*_\Delta(\theta) &= F(\theta) \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

olmak üzere $t \to F^*_\Delta(t), \quad t \in [t_0, \theta]$ küme değerli dönüşümü tanımlansın.

Tanım 4.1.1. *$F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşüm, $\Delta = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = \theta\}$ $[t_0, \theta]$ aralığının bir bölüntüsü olsun. (4.1.1) ile tanımlanan $t \to F^*_\Delta(t), \quad t \in [t_0, \theta]$ dönüşümüne verilen $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümünün Δ bölüntüsüne göre afin interpolasyonu denir.*

(4.1.1)'den açıktır ki; $\forall t = t_i, (i = 0, 1, \cdots, N)$ için $F(t_i) = F^*_\Delta(t_i)$ olur. Ayrıca $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ olduğundan, her $t \in [t_0, \theta]$ için $F(t) \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme olur. O halde (4.1.1)'den $\forall t \in [t_0, \theta]$ için $F^*_\Delta(t) \subset \mathbb{R}^n$'in de kompakt küme olduğu bulunur.

Eğer $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$ biçiminde küme değerli dönüşüm ise o zaman $\forall t \in [t_0, \theta]$ için $F(t) \subset \mathbb{R}^n$ konveks kompakt küme olur. Buradan yine (4.1.1)'den $\forall t \in [t_0, \theta]$ için $F^*_\Delta(t) \subset \mathbb{R}^n$ kümesi de konveks ve kompakt küme olur. Bunlara dayanarak aşağıdaki önerme ifade edilebilir.

Önerme 4.1.2. *$F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşüm, $\Delta = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_N = \theta\}$ $[t_0, \theta]$ aralığının bir bölüntüsü, $t \to F^*_\Delta(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, küme değerli dönüşümü $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün Δ bölüntüsüne göre (4.1.1) ile belirlenen afin interpolasyonu olsun. O zaman $t \to F^*_\Delta(t)$, $t \in [t_0, \theta]$, küme değerli dönüşümü $F^*_\Delta(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ olacak biçimde küme değerli dönüşümdür ve $\forall t = t_i \quad (i = 0, 1, \cdots, N)$ için $F(t_i) = F^*_\Delta(t_i)$ olur.*

Ayrıca, eğer $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$ biçiminde küme değerli dönüşüm ise $F^*_\Delta(\cdot)$ küme değerli dönüşümüde $F^*_\Delta(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$ biçiminde küme değerli dönüşümdür.

Önerme 4.1.3. *$F(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşüm, $\Delta = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_N = \theta\}$ $[t_0, \theta]$ aralığının bir bölüntüsü olsun. O zaman $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün Δ bölüntüsüne göre afin interpolasyonu olan $F^*_\Delta(\cdot) : [t_0, \theta] \to comp(\mathbb{R}^n)$ dönüşümü sürekli küme değerli dönüşümdür.*

Şimdi sürekli $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü ile bu küme değerli dönüşümün afin interpolasyonu arasındaki ilişkiyi gösteren önerme verilsin.

Önerme 4.1.4. *$\varepsilon > 0$, $F(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$ sürekli küme değerli dönüşüm, $\Delta = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_N = \theta\}$ $[t_0, \theta]$ aralığının keyfi bir bölüntüsü, $F^*_\Delta(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün Δ bölüntüsüne göre (4.1.1) ile tanımlanan afin interpolasyonu olsun. O zaman $diam(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ iken $\forall t \in [t_0, \theta]$ için*

$$h(F(t), F^*_\Delta(t)) \leq \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır.

Kanıt. $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü $[t_0, \theta]$ aralığında sürekli olduğundan düzgün süreklidir. Yani $\varepsilon > 0$ için $|t-\tau| < \delta(\varepsilon)$ iken

$$h(F(t), F(\tau)) < \varepsilon \tag{4.1.2}$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır. $[t_0, \theta]$ aralığının bölüntüsü $diam(\Delta) = t_{i+1} - t_i < \delta(\varepsilon)$ olacak biçimde seçilirse $\forall i = 0, 1, \cdots, N-1$ için

$$h(F(t_{i+1}), F(t_i)) \leq \varepsilon \tag{4.1.3}$$

olur. (4.1.2)'den $\forall i = 0, 1, \cdots, N-1$ ve $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$h(F(t_i), F(t)) \leq \varepsilon, \qquad h(F(t_{i+1}), F(t)) \leq \varepsilon \tag{4.1.4}$$

olduğu bulunur. Şimdi $\forall t \in [t_0, \theta]$ için

$$h(F(t), F^*_\Delta(t)) \leq \varepsilon$$

olduğu gösterilsin.

Keyfi bir $t_* \in [t_0, \theta]$ alınsın ve sabitlensin. O zaman $t_* \in [t_i, t_{i+1})$ olacak biçimde bir $i = 0, 1, \cdots, N-1$ vardır. $w \in F^*_\Delta(t)$ olsun. O halde $t_* \in [t_i, t_{i+1})$ olduğundan $F^*_\Delta(t_*)$ kümesinin tanımına göre

$$w = \left(1 - \frac{t_* - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) x_i + \frac{t_* - t_i}{t_{i+1} - t_i} y_i \tag{4.1.5}$$

olacak biçimde $x_i \in F(t_i)$ ve $y_i \in F(t_{i+1})$ vardır. Buradan ve (4.1.4)'den

$$\begin{aligned} \|x_i - x_i^*\| &\leq \varepsilon \\ \|y_i - y_i^*\| &\leq \varepsilon \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

olacak biçimde $x_i^* \in F(t_*)$ ve $y_i^* \in F(t_*)$ vardır. Şimdi

$$w_* = \left(1 - \frac{t_* - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) x_i^* + \frac{t_* - t_i}{t_{i+1} - t_i} y_i^* \tag{4.1.7}$$

şeklinde tanımlansın. $x_i^* \in F(t_*), y_i^* \in F(t_*)$ ve $F(t_*)$ konveks olduğundan $w_* \in F(t_*)$'dır.

Şimdi $\|w - w_*\|$ farkına bakılsın.

$$\|w - w_*\| = \left\| \left(1 - \frac{t_* - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right)(x_i - x_i^*) + \frac{t_* - t_i}{t_{i+1} - t_i}(y_i - y_i^*) \right\|$$

dir. (4.1.6)'dan

$$\|w - w_*\| \leq \left(1 - \frac{t_* - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right)\|x_i - x_i^*\| + \frac{t_* - t_i}{t_{i+1} - t_i}\|y_i - y_i^*\| \leq \varepsilon$$

elde edilir. Böylece keyfi sabitlenmiş $w \in F_\Delta^*(t_*)$ için

$$\|w - w_*\| \leq \varepsilon \tag{4.1.8}$$

olacak biçimde $w_* \in F(t_*)$ vardır. Bu ise

$$F_\Delta^*(t_*) \subset F(t_*) + \varepsilon B_n \tag{4.1.9}$$

olması demektir.

Şimdi $t_* \in [t_i, t_{i+1})$ için keyfi $w^* \in F(t_*)$ alınsın ve sabitlensin. (4.1.4)'den

$$\begin{aligned} \|w^* - x_i\| &\leq \varepsilon \\ \|w^* - y_i\| &\leq \varepsilon \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

olacak biçimde $x_i \in F(t_i)$, $y_i \in F(t_{i+1})$ vardır.

Şimdi $x_i \in F(t_i)$, $y_i \in F(t_{i+1})$ için

$$w = \left(1 - \frac{t_* - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right)x_i + \frac{t_* - t_i}{t_{i+1} - t_i}y_i$$

şeklinde tanımlansın. O halde $w \in F_\Delta^*(t_*)$ olur. Şimdi $\|w - w^*\|$ farkına bakılsın. (4.1.10)'dan

$$\begin{aligned} \|w - w^*\| &= \left\| \left(1 - \frac{t_* - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right)x_i + \frac{t_* - t_i}{t_{i+1} - t_i}y_i \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{t_* - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right)w^* + \frac{t_* - t_i}{t_{i+1} - t_i}w^* \right\| \\ &\leq \left(1 - \frac{t_* - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right)\|x_i - w^*\| + \frac{t_* - t_i}{t_{i+1} - t_i}\|y_i - w^*\| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Böylece keyfi sabitlenmiş $w^* \in F(t_*)$ için

$$\|w^* - w\| \le \varepsilon \tag{4.1.11}$$

olacak biçimde $w \in F^*_\Delta(t_*)$ vardır. Bu ise

$$F(t) \subset F^*_\Delta(t) + \varepsilon B_n \tag{4.1.12}$$

olması demektir. (4.1.9) ve (4.1.12)'den

$$h(F(t_*), F^*_\Delta(t_*)) < \varepsilon$$

olduğu elde edilir. $t_* \in [t_0, \theta]$ keyfi seçildiğinden önerme kanıtlanmş olur. □

4.2 Skaler Değişkenli Sürekli Küme Değerli Dönüşümlerin Toplamının Sürekli Selektörünün Sürekli Noktasal Yaklaşık Selektörlere Parçalanışı

Bu bölümde, $F_1(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$, $F_2(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$ sürekli küme değerli dönüşümler, $\varepsilon > 0$ olmak üzere $F(\cdot) = F_1(\cdot) + F_2(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sürekli $f(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ selektörünün, $f_1(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $F_1(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörü, $f_2(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $F_2(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörü olmak üzere $\forall t \in [t_0, \theta]$ için

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

biçiminde gösterilebilir olması problemi incelenecektir.

Teorem 4.2.1. *$F_1(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$, $F_2(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$ sürekli küme değerli dönüşümler, $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için $\varphi(t) \in F_1(t) + F_2(t)$ olmak üzere $\varphi(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyon, $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için*

$$\varphi_1^\varepsilon(t) \in \overline{B}(F_1(t), 2\varepsilon) = F_1(t) + 2\varepsilon\overline{B}_n$$

$$\varphi_2^\varepsilon(t) \in \overline{B}(F_2(t), 2\varepsilon) = F_2(t) + 2\varepsilon\overline{B}_n$$

olmak üzere

$$\varphi(t) = \varphi_1^{\varepsilon}(t) + \varphi_2^{\varepsilon}(t),$$

olacak biçimde sürekli $\varphi_1^{\varepsilon}(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_2^{\varepsilon}(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ *fonksiyonları vardır.*

Kanıt. $F_1(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$, $F_2(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$ sürekli küme değerli dönüşümler, $\varphi(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyon, $[t_0, \theta]$ kompakt küme olduğundan $F_1(\cdot)$, $F_2(\cdot)$ küme değerli dönüşümleri ve $\varphi(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, \theta]$ aralığında düzgün süreklidir. O halde $\varepsilon > 0$ için $\forall\, t, \tau \in [t_0, \theta]$, $|t - \tau| < \delta(\varepsilon)$ iken

$$h(F_1(t), F_1(\tau)) \leq \varepsilon, \quad h(F_2(t), F_2(\tau)) \leq \varepsilon \tag{4.2.1}$$

$$\|\varphi(t) - \varphi(\tau)\| \leq \varepsilon \tag{4.2.2}$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır.

$[t_0, \theta]$ aralığının $\Delta = \{t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = \theta\}$ düzgün bölüntüsü alınsın ve $diam(\Delta) = t_{i+1} - t_i < \delta(\varepsilon)$ olsun. O zaman (4.2.1)'den

$$h(F_1(t_{i+1}), F_1(t_i)) \leq \varepsilon, \quad h(F_2(t_{i+1}), F_2(t_i)) \leq \varepsilon \tag{4.2.3}$$

ve (4.2.2)'den

$$\|\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\| \leq \varepsilon \tag{4.2.4}$$

olur. $t \in [t_i, t_{i+1})$ iken $(i = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$

$$F_1^*(t) = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) F_1(t_i) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} F_1(t_{i+1}) \tag{4.2.5}$$

$$F_2^*(t) = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) F_2(t_i) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} F_2(t_{i+1}) \tag{4.2.6}$$

olmak üzere $F_1^*(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$, $F_2^*(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$ sürekli küme değerli dönüşümleri tanımlansın.

Açıktır ki, $F_1^*(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$, $F_2^*(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$ küme dğerli dönüşümleri uygun olarak $F_1(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$, $F_2(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümlerinin $\Delta = \{t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = \theta\}$ düzgün bölüntüsüne göre afin interpolasyonlarıdır.

Önerme 4.1.4'deki kanıt tekrarlanırsa (4.2.1) ve (4.2.3)'den $\forall\, t \in [t_0, \theta]$ için

$$h(F_1(t), F_1^*(t)) \leq \varepsilon, \quad h(F_2(t), F_2^*(t)) \leq \varepsilon \tag{4.2.7}$$

olduğu kanıtlanabilir. Ayrıca (4.2.2)'den $\forall t \in [t_i, t_{i+1})$ $(i = 0, 1, \cdots, N-1)$ için

$$\| \varphi(t) - \varphi(t_i) \| \leq \varepsilon \tag{4.2.8}$$

olduğu bulunur.

Keyfi $i = 0, 1, 2, \ldots, N$ için $\varphi(t_i) \in F_1(t_i) + F_2(t_i)$ olduğundan $\forall i = 0, 1, 2, \ldots, N$ için

$$\varphi(t_i) = y_1^i + y_2^i \tag{4.2.9}$$

olacak biçimde $y_1^i \in F_1(t_i)$, $y_2^i \in F_2(t_i)$ vardır. O halde (4.2.4)'den, $\forall i = 0, 1, \cdots, N$ için

$$\|\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\| = \left\|y_1^{i+1} + y_2^{i+1} - (y_1^i + y_2^i)\right\| \leq \varepsilon \tag{4.2.10}$$

olur. $t \in [t_i, t_{i+1})$ için $(i = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$

$$\varphi_1^*(t) = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) y_1^i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} y_1^{i+1} \tag{4.2.11}$$

$$\varphi_2^*(t) = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) y_2^i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} y_2^{i+1} \tag{4.2.12}$$

$$\varphi^*(t) = \varphi_1^*(t) + \varphi_2^*(t) \tag{4.2.13}$$

olsun. (4.2.5), (4.2.6), (4.2.9), (4.2.11) ve (4.2.12)'den $\forall\, t \in [t_0, \theta]$ için

$$\varphi_1^*(t) \in F_1^*(t), \ \varphi_2^*(t) \in F_2^*(t) \tag{4.2.14}$$

olur.

(4.2.9), (4.2.11), (4.2.12) ve (4.2.13)'ten $\forall\ i = 0, 1, 2, \cdots, N$ için

$$\varphi^*(t_i) = \varphi(t_i) = y_1^i + y_2^i \tag{4.2.15}$$

dir.

(4.2.10), (4.2.13) ve (4.2.15)'den keyfi $t \in [t_i, t_{i+1}]$ için

$$\begin{aligned}
\|\varphi^*(t) - \varphi^*(t_i)\| &= \left\|\varphi_1^*(t) + \varphi_2^*(t) - (y_1^i + y_2^i)\right\| \\
&= \left\|\left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right)(y_1^i + y_2^i)\right. \\
&\quad \left. + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}(y_1^{i+1} + y_2^{i+1}) - (y_1^i + y_2^i)\right\| \\
&= \left\|\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}(y_1^{i+1} + y_2^{i+1}) - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}(y_1^i + y_2^i)\right\| \\
&= \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\left\|y_1^{i+1} + y_2^{i+1} - (y_1^i + y_2^i)\right\| \qquad (4.2.16) \\
&\leq \|\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)\| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

olur.

$$\varphi_1^0(t) = (Pr)_{F_1(t)}\varphi_1^*(t),\ \varphi_2^0(t) = (Pr)_{F_2(t)}\varphi_2^*(t) \tag{4.2.17}$$

olsun. $\varphi_1^*(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_2^*(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonlar, $F_1(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$, $F_2(\cdot) : [t_0, \theta] \to conv(\mathbb{R}^n)$ sürekli konveks ve kompakt değerli küme değerli dönüşümler olduğundan Önerme 2.4.10 'dan $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için

$$\varphi_1^0(t) \in F_1(t),\ \varphi_2^0(t) \in F_2(t) \tag{4.2.18}$$

ve $\varphi_1^0(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_2^0(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonlardır.

