KESİKLİ-ZAMAN DİNAMİK SİSTEMLERİN KARARLILIK PROBLEMLERİ

Handan AKYAR

Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Ocak – 2005

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Handan Akyar'ın "Kesikli-Zaman Dinamik Sistemlerin Kararlılık Problemleri" başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki, Doktora tezi 10/01/2005 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Doç. Dr. Vakıf CAFEROV	....
Üye	:	Prof. Dr. Altuğ İFTAR	....
Üye	:	Doç. Dr. Mehmet ÜREYEN	....
Üye	:	Doç. Dr. Naci ÖZER	....
Üye	:	Doç. Dr. Halig HÜSEYİNOV	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Altuğ İFTAR
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

KESİKLİ-ZAMAN DİNAMİK SİSTEMLERİN KARARLILIK PROBLEMLERİ

HANDAN AKYAR

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Vakıf CAFEROV

2005, 110 Sayfa

Bu tezde, polinomlar ve matrisler ailesinin Schur kararlılık problemleri araştırılmıştır. Multilineer polinomlar ailesinin Schur kararlılığı için gerek ve yeter koşul verilmiş, bu sonuç yardımı ile multilineer polinomlar ailesinin kararlılığını test etmek için yeni bir algoritma elde edilmiştir. Schur diagonal kararlı matrislerin bazı yeni özellikleri sunulmuş, sonlu tane 2×2 matris için Stein eşitsizliğinin ortak diagonal çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşul verilmiştir. 3×3 matrisin Schur diagonal kararlı olması için bir yeter koşul bulunmuştur. Tüm kökleri, kompleks düzlemin basit bağlantılı, açık bir alt kümesinde olan gerçel ve kompleks katsayılı polinomlar ailesinin tek noktaya büzülemeyeceği, ancak iki noktaya büzülebileceği kanıtlanmıştır. Ayrıca kararlı matrisler ailesinin tek noktaya büzülebilirliği de araştırılmıştır. Düşük dereceli polinomların Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşullar elde edilmiş ve Schur konveks yön kavramı yardımı ile aralık polinomlar ailesinin kararlılığı için bilinen bir teoremin yeni kanıtı yapılmıştır. 2×2 ve 3×3 aralık matrisler ailesinin Schur kararlılığı incelenmiş, 2×2 gerçel matrislerin Schur D-kararlılığı için bilinen sonucun daha kısa kanıtı yapılmıştır. Kompleks matrislerin konveks, kompakt kümesinin anti Schur kararlılığı için Minimaks Teoremi kullanılarak bir gerek ve yeter koşul elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: **Schur Kararlılık, Gürbüz Schur Kararlılık, Büzülebilirlik, Aralık Matrisler, Konveks Yön**

ABSTRACT

PhD Thesis

STABILITY PROBLEMS OF DISCRETE-TIME DYNAMICAL SYSTEMS

HANDAN AKYAR

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Vakıf CAFEROV

2005, 110 Pages

In this thesis, Schur stability problems for the family of polynomials and matrices are studied. A necessary and sufficient condition for the Schur stability of family of multilinear polynomials is given and using this result a new algorithm for testing stability of the family of multilinear polynomials is obtained. Some properties of Schur diagonal matrices are presented and a necessary and sufficient condition which assures the existence of common diagonal solution of the Stein equation for finite number of 2×2 matrices is given. A sufficient condition for the Schur diagonal stability of a 3×3 matrix is obtained. It is proved that the family of polynomials with real or complex coefficients with all roots are lying in a simply connected, open subset of complex plane is not contractible to a single point but it is contractible to two points. The contractibility property of the family of stable matrices is also investigated. Necessary and sufficient conditions which assure the Schur convex direction for lower dimensional polynomials are obtained and in view of the Schur convex direction notion a new proof for a known theorem concerning the stability of family of interval polynomials is presented. Schur stability of 2×2 and 3×3 family of interval matrices is considered and a simpler proof for a known theorem involving the Schur D-stability of 2×2 real matrices is given. Using the Minimax Theorem a necessary and sufficient condition for the anti Schur stability of a convex, compact set of complex matrices is obtained.

Keywords: Schur Stability, Robust Schur Stability, Contractibility, Interval Matrices, Convex Direction

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Vakıf CAFEROV'a, önerilerinden dolayı hocam Prof. Dr. Şahin KOÇAK'a ve her zaman beni destekleyen eşim Emrah AKYAR'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Handan AKYAR

Ocak – 2005

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Gerçel sayılar kümesi
$conv\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$	:	$p_1, p_2, \ldots, p_n$ noktalarının konveks zarfı
$diag(d_1, \ldots, d_n)$	:	Köşegen elemanları $d_1, \ldots, d_n$ olan diagonal (köşegen) matris
A^*	:	A matrisinin eşlenik transpozu
$A > 0$	:	A pozitif belirli matris
$A < 0$	:	A negatif belirli matris
$\mathcal{B}$	:	Kompleks düzlemde birim disk
$\mathcal{Z}$	:	$i \neq j$ için $a_{ij} \leq 0$ olan $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisler sınıfı
$\mathcal{P}$	:	$\mathcal{D}$-kararlı polinomlar ailesi
$\mathcal{P}_I$	:	Aralık polinomlar ailesi
$\mathcal{P}^{\mathcal{S}}$	:	n. dereceden kompleks katsayılı Schur kararlı polinomlar ailesi
$\mathcal{A}$	:	Matrisler ailesi
$\mathbb{R}^{n \times n}$	:	$n \times n$ boyutlu gerçel matrisler kümesi
$\mathbb{C}^{n \times n}$	:	$n \times n$ boyutlu kompleks matrisler kümesi
$\mathcal{S}$	:	$n \times n$ boyutlu Schur kararlı matrisler kümesi
$\mathcal{H}$	:	$n \times n$ boyutlu Hurwitz kararlı matrisler kümesi
$\mathcal{D}_d$	:	$n \times n$ boyutlu Schur diagonal kararlı matrisler kümesi
$\mathcal{D}_c$	:	$n \times n$ boyutlu Hurwitz diagonal kararlı matrisler kümesi
$\mathbb{D}_d$	:	$n \times n$ boyutlu Schur D-kararlı matrisler kümesi
$\mathbb{D}_c$	:	$n \times n$ boyutlu Hurwitz D-kararlı matrisler kümesi
$\mathcal{M}$	:	$n \times n$ boyutlu $\mathcal{D}$-kararlı matrisler kümesi

1 GİRİŞ

Dinamik sistemler, durumu zamana göre değişen sistemlerdir. Uygulamada iki temel dinamik sistemle karşılaşılır:

1. Kesikli-zaman dinamik sistemler ($t \in \mathbb{N}$ veya $t \in \mathbb{Z}$),
2. Sürekli-zaman dinamik sistemler ($t \in \mathbb{R}$).

Kesikli-zaman dinamik sistemler bir fonksiyonun iterasyonu biçiminde, yani

$$x_{t+1} = f(x_t), \ (t \in \mathbb{N} \text{ veya } t \in \mathbb{Z})$$

biçiminde verilir.

Sürekli-zaman dinamik sistemler ise genellikle

$$\dot{x} = f(x), \ \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}\right)$$

biçiminde verilmektedir.

Sürekli dinamik sistemlerde sistemin noktaları sürekli bir eğri boyunca değişiyorken, kesikli-zaman dinamik sistemlerde sistemin noktaları sıçrama yaparak değişir.

Dinamik sistemler teorisi matematiğin 17. yüzyılda çalışılmaya başlanan klasik alanlarından biridir. 1880 li yıllarda Poincar*é*, sürekli dinamik sistemleri zamanın uygun aralıklarla arttığı dinamik sistemlerle değiştirerek çeşitli çalışmalar yapmıştır.

Eğer dinamik sistemde kontrol parametresi bulunuyorsa bu sistemler Kontrol Teorisinde araştırılmaktadır.

Dinamik sistemlerin kararlılığının araştırılması bu teoride önemli bir yere sahiptir. Sürekli dinamik sistemlerin kararlılığı belli matris ve polinomların Hurwitz kararlılığına, kesikli-zaman dinamik sistemlerin kararlılığı ise Schur kararlılığa dönüşmektedir [1], [2]. Ancak, bir çok pratik problemde parametreler belirsizlikler içerdiği için matrisler ve polinomlar ailesinin kararlılığı problemleri araştırma konusu olmaktadır.

$a_i, (i = 1, 2, \ldots, n)$ kompleks sayılar olmak üzere,

$$p(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n, \quad (a_n \neq 0) \tag{1.1.1}$$

polinomu verilsin. $\mathcal{D}$ kümesi $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde basit bağlantılı, açık bir bölge olsun. Eğer bu polinomun tüm kökleri $\mathcal{D}$ bölgesinde ise bu polinoma **$\mathcal{D}$-kararlı polinom** denir. Eğer,

- $\mathcal{D}$ bölgesi kompleks düzlemde sol açık yarı düzlem ise, $\mathcal{D}$-kararlılığa **Hurwitz kararlılık**,
- $\mathcal{D}$ bölgesi kompleks düzlemde açık birim disk ise, $\mathcal{D}$-kararlılığa **Schur kararlılık**

denir.

2. ve 3. dereceden gerçel katsayılı bir polinomun Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşullar aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

Teorem 1.1.1 ([3])**.** 2. *dereceden gerçel katsayılı polinomun Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul* $a_2 > 0$ *olmak üzere,*

i) $|a_0| < a_2$,

ii) $|a_1| < a_0 + a_2$

olmasıdır.

Teorem 1.1.2 ([3])**.** 3. *dereceden gerçel katsayılı polinomun Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul* $a_3 > 0$ *olmak üzere,*

i) $|a_0| < a_3$,

ii) $|a_0 + a_2| < a_1 + a_3$,

iii) $|a_0 a_2 - a_1 a_3| < a_3^2 - a_0^2$

olmasıdır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.1.2}$$

matrisi verilsin. Eğer A matrisin tüm özdeğerleri kompleks düzlemin basit bağlantılı, açık bir $\mathcal{D}$ bölgesinde ise bu matrise **$\mathcal{D}$-kararlı matris** denir. $\mathcal{D}$ bölgesi, sol açık yarı düzlem ise bu matrise **Hurwitz kararlı matris**, açık birim disk ise **Schur kararlı matris** denir.

2×2 ve 3×3 gerçel matrislerin Schur kararlılık kriterleri aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 1.1.3 ([4])**.** 2×2 *gerçel matrisin Schur kararlılığı için gerek ve yeter koşul*

i) $|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| < 1,$

ii) $|a_{11} + a_{22}| < 1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$

olmasıdır.

Teorem 1.1.4 ([4])**.** 3×3 *gerçel matrisin Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul*

i) $|\delta| < 1,$

ii) $|\tau + \delta| < 1 + \mu,$

iii) $|\tau\delta - \mu| < 1 - \delta^2$

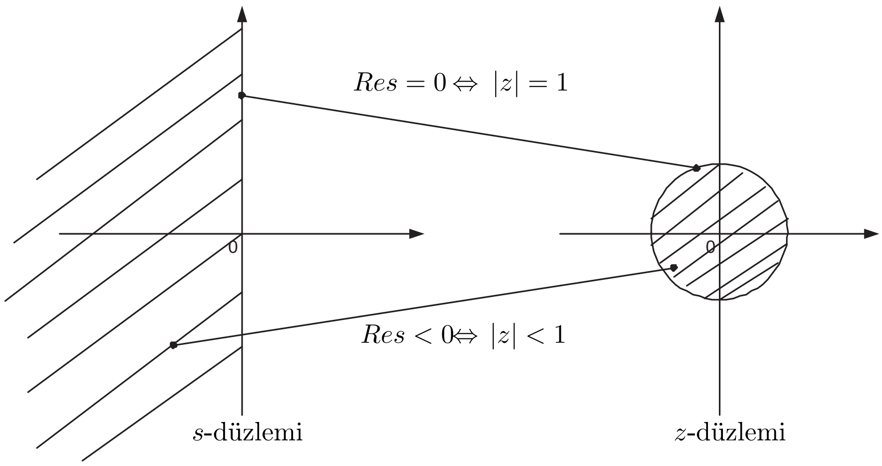
olmasıdır. Burada δ : *A matrisinin determinantı,* τ : *A matrisinin izi,* μ *ise A matrisinin* 2×2 *başlıca minörleri toplamıdır.*

Eğer (1.1.1) polinomunda tüm a_i katsayıları gerçel ise, bu polinomun Hurwitz kararlı olması için gerekli koşul, a_i katsayılarının aynı işaretli olmasıdır (bu koşulun yeter olmadığı bilinmektedir). Kompleks katsayılı (1.1.1) polinomunun Schur kararlılığı için ise gerekli koşul olarak $|a_0| < |a_n|$ eşitsizliği verilebilir.

