

**ÇEŞİTLİ BİLARDO SINIFLARINDAKİ
YÖRÜNGELERİN İNCELENMESİ**

Ali DENİZ
Doktora Tezi

Haziran - 2005

ÇEŞİTLİ BİLARDO SINIFLARINDAKİ
YÖRÜNGELERİN İNCELENMESİ

Ali DENİZ

Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Haziran - 2005

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Ali Deniz'in " Çeşitli Bilardo Sınıflarındaki Yörüngelerin İncelenmesi" başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki, DOKTORA tezi tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:Yard.Doç.Dr. Andrei RATIU
Üye	:Prof.Dr. Şahin KOÇAK
Üye	:Prof.Dr. Mahmut KOÇAK
Üye	:Doç.Dr. Mehmet ÜREYEN
Üye	:Yard.Doç.Dr. Nedim DEĞİRMENCİ

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Altuğ İFTAR
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

ÇEŞİTLİ BİLARDO SINIFLARINDAKİ YÖRÜNGELERİN İNCELENMESİ

ALİ DENİZ

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yard.Doç.Dr. Andrei RATIU

2005, 75 Sayfa

Bu tezde, çeşitli sınıflarda bilardo problemleri ele alınmış, düzlemde ve uzayda bilardo parçacığının yörüngeleri incelenmiştir. Bu amaçla öncelikle düzlemsel konveks çokgenler içerisinde periyodik yörüngeler araştırılmıştır. Çembersel dörtgen ve $2n$ -genler içinde, dar açılı üçgenlerdeki Fagnano yörüngesinin benzerleri inşa edilmiştir. Üçüncü bölümde düzlemsel konveks bilardodaki sonuçlara ek olarak izdüşel bilardodaki bazı sonuçlara yer verilmiştir. Ayrıca bu bölümde bazı özel tipten eğri aileleri için gradyant vektörlere göre yansıma tanımlanarak, bu eğriler içindeki bilardo yörüngeleri incelenmiştir. Son olarak dördüncü bölümde n -boyutlu Öklidyen ve hiperbolik uzayda açık bilardo sınıfı ele alınarak verilen iki yönlü sonsuz engel dizisini takip eden yörüngelerin varlığı kanıtlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bilardo yörüngeleri, Çokgensel bilardo, Konveks bilardo, İzdüşel bilardo, Açık bilardo

ABSTRACT

PhD. Thesis

INVESTIGATION OF TRAJECTORIES IN VARIOUS CLASSES OF BILLIARDS

ALİ DENİZ

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Assist.Prof.Dr. Andrei RATIU

2005, 75 Pages

The trajectories in various classes of plane and space billiards are investigated. In the second chapter one is concerned with the problem of the existence of periodical trajectories in polygonal billiards. Trajectories resembling to the classical Fagnano orbit are constructed in cyclic quadrilaterals and in $2n$ -gons. In the third chapter a series of results on trajectories in smooth convex billiards and projective billiards are considered. Moreover a newly introduced family of convex billiards with bouncing law defined by two certain gradient vector fields on the boundary are being studied in this chapter. Finally, in the fourth chapter, the class of open billiards (i.e. billiards with obstacles) is considered in the Euclidean as well as hyperbolic space, and one proves that there is a trajectory hitting the obstacles in any given order.

Keywords : Billiard trajectories, Polygonal billiards, Convex billiards, Projective billiards, Open billiards

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında benden hiçbir yardımı esirgemeyen danışman hocam Yard.Doç.Dr. Andrei RATIU 'ya gösterdiği yoğun ilgi ve büyük sabırdan dolayı en içten teşekkürlerimi sunarım.

Problemlerin şekillenmesindeki yardımlarından ve bana ayırdığı zamandan dolayı hocam Prof.Dr. şahin KOÇAK 'a teşekkür ederim.

Açık bilardo sınıfı ile ilgili yönlendirmelerinden dolayı Prof.Dr. James A. YORKE ve Prof.Dr. Judy KENNEDY'e teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarım sırasında gösterdiği sabır ve bütün maddi, manevi destekten dolayı sevgili eşim Filiz İnalsu DENİZ 'e teşekkürlerimi sunarım.

Ali DENİZ

Haziran 2005

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
SİMGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. ÇOKGENSEL BİLARDO SINIFI	3
2.1 Üçgenlerde Periyodik Yörüngeler	4
2.1.1 Dar Açılı Üçgenlerde Periyodik Yörüngeler	4
2.1.2 Dik Üçgenlerde Periyodik Yörüngeler	7
2.1.3 Geniş Açılı Üçgenlerde Periyodik Yörüngeler	12
2.2 Dörtgenlerde Periyodik Yörüngeler	15
2.3 $2n$ -genlerde Periyodik Yörüngeler	19
2.4 Genel Sonuçlar	24
3. KONVEKS BİLARDO SINIFI	27
3.1 Öklidyen Konveks Bilardo	27
3.2 İzdüşel Bilardo	36
3.3 Özel Bir Bilardo Sınıfı	38
4. AÇIK BİLARDO SINIFI	45
4.1 n -boyutlu Öklidyen Durum	45
4.1.1 Kaos Lemma	48
4.1.2 Teorem 4.2 'nin Kanıtı	49
4.2 Hiperbolik Uzayda Açık Bilardo	59

5. TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER	73
KAYNAKLAR	74

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
2.1 Fagnano yörüngesi	5
2.2 $\triangle DEF$ üçgeni, köşeleri $\triangle ABC$ üçgeninin kenarları üzerinde bulunan üçgenler arasında en küçük çevreye sahip olandır	6
2.3 Eşkenar dörtgenin oluşturulması	8
2.4 6 yansımali periyodik yörünge	10
2.5 10 yansımali periyodik yörünge	11
2.6 Γ , geniş açiya komşu kenarların iki noktasını birleştiren bir bağlantıya sahiptir	13
2.7 $\triangle ABC$ üçgeni yansıtılarak MN yolunun oluşturulması	14
2.8 $\triangle A_0C_0N$ üçgeninin ortik üçgeni $\triangle H_aH_cH_n$	16
2.9 Konveks bir dörtgende 4-bağlantılı periyodik yörünge	17
2.10 Çembersel bir dörtgende 4-bağlantılı periyodik yörünge	18
2.11 Konveks altıgen içinde 6-bağlantılı periyodik yörünge	19
2.12 İkizkenar üçgende periyodik bir yörünge	20
2.13 İkizkenar üçgenlerin yapıstırılması	21
2.14 $ABCDEF$ altıgeninin içinde 6-bağlantılı periyodik yörüngenin elde edilmesi	22
3.1 Yansıma Dönüşümü	28
3.2 Dönüş sayıları bir ve iki olan periyodik Birkhoff yörüngeleri . . .	29
3.3 Elipsin bir odağından geçen parçacık diğer odaktan geçecek şekilde yansır	30
3.4 Elipste teğetlerin odaklara uzaklıkları çarpımı sabittir	31
3.5 Hiperbolde teğetlerin odaklara uzaklıkları çarpımı sabittir	32
3.6 Elips durumu	33
3.7 Hiperbol durumu	34
3.8 Parçacık odaklar arasından geçiyorsa kaustik eğrisi aynı odaklara sahip hiperboldür	35

3.9	Parçacık odakların dışından geçiyorsa kaustik eğrisi aynı odaklara sahip elipstir	35
3.10	İzdüşel yansımanın tanımlanması	36
3.11	İzdüşel yansımanın bir sonucu	37
3.12	Genelleştirilmiş izdüşel yansıma	38
3.13	Odakların herhangi birinden geçen parçacığın yörüngesi x -eksenine yakınsar	41
4.1	$L_p v_p$ bir O_j engelini sınırını en fazla iki noktada kesebilir . . .	46
4.2	$w_q = v_p - 2\langle v_p, n_q \rangle n_q$ olmak üzere f bilardo dönüşümü	50
4.3	ω_q dönüşümü her $p \in \partial O_i$ noktasına q 'ya doğru birim vektör karşılık getirir	52
4.4	D_τ kümesi ve τ dönüşümü	55
4.5	τ dönüşümünün sürekli genişlemesi τ^* dönüşümü	58
4.6	Konformal disk modelde $L_p v_p$ ışınının ∂O_j engelinde yansıması: $w_q = v_q - 2\langle v_q, n_q \rangle n_q$	62
4.7	ω dönüşümü her $p \in \partial O_i$ noktasına orijine doğru birim vektör karşılık getirir	66
4.8	τ saçılan vektör alanıdır	70
4.9	Konformal disk modelinde τ dönüşümünün sürekli genişlemesi τ^* dönüşümü	71

SİMGELER DİZİNİ

$\triangle ABC$: ABC üçgeni
$\angle ABC$: AB ve BC doğru parçaları arasındaki açı
\widehat{AB}	: AB yayı
$ AB $: AB doğru parçasının uzunluğu
$D.Y.$: Eşkenar dörtgen üzerinde doğal yansıma
E_{13}	: Eşkenar dörtgende 1. ve 3. kenarları özdeşleyen dönüşüm
$O(\mathbb{R}^2)$: Düzlemin izometrilere grubu
$SO(\mathbb{R}^2)$: Düzlemde yön koruyan izometrilere grubu
$O(U)$: Birim çemberin izometrilere grubu
S^n	: n - boyutlu birim küre
∂M	: M bölgesinin sınırı (kenarı)
$[x_1, x_2; x_3, x_4]$: x_1, x_2, x_3, x_4 noktalarının çifte oranı
$grad(U)$: U eğrisinin gradyanı
O_j	: Açık bilardo sınıfındaki engeller
$conv[A]$: A kümesinin konveks zarfı
$conv_{\mathbb{H}}[A]$: A kümesinin hiperbolik konveks zarfı
$L_p v_p$: p noktasında v_p yönündeki Öklidyen veya hiperbolik ışın
$der(f)$: f fonksiyonunun derecesi
S_i	: Sembol kümeleri
\mathbb{H}^n	: n - boyutlu hiperbolik uzay
\mathbb{B}^n	: Hiperbolik uzayın konformal disk modeli
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}}, \ \cdot\ _{\mathbb{E}}$: Öklidyen iç çarpım ve norm
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}, \ \cdot\ _{\mathbb{H}}$: Hiperbolik iç çarpım ve norm
\mathcal{E}_i	: Genişletici kümeler ailesi
P_p^q	: p noktasından q noktaya jeodezik üzerinden paralel taşıma
$T\mathbb{B}^n$: \mathbb{B}^n 'in teğet demeti
$S(T\mathbb{B}^n)$: \mathbb{B}^n 'in birim küre teğet demeti

1 GİRİŞ

n -boyutlu uzayda ($n \geq 2$), bir bölge içinde düz doğrular boyunca hareket eden ve düzgün bir sınır noktasına geldiğinde ise yansıma kurallarına (geliş açısı yansıma açısına eşittir) uyarak hareket eden parçacığın davranışının incelendiği problemler genel olarak bilardo problemleri olarak adlandırılır. Parçacık düzgünlüğün bozulduğu bir sınır noktasına geldiğinde hareketin durduğu varsayılır. Hareketi esnasında takip ettiği yola *parçacığın yörüngesi* adı verilir.

Üzerinde bilardo problemlerinin incelendiği ilk düzlemsel şekiller çokgenler olmuştur. Çokgenler içerisinde periyodik yörüngelerin varlığı problemi hala çözülememiş problemler arasındadır. Üçgenler için bile bu problem henüz çözülebilmemiş değildir. 1775'te Fagnano dar açılı her üçgen içinde bugün kendi ismi ile anılan periyodik bilardo yörüngesinin bulunduğunu kanıtlamıştır. Yükseklik ayaklarının birleştirilmesi ile oluşturulan bu yörünge dik ve geniş açılı üçgenlerde mevcut değildir. 1993'te Holt, dik üçgenlerde periyodik yörüngelerin varlığını göstererek bu yörüngeleri sınıflandırmıştır [6]. Geniş açılı üçgenlerin bazı özel durumlarında periyodik yörüngelerin varlığının söylenebilmesine rağmen genel olarak her geniş açılı üçgenin periyodik yörüngeye sahip olup olmadığı bilinmemektedir. Bu alanda Vorobets ve ark. [15] ile Halbeisen ve Hungerbuhler'in çalışmaları bulunmaktadır [5]. Çokgenel bilardodaki periyodik yörüngelerin varlığı ile ilgili en genel sonucu 1986'da Masur vermiştir: "Açıları π 'nin rasyonel katları olan bir çokgen içinde sonsuz çoklukta periyodik yörünge vardır" [9]. Bu tezin ikinci bölümünde çokgenel bilardo ile ilgili sonuçlar ele alınmış, dar açılı üçgenlerdeki Fagnano yörüngesinin yaptığı gibi bütün kenarları sırayla dolaşan periyodik yörüngeler dörtgenlerde ve $2n$ -genlerde inşa edilmeye çalışılmış bunun için gerekli koşullar bulunmuştur.

Bilardo problemleri arasında diğer önemli bir sınıf konveks bilardo veya Birkhoff bilardo olarak adlandırılan, düzlemsel düzgün, kapalı bir γ eğrisi tarafından sınırlanmış konveks bir M bölgesi içindeki bilardo sınıfıdır. Bu tür bilardo sınıfında bilardo parçacığı M içinde düz doğrular boyunca

hareket edecek, sınır noktasında ise γ eğrisinin teğetine göre yansıma yapacaktır. Periyodik yörüngelerin varlığı problemi konveks bilardoda da ele alınmıştır. 1927'de Birkhoff, her konveks bilardonun periyodik yörüngeye sahip olduğunu göstermiştir [1]. Bilardo dönüşümü altında değişmez kalacak şekilde sabit olmayan bir sürekli fonksiyonun varlığı problemi integralenebilme problemi olarak adlandırılır. Bu problemle de 1950 'lerde Poritsky uğraşmıştır. Bu açıdan elips, konveks bilardoda önemli bir yer tutmaktadır, çünkü elips içindeki bilardo integrallenebilirdir ve düzlemsel konveks bölgeler içinde bilinen tek örnektir. Birkhoff ve Poritsky'nin herhangi bir integralenebilir, düzgün, konveks bilardonun eliptik bilardo olduğu yönünde sanıları bulunmaktadır. Ardışık yansımalarından sonra parçacığın yörüngesinin teğet kaldığı eğriler kaustik eğrileri olarak adlandırılırlar. Elips içinde hareket eden parçacık ardışık yansımalarından sonra aynı odaklara sahip elips veya hiperbole teğet olacak şekilde hareketine devam eder. Bununla ilgili sonuçlar bu tezin üçüncü bölümünde ele alınmıştır. Yine üçüncü bölümde yansıma tanımının değiştirilmesiyle elde edilen projektif bilardo sınıfındaki ilginç sonuçlara yer verilmiş, özel bir eğri ailesinin gradyant vektörlerine göre yansıma tanımlanarak bu yeni bilardo sınıfındaki yörüngeler incelenmiştir.

Bilardo parçacığının sınırsız ve içinde engellerin bulunduğu bir bölge içinde dolaştığı bilardo sınıfı açık bilardo sınıfı olarak adlandırılır. Bu sınıfta engeller sonlu sayıda, ikişer ikişer ayırık, konveks ve kompaktırlar. 1991 'de Morita, verilen sonsuz bir engel dizisini takip eden yörüngenin varlığını düzlem durumunda kanıtlamıştır [10]. Dördüncü bölümde bu problem daha yüksek boyutlu Öklidyen ve hiperbolik uzaylarda ele alınarak verilen iki yönlü sonsuz bir diziyi takip eden yörüngenin varlığı kanıtlanmıştır.

2 ÇOKGENSEL BİLARDO SINIFI

Bu bölümde düzlemde bir çokgen içinde hareket eden parçacığın yörüngeleri ele alınacaktır. Parçacık çokgen içinde doğrular boyunca hareket etmektedir. Bu şekilde hareket ederek bir çokgenin bir kenarına gelen parçacık yansıma kurallarına uyarak yansır. Ancak eğer köşe noktalarına gelirse burada durduğu varsayılır. Çokgenler içindeki yörüngelerin incelendiği bilardo sınıfı çokgenel bilardo olarak adlandırılır.

Çokgenler içinde bilardo problemleri arasında iki tür bilardo yörüngeleri ilgi çekmiştir. Bunlar yoğun yörüngeler ve periyodik yörüngelerdir. Bu bölümde bilardo parçacığının bazı düzlemsel konveks çokgenler içindeki bazı periyodik yörüngeleri incelenecektir. Bir Γ bilardo yörüngesi eğer kapalı bir yörünge ise, yani bir q noktasından harekete başlayan parçacık belirli bir zaman sonra q noktasına başlangıç yönüyle aynı yönde hareket edecek şekilde geliyorsa Γ yörüngesine *periyodik yörünge* denir. Genel olarak bütün çokgenler içinde periyodik yörüngenin var olup olmadığı bilinmemektedir. Periyodik yörüngelerin incelenmesinde üçgen ve dörtgenlerden başlanacak, bazı $2n$ -genler için periyodik yörüngeler inşa edilecektir. Bu bölümün son kısmında bu alanda elde edilmiş genel sonuçlara yer verilmiştir.

Öncelikle herhangi bir çokgen içindeki yörüngeler için kullanılan bir yöntemden bahsetmek uygun olacaktır. Q bir çokgen ve Γ 'da Q içinde bir yörünge olsun. Γ yörüngesinin Q çokgeninin kenarları üzerinde belirlediği noktalar (çarptığı noktalar) sırayla

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$$

şeklinde veriliyor olsun. Burada $\gamma_i\gamma_{i+1}$ doğru parçalarının her biri yörüngenin *bağlantısı* olarak adlandırılır. γ_0 noktasından başlayarak Γ yörüngesini takip eden parçacık γ_1 noktasına geldiğinde yansıma yaparak tekrar Q çokgeninin içine doğru yansır. Burada parçacığı yansıtmak yerine çokgeni çarpılan kenarda yansıtarak elde edilen Q' yansımış çokgeni içinde, parçacık yoluna düz

devam ediyormuş gibi düşünülebilir. Benzer şekilde Q' içinde γ_1 noktasının yansıması olan γ'_1 noktasma gelindiğinde Q' çokgeni çarpılan kenarda yansıtılır ve Q'' çokgeni elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde Γ yörüngesi

$$Q, Q', Q'', \dots, Q^{(n)}, \dots$$

çokgenler dizisi içinde düz doğru haline dönüştürülmüş olur. Çokgenler içindeki yörüngeler için sıkça kullanılan bu yöntem *yörünge düzleştirme yöntemi* veya *yörünge açma* adı verilir. Şekil 2.2 'de bir $\triangle ABC$ üçgeni içindeki bir yörüngenin açılması görülmüyor.

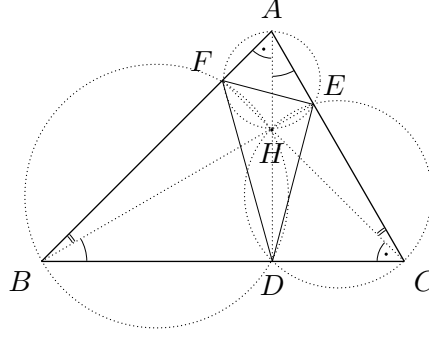
2.1 Üçgenlerde Periyodik Yörüngeler

Periyodik yörüngelerin varlığı problemi üçgenler için de hala çözülebilmemiş değildir. Dar açılı her üçgenin *Fagnano yörüngesi* olarak adlandırılan periyodik yörüngeye sahip olduğu bilinmektedir. Dar açılı üçgenlerdeki bu yörüngeler, dik açılı üçgenlerde dik yörünge adı verilen yörüngelere dönüşmekte, fakat geniş açılı üçgenlerde kaybolmaktadırlar. Geniş açılı üçgenlerin özel bir sınıfı dışında periyodik yörüngeye sahip olup olmadıkları bilinmemektedir.

2.1.1 Dar Açılı Üçgenlerde Periyodik Yörüngeler

$\triangle ABC$ dar açılı üçgeninin yükseklik ayaklarının oluşturduğu üçgen periyodik bir bilardo yörüngesidir. α, β, γ sırasıyla A, B, C köşelerindeki açılar olsun. $\triangle ABC$ üçgeninin yüksekliklerinin kesim noktası H ve yükseklik ayakları sırasıyla D, E, F ile gösterilsin. D, E, F noktalarını birleştirmek suretiyle oluşturulan $\triangle DEF$ üçgeni, periyodik bir bilardo yörüngesidir. Bu üçgen $\triangle ABC$ üçgeninin *ortik üçgen*'i belirlediği yörünge de Fagnano yörüngesi olarak adlandırılır. (Şekil 2.1). $\triangle DEF$ üçgeninin periyodik bir bilardo yörüngesi olduğunu kanıtlamak için yansıma açılarının eşit olduğunu göstermek yeterlidir.

Karşılıklı açıların toplamı π olduğundan $AFHE, BDHF$ ve $CEHD$ dörtgenleri birer çember üzerinde bulunurlar. $BDHF$ dörtgeninin üzerinde bu-



Şekil 2.1: Fagnano yörüngesi

lunduğu çemberde aynı yayı gördüklerinden $\angle HDF = \angle HBF = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ve $\angle FDB = \angle FHB$ 'dir. $\angle FHB$ ile $\angle CHE$ ters açılar olduklarından eşittirler. Diğer taraftan $CEHD$ dörtgeninde $\angle CHE$ ve $\angle CDE$ aynı çember yayını gördüklerinden eşittirler. Böylece

$$\angle FDB = \angle FHB = \angle CHE = \angle CDE = \alpha$$

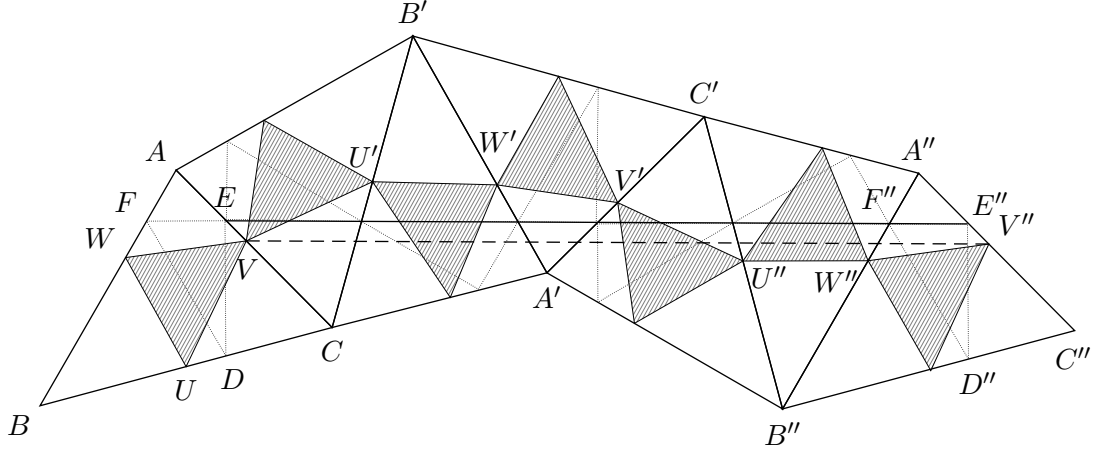
elde edilir. Bu ise D köşesinde yansıma açılarının eşit olması demektir. Benzer şekilde $\angle BFD = \angle EFA = \gamma$ ve $\angle AEF = \angle DEC = \beta$ olduğu görülür. Böylece $\triangle ABC$ dar açılı bir üçgeninde $\triangle DEF$ 'nin periyodik bir bilardo yörüngesi olduğu kanıtlanmış olur.

Sonuç 2.1 *Fagnano yörüngesi $\triangle ABC$ içinde herbiri $\triangle ABC$ üçgenine benzer olan üç tane üçgen belirler.*

Sonuç 2.2 *$\triangle ABC$ üçgeninin yüksekliklerinin kesim noktası H , $\triangle DEF$ ortik üçgeninin açıortaylarının kesim noktasıdır.*

Teorem 2.3 *Köşeleri bir $\triangle ABC$ üçgeninin kenarları üzerinde bulunan üçgenler arasında en küçük çevreye sahip olan üçgen ortik üçgendir.*

Kanıt. $\triangle ABC$ üçgeninin A, B, C köşelerindeki açılar sırasıyla α, β, γ olsun. $\triangle DEF$ üçgeninin belirlediği yörüngenin düzleştirilmesi için, $\triangle ABC$



Şekil 2.2: $\triangle DEF$ üçgeni, köşeleri $\triangle ABC$ üçgeninin kenarları üzerinde bulunan üçgenler arasında en küçük çevreye sahip olanıdır

üçgeni AC kenarında yansıtılarak ACB' üçgeni, $\triangle ACB'$ üçgeni CB' kenarında yansıtılarak $\triangle CA'B'$ üçgeni ve $\triangle CA'B'$ üçgeni de $A'B'$ kenarında yansıtılarak $\triangle A'B'C'$ üçgeni elde edilir. Daha sonra uygun kenarlarda yansıma işlemleri yapılarak $\triangle A''B''C''$ üçgeni elde edilir. (bkz. Şekil 2.2). Burada $\triangle ABC$ üçgeninden $\triangle A''B''C''$ üçgeni elde edilirken yapılan yansımaların bileşkesi bir öteleme dönüşümüdür. Gerçekten $\triangle ABC$ 'nin ilk iki yansıma sonunda C köşesi etrafında 2γ 'lık bir dönme yapılmaktadır. Aynı şekilde $\triangle CA'B'$ üçgeni $\triangle A'B'C'$ üçgenine dönüşümü sırasında 2α ve $\triangle A'B'C'$ üçgeni $\triangle A''B''C''$ üçgenine dönüşümü sırasında 2β 'lık dönme yapılmaktadır. Bu durumda toplam $2\gamma + 2\alpha + 2\beta = 2\pi$ 'lik dönme uygulanmaktadır. Bu ise $\triangle ABC$ üçgeninin başlangıç konumuna göre tam bir tur dönmesi demektir ki bu dönüşüm bir ötelemedir. Buradan AC kenarının $A''C''$ kenarına paralel olduğu anlaşılır.