(4.2.7)'den $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için

$$F_1^*(t) \subset F_1(t) + \varepsilon\overline{B}_n,\ F_2^*(t) \subset F_2(t) + \varepsilon\overline{B}_n \tag{4.2.19}$$

olur. (4.2.14) ve (4.2.19)'dan $\forall t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \varphi_1^*(t) &\in F_1(t) + \varepsilon \overline{B}_n \\ \varphi_2^*(t) &\in F_2(t) + \varepsilon \overline{B}_n \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

olduğu elde edilir. Bu durumda (4.2.20)'den

$$\begin{aligned} d(\varphi_1^*(t), F_1(t)) &\leq \varepsilon \\ d(\varphi_2^*(t), F_2(t)) &\leq \varepsilon \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

olduğu elde edilir.

(4.2.17)'den

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_1^*(t) - \varphi_1^0(t) \right\| &= d(\varphi_1^*(t), F_1(t)) \\ \left\| \varphi_2^*(t) - \varphi_2^0(t) \right\| &= d(\varphi_2^*(t), F_2(t)) \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

elde edilir. (4.2.21) ve (4.2.22)'den

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_1^*(t) - \varphi_1^0(t) \right\| &\leq \varepsilon \\ \left\| \varphi_2^*(t) - \varphi_2^0(t) \right\| &\leq \varepsilon \end{aligned} \tag{4.2.23}$$

olur.

$$\varphi^0(t) = \varphi_1^0(t) + \varphi_2^0(t) \tag{4.2.24}$$

olsun. O zaman (4.2.13), (4.2.23) ve (4.2.24)'den $\forall t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \| \varphi^*(t) - \varphi^0(t) \| &= \| (\varphi_1^*(t) + \varphi_2^*(t)) - (\varphi_1^0(t) + \varphi_2^0(t)) \| \\ &\leq \| \varphi_1^*(t) + \varphi_2^*(t) \| + \| \varphi_1^0(t) + \varphi_2^0(t) \| \leq 2\varepsilon \end{aligned} \tag{4.2.25}$$

olur.

Ayrıca (4.2.9) ve (4.2.15)'den

$$\varphi(t_i) = \varphi^*(t_i) = (y_1^i + y_2^i) - (y_1^i + y_2^i) = 0 \tag{4.2.26}$$

olur.

O zaman $\forall\, t \in [t_i, t_{i+1})$ için $(i = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$ (4.2.8), (4.2.12), (4.2.16), (4.2.25) ve (4.2.26)'dan

$$\begin{aligned} \left\|\varphi(t) - \varphi^0(t)\right\| &\leq \|\varphi(t) - \varphi(t_i)\| + \|\varphi(t_i) - \varphi^*(t_i)\| \\ &\quad + \|\varphi^*(t_i) - \varphi^*(t)\| + \left\|\varphi^*(t) - \varphi^0(t)\right\| \qquad (4.2.27) \\ &\leq \varepsilon + 0 + \varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon \end{aligned}$$

olur. O halde $\forall\, t \in [t_0, \theta]$ için $b(t) \in \overline{B}_n$ vardır öyle ki,

$$\varphi(t) - \varphi^0(t) = 4\varepsilon b(t) \tag{4.2.28}$$

olur. $\varphi(\cdot)$ ve $\varphi^0(\cdot)$ sürekli olduğundan $b(\cdot) : [t_0, \theta] \to \overline{B}_n$ süreklidir. O halde (4.2.24) ve (4.2.28)'den

$$\varphi(t) = \varphi_1^0(t) + 2\varepsilon b(t) + \varphi_2^0(t) + 2\varepsilon b(t) \tag{4.2.29}$$

olur.

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \varphi_1^0(t) + 2\varepsilon b(t) \\ \varphi_2(t) &= \varphi_2^0(t) + 2\varepsilon b(t) \end{aligned} \tag{4.2.30}$$

dersek (4.2.18)'den $\forall\, t \in [t_0, \theta]$ için

$$\varphi_1(t) \in \overline{B}(F_1(t), 2\varepsilon) = F_1(t) + 2\varepsilon \overline{B}_n$$

$$\varphi_2(t) \in \overline{B}(F_2(t), 2\varepsilon) = F_2(t) + 2\varepsilon \overline{B}_n$$

olur ve (4.2.29)'dan $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ dir. □

Teorem (4.2.1)'in kanıtından, her $t = t_i$ için

$$F_1(t_i) = F_1^*(t_i), \quad F_2(t_i) = F_2^*(t_i)$$

ve

$$\varphi_1^*(t_i) \in F_1^*(t_i), \quad \varphi_2^*(t_i) \in F_2^*(t_i)$$

olduğundan,

$$\varphi_1^*(t_i) \in F_1(t_i), \quad \varphi_2^*(t_i) \in F_2(t_i)$$

olur. O halde (4.2.17)'den

$$\varphi_1^0(t_i) = \varphi_1^*(t_i), \quad \varphi_2^0(t_i) = \varphi_2^*(t_i)$$

olduğu bulunur. Böylece $\forall\ i = 0, 1, 2, \ldots, N$ için

$$\begin{aligned} \varphi_1^0(t_i) &= \varphi_1^*(t_i) = y_1^i \in F_1(t_i) \\ \varphi_2^0(t_i) &= \varphi_2^*(t_i) = y_2^i \in F_2(t_i) \end{aligned} \tag{4.2.31}$$

ve

$$\varphi(t_i) = y_1^i + y_2^i = \varphi_1^0(t_i) + \varphi_2^0(t_i) = \varphi^0(t_i)$$

olur. O halde (4.2.28)'den $\forall\ i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ için $b(t_i) = 0$ olur. O zaman (4.2.30)'dan $i = 0, 1, 2, \ldots, N$ için

$$\varphi_1(t_i) = \varphi_1^0(t_i), \quad \varphi_2(t_i) = \varphi_2^0(t_i)$$

ve (4.2.31)'den

$$\varphi_1(t_i) \in F_1(t_i), \quad \varphi_2(t_i) \in F_2(t_i)$$

elde edilir. Yani Teorem 4.2.1'de bulunan $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ parçalanışı için $t = t_i$ iken

$$\varphi_1(t_i) \in F_1(t_i), \quad \varphi_2(t_i) \in F_2(t_i)$$

olur.

4.3 Kompakt Küme Üzerinde Tanımlı Alttan Yarı Sürekli Küme Değerli Dönüşümlerin Toplamının Sürekli Selektörünün Sürekli Noktasal Yaklaşık Selektörlere Parçalanışı

Bu bölümde $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme, $F_1(\cdot) : K \to cl(\mathbb{R}^m)$, $F_2(\cdot) : K \to cl(\mathbb{R}^m)$ konveks değerli alttan yarı sürekli küme değerli dönüşümler, $\varepsilon > 0$ olmak üzere $F(\cdot) = F_1(\cdot) + F_2(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sürekli $f(\cdot) : K \to \mathbb{R}^m$ selektörünün, $f_1(\cdot) : K \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $F_1(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörü, $f_2(\cdot) : K \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $F_2(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörü olmak üzere $\forall x \in K$ için

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

biçiminde gösterilebilir olması problemi incelenecektir.

Öncelikle birimin sürekli parçalanışını tanımlansın.

Tanım 4.3.1. *(Aubin 1998) $i = 1, 2, \cdots, l$ için $V_i \subset \mathbb{R}^n$ açık kümeler, $K \subset \mathbb{R}^n$ ve $K \subset \bigcup_{i=1}^{l} V_i$ olsun. Keyfi $x \in K$ ve $i = 1, 2, \cdots, l$ için $\alpha_i(x) \geq 0$, supp $\alpha_i(\cdot) \subset V_i$ ve $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i(x) = 1$ olacak biçimde $\alpha_i(\cdot) : K \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonları varsa, $\alpha_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \cdots, l$, sürekli fonksiyonlarına K kümesinin V_i $i = 1, 2, \cdots, l$ açık örtüsüne göre birimin sürekli parçalanışı denir. Burada supp $\alpha_i(\cdot) = \{x \in K : \alpha_i(x) \neq 0\}$ dir.*

Teorem 4.3.2. *(Aubin 1998) Eğer $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme, keyfi $i = 1, 2, \cdots, l$ için $V_i \subset \mathbb{R}^n$ açık kümeler ve $K \subset \bigcup_{i=1}^{l} V_i$ ise, o zaman K kümesinin V_i açık kümelerine göre birimin sürekli parçalanışı vardır.*

Aşağıdaki teorem kompakt küme üzerinde tanımlı alttan yarı sürekli küme değerli dönüşümlerin toplamının sürekli selektörünün, keyfi $\varepsilon > 0$ için sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörlere parçalanışının varlığını ifade etmektedir.

Teorem 4.3.3. *$K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme, $F_1(\cdot) : K \to cc(\mathbb{R}^m)$, $F_2(\cdot) : K \to cc(\mathbb{R}^m)$ alttan yarı sürekli küme değerli dönüşümler, $\forall x \in K$ için $\varphi(x) \in F_1(x) + F_2(x)$ olmak üzere $\varphi(\cdot) : K \to \mathbb{R}^m$ sürekli fonksiyon ve $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman $\forall x \in K$ için*

$$\varphi_1(x) \in \overline{B}(F_1(x), 3\varepsilon) = F_1(x) + 3\varepsilon\overline{B}_n$$

$$\varphi_2(x) \in \overline{B}(F_2(x), 3\varepsilon) = F_2(x) + 3\varepsilon\overline{B}_n$$

olmak üzere

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

olacak biçimde sürekli $\varphi_1(\cdot) : K \to \mathbb{R}^m$ ve $\varphi_2(\cdot) : K \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonları vardır.

Kanıt. $\varphi(\cdot) : K \to \mathbb{R}^m$ sürekli fonksiyon ve K kompakt olduğundan K'da düzgün süreklidir. O halde $\forall \varepsilon > 0$, $x, y \in K$ için $\|x - y\| \leq \delta_*$ iken

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \varepsilon \tag{4.3.1}$$

olacak biçimde $\delta_* > 0$ vardır.

$\forall x \in K$ için $\varphi(x) \in F_1(x) + F_2(x)$ olduğundan $\forall x \in K$ için

$$q_1(x) \in F_1(x), \quad q_2(x) \in F_2(x) \tag{4.3.2}$$

olmak üzere

$$\varphi(x) = q_1(x) + q_2(x) \tag{4.3.3}$$

biçiminde gösterilebilir. O zaman $F_1(\cdot) : K \to cc(\mathbb{R}^m)$, $F_2(\cdot) : K \to cc(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşümleri alttan yarı sürekli, $\forall x \in K$, $q_1(x) \in F_1(x)$, $q_2(x) \in F_2(x)$ olduğundan $\forall y \in B_n(x, \delta(\varepsilon, x))$ için

$$\begin{aligned} B_n(q_1(x), \varepsilon) \cap F_1(y) &\neq \varnothing \\ B_n(q_2(x), \varepsilon) \cap F_2(y) &\neq \varnothing \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon, x) \in (0, \delta_*)$ vardır. Burada $\delta_* > 0$ (4.3.1)'de tanımlanan sayıdır.

Açıktır ki

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_n(x, \delta(\varepsilon, x))$$

dir. Yani $B_n(x, \delta(\varepsilon, x)),\quad x \in K$, açık yuvarları K kümesinin bir örtüsüdür. $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme olduğundan

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{r} B_n(x_i, \delta_i)$$

olacak biçimde sonlu sayıda $B_n(x_i, \delta_i)$, $(i = 1, 2, \cdots, r)$, açık kümeleri vardır. Burada $\delta_i = \delta(\varepsilon, x_i)$'dir. Ayrıca $\forall x \in K$ için $\delta(\varepsilon, x) \in (0, \delta_*)$ olacağından, $\forall i = 1, 2, \cdots, r$ için

$$\delta_i = \delta(\varepsilon, x_i) < \delta_* \tag{4.3.5}$$

olur.

$K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme, $B_n(x_1, \delta_1), \cdots, B_n(x_r, \delta_r)$ açık yuvarları K'nın sonlu örtüsü olduğuna göre, Teorem 4.3.2'den K kümesinin $B_n(x_i, \delta_i)$, $(i = 1, 2, \cdots, r)$, örtüsüne göre birimin sürekli parçalanışı vardır. Yani, $\forall x \in K$ için

$$\alpha_i(x) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x) = 1$$

ve

$$supp \ \ \alpha_i(\cdot) \subset B_n(x_i, \delta_i)$$

olan sürekli $\alpha_i(\cdot) : K \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ fonksiyonları vardır.

Her $x \in K$ için $q_1(x)$ ve $q_2(x)$ (4.3.2) ile tanımlanmak üzere $i = 1, 2, \cdots, r$ için

$$q_i^1 = q_1(x_i), \quad q_i^2 = q_2(x_i) \tag{4.3.6}$$

olsun. O zaman (4.3.2), (4.3.3) ve (4.3.6)'dan keyfi $i = 1, 2, \cdots, r$ için

$$\varphi(x_i) = q_i^1 + q_i^2 \tag{4.3.7}$$

ve

$$q_i^1 \in F_1(x_i), \quad q_i^2 \in F_2(x_i) \tag{4.3.8}$$

olur.

$\forall x \in K$ için

$$\begin{aligned} \varphi_*^1(x) &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x) q_i^1 \\ \varphi_*^2(x) &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x) q_i^2 \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

olsun. $\alpha_i(\cdot) : K \to \mathbb{R}, \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$ fonksiyonları sürekli olduğundan (4.3.9)'dan $\varphi_*^1(\cdot) : K \to \mathbb{R}^m$ ve $\varphi_*^2(\cdot) : K \to \mathbb{R}^m$ sürekli fonksiyonlardır.

$$I(x) = \{i = 1, 2, \cdots, r : \alpha_i(x) > 0\}$$

olsun. O zaman (4.3.9)'dan

$$\begin{aligned} \varphi_*^1(x) &= \sum_{i \in I(x)} \alpha_i(x) q_i^1 \\ \varphi_*^2(x) &= \sum_{i \in I(x)} \alpha_i(x) q_i^2 \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

olur.

Keyfi $x \in K$ ve $i \in I(x)$ alınsın ve sabitlensin. $I(x)$ kümesinin tanımından $\alpha_i(x) > 0$ ve dolayısıyla

$$x \in supp \;\; \alpha_i(\cdot) \tag{4.3.11}$$

olur. $\alpha_i(\cdot), \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$ birimin sürekli parçalanışı olduğundan

$$supp \;\; \alpha_i(\cdot) \subset B_n(x_i, \delta_i) \tag{4.3.12}$$

olur. (4.3.11) ve (4.3.12)'den keyfi $x \in K$ ve $i \in I(x)$ için

$$x \in B_n(x_i, \delta_i) \tag{4.3.13}$$

elde edilir. (4.3.4)'den her $i = 1, 2, \cdots, r$ için $x \in B_n(x_i, \delta_i)$ iken

$$\begin{aligned} &B_n(q_1(x_i), \varepsilon) \bigcap F_1(x) \neq \emptyset \\ &B_n(q_2(x_i), \varepsilon) \bigcap F_2(x) \neq \emptyset \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

olur.