Bilindiği gibi kompleks düzlemde

$$z = \frac{s+1}{s-1}$$

bilineer dönüşümü açık birim diskten sol açık yarı düzleme bire-bir, sürekli dönüşümdür (Şekil 1.1). Bu dönüşümün tersi yine kendisidir ve sol açık yarı düzlemden birim diske bire-bir, sürekli dönüşüm olur. Buna göre (1.1.1) polinomunun Hurwitz kararlılığı ile Schur kararlılığı arasında Teorem 1.1.5 geçerlidir.



Şekil 1.1: Bilineer dönüşüm

Teorem 1.1.5 ([5])**.** (1.1.1) *polinomu Schur kararlı ise,*

$$\tilde{p}(s) := (s-1)^n p(\frac{s+1}{s-1})$$

polinomu Hurwitz kararlıdır. Tersine, eğer n. dereceden bir $\tilde{p}(s)$ *polinomu Hurwitz kararlı ise*

$$p(z) := (z-1)^n \tilde{p}(\frac{z+1}{z-1})$$

polinomu Schur kararlı olur.

$$\begin{aligned} p(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \\ \tilde{p}(s) &= b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \end{aligned}$$

polinomları için; **a**, **b** katsayılar vektörleri ve P_n matrisi

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ . \\ . \\ . \\ a_0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ . \\ . \\ . \\ b_0 \end{bmatrix}, \ P_n = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{0n} \\ P_{10} & P_{20} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{1n} \\ . & & & . & & . \\ . & & & . & & . \\ P_{n0} & P_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{nn} \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

olmak üzere,

$$P_n \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

dir. P_n matrisi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) P_n matrisinin birinci satır elemanları 1 lerden oluşur.

ii) P_n matrisinin son satır elemanları 1 ile başlayıp -1 ile alterne eder.

iii) P_n matrisinin birinci sütun elemanları $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, $k = 0, 1, ..., n$ binom katsayıları olmak üzere, matriste yukarıdan aşağıya doğru sıralanır.

iv) P_n matrisinin son sütun elemanları $(-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, $k = 0, 1, ..., n$ binom katsayıları olmak üzere, matriste yukarıdan aşağıya doğru yazılır.

v) P_n matrisinin herhangi $(i+1)$. satır ve $(j+1)$. sütun elemanı, $P_{ij} = P_{i(j-1)} - P_{(i-1)(j-1)} - P_{(i-1)j}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$ dir.

vi) I birim matris olmak üzere, $P_n^2 = 2^n I$ dır.

vii) $P_n^{-1} = 2^{-n} P_n$ dir.

Örneğin, $n = 5$ için

$$P_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 \\ 10 & 2 & -2 & -2 & 2 & 10 \\ 10 & -2 & -2 & 2 & 2 & -10 \\ 5 & -3 & 1 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

olur.

$$p(z) = 135z^5 + 32.21z^4 - 17.8z^3 - 14.22z^2 - 14.2z + 30.01$$

polinomunun kökleri,

$$\begin{aligned} z_{1,2} &\simeq 0.5826156642 \pm 0.3294378056i, \\ z_{3,4} &\simeq -0.2776278952 \pm 0.7125362196i, \\ z_5 &\simeq -0.8485681305 \end{aligned}$$

kompleks düzlemde birim diskin içinde olduğu için $p(z)$ polinomu Schur kararlı bir polinomdur. $p(z)$ polinomu için $\mathbf{a}$ katsayılar vektörü,

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 135 \\ 32.21 \\ -17.8 \\ -14.22 \\ -14.2 \\ 30.01 \end{bmatrix}$$

dır. $p(z)$ polinomunun bilineer dönüşüm altındaki görüntüsünü bulmak için $\mathbf{b}$ katsayılar vektörü

$$\mathbf{b} = P_5\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 \\ 10 & 2 & -2 & -2 & 2 & 10 \\ 10 & -2 & -2 & 2 & 2 & -10 \\ 5 & -3 & 1 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 135 \\ 32.21 \\ -17.8 \\ -14.22 \\ -14.2 \\ 30.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 151 \\ 660.6 \\ 1750.16 \\ 964.24 \\ 739 \\ 55 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan Hurwitz kararlı

$$\tilde{p}(s) = 151s^5 + 660.6s^4 + 1750.16s^3 + 964.24s^2 + 739s + 55$$

polinomu elde edilir. Gerçekten de $\tilde{p}(s)$ polinomunun köklerinin

$$\begin{aligned} s_{1,2} &\simeq -1.952436045 \pm 2.330331946i, \\ s_{3,4} &\simeq -0.1940219399 \pm 0.6659089727i, \\ s_5 &\simeq -0.08191846814 \end{aligned}$$

kompleks düzlemde sol açık yarı düzlemin içinde olduğu görülmektedir.

Bir çok pratik problemde karşılaşılan (1.1.1) polinomunda ve (1.1.2) matrisinde katsayılar ve elemanlar kesin olarak bilinmemekte, ancak bunların değişebileceği sınırlar bilinmektedir. Bu durumda (1.1.1) polinomu yerine
$\mathbf{q} \in Q \subset \mathbb{R}^l$ belirsizlik parametresi içeren

$$p(z, \mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q})z + a_2(\mathbf{q})z^2 + \cdots + a_n(\mathbf{q})z^n \qquad (1.1.3)$$

polinomu ve

$$\mathcal{P} = \{p(z, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q \subset \mathbb{R}^l\} \qquad (1.1.4)$$

ailesi ortaya çıkar.

(1.1.3) polinomunda katsayı fonksiyonlarının $\mathbf{q}$ ya bağımlılığı ve Q kümesinin özelliklerine göre, çeşitli aileler ortaya çıkmaktadır. Eğer Q kümesi bir **kutu** (box), yani

$$Q = \{(q_1, q_2, \ldots, q_l) \in \mathbb{R}^l : q_j^- \leq q_j \leq q_j^+,\ j = 1, 2, \ldots, l\} \qquad (1.1.5)$$

ve

- $a_i(\mathbf{q}) = a_i(q_1, q_2, \ldots, q_l) = q_j$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$ ise, (1.1.3) ailesine **aralık polinomlar ailesi**,

- $a_i(\mathbf{q})$ fonksiyonları $\mathbf{q}$ ya göre afin fonksiyonlar ise, bu aileye **afin polinomlar ailesi**,

- $a_i(\mathbf{q})$ fonksiyonları $\mathbf{q}$ ya göre multilineer yani her bir değişkene göre afin ise, bu aileye **multilineer polinomlar ailesi**,

denir.

(1.1.2) matrisinde a_{ij} elemanları yerine $a_{ij}(\mathbf{q})$ yazılırsa, $\mathbf{q}$ parametresine bağlı

$$A(\mathbf{q}) = (a_{ij}(\mathbf{q}))_{i,j=1,2,\ldots,n} \tag{1.1.6}$$

matrisi ve

$$\mathcal{A} = \{A(\mathbf{q}) : \ \mathbf{q} \in Q\} \tag{1.1.7}$$

ailesi ortaya çıkar.

(1.1.7) matris ailesinde en çok araştırılan **aralık matrisler** ailesidir. Bu ailede matrisin her elemanı bir aralıkta değişmektedir.

Bu tezde, (1.1.4) polinomlar ailesinin ve (1.1.7) matrisler ailesinin Schur kararlılığı problemleri araştırılmaktadır.

Eğer ailedeki her polinom (matris) kararlı ise, bu aileye **gürbüz (robust) kararlı aile** denir. Eğer ailede en az bir polinom (matris) kararlı değil ise, bu aileye **kararlı olmayan (kararsız) aile** denir. Gürbüz kararlılık için Sıfırı İçermeme Prensibi (Zero Exclusion Principle) çok önemlidir. Bu prensip, invaryant dereceli (derecesi değişmez kalan) ve katsayıları sürekli değişen polinomların köklerinin parametreye göre sürekli değiştiğini ifade eden Teorem 1.1.6 ya dayalıdır.

Teorem 1.1.6 ([6]). *(1.1.4) polinomlar ailesi invaryant dereceli ve $a_i(\mathbf{q})$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$ katsayı fonksiyonları $\mathbf{q} \in Q$ ya göre sürekli olsun. Bu durumda $p(z, \mathbf{q})$ polinomunun kökleri de $\mathbf{q} \in Q$ ya göre sürekli değişir. Yani öyle*

$$z_i(\cdot) : Q \to \mathbb{C}, \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sürekli fonksiyonları vardır ki $z_1(\mathbf{q}), z_2(\mathbf{q}), \ldots, z_n(\mathbf{q})$ sayıları $p(z, \mathbf{q})$ polinomunun kökleridir.

Gürbüz Schur kararlılık için sıfırı içermeme prensibi şöyledir:

Teorem 1.1.7 (Sıfırı İçermeme Prensibi, [1], [2])**.** (1.1.4) *polinomlar ailesi invaryant dereceli, Q kutu, $a_i(\mathbf{q})$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$ katsayı fonksiyonları $\mathbf{q} \in Q$ ya göre sürekli ve bu aileye ait en az bir $p(z, \mathbf{q}^0)$ polinomu Schur kararlı olsun.* (1.1.4) *polinomlar ailesinin gürbüz Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul her $z \in \partial\mathcal{D}$ için*

$$0 \notin p(z, Q) \tag{1.1.8}$$

olmasıdır. Burada $\mathcal{P}(z, Q) = \{p(z, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$, $\partial\mathcal{D}$-birim diskin sınırıdır.

Teorem 1.1.8 ([7])**.** *$a_i(\mathbf{q})$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$ fonksiyonları sürekli ve $p(z, \mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q})z + a_2(\mathbf{q})z^2 + \cdots + a_n(\mathbf{q})z^n$ olmak üzere,*

$$\mathcal{P}(z, Q) = \{p(z, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$$

polinomlar ailesinin Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul

1. *En az bir $\mathbf{q_0} \in Q$ için $p(z, \mathbf{q_0})$ polinomu Schur kararlı,*

2. *Her $\mathbf{q} \in Q$ için $p(1, \mathbf{q}) \neq 0$,*

3. *Her $\mathbf{q} \in Q$ için $p(-1, \mathbf{q}) \neq 0$,*

4. *Her $\mathbf{q} \in Q$ için $\det \mathbf{S}(\mathbf{q}) \neq 0$*

olmasıdır. Burada $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ matrisi, $p(z, \mathbf{q})$ polinomunun katsayılarından oluşan $(n-1) \times (n-1)$ boyutlu bir matristir:

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} a_n(\mathbf{q}) & a_{n-1}(\mathbf{q}) & a_{n-2}(\mathbf{q}) & \cdots & a_3(\mathbf{q}) & a_2(\mathbf{q}) - a_0(\mathbf{q}) \\ 0 & a_n(\mathbf{q}) & a_{n-1}(\mathbf{q}) & \cdots & a_4(\mathbf{q}) - a_0(\mathbf{q}) & a_3(\mathbf{q}) - a_1(\mathbf{q}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -a_0(\mathbf{q}) & -a_1(\mathbf{q}) & \cdots & a_n(\mathbf{q}) - a_{n-4}(\mathbf{q}) & a_{n-1}(\mathbf{q}) - a_{n-3}(\mathbf{q}) \\ -a_0(\mathbf{q}) & -a_1(\mathbf{q}) & -a_2(\mathbf{q}) & \cdots & -a_{n-3}(\mathbf{q}) & a_n(\mathbf{q}) - a_{n-2}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}$$

Teorem 1.1.9 ([8])**.** *Üreteç noktaları $\{p_i(z)\}_{i=1}^{l}$ Schur kararlı polinomlar olan $\mathcal{P} = conv\{p_1(z), p_2(z), \ldots, p_l(z)\}$ monik polinomlar politopunun gürbüz Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul her $i, j \in \{1, 2, \ldots, l\}$ için $(-\infty, 0)$ aralığında $\mathbf{S}(p_i)\mathbf{S}^{-1}(p_j)$ matrisinin gerçel özdeğerinin olmamasıdır.*

$n \times n$ boyutlu gerçel matrisler kümesi $\mathbb{R}^{n\times n}$ ile, $n \times n$ boyutlu kompleks matrisler kümesi $\mathbb{C}^{n\times n}$ ile gösterilmektedir.

Eğer $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisinin eşlenik transpozu A^* kendisine eşit ise, bu matrise **Hermityen** (Hermitian) **matris** denir. Gerçel Hermityen matris simetrik matristir.

Eğer A Hermityen matrisi her $z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$ kompleks vektörü için

$$z^*Az > 0$$

koşulunu sağlıyorsa, bu matrise **pozitif belirli matris** denir ve $A > 0$ ile gösterilir. Benzer olarak **negatif belirli matris** demekle de $-A > 0$ anlaşılmaktadır ve $A < 0$ ile gösterilir. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olduğu durumda A matrisinin pozitif belirli olması, A nın simetrik ve her $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ için

$$x^TAx > 0$$

koşulunun sağlanmasıdır. Burada T sembolü transpozu göstermektedir.