$\triangle ABC$ üçgeninde yüksekliklerin ayaklarını birleştirerek oluşturulan $\triangle DEF$ üçgeni ile keyfi olarak verilen bir $\triangle UVW$ üçgeninin yansımalar esnasındaki durumlarına dikkat edelim. $\angle AEF = \angle DEC$, $\angle BFD = \angle EFA$ ve $\angle FDB = \angle CDE$ olduğundan EE'' bir doğru parçasıdır. Diğer taraftan EE'' doğru parçası iki tanesi DE 'ye, iki tanesi EF 'ye ve iki tanesi de FD 'ye eşit doğru parçalarının birleşimidir. Buradan EE'' doğru parçasının uzunluğunun $\triangle DEF$ üçgeninin çevresinin iki katına eşit olduğu anlaşılır. Benzer şekilde

$VU'W'V'U''W''V''$ kırık çizgisinin uzunluğu da $\triangle UVW$ üçgeninin çevre uzunluğunun iki katına eşittir.

$\triangle A''B''C''$, $\triangle ABC$ üçgeninin bir ötelemesi olduğundan ve AC , $A''C''$ 'ye paralel olduğundan VV'' , EE'' 'ye paraleldir. Böylece VV'' doğru parçasının uzunluğu EE'' doğru parçasının uzunluğuna eşittir. Burada $VU'W'V'U''W''V''$ kırık çizgisinin uzunluğunun VV'' doğru parçasının uzunluğundan büyük olduğu aşıkardır. Böylece $\triangle UVW$ üçgeninin çevresinin $\triangle DEF$ üçgeninin çevresinden büyük olduğu gösterilmiş olur. ■

$\triangle DEF$ üçgeninin kenarlarına paralel olacak şekilde kapalı bir yörünge çizildiğinde uzunluğu $\triangle DEF$ üçgeninin çevresinin iki katına eşit olan periyodik bir yörünge elde edilir.

D, E, F noktaları $\triangle ABC$ üçgeninin Euler dokuz nokta çemberi üzerinde bulunmaktadır. Bu çemberin merkezi $\triangle ABC$ üçgeninin açığortaylarının kesim noktası O olmak üzere OH doğru parçasının orta noktasıdır. Ayrıca O noktasından köşelere çizilen doğrular ortik üçgenin kenarlarına diktir.

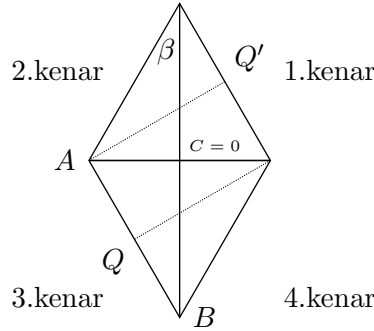
Herhangi bir $\triangle DEF$ üçgeni verildiğinde, ortik üçgeni $\triangle DEF$ olacak şekilde dar açılı bir üçgen inşa edilebilir. Bunu yapmak için, $\triangle DEF$ üçgeninin iç açığortay doğrularına D, E, F noktalarından dikmeler çizmek yeterlidir. Bu dikmelerin kesiştikleri noktalar $\triangle DEF$ üçgenini Fagnano yörüngesi olarak kabul eden üçgeni belirler.

2.1.2 Dik Üçgenlerde Periyodik Yörüngeler

Dar açılı üçgenlerde ortik üçgenin belirlediği periyodik yörüngeler dik üçgenlerde kaybolmaktadırlar. Ancak dik üçgenlerde de periyodik yörüngeler mevcuttur. Bu kısımda F. Holt tarafından verilen periyodik yörüngeler incelenecektir [6]. $\triangle ABC$ dik üçgeninin en küçük açısının radyan cinsinden ölçüsü β olsun. $[.]$ bir sayının tam kısmını göstermek üzere $N = [\frac{\pi}{2\beta}] - 1$ olsun. Bu durumda Holt, $k = 1, 2, \dots, N - 1$ olmak üzere kısa dik kenar üzerindeki her noktanın her bir devirde $4k + 2$ yansımanın olduğu tek türlü belirli bir periyo-

dik yörünge üzerinde bulunduğunu kanıtlamıştır. Burada $k = 1, 2$ için 6 ve 10 yansımali periyodik yörüngeler ele alınacaktır.

Parçacığın her bir devirde 6 ve 10 yansıma yaptığı periyodik yörüngeleri verebilmek için bazı hazırlıklar yapacağız. Bunun için uzun dik kenarın karşı köşesi A , kısa dik kenarın karşı köşesi B ve hipotenüsün karşı köşesi de C olarak adlandırılmış olsun. Genellik bozulmadan kısa dik kenar uzunluğu 1 alınabilir, uzun dik kenar uzunluğu da $b \geq 1$ olsun. $\triangle ABC$ üçgenine eş olan dört tane dik üçgen kullanmak suretiyle Şekil 2.3 'deki eşkenar dörtgen elde edilebilir. Bu eşkenar dörtgen A noktası $(-1, 0)$, B noktası $(0, -b)$ ve C noktası da orijine gelecek şekilde yerleştirilsin ve kenarları da 1. bölgeden başlayarak saatin tersi yönünde 1.kenar, 2.kenar, 3. kenar ve 4.kenar olarak adlandırılmış olsun.



Şekil 2.3: Eşkenar dörtgenin oluşturulması

$\triangle ABC$ üçgeni içinde bir yörüngeye eşkenar dörtgen içinde bir yörünge ve tersine eşkenar dörtgen içinde bir yörüngeye de $\triangle ABC$ üçgeni içinde bir yörünge karşılık gelir. Bu yüzden 6 ve 10 yansımali periyodik yörüngeler eşkenar dörtgen içinde oluşturularak dik üçgen içinde bunlara karşılık gelen yörüngeler ele alınacaktır. Dik üçgen içindeki bir yörünge her üç kenara da çarpacağından yörünge'nin 3.kenar üzerindeki bir noktadan başladığının kabul edilmesinde herhangi bir sakınca yoktur. Böylece eşkenar dörtgen içindeki her bir yörünge 3.kenardaki (x_1, y_1) başlangıç noktası ve θ_1 açısı ile eşlenebilir.

θ_1 açısı (x_1, y_1) noktasında x -eksenine paralel doğru ile pozitif yönde yapılan açıdır ve eşkenar doğru içine doğru bir yön belirtir. Yani $\theta_1 \in (\beta - \frac{\pi}{2}, \beta + \frac{\pi}{2})$ 'dir. Dik üçgen içindeki bir yörüngeyi eşkenar dörtgen içinde gösterebilmek için bazı anlaşmalar yapalım: Parçacık 3.kenardan hareketine başladıktan sonra 2. veya 4.kenara çarptığında doğal yansıma yapacaktır. 1.kenara çarparsa, çarptığı nokta ve buraya geliş açısı hareketin devamını sağlayacak biçimde, 3.kenardaki bir nokta ve yön ile eşlenecektir. Bu işlemler aşağıdaki şekilde yapılır:

(x, y, θ) noktasının, açısı ϕ olan bir kenarda doğal yansıması:

(2. ve 4. kenarlar için $\phi = \frac{\pi}{2} - \beta$ 'dir.)

$$D.Y.((x, y, \theta), \phi) = (x, y, 2\phi - \theta).$$

1. kenarla 3. kenarın eşlenmesi:

$$E_{13}(x, y, \theta) = (-x, -y, 2\beta - \theta).$$

6 ve 10 yansımali periyodik yörüngeler için yapılan hazırlıkları tamamlamak için $(1, 0)$ noktasından 2. ve 3. kenarlara, $(-1, 0)$ noktasından 1. ve 4. kenarlara dikmeler indirilerek 3. kenardaki dikme ayağı

$$Q = \left(\frac{1 - b^2}{1 + b^2}, \frac{-2b}{1 + b^2} \right)$$

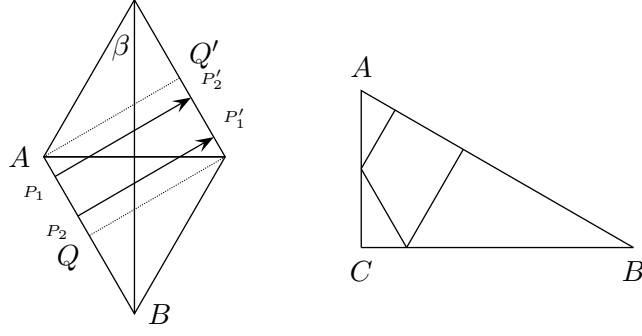
olarak adlandırılınsın. Benzer şekilde 1. kenarda Q 'ya karşılık gelen nokta Q' ile 2. ve 4. kenardaki dikme ayakları da sırayla Q_2 ve Q_4 olarak adlandırılınsın.

6 yansımali periyodik yörüngeler

3. kenarda AQ doğru parçası üzerindeki her nokta 6 yansımali bir periyodik yörünge üzerinde bulunur. Şekil 2.4 böyle bir periyodik yörüngeyi göstermektedir.

3. kenardaki $P_1 = (x_1, y_1, \theta_1)$ noktası $0 < t < 1$ olmak üzere $(x_1, y_1) = (1 - t)A + tQ$ şeklinde ve $\theta_1 = \beta$ şeklinde seçilsin. Bu durumda P_1 noktası 6 yansımali bir periyodik yörünge belirlemektedir. Bunu kanıtlamak için öncelikle

$$h := |AQ'| = \frac{2b}{\sqrt{1 + b^2}}$$



Şekil 2.4: 6 yansımali periyodik yörünge

olduğuna dikkat edelim. Hareketine P_1 noktasından başlayan parçacık $\Delta P_1 = (h \cos \theta_1, h \sin \theta_1, 0)$ olmak üzere 1. kenarda

$$P'_2 = P_1 + \Delta P_1 = (x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1, \theta_1)$$

noktasına gelecektir. 3. kenarın 1. kenar ile eşlenmesinden dolayı hareket

$$\begin{aligned} P_2 = E_{13}(P'_2) &= (-x_1 - \Delta x_1, -y_1 - \Delta y_1, \theta_1) \\ &= (tA + (1-t)Q, \theta_1) \end{aligned}$$

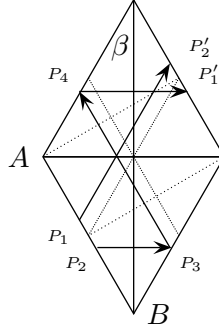
noktasından devam edecek ve bu şekilde $\Delta P_2 = \Delta P_1$ olmak üzere $P'_3 = P_2 + \Delta P_2$ noktasına ulaşılacaktır. Bu ise E_{13} eşlenmesinden dolayı P_1 noktasına geri dönülmesi demektir. Yani parçacığın yaptığı hareket periyodiktir. Burada $\forall t \in (0, \frac{1}{2})$ için $P_1(t) = ((1-t)A + tQ, \beta)$ noktası altı yansımali periyodik yörüngeyi tektürlü belirlemektedir.

10 yansımali periyodik yörüngeler

İkizkenar olmayan bütün dik üçgenlerde, AQ, BQ doğru parçalarından kısa olanının her iç noktası 10 yansımali bir periyodik yörünge üzerinde bulunur. Yani, $0 < \beta \leq \frac{\pi}{6}$ ise AQ 'nin her iç noktası, $\frac{\pi}{6} < \beta < \frac{\pi}{4}$ ise QB 'nin her iç noktası tektürlü belirli bir periyodik yörünge üzerinde bulunur.

3. kenar üzerinde başlangıç noktaları E ve F olan alt segment

$$(E, F) = \begin{cases} (A, Q) & ; 0 < \beta \leq \frac{\pi}{6} \\ (Q, B) & ; \frac{\pi}{6} < \beta < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$



Şekil 2.5: 10 yansımali periyodik yörünge

ve buna göre P_1 noktası da $0 < t < 1$ için $P_1 = (x_1, y_1, \theta_1) = ((1-t)E + tF, 2\beta)$ şeklinde tanımlanmış olsun.

Bu durumda P_1 , 10 yansımali bir periyodik yörünge üzerinde bulunur. (x_1, y_1) noktasından QQ' doğru parçasına paralel olacak şekilde hareket eden parçacık 1.kenarda P_2' noktasına gelir. Parçacığın hareketi 1. kenarla 3. kenar arasındaki eşlemeden dolayı, $(\Delta x_1, \Delta y_1) = \left(\frac{2b^2-2}{1+b^2}, \frac{4b}{1+b^2}\right)$ olmak üzere

$$P_2 = E_{13}(P_2') = (-x_1 - \Delta x_1, -y_1 - \Delta y_1, 0)$$

noktasından devam eder. Böylece parçacık, 4. kenarda $P_3 = (x_1 + \Delta x_1, -y_1 - \Delta y_1)$ noktasına ulaşır ve bu noktada doğal yansıma yaparak, $\pi - 2\beta$ 'lık açıyla (yani Q_2Q_4 doğru parçasına paralel olarak) hareket eder. $(\Delta x_3, \Delta y_3) = (-\Delta x_1, \Delta y_1)$ olduğundan 2. kenarda $P_4 = (x_1, -y_1)$ noktasına gelerek yansıma açısı 0 olarak yansır ve bu şekilde 1. kenarda $P_1' = (-x_1, -y_1, 0)$ noktasına ulaşır. Bu ise E_{13} eşlemesinden dolayı P_1 noktasına gelmesi demektir. Böylece yörünge periyodik olduğu görülmüş olur.

Burada yörünge eşkenar dörtgen içinde takip ettiği her bir doğru parçasındaki yansımalar sayılacak olursa P_1P_2' için 3, P_2P_3 için 2, P_3P_4 için 3 ve P_4P_1' için de 2 olmak üzere, toplam 10 yansıma yapıldığı görülür.

6 ve 10 yansımaları periyodik yörüngeleri elde etmek amacıyla kullanılan eşkenar dörtgen daha fazla yansıma ihtiva eden periyodik yörüngeler için oldukça karışık bir hal almaktadır. F.Holt, bu tür yörüngeler için benzer bir modelleme yaparak aşağıdaki teoremi elde etmiştir:

Teorem 2.4 *En küçük açısı β olan $\triangle ABC$ dik üçgeninde $N = \lfloor \frac{\pi}{2\beta} \rfloor - 1$ olmak üzere, herhangi bir $k = 1, 2, \dots, N - 1$ için, kısa dik kenar üzerindeki her nokta her bir devirde $4k + 2$ yansımanın olduğu tek türlü belirli bir periyodik yörünge üzerindedir.*

2.1.3 Geniş Açılı Üçgenlerde Periyodik Yörüngeler

Dar ve dik açılı üçgenlerin aksine, geniş açılı üçgenler içinde periyodik yörüngelerin varlığı halen bilinmemektedir. Bununla birlikte bazı geniş açılı üçgenler içinde periyodik yörüngeler inşa etmek mümkündür. Geniş açılı üçgenlerle ilgili olarak ilginç sonuçlar bulunmaktadır. ([5, 15].) Bu kısımda bu sonuçlardan bazılarını yer veriyoruz.

Önerme 2.5 *Verilen her $n \in \mathbb{N}$ için, öyle bir $\Delta(n)$ geniş açılı üçgeni vardır ki, içindeki her periyodik yörüngede n 'den fazla yansıma yapılır.*

Kanıt. $n \in \mathbb{N}$ için $\Delta(n) = \triangle ABC$ üçgeninin dar açıları α ve β

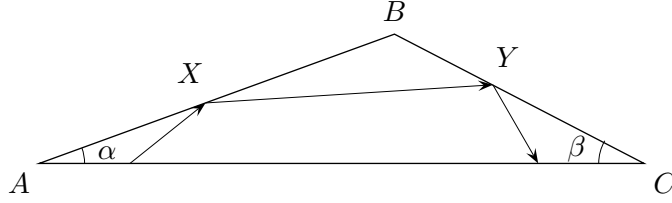
$$\min \left(- \left\lfloor \frac{-\pi}{\alpha} \right\rfloor, - \left\lfloor \frac{-\pi}{\beta} \right\rfloor \right) > n$$

olacak şekilde seçilmiş olsun. Burada $N(\alpha) = - \left\lfloor \frac{-\pi}{\alpha} \right\rfloor$ sayısı, α açısının belirlediği bölgedeki maksimum yansıma sayısıdır: α açısına komşu kenarlardaki ardışık yansıma açıları arasındaki fark α 'dır. Böylece sadece bu iki komşu kenarda yansımaların oluşturduğu dizide en fazla $N(\alpha)$ yansıma olabilir. Yukarıdaki koşula ek olarak α, β ve π sayıları rasyonel olarak bağımsız olsunlar, yani

$$k, m, l \in \mathbb{Z} \text{ için, } k\alpha + m\beta + l\pi = 0 \Leftrightarrow k = m = l = 0$$

olsun.

$\Delta(n)$ üçgeninin geniş açısına komşu kenarları AB ve BC olsun. Γ 'nın $\Delta(n)$ içinde bir periyodik yörünge olduğunu kabul edelim. Bu durumda Γ , X noktası AB üzerinde, Y noktası da BC üzerinde olacak şekilde bir XY bağlantısına sahiptir (Şekil 2.6). Bu iddiayı kanıtlamak için parçacığın AB veya BC 'deki



Şekil 2.6: Γ , geniş açılıya komşu kenarların iki noktasını birleştiren bir bağlantıya sahiptir

yansımalarından sonra AC kenarına çarptığını varsayalım. Bu durumda AC kenarındaki herhangi iki yansıma açısı ϕ' ve ϕ'' arasında, $k, m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\phi' - \phi'' = k\alpha + m\beta$ bağıntısı vardır. Çünkü AC kenarındaki ardışık iki yansıma açısı arasında 2α veya 2β 'lık fark vardır. Parçacığın AC kenarı ile ϕ_0 'lık açı yaparak harekete başladığı kabul edilirse AC 'deki ilk yansımadan sonraki yansıma açıları $\phi = \phi_0 + k\alpha + m\beta$ formunda olacaktır. Γ periyodik yörünge olduğundan, ϕ ve ϕ_0 açıları arasındaki fark 2π 'nin bir tam katı, yani $s \in \mathbb{Z}$ için $\phi = \phi_0 + 2\pi s$ olmalıdır. Ancak buradan $k\alpha + m\beta = 2\pi s$ ve rasyonel bağımsızlıktan dolayı $k = l = m = 0$ elde edilir. Böylece Γ 'nın X noktası AB üzerinde, Y noktası da BC üzerinde olacak şekilde bir XY bağlantısı vardır.

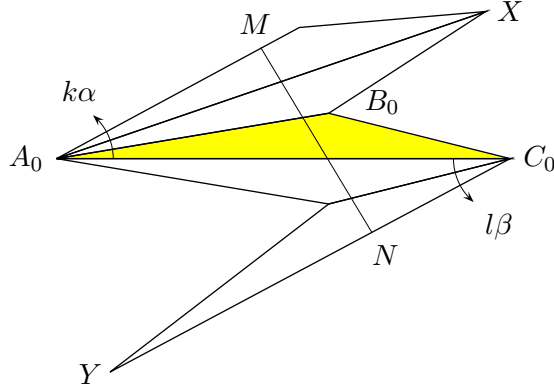
Bu XY bağlantısı AC kenarıyla öylesine küçük bir açı yapar ki, parçacık X ve Y noktalarındaki yansımalarından sonra $N(\alpha)$ ve $N(\beta)$ kez yansıma yapar. Dolayısıyla Γ , n 'den daha fazla bağlantı içerecektir. ■

Parçacık herhangi bir çokgen içinde kenarların herhangi ikisinde dik yansıma yapıyorsa periyodik yörünge belirler. Bu tür yörüngelere *dik periyodik yörünge* adı verilir. Buna göre aşağıdaki önerme ifade edilebilir [15].

Önerme 2.6 $\triangle ABC$ dar açıları α, β olan geniş açılı bir üçgen olsun. $k, l \in \mathbb{N}$ için, $k\alpha = l\beta < \frac{\pi}{2}$ koşulu sağlanıyorsa $\triangle ABC$ üçgeni içinde $2(k+l)$ -bağlantılı dik periyodik yörünge ailesi vardır.

Kanıt. Kanıt daha önce dar açılı üçgenlerde de kullanılan yörünge düzleştirilmesi yöntemiyle yapılacaktır. Bu yöntemle, ardışık üçgenlerin ortak bir kenara göre simetrik olduğu

$$A_{-l}B_{-l}C_0, \dots, A_{-1}B_{-1}C_0, \dots, A_0B_0C_0 = ABC, \dots, A_0B_{k-1}C_{k-1} \quad (2.1)$$



Şekil 2.7: $\triangle ABC$ üçgeni yansıtılarak MN yolunun oluşturulması

üçgen dizisi elde edilir. Bu diziyi elde etmek için $\angle C_0A_0B_0$ açısını A_0 noktası etrafında saatin tersi yönünde $k - 1$ kez, $\angle B_0C_0A_0$ açısını da C_0 noktası etrafında saatin tersi yönünde l kez yansıtma gerekir. Burada $\triangle A_0B_{k-1}C_{k-1}$ üçgeninin kenarlarından biri (A_0X diyelim) A_0C_0 ile $k\alpha$ 'lık, benzer şekilde $\triangle A_{-l}B_{-l}C_0$ üçgeninin kenarlarından biri de (C_0Y diyelim) C_0A_0 ile $l\beta$ 'lık açı yapmaktadır. (Şekil 2.7).

$k\alpha = l\beta$ olması A_0X ve C_0Y 'nin paralel olmasını garanti eder. A_0X ve C_0Y doğru parçalarına B_0 ve B_{-1} 'i ayırarak şekilde dik doğru çizilebilir. ($k\alpha = l\beta < \frac{\pi}{2}$ olduğundan bu yapılabilir.) Çizilen doğru parçası MN , (2.1) zincirini $N = M_{-l}, M_{-l+1}, \dots, M_{-1}, M_0, M_1, \dots, M_{k-1}, M_k = M$ noktalarında kesiyor olsun. Bu durumda MN doğru parçası $\triangle ABC$ üçgeninin üzerine geri katlandığında $k + l$ yansımaları bir yol olur. M 'den başlayıp tekrar M 'ye geri dönen parçacık MN yolunu iki kez alacağından toplam $2(k + l)$ -bağlantılı bir periyodik yörünge elde edilir. Burada MN doğru parçasına bir ϵ -paralel çizildiğinde dik periyodik yörünge ailesi elde edilir. ■

Bir periyodik yörünge uzunluğu ona ϵ -paralel çizilerek oluşturulan periyodik yörüngelerin uzunluklarından kesin küçük oluyorsa bu yörüngeye *izole periyodik yörünge* adı verilir.

Önerme 2.7 *Dar açıları α ve β olan $\triangle ABC$ geniş açılı üçgeni , $k, l = 1, 2, \dots$*

için

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} < k\alpha < \frac{\pi}{2} \leq (k+1)\alpha \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} < l\beta < \frac{\pi}{2} \leq (l+1)\beta\end{aligned}\tag{2.2}$$

koşulunu sağlıyorsa, içinde $(2(k+l)-1)$ -bağlantılı izole periyodik yörünge vardır.

Kanıt. Bu önermenin kanıtında yörünge düzleştirme yöntemi farklı bir bakış açısıyla uygulanmaktadır: İstenilen yörüngeyi elde etmek için (2.2) koşulundan yararlanarak bir dar açılı üçgen inşa edilerek, onun ortik üçgeni kullanılacaktır.