Keyfi $x_* \in K$ alınsın ve sabitlensin. O zaman (4.3.13) ve (4.3.14)'den $\forall i \in I(x_*)$ için

$$\begin{aligned} &B_n(q_1(x_i), \varepsilon) \bigcap F_1(x_*) \neq \emptyset \\ &B_n(q_2(x_i), \varepsilon) \bigcap F_2(x_*) \neq \emptyset \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

olur. O zaman (4.3.6) ve (4.3.15)'den $\forall i \in I(x_*)$ için

$$\begin{aligned} &B_n(q_i^1, \varepsilon) \bigcap F_1(x_*) \neq \emptyset \\ &B_n(q_i^2, \varepsilon) \bigcap F_2(x_*) \neq \emptyset \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

olur.

O halde (4.3.16)'dan keyfi $i \in I(x_*)$ için

$$\begin{aligned} &q_i^1 \in \overline{B}(F_1(x_*), \varepsilon) = F_1(x_*) + \varepsilon \overline{B}_n \\ &q_i^2 \in \overline{B}(F_2(x_*), \varepsilon) = F_2(x_*) + \varepsilon \overline{B}_n \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

olduğu bulunur.

$F_1(x_*)$ ve $F_2(x_*)$ konveks kapalı kümeler olduğundan $F_1(x_*) + \varepsilon \overline{B}_n$ ve $F_2(x_*) + \varepsilon \overline{B}_n$ kümeleri de konveks kapalı kümelerdir.

Keyfi $i \in I(x_*)$ için $\alpha_i(x_*) > 0$, $\sum\limits_{i \in I(x_*)} \alpha_i(x_*) = 1$, $F_1(x_*) + \varepsilon \overline{B}_n$ ve

$F_2(x_*) + \varepsilon\overline{B}_n$ konveks kapalı kümeler olduğundan (4.3.10) ve (4.3.17)'den

$$\begin{aligned} \varphi_*^1(x_*) &= \sum_{i\in I(x_*)} \alpha_i(x_*) q_i^1 \in F_1(x_*) + \varepsilon\overline{B}_n \\ \varphi_*^2(x_*) &= \sum_{i\in I(x_*)} \alpha_i(x_*) q_i^2 \in F_2(x_*) + \varepsilon\overline{B}_n \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

olduğu bulunur. $x_* \in K$ keyfi sabitlenmiş olduğundan (4.3.18)'den keyfi $x \in K$ için

$$\begin{aligned} \varphi_*^1(x) \in \overline{B}(F_1(x), \varepsilon) = F_1(x) + \varepsilon\overline{B}_n \\ \varphi_*^2(x) \in \overline{B}(F_2(x), \varepsilon) = F_2(x) + \varepsilon\overline{B}_n \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

dir.

Şimdi keyfi $x \in K$ için

$$\varphi_*(x) = \varphi_*^1(x) + \varphi_*^2(x) \tag{4.3.20}$$

olmak üzere $\varphi_*(\cdot) : K \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu tanımlansın.

Keyfi $x_* \in K$ alınsın ve sabitlensin. Şimdi keyfi $i_* \in I(x_*)$ seçilsin ve sabitlensin. O zaman (4.3.13)'den

$$x_* \in B_n(x_{i_*}, \delta_{i_*})$$

dır. Buradan da

$$\| x_* - x_{i_*} \| \leq \delta_{i_*} \tag{4.3.21}$$

olduğu elde edilir. (4.3.5)'den $\delta_{i_*} \leq \delta_*$'dır. O halde (4.3.21)'den

$$\| x_* - x_{i_*} \| \leq \delta_* \tag{4.3.22}$$

olur. (4.3.1) ve (4.3.22)'den

$$\| \varphi(x_*) - \varphi(x_{i_*}) \| \leq \varepsilon \tag{4.3.23}$$

olduğu elde edilir.

$i_* \in I(x_*)$ keyfi sabitlendiğinden, (4.3.23)'den keyfi $i \in I(x_*)$ için

$$\parallel \varphi(x_*) - \varphi(x_i) \parallel \leq \varepsilon \tag{4.3.24}$$

olduğu elde edilir.

$\sum\limits_{i \in I(x_*)} \alpha_i(x_*) = 1$ olduğundan, sabitlenmiş herhangi bir $i_* \in I(x_*)$ için

$$\varphi(x_{i_*}) = \sum_{i \in I(x_*)} \alpha_i(x_*) \cdot \varphi(x_{i_*}) \tag{4.3.25}$$

olur.

Ayrıca (4.3.6), (4.3.7), (4.3.10) ve (4.3.20)'den

$$\begin{aligned} \varphi_*(x_*) &= \varphi_*^1(x_*) + \varphi_*^2(x_*) \\ &= \sum_{i \in I(x_*)} \alpha_i(x_*) \cdot (q_i^1 + q_i^2) \qquad (4.3.26) \\ &= \sum_{i \in I(x_*)} \alpha_i(x_*) \cdot \varphi(x_i) \end{aligned}$$

olur.

Şimdi $\parallel \varphi(x_*) - \varphi_*(x_*) \parallel$ farkına bakılsın. $i_* \in I(x_*)$ olmak üzere (4.3.23), (4.3.24), (4.3.25) ve (4.3.26)'dan

$$\begin{aligned} \parallel \varphi(x_*) - \varphi_*(x_*) \parallel &\leq \parallel \varphi(x_*) - \varphi(x_{i_*}) \parallel + \parallel \varphi(x_{i_*}) - \varphi_*(x_*) \parallel \\ &\leq \varepsilon + \left\| \sum_{i \in I(x_*)} \alpha_i(x_*) \cdot \varphi(x_{i_*}) - \sum_{i \in I(x_*)} \alpha_i(x_*) \cdot \varphi(x_i) \right\| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{i \in I(x_*)} \alpha_i(x_*) \left\| \varphi(x_{i_*}) - \varphi(x_i) \right\| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{i \in I(x_*)} \alpha_i(x_*) \left(\parallel \varphi(x_{i_*}) - \varphi(x_*) \parallel + \parallel \varphi(x_*) - \varphi(x_i) \parallel \right) \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon + \sum_{i\in I(x_*)} \alpha_i(x_*) \parallel \varphi(x_{i_*}) - \varphi(x_*) \parallel \qquad (4.3.27)$$

$$+ \sum_{i\in I(x_*)} \alpha_i(x_*) \parallel \varphi(x_*) - \varphi(x_i) \parallel$$

$$\leq \varepsilon + \sum_{i\in I(x_*)} \alpha_i(x_*) \cdot \varepsilon + \sum_{i\in I(x_*)} \alpha_i(x_*) \cdot \varepsilon$$

$$= 3\varepsilon < 4\varepsilon$$

olduğu elde edilir.

$x_* \in K$ keyfi sabitlenmiş olduğundan (4.3.27)'den, keyfi $x \in K$ için

$$\parallel \varphi(x) - \varphi_*(x) \parallel \leq 4\varepsilon \qquad (4.3.28)$$

olduğu bulunur.

O zaman (4.3.28)'den $\forall x \in K$ için

$$\varphi(x) = \varphi_*(x) + 4\varepsilon b(x) \qquad (4.3.29)$$

olacak biçimde $b(x) \in \overline{B}_n$ vardır. $\varphi(\cdot) : K \to \mathbb{R}^n$ ve $\varphi_*(\cdot) : K \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonlar olduğundan $b(\cdot) : K \to \overline{B}_n$ fonksiyonu da süreklidir. O halde (4.3.20) ve (4.3.29)'dan

$$\varphi(x) = \varphi_*^1(x) + 2\varepsilon b(x) + \varphi_*^2(x) + 2\varepsilon b(x) \qquad (4.3.30)$$

olur. $\forall x \in K$ için

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \varphi_*^1(x) + 2\varepsilon b(x) \\ \varphi_2(x) &= \varphi_*^2(x) + 2\varepsilon b(x) \end{aligned} \qquad (4.3.31)$$

olmak üzere $\varphi_1(\cdot) : K \to \mathbb{R}^n$ ve $\varphi_2(\cdot) : K \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları tanımlansın. $\varphi_*^1(\cdot) : K \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_*^2(\cdot) : K \to \mathbb{R}^n$, $b(\cdot) : K \to \overline{B}_n$ fonksiyonları sürekli olduğundan $\varphi_1(\cdot) : K \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_2(\cdot) : K \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları da sürekli fonksiyonlardır. (4.3.18) ve (4.3.31)'den, keyfi $x \in K$ için

$$\varphi_1(x) \in \overline{B}(F_1(x), 3\varepsilon) = F_1(x) + 3\varepsilon\overline{B}_n$$

$$\varphi_2(x) \in \overline{B}(F_2(x), 3\varepsilon) = F_2(x) + 3\varepsilon\overline{B}_n$$

olur. Ayrıca (4.3.30)'dan, keyfi $x \in K$ için

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

olur. □

5 Conv($\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$) UZAYININ GENİŞLETİLMESİ

$\mathbb{R}^n$ uzayının boş kümeden farklı kompakt konveks alt kümeleri uzayı, yani $conv(\mathbb{R}^n)$ uzayı, iki küme arasında tanımlanan Hausdorff uzaklığıyla bir metrik uzaydır. Ancak $conv(\mathbb{R}^n)$ uzayı bir doğrusal uzay değildir. "Banks ve Jacobs (1970)" de $conv(\mathbb{R}^n)$ uzayı genişletilerek, genişletilmiş uzayda toplam ve skalerle çarpma işlemleri tanımlanmıştır. $conv(\mathbb{R}^n)$ uzayının genişletilmişi, tanımlanan toplam ve skalerle çarpma işlemlerine göre doğrusal uzay olur. Bu bölümde de bu genişletilmiş uzayın birkaç özelliği incelenecektir.

5.1 $(Conv(\mathbb{R}^n))^2$ Uzayı

$(conv(\mathbb{R}^n))^2 = conv(\mathbb{R}^n) \times conv(\mathbb{R}^n)$ olsun. Şimdi $(conv(\mathbb{R}^n))^2$ uzayında bir denklik bağıntısı tanımlansın.

Tanım 5.1.1. *(Banks ve Jacobs 1970)* $(A, E) \in (conv(\mathbb{R}^n))^2$, $(C, D) \in (conv(\mathbb{R}^n))^2$ *olsun. Eğer* $A + D = E + C$ *ise* (A, E) *ve* (C, D) *ikilisi denktir denir ve* $(A, E) \sim (C, D)$ *şeklinde gösterilir.*

Bazen $(A, E) \sim (C, D)$ yerine $(A, E) = (C, D)$ kullanılacaktır. O halde $(A, E) = (C, D)$ olması $A + D = E + C$ olması demektir.

Önerme 5.1.2. $(conv(\mathbb{R}^n))^2$ *uzayında verilen* $\sim$ *(veya* $=$*) bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.*

Kanıt. Keyfi $(A, E) \in (conv(\mathbb{R}^n))^2$ olsun. O zaman $A+E = E+A$ olduğundan $(A, E) \sim (A, E)$ olur. Yani $\sim$ bağıntısı yansıma özelliğini sağlar.

$(A, E) \sim (C, D)$ olsun. O halde $A + D = E + C$ ve buradan ise $C + E = D + A$ olur. Bu ise $(C, D) \sim (A, E)$ olması demektir. Böylece $\sim$ bağıntısı simetri özelliğini sağlar.

$(A, E) \sim (C, D)$ ve $(C, D) \sim (F, R)$ olsun. $(A, E) \sim (F, R)$ olduğu gösterilsin.

$(A, E) \sim (C, D)$ ve $(C, D) \sim (F, R)$ olduğundan

$$A + D = E + C$$

ve

$$C + R = D + F$$

olur. O halde

$$A + D + C + R = E + C + D + F$$

dir. Buradan ise

$$(A + R) + (D + C) = (E + F) + (C + D) \tag{5.1.1}$$

olduğu bulunur. (5.1.1) ve Önerme 2.1.6'dan

$$A + R = E + F$$

olduğu elde edilir. Bu ise $(A, E) \sim (F, R)$ olması demektir. Dolayısıyla $\sim$ bağıntısı denklik bağıntısıdır. $\square$

Keyfi $(A, E) \in (conv(\mathbb{R}^n))^2$ alınsın. (A, E) ikilisinin oluşturduğu denklik sınıfı $(A, E)_{eq}$ olarak gösterilir ve

$$(A, E)_{eq} = \{(C, D) \in (conv(\mathbb{R}^n))^2 : (A, E) \sim (C, D)\}$$

dir.

$(conv(\mathbb{R}^n))^2$ uzayında denklik sınıflarının oluşturduğu $(conv(\mathbb{R}^n))^2/\sim$ bölüm uzayı $B(conv(\mathbb{R}^n))$ ile gösterilsin. $B(conv(\mathbb{R}^n))$ uzayında toplama işlemi tanımlansın. $(A, E) \in B(conv(\mathbb{R}^n)), (C, D) \in B(conv(\mathbb{R}^n))$ için

$$(A, E)_{eq} + (C, D)_{eq} = (A + C, E + D)_{eq} \tag{5.1.2}$$

olsun.

Şimdi $B(conv(\mathbb{R}^n))$ uzayında skalerle çarpma işlemi tanımlansın. $(A, E)_{eq} \in B(conv(\mathbb{R}^n))$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda(A, E)_{eq} = \begin{cases} (\lambda A, \lambda E)_{eq}, & \lambda \geq 0 \\ (|\lambda| E, |\lambda| A)_{eq}, & \lambda < 0 \end{cases} \tag{5.1.3}$$

olsun. $(A,B)_{eq}$ denklik sınıfının toplamsal tersi $-(A,B)_{eq}$ denklik sınıfı olarak gösterilir ve

$$-(A,B)_{eq} = (-1)(A,B)_{eq}$$

olarak tanımlanır. O halde (5.1.3)'den

$$-(A,B)_{eq} = (B,A)_{eq}$$

olur.

$B(conv(\mathbb{R}^n))$ uzayında etkisiz eleman, yani sıfır olarak $(N,N)_{eq}$ denklik sınıfı alınır. Gerçekten

$$\begin{aligned} (A,B)_{eq} + (-1)(A,B)_{eq} &= (A,B)_{eq} + (B,A)_{eq} \\ &= (A+B, B+A)_{eq} \\ &= (A+B, A+B)_{eq} \end{aligned}$$

olur. $A+B=N$ dersek,

$$(A,B)_{eq} + (-1)(A,B)_{eq} = (N,N)_{eq} \tag{5.1.4}$$

olduğu bulunur. Ayrıca

$$(A,B)_{eq} + (N,N)_{eq} = (A+N, B+N)_{eq} = (A,B)_{eq} \tag{5.1.5}$$

olur.

$B(conv(\mathbb{R}^n))$ uzayının etkisiz denklik sınıfı $(0,0)_{eq}$ olarak gösterilir. Burada 0 $\mathbb{R}^n$ uzayının sıfırıdır. Yani

$$(0,0)_{eq} = \{(N,N) : N \in conv(\mathbb{R}^n)\}$$

olur.

Teorem 5.1.3. *(Banks ve Jacobs 1970) (5.1.2) ve (5.1.3) ile verilen toplama ve skalerle çarpım işlemleriyle, $B(conv(\mathbb{R}^n))$ uzayı doğrusal uzaydır.*

Önerme 5.1.4. *$(A, E)_{eq} \in B(conv(\mathbb{R}^n))$ ve $(C, D)_{eq} \in B(conv(\mathbb{R}^n))$ olsun ve $(R_1, R_2) \in (A, E)_{eq}$ ve $(L_1, L_2) \in (C, D)_{eq}$ alınsın. Bu durumda*

$$(R_1, R_2) + (L_1, L_2) = (A, E) + (C, D)$$

olur.