Bir A matrisinin (gerçel veya kompleks) Hurwitz kararlılığı Lyapunov Teoremi ile, Schur kararlılığı ise Stein Teoremi ile ifade edilebilir.

Teorem 1.1.10 (Lyapunov, [9])**.**

1) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *matrisi verilsin.* A *matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul*

$$A^*P + PA < 0 \tag{1.1.9}$$

olacak şekilde P *pozitif belirli matrisinin bulunmasıdır.*

2) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *matrisi verilsin.* A *matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul*

$$A^TP + PA < 0 \tag{1.1.10}$$

olacak şekilde P *gerçel pozitif belirli matrisinin bulunmasıdır.*

(1.1.9) ve (1.1.10) eşitsizliklerine **Lyapunov eşitsizlikleri** denir.

Eğer $Q > 0$ için,

$$A^*P + PA = -Q \text{ ve } A^TP + PA = -Q \tag{1.1.11}$$

olacak şekilde $P > 0$ varsa, (1.1.11) eşitliklerine **Lyapunov denklemleri** denir.

Teorem 1.1.11 (Stein, [10])**.**

1) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi verilsin. A matrisinin Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$A^*PA - P < 0 \tag{1.1.12}$$

olacak şekilde P pozitif belirli matrisinin bulunmasıdır.

2) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi verilsin. A matrisinin Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$A^TPA - P < 0 \tag{1.1.13}$$

olacak şekilde P gerçel pozitif belirli matrisinin bulunmasıdır.

(1.1.12) ve (1.1.13) eşitsizliklerine **Stein eşitsizlikleri** denir.

Eğer $Q > 0$ için,

$$A^*PA - P = -Q \text{ ve } A^TPA - P = -Q \tag{1.1.14}$$

olacak şekilde $P > 0$ varsa, (1.1.14) eşitliklerine **Stein denklemleri** denir.

Polinomlarda olduğu gibi matrislerde de Hurwitz kararlılık Schur kararlılığa ve tersine dönüştürülebilir. Matrisler arasındaki bu dönüşüme **Cayley dönüşümü** denir.

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi verilsin ve I birim matris olsun. Bu durumda [11] de gösterildiği gibi,

A matrisi Hurwitz kararlı ise $(I - A)^{-1}(I + A)$ matrisi Schur kararlıdır.

A matrisi Schur kararlı ise $(A + I)^{-1}(A - I)$ matrisi Hurwitz kararlıdır.

Yukarıdaki (1.1.10) Lyapunov ve (1.1.13) Stein eşitsizliklerinde pozitif belirli olarak alınan P matrisi pozitif diagonal ise bu kararlılığa özel bir isim verilir.

Eğer $N > 0$ olmak üzere,

$$A^T D + DA = -N \tag{1.1.15}$$

olacak biçimde D pozitif diagonal matrisi varsa A ya **Hurwitz diagonal kararlı matris** denir. Benzer yolla Schur diagonal kararlılık şöyle tanımlanır.

Eğer $N > 0$ olmak üzere,

$$A^T DA - D = -N \tag{1.1.16}$$

olacak biçimde D pozitif diagonal matrisi varsa A ya **Schur diagonal kararlı matris** denir.

Bir gerçel matrisin diagonal kararlılığının yanı sıra D-kararlılık kavramı da tanımlanabilir.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi verilsin. Eğer her pozitif diagonal D matrisi için AD matrisi Hurwitz kararlı ise A ya **Hurwitz D-kararlı matris** denir.

Eğer köşegen elemanlarının mutlak değeri 1 den küçük veya eşit her D diagonal matrisi için AD matrisi Schur kararlı ise A ya **Schur D-kararlı matris** denir.

Bu tezde polinomlar ve matrisler ailesinin Schur kararlılığı problemleri incelenmiştir.

Birinci bölümde, polinomlar ve matrislerin kararlılığı teorisinden gerekli tanımlar ve bazı bilinen sonuçlar verilmiştir.

İkinci bölümde ise multilineer polinomlar ailesinin, yani katsayı fonksiyonları bir kutu üzerinde tanımlı multilineer fonksiyonlar olan polinomlar ailesinin, Schur kararlılığı incelenmiştir. Sıfırı İçermeme Prensibine ve multilineer fonksiyonların ekstremal özelliklerine dayanarak ailenin kararlılığı için gerek ve yeter koşul elde edilmiştir. Bu sonuçlar ve doğrusal programlama kullanılarak ailenin kararlılığını test etmek için yeni bir algoritma verilmiştir.

Üçüncü bölümde Schur diagonal kararlı matrisler, yani Stein eşitsizliğinin pozitif diagonal çözümü var olan matrisler ele alınmıştır. Önce bu matrislerin bazı yeni özellikleri verilmiş, Schur kararlılıktan farklı olarak Stein denkleminin sağ tarafında birim matris alınamayacağı gösterilmiştir. Sonra, sonlu tane 2×2 matris için Stein denkleminin ortak diagonal çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşul elde edilmiştir. $\mathscr{Z}$-matrislerin özellikleri kullanılarak 3×3 matrisin diagonal kararlılığı için bir yeter koşul elde edilmiştir. Bölümün sonunda ise matris segmentinin diagonal kararlılığıyla ilgili bir önerme kanıtlanmıştır.

Dördüncü bölümde, kararlı polinomlar ve matrisler ailesinin büzülebilirliği araştırılmıştır. Literatürde bu kümelerin basit bağlantılılık özellikleri araştırılmış, daha kuvvetli özellik olan büzülebilirliğe hiç değinilmemiştir. Önce tüm kökleri kompleks düzlemin basit bağlantılı, açık bir alt kümesinde olan gerçel ve kompleks katsayılı polinomlar ailesinin tek noktaya büzülemeyeceği ancak iki noktaya büzülebileceği ispatlanmıştır. Kararlı monik polinomlar ailesinin ise tek noktaya büzülebilirliği gösterilmiştir. Bu sonuçlardan Hurwitz ve Schur kararlılık için uygun sonuçlar elde edilmiştir.

Bu bölümde kararlı matrisler ailesinin büzülebilirliği de araştırılmıştır. Önce, özdeğerleri açık konveks bir kümede olan tüm kompleks matrisler kümesinin tek noktaya büzülebilirliği gösterilmiştir. Sonra, Hurwitz ve Schur diagonal kararlı matrisler ailesinin tek noktaya büzülebilirliği gösterilmiştir. Bölümün sonunda Schur D-kararlı matrisler ailesinin tek noktaya büzülebilirliği gösterilmiş olup, Hurwitz D-kararlı matrisler için böyle bir özelliğin varlığı ise ancak 2×2 ve 3×3 matrisler için ispatlanmıştır.

Bilindiği gibi polinomların Hurwitz kararlılığı için konveks yön kavramı çok önemlidir. Beşinci bölümde, polinomların Schur kararlılığı ve matrislerin kararlığı için konveks yön kavramı ele alınmıştır. Önce, düşük dereceden polinomların Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşullar elde edilmiş olup, Schur konveks yön kavramı yardımıyla aralık polinomlar ailesinin kararlılığı için bilinen bir teoremin yeni kanıtı verilmiştir. Sonra aralık polinomlar ailesinin kararlılığı için bazı bilinen önemli ve gerekli koşullar verilmiş olup, bölümün sonunda 2×2 ve 3×3 aralık matrisler ailesinin Schur kararlılığı incelenmiştir.

Altıncı bölümde, 2×2 gerçel matrislerin Schur D-kararlılığı için bilinen sonucun daha kısa yolla ispatı verilmiştir. Sonra Schur kararlı matrisin yörüngesinin bir özelliği verilmiştir. Son olarak kompleks matrislerin konveks kompakt kümesinin anti Schur kararlılığı için Minimaks Teoreminden elde edilen gerek ve yeter bir koşul verilmiştir.

2 MULTİLİNEER POLİNOMLAR AİLESİNİN SCHUR KARARLILIĞI

Bu bölümde, multilineer polinomlar ailesinin Schur kararlılığı için gerek ve yeter koşullar verilmiş ve bu sonuç yardımı ile kararlılığı test etmek için yeni bir algoritma elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, multilineer polinomlar ailesinin Hurwitz kararlılığı problemine de uygulanabilir.

2.1 Multilineer Polinomlar Ailesinin Schur Kararlılığı

$$p(z,\mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q})z + \cdots + a_n(\mathbf{q})z^n \tag{2.1.1}$$

olmak üzere,

$$\mathcal{P} = \{p(z,\mathbf{q}) : \ \mathbf{q} \in Q \subset \mathbb{R}^l\} \tag{2.1.2}$$

polinomlar ailesi verilsin. Eğer tüm $a_i(\mathbf{q})$ fonksiyonları multilineer ise bu aileye multilineer aile denir. Önce bir kutu üzerinde tanımlı olan multilineer fonksiyonların bazı bilinen özellikleri verilecektir.

Teorem 2.1.1 (Kutu Üzerinde Multilineer Fonksiyon, [1]). *$Q \subset \mathbb{R}^l$, uç noktaları $\{\mathbf{q^i}\}$, $\quad i = 1, 2, \ldots, k$ olan bir kutu ve $f(\cdot) : Q \to \mathbb{R}$ multilineer bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f(\cdot)$ fonksiyonu maksimum ve minimum değerini Q kutusunun uç noktalarında alır. Yani,*

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{q}\in Q} f(\mathbf{q}) &= \max_i f(\mathbf{q}^i) \\ \min_{\mathbf{q}\in Q} f(\mathbf{q}) &= \min_i f(\mathbf{q}^i) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

olur.

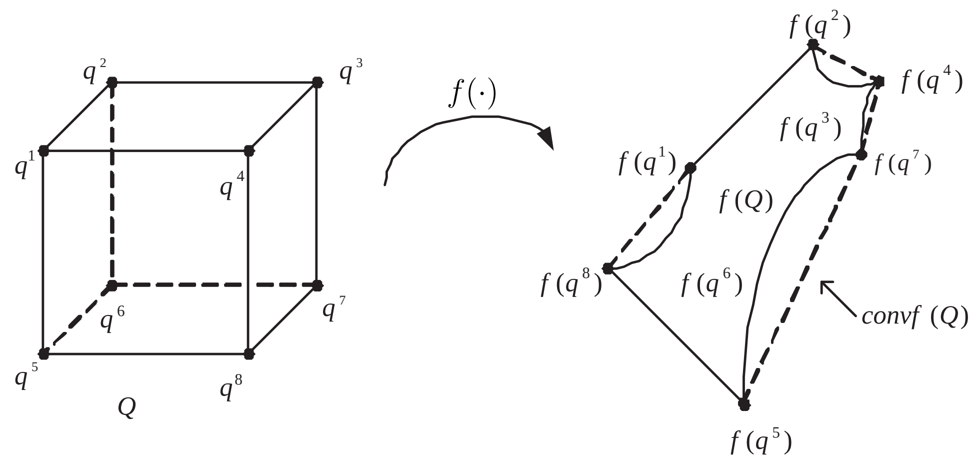
Teorem 2.1.2 (Dönüşüm Teoremi, [12]). *$Q \subset \mathbb{R}^l$, uç noktaları $\{\mathbf{q}^i\}$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ olan bir kutu, $f(\cdot) : Q \to \mathbb{R}^m$ multilineer bir dönüşüm ve*

$$f(Q) = \{f(\mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\} \tag{2.1.4}$$

olsun. Bu durumda

$$conv f(Q) = conv\{f(\mathbf{q}^i)\} \tag{2.1.5}$$

dir.



Şekil 2.1: $m = 2$ için Dönüşüm Teoreminin geometrik yorumu

$\mathbb{R}^3$ teki bir kutunun multilineer dönüşüm altındaki görüntüsü $\mathbb{R}^2$ de konveks olmayabilir. Şekil 2.1 de görüldüğü gibi görüntü kümesi, kutunun uç noktalarının görüntülerinin konveks zarfı içinde bulunmaktadır. Burada eğriler içeriye doğru olup konveks zarfın dışına taşamaz. Bu yüzden Dönüşüm Teoremi multilineer polinomlar ailesinin kararlılığında büyük önem taşımaktadır. Teorem 2.1.2 nin sonucu olarak multilineer polinomlar ailesinin gürbüz $\mathcal{D}$-kararlılığı için yeter koşul olan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.1.3 (Gürbüz $\mathcal{D}$-Kararlılık Kriteri, [1])**.** *$Q \subset \mathbb{R}^l$, uç noktaları $\{\mathbf{q}^i\}$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ olan bir kutu ve $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesi açık ve yol bağlantılı, $\mathcal{P} = \{p(\cdot, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$ invaryant dereceli multilineer polinomlar ailesi ve bu aileye ait en az bir $p(z, \mathbf{q}^0)$ polinomu $\mathcal{D}$-kararlı olsun. Eğer her $z \in \partial\mathcal{D}$ için*

$$0 \notin conv\{p(z, \mathbf{q}^i) : i = 1, 2, \ldots, k\} \tag{2.1.6}$$

ise $\mathcal{P}$ multilineer polinomlar ailesi gürbüz $\mathcal{D}$-kararlıdır.