$\triangle A_0B_0C_0 = \triangle ABC$ üçgeni A_0 noktası etrafında saatin tersi yönünde $k-1$ defa, C_0 noktası etrafında saatyönünde $l-1$ defa yansıtılarak

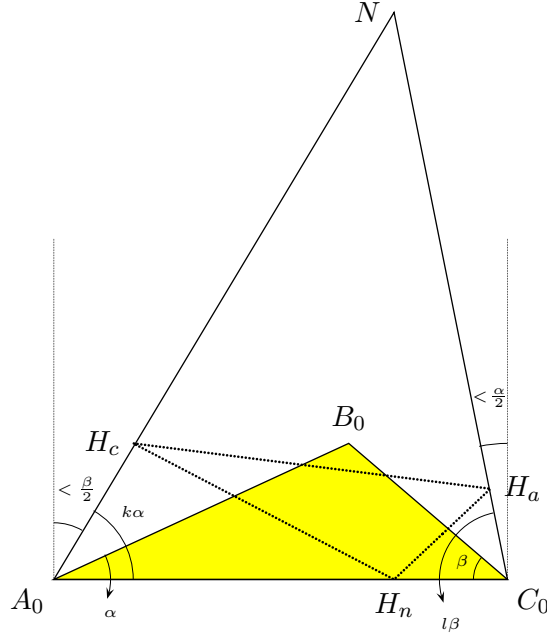
$$A_{-l+1}B_{-l+1}C_0, \dots, A_{-1}B_{-1}C_0, \dots, A_0B_0C_0, A_0B_1C_1, \dots, A_0B_{k-1}C_{k-1}$$

üçgen zinciri elde edilir. $\triangle A_{-l+1}B_{-l+1}C_0$ ve $\triangle A_0B_{k-1}C_{k-1}$ üçgenlerinin 'en dış' kenarları uzatıldığında bir N noktasında kesişirler, çünkü varsayımdan dolayı $k\alpha < \frac{\pi}{2}, l\beta < \frac{\pi}{2}$ 'dir.

Ayrıca A_0C_0 doğru parçasına A_0 ve C_0 noktalarında çizilen dik doğrularla, A_0N ve C_0N arasındaki açı yine varsayımdan dolayı sırasıyla $\frac{\beta}{2}$ ve $\frac{\alpha}{2}$ 'den küçüktür. Yani elde edilen $\triangle A_0C_0N$ üçgeni dar açılı bir üçgendir. Dolayısıyla yükseklik ayaklarının oluşturduğu $\triangle H_aH_cH_n$ ortik üçgenine sahiptir. Burada $\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} < k\alpha < \frac{\pi}{2}$ ve $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} < l\beta < \frac{\pi}{2}$ olması H_aH_c doğru parçasının B_0 'ın altında olmasını garanti eder. $\triangle H_aH_cH_n$ üçgeninden istenilen yörüngeyi inşa etmek için bu oldukça önemlidir. Bundan sonra üçgenler zinciri $\triangle A_0B_0C_0$ üzerine geri katlanarak $\triangle H_aH_cH_n$ üçgeninin belirlediği yörünge ele alınırsa $(2(k+l)-1)$ -bağlantılı periyodik yörünge elde edilir. ■

2.2 Dörtgenlerde Periyodik Yörüngeler

Bu kısımda dörtgenler içerisinde, dar açılı üçgenlerdeki Fagnano yörüngesinin benzeri olan yörüngeler araştırılacaktır. Bu yörüngeler, parçacığın



Şekil 2.8: $\triangle A_0C_0N$ üçgeninin ortik üçgeni $\triangle H_aH_cH_n$

dörtgenin komşu kenarlarını sırayla dolaşarak oluşturduğu 4-bağlantılı periyodik yörüngelerdir. Öncelikle verilen bir $ABCD$ dörtgeninde bu türden bir yörüngenin bulunabilmesi için gerekli koşullar araştırılacaktır. $ABCD$ dörtgeninde bu şekildeki bir yörünge $EFGH$ dörtgeninin belirlediği yörünge olsun. A, B, C, D köşelerindeki açılar sırasıyla $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ve $\angle HEA = x$ olsun. (Şekil 2.9).

Buradan aşağıdakiler kolayca elde edilir:

$$\angle AHE = \angle GHD = \pi - \alpha - x$$

$$\angle HGD = \angle FGC = \alpha + x - \delta$$

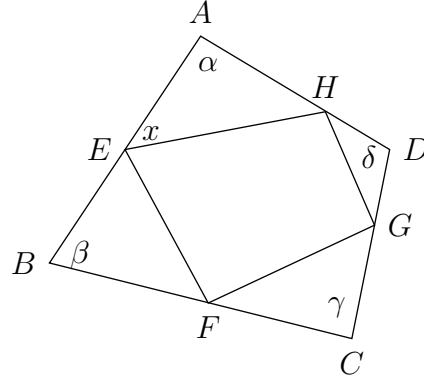
$$\angle CFG = \angle EFB = \pi - \alpha - x - \gamma + \delta$$

ve burada $\triangle EBF$ üçgeninden

$$\pi - \alpha - x - \gamma + \delta + x + \beta = \pi$$

$$\alpha + \gamma = \delta + \beta$$

elde edilir. Bu, dörtgenin karşılıklı açılarının toplamının eşit olması demektir. Bu ise dörtgenin 4-bağlantılı periyodik yörüngeye sahip olabilmesi için

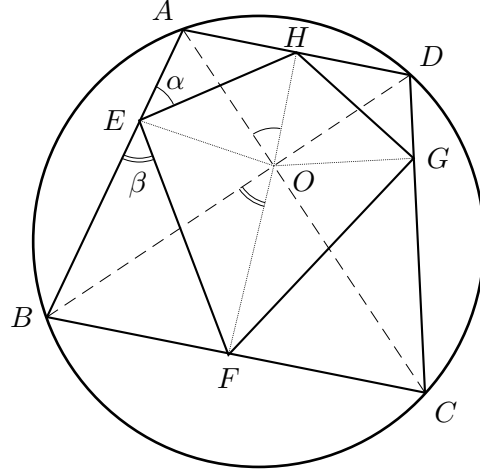


Şekil 2.9: Konveks bir dörtgende 4-bağlantılı periyodik yörünge

köşelerinin bir çember üzerinde bulunması diğer bir deyişle kirişler dörtgeni olması gerektiği sonucunu verir. Şimdi çevrel çemberinin merkezini içeren çembersel bir dörtgen içinde 4-bağlantılı periyodik yörünge varlığı gösterilecektir.

$ABCD$ dörtgeninin köşegenlerinin kesişme noktası O , O noktasından kenarlara dikmeler indirilerek elde edilen noktalar da E, F, G, H olarak adlandırılınsın. Burada O noktasından kenar doğrularına indirilen dikme ayaklarının kenarlar üzerinde olması için dörtgenin çemberin merkezini içermesi gerekir. Aksi takdirde indirilen dikme ayakları kenarlar üzerinde değil, onların uzantısında olacaktır. Elde edilen $EFGH$ dörtgeninin belirlediği yörünge 4-bağlantılı periyodik bir yörüngedir. Bunu kanıtlamak için $\angle HEA$ ve $\angle BEF$ açıları sırasıyla α ve β olarak adlandırılarak $\alpha = \beta$ olduğu gösterilecektir. (Şekil 2.10).

Burada $\angle OEA + \angle OHA = \pi$ olduğundan $AEOH$ dörtgeni bir çember üzerindedir ve aynı yayı gördüklerinden dolayı $\angle HEA = \angle HOA = \alpha$ 'dır. Benzer şekilde $EBFO$ dörtgeni de bir çember üzerindedir ve $\angle BOF = \beta$ 'dır. Diğer taraftan $\angle CBD = \angle CAD$ 'dir çünkü büyük çemberde aynı yayı görürler, bu açı da γ ile gösterilsin. Bu durumda AOH üçgeninin açıları $\frac{\pi}{2}, \alpha, \gamma$, BOF üçgeninin açıları da $\frac{\pi}{2}, \beta, \gamma$ 'dır. Buradan $\alpha = \beta$ olması gerektiği anlaşılır. Aynı argüman $EFGH$ dörtgeninin F, G, H köşelerinde belirlediği



Şekil 2.10: Çembersel bir dörtgende 4-bağlantılı periyodik yörünge

diğer yansıma açıları için de kullanılarak yansıma açılarının eşit olduğu, yani $EFGH$ dörtgeninin 4-bağlantılı periyodik yörünge olduğu görülür. Böylece aşağıdaki teorem kanıtlanmış olur.

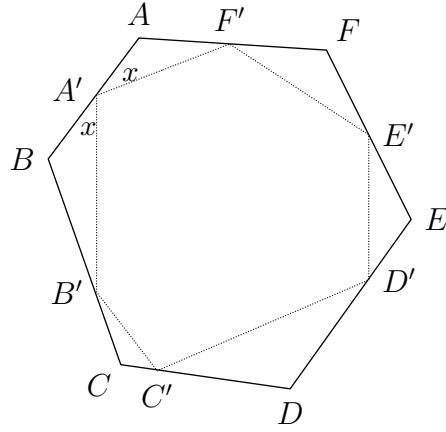
Teorem 2.8 *Herhangi bir konveks dörtgenin 4-bağlantılı periyodik bir yörüngeye sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul köşelerinin bir çember üzerinde bulunması ve çevrel çemberinin merkezini içermesidir.*

$ABCD$ çembersel dörtgeni içerisinde elde edilen $EFGH$ bilardo yörüngesinin kenarlarına ϵ -paralel bir yörünge çizildiğinde uzunluğu aynı olan bir başka periyodik bilardo yörüngesi elde edilir.

$EFGH$ dörtgeninin bir çember üzerinde olabilmesi için gerek ve yeter koşul $ABCD$ dörtgeninin köşegenlerinin dik kesişmesidir. $ABCD$ dörtgeninin çevrel çemberinin merkezi M olmak üzere, bu çemberin merkezi OM doğru parçasının orta noktasıdır. Bu çember aynı zamanda $ABCD$ dörtgeninin kenarlarının orta noktalarından da geçer.

2.3 $2n$ -genlerde Periyodik Yörüngeler

Genel olarak $2n$ -gen durumuna geçmeden önce altıgenlerdeki durumu incelemek yararlı olacaktır. Konveks bir $ABCDEF$ altıgeni içerisinde, sırayla bütün kenarları dolaşan periyodik bir yörüngenin var olabilmesi için açıların alterne toplamlarının eşit olması gerekir. Bunu göstermek üzere A, B, C, D, E, F köşelerindeki açılar sırasıyla $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_6$ olarak adlandırılmış olsun. Bu altıgen içinde istenilen tipten bir yörüngenin var olduğu kabul edilsin ve bu yörüngenin belirttiği altıgen de $A'B'C'D'E'F'$ ile gösterilsin. Ayrıca A' köşesindeki yansıma açısı x olsun. (Şekil 2.11).



Şekil 2.11: Konveks altıgen içinde 6-bağlantılı periyodik yörünge

Bu durumda B', C', D', E', F' köşelerindeki yansıma açıları aşağıdaki gibi olur:

B'	$\pi - \alpha_2 - x$
C'	$\alpha_2 + x - \alpha_3$
D'	$\pi - \alpha_2 - \alpha_4 - x + \alpha_3$
E'	$\alpha_2 + \alpha_4 + x - \alpha_3 - \alpha_5$
F'	$\pi - \alpha_2 - \alpha_4 - x - \alpha_6 + \alpha_3 + \alpha_5$

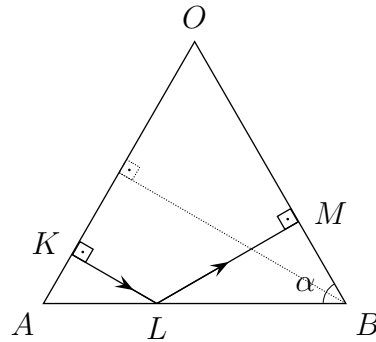
Son olarak $AA'F'$ üçgeninden $\pi - \alpha_2 - \alpha_4 - x - \alpha_6 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_1 + x = \pi$ elde edilir. Buradan da

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6$$

olması gerektiği görülür. Ancak bu şart $ABCDEF$ altıgeninin bir çember üzerinde bulunabilmesi için yeterli değildir. Hatta herhangi bir çembersel altıgen de bile kenarları sırasıyla dolaşan bir 6-bağlantılı periyodik yörünge bulunmayabilir. Bu yüzden içinde kenarları sırayla dolaşan 6-bağlantılı periyodik yörünge elde etmek amacı ile özel altıgenler inşa edilecektir.

Dar açılı üçgenlerdeki Fagnano yörüngesi ve çembersel dörtgenlerde verilen yörüngede, yörüngeyi belirlediği kenarlar, çevrel çemberin merkezinden köşelere çizilen doğrulara diktirler. Bu özelliğin çembersel altıgenlerde de geçerli olması için öncelikle çemberin merkezinin altıgen içinde bulunması gerekir.

Yardımcı Teorem 2.9 *Herhangi bir ikizkenar üçgende, eşit kenarlardan birine dik olarak atılan parçacık, tabandan diğer eşit kenara (veya uzantısına) dik olacak şekilde yansır. Üstelik taban açuları α , eşit kenarlarının uzunluğu r ile gösterilirse, yörüngeyi eşit kenarlar üzerinde kestiği noktaların taban köşelerine uzaklıkları toplamı $2r \cos^2 \alpha$ olur. (Şekil 2.12).*



Şekil 2.12: İkizkenar üçgende periyodik bir yörünge

Bu özelliğin, ikizkenar üçgenin tepe açısının geniş açı olması durumunda

parçacığın tabandan yansıdıktan sonra diğer kenarın uzantısına dik olacak şekilde yansımaları şeklinde geçerli olduğuna dikkat edelim.

Kanıt. $\triangle OAB$ ikizkenar üçgeni içinde hareket eden parçacık ikizkenarlara K ve M , tabana ise L noktasında çarpıyor olsun. (Şekil 2.12). L noktasında yansıma sırasında geliş açısı yansıma açısına eşit olduğundan $\triangle LBM$ ve $\triangle ALK$ üçgenleri benzer üçgenlerdir. Dolayısıyla $\angle BML = \frac{\pi}{2}$ 'dir.

$|OA| = |OB| = r$ olduğundan $|AB| = 2r \cos \alpha$ olarak bulunur. Böylece $|AK| + |BM| = |AL| \cos \alpha + |KB| \cos \alpha = |AB| \cos \alpha = 2r \cos^2 \alpha$ elde edilir. ■

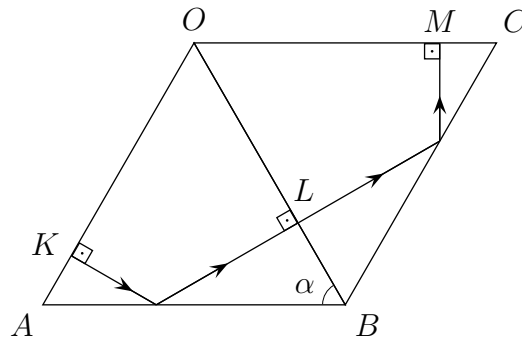
Bunun sonucu olarak aşağıdaki özellik verilebilir:

Sonuç 2.10 $OABC$ dörtgeni, taban açıları α ve eşit kenarlarının uzunluğu r olan iki ikizkenar üçgenin yapıştırılmasıyla elde edilen bir dörtgen olsun. (Şekil 2.13). OA üzerinde $|AK| < 2r \cos^2 \alpha$ koşulunu sağlayan bir K noktasından, OA kenarına dik olarak atılan ve sırasıyla AB , BC kenarlarından yansıyan parçacık OC üzerinde M noktasına geliyor olsun. Bu durumda

$$|AK| = |CM|$$

'dir.

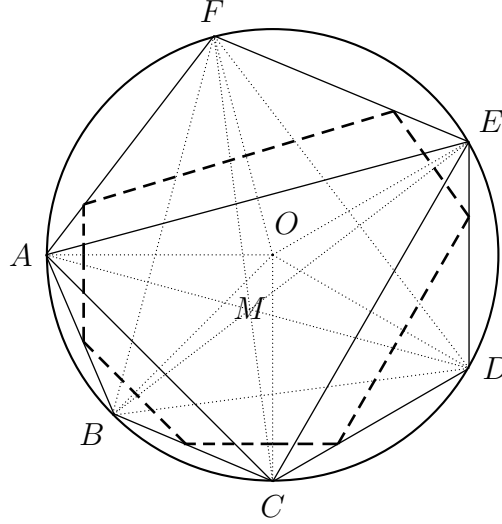
Kanıt. Yardımcı Teorem 2.9 'a göre $|AK| + |BL| = 2r \cos^2 \alpha = |BL| + |CM|$ olduğundan $|AK| = |CM|$ olduğu hemen görülür. ■



Şekil 2.13: İkizkenar üçgenlerin yapıştırılması

İkizkenar üçgenlerin bu özellikleri, bir üçgenden elde edilecek çembersel altıgenler içinde periyodik yörüngeler elde edilebilmesini sağlayacaktır. ACE

keyfi bir üçgen olsun. ACE üçgeninin çevrel çemberi çizilerek açıortay doğrularının çevrel çemberi kestiği noktalar, A açısının açıortayı için D , C için F ve E için de B ile gösterilsin. (Şekil 2.14).



Şekil 2.14: $ABCDEF$ altıgeninin içinde 6-bağlantılı periyodik yörüngenin elde edilmesi

Teorem 2.11 ACE keyfi bir üçgen olsun. ACE 'nin çevrel çemberinin merkezi O olarak adlandırılınsın. Açıortay doğrularının çevrel çemberi kestiği noktalar B, D, F olmak üzere elde edilen $ABCDEF$ altıgeni, içinde bağlantıları O noktasından köşelere çizilen doğrulara dik olan 6-bağlantılı periyodik bir yörünge ailesi vardır.

Kanıt. $\triangle ACE$ üçgeninin açıları sırasıyla α, β , ve γ olsun. Genellik bozulmadan çevrel çemberin yarıçapı 1 olarak alınabilir. O noktasıyla A, B, C, D, E, F köşeleri birleştirilerek altı tane ikizkenar üçgen oluşturulur. $\widehat{CD} = \widehat{DE} = \alpha$, $\widehat{EF} = \widehat{FA} = \beta$, ve $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \gamma$ olduğundan $\angle COD = \angle DOE = \alpha$, $\angle EOF = \angle FOA = \beta$ ve $\angle AOB = \angle BOC = \gamma$ elde edilir. Böylece $\triangle AOB$ ve $\triangle BOC$ ikizkenar üçgenlerinin taban açıları $\frac{1}{2}(\pi - \gamma)$, $\triangle COD$ ve $\triangle DOE$ üçgenlerinin taban açıları $\frac{1}{2}(\pi - \beta)$ ve $\triangle EOF$ ve $\triangle AOF$ üçgenlerin de ise taban

açıları $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ olur. Bu durumda $OABC$ dörtgeni birbirine eş olan $\triangle OAB$ ve $\triangle OBC$ ikizkenar üçgenlerinin, OB boyunca yapıştırılması formundadır. Aynı şekilde $OCDE$ ve $OFEA$ dörtgenleri de birbirine eş ikizkenar üçgenlerin yapıştırılması formundadır. Dolayısıyla Sonuç 2.10 'un koşullarını sağlarlar.

$$\begin{aligned} s &= \min\left\{2 \cos^2\left(\frac{1}{2}(\pi - \alpha)\right), 2 \cos^2\left(\frac{1}{2}(\pi - \beta)\right), 2 \cos^2\left(\frac{1}{2}(\pi - \gamma)\right)\right\} \\ &= 1 - \min\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} \end{aligned}$$

olsun. Parçacığın $0 < s_0 < s$ olmak üzere OA doğru parçasının üzerinde A noktasına uzaklığı s_0 olan noktadan OA 'ya dik olacak şekilde pozitif yönde (saatin tersi yönünde) hareketine başladığı kabul edilsin. Bu durumda parçacığın takip edeceği yörünge periyodik olacaktır. Gerçekten Sonuç 2.10 'a göre, $OABC$ dörtgeninde hareket eden parçacık AB ve BC kenarlarında yansıyarak OC 'ye dik olarak, OC üzerinde C 'ye uzaklığı s_0 olan noktaya gelir. Benzer şekilde parçacık, $OCDE$ dörtgeninde hareketine devam ettiğinde OE 'ye dik olarak, OE üzerinde E noktasına uzaklığı s_0 olan noktaya gelecektir. $OFEA$ dörtgeninde hareketine devam ettiğinde OA 'ya dik olarak hareketine başladığı noktaya gelerek yörüngesini kapatacaktır. Böylece $s_0, (0, s)$ arasında değiştiğinde periyodik bir yörünge ailesi elde edilmiş olur. Burada yörüngenin belirlediği kenarların O 'dan köşelere çizilen doğrulara dik olduğu Yardımcı Teorem 2.9 ve Sonuç 2.10 'un sonucudur. ■

Altıgenlerdeki bu durum çevrel çemberinin merkezini içeren $2n$ -genlere kolayca genellenebilir. $A_1A_3 \dots A_{2n-1}$ köşeleri bir çember üzerinde bulunan bir n -gen olsun ve bu n -gen çemberin merkezi olan O noktasını içersin. Bu durumda O 'dan n -genin kenarlarına dikmeler indirmek suretiyle çember üzerinde n tane daha nokta elde edilir. Bu noktalar da A_iA_{i+2} kenarı için A_{i+1} olarak adlandırılarak, $A_1A_2 \dots A_{2n}$, $2n$ -geni elde edilir.

Teorem 2.12 $A_1A_2 \dots A_{2n}$, $2n$ -geni içinde kenarları sırayla dolaşan $2n$ -bağlantılı periyodik bir yörünge ailesi vardır.

Kanıt. Kanıt altıgen durumundakine oldukça benzerdir. Burada da $OA_1A_2A_3$, $OA_3A_4A_5, \dots, OA_{2n-1}A_{2n}A_1$ dörtgenleri iki eş ikizkenar üçgenin yapıştırılmasıyla elde edilmiştir. Dolayısıyla Sonuç 2.10 'daki özelliği sağlarlar. O noktası ile köşelerin birleştirilmesi ile oluşan $i = 1, 2, \dots, n$ için $OA_{2i-1}A_{2i}$ ve $OA_{2i}A_{2i+1}$ ($A_{2n+1} = A_1$ olmak üzere) ikizkenar üçgenlerinin taban açıları α_i olsun.

$$s = \min\{2 \cos^2 \alpha_1, 2 \cos^2 \alpha_2, \dots, 2 \cos^2 \alpha_n\}$$

olarak tanımlanırsa OA üzerinde A noktasına uzaklığı $0 < s_0 < s$ olan noktadan OA 'ya dik olacak şekilde hareketine başlayan parçacık Sonuç 2.10 'dan dolayı yine aynı noktaya dik olarak gelerek periyodik yörünge çizecektir. Böylece $s_0, (0, s)$ aralığında değiştiğinde yörüngenin belirlediği kenarlar O 'dan köşelere çizilen doğrulara dik olacak şekilde periyodik bir yörünge ailesi elde edilmiş olur. ■

2.4 Genel Sonuçlar

Kuşkusuz çokgenler içinde incelenen bilardo problemleri arasında cevap bekleyen en önemli sorulardan birisi her çokgenin periyodik yörüngeye sahip olup olmadığıdır. Bu problem henüz çözülememiş olmasına rağmen bu alanda bazı genel sonuçlar bulunmaktadır. Bunlar arasından en genel olanı H. Masur tarafından verilmiştir. Bu sonucu vermeden önce açıları π sayısının rasyonel katları şeklinde olan bir çokgeni *rasyonel çokgen* olarak tanımlayalım.

Teorem 2.13 (Masur, [9]) *Her rasyonel çokgen içinde sonsuz çoklukta periyodik yörünge vardır. Üstelik bu yörüngelerin bağlantılarının belirlediği yön vektörleri S^1 birim diski içinde yoğun bir kümedir.*

Masur, bu teoremi Teichmüller teorisi kullanarak kanıtlamış, ancak yörüngelerin nasıl inşa edileceği ile ilgilenmemiştir. Vorobets ve ark., (1992) açıları π 'nin rasyonel katları olan bir n -gen içinde en azından $\frac{n}{2}$ periyodik yörünge ailesi bulunduğunu yörüngeleri inşa etmek suretiyle göstermiştir.

Bosthernitzan ve ark. (1998) Masur'un sonucunu biraz daha kuvvetlendirerek, aşağıdaki teoremi kanıtlamaktadır:

Teorem 2.14 *Herhangi bir rasyonel çokgen içinde bilardo akışı tüm faz uzayı içinde yoğundur.*

Bir Q çokgeni içindeki bir Γ yörüngesi, yörünge düzleştirme yöntemiyle açılarak, yörüngenin, elde edilen çokgen zincirini kestiği noktalar $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ şeklinde adlandırılmış olsun. Benzer şekilde P_0 noktasından başlayarak hareket tersine düşünüldüğünde $\dots, P_{-n}, \dots, P_{-1}, P_0$ nokta dizisi elde edilir. Eğer Γ yörüngesi periyodik ise bu dizi belirli bir $P_{i_0}, P_{i_1}, \dots, P_{i_k}$ sonlu noktalar dizisini tekrarlayan bir dizi olacaktır. Γ periyodik değilse iki durum söz konusudur: birincisi, sonsuz ve tekrarsız dizidir, ikincisi ise parçacığın geçmişte ve gelecekte çokgenin herhangi bir köşesine çarparak durduğu sonlu noktadan oluşan bir dizidir. Bu son durumda, yörünge $m, n \in \mathbb{N}$ sayıları için $P_{-m}, \dots, P_{-1}, P_0, P_1, \dots, P_n$ şeklinde sonlu bir dizidir ve Q çokgeninin yansıtılmasıyla elde edilen çokgenler dizisinin iki köşesini birleştirir. Bu tür sonlu bilardo yörüngeleri *genelleştirilmiş köşegen* olarak adlandırılır.