Kanıt. $(R_1, R_2) \in (A, E)_{eq}$ ve $(L_1, L_2) \in (C, D)_{eq}$ olduğundan

$$(R_1, R_2) \sim (A, E), \quad (L_1, L_2) \sim (C, D)$$

yani

$$R_1 + E = R_2 + A, \qquad L_1 + D = L_2 + C \tag{5.1.6}$$

olur. (5.1.6)'dan

$$R_1 + L_1 + E + D = R_2 + L_2 + A + C \tag{5.1.7}$$

olur. Bu ise

$$(R_1 + L_1, R_2 + L_2) \sim (A + C, E + D)$$

yani

$$(R_1 + L_1, R_2 + L_2) = (A + C, E + D)$$

olması demektir. Son eşitlikten

$$(R_1, R_2) + (L_1, L_2) = (A, E) + (C, D)$$

olduğu bulunur. □

Önerme 5.1.5. *$(R_1, R_2) \in (A, E)_{eq}$, $(N_1, N_2) \in (A, E)_{eq}$ olsun. O zaman $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda(R_1, R_2) = \lambda(N_1, N_2)$ olur.*

Şimdi $B(conv(\mathbb{R}^n))$ uzayında norm tanımlansın. $(A, E)_{eq} \in B(conv(\mathbb{R}^n))$ için

$$\| (A, E)_{eq} \|_{conv} = h(A, E) \tag{5.1.8}$$

olsun.

Önerme 5.1.6. *(Banks ve Jacobs 1970) (5.1.8) ile verilen*

$$\| (A, E)_{eq} \|_{conv} = h(A, E)$$

fonksiyonu $B(conv(\mathbb{R}^n))$ uzayında bir normdur.

Böylece $(B(conv(\mathbb{R}^n)), \| \cdot \|_{conv})$ bir normlu doğrusal uzay olur. (5.1.8) ile verilen normdan yararlanarak $(B(conv(\mathbb{R}^n)), \| \cdot \|_{conv})$ uzayında metrik tanımlanabilir. $(A, E)_{eq} \in B(conv(\mathbb{R}^n))$ ve $(C, D)_{eq} \in B(conv(\mathbb{R}^n))$ için

$$D_H((A, E)_{eq}, (C, D)_{eq}) = h(A + D, E + C)$$

olsun. Açıktır ki

$$D_H((A, E)_{eq}, (C, D)_{eq}) = \| (A, E)_{eq} - (C, D)_{eq} \|_{conv}$$

ve

$$\| (A, E)_{eq} \|_{conv} \equiv D_H((A, E)_{eq}, (0, 0)_{eq})$$

dir.

5.2 $F(\cdot) : A \to B(conv(\mathbb{R}^n))$ Dönüşümleri ve Selektörial Dönüşümler. Selektörial Dönüşümlerin Sürekliliği

$A \subset \mathbb{R}^m$ olsun. Keyfi $x \in A$ için $F(x) \in B(conv(\mathbb{R}^n))$ olmak üzere $F(\cdot) : A \to B(conv(\mathbb{R}^n))$ dönüşümü ele alınsın. $\forall x \in A$ için $F(x) \in B(conv(\mathbb{R}^n))$ olduğundan $\forall x \in A$ için $F(x) = (F_1(x), F_2(x))_{eq}$ olacak biçimde $F_1(\cdot) : A \to conv(\mathbb{R}^n)$, $F_2(\cdot) : A \to conv(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümleri vardır. Burada $(F_1(x), F_2(x))_{eq}$ Bölüm 5.1'de verilen denklik bağıntısına göre $(F_1(x), F_2(x))$ ikilisinin bulunduğu denklik sınıfıdır. Böylece, $F(\cdot) : A \to B(conv(\mathbb{R}^n))$ dönüşümü, $F_1(\cdot) : A \to conv(\mathbb{R}^n)$, $F_2(\cdot) : A \to conv(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, $\forall x \in A$ için $F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq}$ (veya $\forall x \in A$ için $F(x) = (F_1(x), F_2(x))_{eq}$) olarak da gösterilebilir.

$F(\cdot) : A \to B(conv(\mathbb{R}^n))$ olsun. $B(conv(\mathbb{R}^n))$ normlu doğrusal uzay olduğundan, $F(\cdot)$ dönüşümünün sürekliliği tanımlanabilir.

Tanım 5.2.1. *$A \subset \mathbb{R}^n, F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq} : A \to B(conv(\mathbb{R}^n)),\quad x_0 \in A$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in B_n(x_0, \delta) \bigcap A$ için*

$$\| F(x) - F(x_0) \|_{conv} \leq \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ varsa, $F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq}$ dönüşümüne x_0 noktasında sürekli dönüşüm denir.

Eğer $F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq} : A \to B(conv(\mathbb{R}^n))$ dönüşümü keyfi $x \in A$ noktasında sürekli ise, bu dönüşüme A kümesinde süreklidir denir.

Aşağıdaki önerme $F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq} : A \to B(conv(\mathbb{R}^n))$ dönüşümünün sürekliliğini karakterize etmektedir.

Önerme 5.2.2. *$A \subset \mathbb{R}^n, F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq} : A \to B(conv(\mathbb{R}^n)),\quad x_0 \in A$ olsun. $F(\cdot)$ dönüşümünün x_0 noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall \varepsilon > 0$ için ve $\forall x \in B_n(x_0, \delta) \bigcap A$ için*

$$h(F_1(x) + F_2(x_0), F_2(x) + F_1(x_0)) \leq \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısının varolmasıdır.

Kanıt. $B(conv(\mathbb{R}^n))$ uzayında norm, toplama ve skalerle çarpma işlemlerinin tanımından

$$\begin{aligned} \| F(x) - F(x_0) \|_{conv} &= \| (F_1(x), F_2(x))_{eq} - (F_1(x_0), F_2(x_0))_{eq} \|_{conv} \\ &= \| (F_1(x), F_2(x))_{eq} + (F_2(x_0), F_1(x_0))_{eq} \|_{conv} \\ &= \| (F_1(x) + F_2(x_0), F_2(x) + F_1(x_0))_{eq} \|_{conv} \\ &= h(F_1(x) + F_2(x_0), F_2(x) + F_1(x_0)) \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

olur. O halde önermenin kanıtı sürekliliğin tanımı ve (5.2.1) eşitliğinden elde edilir. □

$F(\cdot) : A \to B(conv(\mathbb{R}^n))$ dönüşümünün sürekli olması için aşağıdaki yeter koşul verilsin.

Teorem 5.2.3. *$A \subset \mathbb{R}^m, F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq} : A \to\ B(conv(\mathbb{R}^n)),\ \ x_0 \in A$ olsun. Eğer $F_1(\cdot) : A \to conv(\mathbb{R}^n)$ ve $F_2(\cdot) : A \to conv(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümleri $x_0 \in A$ noktasında sürekli ise $F(\cdot)$ dönüşümü de $x_0 \in A$ noktasında süreklidir.*

Kanıt. $F_1(\cdot) : A \to conv(\mathbb{R}^n)$ ve $F_2(\cdot) : A \to conv(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümleri $x_0 \in A$ noktasında sürekli olduklarından, $\forall \varepsilon > 0$ için $\|x - x_0\| < \delta_1$ iken

$$h(F_1(x), F_1(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.2.2}$$

ve $\|x - x_0\| < \delta_2$ iken

$$h(F_2(x), F_2(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.2.3}$$

olacak biçimde $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, x_0) > 0$ ve $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon, x_0) > 0$ vardır. $\delta_* = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ alınırsa (5.2.2) ve (5.2.3)'ten $\|x - x_0\| < \delta_*$ iken

$$\begin{aligned} h(F_1(x), F_1(x_0) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ h(F_2(x), F_2(x_0) &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

olur. O halde Hausdorff uzaklığının tanımından ve (5.2.4)'den $\|x - x_0\| < \delta_*$ iken

$$F_1(x) \subset F_1(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} B_n \tag{5.2.5}$$

$$F_1(x_0) \subset F_1(x) + \frac{\varepsilon}{2} B_n \tag{5.2.6}$$

$$F_2(x) \subset F_2(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} B_n \tag{5.2.7}$$

$$F_2(x_0) \subset F_2(x) + \frac{\varepsilon}{2} B_n \tag{5.2.8}$$

olur. O halde (5.2.5) ve (5.2.8)'den $\|x - x_0\| < \delta_*$ iken

$$F_1(x) + F_2(x_0) \subset F_2(x) + F_1(x_0) + \varepsilon B_n \tag{5.2.9}$$

(5.2.6) ve (5.2.7)'den ise

$$F_2(x) + F_1(x_0) \subset F_1(x) + F_2(x_0) + \varepsilon B_n \tag{5.2.10}$$

elde edilir. (5.2.9), (5.2.10) ve Hausdorff uzaklığının tanımından $\|x - x_0\| < \delta_*$ iken

$$h(F_1(x) + F_2(x_0), F_1(x_0) + F_2(x)) \leq \varepsilon \tag{5.2.11}$$

olduğu bulunur. Önerme 5.2.2'den ve (5.2.11) eşitsizliğinden $F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq}$ dönüşümünün $x_0 \in A$ noktasında sürekliliği elde edilir.

□

$F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq} : A \to B(conv(\mathbb{R}^n))$ dönüşümünün $x_0 \in A$ noktasında sürekli olması $F_1(\cdot) : A \to conv(\mathbb{R}^n)$ ve $F_2(\cdot) : A \to conv(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümlerinin x_0 noktasında sürekli olmalarını gerektirmez.

Örnek 5.2.4.

$$F_1(x) = F_2(x) = \begin{cases} [-1, 1], & x, rasyonel \\ [-2, 2], & x, irrasyonel \end{cases} \tag{5.2.12}$$

olmak üzere $F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq} : \mathbb{R} \to B(conv(\mathbb{R}))$ *dönüşümü tanımlansın. Açıktır ki* $F_1(\cdot) : \mathbb{R} \to conv(\mathbb{R})$ *ve* $F_2(\cdot) : \mathbb{R} \to conv(\mathbb{R})$ *küme değerli dönüşümleri keyfi* $x_0 \in \mathbb{R}$ *noktasında süreksizdir. Şimdi keyfi* $x_0 \in \mathbb{R}$ *alınsın ve sabitlensin. O halde*

$$\begin{aligned}
\| F(x) - F(x_0) \|_{conv} &= \| (F_1(x), F_2(x))_{eq} - (F_1(x_0), F_2(x_0))_{eq} \|_{conv} \\
&= \| (F_1(x), F_1(x))_{eq} - (F_1(x_0), F_1(x_0))_{eq} \|_{conv} \\
&= \| (F_1(x) + F_1(x_0), F_1(x) + F_1(x_0))_{eq} \|_{conv} \\
&= h(F_1(x) + F_1(x_0), F_1(x) + F_1(x_0)) = 0
\end{aligned}$$

olur. O halde $F_1(\cdot)$ ve $F_2(\cdot)$ (5.2.12) ile tanımlanmak üzere, $F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq} : \mathbb{R} \to B(conv(\mathbb{R}))$ dönüşümü $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında süreklidir.

Şimdi sürekli olmayan $F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq} : \mathbb{R}^m \to B(conv(\mathbb{R}^n))$ biçiminde bir dönüşüm örneği verilsin.

Örnek 5.2.5. *$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$F_1(x) = \begin{cases} [-1,1], & x, rasyonel \\ [-2,2], & x, irrasyonel \end{cases} \tag{5.2.13}$$

$$F_2(x) = [-2,2] \tag{5.2.14}$$

olsun. Keyfi $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında $F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq}$ dönüşümünün sürekli olmadığı gösterilsin.

Keyfi $x_0 \in \mathbb{R}$ alınsın ve sabitlensin. $F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq}$ dönüşümünün x_0 noktasında sürekli olması için $\forall \varepsilon > 0$ için $\|x - x_0\| < \delta$ iken

$$h(F_1(x) + F_2(x_0), F_1(x_0) + F_2(x)) \leq \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta_\varepsilon = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısının varolmasıdır.

$x_0 \in \mathbb{R}$ rasyonel olsun. $\varepsilon_* = \frac{1}{2}$ verilsin. Keyfi $\delta > 0$ alınsın. O halde $|x_* - x_0| < \delta$ olacak biçimde irrasyonel $x_* \in \mathbb{R}$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} h(F_1(x_*) + F_2(x_0), F_1(x_0) + F_2(x_*)) &= h([-2,2] + [-2,2], [-1,1] + [-2,2]) \\ &= h([-4,4], [-3,3]) = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon_* \end{aligned}$$

olur. Yani $F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq}$ dönüşümü rasyonel $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli değildir.

$x_0 \in \mathbb{R}$ irrasyonel olsun. Yine $\varepsilon_* = \frac{1}{2}$ olsun. Keyfi $\delta > 0$ alınsın. O halde

$|x_* - x_0| < \delta$ *olacak biçimde rasyonel* $x_* \in \mathbb{R}$ *vardır. Bu durumda*

$$\begin{aligned} h(F_1(x_*) + F_2(x_0), F_1(x_0) + F_2(x_*)) &= h([-1,1] + [-2,2], [-2,2] + [-2,2]) \\ &= h([-3,3], [-4,4]) = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon_* \end{aligned}$$

olur. Yani $F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq}$ *dönüşümü irrasyonel* $x_0 \in \mathbb{R}$ *noktasında sürekli değildir. Böylece (5.2.13) ve (5.2.14) ile tanımlanan* $F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq}$ *dönüşümü tüm* $x_0 \in \mathbb{R}$ *noktalarında süreksizdir.*

Şimdi selektörial dönüşüm tanımlansın.

Tanım 5.2.6. $A \subset \mathbb{R}^m, F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq} : A \to B(conv(\mathbb{R}^n))$ *olsun. Eğer* $\forall x \in A$ *için*

$$(F_1(x), F_2(x)) \sim (f_1(x), f_2(x)) \tag{5.2.15}$$

olacak biçimde $f_1(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$, $f_2(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ *fonksiyonları varsa* $F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq}$ *dönüşümüne selektörial dönüşüm denir.*

$F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq} : A \to B(conv(\mathbb{R}^n))$ selektörial dönüşüm ise tanım gereği $\forall x \in A$ için $(F_1(x), F_2(x)) \sim (f_1(x), f_2(x))$ olacak biçimde $f_1(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$, $f_2(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları vardır. Bundan dolayı selektörial dönüşümleri genel olarak $f_1(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$, $f_2(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ olmak üzere $F(\cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot))_{eq}$ biçiminde gösterilecektir.

Aşağıdaki önerme selektörial dönüşümleri karakterize etmektedir.

Önerme 5.2.7. $A \subset \mathbb{R}^m$ *olsun* $F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq} : A \to B(conv(\mathbb{R}^n))$ *dönüşümünün selektörial dönüşüm olması için gerekli ve yeterli koşul* $\forall x \in A$ *için*

$$F_1(x) = F_2(x) + \varphi(x)$$

olacak biçimde $\varphi(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ *fonksiyonunun olmasıdır.*

Kanıt. $F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))_{eq} : A \to B(conv(\mathbb{R}^n))$ selektörial dönüşüm olsun. O zaman $\forall x \in A$ için

$$(F_1(x), F_2(x)) \sim (f_1(x), f_2(x))$$

olacak biçimde $f_1(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$, $\ f_2(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları vardır. O halde (5.2.15)'den $\forall x \in A$ için

$$F_1(x) + f_2(x) = F_2(x) + f_1(x)$$

olur. Buradan ise $\forall x \in A$ için

$$F_1(x) = F_2(x) + f_1(x) - f_2(x) \tag{5.2.16}$$

olduğu bulunur.

$$\varphi(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

dersek (5.2.16)'dan $\forall x \in A$ için

$$F_1(x) = F_2(x) + \varphi(x)$$

olduğu elde edilir.