Teorem 2.1.3 ün ifadesinden de anlaşıldığı üzere, görüntü kümesinin konveks zarfı sıfırı içermiyorsa aile kararlıdır. Eğer konveks zarf sıfırı içeriyorsa ailenin kararlılığı hakkında bir şey söylenemez. Bunun için multilineer polinomlar ailesinin kararlığı ile ilgili gerek ve yeter koşul vermek oldukça önemlidir.

Eğer (2.1.2) ailesi Schur kararlı değil ve ailede en az bir polinom Schur kararlı ise, köklerin sürekliliği teoremine göre, en az bir $\mathbf{q} \in Q$ değeri için kökleri birim diskin sınırında olan bir polinom vardır. Önce bu sınırdaki kökün gerçel olduğu yani $z = 1$ veya $z = -1$ olduğu varsayılsın. Eğer $z = 1$ ailede herhangi bir polinomun kökü ise

$$a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q}) + \cdots + a_n(\mathbf{q}) = 0 \tag{2.1.7}$$

denkleminin Q kutusu üzerinde en az bir kökü vardır. (2.1.7) eşitliğinin solundaki fonksiyon q ya göre multilineer olduğundan onun Q üzerindeki minimum ve maksimumları Teorem 2.1.1 yardımı ile kolayca hesaplanabilir. Bu minimum değerine a, maksimum değerine de b denilsin. O zaman (2.1.7) nin Q üzerinde en az bir kökünün olması için gerek ve yeter koşul $0 \in [a, b]$ olmasıdır.

$z = -1$ durumu da benzer biçimde incelenebilir.

Sınırdaki kök $z = e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]$ ise, $(\theta \neq 0,\ \theta \neq \pi)$

$$\begin{aligned} a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q})z + \cdots + a_n(\mathbf{q})z^n &= (z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta})\cdot \\ &\quad \cdot(b_0 + b_1 z + \cdots + b_{n-2}z^{n-2}) \\ &= (z^2 - \underbrace{2\cos\theta}_{t} z + 1)\cdot \\ &\quad \cdot(b_0 + b_1 z + \cdots + b_{n-2}z^{n-2}) \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

eşitliği yazılabilir.

İki polinomun eşit olması için, aynı dereceli terimlerin katsayılarının eşit olması gerektiğinden

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_0 & = & a_0(\mathbf{q}) \\ b_1 - tb_0 & = & a_1(\mathbf{q}) \\ b_2 - tb_1 + b_0 & = & a_2(\mathbf{q}) \\ b_3 - tb_2 + b_1 & = & a_3(\mathbf{q}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_k - tb_{k-1} + b_{k-2} & = & a_k(\mathbf{q}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-2} - tb_{n-3} + b_{n-4} & = & a_{n-2}(\mathbf{q}) \\ b_{n-3} - tb_{n-2} & = & a_{n-1}(\mathbf{q}) \\ b_{n-2} & = & a_n(\mathbf{q}) \end{array}\right. \tag{2.1.9}$$

bulunur.

$$b_0 = a_0(\mathbf{q}) \text{ ve } b_{n-2} = a_n(\mathbf{q})$$

eşitlikleri yardımı ile $n-1$ bilinmeyenli $n+1$ denklemden oluşan (2.1.9) denklem sistemi yeniden düzenlenirse,

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{b}, t) = \begin{pmatrix} b_1 - ta_0(\mathbf{q}) - a_1(\mathbf{q}) \\ b_2 - tb_1 + a_0(\mathbf{q}) - a_2(\mathbf{q}) \\ b_3 - tb_2 + b_1 - a_3(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ b_k - tb_{k-1} + b_{k-2} - a_k(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ b_{n-4} - tb_{n-3} + a_n(\mathbf{q}) - a_{n-2}(\mathbf{q}) \\ b_{n-3} - ta_n(\mathbf{q}) - a_{n-1}(\mathbf{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.10}$$

$n-3$ bilinmeyenli $n-1$ denklemden oluşan (2.1.10) denklem sistemi elde edilir. Burada da görüldüğü gibi f, görüntü kümesinde sıfır olan vektör değerli multilineer bir fonksiyondur.

Buradan multilineer polinomlar ailesinin kararsız olması için gerek ve yeter koşul olan aşağıdaki Teorem verilebilir.

Teorem 2.1.4. *$Q \subset \mathbb{R}^l$ bir kutu,* (2.1.2) *invaryant dereceli multilineer polinomlar ailesi ve ailede en az bir $p(z, \mathbf{q}^0)$ polinomu Schur kararlı olsun. Bu ailede $z = 1$ veya $z = -1$ köküne sahip bir polinom bulunmasın. Bu durumda* (2.1.2) *ailesinin Schur kararlı olmaması için gerek ve yeter koşul bir $\mathbf{q} \in Q$, $\theta \in [0, 2\pi]$ ve $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n-3$ için* (2.1.10) *un sağlanmasıdır.*

Kanıt. $\Rightarrow$). $p(z, \mathbf{q^0})$ polinomu Schur kararlı ve (2.1.2) multilineer polinomlar ailesi Schur kararlı olmasın. Bu durumda polinomun köklerinin $\mathbf{q}$ ya göre sürekliliği teoreminden bir $\mathbf{q}^* \in Q$ için kökleri $z = e^{\pm i\theta}$ olan bir $p(z, \mathbf{q}^*)$ polinomu vardır.

$$\begin{aligned} p(z, \mathbf{q}^*) &= a_0(\mathbf{q}^*) + a_1(\mathbf{q}^*)z + \cdots + a_n(\mathbf{q}^*)z^n \\ &= (z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta})(b_0 + b_1 z + \cdots + b_{n-2}z^{n-2}) \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olacağından $\mathbf{q}^* \in Q$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n-3$ için (2.1.10) sağlanır.

$\Leftarrow$). Bir $\mathbf{q} \in Q$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n-3$ için (2.1.10) sağlansın. Bu durumda, ailede kökleri birim diskin sınırında olan bir polinom var demektir. Buradan (2.1.2) multilineer polinomlar ailesi Schur kararlı değildir. □

(2.1.10) da görüldüğü gibi b_i, $(i = 1, 2, \cdots, n-3)$ katsayıları $(-\infty, +\infty)$ aralığında sınırsız değer alabilir. b_i, ler (2.1.9) a göre q nun multilineer fonksiyonları olduğundan alacakları değerler sınırlandırılabilir. Teorem 2.1.1 e göre, multilineer fonksiyon maksimum ve minimum değerini Q kutusunun uç noktalarında alacağından b_i yi içeren aralıklar bulunabilir. Bu aralıkların en dar olanları alınarak, l boyutlu Q kutusundan, $n-3$ tane b_i den ve bir $t \in [-2, 2]$ den (2.1.11) deki gibi yeni $l + n - 2$ boyutlu bir $\widetilde{Q}$ kutusu oluşturulur.

$$\begin{aligned} \widetilde{Q} &= [q_1^-, q_1^+] \times [q_2^-, q_2^+] \times \cdots \times [q_l^-, q_l^+] \times [-2, 2] \times \\ &\quad \times [b_1^-, b_1^+] \times [b_2^-, b_2^+] \times \cdots \times [b_{n-3}^-, b_{n-3}^+] \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Bu durumda $f(\cdot) : \widetilde{Q} \to \mathbb{R}^{n-1}$ vektör değerli multilineer bir fonksiyon olur. Buradan multilineer polinomlar ailesinin Schur kararsız olması için gerek ve yeter koşul olan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.1.5. *$Q \subset \mathbb{R}^l$ bir kutu,* (2.1.2) *invaryant dereceli multilineer polinomlar ailesi ve ailede en az bir $p(z, \mathbf{q}^0)$ polinomu Schur kararlı olsun ve ailede $z = 1$ veya $z = -1$ köküne sahip bir polinom bulunmasın.* (2.1.2) *ailesinin Schur kararlı olmaması için gerek ve yeter koşul $0 \in f(\widetilde{Q})$ olmasıdır.*

Kanıt. $\Rightarrow$). $p(z, \mathbf{q^0})$ polinomu Schur kararlı olsun ve (2.1.2) multilineer polinomlar ailesi Schur kararlı olmasın. Bu durumda, Teorem 2.1.4 den bir $\mathbf{q} \in Q$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n-3$ için (2.1.10) denklem sistemi sağlanır. Diğer taraftan b_i parametreleri (2.1.10) dan dolayı $b_i \in [b_i^-, b_i^+]$ koşulunu sağladığı için $0 \in f(\tilde{Q})$ dır.

$\Leftarrow$). Teorem 2.1.4 den açıktır. □

Böylece multilineer polinomlar ailesinin Schur kararlılığının araştırılması problemi $\widetilde{Q}$ kutusunun f altındaki görüntüsünün sıfırı içerip içermemesine dönüşmüştür. Bir kutunun multilineer dönüşüm altındaki görüntüsünü bulmak kolay değildir. Ancak Teorem 2.1.2 ye göre bu görüntünün konveks zarfı kolay bulunmaktadır. Bu konveks zarf kutunun uç noktalarının görüntülerinin konveks zarfıdır. Bu konveks zarfın sıfırı içerip-içermediği doğrusal programlama yöntemiyle belirlenebilir. Bu yöntem [13] de verilmiştir. Aşağıda bu yöntemden kısaca bahsedilmektedir.

$\mathbf{b_i} \in \mathbb{R}^m$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ vektörleri ve

$$P = conv\{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_k}\} \tag{2.1.12}$$

politopu verilsin.

$$B = [\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, ..., \mathbf{b_k}] \tag{2.1.13}$$

matrisi tanımlansın. P kümesinin sıfırı içerip içermediği aşağıdaki teorem yardımı ile söylenebilir.

Teorem 2.1.6 ([13]). *P politopunun sıfırı içermemesi için gerek ve yeter koşul*

$\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)^T$ *olmak üzere,*

$$\begin{aligned} B\Lambda &= 0 \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k &\rightarrow \max \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

doğrusal programlama probleminde optimal değerin sıfır olmasıdır.

Eğer Q kutusunun konveks zarfı sıfırı içeriyorsa o zaman bu kutu daha küçük kutulara bölünür ve her yeni konveks zarf için Teorem 2.1.6 uygulanır. Eğer yeni konveks zarflar sıfırı içermiyorsa aile kararlıdır. Eğer halen sıfırı içeren konveks zarflar varsa bunlar yeniden bölünür ve böylece devam edilir. Eğer aile kararlıysa belli bir adımda hiç bir konveks zarf sıfırı içermez. Eğer algoritma sürekli döngüye giriyorsa, bu ailenin kararsız olması anlamına gelir. Döngüye neden olan $\mathbf{q} \in Q$ değeri yaklaşık olarak bulunabilir.

Bilinenlerden yararlanarak ve elde edilen sonuçlar kullanılarak multilineer polinomlar ailesinin kararlılığını test etmek için bir algoritma verilebilir.

2.2 Algoritma

Algoritma 2.2.1. (2.1.2) *multilineer polinomlar ailesi verilsin.*

1. *İlk önce bu ailede $z = 1$ veya $z = -1$ köküne sahip polinomun olup olmadığı belirlenir. Eğer öyle bir polinom varsa, aile kararsızdır. Ailede $z = 1$ veya $z = -1$ köküne sahip polinom yok ise, 2. adıma geçilir.*

2. $Q = \{(q_1, q_2, \dots, q_l) \in \mathbb{R}^l : \; q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, \; i = 1, 2, \dots, l\}$ *kutusu ve $t \in [-2, 2]$ için (2.1.10) eşitlikleri yardımı ile en dar $[b_i^-, b_i^+]$, $(i = 1, 2, \dots, n-3)$ aralıkları hesaplanarak yeni $\widetilde{Q} = Q \times [-2, 2] \times [b_i^-, b_i^+]$ kutusu oluşturulur.*

3. *$\widetilde{Q}$ kutusunun uç noktalarından oluşan küme $\mathcal{E} = \{\widetilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{1}}, \widetilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{2}}, \dots, \widetilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{k}}\}$ ile gösterilirse, (2.1.10) dönüşümü ile j. sütunu $\mathbf{b_j} = f(\widetilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{j}})$, $(j = 1, 2, \dots, k)$ vektörü olan B matrisi oluşturulur.*

4. *B matrisi için Teorem 2.1.6 daki doğrusal programlama problemi simpleks yöntemi ile çözülerek* $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k \rightarrow \max$ *optimal değeri hesaplanır.*

5. *Teorem 2.1.6 ya göre, eğer maksimum değer sıfır ise, P politopu sıfırı içermiyor demektir ve* (2.1.2) *multilineer polinomlar ailesi Schur kararlıdır. Eğer maksimum değer sıfır değil ise, P politopu sıfırı içeriyor demektir. Bu durumda* 6. *adıma geçilir.*

6. $k = l + n - 2$ *olmak üzere, k-boyutlu* $\widetilde{Q}$ *kutusunun her bir kenarı ikiye bölünerek elde edilen* 2^k *tane yeni kutu* $\widetilde{Q}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, 2^k)$ *ile gösterilsin. Her bir* $\widetilde{Q}_i$ *kutusuna karşılık gelen P politopu sıfırı içermeyinceye kadar* $3, 4, 5$ *ve* 6. *adımlar tekrarlanır.*

Algoritmanın nasıl uygulandığı örnekler yardımı ile görülebilir.