$O(\mathbb{R}^2)$ ile düzlemin izometrilere grubu ve $SO(\mathbb{R}^2)$ ile yön koruyan izometrilere grubu gösterilsin. \mathbb{R}^2 için bir O orijini seçilerek, U ile O etrafındaki dönmeler gösterilsin. Bu durumda $SO(\mathbb{R}^2) = U.\mathbb{R}^2$ 'dir. (Burada \mathbb{R}^2 ötelemeler manasında kullanılmıştır.) Yani, yönlendirmeyi koruyan herhangi bir izometri bir öteleme ve O civarındaki bir dönme dönüşümünün bileşkesi olarak yazılabilir.

Birim çemberin izometrilere grubu $O(U)$, orijini koruyan izometrilere alt-grubu olarak $O(\mathbb{R}^2)$ içinde gömülüdür. $O(U)$ yansıma ve dönme dönüşümlerini içerir. Yatay ekseninde yansıma dönüşümü σ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} O(U) &= \{1, \sigma\}.U \\ O(\mathbb{R}^2) &= O(U).\mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerli olur.

Q çokgeninin kenarlarının belirlediği doğrular l_1, l_2, \dots, l_n ve bu doğrulara göre yansıma dönüşümleri de sırasıyla s_1, s_2, \dots, s_n olsun. $O(\mathbb{R}^2)$ 'nin bu dönüşümler

tarafından üretilen altgrubu G_Q ile gösterilsin. Bu durumda $O(\mathbb{R}^2) = O(U).\mathbb{R}^2$ eşitliği $O(\mathbb{R}^2) \rightarrow O(U)$ şeklinde bir homomorfizm tanımlar. W_Q, G_Q 'nun bu homomorfizm altındaki görüntüsü olsun. l'_1, l'_2, \dots, l'_n , sırasıyla l_1, l_2, \dots, l_n doğrularına paralel olan ve orijinden geçen doğruları göstermek üzere $W_Q, O(U)$ içinde l'_1, l'_2, \dots, l'_n doğrularına göre yansıma dönüşümlerinin ürettiği alt-gruptur. $G_Q \rightarrow W_Q$ homomorfizminin çekirdeği C_Q , ötelemeleri içerir. Böylece aşağıdaki önerme ifade edilebilir:([4, 16])

Teorem 2.15 *Q çokgeninin genelleştirilmiş köşegenleri kümesi sayılabilir.*

Kanıt. Q içindeki bütün Γ yörüngelerinin düzleştirilmesiyle elde edilebilecek çokgenlerin kümesi X olsun. Bu durumda $X, \{gQ \mid g \in G_Q\}$ çokgenler kümesinin alt kümesidir. G_Q sonlu eleman tarafından üretildiğinden sayılabilir. Q içindeki bir genelleştirilmiş köşegen X içindeki iki çokgenin köşelerini birleştirir. Diğer taraftan çokgenlerin köşe sayısı sayılabilir olduğundan genelleştirilmiş köşegenlerin sayısı da sayılabilir. ■

Bir Q çokgeni içindeki periyodik bir yörüngenin bağlantı sayısı tek ise *tek periyodik yörünge*, çift ise *çift periyodik yörünge* adı verilir. Buna göre aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 2.16 *Γ uzunluğu L olan bir periyodik yörünge olsun. γ_0, Γ 'nin bir bağlantısı, l 'de γ_0 doğrultusundaki doğru olsun. Bu durumda Γ yörüngesinin düzleştirilmesine bir $g \in G_Q$ elemanı karşılık gelir. Bu eleman, Γ çift periyodik yörünge ise l doğrusu boyunca L kadar öteleme, Γ tek periyodik yörünge ise l 'ye göre yansıma belirten dönüşümdür.*

Sonuç 2.17 *Bir çokgen içindeki periyodik yörünge ailelerinin sayısı en fazla sayılabilir.*

Kanıt. Önerme 2.16 'den dolayı herhangi bir periyodik yörünge ailesine bir $g \in G_Q$ elemanı karşılık getirilmiş olur. Farklı aileler farklı grup elemanı belirlerler. Diğer taraftan G_Q sayılabilir olduğundan istenilen kanıtlanmış olur. ■

3 KONVEKS BİLARDO SINIFI

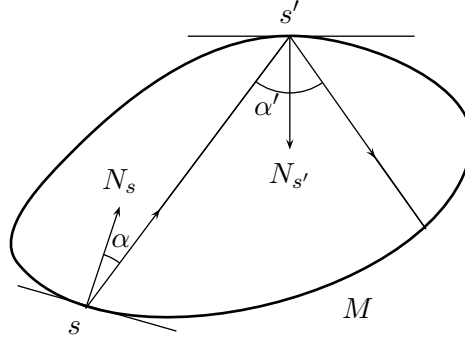
Bu bölümde düzlemde, düzgün kapalı bir eğri ile sınırlanmış, konveks bir M bölgesi içindeki bilardo sınıfları ele alınacaktır. Bu tür bir bölgede geliş açısının yansıma açısına eşit olduğu doğal yansıma tanımı alındığında elde edilen bilardo sınıfı *konveks bilardo* veya *Birkhoff bilardo* olarak adlandırılır. İkinci kısımda yansıma tanımının değiştiği izdüşel bilardodaki bazı sonuçlara yer verilecek sonrasında ise özel bir eğri ailesinde gradyant vektörlere göre yansıma kavramı tanımlanacaktır.

3.1 Öklidyen Konveks Bilardo

Bir $s \in \partial M$ noktası ve parçacığın hareketinin yönü verildiğinde bütün yörüngesi belirlenmektedir. Parçacığın hareketi esnasında alabileceği tüm durumların kümesi (parçacığın bulunabileceği bütün noktalar ve o noktadaki bir yön vektörü ikililerinin kümesi) *durum (faz) uzayı* olarak adlandırılır. Parçacık M 'nin iç noktalarında doğrusal hareket ettiğinden bir sınır noktasına ulaşana kadar yön vektörü değişmez. Bu yüzden bilardo dönüşümünü durum uzayının M 'nin sınır noktaları üzerindeki bir nokta ve bu noktadaki içeri doğru bir yön vektörü ikililerinin oluşturduğu alt kümesi üzerinde tanımlamak daha ekonomik olmaktadır. Hareketin yönü, hız vektörü ile o noktadaki içe doğru normal vektör arasındaki açı olarak da verilebilir. Bu durumda bilardo dönüşümü $\partial M \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kümesi üzerinde tanımlanabilir: $(s, \alpha) \in \partial M \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ noktasının T bilardo dönüşümü altındaki görüntüsü, s noktasından normale α radyanlık açı yapacak şekilde harekete başlayan parçacığın bundan sonra ∂M 'ye değdiği ilk nokta s' ve yansıdıktan sonra normal vektörü $N_{s'}$ ile yaptığı açı α' olmak üzere (s', α') 'dir. Böylece bilardo dönüşümü

$$\begin{aligned} T : \partial M \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] &\rightarrow \partial M \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ T(s, \alpha) &= (s', \alpha') \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. (Şekil 3.1).



Şekil 3.1: Yansıma Dönüşümü

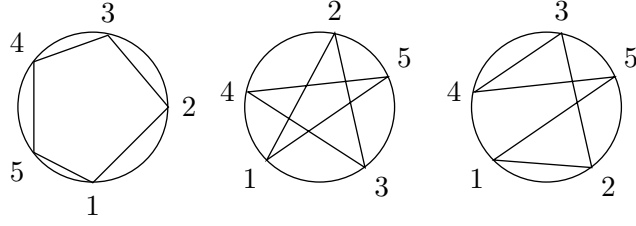
M içindeki bilardo parçacığının periyodik yörüngeye sahip olması, sonlu bir n doğal sayısı için

$$T^n(s, \alpha) = (s, \alpha)$$

olacak şekilde bir $(s, \alpha) \in \partial M \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ noktasının var olması demektir. Birkhoff, düzgün bir γ eğrisi tarafından sınırlanmış, konveks bir M bölgesi içinde hareket eden parçacığın periyodik yörüngelerinin bulunduğunu göstermiştir [1, 8, 13]. Kuşkusuz en basit durum 2-bağlantılı periyodik yörünge durumudur, bu tür yörüngeler başlangıç ve bitiş noktalarında γ ile dik açı yaparlar. Birkhoff'un sonucunu verebilmek amacıyla n -bağlantılı periyodik yörüngeler ele alınacaktır. x_1, x_2, \dots, x_n noktaları γ üzerindeki bir n -bağlantılı periyodik yörüngenin ardışık yansıma noktaları olsunlar. Bu noktaların ardışık ikisinin aynı olamayacağı ve bunun dışında farklı ikisinin eşit olmasında bir sakınca bulunmadığı açıktır. x_1, x_2, \dots, x_n noktalarının farklı devirli sıralamaları ya da bunların ters sırada yazılmaları aynı yörüngeyi belirtir.

γ eğrisi, $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ile parametrize edilirse x_i noktaları \mathbb{R}/\mathbb{Z} 'nin elemanı olarak düşünülebilirler. Böylece köşeleri γ üzerinde bulunan bir n -gene $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i \in S^1$ ve $x_{i+1} \neq x_i$ olacak şekilde bir (x_1, x_2, \dots, x_n) n -lisi karşılık getirilmiş olur. Bu n -lilerin oluşturduğu uzay $G(S^1, n)$ ile gösterilirse, n -genlerin çevre uzunluğu fonksiyonu $G(S^1, n)$ üzerinde düzgün bir fonksiyon verir. Bu fonksiyonun kritik noktalarına da n -bağlantılı periyodik bilardo

yörüngeleri karşılık gelir.

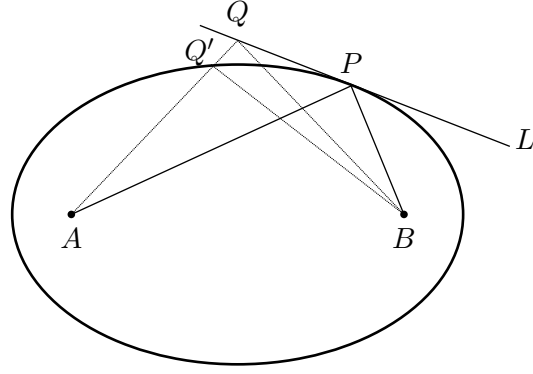


Şekil 3.2: Dönüş sayıları bir ve iki olan periyodik Birkhoff yörüngeleri

Şekil 3.2’de ”farklı türden” 5-bağlantılı yörüngeler gösterilmiştir. Bunların farklı olma sebebi ”dönüş sayıları” ’nın farklı olmasıdır. Dönüş sayısı şöyle tanımlanabilir: $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G(S^1, n)$, n -lisine karşılık gelen yörünge ele alınırsa $i = 1, 2, \dots, n$ için x_i ’ler arasında $t_i \in [0, 1]$ olmak üzere $x_{i+1} = x_i + t_i$ bağıntısı vardır. Yörünge kapalı olduğundan $x_1 = x_1 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$ elde edilir, böylece $t_1 + t_2 + \dots + t_n \in \mathbb{Z}$ olmalıdır. İşte 1 ile $n - 1$ arasında değer alabilecek olan bu sayı *yörünge* nin dönüş sayısı olarak adlandırılır ve ρ ile gösterilir. Yörünge nin yönünün değiştirilmesi bu sayıyı $n - \rho$ olarak değiştirir. Yörünge nin yönünün değiştirilmesi ile normal sırada alınması arasında fark gözetilmediğinden dönüş sayısının 1 ile $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ (burada $\lfloor \cdot \rfloor$ tam değeri göstermektedir) arasında değer alır. Dönüş sayısının bu şekilde açıklanmasından sonra Birkhoff’un teoremi verilebilir:

Teorem 3.1 (Birkhoff) Her $n \geq 2$ ve $\rho \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ olacak şekildeki n ile aralarında asal her ρ sayısı için, dönüş sayısı ρ olan geometrik olarak farklı iki tane n -bağlantılı periyodik bilyardo yörüngesi vardır.

Düzlemde düzgün, kapalı bir eğri tarafından sınırlanmış, konveks bölgeler arasında elipsin önemli bir yeri vardır. Gerçekten elips bir çok ilginç sonuç barındırmaktadır [17]. Aşağıda bu sonuçlar özetlenecektir.



Şekil 3.3: Elipsin bir odağından geçen parçacık diğer odaktan geçecek şekilde yansır

Teorem 3.2 *Düzlemde elips tarafından sınırlandırılmış bir bölge içinde elipsin bir odağından geçen parçacık, diğer odaktan geçecek şekilde yansır. Benzer şekilde Hiperbolün bir dalı tarafından sınırlanmış bölge içinde odaktan geçen parçacık, uzantısı diğer odaktan geçecek şekilde yansır.*

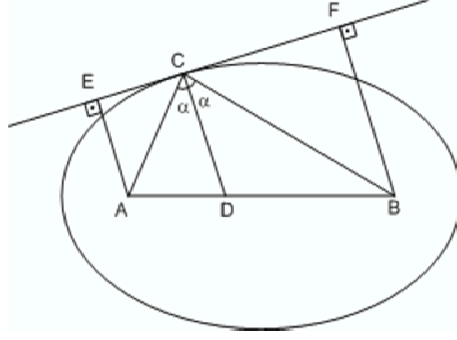
Kanıt. Odakları A ve B ve asal eksen uzunluğu $2a$ olan elips üzerinde bir P noktası verilsin. P noktasındaki teğet doğrusu L ile gösterilsin. A 'dan başlayıp L 'ye uğrayarak B 'ye giden yollar arasında en kısa yolun APB yolu olduğu gösterilecektir. Gerçekten L üzerinde başka bir Q noktası verildiğinde AQB yolu APB 'den uzundur. AQ doğru parçasının elipsi kestiği nokta Q' ile gösterilirse

$$|AQ| + |QB| = |AQ'| + |QQ'| + |QB| \geq |AQ'| + |Q'B| = |AP| + |PB| = 2a$$

elde edilir. Diğer taraftan bu yolların en kısasının yansıma yolu olduğu bilindiğinden elips içinde bir odaktan geçen parçacık diğer odaktan geçecek şekilde yansır. Benzer ispat hiperbol içinde yapılabilir. ■

Teorem 3.3 *Elipsin (veya hiperbolün) herhangi bir teğetinin odaklarına uzaklıkları çarpımı sabittir ve bu sabit yedek eksen uzunluğunun yarısının karesine eşittir.*

Kanıt. Öncelikle elips durumu ele alınacaktır. Elipsin odakları A ve B olarak gösterilsin. CD 'de elipsin C noktasındaki normali olsun. Elipsin C noktasındaki teğeti çizilerek, odaklardan teğete indirilen dikmelerin teğeti kestiği noktalar E ve F olarak adlandırılınsın. Elipsin asal eksen uzunluğu $2a$, yedek eksen uzunluğu $2b$, odaklar arası uzaklığı ise $2c$ olsun. (Şekil 3.4).



Şekil 3.4: Elipste teğetlerin odaklara uzaklıkları çarpımı sabittir

Bu uzunluklar arasında $a^2 = b^2 + c^2$ bağıntısı geçerlidir. $\angle ACB = 2\alpha$ denilecek olursa Teorem 3.2'den dolayı $\angle ACD = \angle DCB = \alpha$ olur. Elipsin tanımından dolayı $|AC| + |BC| = 2a$ 'dır. Burada her iki tarafın karesi alınarak

$$4a^2 = |AC|^2 + |BC|^2 + 2|AC||BC|$$

elde edilir. $\triangle ABC$ üçgenine kosinüs teoremi uygulanırsa

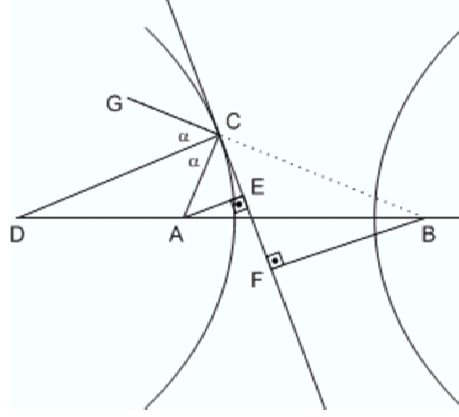
$$4c^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC||BC| \cos 2\alpha$$

elde edilir. İkinci denklem ilk denklemden çıkarılarak

$$\begin{aligned} b^2 = a^2 - c^2 &= |AC||BC| \cos^2 \alpha \\ &= |AC| \cos \alpha |BC| \cos \alpha \\ &= |AE||BF| \end{aligned}$$

bulunur. Hiperbol durumunda da elipstekine benzer adlandırmalar yapılsın. Buna göre odaklar A ve B , CD 'de hiperbolün C noktasındaki normali olacaktır. Hiperbolün C noktasındaki teğeti çizilerek, odaklardan teğete indirilen

dikmelerin teğeti kestiği noktalar yine E ve F olarak adlandırılısın. Hiperbolün asal eksen uzunluğu $2a$, yedek eksen uzunluğu $2b$, odaklar arası uzaklığı ise $2c$ olsun. (Şekil 3.5). Bu uzunluklar arasında $c^2 = a^2 - b^2$ bağıntısı vardır.



Şekil 3.5: Hiperbolde teğetlerin odaklara uzaklıkları çarpımı sabittir

$\angle ACG = 2\alpha$ denilecek olursa Teorem 3.2'den dolayı $\angle ACD = \angle DCG = \alpha$ ve buradan da $\angle ACE = \angle ECB = \frac{\pi}{2} - \alpha$ olur. Hiperbolün tanımından dolayı $|BC| - |AC| = 2a$ 'dır. Burada her iki tarafın karesi alınarak

$$4a^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC||BC|$$

elde edilir. $\triangle ABC$ üçgenine kosinüs teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned} 4c^2 &= |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC||BC| \cos(\pi - 2\alpha) \\ &= |AC|^2 + |BC|^2 + 2|AC||BC| \cos 2\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. İlk denklem ikinciden çıkarılarak

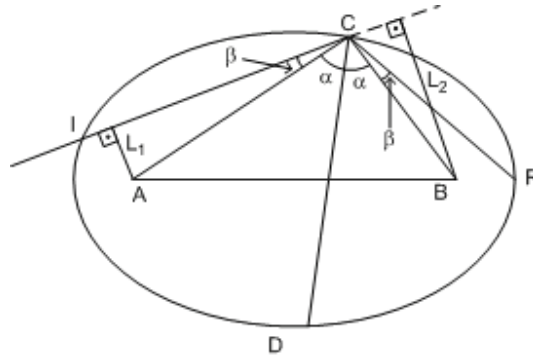
$$\begin{aligned} b^2 = c^2 - a^2 &= |AC||BC| \cos^2 \alpha \\ &= |AC| \cos \alpha |BC| \cos \alpha \\ &= |AE||BF| \end{aligned}$$

bulunur. ■

Eğer T bilardo dönüşümü için $f \circ T = f$ olacak şekilde sabit olmayan sürekli bir $f : \partial M \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bulunabiliyorsa T 'ye (veya M 'ye) integrallenebilir denir. Verilen bir bilardo masasının integrallenebilir olup olmadığı konveks bilardonun inceleme konularındandır. Aşağıdaki teoremin sonucu olarak, düzlemde elips içindeki bilardo hareketi integrallenebilir.

Teorem 3.4 *Düzlemde eliptik bir bölge içinde hareket eden parçacığın yörüngesinin belirlediği kirişlerin odaklara uzaklıklarının çarpımı sabittir.*

Kanıt. Parçacığın yörüngesinin belirlediği kirişlerin asal eksenini odakların dışında kestiği durum incelenecektir. Bu kirişlerin asal eksenini odaklar arasında kestiği durumda da benzer ispat verilebilir. A ve B ile elipsin odakları, C ile parçacığın çarptığı nokta, IC ve RC ile de yörüngenin yansıma öncesi ve sonrasında belirlediği kirişler gösterilsin. IC 'nin A ve B 'ye uzaklıkları sırasıyla L_1 ve L_2 ile, benzer şekilde RC 'nin A ve B 'ye uzaklıkları da sırasıyla L'_1 ve L'_2 ile gösterilsin. (Şekil 3.6). CD , C noktasındaki normal olmak üzere,



Şekil 3.6: Elips durumu

yansıma kanununa göre IC ve RC 'nin CD ile yaptığı açılar eşittir. Teorem 3.2 'den dolayı AC ve BC 'nin CD ile yaptığı açılar eşittir, $\angle ACD = \angle DCB = \alpha$ olsun. Böylece $\angle ICA = \angle RCB$ olur. Bu açı da β ile gösterilsin. Bu durumda

aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$L_1 = |AC| \sin \beta$$

$$L_2 = |BC| \sin(2\alpha + \beta)$$

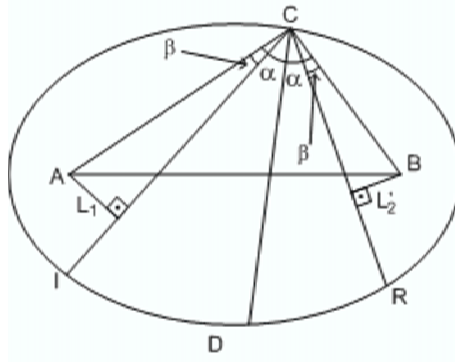
$$L'_1 = |AC| \sin(2\alpha + \beta)$$

$$L'_2 = |BC| \sin \beta.$$

Buradan da

$$L_1 L_2 = AC \cdot BC \sin(\beta) \sin(2\alpha + \beta) = L'_1 L'_2$$

olduğu görülür.



Şekil 3.7: Hiperbol durumu

Yörüngenin belirlediği kirişlerin asal eksenini odaklar arasında kestiği durumda, yukarıdaki eşitliklerdeki β 'lar $-\beta$ ile değiştirilmek suretiyle ispat yapılabilir. (Şekil 3.7). ■

Sonuç 3.5 *Elips içinde bilardo hareketi integrallenebilirdir.*

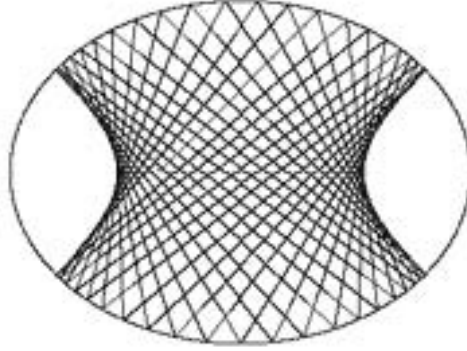
Kanıt. L_1 ve L_2 yörüngenin belirlediği ardışık bağlantıları göstermek üzere, bu bağlantıların odaklara uzaklıklarının çarpım fonksiyonuna f denilecek olursa, Teorem 3.4 'ten dolayı T bilardo dönüşümü için

$$f(L_1) = f(T(L_1)) = f(L_2)$$

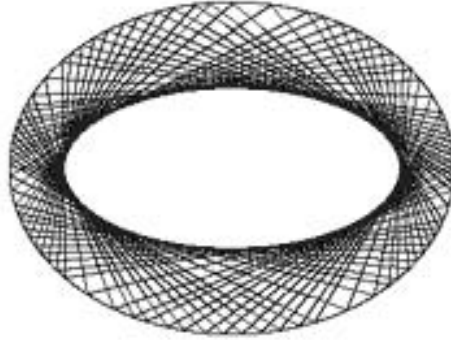
olduğu görülür. ■

Birkhoff ve Poritsky, herhangi bir integrallenebilir, smooth konveks bilar-
donun eliptik bilaro olduğunu tahmin etmişlerdir. (Birkhoff-Poritsky Samsı.)

Düzlemde düzgün, kapalı bir eğri tarafından sınırlanmış, konveks bir
 M bölgesinde bilaro parçacığının yörüngesinin ardışık yansımalarından sonra
sürekli olarak teğet kaldığı eğriye M 'nin *kaustik eğrisi* denir. Bu duruma
en basit örnek dairesel bölgedir. Daire içinde merkezden geçmeyen bir yönde
hareket eden bir parçacık sürekli aynı merkezli bir çembere teğet olacak şekilde
hareketine devam eder. Benzer bir durum elipsler için de geçerlidir. Aşağıdaki
teorem, Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 'ün sonucu olarak yazılabilir.