Şimdi $\forall x \in A$ için

$$F_1(x) = F_2(x) + \varphi(x)$$

olsun. O zaman $\forall x \in A$ için

$$\begin{aligned}(F_1(x), F_2(x)) &\sim (F_2(x) + \varphi(x), F_2(x)) \\ &\sim (\varphi(x), 0) + (F_2(x), F_2(x)) \qquad (5.2.17) \\ &\sim (\varphi(x), 0)\end{aligned}$$

olur. $f_1(x) = \varphi(x), f_2(x) = 0$ dersek (5.2.17)'den $\forall x \in A$ için

$$(F_1(x), F_2(x)) \sim (f_1(x), f_2(x))$$

olduğu bulunur. $\square$

Aşağıdaki önerme selektörial dönüşümlerin sürekliliğini karakterize etmektedir.

Önerme 5.2.8. *$A \subset \mathbb{R}^n$, $f_1(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$, $f_2(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ olmak üzere $F(\cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot))_{eq} : A \to B(conv(\mathbb{R}^n))$ selektörial dönüşümünün $x_0 \in A$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\varphi(\cdot) = f_1(\cdot) - f_2(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun $x_0 \in A$ noktasında sürekli olmasıdır.*

Kanıt. $F(\cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot))_{eq} : A \to B(conv(\mathbb{R}^n))$ selektörial dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında sürekli olsun. O zaman $\forall \varepsilon > 0$ için $x \in B_n(x_0, \delta) \bigcap A$ iken

$$\| F(x) - F(x_0) \|_{conv} < \varepsilon \tag{5.2.18}$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ vardır. $F(\cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot))_{eq}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\| F(x) - F(x_0) \|_{conv} &= \| (f_1(x), f_2(x))_{eq} - (f_1(x_0), f_2(x_0))_{eq} \|_{conv} \\
&= \| (f_1(x) + f_2(x_0), f_2(x) + f_1(x_0))_{eq} \|_{conv} \\
&= h(f_1(x) + f_2(x_0), f_2(x) + f_1(x_0)) \qquad (5.2.19) \\
&= \|f_1(x) + f_2(x_0) - f_2(x) - f_1(x_0)\| \\
&= \|[f_1(x) - f_2(x)] - [f_1(x_0) - f_2(x_0)]\|
\end{aligned}$$

olur. O halde (5.2.18) ve(5.2.19)'dan $\forall \varepsilon > 0$ için $x \in B_n(x_0, \delta) \bigcap A$ iken

$$\|[f_1(x) - f_2(x)] - [f_1(x_0) - f_2(x_0)]\| < \varepsilon$$

olacak biçmde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ vardır. Bu ise $\varphi(\cdot) = f_1(\cdot) - f_2(\cdot)$ fonksiyonunun $x_0 \in A$ noktasında sürekli olması demektir.

Şimdi $\varphi(\cdot) = f_1(\cdot) - f_2(\cdot)$ fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında sürekli olsun. O zaman $\forall \varepsilon > 0$ için $x \in B_n(x_0, \delta) \bigcap A$ iken

$$\|[f_1(x) - f_2(x)] - [f_1(x_0) - f_2(x_0)]\| < \varepsilon \tag{5.2.20}$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ vardır. Bu durumda (5.2.19) ve (5.2.20)'den $\forall \varepsilon > 0$ için $x \in B_n(x_0, \delta) \bigcap A$ iken

$$\| F(x) - F(x_0) \|_{conv} < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ vardır. Bu ise $F(\cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot))_{eq}$ selektörial dönüşümünün $x_0 \in A$ noktasında sürekli olması demektir. $\square$

6 KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN PARAMETRELENDİRİLMESİ VE UYGULAMALARI

6.1 Sürekli/Yerel Lipschitz Sürekli $(t, x, u, v) \to F(t, x, u, v)$ Küme Değerli Dönüşümünün Sürekli/Yerel Lipschitz Sürekli Parametrelendirilmesi

Bu bölümde (t, x, u, v)'ye göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz sürekli $F(t, x, u, v) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to conv(\mathbb{R}^m)$ $(P \subset \mathbb{R}^p, \quad Q \subset \mathbb{R}^q)$ biçiminde olan küme değerli dönüşümün sürekli/yerel Lipschitz sürekli parametrelendirilmesi incelenecektir.

Önce $F(t, x, u, v) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to conv(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşümünün parametrelendirilmesi tanımı verilsin. Burada $P \subset \mathbb{R}^p, \quad Q \subset \mathbb{R}^q$ dur.

Tanım 6.1.1. *(Aubin ve Frankowska 1990)*
$F(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to conv(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşüm, $P \subset \mathbb{R}^p, \quad Q \subset \mathbb{R}^q$ olsun. $W \subset \mathbb{R}^k$ olmak üzere $\forall (t, x, u, v) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$ için

$$F(t, x, u, v) = \{f(t, x, u, v, w) : w \in W\} \tag{6.1.1}$$

olacak biçimde $f(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times W \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu varsa, $f(\cdot)$ fonksiyonuna $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün bir parametrelendirilmesi denir.

(6.1.1) koşulunu sağlayan $f(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times W \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu, (t, x, u, v, w)'ya göre sürekli ise, $f(\cdot)$ fonksiyonuna, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün (t, x, u, v)'ye göre sürekli parametrelendirilmesi denir.

Eğer (6.1.1) koşulunu sağlayan $f(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times W \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu x'e göre yerel Lipschitz ise, $f(\cdot)$ fonksiyonuna, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün x'e göre yerel Lipschitz sürekli parametrelendirilmesi denir.

(t, x, u, v)'ye göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz $F(t, x, u, v) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to conv(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşümünün parametrelendirilmesi, "Aubin ve Frankowska (1990) ve Ornelas 1990" da verilen ve (t,x)'e göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz $\phi(t,x) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to conv(\mathbb{R}^m)$ biçiminde olan küme değerli dönüşümün parametrelendirilmesine benzer olarak yapılır.

Teorem 6.1.2. *$P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$ kompakt kümeler olmak üzere $F(\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to conv(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşümü verilsin ve $(t,x,u,v) \to F(t,x,u,v)$ küme değerli dönüşümü (t,x,u,v)'ye göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz sürekli olsun. O zaman $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün (t,x,u,v)'ye göre sürekli ve x'e göre yerel Lipschitz sürekli $f(t,x,u,v,w) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \overline{B}_m \to \mathbb{R}^m$ parametrelendirlimesi vardır. Yani $f(t,x,u,v,w) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \overline{B}_m \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu (t,x,u,v,w)'ya göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz sürekli olmak üzere, keyfi $(t,x,u,v) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$ için*

$$F(t,x,u,v) = \{f(t,x,u,v,w) : w \in \overline{B}_m\}$$

olur. Burada $\overline{B}_m = \{w \in \mathbb{R}^m : \|w\| \leq 1\}$ dir.

Kanıt. $(t,x,u,v) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$ için

$$M(t,x,u,v) = \max_{f \in F(t,x,u,v)} \|f\|$$

olsun. $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü (t,x,u,v)'ye göre sürekli x'e göre yerel Lipschitz sürekli olduğundan Sonuç 2.4.3 ve Sonuç 2.4.7'den $M(\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da (t,x,u,v)'ye göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz sürekli olur.

$(t,x,u,v,w) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \mathbb{R}^m$ olsun. $M(t,x,u,v) \cdot w$ merkezli $2d(M(t,x,u,v) \cdot w, F(t,x,u,v))$ yarıçaplı küme $G(t,x,u,v,w)$ ile gösterilsin. Yani

$$G(t,x,u,v,w) = \overline{B}(M(t,x,u,v) \cdot w, 2d(M(t,x,u,v) \cdot w, F(t,x,u,v))) \quad (6.1.2)$$

olsun. $(t,x,u,v,w) \to G(t,x,u,v,w)$, $(t,x,u,v,w) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \mathbb{R}^m$ bir küme değerli dönüşüm belirtir.

$(t,x,u,v,w) \rightarrow M(t,x,u,v)\cdot w$, $(t,x,u,v,w) \rightarrow d(M(t,x,u,v)\cdot w, F(t,x,u,v))$ fonksiyonları sürekli olduğundan Önerme 2.4.5'e göre $G(\cdot) : [t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\times P\times Q\times\mathbb{R}^m \rightarrow conv(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşümü (t,x,u,v,w)'ya göre süreklidir.

Keyfi $y\in\mathbb{R}^m$, $K\in conv(\mathbb{R}^m)$ için

$$P(y,K) = K\cap \overline{B}_m(y, 2d(y,K))$$

olmak üzere $P(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^m\times conv(\mathbb{R}^m) \rightarrow conv(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşümü tanımlansın.

Şimdi $\forall(t,x,u,v,w)\in[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\times P\times Q\times\mathbb{R}^m$ için

$$\begin{aligned}\Phi(t,x,u,v,w) &= P(M(t,x,u,v)\cdot w, F(t,x,u,v)) \\ &= F(t,x,u,v)\cap\overline{B}(M(t,x,u,v)\cdot w \\ &\quad , 2d(M(t,x,u,v)\cdot w, F(t,x,u,v)))\end{aligned} \tag{6.1.3}$$

olmak üzere $(t,x,u,v,w)\rightarrow\Phi(t,x,u,v,w)$ küme değerli dönüşümüne bakılsın. Bu durumda, açıktır ki, keyfi $(t,x,u,v,w)\rightarrow\in[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\times P\times Q\times\mathbb{R}^m$ için

$$\Phi(t,x,u,v,w)\subset F(t,x,u,v,w) \tag{6.1.4}$$

ve $\Phi(t,x,u,v,w)\subset\mathbb{R}^m$ konveks kompakt kümedir. Yani $(t,x,u,v,w) \rightarrow \Phi(t,x,u,v,w)$ küme değerli dönüşümü $\Phi(\cdot) : [t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\times P\times Q\times\mathbb{R}^m\rightarrow conv(\mathbb{R}^m)$ biçiminde küme değerli dönüşümdür.

(6.1.2) ve (6.1.3)'den keyfi $(t,x,u,v,w)\in[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\times P\times Q\times\mathbb{R}^m$ için

$$\Phi(t,x,u,v,w) = F(t,x,u,v)\cap G(t,x,u,v,w) \tag{6.1.5}$$

olur. Keyfi $(t_*,x_*,u_*,v_*,w_*)\in[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\times P\times Q\times\mathbb{R}^m$ alınsın ve sabitlensin. O zaman Teorem 2.5.12'den

$$h(\Phi(t,x,u,v,w),\Phi(t_*,x_*,u_*,v_*,w_*))$$

$$= h(P(M(t,x,u,v)\cdot w, F(t,x,u,v)), P(M(t_*,x_*,u_*,v_*)\cdot w_*, F(t_*x_*,u_*,v_*)))$$

$$\leq 5\cdot[h((F(t,x,u,v),F(t_*,x_*,u_*,v_*)) \tag{6.1.6}$$

$$+ \parallel M(t,x,u,v)\cdot w - M(t_*,x_*,u_*,v_*)\cdot w_* \parallel]$$

olur.

$(t,x,u,v)\to F(t,x,u,v)$ küme değerli dönüşümü ve $(t,x,u,v)\to M(t,x,u,v)$ fonksiyonu sürekli olduğundan, keyfi $\varepsilon>0$ için
$\parallel (t,x,u,v,w)-(t_*,x_*,u_*,v_*,w_*)\parallel<\delta(\varepsilon)$ iken

$$h(F(t,x,u,v),F(t_*,x_*,u_*,v_*))\leq \frac{\varepsilon}{10} \tag{6.1.7}$$

ve

$$\parallel M(t,x,u,v)\cdot w - M(t_*,x_*,u_*,v_*)\cdot w_* \parallel\leq \frac{\varepsilon}{10} \tag{6.1.8}$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon)>0$ vardır. O zaman (5.1.1), (6.1.7) ve (6.1.8)'den $\parallel (t,x,u,v,w)-(t_*,x_*,u_*,v_*,w_*)\parallel<\delta(\varepsilon)$ iken

$$h(\Phi(t,x,u,v,w),\Phi(t_*,x_*,u_*,v_*,w_*))\leq\varepsilon$$

olduğu elde edilir. Bu ise, $(t,x,u,v,w)\to\Phi(t,x,u,v,w)$ küme değerli dönüşümünün (t_*,x_*,u_*,v_*,w_*) noktasında sürekli olması demektir. $(t_*,x_*,u_*,v_*,w_*)\in[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\times P\times Q\times\mathbb{R}^m$ keyfi seçildiğinden $\Phi(\cdot):[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\times P\times Q\times\mathbb{R}^m\to conv(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşümü sürekli küme değerli dönüşümdür.

Şimdi $\Phi(\cdot):[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n\times P\times Q\times\mathbb{R}^m\to conv(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşümünün x'e göre yerel Lipschitz sürekli olduğu kanıtlansın. Keyfi sınırlı

$D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \mathbb{R}^m$ alınsın ve $(t, x_i, u, v, w) \in D, \quad (i = 1, 2)$ olsun. O zaman (6.1.6)'ya benzer olarak

$$h(\Phi(t, x_1, u, v, w), \Phi(t, x_2, u, v, w))$$

$$\leq 5 \cdot [h((F(t, x_1, u, v), F(t, x_2, u, v)) \tag{6.1.9}$$

$$+ \| M(t, x_1, u, v) \cdot w - M(t, x_2, u, v) \cdot w \|]$$

olduğu elde edilir. $(t, x, u, v) \rightarrow F(t, x, u, v)$ küme değerli dönüşümü x'e göre yerel Lipschitz sürekli küme değerli dönüşüm, $(t, x, u, v) \rightarrow M(t, x, u, v)$ fonksiyonu ise x'e göre yerel Lipschitz sürekli fonksiyon olduğundan

$$h(F(t, x_1, u, v), F(t, x_2, u, v)) \leq L_1(D) \| x_1 - x_2 \| \tag{6.1.10}$$

ve

$$\| M(t, x_1, u, v) \cdot w - M(t, x_2, u, v) \cdot w \| \leq L_2(D) \| x_1 - x_2 \| \cdot \| w \| \tag{6.1.11}$$

olacak biçimde $L_1(D) > 0, \quad L_2(D) > 0$ vardır. $(t, x_i, u, v, w) \in D$, ve D sınırlı olduğundan

$$\| w \| \leq L_3(D) \tag{6.1.12}$$

olacak biçimde $L_3(D) > 0$ vardır.

$$L(D) = L_1(D) + L_2(D) \cdot L_3(D) \tag{6.1.13}$$

dersek, (6.1.9), (6.1.10), (6.1.11), (6.1.12) ve (6.1.13)'den

$$h(\Phi(t, x_1, u, v, w), \Phi(t, x_2, u, v, w)) \leq L(D) \cdot \| x_1 - x_2 \| \tag{6.1.14}$$

olduğu elde edilir. Böylece $(t, x, u, v, w) \rightarrow \Phi(t, x, u, v, w)$ küme değerli dönüşümü x'e göre yerel Lipschitz süreklidir.