Örnek 2.2.2. $Q = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 : \ -1.4 \leq q_1 \leq 0.4, \ -0.22 \leq q_2 \leq -0.18\}$ *kutusu ve*

$$\begin{aligned} p(z, \mathbf{q}) \ &= \ z^3 + (0.18 - q_1 - q_2)z^2 + (0.18694 - 0.18q_1 - 0.18q_2 + q_1q_2)z + \\ &\quad +(0.18q_1q_2 - 0.1q_1 - 0.0380712 - 0.055305q_2) \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

multilineer polinomlar ailesi verilsin. (2.2.15) *ailesinin Schur kararlı olup olmadığı Algoritma 2.2.1 yardımı ile incelenirse, Teorem 2.1.1 yardımıyla algoritmanın ilk adımında*

$$\begin{aligned} p(1, \mathbf{q})_{\min} &= 0.95426370, & p(1, \mathbf{q})_{\max} &= 3.75607590, \\ p(-1, \mathbf{q})_{\min} &= -1.19641630, & p(-1, \mathbf{q})_{\max} &= 0.19390370 \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

bulunur. (2.2.16) *değerlerine bakılırsa,* (2.2.15) *ailesinin, bir* $\mathbf{q}$ *değeri için* $z = -1$ *kökü olduğu görülmektedir. Gerçekten* $q_1 = -1.4$ *ve* $q_2 = -0.891064376$ *değerleri için elde edilen polinom Schur kararlı değildir. Buradan* (2.2.15) *multilineer polinomlar ailesi Schur kararlı değildir.*

Örnek 2.2.3. *$Q = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le q_1 \le 2, \ 1 \le q_2 \le 2\}$ olan bir kutu ve*

$$\begin{aligned} p(z, \mathbf{q}) &= (30q_1 + 40q_1q_2 + 65)z^5 + \\ &+(6.1q_1 + 1.01q_2 + 26.1)z^4 + (-22 + 0.2q_1 + 4q_1q_2)z^3 + \\ &+(6q_1q_2 - 0.02q_2 - 10q_1 - 10.2)z^2 + (4q_1q_2 - 0.2q_1 - 18)z + \\ &+(0.01q_2 + 4.9q_1 + q_1q_2 + 24.15) \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

multilineer polinomlar ailesi verilsin. (2.2.17) *ailesinin Schur kararlı olup olmadığı Algoritma 2.2.1 yardımı ile incelenirse, algoritmanın ilk adımından*

$$\begin{aligned} p(1, \mathbf{q})_{\min} &= 152.05, & p(1, \mathbf{q})_{\max} &= 349.05, \\ p(-1, \mathbf{q})_{\min} &= -204.95, & p(-1, \mathbf{q})_{\max} &= -53.95 \end{aligned}$$

değerleri bulunur. Buradan (2.2.17) *ailesinin $z = 1$ veya $z = -1$ köküne sahip polinomu olmadığı görülmektedir. Daha sonra algoritmanın* 2. *adımında, (2.1.10) eşitlikleri yardımı ile en dar $[b_i^-, b_i^+]$, $i = 1, 2$ aralıkları hesaplanır.*

$$\begin{aligned} b_1 &= ta_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q}) \\ b_2 &= tb_1 - a_0(\mathbf{q}) + a_2(\mathbf{q}) \\ b_1 &= tb_2 + a_3(\mathbf{q}) - a_5(\mathbf{q}) \\ b_2 &= ta_5(\mathbf{q}) + a_4(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

$t \in [-2, 2]$ ve $Q \times [-2, 2]$ için birinci eşitlikten b_1 in alacağı değerler $[-82.22, 73.44]$ aralığında ve üçüncü eşitlikten ise $[-727.74, 284.34]$ aralığında bulunur. Buradan

$$[b_1^-, b_1^+] = [-82.22, 73.44] \cap [-727.74, 284.34] = [-82.22, 73.44]$$

aralığı bulunur. Aynı işlemler b_2 için de yapılırsa, ikinci eşitlikten $[-218.57, 125.18]$ ve son eşitlikten $[-529.68, 610.32]$ bulunur.

$$[b_2^-, b_2^+] = [-218.57, 125.18] \cap [-529.68, 610.32] = [-218.57, 125.18]$$

olur. Böylece

$$\tilde{Q} = [1, 2] \times [1, 2] \times [-2, 2] \times [-82.22, 73.44] \times [-218.57, 125.18]$$

kutusu elde edilmiş olur. Burada $f : \tilde{Q} \to \mathbb{R}^4$ bir multilineer dönüşümdür. Algoritmanın 3. *ve* 4. *adımları uygulandıktan sonra* 5. *adımda* $\tilde{Q}$ *kutusu tarafından belirlenen politopun sıfırı içerdiği görülmektedir. Bunun için* 6. *adıma geçilerek* $\tilde{Q}$ *nun her bir kenarı ikiye bölünerek* 32 *tane yeni küçük kutu elde edilir. Her bir yeni kutuya algoritmanın* $3, 4$ *ve* 5. *adımları uygulanarak bu yeni kutular tarafından belirlenen politopların sıfırı içermediği görülür. Buradan (2.2.17) multilineer polinomlar ailesi Schur kararlıdır.*

Örnek 2.2.4. $Q = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq q_1 \leq 2, \ \ 0 \leq q_2 \leq 3\}$ *kutusu ve*

$$
\begin{aligned}
p(z, \mathbf{q}) \ = \ & (6.092q_1q_2 + 13.008 + 11.674q_1 + 5.546q_2)z^4 + \\
& +(-7.74 - 18.248q_1q_2 - 7.94q_2 - 22.774q_1)z^3 + \\
& +(18.518q_1 + 22.192q_1q_2 + 11.376 + 8.788q_2)z^2 + \\
& +(-7.94q_2 - 7.41q_1 + 0.916 - 14.008q_1q_2)z + \\
& +1.546q_2 - 0.008q_1 + 3.972q_1q_2 - 1.56
\end{aligned} \tag{2.2.18}
$$

multilineer polinomlar ailesi verilsin. (2.2.18) *ailesinin Schur kararlı olup olmadığı Algoritma 2.2.1 den yararlanılarak kontrol etmek için ilk olarak,*

$$
\begin{aligned}
p(1, \mathbf{q})_{\min} &= 16, & p(1, \mathbf{q})_{\max} &= 16, \\
p(-1, \mathbf{q})_{\min} &= 29.648, & p(-1, \mathbf{q})_{\max} &= 632.736
\end{aligned}
$$

değerleri hesaplanır. Buradan (2.2.18) *ailesinin* $z = 1$ *veya* $z = -1$ *köküne sahip polinomu olmadığı görülmektedir. Daha sonra algoritmanın* 2. *adımı uygulanarak (2.1.10) eşitlikleri yardımı ile en dar* $[b_1^-, b_1^+]$, *aralığı hesaplanır.*

$$[b_1^-, b_1^+] = [-101.818, \ \ -2.204] \cap [-228.762, \ 27.732] = [-101.818, \ \ -2.204]$$

bulunur. Yeni

$$\tilde{Q} = [0, 1] \times [0, 3] \times [-2, 2] \times [-101.818, -2.204]$$

kutusu oluşturulur. $f : \widetilde{Q} \to \mathbb{R}^3$ *multilineer bir dönüşümdür. Algoritmanın diğer adımları uygulandığında* $\mathbb{R}^3$ *te oluşan politopun sıfırı içerdiği görülür.*

Algoritmanın son adımında $\widetilde{Q}$ kutusunun her bir kenarı ikiye bölünerek elde edilen yeni kutular tarafından belirlenen politopların yine sıfırı içerdiği görülür. Burada algoritmanın $3, 4, 5$ *ve* 6. *adımları defalarca tekrarlanarak her bir kenar neredeyse tek noktaya dönüşür. Bu durumda Algoritma 2.2.1 sürekli döngüye girmiştir. Bu sürekli döngüdeki,*

$$q_1 = 0.0458648839 \text{ ve } q_2 = 0$$

değerleri alınırsa bu değerlere karşılık gelen (2.2.18) *multilineer polinomlar ailesinin kökleri birim diskin sınırında olan en az bir polinomu bulunmuş olur. Yapılan hesaplar nümerik olduğundan ailenin kararsızlığını garanti etmek için köklerin sürekliliği teoremine göre* q_1 *ve* q_2 *değerleri* Q *kutusunda kalacak şekilde biraz değiştirilirse örneğin,* $q_1 = 0.05$ *ve* $q_2 = 0$ *alınırsa ailede kökleri birim diskin dışında olan polinom bulunur. Buradan* (2.2.18) *multilineer polinomlar ailesi Schur kararlı değildir.*

Algoritma 2.2.1 multilineer polinomlar ailesinin Hurwitz kararlılığının incelenmesinde de kullanılabilir.

$$p(s, \mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q})s + \cdots + a_n(\mathbf{q})s^n, \quad \mathbf{q} \in Q \tag{2.2.19}$$

ailesine bilineer dönüşüm uygulanırsa,

$$\begin{aligned} (z-1)^n p\left(\frac{z+1}{z-1}, \mathbf{q}\right) &= (z-1)^n \left(a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q})\left(\frac{z+1}{z-1}\right) + \cdots + \right. \\ &\quad \left. + a_n(\mathbf{q})\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n\right) \\ &= \widetilde{a}_0(\mathbf{q}) + \widetilde{a}_1(\mathbf{q})z + \cdots + \widetilde{a}_n(\mathbf{q})z^n \end{aligned}$$

$$\widetilde{p}(z, \mathbf{q}) = \widetilde{a}_0(\mathbf{q}) + \widetilde{a}_1(\mathbf{q})z + \cdots + \widetilde{a}_n(\mathbf{q})z^n, \quad \mathbf{q} \in Q \tag{2.2.20}$$

(2.2.19) multilineer polinomlar ailesinin Hurwitz kararlı olması, (2.2.20) multilineer polinomlar ailesinin Schur kararlı olmasına denktir. Böylece bu algoritma her iki kararlılık tipi için de uygulanabilir.

3 SCHUR DİAGONAL KARARLILIK

Bu bölümde, Schur diagonal kararlı matrisler tanımlanarak bazı özellikleri ve düşük dereceden matrislerin Schur diagonal kararlılığı araştırılmıştır. Schur kararlılıkta olduğu gibi bir matrisin özdeğerlerine bakarak o matrisin Schur diagonal kararlı olup olmadığı belirlenemez. A ve B gibi iki matris aynı özdeğerlere sahip iken A matrisi Schur diagonal kararlı olduğu halde B matrisi Schur diagonal kararlı olmayabilir [14]. Schur diagonal kararlı matris sınıflarına örnek olarak, Schur kararlı simetrik ve Schur kararlı üçgensel matrisler verilebilir [14].

3.1 Schur Diagonal Kararlı Matrislerin Bazı Özellikleri

Bu bölümde, bir A matrisi Schur diagonal kararlı ise, $|\alpha| < 1$ koşulunu sağlayan her α gerçel sayısı için αA matrisinin de Schur diagonal kararlı olduğu gösterilmiştir. Bir matris Hurwitz diagonal kararlı ise, Cayley dönüşümü altında Schur diagonal kararlı olduğu benzer olarak Schur diagonal kararlı bir matrisin ters Cayley dönüşümü ile Hurwitz diagonal kararlı olduğu gösterilecektir.