Şekil 3.8: Parçacık odaklar arasından geçiyorsa kaustik eğrisi aynı odaklara sahip hiper-
boldür



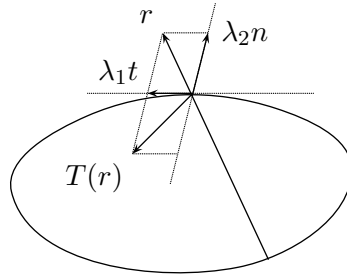
Şekil 3.9: Parçacık odakların dışından geçiyorsa kaustik eğrisi aynı odaklara sahip elipstir

Teorem 3.6 *Düzlemde eliptik bir bilaro masası içinde hareket eden parçacığın
yörüngesi sürekli olarak aynı odaklara sahip olan bir elipse veya aynı odaklara*

sahip bir hiperbole teğettir. Yani elipsin kaustik eğrisi aynı odaklara sahip elips veya hiperboldür. (Şekil 3.8, 3.9).

3.2 İzdüşel Bilardo

Öklidyen bilardoda bir ∂M noktasında yansıma işlemi, hız vektörü, o noktadaki teğet ve normal vektöre göre yazılarak, teğet bileşenini aynı işaretli, normal bileşenini ise ters işaretli almak suretiyle yapılır. Bu yansıma işlemi normal vektör yerine teğetle aynı doğrultuda olmayan bir vektör almak suretiyle genelleştirilebilir: ∂M üzerinde her noktada teğetten farklı doğrultuda vektör veren düzgün bir n vektör alanı verilmiş olsun. Gelen ışın r , sınır noktasındaki teğet vektör t ve teğete çapraz olan vektör n cinsinden yazılır: $r = \lambda_1 t + \lambda_2 n$. Bu durumda yansıma vektörü $T(r)$ normal bileşeninin işareti ters çevrilerek bulunur: $T(r) = \lambda_1 t - \lambda_2 n$.



Şekil 3.10: İzdüşel yansımanın tanımlanması

Burada yapılan yansımaya *izdüşel (projektif) yansıma*, bu şekilde elde edilen bilardo türüne *izdüşel (projektif) bilardo* denir. İzdüşel yansıma yukarıdaki tanıma denk olarak, harmonik eşleniklik yardımı ile de tanımlanabilir:

Tanım 3.7 l_1, l_2, l_3, l_4 bir noktada kesişen dört doğru olsun. L 'de onları sırasıyla x_1, x_2, x_3, x_4 noktalarında kesen yardımcı bir doğru olsun. Bu durumda

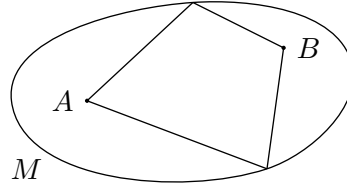
$$[x_1, x_2; x_3, x_4] = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4}$$

oranına l_1, l_2, l_3, l_4 doğrularının çifte oranı adı verilir. Eğer bu oran -1 oluyorsa l_1, l_2, l_3, l_4 doğrularına harmonik eşleniktirler denir.

Dört doğrunun çifte oranı seçilen yardımcı doğrudan bağımsızdır. İzdüşel yansıma, r ışınının görüntüsü $t, n, r, T(r)$ doğruları harmonik eşlenik olacak şekildeki $T(r)$ ışını olarak da tanımlanabilir. Detaylı bir inceleme için [14] önerilerek izdüşel bilardodaki birkaç ilginç sonuca değinilecektir.

M , düzlemde γ kapalı eğrisinin sınırladığı konveks bölge olsun. Eğer her noktada, verilen çapraz vektör alanının gösterdiği vektör, $\gamma''(t)$ ivme vektörüne eşit olacak şekilde γ 'nın bir parametrizasyonu bulunabiliyor ise bu çapraz vektör alanına korunumlu vektör alanı denir. Korunumlu vektör alanları için izdüşel bilardoda ilginç sonuçlar vardır. Örneğin:

Teorem 3.8 M , γ kapalı eğrisi ile sınırlandırılmış, konveks bir bölge ve γ korunumlu bir çapraz vektör alanı olsun. A ve B noktaları da M içinde verilen iki nokta olsun. Bu durumda A 'dan geçen en az iki ışın vardır ki izdüşel yansımadan sonra B 'den geçerler. (Şekil 3.11).



Şekil 3.11: İzdüşel yansımanın bir sonucu

Teorem 3.9 A ve B noktaları γ eğrisinin sınırladığı bölge içinde verilen iki nokta olsun. Bu durumda γ üzerinde öyle bir korunumlu çapraz vektör alanı vardır ki A 'dan geçen ışın B 'den geçecek şekilde yansır [14].

3.3 Özel Bir Bilaro Sınıfı

φ gerçel sayılar üzerinde tanımlı türevlenebilir ve kesin monoton bir fonksiyon olsun. Düzlemdeki P noktaları için U ve V fonksiyonları

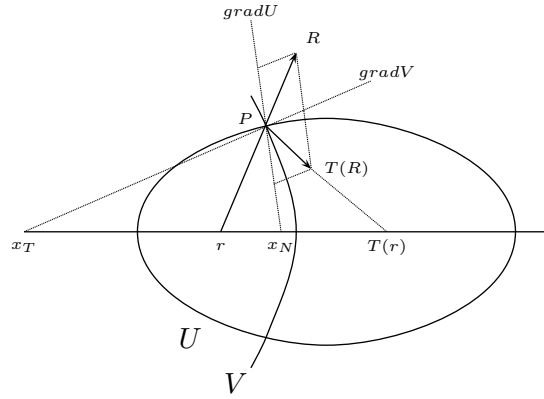
$$U(P) = \varphi(|PF_+|) + \varphi(|PF_-|)$$

$$V(P) = \varphi(|PF_+|) - \varphi(|PF_-|)$$

şeklinde tanımlansın. Burada sabit F_+ ve F_- noktalarına odak noktaları denilecektir. $k \in \mathbb{R}$ sayısı

$$\gamma = \{P \mid U(P) = k\}$$

eğrisi konveks olacak şekilde belirlensin. γ 'nin sınırladığı M bölgesi içerisinde hareket eden, sınır noktasında U ve V 'nin gradyant vektörlerine göre yansıma yapan parçacığın hareketi incelenecektir: Buna göre parçacık M içinde doğru boyunca hareketine devam edecek, bir $P \in \partial M$ sınır noktasına geldiğinde, hız vektörü R , U ve V 'nin gradyant vektörlerine göre yazılacak, daha sonra $gradU$ bileşeninin ters işaretlisi alınmak suretiyle $T(R)$ yansıma vektörü bulunacaktır. Bu, P noktasındaki $R, T(R), gradU$ ve $gradV$ vektörlerinin belirlediği doğruların harmonik eşlenik olması demektir. (Şekil 3.12).



Şekil 3.12: Genelleştirilmiş izdüşel yansıma

Burada yansımadan sonra parçacığın M 'nin dışına çıkabileceğini de not edelim. Ancak Teorem 3.13 belirli durumlarda bunun olmayacağını garanti etmektedir.

$\varphi(x) = x$ olması durumunda M bir elips, V ise bir hiperbol olacaktır, bu durumda kesiştikleri noktada U ile V arasındaki açı $\frac{\pi}{2}$ 'dir. Yani $\varphi(x) = x$ olması durumunda tanımladığımız bilardo hareketi elips içinde Öklidyen yansıma yapan parçacığın hareketine dönüşecektir. U ve V 'nin gradyant vektörlerine göre yansıma yapılması durumunda, izdüşel bilardodakine benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Önerme 3.10 U ve V 'nin, bir $P = (x, y) \in \partial M$ sınır noktasındaki gradyant vektörleri yönündeki doğruların x -eksenini kestiği noktalar sırasıyla x_N , x_T ve odaklar $F_{\pm} = (\pm\alpha, 0)$ olsun. Bu durumda $x_N x_T = \alpha^2$ 'dir.

Kanıt. $P = (x, y) \in \partial M$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} U(P) &= \varphi\left(\sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}\right) + \varphi\left(\sqrt{(x+\alpha)^2 + y^2}\right) \\ V(P) &= \varphi\left(\sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}\right) - \varphi\left(\sqrt{(x+\alpha)^2 + y^2}\right) \end{aligned}$$

eğrilerinin gradyant vektörleri hesaplanacak olursa

$$\text{grad}(U) = \left(\frac{x-\alpha}{|PF_+|} \varphi'(|PF_+|) + \frac{x+\alpha}{|PF_-|} \varphi'(|PF_-|), \frac{y}{|PF_+|} \varphi'(|PF_+|) + \frac{y}{|PF_-|} \varphi'(|PF_-|) \right)$$

$$\text{grad}(V) = \left(\frac{x-\alpha}{|PF_+|} \varphi'(|PF_+|) - \frac{x+\alpha}{|PF_-|} \varphi'(|PF_-|), \frac{y}{|PF_+|} \varphi'(|PF_+|) - \frac{y}{|PF_-|} \varphi'(|PF_-|) \right)$$

bulunur. Buradan x_N ve x_T noktaları,

$$x_N = \frac{\alpha [|PF_-| \varphi'(|PF_+|) - |PF_+| \varphi'(|PF_-|)]}{|PF_-| \varphi'(|PF_+|) + |PF_+| \varphi'(|PF_-|)} \quad (3.1)$$

$$x_T = \frac{\alpha [|PF_-| \varphi'(|PF_+|) + |PF_+| \varphi'(|PF_-|)]}{|PF_-| \varphi'(|PF_+|) - |PF_+| \varphi'(|PF_-|)} \quad (3.2)$$

olarak elde edilir. Burada dikkat edilecek olursa

$$x_N x_T = \alpha^2$$

olduğu görülür. ■

Odaklar arasındaki bir $(r, 0)$ noktasından geçen parçacık sınırdan yansıdıktan sonra $(T(r), 0)$ noktasından geçiyor olsun.

$$[x_N, x_T; r, T(r)] = -1$$

eşitliğinden $T(r)$ noktası hesaplanacak olursa

$$T(r) = \frac{2x_N x_T - r(x_N + x_T)}{x_N + x_T - 2r}$$

bulunur. $x_N x_T = \alpha^2$ olduğundan yansıma dönüşümü

$$T(r) = \frac{2\alpha^2 - r(x_N + x_T)}{x_N + x_T - 2r}$$

olur. Bu dönüşüm $[-\alpha, +\alpha]$ aralığında düşünülecek olursa $(\frac{x_N + x_T}{2}, 0)$ merkezli ve $\frac{x_N - x_T}{2}$ yarıçaplı çemberde yansıma dönüşümüdür.

Sonuç 3.11 *M bölgesi içinde odakların birinden geçerek sınır noktasına gelen parçacık, diğer odaktan geçecek şekilde yansır.*

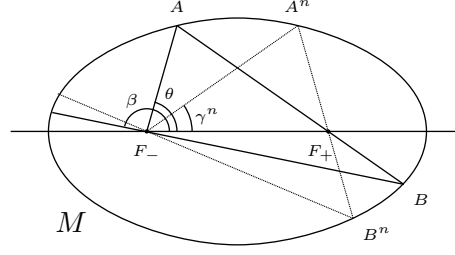
Kanıt. $T(r) = \frac{2\alpha^2 - r(x_N + x_T)}{x_N + x_T - 2r}$ ifadesinde $r = \pm\alpha$ alınarak hesap yapılırsa $T(r) = \mp\alpha$ olduğu görülür. ■

Sonuç 3.12 *M içinde odakların herhangi birinden hareketine başlayan parçacığın yörüngesi x-eksenine yakınsar.*

Kanıt. Hareketin F_- noktasından $0 < x < \pi$ açısı ile başladığı varsayılabilir. Diğer durumlarda da benzer kanıt yapılabilir. Parçacık tekrar F_- noktasına geldiğinde x -ekseni ile yaptığı açı $\gamma(x)$ ile gösterilsin. Böylece parçacığın yörüngesinin F_- noktasında x -ekseni ile yaptığı açılar

$$x = \gamma^0(x), \gamma^1(x), \dots, \gamma^n(x), \dots$$

şeklinde bir dizi oluşturacaktır. Bu dizinin π 'ye yakınsadığı gösterilecektir. (Şekil 3.13).



Şekil 3.13: Odakların herhangi birinden geçen parçacığın yörüngesi x -eksenine yakınsar

Öncelikle γ^n dizisinin artan olduğu, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $\gamma^n(x) < \gamma^{n+1}(x)$ olduğu gösterilecektir. F_- noktasından $\gamma^n(x)$ açısı ile hareket eden parçacığın F_- noktasına bir sonraki gelişine kadar sınır noktasında yansıdığı iki nokta sırasıyla A^n ve B^n ile gösterilsin. Bu durumda $\triangle B^n A^n F_-$ üçgeni yardımıyla

$$\gamma^{n+1}(x) = \gamma^n(x) + \angle A^n + \angle B^n$$

olduğu görülür. Burada $\angle A^n + \angle B^n > 0$ 'dır. Böylece $\gamma^n(x) < \gamma^{n+1}(x)$ elde edilir.

Herbir devirde $\angle B^n F_- F_+ \geq 0$ olacağından her $n \in \mathbb{N}$ için $\gamma^n(x) \leq \pi$ olacaktır. Yani π bu dizi için bir üst sınırdır. π sayısının γ^n dizisinin en küçük üst sınırı olduğunu göstermek için en küçük üst sınırın $\beta < \pi$ olduğu varsayılmış olsun. Bu durumda parçacığın F_- noktasından $\beta - \pi$ radyanlık açı ile atıldığında sınırda çarptığı iki nokta sırasıyla B ve A olsun. Ayrıca $\angle F_+ F_- A$ açısında θ ile gösterilsin. β, γ^n dizisinin en küçük üst sınırı olduğundan $\theta < \gamma^m(x) < \beta$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Burada $\gamma, \gamma^m(x)$ 'e tekrar uygulanırsa γ artan olduğundan

$$\gamma(\theta) = \beta < \gamma^{m+1}(x)$$

elde edilir. Bu ise β 'nın üst sınır olmasıyla çelişir. Böylece en küçük üst sınır π 'dir. Yani parçacığın yörüngesi x -eksenine yakınsar. ■

Teorem 3.13 *M içinde odaklar arasından geçerek sınır noktasına gelen parçacık tekrar odaklar arasından geçecek şekilde yansır.*

Kanıt. Parçacığın çarptığı sınır noktası $P = (x_0, y_0) \in \partial M$ ve geliş doğrultusunun x -eksenini kestiği nokta r olsun. Benzer şekilde $P = (x_0, y_0)$ noktasında $gradU$ ve $gradV$ vektörlerinin belirlediği doğruların x -eksenini kestiği noktalar sırasıyla x_N ve x_T olsun. Böylece odaklar arasındaki r noktasından geçerek P noktasına gelen parçacığın yansıma fonksiyonu

$$\begin{aligned} T_P(r) & : [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R} \\ T_P(r) & = \frac{2\alpha^2 - r(x_N + x_T)}{x_N + x_T - 2r} \end{aligned}$$

olur. Bu fonksiyonun $r = \frac{x_N + x_T}{2}$ noktası dışında sürekli olduğu açıktır. Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğunu göstermek için $\frac{x_N + x_T}{2}$ noktasının $[-\alpha, \alpha]$ aralığının dışında olduğunu göstermek yeterlidir: x_N ve x_T 'nin (3.1) ve (3.2) 'de verilen ifadelerinde

$$\begin{aligned} A & = |PF_-| \varphi'(|PF_+|) \text{ ve} \\ B & = |PF_+| \varphi'(|PF_-|) \end{aligned}$$

denilecek olursa

$$\begin{aligned} x_N & = \frac{\alpha(A - B)}{(A + B)} \\ x_T & = \frac{\alpha(A + B)}{(A - B)} \end{aligned}$$

olacaktır. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{x_N + x_T}{2} & = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha(A - B)}{(A + B)} + \frac{\alpha(A + B)}{(A - B)} \right) \\ & = \frac{\alpha(A^2 + B^2)}{(A^2 - B^2)} \\ & > |\alpha| \end{aligned}$$

elde edilir. Yani T_P fonksiyonu $[-\alpha, \alpha]$ aralığında süreklidir.

$T_p(-\alpha) = \alpha$ ve $T_p(\alpha) = -\alpha$ olduğu önceden bilinmektedir. $(-\alpha, \alpha)$ aralığında $T_P(r)$ 'nin türevi

$$T'_P(r) = \frac{4\alpha^2 - (x_N + x_T)^2}{(x_N + x_T - 2r)^2}$$

olarak bulunur. Fakat

$$\frac{x_N + x_T}{2} > |\alpha|$$

olduğundan payda her $r \in [-\alpha, \alpha]$ için sıfırdan büyüktür. Diğer taraftan $(x_N - x_T)^2 \geq 0$ olduğundan $(x_N + x_T)^2 \geq 4\alpha^2$ 'dir. Yani pay sıfırdan küçüktür. Böylece her $r \in [-\alpha, \alpha]$ için $T'_P(r) \leq 0$ 'dır. Bu $T_P(r)$ 'nin azalan olması demektir. Böylece $T_P(r)$ 'nin görüntüsü $[-\alpha, \alpha]$ aralığıdır. ■

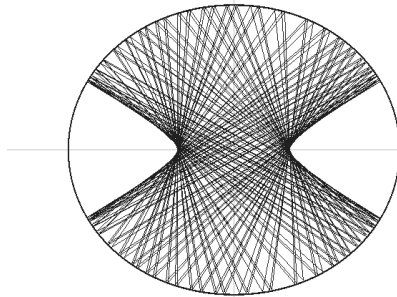
$\varphi(x) = \ln(x)$ olması durumunda $U(P) = \varphi(|PF_+|) + \varphi(|PF_-|)$ koşulunu sağlayan P noktalarının oluşturduğu eğri *Cassini ovali* olarak bilinir. Cassini ovali verilen iki odağa uzaklıklarının çarpımı sabit olan noktaların oluşturduğu eğridir.

$$\ln(|PF_+|) + \ln(|PF_-|) = k$$

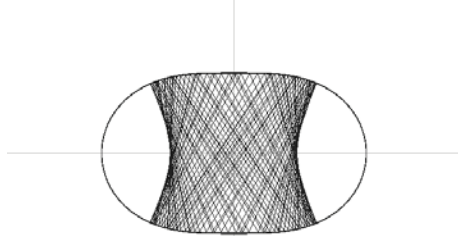
ifadesinde her iki tarafın eksponansiyeli alınırsa

$$|PF_+| |PF_-| = e^k$$

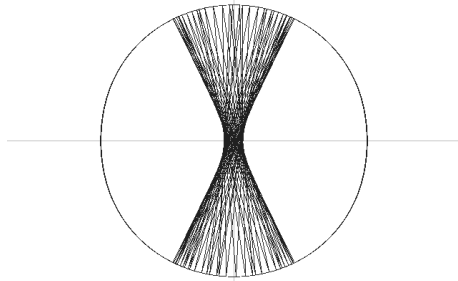
elde edilir. Aşağıda Cassini ovali ve başka φ fonksiyonları için bilgisayar programı ile hazırlanan yörünge örnekleri verilmiştir. Burada φ fonksiyonlarının monoton oldukları aralıklar ele alınmaktadır.



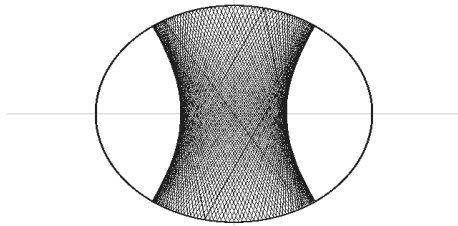
$\varphi(x) = \ln(x)$ $\text{Odaklar } \pm\alpha = \pm 1$ $\text{Sabit } k = 2$ $\text{Başlangıç Noktası } (x, y) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ $\text{Başlangıç açısı } \theta = 30^\circ$
--



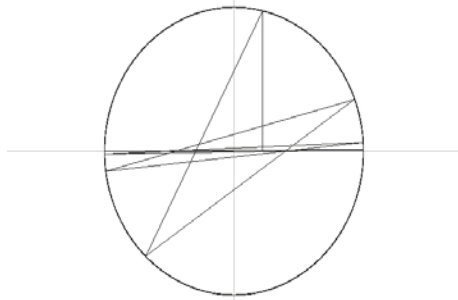
$\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$
 Odaklar $\pm\alpha = \pm 1$
 Sabit $k = 1.2$
 Başlangıç Noktası $(x, y) = (\frac{1}{2}, 0)$
 Başlangıç açısı $\theta = 60^\circ$



$\varphi(x) = \sin(x)$
 Odaklar $\pm\alpha = \pm 1$
 Sabit $k = \frac{1}{2}$
 Başlangıç Noktası $(x, y) = (0.185, 0)$
 Başlangıç açısı $\theta = 90^\circ$



$\varphi(x) = \cos(x)$
 Odaklar $\pm\alpha = \pm 1$
 Sabit $k = 0.3$
 Başlangıç Noktası $(x, y) = (-0.286, 0)$
 Başlangıç açısı $\theta = 60^\circ$



$\varphi(x) = \cosh(x)$
 Odaklar $\pm\alpha = \pm 1$
 Sabit $k = 15$
 Başlangıç Noktası $(x, y) = (\frac{1}{2}, 0)$
 Başlangıç açısı $\theta = 90^\circ$

4 AÇIK BİLARDO SINIFI

Bu bölümde uzayda sonlu sayıda, ikişer ikişer ayırık, düzgün, konveks engellerin dışında hareket eden parçacığın yörüngeleri incelenecektir. BilarDO parçacığı sınırsız bir bölgede dolaştığı için bu tür bilarDO sınıfı *açık bilarDO* olarak adlandırılır. T. Morita bu tür bilarDO yörüngelerini düzlemsel durumda incelemiştir [10].

O_1, O_2, \dots, O_K , ($K \geq 3$) \mathbb{R}^2 'nin sonlu sayıda ikişer ikişer ayırık, sınırları basit kapalı eğriler olan, kapalı, sınırlı ve konveks altkümeleri olsunlar. $i = 1, \dots, K$ için O_i kümeleri engeller olarak adlandırılacaktır. Ayrıca engeller için aşağıdaki şartlar sağlanıyor olsun:

- Her engel için sınır eğrileri sıfırdan farklı eğrilğe sahiptir.
- $\text{conv}[A]$, bir A kümesinin konveks zarfını göstermek üzere farklı indislerin oluşturduğu (j_1, j_2, j_3) üçlüsü için

$$\text{conv}[O_{j_1} \cup O_{j_2}] \cap O_{j_3} = \emptyset$$

olsun.

\mathbb{R}^2 içinde $\bigcup_{j=1}^K O_j$ kümesi dışında düz doğrular boyunca hareket eden ve bir $\bigcup_{j=1}^K \partial O_j$ düzgün sınır noktasında yansıma kurallarına uyarak hareket eden parçacığın yörüngesini ele alan Morita, aşağıdaki ilginç teoremi kanıtlamıştır [10]:

Teorem 4.1 *Ardışık terimlerde aynı engelin tekrarlanmadığı herhangi $(O_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dizisi için öyle bir yörünge vardır ki dizide verilen sırayı takip eder.*

4.1 n -boyutlu Öklidyen Durum

Bu bölümde Morita'nın teoremi n -boyutlu Öklidyen uzay için kanıtlanacaktır. \mathbb{R}^n 'de engeller için aşağıdaki koşullar sağlanıyor olsun:

$K \geq 3$ olmak üzere O_1, O_2, \dots, O_K , \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) içinde ikişer ikişer ayrık, konveks, sınırları düzgün ve standart kapalı disk \mathbb{D}^n 'e diffeomorfik altkümeler olsunlar. $i = 1, \dots, K$ olmak üzere O_i engelleri için ayrıca aşağıdaki iki hipotez sağlanıyor olsun:

H1. $v_p, p \in \partial O_i, (i = 1, 2, \dots, K)$ sınır noktasında dışa doğru birim vektör olsun. (Yani, $n_p, p \in \partial O_i$ noktasındaki dışa doğru birim normal vektör olmak üzere $\langle n_p, v_p \rangle \geq 0$.) v_p tarafından belirlenen ışın

$$L_p v_p = \{q \in \mathbb{R}^n \mid q = p + t v_p, \quad t \geq 0\}$$

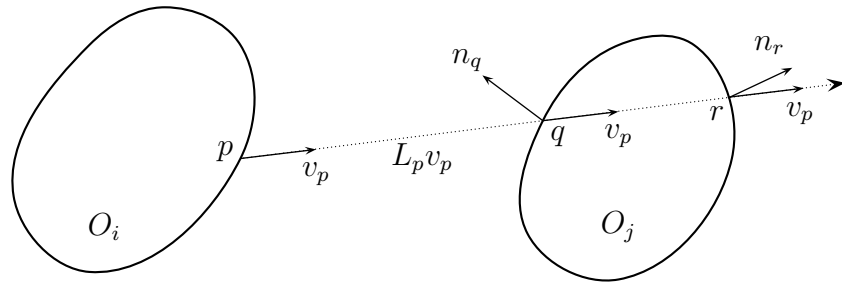
$j \neq i$ olmak üzere herhangi bir O_j ile kesişiyorsa $L_p v_p \cap \partial O_i = \{p\}$ 'dir.

H2. (Morita'nın 2. hipotezi ile aynı.) Herhangi (j_1, j_2, j_3) üçlüsü için

$$\text{conv}[O_{j_1} \cup O_{j_2}] \cap O_{j_3} = \emptyset$$

'dir.