Keyfi $(t, x, u, v, w) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \mathbb{R}^m$ için

$$f(t, x, u, v, w) = s_m(\Phi(t, x, u, v, w))$$

olmak üzere $f(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu tanımlansın. Burada $s_m(\Phi(t,x,u,v,w))$, $\Phi(t,x,u,v,w)$ kümesinin Steiner noktasıdır.

Şimdi keyfi $(t,x,u,v) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$ için

$$F(t,x,u,v) = \{f(t,x,u,v,w) : w \in \overline{B}_m\}$$

olduğu gösterilsin. Yani $f(\cdot)$ fonksiyonunun $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün bir parametrelendirilmesi olduğu gösterilsin.

$(t,x,u,v) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$ alınsın ve sabitlensin. Eğer $M(t,x,u,v) = 0$ ise $M(\cdot)$ fonksiyonunun tanımından $F(t,x,u,v) = \{0\}$ olur. Buradan ve (6.1.2)'den $\forall w \in \overline{B}_m$ için $G(t,x,u,v,w) = \{0\}$ dır. Dolayısıyla (6.1.3)'den keyfi $w \in \overline{B}_m$ için $\Phi(t,x,u,v,w) = \{0\}$ olur.

$$f(t,x,u,v,w) = s_m(\Phi(t,x,u,v,w))$$

olduğundan $\{0\}$ kümesinin Steiner noktası 0 olacağından, keyfi $w \in \overline{B}_m$ için $f(t,x,u,v,w) = 0$ olur.

O halde $\forall w \in \overline{B}_m$ için $M(t,x,u,v) = 0$ iken

$$\{f(t,x,u,v,w) : w \in \overline{B}_m\} = \{0\} = F(t,x,u,v)$$

olur.

Şimdi $M(t,x,u,v) \neq 0$ durumu incelensin. Önce

$$F(t,x,u,v) \subset \{f(t,x,u,v,w) : w \in \overline{B}_m\} \tag{6.1.15}$$

olduğu gösterilsin.

$y_* \in F(t,x,u,v)$ alınsın ve sabitlensin.

$$w_* = \frac{y_*}{M(t,x,u,v)}$$

olsun. $M(t,x,u,v) \neq 0$ olduğundan $y_* = M(t,x,u,v) \cdot w_*$ dır ve $y_* \in F(t,x,u,v)$ olarak seçildiğinden, $M(t,x,u,v)$'nin tanımından

$$\| y_* \| \leq M(t,x,u,v)$$

olur. O halde

$$\| w_* \| = \frac{\| y_* \|}{M(t,x,u,v)} \leq 1$$

olur. Yani $w_* \in \overline{B}_m$ dir.

$(t,x,u,v) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q,$ ve $w_* \in \overline{B}_m$ için $y_* = M(t,x,u,v) \cdot w_* \in F(t,x,u,v)$ olduğundan $G(\cdot)$ fonksiyonunun tanımına göre

$$\begin{aligned} G(t,x,u,v,w_*) &= \overline{B}(M(t,x,u,v) \cdot w_*, 2d(M(t,x,u,v) \cdot w_*, F(t,x,u,v))) \\ &= \overline{B}(y_*, 2d(y_*, F(t,x,u,v))) \\ &= \overline{B}(y_*, 0) = \{y_*\} = \{M(t,x,u,v) \cdot w_*\} \end{aligned} \tag{6.1.16}$$

elde edilir. $y_* = M(t,x,u,v) \cdot w_* \in F(t,x,u,v)$ olduğundan (6.1.2), (6.1.5) ve (6.1.16)'dan

$$\begin{aligned} \Phi(t,x,u,v,w_*) &= F(t,x,u,v) \cap G(t,x,u,v,w_*) \\ &= F(t,x,u,v) \cap \{M(t,x,u,v) \cdot w_*\} = \{M(t,x,u,v) \cdot w_*\} \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

olur. Böylece $(t,x,u,v) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$ ve $w_* \in \overline{B}_m$ için (6.1.17)'den $\Phi(t,x,u,v,w_*) = M(t,x,u,v) \cdot w_* = y_*$ olur. Tek nokta kümesinin Steiner noktası kendisi olacağından

$$f(t,x,u,v,w_*) = s_m(\Phi(t,x,u,v,w_*)) = M(t,x,u,v) \cdot w_* = y_*$$

olduğu bulunur. O zaman $y_* \in \{f(t,x,u,v,w) : w \in \overline{B}_m\}$ olur. $y_* \in F(t,x,u,v)$ keyfi seçildiğinden

$$F(t,x,u,v) \subset \{f(t,x,u,v,w) : w \in \overline{B}_m\}$$

olur. Böylece (6.1.15) kapsamının doğruluğu kanıtlanır.

Şimdi keyfi $(t,x,u,v) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$ için

$$\{f(t,x,u,v,w) : w \in \overline{B}_m\} \subset F(t,x,u,v) \tag{6.1.18}$$

olduğu kanıtlansın.

Keyfi $(t,x,u,v,w) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \overline{B}_m$ için $f(t,x,u,v,w) = s_m(\Phi(t,x,u,v,w))$ şeklinde tanımlandığından Teorem 2.5.11 den keyfi $w \in \overline{B}_m$ için

$$f(t,x,u,v,w) \in \Phi(t,x,u,v,w) \tag{6.1.19}$$

olur. (6.1.4)'den keyfi $w \in \overline{B}_m$ için

$$\Phi(t,x,u,v,w) \subset F(t,x,u,v)$$

olduğundan (6.1.19)'dan keyfi $w \in \overline{B}_m$ için

$$f(t,x,u,v,w) \in F(t,x,u,v) \tag{6.1.20}$$

olduğu elde edilir. O halde (6.1.20)'den

$$\{f(t,x,u,v,w) : w \in \overline{B}_m\} \subset F(t,x,u,v)$$

olduğu bulunur ve böylece (6.1.18) kapsamının doğru olduğu kanıtlanmş olur.

(6.1.15) ve (6.1.18)'den $\forall (t,x,u,v) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$ için

$$F(t,x,u,v) = \{f(t,x,u,v,w) : w \in \overline{B}_m\}$$

olur. Sonuç olarak $M(t,x,u,v) = 0$ ve $M(t,x,u,v) \neq 0$ durumlarının her ikisi içinde

$$F(t,x,u,v) = \{f(t,x,u,v,w) : w \in \overline{B}_m\}$$

olduğu kantlanmış olur.

O halde $f(\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \overline{B}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $F(\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \rightarrow conv(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşümünün bir parametrelendirilmesidir.

Şimdi $f(\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \overline{B}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun keyfi $(t_0, x_0, u_0, v_0, w_0) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \overline{B}_m$ noktasında sürekli olduğu gösterilsin.

$\Phi(\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \mathbb{R}^m \rightarrow conv(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşümü $(t_0, x_0, u_0, v_0, w_0) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \mathbb{R}^m$ noktasında sürekli olduğundan $\forall\varepsilon > 0$ için $\| (t_0, x_0, u_0, v_0, w_0) - (t, x, u, v, w) \| \leq \delta_0$ iken

$$h(\Phi(t_0, x_0, u_0, v_0, w_0), \Phi(t, x, u, v, w)) \leq \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta_0 > 0$ vardır. O zaman $\forall\varepsilon > 0$ için $\| (t_0, x_0, u_0, v_0, w_0) - (t, x, u, v, z) \| \leq \delta_0$ iken Teorem 2.5.11'den

$$\| f(t_0, x_0, u_0, v_0, w_0) - f(t, x, u, v, w) \|$$

$$= \| s_m(\Phi(t_0, x_0, u_0, v_0, w_0)) - s_m(\Phi(t, x, u, v, w)) \|$$

$$\leq m \cdot h(\Phi(t_0, x_0, u_0, v_0, w_0), \Phi(t, x, u, v, w))$$

$$\leq m \cdot \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta_0 > 0$ vardır. O halde $f(\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \overline{B}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $(t_0, x_0, u_0, v_0, w_0) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \overline{B}_m$ noktasında süreklidir.

Şimdi $f(\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \overline{B}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun x'e göre yerel Lipschitz sürekli olduğu gösterilsin. Keyfi sınırlı $D \subset [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \overline{B}_m$ kümesi için (t, x_1, u, v, w), $(t, x_2, u, v, w) \in D$ iken $\| f(t, x_1, u, v, w) - f(t, x_2, u, v, w) \|$ farkına bakılsın. Teorem 2.5.11'den

$$\| f(t, x_1, u, v, w) - f(t, x_2, u, v, w) \|$$

$$= \| s_m(\Phi(t, x_1, u, v, w)) - s_m(\Phi(t, x_2, u, v, w)) \| \qquad (6.1.21)$$

$$\leq m \cdot h(\Phi(t, x_1, u, v, w), \Phi(t, x_2, u, v, w))$$

olduğu elde edilir. (t, x_1, u, v, w), $(t, x_2, u, v, w) \in D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \overline{B}_m$ olduğundan $w \in \overline{B}_m$ ve $\| w \| \leq 1$ olur. O halde (6.1.3), (6.1.21) ve Teorem 2.5.12'den

$$\| f(t, x_1, u, v, w) - f(t, x_2, u, v, w) \|$$

$$\leq 5 \cdot m[h(F(t, x_1, u, v), F(t, x_2, u, v))$$

$$+ \| M(t, x_1, u, v) \cdot w - M(t, x_2, u, v) \cdot w \|]$$

$$\leq 5 \cdot m[h(F(t, x_1, u, v), F(t, x_2, u, v)) \qquad (6.1.22)$$

$$+ |M(t, x_1, u, v) - M(t, x_2, u, v)| \| w \|]$$

$$\leq 5 \cdot m[h(F(t, x_1, u, v), F(t, x_2, u, v))$$

$$+ |M(t, x_1, u, v) - M(t, x_2, u, v)|]$$

olur. $F(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to conv(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşümü ve $M(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}$ fonksiyonu x'e göre yerel Lipschitz sürekli olduğundan sınırlı $D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \overline{B}_m$ kümesi için (t, x_1, u, v, w),

$(t, x_2, u, v, w) \in D$ iken

$$\| F(t, x_1, u, v, w) - F(t, x_2, u, v, w) \| \leq L_1(D) \| x_1 - x_2 \| \tag{6.1.23}$$

ve

$$|M(t, x_1, u, v, w) - M(t, x_2, u, v, w)| \leq L_2(D) \| x_1 - x_2 \| \tag{6.1.24}$$

olacak biçimde $L_1(D), \quad L_2(D) > 0$ sayıları vardır. O halde (6.1.22), (6.1.23) ve (6.1.24)'den

$$\begin{aligned} &\| f(t, x_1, u, v, w) - f(t, x_2, u, v, w) \| \\ &\leq 5 \cdot m[h(F(t, x_1, u, v), F(t, x_2, u, v)) \\ &\quad +|M(t, x_1, u, v) - M(t, x_2, u, v)|] \\ &\leq 5 \cdot m[L_1(D) \| x_1 - x_2 \| + L_2(D) \| x_1 - x_2 \|] \end{aligned} \tag{6.1.25}$$

olduğu elde edilir. (6.1.25)'den

$$\| f(t, x_1, u, v, w) - f(t, x_2, u, v, w) \| \leq 5 \cdot m(L_1(D) + L_2(D)) \| x_1 - x_2 \| \tag{6.1.26}$$

olur. $5 \cdot m(L_1(D) + L_2(D)) = L_3(D)$ dersek $f(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \overline{B}_m \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $L_3(D)$ sabiti ile x'e göre yerel Lipschitz sürekli olur. Böylece kanıt tamamlanır.

□

6.2 Davranışı Diferansiyel İçerme İle Verilen Belirsiz Dinamik Sistemler İçin Yaklaşım Problemi

Davranışı

$$\dot{x} \in F(t, x, u, v) \tag{6.2.1}$$

diferansiyel içermesi ile verilen belirsiz dinamik sistemi ele alınsın. Burada $x \in \mathbb{R}^n$ sistemin faz vektörü, $u \in P \subset \mathbb{R}^p$ kontrol vektörü, $v \in Q \subset \mathbb{R}^q$ belirsizlik vektörü, $t \in [t_0, \theta]$ zamandır, $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$ kompakt kümelerdir. Ayrıca, $(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ ikilisine pozisyon denir.

(6.2.1) sisteminde, sabitlenmiş $(t, x, u, v) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$ için $F(t, x, u, v) \subset \mathbb{R}^n$ hız vektörleri kümesi sistemde ek belirsizliği karakterize etmektedir. Eğer keyfi $(t, x, u, v) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$ için $F(t, x, u, v)$ tek değerli ise, yani $F(t, x, u, v) = \{\varphi(t, x, u, v)\}$ ise, o zaman (6.2.1) sistemi

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u, v) \tag{6.2.2}$$

diferansiyel denklemi ile verilir ve sistemde belirsizliği sadece $v \in Q$ vektörleri oluşturmaktadır.

(6.2.2) eşitliğiyle verilen belirsiz dinamik sistemler diferansiyel oyunlar teorisi kapsamında incelenmektedir. (bkz., Krasovskii ve Subbotin 1974; Krasovskii ve Subbotin 1988; Kurzhanski 1977; Subbotin ve Chentsov 1981)

Bu bölümde davranışı (6.2.1) diferansiyel içermesi ile verilen belirsiz dinamik sistemler için yaklaşım problemi incelenecektir.

(6.2.1) sisteminin sağ tarafının aşağıdaki koşulları sağladığı varsayılacaktır.

6.2.a) Keyfi $(t, x, u, v) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$ için $F(t, x, u, v) \subset \mathbb{R}^n$ konveks kompakt kümedir.

6.2.b) $(t, x, u, v) \to F(t, x, u, v)$ küme değerli dönüşümü (t, x, u, v)'ye göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz süreklidir.

6.2.c) Keyfi $(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ için

$$max\{\| f \|: f \in F(t, x, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q\} \leq c(1+ \| x \|)$$

olacak biçimde $c > 0$ sabiti vardır.

$(t, x, u, v) \to F(t, x, u, v)$, $(t, x, u, v) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$, 6.2.a) ve 6.2.b) koşullarını sağladığından Teorem 6.1.2'den bu küme değerli dönüşümün (t, x, u, v)'ye göre sürekli ve x'e göre yerel Lipschitz sürekli parametrelendirilmesi vardır. Yani, (t, x, u, v, w)'ya göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz sürekli, keyfi $(t,x,u,v) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$ için

$$F(t,x,u,v) = \{f(t,x,u,v,w) : w \in \overline{B}_n\} \tag{6.2.3}$$

olacak biçimde $f(\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \overline{B}_n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu vardır.

6.2.c) ve (6.2.3)'den

$$max\{\| f(t,x,u,v,w) \| : u \in P, \quad v \in Q, w \in \overline{B}_n\} \leq c(1+ \| x \|)$$

olduğu elde edilir. Böylece, $f(\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \overline{B}_n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlar.

6.2.d) $f(\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \overline{B}_n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu (t,x,u,v,w)'ya göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitzdir.

6.2.e) Keyfi $(t,x) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ için

$$max\{\| f(t,x,u,v,w) \| : u \in P, \quad v \in Q, w \in \overline{B}_n\} \leq c(1+ \| x \|)$$

dir.

6.2.f) Keyfi $(t,x,u,v) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$ için

$$F(t,x,u,v) = \{f(t,x,u,v,w) : w \in \overline{B}_n\}$$

dir.