Tanım 3.1.1. *Eğer $a_{ii} > 0$ ve $i \neq j$ iken $a_{ij} = 0$ ise $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisine pozitif diagonal matris denir ve $diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ ile gösterilir.*

Tanım 3.1.2. *Eğer $i \neq j$ iken $a_{ij} \leq 0$ ise $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisine $\mathcal{Z}$ sınıfındandır denir.*

Tanım 3.1.3. *$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi verilsin. Eğer $A^T PA - P$ negatif belirli olacak şekilde P pozitif diagonal matrisi varsa A matrisine Schur diagonal kararlı matris denir.*

Tanım 3.1.4. *$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi verilsin. Eğer $A^T P+PA$ negatif belirli olacak şekilde P pozitif diagonal matrisi varsa A matrisine Hurwitz diagonal kararlı matris denir.*

Önerme 3.1.5 ([14]). *Her $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi için en az bir $|\alpha| < 1$ sayısı vardır ki αA matrisi Schur diagonal kararlı olur.*

Önerme 3.1.6. *$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi Schur diagonal kararlı ise, her $|\alpha| < 1$ için αA matrisi de Schur diagonal kararlı olur.*

Kanıt. A matrisi Schur diagonal kararlı olsun. Bu durumda $P > 0$ diagonal matrisi için $A^T PA - P < 0$ olur. Stein eşitsizliği kuadratik formda yazılırsa sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}^n$ için $x^T(A^T PA - P)x < 0$ olur. Buradan

$$x^T(A^T PAx) - x^T Px < 0 \tag{3.1.1}$$

dır. Eğer $\alpha = 0$ ise $\alpha A = 0$ olur ve 0 matrisi de Schur diagonal matristir. Eğer $\alpha \neq 0$ ise,

$$P_* = \frac{1}{\alpha^2} P > 0$$

olsun. Buradan

$$\alpha A^T P_* \alpha A - P_* < 0$$

olduğu görülebilir. Gerçekten,

$$\alpha A^T P_* \alpha A - P_* = \alpha^2 A^T P_* A - P_* = \alpha^2 A^T \frac{1}{\alpha^2} PA - \frac{1}{\alpha^2} P = A^T PA - \frac{1}{\alpha^2} P$$

olur. Sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$x^T(A^T PAx) - x^T \frac{1}{\alpha^2} Px = x^T(A^T PAx) - \frac{1}{\alpha^2} x^T Px < 0 \tag{3.1.2}$$

olur. Çünkü $|\alpha| < 1$ için $\frac{1}{\alpha^2} > 1$ dir. (3.1.1) sağlandığından (3.1.2) de sağlanır. Buradan αA matrisi Schur diagonal kararlı olur. □

Önerme 3.1.7. *A Schur diagonal kararlı matris ise, $(A+I)^{-1}(A-I)$ Hurwitz diagonal kararlı matrisdir.*

Kanıt. A Schur diagonal kararlı matris olsun. $P > 0$ diagonal matrisi için

$$2A^T PA - 2P < 0$$

dır. O zaman

$$2A^TPA - 2P = (A^T + I)P(A - I) + (A^T - I)P(A + I) = -M,\ M > 0$$

$$(A^T + I)P(A - I)(A + I)^{-1} + (A^T - I)P = -M(A + I)^{-1}$$

$$P\underbrace{(A - I)(A + I)^{-1}}_{B} + \underbrace{(A^T + I)^{-1}(A^T - I)}_{B^T}P = -(A^T + I)^{-1}M(A + I)^{-1}$$

$$PB + B^TP = -\underbrace{(A^T + I)^{-1}}_{C}M\underbrace{(A + I)^{-1}}_{C^T}$$

A Schur diagonal kararlı matris olduğundan, $(A + I)^{-1}$ ve $(A^T + I)^{-1}$ vardır. M pozitif belirli olduğundan,

$$CMC^T = CM^{\frac{1}{2}}\underbrace{M^{\frac{1}{2}}C^T}_{K} = K^TK$$

Her $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ için $x^TK^TKx > 0$ olmalıdır.

$$x^TK^TKx = (Kx)^TKx = ||Kx||^2,$$

$$K = M^{\frac{1}{2}}C^T = M^{\frac{1}{2}}((A^T + I)^{-1})^T$$

olduğundan K^{-1} vardır. Her $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ için $||Kx||^2 \neq 0$ olur. O zaman

$$x^TK^TKx = (Kx)^TKx = ||Kx||^2 > 0$$

böylece $CMC^T > 0$ olur. $(CMC^T)^T = CMC^T$ olduğundan CMC^T pozitif belirli matristir.

$$B^TP + PB < 0$$

olur ve

$$(A - I)(A + I)^{-1} = (A + I)^{-1}(A - I)$$

olduğu için

$$[(A + I)^{-1}(A - I)]^TP + P(A + I)^{-1}(A - I) < 0$$

dır. Buradan $(A + I)^{-1}(A - I)$ matrisi Hurwitz diagonal kararlı olur. □

Önerme 3.1.8. *A Hurwitz diagonal kararlı matris ise, $(I-A)^{-1}(I+A)$ Schur diagonal kararlı matrisdir.*

Kanıt. A matrisi Hurwitz diagonal kararlı olsun. $P>0$ diagonal matrisi için

$$2A^TP+2PA<0$$

$$(I+A^T)P(I+A)-(I-A^T)P(I-A)=-N,\ N>0$$

$$\underbrace{(I-A^T)^{-1}(I+A^T)}_{B^T}P\underbrace{(I+A)(I-A)^{-1}}_{B}-P=-\underbrace{(I-A^T)^{-1}}_{C^T}N\underbrace{(I-A)^{-1}}_{C}$$

dır. A Hurwitz diagonal kararlı matris olduğundan, $(I-A)^{-1}$ ve $(I-A^T)^{-1}$ vardır. N pozitif belirli matris olduğundan,

$$C^TNC=C^T(N^{\frac{1}{2}})^TN^{\frac{1}{2}}C=(\underbrace{N^{\frac{1}{2}}C}_{K})^TN^{\frac{1}{2}}C=K^TK$$

Her $x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0$ için $x^TK^TKx>0$ olduğu gösterilmelidir.

$$x^TK^TKx=(Kx)^TKx=||Kx||^2,$$

$$K=N^{\frac{1}{2}}C^T=N^{\frac{1}{2}}((I-A)^{-1})^T$$

olduğu için K^{-1} vardır. Her $x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0$ için $||Kx||^2\neq 0$ olur. O zaman

$$x^TK^TKx=(Kx)^TKx=||Kx||^2>0$$

buradan $C^TNC>0$ olur. $(C^TNC)^T=C^TNC$ olduğundan C^TNC pozitif belirli matristir.

$$B^TPB-P<0$$

olur. Ayrıca

$$(I-A)^{-1}(I+A)=(I+A)(I-A)^{-1}$$

olduğundan

$$[(I-A)^{-1}(I+A)]^TP(I-A)^{-1}(I+A)-P<0$$

yani $(I-A)^{-1}(I+A)$ matrisi Schur diagonal kararlı olur. □

Bir matris Schur diagonal kararlı ise, herhangi Q pozitif belirli matrisine karşılık Stein denklemini sağlayan bir tek D pozitif diagonal matrisi vardır. Ancak Schur diagonal kararlı matris için Schur kararlılıkta olduğu gibi [9] I birim matrise karşılık pozitif diagonal D matrisinin her zaman bulunamayacağına dair bir örnek verilmiştir.

Örnek 3.1.9.

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

matrisi verilsin.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0 \text{ ve } Q = \begin{bmatrix} 0.81 & -0.26 \\ -0.26 & 1.64 \end{bmatrix} > 0$$

matrisleri için $A^T PA - P = -Q$ *Stein denklemi sağlanır. Buradan* A *matrisi Schur diagonal kararlı olur.*

Ancak A *matrisinin,* P_1 *pozitif diagonal bir matris olmak üzere,*

$$A^T P_1 A - P_1 = -I \tag{3.1.3}$$

denklemini sağlamadığı görülmektedir. Gerçekten,

$$P_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} > 0$$

olsun.

$$A^T P_1 A - P_1 = \begin{bmatrix} -0.99\lambda_1 + 0.09\lambda_2 & 0.02\lambda_1 + 0.12\lambda_2 \\ 0.02\lambda_1 + 0.12\lambda_2 & 0.04\lambda_1 - 0.84\lambda_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olması için

$$\begin{cases} -0.99\lambda_1 + 0.09\lambda_2 & = & -1 \\ 0.02\lambda_1 + 0.12\lambda_2 & = & 0 \\ 0.02\lambda_1 + 0.12\lambda_2 & = & 0 \\ 0.04\lambda_1 - 0.84\lambda_2 & = & -1 \end{cases}$$

olmalıdır. Bu denklem sistemini sağlayan $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ *bulunamadığı için çözüm kümesi boş kümedir. Böylece (3.1.3) eşitliğini sağlayan diagonal* $P_1 > 0$ *matrisi bulunmamaktadır.*

Bir matris Schur diagonal kararlı ise, Schur D-kararlıdır. Fakat tersi her zaman doğru değildir [14].

3.2 Sonlu Tane 2×2 Matris İçin Stein Eşitsizliklerinin Ortak Diagonal Çözümünün Varlığı

Bu kısımda, sonlu tane 2×2 boyutlu Schur diagonal kararlı matris için Stein eşitsizliğini sağlayan ortak P pozitif diagonal matrisinin varlığı için gerek ve yeter koşul verilmektedir. Bilindiği gibi 2×2 boyutlu matrislerde, Schur diagonal kararlılık Schur D-kararlılığa denktir [14] ve aşağıdaki gerek ve yeter koşul geçerlidir.

Teorem 3.2.1 ([15])**.** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *matrisinin Schur diagonal kararlı olması için gerek ve yeter koşul*

i) $|ad - bc| < 1,$

ii) $|a + d| < 1 + (ad - bc),$

iii) $|a - d| < 1 - (ad - bc)$

eşitsizliklerinin sağlanmasıdır.

A matrisi Schur diagonal kararlı olsun. Bu durumda Schur diagonal kararlılığın tanımından en az bir P pozitif diagonal matrisi için Stein eşitsizliği sağlanır. $\lambda > 0$ olmak üzere, $P = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. O zaman sıfırdan farklı her $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektörü için,

$$\mathbf{x}^T \left(A^T P A - P\right) \mathbf{x} < 0 \tag{3.2.4}$$

olur.

$$\mathbf{x}^T \left(A^T P A - P\right) \mathbf{x} = (a^2\lambda - \lambda + c^2)x^2 + 2(ab\lambda + cd)xy + (b^2\lambda + d^2 - 1)y^2$$

dir.

$$f = (a^2\lambda - \lambda + c^2)x^2 + 2(ab\lambda + cd)xy + (b^2\lambda + d^2 - 1)y^2 \tag{3.2.5}$$

ve bir λ değeri için $b^2\lambda + d^2 - 1 < 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f = &- \left[\sqrt{-(b^2\lambda + d^2 - 1)}y - \frac{(ab\lambda + cd)}{\sqrt{-(b^2\lambda + d^2 - 1)}}x \right]^2 + \\ &+ \left[a^2\lambda - \lambda + c^2 - \frac{(ab\lambda + cd)^2}{b^2\lambda + d^2 - 1} \right] x^2 < 0 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

biçiminde yazılabilir. $\mathbf{x}^T\left(A^TPA - P\right)\mathbf{x} < 0$ olması, sıfırdan farklı her $\mathbf{x}$ vektörü için $f < 0$ olmasına denktir. Sıfırdan farklı her $\mathbf{x}$ vektörü için f nin negatif olabilmesi için

$$a^2\lambda - \lambda + c^2 - \frac{(ab\lambda + cd)^2}{b^2\lambda + d^2 - 1} < 0 \tag{3.2.7}$$

olmak zorundadır. Buradan son eşitsizlik

$$b^2\lambda^2 + (2abcd - 1 + a^2 + d^2 - a^2d^2 - b^2c^2)\lambda + c^2 < 0 \tag{3.2.8}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.2.1 nin (ii) ve (iii) eşitsizliklerinde her taraftan kare alınıp taraf tarafa toplanırsa,

$$2abcd - 1 + a^2 + d^2 - a^2d^2 - b^2c^2 < 0 \tag{3.2.9}$$

bulunur. Eğer $b = 0$ ise, (3.2.8) eşitsizliği

$$(-1 + a^2 + d^2 - a^2d^2)\lambda + c^2 < 0 \tag{3.2.10}$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu durumda (3.2.9) ve (3.2.10) dan

$$\lambda > \lambda^- = \frac{c^2}{1 - a^2 - d^2 + a^2d^2} \tag{3.2.11}$$

olur. Yani $b = 0$ ise $\lambda \in (\lambda^-, \infty)$ bulunur.

Eğer $b \neq 0$ ise (3.2.8) in çözümü

$$\lambda^- = \frac{-(2abcd - 1 + a^2 + d^2 - a^2d^2 - b^2c^2) - \sqrt{(2abcd - 1 + a^2 + d^2 - a^2d^2 - b^2c^2)^2 - 4b^2c^2}}{2b^2}$$

ve

$$\lambda^+ = \frac{-(2abcd - 1 + a^2 + d^2 - a^2d^2 - b^2c^2) + \sqrt{(2abcd - 1 + a^2 + d^2 - a^2d^2 - b^2c^2)^2 - 4b^2c^2}}{2b^2}$$

olmak üzere,

$$\lambda^- < \lambda < \lambda^+ \tag{3.2.12}$$

dır. (3.2.9) dan λ^- ve λ^+ ifadelerindeki karekökler iyi tanımlıdır. Gerçekten de,

$$(2abcd - 1 + a^2 + d^2 - a^2d^2 - b^2c^2)^2 - 4b^2c^2$$

ifadesi

$$(-bc+1-a-d+ad)(-bc-1+a-d+ad)(-bc-1-a+d+ad)(-bc+1+a+d+ad)$$

biçiminde çarpanlarına ayrılmaktadır ve Teorem 3.2.1 in (ii) ve (iii) koşulundan,

$$(-bc + 1 - a - d + ad) > 0,\ (-bc - 1 + a - d + ad) < 0$$
$$(-bc - 1 - a + d + ad) < 0,\ (-bc + 1 + a + d + ad) > 0$$

olup bunların çarpımı pozitif olacağından karekökün içi de pozitiftir.