\mathbb{R}^n içinde $\bigcup_{i=1}^K O_i$ kümesi dışında düz doğrular boyunca hareket eden ve bir $\bigcup_{i=1}^K \partial O_i$ düzgün sınır noktasında yansıyan parçacığın yörüngeleri ele alınacaktır.



Şekil 4.1: $L_p v_p$ bir O_j engelinin sınırını en fazla iki noktada kesebilir

Yukarıdaki koşulları sağlayan engeller kümesi için, herhangi bir ∂O_i üzerinde bir p noktası ve bu noktada dışadoğru bir v_p vektörü verilsin. Engeller konveks olduğundan ve H1 özelliği sağlandığından dolayı $L_p v_p$ ışını ($j \neq i$) olmak üzere ∂O_j kümesini en fazla iki noktada kesebilir. Bu noktalar q ve r olarak gösterilirse, ilk değme noktası $q \in \partial O_j$ 'da $\langle n_q, v_p \rangle \leq 0$, ikinci değme noktası $r \in \partial O_j$ 'de ise $\langle n_r, v_p \rangle \geq 0$ olur. (Şekil 4.1). Eğer $L_p v_p$ ışını ∂O_j 'ye teğet ise $q = r$ ve $\langle n_q, v_p \rangle = 0$ olacaktır.

$L_p v_p$ ışınının $q \in \partial O_j$ noktasındaki n_q normal vektörüne göre yansıması, $q \in \partial O_j$ noktasında

$$w_q = v_p - 2\langle n_q, v_p \rangle n_q$$

dışadoğru birim vektörünü verecektir. Bu ise

$$(p, v_p) \mapsto (q, v_p - 2\langle n_q, v_p \rangle n_q)$$

eşleminin yapılmasına olanak sağlar. Bu eşleme, dönüşüm şeklinde ifade edilebilir:

$$Q = \bigcup_{i=1}^K (\partial O_i \times S^{n-1})$$

$$S_i = \{(p, v_p) \in \partial O_i \times S^{n-1} \mid \langle n_p, v_p \rangle \geq 0 \text{ ve } \exists j \neq i \text{ için } L_p v_p \cap \partial O_j \neq \emptyset\}$$

ve $Q_0 = \bigcup_{i=1}^K S_i$ olsun. Bu durumda bilardo dönüşümü

$$\begin{aligned} f : Q_0 &\rightarrow Q \\ f(p, v_p) &= (q, v_p - 2\langle n_q, v_p \rangle n_q) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Burada ortaya çıkan ayrık dinamik *bilardo akışı* olarak adlandırılır. Q_0 'daki noktaların farklı kaderleri vardır: bazıları f bilardo dönüşümü ile yalnızca bir kez resmedilirken, bazıları sonlu adım, bazıları da sonsuz kez resmedilirler. Bu bölümün amacı aşağıdaki teoremin geçerli olduğunu kanıtlamaktır.

Teorem 4.2 $i_n \in \{1, 2, \dots, K\}$ ve $i_n \neq i_{n+1}$ olmak üzere, verilen herhangi iki yönlü sonsuz $(S_{i_n})_{n \in \mathbb{Z}}$ dizisi için öyle bir $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dizisi vardır ki $(x_n) \in S_{i_n}$ ve $f(x_n) = x_{n+1}$ 'dir.

Kuşkusuz ki bu teorem, engellerin verilen herhangi bir iki yönlü sonsuz, tekrarsız dizisi için verilen sırayı takip eden bir yörüngeyi bulunabileceği anlamına gelir. Teorem, Kennedy ve ark. (2001), tarafından verilen, Kaos Lemma'nın sonucu olarak kanıtlanacaktır. Bu yüzden burada Kaos Lemma'yı ele almak uygun olacaktır.

4.1.1 Kaos Lemma

Tanım 4.3 Q kompakt bir metrik uzay, $Q_0 \subset Q$ kompakt bir altküme, $f : Q_0 \rightarrow Q$ sürekli bir dönüşüm, S_1, S_2, \dots, S_K , Q_0 'in kompakt altkümelerinden oluşan bir dekompozisyonu ve $M = (m_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, K$ olmak üzere girdileri 0 ve 1 'lerden oluşan geçiş matrisi olsun. Q_0 'in boş olmayan kompakt altkümelerinden oluşan ve boş olmayan bir $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^K$ kümeler ailesinin

- Eğer $E \in \mathcal{E}_i$ ve $m_{ij} = 1$ ise $\exists E_j \subset E \cap S_i$ kümesi için $f(E_j) \in \mathcal{E}_j$

şartını sağladığı varsayalım. Bu durumda f için $(S_i)_{i=1}^K$ dekompozisyonu ve $M = (m_{ij})$ geçiş matrisine göre $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^K$ genişletici kümeler ailesini kabul eder denir.

Teorem 4.4 (Kaos Lemma,[7]) Q kompakt bir metrik uzay, $Q_0 \subset Q$ kompakt bir altküme, $f : Q_0 \rightarrow Q$ sürekli bir dönüşüm, S_1, S_2, \dots, S_K , Q_0 'in kompakt altkümelerinden oluşan bir dekompozisyonu ve $i, j = 1, 2, \dots, K$ olmak üzere $M = (m_{ij})_{i,j=1}^K$ geçiş matrisi olsun. Eğer f dönüşümü $(S_i)_{i=1}^K$ dekompozisyonu ve $M = (m_{ij})$ geçiş matrisine göre $(\mathcal{E}_i)_{i=1}^K$ genişletici kümeler ailesini kabul ediyorsa, $(S_i)_{i=1}^K$ dekompozisyonu ve $M = (m_{ij})$ geçiş matrisine göre kaos gösterir. Yani sembol kümelerinin $M = (m_{ij})$ geçiş şartını sağlayan herhangi bir

$$S = (\dots, S_{i-n}, \dots, S_{i-1}, S_{i_0}, S_{i_1}, \dots, S_{i_n}, \dots)$$

iki yönlü dizisi için en az bir $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dizisi vardır ki $x_n \in S_{i_n}$ olmak üzere $f(x_n) = x_{n+1}$ 'dir.

Kaos Lemma'da ifade edilen S_i kümelerine sembol kümeleri denir. Ayrıca burada $E_j \subset E \cap S_i$ olmak üzere $f(E_j) \in \mathcal{E}_i$ kümeleri de ön-genişleticiler olarak adlandırılırlar.

4.1.2 Teorem 4.2 'nin Kanıtı

Teorem 4.2 'yi Kaos Lemma'nın sonucu olarak kanıtlayabilmek için, Kaos Lemma'nın koşullarının sağlandığını gösterilmesi gerekmektedir. Bunun için Kaos Lemma ile ilgili kümelerin ve bilardo dönüşümünün hatırlatılmasında fayda vardır. Q faz uzayı, $p \in \partial O_i$ ve v_p bu noktadaki bir birim vektör olmak üzere (p, v_p) ikililerinin birleşimi

$$Q = \bigcup_{i=1}^K (\partial O_i \times S^{n-1})$$

olarak tanımlanır. Q 'nun kompakt olduğu aşıkardır. S_i sembol kümeleri,

$$S_i = \{(p, v_p) \in \partial O_i \times S^{n-1} \mid \langle n_p, v_p \rangle \geq 0 \text{ ve } \exists j \neq i \text{ için } L_p v_p \cap \partial O_j \neq \emptyset\}$$

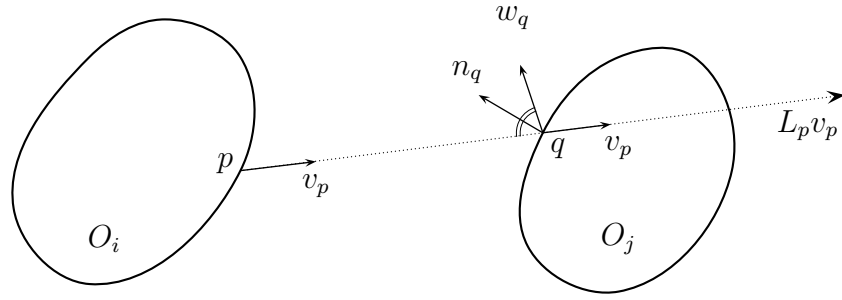
şeklinde tanımlanır. Sembol kümeleri ikişer ikişer ayrıktyrlar, ayrıca Q içinde kapalı ve dolayısıyla kompakttyrlar. Q_0 kümesi de

$$Q_0 = \bigcup_{i=1}^K S_i$$

şeklinde tanımlansın. Sonlu sayıda kompakt kümenin birleşimi olduğundan Q_0 'da kompakttır. Buna göre bilardo dönüşümü $L_p v_p$ ışımının ∂O_j 'ye ilk değme noktası q olmak üzere

$$\begin{aligned} f : Q_0 &\rightarrow Q \\ f(p, v_p) &= (q, v_p - 2\langle n_q, v_p \rangle n_q) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. (Şekil 4.2).



Şekil 4.2: $w_q = v_p - 2\langle v_p, n_q \rangle n_q$ olmak üzere f bilardo dönüşümü

Bilardo parçacığı ardışık yansımaları aynı engelden yapamayacağından dolayı geçiş matrisi, δ_{ij} Kronecker delta olmak üzere

$$M = (m_{ij}) = 1 - \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, K\}$$

olarak tanımlanır. f bilardo dönüşümü için Q_0 'ın S_1, \dots, S_K dekompozisyonu ve $M = (m_{ij})$ geçiş matrisine göre $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^K$ genişletici kümeler ailesi verilebilirse Kaos Lemma vasıtasıyla teoremin ispatı tamamlanmış olacaktır. Herbir O_i engeli için \mathcal{E}_i genişletici kümeler verilmeden önce bir ∂O_i üzerinde vektör alanları ile ilgili iki kavramın tanımlanmasında fayda vardır:

$D \subset \partial O_i$ boş olmayan, kompakt altküme ve σ 'da D üzerinde dışadoğru birim vektörlerden oluşan bir sürekli vektör alanı olsun, yani $\sigma : D \rightarrow S^{n-1}$ sürekli fonksiyonu, her $p \in D$ için $\langle n_p, \sigma(p) \rangle \geq 0$ koşulunu sağlıyor olsun. Bu durumda

$$\forall p_1, p_2 \in D \text{ için } \langle \sigma(p_1) - \sigma(p_2), p_1 - p_2 \rangle \geq 0$$

oluyorsa σ , D üzerinde *saçılan (dağılımlı) vektör alanı* olarak adlandırılır.

Saçılan bir $\sigma : D \rightarrow S^{n-1}$ vektör alanı için

E1. $\forall p \in \partial O_i$ için $\langle n_p, \sigma^*(p) \rangle \geq 0$.

E2. Her $j \neq i$ ve $\forall p \in \partial O_i \setminus D$ için $L_p \sigma^*(p) \cap \partial O_j = \emptyset$.

koşulları sağlanacak şekilde bir $\sigma^* : \partial O_i \rightarrow S^{n-1}$ sürekli genişlemesi bulunabiliyorsa σ 'ya *genişletilebilir* denir. Şimdi f bilardo dönüşümü için $(S_i)_{i=1}^K$ dekompozisyonu ve M geçiş matrisine göre genişletici kümeler tanımlanabilir:

$\mathcal{E}_i = \{E \subset \partial O_i \times S^{n-1} \mid D_\sigma \subset \partial O_i \text{ üzerinde saçılan ve genişletilebilir } \sigma : D_\sigma \rightarrow S^{n-1} \text{ vektör alanı vardır ki, } E = \text{grafik}(\sigma) = \{(p, \sigma(p)) \mid p \in D_\sigma\} \text{ 'dır.}\}$

Burada σ 'nın saçılan olması, yani her $p_1, p_2 \in D_\sigma$ için

$$\langle p_1 - p_2, \sigma(p_1) - \sigma(p_2) \rangle \geq 0$$

olma koşulu $L_{p_1}\sigma(p_1)$ ve $L_{p_2}\sigma(p_2)$ ışınlarının ayrık olmasını sağlayacaktır. (Yardımcı Teorem 4.7).

∂O_i üzerinde n dışa doğru birim normal vektör alanı saçılan ve genişletilebilir olduğundan $\mathcal{E}_i \neq \emptyset$ 'tir. $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^K$ 'nin bir genişletici kümeler ailesi olduğunu göstermek için $E \in \mathcal{E}_i$ verildiğinde $m_{ij} = 1$ ise $f(E_j) \in \mathcal{E}_j$ olacak şekilde $E_j \subset E \cap S_i$ kümesinin var olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Bunun için $E \in \mathcal{E}_i$ verildiğinde sağlanan durumları not etmek faydalı olacaktır.

$\sigma^* : \partial O_i \rightarrow S^{n-1}$ sürekli dönüşümü $\forall p \in \partial O_i$ için $\langle n_p, \sigma^*(p) \rangle \geq 0$ şartını sağladığından $der(\sigma^*) = 1$ 'dir.

Derece homotopi altında invariant kaldığından σ^* fonksiyonunun, Hopf teoreminden dolayı derecesi 1 olan

$$\begin{aligned} n : \partial O_i &\rightarrow S^{n-1} \\ p &\mapsto n_p \end{aligned}$$

dönüşümüne homotopik olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} H &: \partial O_i \times [0, 1] \rightarrow S^{n-1} \\ H(p, t) &= \frac{tn_p + (1-t)\sigma^*(p)}{\|tn_p + (1-t)\sigma^*(p)\|} \end{aligned}$$

dönüşümü σ^* ile n arasında bir homotopidir. Gerçekten $H(p, 0) = \sigma^*(p)$ ve $H(p, 1) = n_p$ 'dir. Diğer taraftan $\forall p \in \partial O_i$ için $\langle n_p, \sigma^*(p) \rangle \geq 0$ olduğundan

$\|tn_p + (1-t)\sigma^*(p)\| \neq 0$ 'dır. Böylece H süreklidir, dolayısıyla σ^* ile n arasında bir homotopidir.

$der(\sigma^*) \neq 0$ olduğu için σ^* dönüşümü örtendir. Yani

$$grafik(\sigma^*) = \{(p, \sigma^*(p)) \mid p \in \partial O_i\}$$

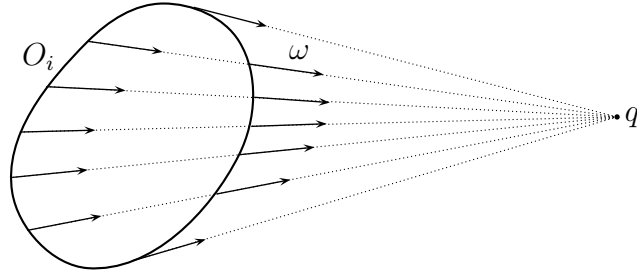
kümesinin ∂O_i üzerinde belirlediği vektörler her yönde vektör içerir.

Yardımcı Teorem 4.5 Her $q \in \mathbb{R}^n \setminus O_i$ için $q \in L_p \sigma^*(p)$ olacak şekilde bir $p \in \partial O_i$ noktası vardır.

Kanıt. $q \in \mathbb{R}^n \setminus O_i$ noktası verilsin. Her $p \in \partial O_i$ noktasına q 'ya doğru bir birim vektör karşılık getiren

$$\begin{aligned} \omega_q : \partial O_i &\rightarrow S^{n-1} \\ \omega_q(p) &= \frac{q-p}{\|q-p\|} \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlansın. (Şekil 4.3). ω_q örten değildir. Bu yüzden $der(\omega_q) = 0$ ve dolayısıyla $der(-\omega_q) = 0$ 'dır.



Şekil 4.3: ω_q dönüşümü her $p \in \partial O_i$ noktasına q 'ya doğru birim vektör karşılık getirir

Varsayalım ki her $p \in \partial O_i$ için $\sigma^*(p) \neq \omega_q(p)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} H : \partial O_i \times [0, 1] &\rightarrow S^{n-1} \\ H(p, t) &= \frac{t\sigma^*(p) - (1-t)\omega_q(p)}{\|t\sigma^*(p) - (1-t)\omega_q(p)\|} \end{aligned}$$

dönüşümü σ^* ile $-\omega_q$ arasında bir homotopidir. Gerçekten $H(p, 0) = -\omega_q(p)$ ve $H(p, 1) = \sigma^*(p)$ 'dir. H 'nin sürekli olduğunu göstermek için $\|t\sigma^*(p) - (1-t)\omega_q(p)\| \neq 0$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

Eğer bir $t \in [0, 1]$ için $\|t\sigma^*(p) - (1-t)\omega_q(p)\| = 0$ olsaydı

$$\begin{aligned} \|t\sigma^*(p) - (1-t)\omega_q(p)\| = 0 &\iff t\sigma^*(p) - (1-t)\omega_q(p) = 0 \\ &\iff t\sigma^*(p) = (1-t)\omega_q(p) \\ &\iff |t|\|\sigma^*(p)\| = |1-t|\|\omega_q(p)\| \end{aligned}$$

ve $\|\sigma^*(p)\| = \|\omega_q(p)\| = 1$ olduğundan $|t| = |1-t|$ elde edilirdi. Bu ise $t = \frac{1}{2}$ olması demek olurdu ki bu durumda $\sigma^*(p) = \omega_q(p)$ olur. Ancak bu da varsayımla çelişir, yani her $t \in [0, 1]$ için $\|t\sigma^*(p) - (1-t)\omega_q(p)\| \neq 0$ 'dır. Böylece H süreklidir. Dolayısıyla σ^* ile $-\omega_q$ arasında bir homotopidir. H 'nin, derecesi 1 olan σ^* ile derecesi 0 olan $-\omega_q$ arasında bir homotopi olması derecenin homotopi invariantı olmasıyla çelişir. O halde varsayım yanlıştır. Yani en az bir $p \in \partial O_i$ için $\sigma^*(p) = \omega_q(p)$ olmalıdır. ■

Sonuç 4.6 Her $j \neq i$ için $\partial O_j \subset \bigcup_{(p, \sigma(p)) \in E} L_p \sigma(p)$ 'dir.

Kanıt. $i \neq j$ için $\partial O_j \subset \mathbb{R}^n \setminus O_i$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.5'den dolayı $\partial O_j \subset \bigcup_{p \in \partial O_i} L_p \sigma^*(p)$ dir.

Diğer taraftan σ genişletilebilir olduğundan E2 koşulunu sağlamaktadır, yani $p \in \partial O_i \setminus D_\sigma$ için $L_p \sigma^*(p) \cap \partial O_j = \emptyset$ 'dir. Böylece $\forall j \neq i$ için $\partial O_j \subset$

$\bigcup_{(p, \sigma(p)) \in E} L_p \sigma(p)$ olmalıdır. ■
 $E_j \subset E$ kümesi

$$E_j = \{(p, \sigma(p)) \in E \mid L_p \sigma(p) \cap \partial O_j \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlansın. Böylece aşağıdaki yardımcı teorem ifade edilebilir.

Yardımcı Teorem 4.7 $\partial O_j \subset \bigcup_{(p, \sigma(p)) \in E_j} L_p \sigma(p)$ 'dir ve birleşim ayrık birleşimdir.

Kanıt. Sonuç 4.6 ve E_j kümesinin tanımından dolayı $\partial O_j \subset \bigcup_{(p, \sigma(p)) \in E_j} L_p \sigma(p)$ olduğu açıktır. Bu durumda $p_1 \neq p_2$ olmak üzere, eğer $(p_1, \sigma(p_1)) \in E_j$ ve $(p_2, \sigma(p_2)) \in E_j$ ise $L_{p_1} \sigma(p_1) \cap L_{p_2} \sigma(p_2) = \emptyset$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$t_1 \geq t_2 > 0$ için $p_1 + t_1 \sigma(p_1) = p_2 + t_2 \sigma(p_2)$ olduğu kabul edilsin.

Öncelikle $\sigma(p_1) = \sigma(p_2)$ durumu ele alınacaktır. Bu durumda $p_1 + t_1 \sigma(p_1) = p_2 + t_2 \sigma(p_1)$ eşitliğinden $p_2 = p_1 + (t_1 - t_2) \sigma(p_1)$ elde edilir. Yani $p_2 \in L_{p_1} \sigma(p_1)$ 'dir. $(p_1, \sigma(p_1)) \in E_j$ olduğundan $L_{p_1} \sigma(p_1) \cap \partial O_j \neq \emptyset$ 'dir ve H1 'den dolayı $L_{p_1} \sigma(p_1) \cap \partial O_i = \{p_1\}$ olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir.

$\sigma(p_1) \neq \sigma(p_2)$ durumunda ise

$$(p_1 - p_2) + t_1 \sigma(p_1) - t_2 \sigma(p_2) = 0$$

$$(p_1 - p_2) + t_1 \sigma(p_1) - t_2 \sigma(p_2) + t_2 \sigma(p_1) - t_2 \sigma(p_1) = 0$$

$$(p_1 - p_2) + (t_1 - t_2) \sigma(p_1) + t_2 (\sigma(p_1) - \sigma(p_2)) = 0$$

elde edilir. Burada eşitliğin her iki tarafının $\sigma(p_1) - \sigma(p_2) \neq 0$ ile iç çarpımı alınırsa

$$\langle p_1 - p_2, \sigma(p_1) - \sigma(p_2) \rangle + (t_1 - t_2) \langle \sigma(p_1), \sigma(p_1) - \sigma(p_2) \rangle + t_2 \|\sigma(p_1) - \sigma(p_2)\|^2 = 0$$

olur. Eşitliğin sol tarafında $t_2 \|\sigma(p_1) - \sigma(p_2)\|^2 > 0$ 'dır ve σ saçılan vektör alanı olduğundan dolayı $\langle (p_1 - p_2), \sigma(p_1) - \sigma(p_2) \rangle \geq 0$ 'dir. Diğer taraftan $-1 \leq \langle \sigma(p_1), \sigma(p_2) \rangle \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} (t_1 - t_2) \langle \sigma(p_1), \sigma(p_1) - \sigma(p_2) \rangle &= (t_1 - t_2) (1 - \langle \sigma(p_1), \sigma(p_2) \rangle) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece eşitliğin sol tarafının sıfırdan kesin büyük olduğu görülür. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $(p_1, \sigma(p_1)) \in E_j$ ve $(p_2, \sigma(p_2)) \in E_j$ ise $L_{p_1} \sigma(p_1) \cap L_{p_2} \sigma(p_2) = \emptyset$ olduğu gösterilmiş olur. ■

$f(E_j) \in \mathcal{E}_j$ olduğunu göstermek için öncelikle $f(E_j)$ 'nin sürekli bir τ dönüşümünün grafiği olduğu gösterilecektir. $f(E_j)$ kümesini belirlemek amacıyla $(p, \sigma(p)) \in E_j$ noktası verilsin. $L_p \sigma(p)$ 'nin ∂O_j 'ye ilk değme noktası q olmak

üzere

$$f((p, \sigma(p))) = (q, \sigma(p) - 2\langle n_q, \sigma(p) \rangle n_q)$$

'dir.

Yardımcı Teorem 4.7, ∂O_j üzerinde verilen bir q noktasını $q \in L_p \sigma(p)$ olacak şekilde tektürlü belirli $p \in D_\sigma$ noktasına götüren

$$\pi : \partial O_j \rightarrow D_\sigma$$

$$\pi(q) = p$$

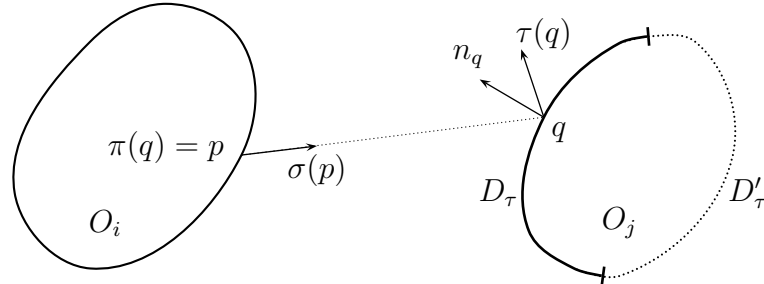
dönüşümünün tanımlanmasına olanak sağlar. Bu durumda

$$D_\tau = \{q \in \partial O_j \mid \langle n_q, \sigma(\pi(q)) \rangle \leq 0\} \subset \partial O_j \quad \text{ve}$$

$$\tau : D_\tau \rightarrow S^{n-1}$$

$$\tau(q) = \sigma(\pi(q)) - 2\langle n_q, \sigma(\pi(q)) \rangle n_q$$

olmak üzere $f(E_j) = \text{grafik}(\tau)$ olur. (Şekil 4.4). D_τ kümesi boşkümeden farklı ve kompakttır.