6.2.d), 6.2.e) ve 6.2.f) özelliklerinden dolayı, 6.2.a), 6.2.b) ve 6.2.c) koşullarını sağlayan (6.2.1) içermesi yerine, 6.2.d), 6.2.e) ve 6.2.f) özelliklerine sahip

$$\dot{x} = f(t,x,u,v,w) \tag{6.2.4}$$

dinamik sistemi incelensin. Her sabitlenmiş (t,x,u,v) için $F(t,x,u,v) \subset \mathbb{R}^n$, (6.2.1) sisteminde ek belirsizlik olarak kabul edildiğinden (6.2.4) sistemindeki $w \in \overline{B}_n$ vektörü, $v \in Q$ belirsizlik vektörü ile ek belirsizlik vektörü olarak kabul edilir. Böylece, (6.2.4) sisteminde $x \in \mathbb{R}^n$ sistemin faz vektörü, $u \in P$ kontrol vektörü, $(v,w) \in Q \times \overline{B}_n$ belirsizlik vektörü, $t \in [t_0,\theta]$ ise zamandır. $u \in P$ sistemin kontrol vektörü olduğundan, (6.2.4) sistemi $u \in P$ kontrolü kullanılarak kontrol edilebilir.

Bu durumda $u \in P$ kontrol etkisi hangi biçimde seçilerek (6.2.4) sistemi kontrol edilebilir?

Tanım 6.2.1. *(Krasovskii ve Subbotin 1988; Subbotin ve Chentsov 1981) Ölçülebilir $u(\cdot) : [t_0, \theta] \to P$ fonksiyonuna programlı kontrol fonksiyonu denir.*

Tüm programlı kontrol fonksiyonları kümesi U_T ile gösterilsin.

Tanım 6.2.2. *(Krasovskii ve Subbotin 1988; Subbotin ve Chentsov 1981) $U(\cdot, \cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \to P$ fonksiyonuna pozisyonlu strateji denir.*

Tüm pozisyonlu stratejiler kümesi U_{pos} olarak gösterilsin.

(6.2.4) sistemini programlı kontrol fonksiyonları kullanarak kontrol ederken, kontrolün kalitesi iyi olmayabilir ve istenilen amaca ulaşmak mümkün olmayabilir. (6.2.4) sistemini pozisyonlu stratejiler kullanarak kontrol ederken, daha iyi sonuçlara varılabilir (bkz., Krasovskii ve Subbotin 1974; Krasovskii ve Subbotin 1988; Subbotin ve Chentsov 1981). Bundan dolayı, (6.2.4) sistemi pozisyonlu stratejiler seçilerek kontrol edilecektir.

Şimdi (6.2.4) sisteminin $(t_*, x_*) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ başlangıç pozisyonundan verilen $U_* \in U_{pos}$ pozisyonlu stratejisinin ürettiği yörüngeler kümesi tanımlansın.

Önce (6.2.4) sisteminin $(t_*, x_*) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ başlangıç pozisyonundan verilen $U_* \in U_{pos}$ pozisyonlu stratejisinin ürettiği adımlı yörüngeler kümesi tanımlansın.

$[t_*, \theta]$ aralığının $\Delta = \{t_* = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = \theta\}$ bölüntüsü alınsın ve

$$diam\Delta = max\{(\tau_{i+1} - \tau_i) : i = 0, 1, 2, \ldots, k - 1\}$$

olsun. Tüm mümkün ölçülebilir $v(\cdot) : [t_0, \theta] \to Q$ fonksiyonları kümesi Q_T, tüm mümkün ölçülebilir $w(\cdot) : [t_0, \theta] \to \overline{B}_n$ fonksiyonları kümesi ise B_T ile gösterilsin. Keyfi $v(\cdot) \in Q_T$ ve $w(\cdot) \in B_T$ alınsın ve sabitlensin.

$$\dot{x} = f(t, x(t), U_*(\tau_i, x(\tau_i)), v(t), w(t)),$$
$$x(t_*) = x_*, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, k - 1$$

diferansiyel denkleminin çözümü

$$x(\cdot; t_*, x(t_*), U_*, v(\cdot), w(\cdot), \Delta)$$

olarak gösterilsin. 6.2.d), 6.2.e) ve 6.2.f) özelliklerinden dolayı, her sabitlenmiş $v(\cdot) \in Q_T, \quad w(\cdot) \in B_T$ için $t \to x(t; t_*, x(t_*), U_*, v(\cdot), w(\cdot), \Delta)$ çözümü tektir ve θ'ya kadar devam ettirilebilir. Böylece,

$$x(\cdot; t_*, x(t_*), U_*, v(\cdot), w(\cdot), \Delta) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$$

mutlak sürekli fonksiyondur.

$$X(t_*, x_*, U_*, \Delta) = \{x(\cdot; t_*, x_*, U_*, v(\cdot), w(\cdot), \Delta) : v(\cdot) \in Q_T, \quad w(\cdot) \in B_T\}$$

olarak tanımlanan $X(t_*, x_*, U_*, \Delta)$ kümesine (6.2.4) sisteminin (t_*, x_*) başlangıç pozisyonundan $[t_0, \theta]$ aralığının Δ bölüntüsüne karşılık U_* pozisyonlu stratejisinin ürettiği adımlı yörüngeler kümesi denir. Her $x(\cdot) \in X(t_*, x_*, U_*, \Delta)$ mutlak sürekli fonksiyonuna (6.2.4) sisteminin (t_*, x_*) başlangıç pozisyonundan U_* pozisyonlu stratejisinin ürettiği adımlı yörüngesi denir. $\Delta^{(k)} = \{t_* < \tau_1^{(k)} < \tau_2^{(k)} < \ldots < \tau_{\sigma(k)}^{(k)} = \theta\}$, $v_k(\cdot) \in Q_T$, $w_k(\cdot) \in B_T$, $k \to \infty$ iken $diam\Delta^{(k)} \to 0$, $x_k(\cdot) = x(\cdot; t_*, x_*, U_*, v_k(\cdot), w_k(\cdot), \Delta^{(k)}) \in X(t_*, x_*, U_*, \Delta^{(k)})$ olmak üzere

$$x(\cdot) = \lim_{k \to \infty} x_k(\cdot)$$

olacak biçimdeki tüm $x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları kümesi $X(t_*, x_*, U_*)$ ile gösterilsin.

$X(t_*, x_*, U_*)$ kümesine (6.2.4) sisteminin (t_*, x_*) başlangıç pozisyonundan U_* pozisyonlu stratejisinin ürettiği yörüngeler kümesi, her $x(\cdot) \in X(t_*, x_*, U_*)$ fonksiyonuna ise (6.2.4) sisteminin (t_*, x_*) başlangıç pozisyonundan U_* pozisyonlu stratejisinin ürettiği yörüngesi denir.

Önerme 6.2.3. *(Krasovskii ve Subbotin 1974; Krasovskii ve Subbotin 1988; Subbotin ve Chentsov 1981) Keyfi* $(t_*, x_*) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$, $\quad U_* \in U_{pos}$ *için* $X(t_*, x_*, U_*)$ *kümesi boş kümeden farklı ve* $C([t_0, \theta]; \mathbb{R}^n)$ *uzayında kompakt kümedir; her* $x(\cdot) \in X(t_*, x_*, U_*)$ *yörüngesi mutlak sürekli fonksiyondur.*

Şimdi (6.2.4) sistemi için verilen $M \subset \mathbb{R}^n$ kümesi ile yaklaşım problemi ifade edilsin.

Tanım 6.2.4. *(Krasovskii ve Subbotin 1974; Krasovskii ve Subbotin 1988; Subbotin ve Chentsov 1981)* $M \subset \mathbb{R}^n$ *kapalı küme,* $(t_*, x_*) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ *olsun. Eğer keyfi* $x(\cdot) \in X(t_*, x_*, U_*)$ *yörüngesi için* $x(\theta) \in M$ *olacak biçimde* $U_* \in U_{pos}$ *pozisyonlu stratejisi varsa,* $U_* \in U_{pos}$ *pozisyonlu stratejisine,* (t_*, x_*) *başlangıç pozisyonundan* M *kümesi ile yaklaşım probleminin çözümü denir.*

Eğer $(t_*, x_*) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ *başlangıç pozisyonundan* M *kümesi ile yaklaşım problemini çözecek biçimde* $U_* \in U_{pos}$ *pozisyonlu stratejisi varsa,* (t_*, x_*) *başlangıç pozisyonundan* M *kümesi ile yaklaşım problemi çözülebilirdir denir.*

Problem 6.2.5. *Hangi* $(t_*, x_*) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ *başlangıç pozisyonları için* M *kümesi ile yaklaşım problemi çözülebilirdir?*

Problem 6.2.5'i çözmek için (6.2.4) sistemi için kararlı köprü kavramı verilsin.

Tanım 6.2.6. *(Krasovskii ve Subbotin 1974; Krasovskii ve Subbotin 1988; Subbotin ve Chentsov 1981)* $W \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ *kapalı küme olsun. Eğer*

1.u) $W(\theta) \subset M$

2.u) *Keyfi* $(t_*, x_*) \in W, \quad t^* \in [t_0, \theta], \quad v \in Q, \quad w \in \overline{B}_n$ *için* $t \in [t_*, t^*]$ *iken* $(t, x(t; t_*, x_*, u_*(\cdot), v, w)) \in W$ *olacak biçimde* $u_*(\cdot) \in U_T$ *varsa,* W *kümesine (6.2.4) sistemine göre* M *kümesi ile yaklaşım probleminde u-kararlı köprü denir.*

Burada $x(\cdot; t_*, x_*, u_*(\cdot), v, w) : [t_*, t^*] \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t), v, w) \tag{6.2.5}$$

denkleminin $x(t_*) = x_*$ *koşulunu sağlayan çözümüdür.*

6.2.d) ve 6.2.e) koşulları, (6.2.5) probleminin en az bir çözümünün varlığını ve bu çözümün θ zamanına kadar devam ettirilebilirliğini garantiler (bkz., Aubin ve Cellina 1984; Blagodatskikh ve Filippov 1986; Clarke ve ark. 1998; Deimling 1992; Filippov 1967). Şimdi (6.2.4) sisteminin sağ tarafının aşağıdaki koşulu sağladığı varsayılsın.

6.2.g) $\forall(t,x) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ ve $v \in \mathbb{R}^n$ için

$$\min_{u\in P} \max_{(v,w)\in Q\times \overline{B}_n} \langle s, f(t,x,u,v,w)\rangle = \max_{(v,w)\in Q\times \overline{B}_n} \min_{u\in P} \langle s, f(t,x,u,v,w)\rangle$$

(6.2.1) diferansiyel içermesinin sağ tarafı keyfi $(t,x,u,v) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$ için

$$F(t,x,u,v) = g(t,x,u,v) + \Phi(t,x) \tag{6.2.6}$$

olsun. Burada $g(\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu ve $\Phi(\cdot) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to conv(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlamaktadır.

6.2.a*) $g(t,x,u,v) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu (t,x,u,v)'ye göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz süreklidir.

6.2.b*) Keyfi $(t,x) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ için

$$max\{\| g(t,x,u,v) \| : u \in P, \quad v \in Q\} \leq c_1(1+ \| x \|)$$

olacak biçimde $c_1 > 0$ vardır.

6.2.c*) Keyfi $(t,x) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ ve $s \in \mathbb{R}^n$ için

$$\max_{v\in Q} \min_{u\in P} \langle s, g(t,x,u,v)\rangle = \min_{u\in P} \max_{v\in Q} \langle s, g(t,x,u,v)\rangle$$

dir.

6.2.d*) Keyfi $(t,x) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ için $\Phi(t,x) \subset \mathbb{R}^n$ konveks kompakt kümedir.

6.2.e*) $\Phi(t,x) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to conv(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü (t,x)'e göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz süreklidir.

6.2.f*) Keyfi $(t,x) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ için

$$max\{\| \varphi \| : \varphi \in \Phi(t,x)\} \leq c_2(1+ \| x \|)$$

olacak biçimde $c_2 > 0$ vardır.

$\Phi(t,x) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \to conv(\mathbb{R}^n)$ küme değerli dönüşümü 6.2.d^*), 6.2.e^*) koşullarını sağladığından, Teorem 6.1.2'den $\Phi(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün

(t,x)'e göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz sürekli parametrelendirilmesi vardır. Yani keyfi $(t,x) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ için

$$\Phi(t,x) = \{\varphi(t,x,w] : w \in \overline{B}_n\} \tag{6.2.7}$$

olacak biçimde (t,x,u,v)'ye göre sürekli, x'e göre yerel Lipschitz sürekli $\varphi(t,x,w) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times \overline{B}_n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu vardır. Ayrıca $\Phi(\cdot)$ küme değerli dönüşümü $6.2.f^*)$ koşulunu sağladığından, keyfi $(t,x) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ için

$$\max\{\| \varphi(t,x,w) : w \in \overline{B}_n\} \leq c_2(1+ \| x \|)$$

olur.

(6.2.7) parametrelendirilmesi yapıldıktan sonra $F(t,x,u,v)$ kümesi (6.2.6) ile tanımlanmak üzere, davranışı (6.2.1) diferansiyel içermesi ile verilen belirsizlik içeren kontrol sistemi, (6.2.4) sistemine benzer olarak

$$\dot{x} = g(t,x,u,v) + \varphi(t,x,w) \tag{6.2.8}$$

biçiminde yazılabilir. Eğer

$$f_*(t,x,u,v,w) = g(t,x,u,v) + \varphi(t,x,w) \tag{6.2.9}$$

denilirse $6.2.a^*)$, $6.2.b^*)$, $6.2.d^*)$, $6.2.e^*)$, $6.2.f^*)$ koşullarından dolayı, kolaylıkla gösterilebilirki, $f_*(t,x,u,v,w) : [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \times \overline{B}_n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu 6.2.d), 6.2.e) ve 6.2.f) koşullarını sağlar.

(6.2.9) ile tanımlı $f_*(\cdot)$ fonksiyonunun 6.2.g) koşulunu sağladığı gösterilsin.

Keyfi $(t,x) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ ve $s \in \mathbb{R}^n$ için

$$\min_{u\in P} \max_{(v,w)\in Q\times \overline{B}_n} \langle s, f_*(t,x,u,v,w)\rangle$$

$$= \min_{u\in P} \max_{(v,w)\in Q\times \overline{B}_n} [\langle s, g(t,x,u,v)\rangle + \langle s, \varphi(t,x,w)\rangle]$$

$$= \min_{u\in P} \max_{v\in Q} \langle s, g(t,x,u,v)\rangle + \max_{w\in \overline{B}_n} \langle s, \varphi(t,x,w)\rangle$$

$$= \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle s, g(t,x,u,v)\rangle + \max_{w\in \overline{B}_n}\langle s, \varphi(t,x,w)\rangle$$

$$= \max_{(v,w)\in Q\times \overline{B}_n}\min_{u\in P}[\langle s, g(t,x,u,v)\rangle + \langle s, \varphi(t,x,w)\rangle]$$

$$= \max_{(v,w)\in Q\times \overline{B}_n}\min_{u\in P}\langle s, f_*(t,x,u,v,w)\rangle$$

Böylece (6.2.8) sisteminin sağ tarafı 6.2.g) koşulunu sağlamaktadır.

Eğer $g(t,x,u,v) = g_1(t,x,u)+g_2(t,x,v)$ biçiminde ise, 6.2.c^*) koşulu sağlanır. Aşağıdaki teorem 6.2.d), 6.2.e), 6.2.f), 6.2.g) koşullarını sağlayan (6.2.4) sistemi için M kümesi ile yaklaşım probleminin çözülebilmesini mümkün kılan pozisyonları karakterize etmektedir.