Teorem 3.2.2. $P = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *olmak üzere,* $A^TPA - P < 0$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\lambda \in (\lambda^-, \lambda^+)$ *olmasıdır (Bu aralık,* $b = 0$ *ve* $b \neq 0$ *olması durumunda yukarıda tanımlanmıştır).*

Kanıt $b \neq 0$ durumu için yapılacaktır.

Kanıt. $\Leftarrow$). $\lambda \in (\lambda^-, \lambda^+)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} b^2\lambda + d^2 - 1 &< b^2\lambda^+ + d^2 - 1 \\ &< -2abcd - 1 - a^2 + d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + \\ &\quad + \sqrt{(2abcd - 1 + a^2 + d^2 - a^2d^2 - b^2c^2)^2 - 4b^2c^2} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

olduğu görülmektedir.

$$\begin{aligned} & -2abcd - 1 - a^2 + d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + \\ & +\sqrt{(2abcd - 1 + a^2 + d^2 - a^2d^2 - b^2c^2)^2 - 4b^2c^2} \leq 0 \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilebilir. İlk olarak,

$$-2abcd - 1 - a^2 + d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$$

ifadesinin negatif olduğu kanıtlanmaktadır.

$$\begin{aligned} -2abcd - 1 - a^2 + d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 &= (d-a)(d+a) - 1 + (ad-bc)^2 \\ &= (d-a)(d+a) + (ad-bc-1)\cdot \\ &\quad \cdot(ad-bc+1) \end{aligned}$$

dir. Buradan (3.2.13) eşitsizliği

$$(a-d)(a+d) > (ad-bc-1)(ad-bc+1) \tag{3.2.14}$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu ise Teorem 3.2.1 in (i), (ii) ve (iii) koşulları yardımı ile gösterilebilir.

$$(ad-bc-1) < 0 \text{ ve } (ad-bc+1) > 0$$

olduğu için

$$(ad-bc-1)(ad-bc+1) < 0 \tag{3.2.15}$$

dır. (3.2.15) eşitsizliğini ve a ile d nin alabileceği bütün değerleri de gözönünde bulundurarak (3.2.14) eşitsizliğinin doğru olduğu kanıtlanabilir.

1. durum: $-a < d < a$ olsun. Buradan $a + d > 0$ ve $a - d > 0$ olacağı için (3.2.14) eşitsizliği sağlanır.

2. durum: $-d < a < d$ olsun. $a + d > 0$ ve $a - d < 0 \Rightarrow -(a - d) > 0$ olur. Koşul (ii) ve (iii) den $a + d < 1 + ad - bc$ ve $-(a - d) < 1 - ad + bc$ dir.

$$\begin{aligned} -(a-d)(a+d) &< (1+ad-bc)(1-ad+bc) \\ (a-d)(a+d) &> (ad-bc+1)(ad-bc-1) \end{aligned}$$

olduğundan (3.2.14) eşitsizliği sağlanır.

3. durum: $a < d < -a$ olsun. Buradan $a + d < 0$ ve $a - d < 0$ olup çarpımları pozitif olacağı için (3.2.14) eşitsizliği sağlanır.

4. durum: $d < a < -d$ olsun. $a + d < 0 \Rightarrow -(a + d) > 0$ ve $a - d > 0$ olur. Koşul (ii) ve (iii) den $-(a + d) < 1 + ad - bc$ ve $(a - d) < 1 - ad + bc$ dir.

$$\begin{aligned} -(a+d)(a-d) &< (1+ad-bc)(1-ad+bc) \\ (a-d)(a+d) &> (ad-bc+1)(ad-bc-1) \end{aligned}$$

olduğu için (3.2.14) eşitsizliği sağlanır.

(3.2.14) ifadesinin doğruluğu kanıtlandığı için buna denk olarak

$$-2abcd - 1 - a^2 + d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 < 0 \qquad (3.2.16)$$

olduğu gösterilmiş olur.

(3.2.16) sağlandığı için (3.2.13) eşitsizliğinde kökün önündeki ifade sağa atılıp her iki tarafın karesi alınırsa,

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{(2abcd - 1 + a^2 + d^2 - a^2d^2 - b^2c^2)^2 - 4b^2c^2}\right)^2 \leq \\ &\qquad (2abcd + 1 + a^2 - d^2 - a^2d^2 - b^2c^2)^2 \end{aligned}$$

veya

$$-4(-a - bcd + ad^2)^2 \;\leq\; 0$$

olur. Buradan da $b^2\lambda + d^2 - 1 < 0$ olduğu görülmüş olur. Bu durumda f fonksiyonu

$$\begin{aligned} f = -&\left[\sqrt{-(b^2\lambda + d^2 - 1)}y - \frac{(ab\lambda + cd)}{\sqrt{-(b^2\lambda + d^2 - 1)}}x\right]^2 + \\ &+ \left[a^2\lambda - \lambda + c^2 - \frac{(ab\lambda + cd)^2}{b^2\lambda + d^2 - 1}\right]x^2 \end{aligned} \qquad (3.2.17)$$

şeklinde yazılır. O zaman sıfırdan farklı her $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektörü için f nin negatif olabilmesi için gerek ve yeter koşul (3.2.17) de ikinci kare parantezin negatif olmasıdır, yani

$$b^2\lambda^2 + (2abcd - 1 + a^2 + d^2 - a^2d^2 - b^2c^2)\lambda + c^2 < 0$$

olmasıdır. Bunun için ise $\lambda \in (\lambda^-, \lambda^+)$ olmalıdır. O halde P pozitif diagonal matrisi için $A^TPA - P < 0$ olur.

$\Rightarrow$). Sıfırdan farklı her $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektörü için $f < 0$ olsun. $x = 0$ ve $y = 1$ değerleri için

$$f = b^2\lambda + d^2 - 1 < 0$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} f = -\left[\sqrt{-(b^2\lambda + d^2 - 1)}\,y - \frac{(ab\lambda + cd)}{\sqrt{-(b^2\lambda + d^2 - 1)}}\,x\right]^2 + \\ + \left[a^2\lambda - \lambda + c^2 - \frac{(ab\lambda + cd)^2}{b^2\lambda + d^2 - 1}\right] x^2 \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

yazılır. Sıfırdan farklı her $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektörü için $f < 0$ olması için gerek ve yeter koşul (3.2.18) de ikinci kare parantezin negatif olmasıdır. Bunun için ise gerek ve yeter koşul $\lambda \in (\lambda^-, \lambda^+)$ olmasıdır. □

Bulunan λ değerlerine bakılırsa bu değerlerin bir aralıkta değiştiği görülmektedir. Sonuç olarak, (3.2.11) veya (3.2.12) aralığından alınacak her λ değeri için Stein eşitsizliği sağlanır. Fakat bu aralığın dışından alınan herhangi $\lambda > 0$ sayısı için Stein eşitsizliği sağlanmaz. Şimdi sonlu tane Schur diagonal kararlı A_i, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ matrisi verilsin. A_i Schur diagonal kararlı matrislerine karşılık $\lambda_i^- < \lambda < \lambda_i^+$ aralığı bulunabilir. Yani,

$$\begin{array}{lll} A_1 & \text{Schur diagonal kararlı matrisi için} & P_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A_2 & \text{Schur diagonal kararlı matrisi için} & P_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ A_k & \text{Schur diagonal kararlı matrisi için} & P_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

vardır.

$$I_i = (\lambda_i^-, \lambda_i^+), \ \ (i = 1, 2, \ldots, k)$$

olsun. Bu durumda sonlu tane Schur diagonal kararlı matris için ortak P pozitif diagonal matrisin var olması için gerek ve yeter koşul olan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.3. *$A_1, A_2, \ldots, A_k$ sonlu tane 2×2 boyutlu Schur diagonal kararlı matrisler olsun. Bu durumda $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ ailesi için Stein eşitsizliğini sağlayan ortak P pozitif diagonal matrisinin olması için gerek ve yeter koşul*

$$\bigcap_{i=1}^{k} I_i \neq \emptyset$$

olmasıdır.

Kanıt. $\Rightarrow$). $P = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pozitif diagonal matrisi $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ ailesi için Stein eşitsizliğinin ortak çözümü olsun. O zaman her $i = 1, 2, \ldots, k$ için $\lambda \in I_i$ ve $\lambda \in \bigcap_{i=1}^{k} I_i$ olur. Böylece $\bigcap_{i=1}^{k} I_i \neq \emptyset$ dır.

$\Leftarrow$). $i = 1, 2, \ldots, k$ olmak üzere, $\bigcap_{i=1}^{k} I_i \neq \emptyset$ olsun. O zaman $\lambda \in \bigcap_{i=1}^{k} I_i$ vardır. Bu durumda $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ ailesi için ortak $P = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pozitif diagonal matrisi var demektir. □

Örnek 3.2.4.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.3 \\ -0.7 & -0.3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.3 \\ 0.7 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.3 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.4 \\ -0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Schur diagonal kararlı matrisleri verilsin. Her bir A_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$ *matrisine karşılık* $P_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_i^- < \lambda_i < \lambda_i^+$ *pozitif diagonal matrisleri vardır.* I_i *değerleri* (3.2.12) *eşitsizliği yardımı ile hesap edilirse,*

A_1	*Schur diagonal kararlı matrisi için,*	$I_1 = (1.0800, 5.0410)$
A_2	″	$I_2 = (0.0411, 2.7022)$
A_3	″	$I_3 = (0.7737, 7.0362)$
A_4	″	$I_4 = (0.7054, 7.7179)$
A_5	″	$I_5 = (1.0984, 3.6415)$

bulunur.

$$\bigcap_{i=1}^{5} I_i = \max_i \lambda_i^- < \lambda < \min_i \lambda_i^+ = 1.0984 < \lambda < 2.7022$$

dir. Böylece $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ *ailesi için ortak*

$$P = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ 1.0984 < \lambda < 2.7022$$

pozitif diagonal matrisi bulunmuş olur.

Örnek 3.2.5.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ -0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \ \textit{ve} \ A_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.7 \\ 0.4 & -0.1 \end{bmatrix}$$

Schur diagonal kararlı matrisleri verilsin. A_1 *matrisine karşılık* $P_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *ve* A_2 *matrisi için de* $P_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *pozitif diagonal matrisleri vardır.* (3.2.12) *eşitsizliği yardımı ile* $\lambda_1 \in I_1 = (3.5061, 18.2538)$ *ve*

$\lambda_2 \in I_2 = (0.1645, 1.9842)$ *bulunur. Burada*

$$I_1 \cap I_2 = \emptyset$$

olduğundan $\{A_1, A_2\}$ *ailesi için Teorem 3.2.3 e göre ortak* P *pozitif diagonal matrisi yoktur.*

3.3 3×3 Boyutlu Matrisin Schur Diagonal Kararlılığı İçin Bir Yeter Koşul

Bu kısımda, 3×3 boyutlu matrisin Schur diagonal kararlılığı için bir yeter koşul verilmektedir.

Teorem 3.3.1.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrisi Schur kararlı olsun. Eğer $i \neq j$ *iken* $a_{ij} \geq \alpha_{ji}$, $(i, j = 1, 2, 3)$ *ise,* A *matrisi Schur diagonal kararlıdır. Burada* $\alpha_{ji} = (-1)^{j+i}|m_{ji}|$ *olup* a_{ji} *nin kofaktörüdür.*

Kanıt. A matrisi Schur kararlı olsun. Bu durumda A matrisinin Cayley dönüşümü altındaki görüntüsü olan $B = (A + I)^{-1}(A - I)$ matrisi Hurwitz kararlı olur.

$$B = k \begin{bmatrix} b_{11} & -\alpha_{21} + a_{12} & -\alpha_{31} + a_{13} \\ -\alpha_{12} + a_{21} & b_{22} & -\alpha_{32} + a_{23} \\ -\alpha_{13} + a_{31} & -\alpha_{23} + a_{32} & b_{33} \end{bmatrix},$$

$$k = \frac{2}{\det(A) + tr(A) + \mu + 1},$$

$\mu = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$ sayısı, A matrisinin başlıca minörleri toplamı,

$$b_{11} = \frac{1}{2}(\det(A) - tr(A) - \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2a_{11} - 1),$$

$$b_{22} = \frac{1}{2}(\det(A) - tr(A) + \alpha_{11} - \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2a_{22} - 1),$$
$$b_{33} = \frac{1}{2}(\det(A) - tr(A) + \alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{33} + 2a_{33} - 1)$$

olur.