Şekil 4.4: D_τ kümesi ve τ dönüşümü

τ süreklidir : σ ve n sürekli olduğundan τ dönüşümünün sürekli olduğunu kanıtlamak için π dönüşümünün sürekli olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$q \in \partial O_j$ noktasma yakınsayan $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \partial O_j$ dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\pi(q_n) = p_n$ ve $\pi(q) = p$ olsun. Bu durumda t_n ve $t \in [0, d_{ij}]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} q_n &= p_n + t_n \sigma(p_n) & \forall n \in \mathbb{N} \text{ ve} \\ q &= p + t \sigma(p) \end{aligned}$$

olacaktır. Burada $d_{ij} = \max\{\|u - v\| \mid u \in \partial O_i \text{ ve } v \in \partial O_j\}$ 'dir.

p_n dizisinin bütün yakınsak alt dizilerinin p noktasma yakınsadığı gösterilecektir. p_{n_k}, p_n dizisinin keyfi bir yakınsak alt dizisi olsun ve $p_0 \in D_\sigma$ noktasma yakınsasın. Böylece

$$q_{n_k} = p_{n_k} + t_{n_k} \sigma(p_{n_k})$$

olur. $[0, d_{ij}]$ 'nin kompaktlığından t_{n_k} dizisinin $t_{n_k} \rightarrow t_0$ şeklinde bir yakınsak alt dizisi vardır. σ sürekli olduğundan $\sigma(p_{n_k}) \rightarrow \sigma(p_0)$ olur ve

$$\begin{array}{ccc} q_{n_k} & = & p_{n_k} + t_{n_k} \sigma(p_{n_k}) \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ q & = & p_0 + t_0 \sigma(p_0) \end{array}$$

elde edilir. Bu ise $(p_0, \sigma(p_0)) \in E_j$ demektir. Ancak Yardımcı Teorem 4.7 gereğince $\bigcup_{(p, \sigma(p)) \in E_j} L_p \sigma(p)$ birleşimi ayrık olduğundan $p = p_0$ olmalıdır.

p_n dizisinin bütün yakınsak alt dizileri p noktasma yakınsamaktadır. Böylece D_σ kompakt olduğundan $p_n \rightarrow p$ elde edilir. Bu durumda π süreklidir. Böylece $\tau : D_\tau \rightarrow S^{n-1}$ dönüşümünün sürekli olduğu gösterilmiş olur.

$f(E_j) = \text{grafik}(\tau)$ kümesinin \mathcal{E}_j genişletici kümesine ait olabilmesi için τ 'nun saçılan ve genişletilebilir olması gerekir.

τ saçılan vektör alanıdır : Her $q_1, q_2 \in D_\tau$ için $\langle \tau(q_1) - \tau(q_2), q_1 - q_2 \rangle \geq 0$ olduğunun gösterilmesi gerekmektedir.

$q_1, q_2 \in D_\tau \subset \partial O_j$ ise $i = 1, 2$ için $\pi(q_i) = p_i$ olmak üzere

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 + t_1 \sigma(p_1) \\ q_2 &= p_2 + t_2 \sigma(p_2) \end{aligned}$$

olacak şekilde $t_1, t_2 > 0$ sayıları vardır. $t_1 \geq t_2$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}\tau(q_1) &= \sigma(p_1) - 2\langle \sigma(p_1), n_{q_1} \rangle n_{q_1} \\ \tau(q_2) &= \sigma(p_2) - 2\langle \sigma(p_2), n_{q_2} \rangle n_{q_2}\end{aligned}$$

yazılabilir. İkinci eşitlik birinciden taraf tarafa çıkarılırsa

$$\tau(q_1) - \tau(q_2) = (\sigma(p_1) - \sigma(p_2)) + 2[\langle \sigma(p_2), n_{q_2} \rangle n_{q_2} - \langle \sigma(p_1), n_{q_1} \rangle n_{q_1}]$$

elde edilir. Her iki taraf $q_1 - q_2 \neq 0$ ile iç çarpılarak

$$\begin{aligned}\langle \tau(q_1) - \tau(q_2), q_1 - q_2 \rangle &= \langle \sigma(p_1) - \sigma(p_2), q_1 - q_2 \rangle \\ &\quad + 2[\langle \sigma(p_2), n_{q_2} \rangle n_{q_2} - \langle \sigma(p_1), n_{q_1} \rangle n_{q_1}], q_1 - q_2\end{aligned}\tag{4.1}$$

bulunur. Öncelikle eşitliğin sağ tarafındaki ifadede $\langle \sigma(p_1) - \sigma(p_2), q_1 - q_2 \rangle \geq 0$ olduğu gösterilecektir.

$$q_1 - q_2 = p_1 - p_2 + t_2(\sigma(p_1) - \sigma(p_2)) + (t_1 - t_2)\sigma(p_1)$$

ifadesinde eşitliğin her iki tarafı $\sigma(p_1) - \sigma(p_2)$ ile iç çarpılarak

$$\begin{aligned}\langle q_1 - q_2, \sigma(p_1) - \sigma(p_2) \rangle &= \langle p_1 - p_2, \sigma(p_1) - \sigma(p_2) \rangle \\ &\quad + t_2 \|\sigma(p_1) - \sigma(p_2)\|^2 + (t_1 - t_2) \langle \sigma(p_1), \sigma(p_1) - \sigma(p_2) \rangle\end{aligned}$$

elde edilir. σ saçılan vektör alanı olduğundan $\langle p_1 - p_2, \sigma(p_1) - \sigma(p_2) \rangle \geq 0$ 'dır. $t_2 \|\sigma(p_1) - \sigma(p_2)\|^2 \geq 0$ olduğu açıktır. Son olarak $-1 \leq \langle \sigma(p_1), \sigma(p_2) \rangle \leq 1$ olduğundan

$$(t_1 - t_2) \langle \sigma(p_1), \sigma(p_1) - \sigma(p_2) \rangle = (t_1 - t_2)(1 - \langle \sigma(p_1), \sigma(p_2) \rangle) \geq 0$$

elde edilir. Diğer taraftan O_j konveks olduğundan (4.1) ifadesinin sağ tarafındaki ikinci terim

$$\begin{aligned}&\langle [\langle \sigma(p_2), n_{q_2} \rangle n_{q_2} - \langle \sigma(p_1), n_{q_1} \rangle n_{q_1}], q_1 - q_2 \rangle \\ &= \underbrace{\langle \sigma(p_2), n_{q_2} \rangle}_{\leq 0} \underbrace{\langle n_{q_2}, q_1 - q_2 \rangle}_{\leq 0} - \underbrace{\langle \sigma(p_1), n_{q_1} \rangle}_{\leq 0} \underbrace{\langle n_{q_1}, q_1 - q_2 \rangle}_{\geq 0} \\ &\geq 0\end{aligned}$$

'dir. Buradan

$$\langle \tau(q_1) - \tau(q_2), q_1 - q_2 \rangle \geq 0$$

olduğu görülmüş olur.

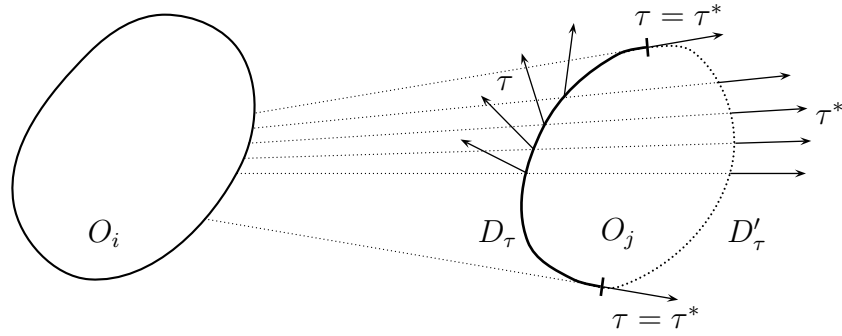
τ genişletilebilirdir : $\tau : D_\tau \rightarrow S^{n-1}$ dönüşümünü tüm ∂O_j üzerinde sürekli bir şekilde genişletmek için

$$D'_\tau : \{q \in \partial O_j \mid \langle \sigma(\pi(q)), n_q \rangle \geq 0\}$$

kümesi tanımlansın. D'_τ boşkümeden farklı ve kapalıdır. Üstelik her $q \in \partial O_j$ için $\exists p \in D_\tau$ ve $q \in L_p \sigma(p)$ olduğundan $\partial O_j = D_\tau \cup D'_\tau$ 'dir. Böylece τ dönüşümü tüm ∂O_j üzerine

$$\begin{aligned} \tau^* & : \partial O_j \rightarrow S^{n-1} \\ \tau^*(q) & = \begin{cases} \sigma(\pi(q)) - 2\langle \sigma(\pi(q)), n_q \rangle n_q & ; q \in D_\tau \\ \sigma(\pi(q)) & ; q \in D'_\tau \end{cases} \end{aligned}$$

olarak genişletilebilirdir. (Şekil 4.5).



Şekil 4.5: τ dönüşümünün sürekli genişlemesi τ^* dönüşümü

$D_\tau \cap D'_\tau$ üzerinde $\langle \sigma(\pi(q)), n_q \rangle = 0$ olduğundan τ^* iyi tanımlıdır ve D_τ ve D'_τ üzerinde ayrı ayrı sürekli olduğundan süreklidir.

τ^* dönüşümü E1 koşulunu sağlamaktadır. Eğer $q \in D_\tau$ ise $\langle n_q, \sigma(\pi(q)) \rangle \leq 0$

demektir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\langle n_q, \tau^*(q) \rangle &= \langle n_q, \sigma(\pi(q)) - 2\langle n_q, \sigma(\pi(q)) \rangle n_q \rangle \\
&= \langle n_q, \sigma(\pi(q)) \rangle - 2\langle n_q, \sigma(\pi(q)) \rangle \\
&= -\langle n_q, \sigma(\pi(q)) \rangle \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Eğer $q \in D'_\tau$ ise $\langle n_q, \sigma(\pi(q)) \rangle \geq 0$ demektir. Yani bu durumda da $\langle n_q, \tau^*(q) \rangle \geq 0$ 'dır. Böylece τ^* dönüşümünün E1 koşulunu sağladığı gösterilmiş olur.

Diğer taraftan τ^* , E2 koşulunu da sağlar çünkü H2 hipotezinden dolayı $q \in D'_\tau$ ve $k \neq j$ için $L_q\sigma(\pi(q)) \cap \partial O_k = \emptyset$ 'dir.

Böylece f bilardo dönüşümünün $(S_i)_{i=1}^K$ dekompozisyonu ve verilen $M = (m_{ij}) = (1 - \delta_{ij})$ geçiş matrisine göre $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^K$ genişletici kümeler ailesini kabul ettiği gösterilmiş olur. Bu durumda Kaos Lemma'dan dolayı Teorem 4.2 'nin ispatı tamamlanır.

4.2 Hiperbolik Uzayda Açık Bilardo

Bu bölümde Teorem 4.2 hiperbolik uzay içinde ele alınacaktır. Problem hiperbolik uzayın konformal disk modelinde incelenecektir. Hiperbolik uzayın konformal disk modeli

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}^n &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_{\mathbb{E}} < 1\} \\
g_p(U, V) &= \langle U, V \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{4}{(1 - \|p\|_{\mathbb{E}}^2)^2} \langle U, V \rangle_{\mathbb{E}}
\end{aligned}$$

Riemann metriği ile verilir. Burada $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}}$ ve $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ sırasıyla Öklidyen iç çarpım ve normu göstermektedir. Devamlı \mathbb{H} alt indisini taşımamak için, bu bölüm boyunca herhangi bir karışıklığa meydan vermediği sürece $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ve $\|\cdot\|$ gösterimleri sırasıyla hiperbolik iç çarpım ve hiperbolik norm anlamında kullanılacaktır. Konformal disk modelinde jeodezikler $\partial\mathbb{B}^n$ 'e dik olan çemberler veya orijinden geçen Öklidyen doğrulardır. \mathbb{B}^n 'in teğet demeti $T\mathbb{B}^n$ için

$$T\mathbb{B}^n \approx \mathbb{B}^n \times T_0\mathbb{B}^n$$

izomorfizmi yazılabilir. Bir $p \in \mathbb{B}^n$ noktası ve bu noktadaki bir v_p birim vektörü için

$$\varphi(0) = p \text{ ve } \frac{d\varphi}{dt}(0) = v_p$$

olacak şekilde tektürlü belirli bir φ jeodeziği vardır. (p, v_p) 'nin belirlediği yarıdoğru (ışın) $L_p v_p$ ile gösterilecektir. Böylece $S(T\mathbb{B}^n)$, \mathbb{B}^n 'in birim küre demeti olmak üzere $(p, v_p) \in S(T\mathbb{B}^n)$ noktası verildiğinde

$$\varphi : \mathbb{R} \times S(T\mathbb{B}^n) \rightarrow S(T\mathbb{B}^n)$$

$$\varphi(t, (p, v_p)) = (\varphi_1(t, (p, v_p)), \varphi_2(t, (p, v_p)))$$

i. $\varphi(0, (p, v_p)) = (p, v_p)$

ii. Her $t \in \mathbb{R}$ için $\varphi_1(t, (p, v_p))$ bir hiperbolik jeodezik üzerindedir ve

$$\varphi_2(t, (p, v_p)) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, (p, v_p))$$

'dir.

koşullarını sağlayan φ dönüşümü (p, v_p) 'nin belirlediği *jeodezik akış* olarak adlandırılır.

$K \geq 3$ olmak üzere O_1, O_2, \dots, O_K , \mathbb{B}^n ($n \geq 2$) içinde ikişer ikişer ayrık, hiperbolik konveks, sınırları düzgün ve standart kapalı disk \mathbb{D}^n 'e diffeomorfik altkümeler olsunlar. $i = 1, \dots, K$ olmak üzere O_i engelleri için ayrıca aşağıdaki iki hipotez sağlanıyor olsun:

H1. $v_p, p \in \partial O_i, (i = 1, 2, \dots, K)$ sınır noktasında dışadoğru birim vektör olsun. (Yani, $n_p, p \in \partial O_i$ noktasındaki dışa doğru birim normal vektör olmak üzere $\langle n_p, v_p \rangle \geq 0$.) v_p tarafından belirlenen hiperbolik ışın $L_p v_p$, $j \neq i$ olmak üzere herhangi bir O_j ile kesişiyorsa $L_p v_p \cap \partial O_i = \{p\}$ 'dir.

H2. $\text{conv}_{\mathbb{H}}[A]$ bir A altkümesinin hiperbolik konveks zarfını göstermek üzere farklı elemanların herhangi (j_1, j_2, j_3) üçlüsü için

$$\text{conv}_{\mathbb{H}}[O_{j_1} \cup O_{j_2}] \cap O_{j_3} = \emptyset$$

'dir.

Konformal disk modelinde ∂O_i 'in bir p noktasındaki hiperbolik normal vektörü ile Öklidyen normal vektörünün yönleri aynıdır, boyları ise bir $\lambda(p) > 0$ pozitif katsayısı ile birbirinden ayrılır. Böylece yukarıdaki koşulları sağlayan engeller kümesi için, herhangi bir ∂O_i üzerinde bir p noktası ve bu noktada dışadoğru bir v_p vektörü verildiğinde, Öklidyen durumdaki gibi $L_p v_p$ ışını ($j \neq i$) olmak üzere ∂O_j kümesini en fazla iki noktada kesebilir. Bu noktalar q ve r olarak gösterilirse, ilk değme noktası $q \in \partial O_j$ 'da $\langle n_q, v_p \rangle \leq 0$, ikinci değme noktası $r \in \partial O_j$ 'de ise $\langle n_r, v_p \rangle \geq 0$ olur. Eğer $L_p v_p$ ışını ∂O_j 'ye teğet ise $q = r$ ve $\langle n_q, v_p \rangle = 0$ olacaktır. (Şekil 4.6).

$L_p v_p$ ışınının $q \in \partial O_j$ noktasında belirlediği hız vektörü v_q 'nun n_q normal vektörüne göre yansımaları, $q \in \partial O_j$ noktasında

$$w_q = v_q - 2\langle n_q, v_q \rangle n_q$$

dışadoğru birim vektörünü verecektir. Bu ise

$$(p, v_p) \mapsto (q, v_q - 2\langle n_q, v_q \rangle n_q)$$

eşleminin yapılmasına olanak sağlar. Bu eşleme, dönüşüm şeklinde ifade edilebilir:

$$Q = \bigcup_{i=1}^K S(T\mathbb{B}^n) \Big|_{\partial O_i}$$

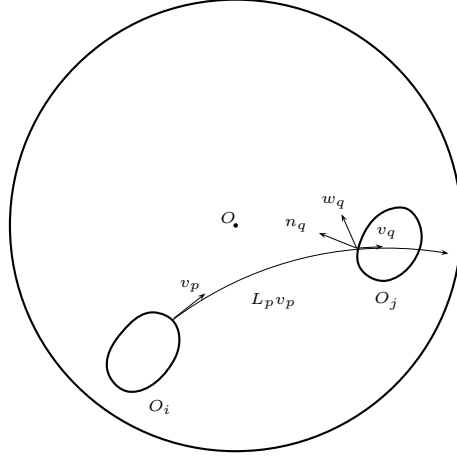
faz uzayı olmak üzere

$$S_i = \{(p, v_p) \in S(T\mathbb{B}^n) \Big|_{\partial O_i} \mid \langle n_p, v_p \rangle \geq 0 \text{ ve } \exists j \neq i \text{ için } L_p v_p \cap \partial O_j \neq \emptyset\}$$

ve $Q_0 = \bigcup_{i=1}^K S_i$ olsun. Bu durumda bilardo dönüşümü

$$\begin{aligned} f : Q_0 &\rightarrow Q \\ f(p, v_p) &= (q, v_q - 2\langle n_q, v_q \rangle n_q) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Şekil 4.6). Bu bölümde aşağıdaki teorem kanıtlanacaktır.



Şekil 4.6: Konformal disk modelde $L_p v_p$ ışınının ∂O_j engelinde yansması: $w_q = v_q - 2\langle v_q, n_q \rangle n_q$

Teorem 4.8 $i_n \in \{1, 2, \dots, K\}$ ve $i_n \neq i_{n+1}$ olmak üzere, verilen herhangi iki yönlü sonsuz $(S_{i_n})_{n \in \mathbb{Z}}$ dizisi için öyle bir $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dizisi vardır ki $(x_n) \in S_{i_n}$ ve $f(x_n) = x_{n+1}$ 'dir.

Teorem 4.8 Öklidyen durumda olduğu gibi Kaos Lemma'nın sonucu olarak kanıtlanacaktır. \mathbb{B}^n 'in birim küre demetinin ∂O_i 'ye kısıtlanması

$$S(T\mathbb{B}^n) \Big|_{\partial O_i} = \Sigma_i$$

ile gösterilsin. Bu durumda Q faz uzayı, $p \in \partial O_i$ ve v_p bu noktadaki bir birim vektör olmak üzere (p, v_p) ikililerinin birleşimi

$$Q = \bigcup_{i=1}^K \Sigma_i$$

olacaktır. Q 'nun kompakt olduğu aşıkardır.

$$S_i = \{(p, v_p) \in \Sigma_i \mid \langle n_p, v_p \rangle \geq 0 \text{ ve } \exists j \neq i \text{ için } L_p v_p \cap \partial O_j \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanan sembol kümeleri ikişer ikişer ayrıktyrlar, ayrıca Q içinde kapalı ve dolayısıyla kompakttyrlar. Böylece sonlu sayıda S_i sembol kümesinin birleşimi olarak tanımlanan

$$Q_0 = \bigcup_{i=1}^K S_i$$

kümesi de kompakttır.

Herbir O_i engeli için \mathcal{E}_i genişletici kümeler verilmeden önce bir ∂O_i üzerinde vektör alanları ile ilgili iki kavram tanımlanacaktır.

Tanım 4.9 $D \subset \partial O_i$ boş olmayan, kompakt altküme ve σ 'da D üzerinde dışadoğru birim vektörlerden oluşan bir sürekli vektör alanı olsun, yani $\sigma : D \rightarrow \Sigma_i$ sürekli kesiti, $\sigma(p) = (p, \sigma_2(p))$ olmak üzere her $p \in D$ için $\langle n_p, \sigma_2(p) \rangle \geq 0$ koşulunu sağlıyor olsun. Bu durumda $p_1, p_2 \in D$ için $\sigma_2(p_1)$ ve $\sigma_2(p_2)$ 'nin $p_1 p_2$ hiperbolik doğru parçası ile yaptığı açılar sırasıyla α_1, α_2 olmak üzere

$$\forall p_1, p_2 \in D \text{ için } \alpha_1 + \alpha_2 \geq \pi$$

oluyorsa σ , D üzerinde saçılan vektör alanı olarak adlandırılır.

Bu koşul Öklidyen durumdaki

$$\forall p_1, p_2 \in D \text{ için } \langle \sigma(p_1) - \sigma(p_2), p_1 - p_2 \rangle \geq 0$$

koşuluna denktir. Gerçekten $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \pi]$ ve

$$\|p_2 - p_1\| \cos \alpha_1 = \langle \sigma(p_1), p_2 - p_1 \rangle$$

$$\|p_2 - p_1\| \cos \alpha_2 = \langle \sigma(p_2), p_1 - p_2 \rangle$$

olduğundan

$$\langle \sigma(p_1) - \sigma(p_2), p_1 - p_2 \rangle \geq 0$$

$$-\langle \sigma(p_1), p_2 - p_1 \rangle - \langle \sigma(p_2), p_1 - p_2 \rangle \geq 0$$

$$-\|p_2 - p_1\|(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \geq 0$$

elde edilir. Bu durumda $\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 = 2 \cos\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) \leq 0$ olmalıdır.

Ancak $\frac{-\pi}{2} \leq \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ ve \cos fonksiyonu bu aralıkta pozitif olduğundan $\pi \leq \alpha_1 + \alpha_2$ olmalıdır.

Yardımcı Teorem 4.10 $\sigma : D \rightarrow \Sigma_i$ saçılan bir vektör alanı ise farklı noktalarda belirlenen hiperbolik ışınlar kesişmezler.

Kanıt. σ saçılan bir vektör alanı olsun ve $p_1 \neq p_2$ noktalarında belirlediği hiperbolik ışınlar bir q noktasında kesişiyor olsun. Bu durumda $p_1 p_2 q$ bir hiperbolik üçgen formundadır ve iç açıları toplamı π 'den küçüktür. Oysa σ saçılan vektör alanı olduğundan $\alpha_1 + \alpha_2 \geq \pi$ 'dir. Bu ise bir çelişkidir. ■

Tanım 4.11 Saçılan bir $\sigma : D \rightarrow \Sigma_i$ kesiti için

$$E1. \forall p \in \partial O_i \text{ için } \langle n_p, \sigma_2^*(p) \rangle \geq 0.$$

$$E2. \text{ Her } j \neq i \text{ ve } \forall p \in \partial O_i \setminus D \text{ için } L_p \sigma_2^*(p) \cap \partial O_j = \emptyset.$$

koşulları sağlanacak şekilde bir $\sigma^* : \partial O_i \rightarrow \Sigma_i$ sürekli genişlemesi bulunabiliyorsa σ 'ya genişletilebilirdir denir.

Şimdi f bilardo dönüşümü için $(S_i)_{i=1}^K$ dekompozisyonuna göre genişletici kümeler tanımlanabilir:

$$\mathcal{E}_i = \{E \subset \Sigma_i \mid D_\sigma \subset \partial O_i \text{ üzerinde saçılan ve genişletilebilir } \sigma : D_\sigma \rightarrow \Sigma_i \text{ vektör alanı vardır ki, } E = \sigma(D_\sigma) = \text{Gör}(\sigma) \text{ 'dır.}\}$$

O_i hiperbolik konveks olduğundan $p_1 p_2$ hiperbolik doğru parçasını içerir. Böylece bu doğru parçasının p_1 ve p_2 'deki teğetleri ile n_{p_1} ve n_{p_2} 'nin iç çarpımı sıfırdan küçüktür. Yani n_{p_1} ve n_{p_2} 'nin $p_1 p_2$ hiperbolik doğru parçası ile yaptığı açılar $\frac{\pi}{2}$ 'den büyüktür. Böylece ∂O_i üzerinde n dışadöğru birim normal vektör alanı saçılındır. Ayrıca her $p \in \partial O_i$ noktasında normal vektör tanımlı olduğundan $\mathcal{E}_i \neq \emptyset$ 'dir.

$\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^K$ 'nin bir genişletici kümeler ailesi olduğunu göstermek için $E \in \mathcal{E}_i$ verildiğinde $i \neq j$ ise $f(E_j) \in \mathcal{E}_j$ olacak şekilde $E_j \subset E \cap S_i$ kümesinin var olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Bunun için $E \in \mathcal{E}_i$ verildiğinde sağlanan durumları not etmek faydalı olacaktır.

Burada ∂O_i 'in farklı noktalarındaki lifler (fiberler) birbirinden farklı olduğundan, derece kavramı Öklidyen durumdaki gibi hemen kullanılamaz. Ancak

paralel taşıma aracı ile $\sigma : \partial O_i \rightarrow \Sigma_i$ kesiti için derece kavramı tanımlanabilir. σ kesitinin $p \in \partial O_i$ noktasında belirlediği $\sigma_2(p)$ vektörünün orijine paralel taşınması ile elde edilen vektör $\tilde{\sigma}(p)$ ile gösterilmek üzere

$$\tilde{\sigma} : \partial O_i \rightarrow T_0 \mathbb{B}^n = S_{\mathbb{H}}^{n-1}$$

fonksiyonu tanımlanabilir. σ kesitinin derecesi de

$$\text{der}(\sigma) = \text{der}(\tilde{\sigma})$$

olarak tanımlanır.