Teorem 6.2.7. *$W \subset [t_0,\theta]\times \mathbb{R}^n$ kapalı kümesi (6.2.4) sistemine göre M kümesi ile yaklaşım probleminde u-kararlı köprü olsun. O zaman keyfi $(t_*, x_*)\in W$ başlangıç pozisyonundan M kümesi ile yaklaşım problemi çözülebilirdir.*

Teoremin kanıtı, "Krasovkii ve Subbotin 1988" de verilen kanıta benzerdir (bkz., sayfa 70,Teorem 2.4.1) ve $M \subset \mathbb{R}^n$ kümesi ile yaklaşım probleminin çözümü $U_e \in U_{pos}$ pozisyonlu stratejisi

$$\max_{(v,w)\in Q\times \overline{B}_n}\langle x - e(t,x), f(t,x,U_e(t,x),v,w)\rangle$$
$$= \min_{u\in P}\max_{(v,w)\in Q\times \overline{B}_n}\langle x - e(t,x), f(t,x,u,v,w)\rangle \tag{6.2.10}$$

eşitliğinden bulunur.

Burada $e(\cdot,\cdot) : [t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $(t,x)\in[t_0,\theta]\times\mathbb{R}^n$ için $e(t,x) = (Pr)_{W(t)}(x)$ olarak tanımlanır ve

$$(Pr)_{W(t)}(x) = \{y\in W(t) : d(x,W(t)) = \| x-y \|\}$$

dir. Ayrıca (6.2.10) eşitliğini sağlayan $U_e \in U_{pos}$ pozisyonlu stratejisine $W \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kararlı köprüsü için ekstremal strateji denir (bkz., Krasovskii ve Subbotin 1974; Krasovskii ve Subbotin 1988, Subbotin ve Chentsov 1981).

7 SONUÇLAR

Tezde konveks değerli olmayan sürekli küme değerli dönüşümlerin sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörünün varlığı probleminin; konveks kapalı değerli alttan yarı sürekli iki küme değerli dönüşümün toplamının sürekli selektörünün verilen küme değerli dönüşümlerin sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörlerinin toplamı biçiminde gösterilebilmesi probleminin; değerleri genişletilmiş uzayda olan selektörial dönüşümlerin süreklilik özelliklerinin; küme değerli dönüşümün sürekli parametrelendirilmesi uygulanarak, davranışı diferansiyel içerme ile verilen konfliktli kontrol sistemler için yaklaşım probleminin incelenmesi amaçlanmıştır.

Tezde geliştirilen yöntemlerin temelini konveks analizin, küme değerli analizin, diferansiyel oyunlar teorisinin kavram ve yöntemleri oluşturmaktadır.

Bu amaçlar doğrultusunda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. Konveks değerli olmayan sürekli küme değerli dönüşümlerin sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörlerinin varlığı incelenmiştir. İki veya daha fazla boyutlu uzayda tanımlı kompakt değerli sürekli küme değerli dönüşümün keyfi yeterli küçük $\varepsilon > 0$ için sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörünün olmadığı örneklenmiştir.

2. Verilen kapalı konveks değerli alttan yarı sürekli iki küme değerli dönüşümün toplamının sürekli selektörünün, keyfi $\varepsilon > 0$ için verilen küme değerli dönüşümlerin sürekli noktasal ε-yaklaşık selektörlerinin toplamı biçiminde gösterilebileceği kanıtlanmıştır.

3. $\mathbb{R}^n$'in kompakt konveks alt kümeleri uzayı genişletilerek cebirsel yapı tanımlanmış ve değerleri genişetilmiş uzayda olan sürekli selektörial dönüşümlerin özellikleri incelenmiştir.

4. Küme değerli dönüşümlerin parametrelendirilmesi uygulanarak, davranışı diferansiyel içerme ile verilen konfliktli kontrol sistemler için yaklaşım

problemінin çözümü incelenmiştir. Diferansiyel oyunlar teorisinde kullanılan yapılara benzer olarak, verilen sisteme göre u-kararlı köprüye ekstremal stratejinin, ele alınan yaklaşım probleminin çözümü olduğu gösterilmiştir.

Yapılan araştırmalar kapsamında elde edilen sonuçlar, küme değerli analizden bilinen sonuçları genişletmektedir ve davranışı diferansiyel içerme ile verilen konfliktli kontrol sistemler için yaklaşım probleminin çözümünde kullanılabilir.

KAYNAKLAR

Ahmed, N.U. ve Teo, K.L. (1976), "Comments on a selector theorem in Banach spaces", *J.Optim.Theory Appl.*, **19**, 117-118.

Alo, R., De Korvin, A. ve Roberts, C. (1979), "p-integrable selectors of multimeasures", *Inter. J. Math. Sci.*, **2**, 209-221.

Anchini, G., Conti, G. ve Zecca, P. (1985), "Approximation of non-convex set valued mappings", *Boll. Unione Mat. Ital. VI.Ser.C.Anal.Funz.Appl.*, **4**, 145-154.

Antosiewicz, H. ve Cellina, A. (1975), "Continuous selections and differential relations", *J.Diff. Eqns.*, **19**, 386-398.

Aubin, J.P. ve Cellina, A. (1984), *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, Berlin.

Aubin, J.P. ve Frankowska, H. (1990), *Set valued analysis*, Birkhäuser, Boston.

Aubin, J.P. (1991), *Viability Theory*, Birkhäuser, Boston.

Aubin, J.P. (1998), *Optima and Equilibria*, Springer, Berlin, Heidelberg.

Banks, H.T. ve Jacobs, M.Q. (1970), "A Differential Calculus for Multifunctions", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **29**, 246-272.

Ben-El-Mechaiekh, H. ve Oudadess, M. (1995), "Some selection theorems without convexity", *J. Math. Anal. Appl.*, **195**, 614-618.

Blagodatskikh, V.I. ve Filippov, A.F. (1986), "Differential Inclusions and Optimal Control", *Proc. of the Steklov Inst. of Math.*, **169**, 199-256.

Bogatyrev, A.V. (1983), "Continuous branches of multivalued mappings with nonconvex right-hand side.", *Mat. Sb.*, **120(162), 3**, 344-353.

Bressan, A. ve Colombo, G. (1988), "Extensions and selections of maps with decomposable values", *Studia Math.*, **90(1)**, 69-86.

Bressan, A. ve Cortesi, A. (1989), "Directionally continuous selections in Banach spaces", *Nonlin. Anal.*, **13**, 987-992.

Castaing, Ch. (1967), "Sur Les Multi-Applicationmesurables", *Inf. Rech. Op.*, **1**, 91-126.

Castaing, Ch. ve Valadier, M. (1977), *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer-Verlag.

Cellina, A. (1969a), "A theorem on the approximation of set valued mappings", *Rend. Ac. Na. Lincei*, **47**, 429-433.

Cellina, A. (1969b), "Approximation of set valued functions and fixed point theorems", *Annali Mat. Pura. Appl.*, **82**, 17-24.

Cellina, A. (1976), "A selection theorem", *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **55**, 143-149.

Clarke, F.H., Ledyaev, Yu.S., Stern, R.J. ve Wolenski, P.R. (1998), *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer-Verlag , New York.

Cole, J. (1971), "A selector theorem in Banach spaces", *J. Optim. Theory Appl.*, **7**, 170-172.

Colombo, G. ve Goncharov, V.V. (2001), "Continuous selections via geodesics", *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **18**, 171-182.

De Blasi, F.S. ve Myjak, J. (1985), "Continuous selections for weakly Hausdorff lower semicontinuous multifunctions", *Proc. Amer. Math. Soc.***93**, 369-372.

De Blasi, F.S. ve Pianigiani, G. (1983), "Remarks on Hausdorff continuous multifunctions and selections", *Comm. Math. Univ. Carol.*, **24**, 553-561.

Deimling, K. (1992), *Multivalued differential equations*, Walter de Gruyter, Berlin.

Demyanov, V.F. ve Vasilyev, L.V. (1981), *Nondifferentiable Optimization*, Nauka, Moskow.

Deutsch, F. (1983), "A survey of continuous selections", *Contemp. Math.*, **18**, 49-71.

Deutsch, F., Indumathi, V. ve Schantz, K. (1988), "Lower semicontinuity, almost lower semicontinuity and continuous selections for set-valued mappings", *J. Approx. Theory*, **53**, 266-294.

Deutsch, F. ve Kenderov, P. (1983), "Continuous selections and approximate selection for set-valued mappings and applications to metric projections", *SIAM J. Math. Anal.*, **14(1)**, 185-194.

Dolecki, S. (1977), "Extremal measurable selections", *Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astron. Phys.*, **25**, 355-360.

Dommisch, G. (1987), "On the existence of Lipschitz continuous and differentiable selections for multifunctions, in "Parametric Optimization and Related Topics" " (eds. J. Guddat, J. Jongen, B. Kummer and F. Nozicka), *Akad. Verlag, Berlin*, 60-73.

Ekeland, I. ve Valadier, M. (1971), "Representation of Set-Valued Mappings", *J. Mat. Anal. Appl.*, **35**, 621-629.

Evstigneev, I. (1976), "Measurable selections and dynamic programming",*Math. Oper. Res.*, **1**, 267-272.

Filippov, A.F. (1958), "On Some Problems of Optimal Control Theory", *Vestnik Moskwskogo Universiteta, Math.*, **2**, 25-32.

Filippov A. F. (1967), "Classical solutions of differential equations with the right-hand side multi-valued", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat.Meh.*, **22(3)**, 16-26.

Fischer, T. (1987), "A continuity condition for the existence of a continuous selection for set-valued mapping", *J. Approx. Theory*, **49**, 340-345.

Fryszkowski, A. (1983), "Continuous selections for a class of non-convex multivalued map", *Studia Math.*, **76**, 163-174.

Fryszkowski, A. (1990), "Continuous selections of Aumann integrals", *J. Math. Anal. Appl.*, **145**, 431-446.

Goncharov, V.V. ve Tolstonogov, A.A. (1992), "Common continuous selections of multivalued mappings with nonconvex values, and their applications", *Math. USSR Sbornik*, **73(2)**, 319-339.

Guseinov, Kh., Subbotin,A.I. ve Ushakov, V.N. (1985), "Derivatives for Multivalued Mappings with Applications to Game-Theoretical Problems of

Control", *Problems of Control and Information Theory*, **14(3)**, 155-167.

Gutev, V.G. (1993), "Selection theorems under an assumption weaker than lower semicontinuity", *Topology Appl.*, **50**, 129-138.

Hermes, H. (1971), "On continuous and measurable selections and the existence of solutions of generalized differential equations", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **29**, 535-542.

Hu, S., ve Papageorgiou, N.S. (1997), *Handbook of Multivalued Analysis*, Vol.I: Theory, Kluwer Academic Press, Dordrecht.

Hu, S., ve Papageorgiou, N.S. (2000), *Handbook of Multivalued Analysis*, Vol.II: Application, Kluwer Academic Press, Dordrecht.

Isaacs, R. (1965), *Differential Games*, John Wiley, New York.

Kisielewicz, A.P. (2003), "Continuous selection theorems for non-lower semicontinuous multifunctions", *J. Math. Anal. Appl.*, **286**, 160-167.

Krasovskii, N.N. ve Subbotin, A.I. (1974), *Positional Differential Games*, Nauka, Moscow (in Russian).

Krasovskii, N.N. ve Subbotin, A.I. (1988), *Game-theoretical control problems*, Springer, New York.

Kuratowski, K. ve Ryll-Nardzewski, C. (1965), "A general theorem on selectors", *Bull.Acad.Polon.Sci., Ser.Sci.Math.Astronom.Phys.*, **13**, 397-403.

Kurzhanskii, A.B. (1977), *Control and Observation under Conditions of Uncertainty*, Nauka, Moscow (in Russian).

Le Donne, A. ve Marchi, M.V. (1980), "Representation of Lipschitzean Compact Convex Valued Mappings", *Rend. Acc. Naz. Lincei*, **68**, 278-280.

Lin, W. (1994), "Continuous selections for set-valued mappings", *J. Math. Anal. Appl.* **188**, 1067-1072.

Lojasiewicz, S.Jr (1991), "Parametrizations of Convex Sets", *Progress in approximation theory, Academic Press, Boston, MA*, 629-648.

Michael, E. (1956a), "Selected selection theorems", *Amer. Math. Monthly*, **63**, 233-238.

Michael, E.A. (1956b), “Continuous Selections I”, *Annals of Math.*, **63(2)**, 361-381.

Michael, E.A. (1956c), “Continuous Selections II”. *Annals of Math.*, **64**, 562-580.

Michael, E.A. (1957), “Continuous Selections III”, *Annals of Math.*, **65**, 375-390.

Michael, E.A. (1959), “Convex structures and continuous selections”, *Canad. J. Math.*, **11**, 556-575.

Michael, E.A. (1992), “Some refinements of selection theorem with 0-dimensional domain”, *Fund. Math.*, **140** , 279-278.

Michael, E.A ve Pixley, C.P. (1980), “A unified theorem on continuous selections”, *Pacific J. Math.*, **87**, 187-188.

Olech, C. (1984), “Decomposability as a substitute for convexity. Multifunctions and Integrands (Catania, 1983)”, *Lecture Notes in Math Springer, Berlin*, **1091**, 193-205.

Ornelas, A. (1990), “Parametrization of Caratheodory Multifunctions”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **83**, 33-44.

Positcelskii, E.D. (1974), “Characterizations of Steiner points”, *Math. Notes*, **14**, 698-700.

Przeslawski (1985), K., “Linear and Lipschitz continuous selectors for the family of convex sets in Euclidean vector spaces”, *Bull. Polish Acad. Sci.* **33**, 31-33.

Przeslawski, K., ve Rybinski, L.E. (1990), “Michael’s selection theorems under weak lower semicontinuity assumption”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **109**, 537-543.

Przeslawski, K. ve Rybinski, L.E. (1992), “Concepts of lower semicontinuity and continuous selections for convex valued multifunctions”, *J. Approx. Theory*, **68**, 262-282.

Reich, S. (1978), “Approximate selections, best approximations, fixed points and invariant sets”, *J. Math. Anal. Appl.*, **62**, 104-113.

Reider, U. (1978), “Measurable selection theorems for optimization problems”, *Manuscripta Math.*, **24**, 115-131.

Repovs, D. ve Semenov, P.V. (1998), *Continuous selections of multivalued* *mappings*, Kluwer, Dordrecht.

Repeovs, D. ve Semenov, P.V. (1999), "Continuous selections as uniform limits of δ-continuous ε-selections", *Set-Valued Anal.*, **7**, 239-254.

Rockafellar, R.T. (1970), *Convex Analysis*, Princeton.

Schneider, R. (1971), "On Steiner points of convex bodies", *Israel J. Math.*,**9**, 241-249.

Shepard, G.C. (1966), "The Steiner Point of a Convex Polytope", *Canad. J. Math.*, **18**, 1294-1300.

Shepard, G.C. (1968), "A uniqueness theorem for the Steiner point of a convex region", *J. London Math. Soc.*, **43**, 439-444.

Srivatsa, V. (1984), "Existence of measurable selectors and parametrizations for G_δ-valued multifunctions", *Fund. Math.*, **12**, 23-32.

Subbotin, A.I., ve Chentsov, A.G. (1981), *Optimization of a Guarantee in Control Problems*, Nauka, Moscow (in Russian).

Tolstonogov, A. (1995), "Extreme continuous selectors of multivalued maps and their applications",

J. Diff. Eqns., **122**, 161-180.

Wagner, D.M. (1977), "Survey of Measurable Selection Theorems", *SIAM J. Contr. Opt.*, **15**, 859-903.