Her $p \in \partial O_i$ için $\langle n_p, \sigma_2^*(p) \rangle \geq 0$ şartını sağladığından dolayı σ^* için aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir:

Yardımcı Teorem 4.12 $\sigma^* : \partial O_i \rightarrow \Sigma_i$ sürekli kesiti için $\text{der}(\sigma^*) = 1$ 'dir.

Kanıt. σ^* kesitinin belirlediği vektörlerin 0 noktasına paralel taşınması ile elde edilen dönüşüm $\tilde{\sigma}^* : \partial O_i \rightarrow S_{\mathbb{H}}^{n-1}$ ve benzer şekilde normal vektörlerin taşınmasıyla elde edilen dönüşüm $\tilde{n} : \partial O_i \rightarrow S_{\mathbb{H}}^{n-1}$ olsun. Paralel taşıma doğrusal izometri olduğundan her $p \in \partial O_i$ için

$$\langle \tilde{n}_p, \tilde{\sigma}^*(p) \rangle = \langle n_p, \sigma_2^*(p) \rangle \geq 0$$

'dir. Böylece

$$\begin{aligned} H & : \partial O_i \times [0, 1] \rightarrow S_{\mathbb{H}}^{n-1} \\ H(p, t) & = \frac{t\tilde{n}_p + (1-t)\tilde{\sigma}^*(p)}{\|t\tilde{n}_p + (1-t)\tilde{\sigma}^*(p)\|} \end{aligned}$$

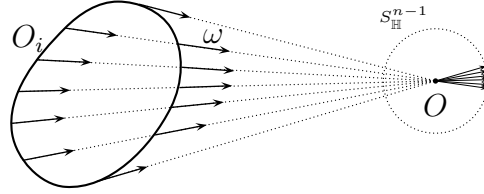
dönüşümü $\tilde{\sigma}^*$ ile \tilde{n} arasında bir homotopidir. Böylece $\text{der}(\sigma^*) = \text{der}(\tilde{\sigma}^*) = \text{der}(\tilde{n})$ elde edilir. Diğer taraftan \bar{n} Öklidyen normal vektör alanı olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} \partial O_i & \xrightarrow{\tilde{n}} & S_{\mathbb{H}}^{n-1} \\ & \searrow \tilde{n} & \uparrow \times \frac{1}{2} \\ & & S^{n-1} \end{array}$$

diyagramı komütatiftir. Bu diyagramda $S^{n-1} \rightarrow S_{\mathbb{H}}^{n-1}$ dönüşümü vektörün boyunu normlama dönüşümüdür. Orijinde Öklidyen olarak boyu 1 olan vektörün hiperbolik boyu 2 'dir. Dolayısıyla vektörün boyunu hiperbolik olarak normlamaktadır. Böylece bu dönüşümün derecesinin 1 olduğu açıktır. Bu durumda Hopf derece teoreminden dolayı $der(\sigma^*) = der(\tilde{n}) = der(\bar{n}) = 1$ elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 4.13 Her $q \in \mathbb{B}^n \setminus O_i$ için $q \in L_p \sigma_2^*(p)$ olacak şekilde bir $p \in \partial O_i$ noktası vardır.

Kanıt. $q \in \mathbb{B}^n \setminus O_i$ noktası verilsin. Bir hiperbolik izometri ile sifıra taşınabileceğinden $q = 0$ varsayılabilir. Her $p \in \partial O_i$ noktasına 0 'a doğru bir birim vektör karşılık getiren $\omega : \partial O_i \rightarrow \Sigma_i$ kesiti tanımlansın. Bu kesitin belirlediği vektörlerin orijine paralel taşınmasıyla elde edilen dönüşüm de $\tilde{\omega} : \partial O_i \rightarrow S_{\mathbb{H}}^{n-1}$ ile gösterilsin. (Şekil 4.7). $\tilde{\omega}$ örten değildir, çünkü $p_0 \in \partial O_i$ noktası verildiğinde her $p \in \partial O_i$ için $\tilde{\omega}(p) \neq -\tilde{\omega}(p_0)$ 'dır. Böylece $der(\tilde{\omega}) = der(-\tilde{\omega}) = 0$ 'dır.



Şekil 4.7: ω dönüşümü her $p \in \partial O_i$ noktaya orijine doğru birim vektör karşılık getirir

Varsayalım ki her $p \in \partial O_i$ için $\tilde{\sigma}^*(p) \neq \tilde{\omega}(p)$ olsun. Bu durumda

$$H : \partial O_i \times [0, 1] \rightarrow S_{\mathbb{H}}^{n-1}$$

$$H(p, t) = \frac{t\tilde{\sigma}^*(p) - (1-t)\tilde{\omega}(p)}{\|t\tilde{\sigma}^*(p) - (1-t)\tilde{\omega}(p)\|}$$

dönüşümü $\tilde{\sigma}^*$ ile $-\tilde{\omega}$ arasında bir homotopidir. Gerçekten $H(p, 0) = -\tilde{\omega}(p)$ ve $H(p, 1) = \tilde{\sigma}^*(p)$ 'dir. H 'nin sürekli olduğunu göstermek için $\|t\tilde{\sigma}^*(p) - (1-t)\tilde{\omega}(p)\| \neq 0$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

Eğer bir $t \in [0, 1]$ için $\|t\tilde{\sigma}^*(p) - (1-t)\tilde{\omega}(p)\| = 0$ olsaydı,

$$\begin{aligned} \|t\tilde{\sigma}^*(p) - (1-t)\tilde{\omega}(p)\| = 0 &\iff t\tilde{\sigma}^*(p) - (1-t)\tilde{\omega}(p) = 0 \\ &\iff t\tilde{\sigma}^*(p) = (1-t)\tilde{\omega}(p) \\ &\iff |t|\|\tilde{\sigma}^*(p)\| = |1-t|\|\tilde{\omega}(p)\| \end{aligned}$$

ve $\|\tilde{\sigma}^*(p)\| = \|\tilde{\omega}(p)\| = 1$ olduğundan $|t| = |1-t|$ elde edilirdi. Bu ise $t = \frac{1}{2}$ olması demek olurdu ki bu durumda $\tilde{\sigma}^*(p) = \tilde{\omega}(p)$ olur. Ancak bu da varsayımınla çelişir, yani her $t \in [0, 1]$ için $\|t\tilde{\sigma}^*(p) - (1-t)\tilde{\omega}(p)\| \neq 0$ 'dır. Böylece H süreklidir. Dolayısıyla $\tilde{\sigma}^*$ ile $-\tilde{\omega}$ arasında bir homotopidir. Ancak bu çelişkidir, çünkü $der(\tilde{\sigma}^*) = 1$ ve $der(-\tilde{\omega}) = 0$ 'dır.

Böylece en az bir $p \in \partial O_i$ için $\tilde{\sigma}^*(p) = \tilde{\omega}(p)$ olmalıdır. Bu $\tilde{\omega}(p)$ vektörü ∂O_i üzerine geri taşındığında $q = 0$ noktasına doğru birim vektör elde edilir. Yani $0 \in L_p\sigma_2^*(p)$ 'dir. ■

$E_j \subset E$ kümesi

$$E_j = \{(p, \sigma_2(p)) \in E \mid L_p\sigma_2(p) \cap \partial O_j \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlansın. Böylece aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç 4.14 Her $j \neq i$ için $\partial O_j \subset \bigcup_{(p, \sigma_2(p)) \in E_j} L_p\sigma_2(p)$ 'dir. Üstelik birleşim ayrık birleşimdir.

Kanıt. $i \neq j$ için $\partial O_j \subset \mathbb{B}^n \setminus O_i$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.13'den dolayı $\partial O_j \subset \bigcup_{p \in \partial O_i} L_p\sigma_2^*(p)$ dir. Ancak $E \setminus E_j$ için $L_p\sigma_2^*(p) \cap \partial O_j = \emptyset$ olduğundan her $j \neq i$ için $\partial O_j \subset \bigcup_{\sigma(p) \in E_j} L_p\sigma_2(p)$ olmalıdır. Diğer taraftan σ saçılan vektör alanı olduğundan birleşim ayrıktır. ■

$f(E_j) \in \mathcal{E}_j$ olduğunu göstermek için öncelikle $f(E_j)$ 'nin sürekli bir τ kesitin görüntüsü olduğu gösterilecektir. $\sigma(p) \in E_j$ noktası verilsin ve $L_p\sigma_2(p)$ 'nin ∂O_j 'ye ilk değme noktası q olsun. $\sigma_2(p)$ 'nin $q \in \partial O_j$ noktasına jeodezik üzerinden paralel taşınması $P_p^q(\sigma_2(p)) = \sigma_q$ olmak üzere

$$f(\sigma(p)) = (q, \sigma_q - 2\langle n_q, \sigma_q \rangle n_q)$$

'dir.

Sonuç 4.14, ∂O_j üzerinde verilen bir q noktasını $q \in L_p \sigma_2(p)$ olacak şekilde tektürlü belirli $p \in D_\sigma$ noktasına götüren

$$\begin{aligned}\pi : \partial O_j &\rightarrow D_\sigma \\ \pi(q) &= p\end{aligned}$$

dönüşümünün tanımlanmasına olanak sağlar. Bu durumda

$$D_\tau = \{q \in \partial O_j \mid \langle n_q, P_p^q(\sigma_2(\pi(q))) \rangle \leq 0\} \subset \partial O_j \quad \text{ve}$$

$$\begin{aligned}\tau : D_\tau &\rightarrow \Sigma_j \\ \tau(q) &= P_p^q(\sigma_2 \circ \pi(q)) - 2\langle n_q, P_p^q(\sigma_2 \circ \pi(q)) \rangle n_q \\ &= (q, \sigma_q - 2\langle n_q, \sigma_q \rangle n_q)\end{aligned}$$

olmak üzere $f(E_j) = \text{Gör}(\tau)$ olur. D_τ kümesi boşkümeden farklı ve kompakttır.

τ süreklidir : σ, n ve P_p^q paralel taşınması sürekli olduğundan τ dönüşümünün sürekli olduğunu kanıtlamak için π dönüşümünün sürekli olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$q \in \partial O_j$ noktasına yakınsayan $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \partial O_j$ dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\pi(q_n) = p_n$ ve $\pi(q) = p$ olsun. Bu durumda $d_{ij} = \max\{\|u - v\| \mid u \in \partial O_i \text{ ve } v \in \partial O_j\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}q_n &= \varphi(t_n, \sigma(p_n)) \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ ve} \\ q &= \varphi(t, \sigma(p))\end{aligned}$$

olacak şekilde t_n ve $t \in [0, d_{ij}]$ sayıları vardır. Burada φ jeodezik akış fonksiyonunu göstermektedir.

p_n dizisinin bütün yakınsak alt dizilerinin p noktasına yakınsadığı gösterilecektir. p_{n_k}, p_n dizisinin keyfi bir yakınsak alt dizisi olsun ve $p_0 \in D_\sigma$ noktasına yakınsasın. Böylece

$$q_{n_k} = \varphi(t_{n_k}, \sigma(p_{n_k}))$$

olur. $[0, d_{ij}]$ 'nin kompaktlığından t_{n_k} dizisinin $t_{n_k} \rightarrow t_0$ şeklinde bir yakınsak alt dizisi vardır. σ sürekli olduğundan $\sigma(p_{n_k}) \rightarrow \sigma(p_0)$ olur ve

$$\begin{array}{ccc} q_{n_k} & = & \varphi(t_{n_k}, \sigma(p_{n_k})) \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ q & = & \varphi(t_0, \sigma(p_0)) \end{array}$$

elde edilir. Bu ise $\sigma_2(p_0) \in E_j$ ve $q \in L_{p_0}\sigma(p_0)$ olması demektir. Ancak Sonuç 4.14 gereğince $\bigcup_{\sigma(p) \in E_j} L_p\sigma_2(p)$ birleşimi ayrık olduğundan $p = p_0$ olmalıdır.

p_n dizisinin bütün yakınsak alt dizileri p noktasına yakınsamaktadır. Böylece D_σ kompakt olduğundan $p_n \rightarrow p$ elde edilir. Bu durumda π sürekli dir. Böylece $\tau : D_\tau \rightarrow \Sigma_j$ dönüşümünün sürekli olduğu gösterilmiş olur.

$f(E_j) = \text{Gör}(\tau)$ kümesinin \mathcal{E}_j genişletici kümesine ait olabilmesi için τ 'nun saçılan ve genişletilebilir olması gerekir.

τ saçılan vektör alanıdır : Her $q_1, q_2 \in D_\tau$ için $\tau_2(q_1)$ ve $\tau_2(q_2)$ vektörlerinin q_1q_2 hiperbolik doğru parçası ile yaptığı açılar sırasıyla β_1 ve β_2 olmak üzere $\beta_1 + \beta_2 \geq \pi$ olduğunun gösterilmesi gerekmektedir.

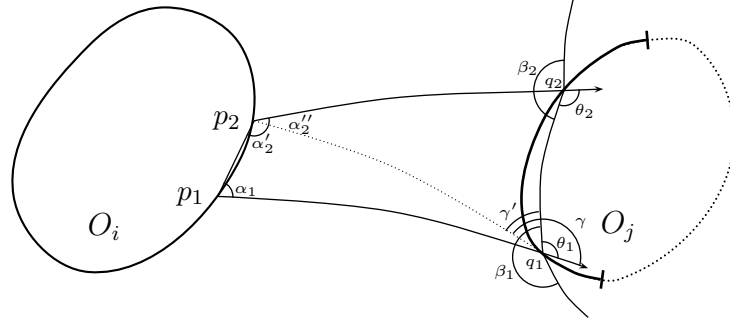
Öncelikle $L_{p_1}\sigma_2(p_1)$ ve $L_{p_2}\sigma_2(p_2)$ hiperbolik ışınlarının q_1q_2 kirişiyile yaptığı açılar θ_1 ve θ_2 olmak üzere $\theta_1 + \theta_2 \geq \pi$ olduğu gösterilecektir.

Şekil 4.8 'de görüldüğü gibi $\angle p_1p_2q_1 = \alpha'_2$, $\angle q_1p_2q_2 = \alpha''_2$ olsun. p_2q_1 kirişinin $L_{p_1}\sigma_2(p_1)$ ışınıyla yaptığı açı γ ve $\angle q_2q_1p_2 = \gamma'$ olsun. Bu durumda açıların üçgen eşitsizliğinden dolayı $\alpha_2 \leq \alpha'_2 + \alpha''_2$ ve $\gamma \leq \gamma' + \theta_1$ olacaktır. Diğer taraftan γ , $\Delta p_1p_2q_1$ hiperbolik üçgeninin dış açısı olduğundan $\alpha_1 + \alpha'_2$ toplamından büyüktür: $\gamma > \alpha_1 + \alpha'_2$. Böylece

$$\begin{aligned} \gamma + \alpha'_2 + \alpha''_2 &\geq \alpha_1 + \alpha'_2 + \alpha_2 \\ \gamma + \alpha''_2 &\geq \alpha_1 + \alpha_2 \geq \pi \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde θ_2 , $\Delta p_2q_1q_2$ üçgeninin dış açısı olduğundan $\theta_2 > \gamma' + \alpha''_2$ 'dür. Buradan da $\theta_1 + \theta_2 \geq \theta_1 + \gamma' + \alpha''_2 \geq \gamma + \alpha''_2 \geq \alpha_1 + \alpha_2 \geq \pi$ elde edilir.



Şekil 4.8: τ saçılan vektör alanıdır

Şimdi $\beta_1 + \beta_2 \geq \pi$ olduğu gösterilecektir. Bunu göstermek için ayrı ayrı $\beta_i \geq \theta_i$ olduğunu göstermek yeterlidir. q_1 noktasında gelen ve yansıyan ışınlarla q_1q_2 kirişinin tanımladığı birim vektörler sırasıyla v, w ve u olsun. Bu durumda $\lambda > 0$ olmak üzere $w = v + \lambda n_{q_1}$ yazılabilir. Her iki taraf u ile iç çarpılırsa, n_{q_1} ile u_1 arasındaki açı α olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle w, u \rangle &= \langle v, u \rangle + \lambda \langle n_{q_1}, u \rangle \\ \cos \beta_1 &= \cos \theta_1 + \lambda \cos \alpha \end{aligned}$$

elde edilir. O_j engeli hiperbolik konveks ve u içe doğru vektör olduğundan $\langle n_{q_1}, u \rangle = \cos \alpha \leq 0$ 'dır. Böylece

$$\cos \beta_1 \leq \cos \theta_1$$

elde edilir. β_1 ve θ_1 , $[0, \pi]$ aralığında olduğundan ve \cos fonksiyonu bu aralıkta monoton azalan olduğundan $\beta_1 \geq \theta_1$ elde edilir. Benzer şekilde $\beta_2 \geq \theta_2$ 'dir. Böylece istenilen kanıtlanmış olur.

τ genişletilebilirdir : $\tau : D_\tau \rightarrow \Sigma_j$ dönüşümünü tüm ∂O_j üzerine sürekli bir şekilde genişletmek için

$$D'_\tau : \{q \in \partial O_j \mid \langle P_p^q(\sigma_2 \circ \pi(q)), n_q \rangle \geq 0\}$$

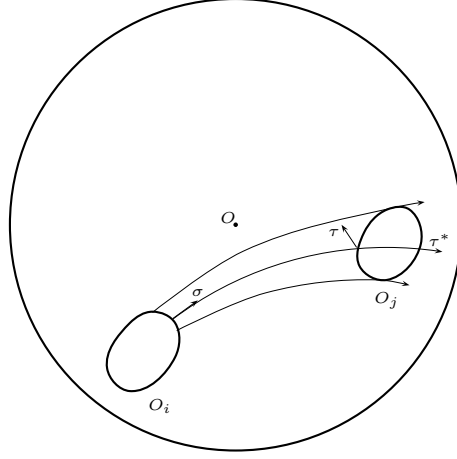
kümesi tanımlansın. D'_τ boşkümeden farklı ve kapalıdır. Üstelik her $q \in \partial O_j$ için $\exists p \in D_\sigma$ ve $q \in L_p \sigma_2(p)$ olduğundan $\partial O_j = D_\tau \cup D'_\tau$ 'dir. Böylece τ

dönüşümü tüm ∂O_j üzerine

$$\tau^* : \partial O_j \rightarrow \Sigma_j$$

$$\tau^*(q) = \begin{cases} P_p^q(\sigma_2 \circ \pi(q)) - 2\langle P_p^q(\sigma_2 \circ \pi(q)), n_q \rangle n_q & ; q \in D_\tau \\ P_p^q(\sigma_2 \circ \pi(q)) & ; q \in D'_\tau \end{cases}$$

olarak genişletilebilir. (Şekil 4.9).



Şekil 4.9: Konformal disk modelinde τ dönüşümünün sürekli genişlemesi τ^* dönüşümü

$D_\tau \cap D'_\tau$ üzerinde $\langle P_p^q(\sigma_2 \circ \pi(q)), n_q \rangle = 0$ olduğundan τ^* iyi tanımlıdır ve D_τ ve D'_τ üzerinde ayrı ayrı sürekli olduğundan süreklidir.

τ^* dönüşümü E1 koşulunu sağlamaktadır. Eğer $q \in D_\tau$ ise $\langle n_q, P_p^q(\sigma_2 \circ \pi(q)) \rangle \leq 0$ demektir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \langle n_q, \tau_2^*(q) \rangle &= \langle n_q, P_p^q(\sigma_2 \circ \pi(q)) - 2\langle n_q, P_p^q(\sigma_2 \circ \pi(q)) \rangle n_q \rangle \\ &= \langle n_q, P_p^q(\sigma_2 \circ \pi(q)) \rangle - 2\langle n_q, P_p^q(\sigma_2 \circ \pi(q)) \rangle \\ &= -\langle n_q, P_p^q(\sigma_2 \circ \pi(q)) \rangle \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Eğer $q \in D'_\tau$ ise $\langle n_q, P_p^q(\sigma_2 \circ \pi(q)) \rangle \geq 0$ demektir. Yani bu durumda da $\langle n_q, \tau_2^*(q) \rangle \geq 0$ 'dır. Böylece τ^* dönüşümünün E1 koşulunu sağladığı gösterilmiş olur. Diğer taraftan H2 hipotezinden dolayı τ^* , E2 koşulunu da sağlar.

Böylece f bilardo dönüşümünün $(S_i)_{i=1}^K$ dekompozisyonuna göre $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^K$ genişletici kümeler ailesini kabul ettiği gösterilmiş olur. Bu durumda Kaos Lemma'dan dolayı Teorem 4.8 'nin ispatı tamamlanır.

5 TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

Çokgensel bilardo sınıfında, dar üçgenler içinde bulunan Fagnano yörüngelerinin yaptığı gibi, çokgenin ardışık kenarlarını sırayla dolaşan yörüngelerin, konveks dörtgenler içinde bulunabilmesi için gerek ve yeter koşulun dörtgenin çembersel dörtgen olması gerektiği kanıtlanmıştır. Ayrıca bazı çembersel altıgenler ve $2n$ -genler içinde bu tür yörüngeler geometrik olarak inşa edilmiştir.

Konveks bilardo sınıfında, bilinen klasik sonuçlara ek olarak, izdüşel bilardo sınıfı tanımlanmış, özel bir eğri ailesinin gradyant vektörlerine göre yansıma kavramı tanımlanarak, bu sınıftaki yörüngeler incelenmiştir. Bu eğri ailesinin belirlediği bölgede hareket eden parçacığın yörüngesinin bir kaustik eğrisine sahip olduğunun gösterilmesi ilginç bir araştırma konusu olabilir.

Açık bilardo sınıfında, Öklidyen ve hiperbolik uzaylarda yansıma kurallarına uyarak hareket eden bir parçacığın, sonlu sayıda engeller için verilebilecek iki yönlü sonsuz bir diziyi takip eden bir yörüngenin varlığı kanıtlanmıştır. Bu tür yörüngeler içinde engellerin periyodik bir dizisi de verilebilir. Ancak noktasal olarak periyodik olan yörüngelerin varlığı problemi iyi bir çalışma konusu olacaktır. Ayrıca engel kümesinin sonsuz sayıda eleman içerdiği durumlar da çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] BIRKHOFF, G., *Dynamical systems*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., **9**, (1927).
- [2] BOLDRIGHINI, C., KEANE, M. ve MARCHETTI, F., *Billiards in polygons*, The Annals of Probability, **6(4)**, 532-540, (1972).
- [3] BOSTHERNİTZAN M., GAL'PERIN, G., KRÜGER T. ve TROUBETZKOY, S., *Periodic billiard orbits are dense in rational polygons*, Trans. of the Amer. Math. Soc., **350(9)**, 3523-3535, (1998).
- [4] GUTKIN, E., *Billiards in polygons*, Physica D, **19**, 311-333, (1986).
- [5] HALBEISEN, L., HUNGERBUHLER. N., *On periodic billiard trajectories in obtuse triangles*, SIAM Review, **42(4)**, 657-670 (2000).
- [6] HOLT, F., *Periodic reflecting paths in right triangles*, Geometriae Dedicata, **46**, 73-90, (1993).
- [7] KENNEDY, J., KOÇAK, S. ve YORKE, J. A. *A chaos lemma*, Amer. Math. Monthly, **108(5)**, 411-423, (2001).
- [8] KOZLOV, V. V., TRESHCEV D. V., *Billiards: A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*, Trans. of Math. Monographs, Amer. Math. Soc., **89**, (1991).
- [9] MASUR, H., *Closed trajectories for quadratic differentials with an application to billiards*, Duke Math. Journal, **53(2)**, (1986).
- [10] MORITA, T., *The symbolic representation of billiards without boundary condition*, Trans. of the A.M.S., **325(1)**, 819-828, (1991).
- [11] PHILLIPPAKIS, A., *The orthic triangle and the O.K. quadrilateral*, Amer. Math. Monthly, **109**, 704-728, (2002).

- [12] STOYANOV, L., *Exponential instability for a class of dispersing billiards*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **19**, 201-226, (1999).
- [13] TABACHNIKOV, S., *Billiards*, Providence, RI: Amer. Math. Soc., (1995).
- [14] TABACHNIKOV, S., *Introducing projective billiards*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **17**, 957-976, (1997).
- [15] VOROBETS, Ya. B., GAL'PERIN, G. A. ve STEPIN, A. M., *Periodic billiard trajectories in polygons: generating mechanisms*, Uspekhi Mat. Nauk, **47(3)**, 9-74, (1992).
- [16] ZEMLYAKOV, A. N., KATOK, A. B., *Topological transitivity of billiards in polygons*, Math. Notes, **18**, 760-764, (1974).
- [17] ZHANG, J., MERCHANT, A. C. ve RAE, W. D. M., *Geometric derivations of the second constant of motion for an elliptic 'billiard' and other results*, Eur. J. Phys., **15**, 133-138, (1994).