A matrisi Schur kararlı olduğu için Schur kararlılık koşullarından biri olan

$$|\det(A) + tr(A)| < 1 + \mu$$

koşulunu sağlaması gerekir [4]. Bu ise

$$-1 - \mu < \det(A) + tr(A) < 1 + \mu$$

$$\det(A) + tr(A) + 1 + \mu > 0$$

demektir ve buradan

$$k = \frac{2}{\det(A) + tr(A) + 1 + \mu} > 0$$

olur. $i \neq j$ iken $a_{ij} \geq \alpha_{ji}$, $(i, j = 1, 2, 3)$ olup $a_{ij} - \alpha_{ji} \geq 0$ olduğu için B matrisi $-\mathcal{Z}$ sınıfındandır. $-\mathcal{Z}$ sınıfında, bir matrisin Hurwitz kararlılığıyla Hurwitz diagonal kararlılığı denk olduğu için [16] B matrisi Hurwitz diagonal kararlı olur.

$$B = (A + I)^{-1}(A - I)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (A + I)B &= (A - I) \\ A &= (B + I)(I - B)^{-1} \\ A &= (I - B)^{-1}(B + I) \end{aligned}$$

dır. B matrisi Hurwitz diagonal kararlı matris olup, A matrisi ise B nin Cayley dönüşümü altındaki görüntüsü olduğu için A matrisi Schur diagonal kararlı olur. □

Sonuç 3.3.2.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Schur kararlı matrisi verilsin. A matrisinin elemanları,

$$a_{ij}(1 + a_{kk}) \geq a_{ik}a_{kj}, \;\; i \neq j \neq k \tag{3.3.19}$$

koşulunu sağlıyor ise, Schur diagonal kararlıdır.

(3.3.19) koşulu açıkça yazılırsa,

$$\begin{aligned} a_{12}(1 + a_{33}) &\geq a_{13}a_{32} \\ a_{21}(1 + a_{33}) &\geq a_{23}a_{31} \\ a_{23}(1 + a_{11}) &\geq a_{21}a_{13} \\ a_{32}(1 + a_{11}) &\geq a_{31}a_{12} \\ a_{13}(1 + a_{22}) &\geq a_{12}a_{23} \\ a_{31}(1 + a_{22}) &\geq a_{32}a_{21} \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

elde edilir.

Eğer A Schur kararlı simetrik matris ise, (3.3.20) koşulunda eşitsizlik sayısı yarıya iner ve

$$\begin{aligned} a_{12}(1 + a_{33}) &\geq a_{13}a_{32} \\ a_{23}(1 + a_{11}) &\geq a_{21}a_{13} \\ a_{13}(1 + a_{22}) &\geq a_{12}a_{23} \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

olur.

Örnek 3.3.3.

$$A = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.6 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 & -0.2 \end{bmatrix}$$

Schur kararlı matrisi için

$$\alpha_{21} = 0.07, \alpha_{31} = 0.08, \alpha_{12} = 0.37, \alpha_{32} = 0.21, \alpha_{13} = 0.08, \alpha_{23} = 0.19$$

dır. $i \neq j$ *iken* $a_{ij} \geq \alpha_{ji}$ *olduğu için A matrisi Schur diagonal kararlı olur.*

Örnek 3.3.4.

$$B = \begin{bmatrix} \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \end{bmatrix}, \;\; 0 \leq \beta < \frac{1}{3}$$

Schur kararlı matrisi için $i \neq j$ iken $\alpha_{ji} = 0$ ve $b_{ij} = \beta$ olduğundan $i \neq j$ iken $b_{ij} \geq \alpha_{ji}$ dir. Buradan B matrisi Schur diagonal kararlı olur.

3.4 Matrisler Segmentinin Schur Diagonal Kararlılığı

Bu kısımda, matrisler segmentinin Schur diagonal kararlılığı araştırılmıştır.

Tanım 3.4.1. *$A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ve $A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisleri verilsin.*

$$\{\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2 : \ \lambda \in [0,1]\}$$

matrisler kümesine matrisler segmenti denir.

Önerme 3.4.2. *$x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ve $P > 0$ olmak üzere*

$$f(A,P) = x^T(A^T PA)x - x^T Px$$

fonksiyonu P ye göre lineer A ya göre konvekstir.

Kanıt. f fonksiyonunun P ye göre lineerliği açıkça görülmektedir. f nin A ya göre konveksliğini kanıtlamak için

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^{n\times n} & \to & \mathbb{R} \\ & A & \to & x^T(A^T PA)x \end{array}$$

fonksiyonunu tanımlansın. F fonksiyonunun konveks olduğunu görmek için

$$F(A) = \psi(\varphi(A))$$

olacak şekilde ψ ve φ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\varphi(A) = Ax$$

lineer dönüşüm ve

$$\psi(y) = y^T Py$$

olsun. ψ fonksiyonunun konveks olduğu görülebilir. $P > 0$ pozitif belirli matrisi için $Q = P^{\frac{1}{2}} > 0$ matrisi de pozitif belirli simetrik matristir.

$$\psi(y) = y^T Q^2 y = y^T QQy = (Qy)^T Qy = ||Qy||^2,$$

ve norm fonksiyonu konveks olduğundan, $\psi(y)$ konveks fonksiyon olur.

$F(\cdot) = \psi(\varphi(\cdot))$ fonksiyonu konveks fonksiyonla lineer fonksiyonun bileşkesi olduğundan, F de konveks fonksiyon olur. Buradan, konveks fonksiyonla lineer fonksiyonun farkı konveks olduğu için

$$f(A, P) = x^T(A^T PA)x - x^T Px$$

fonksiyonu konveks olur. □

Önerme 3.4.3. *$P > 0$ diagonal matrisi A_1 ve A_2 matrislerine karşılık gelen Stein eşitsizliğinin ortak çözümü olsun. Bu durumda, P matrisi her $\lambda \in [0, 1]$ için $\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2$ matrisine karşılık gelen Stein eşitsizliğini de sağlar.*

Kanıt. $P > 0$ diagonal matrisi için $A_1^T PA_1 - P < 0$ ve $A_2^T PA_2 - P < 0$ dır. Bu ifadeler sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}^n$ için kuadratik formda yazılırsa,

$$x^T(A_1^T PA_1)x - x^T Px < 0 \ \text{ ve } \ x^T(A_2^T PA_2)x - x^T Px < 0$$

olur. $f(A) = x^T(A^T PA)x - x^T Px < 0$ fonksiyonu konveks fonksiyondur. Konveks fonksiyonun tanımından

$$f(\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2) \leq \lambda f(A_1) + (1 - \lambda)f(A_2) < 0$$

olur. f nin tanımından her $\lambda \in [0, 1]$ için

$$x^T(\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2)^T P(\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2)x - x^T Px < 0$$

bulunur. Bu ise $P > 0$ diagonal matrisinin her $\lambda \in [0, 1]$ için $\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2$ matrisine karşılık gelen Stein eşitsizliğini sağlaması demektir. □

4 KARARLI POLİNOMLAR ve MATRİSLER AİLESİNİN BÜZÜLEBİLİRLİĞİ

Bu bölümde, önce tüm kökleri kompleks düzlemin basit bağlantılı, açık bir alt kümesinde olan n. dereceden gerçel ve kompleks katsayılı polinomlar ailesinin büzülebilirliği araştırılmıştır. Daha sonra, $n \times n$ boyutlu kararlı kompleks matrisler ailesinin tek noktaya büzülebilir olduğu kanıtlanmıştır. Diagonal kararlı ve D-kararlı matrisler ailesinin büzülebilirliği de araştırılmıştır.

4.1 $\mathcal{D}$-Kararlı Polinomlar Ailesinin Büzülebilirliği

$\mathcal{D}$ kompleks düzlemin basit bağlantılı, açık bir alt kümesi olmak üzere, tüm kökleri $\mathcal{D}$ bölgesinde olan polinoma $\mathcal{D}$-kararlı polinom denir. Tüm n. dereceden $\mathcal{D}$-kararlı polinomlar ailesi $\mathcal{P}$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$\mathcal{P} = \{p(s) : p(s) \ \mathcal{D}\text{-kararlı polinom}\}$$

dır. Eğer $p(s)$ polinomu n. dereceden gerçel katsayılı $\mathcal{D}$-kararlı polinom ise, $\mathcal{D}$ bölgesi gerçel eksene göre simetrik olmak zorundadır.

[17] ve [18] de Hurwitz kararlı ve $\mathcal{D}$-kararlı polinomlar ailesinin polinomlar uzayında basit bağlantılı açık koni oluşturduğu kanıtlanmıştır. Bu çalışmada, n. dereceden $\mathcal{D}$-kararlı kompleks katsayılı ve $\mathcal{D}$-kararlı gerçel katsayılı polinomlar ailesinin iki noktaya büzülebilirliği kanıtlanmıştır. Buna göre $\mathcal{D}$-kararlı n. dereceden kompleks ve gerçel katsayılı polinomlar ailesi iki basit bağlantılı kümeden oluşmaktadır. Ayrıca, n. dereceden kompleks katsayılı $\mathcal{D}$-kararlı polinomlar ailesinin tek noktaya büzülemediği gösterilmektedir. Özel olarak, $\mathcal{D}$ bölgesi kompleks düzlemde sol açık yarı düzlem seçilirse, Hurwitz kararlı polinomlar ailesi elde edilir. n. dereceden gerçel ve kompleks katsayılı Hurwitz kararlı polinomlar ailesinin de iki noktaya büzülebilirliği gösterilmiştir. Benzer olarak, $\mathcal{D}$ bölgesi kompleks düzlemde açık birim disk alınır ise Schur kararlı polinomlar ailesi elde edilir. n. dereceden Schur kararlı polinomlar ailesinin de

iki noktaya büzülebilir olduğu gösterilmiştir. Bu bölümde gerekli olacak bazı tanım ve teoremler aşağıda verilmektedir.

Tanım 4.1.1. *X metrik uzay, $F : X \times [0,1] \to X$ sürekli fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $x \in X$ için $F(x,0) = x$, $F(x,1) = x_0$ ise X kümesine $x_0 \in X$ noktasına büzülebilir küme denir.*

Tanım 4.1.2. *X yol bağlantılı metrik uzay olmak üzere, $\Gamma \subset X$ keyfi kapalı bir eğri olsun. Eğer*

1. *Her $x \in \Gamma$ için $F(x,0) = x$,*

2. *Her $x \in \Gamma$ için $F(x,1) = x_0$*

olacak biçimde $x_0 \in X$ noktası ve $F : X \times [0,1] \to X$ sürekli fonksiyonu varsa, X kümesine basit bağlantılı küme denir.

Teorem 4.1.3 (Açık Dönüşüm Teoremi, [19])**.** *Eğer f fonksiyonu bir $S \in \mathbb{C}$ açık kümesi üzerinde sabit olmayan analitik fonksiyon ise w=f(z) dönüşümü altında S nin görüntüsü de açık bir kümedir.*

Teorem 4.1.4 (Riemann Dönüşüm Teoremi, [19])**.** *Eğer $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesi sınırında birden fazla nokta olan basit bağlantılı bölge ise $\mathcal{D}$ bölgesinden birim diske analitik, bire-bir, örten bir f fonksiyonu vardır.*

Tüm n. dereceden kompleks katsayılı $\mathcal{D}$-kararlı polinomlar ailesi $\mathcal{P}$ ile gösterilmişti.

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \ (a_n \neq 0) \tag{4.1.1}$$

polinomunun kökleri $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{D}$ ise $p(s) \in \mathcal{P}$ dir ve bu polinom

$$p(s) = a_n (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) \tag{4.1.2}$$

biçiminde yazılabilir. $\mathcal{P}$ kümesinin büzülebilirliğini incelemek için

$$\mathcal{P}_1 = \{p(s) : a_n \notin (-\infty, 0), \ p(s) \text{ kompleks katsayılı } \mathcal{D}\text{-kararlı polinom}\},$$

$$\mathcal{P}_2 = \{p(s) : a_n \in (-\infty, 0),\ p(s) \text{ kompleks katsayılı } \mathcal{D}\text{-kararlı polinom}\}$$

altkümeleri tanımlansın. Bu durumda

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$$

dir.

Teorem 4.1.5. *$\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesi basit bağlantılı ve sınırında birden fazla nokta olsun. Bu durumda $s_* \in \mathcal{D}$ olmak üzere, n. dereceden kompleks katsayılı $\mathcal{D}$-kararlı polinomlar ailesi iki noktaya büzülmektedir:*

1. *$\mathcal{P}_1$ polinomlar ailesi $(s - s_*)^n$ polinomuna büzülür.*
2. *$\mathcal{P}_2$ polinomlar ailesi $-(s - s_*)^n$ polinomuna büzülür.*

Kanıt. $\mathcal{D}$ bölgesi basit bağlantılı ve $\mathcal{D}$ bölgesinin sınırında birden fazla nokta olduğu için Riemann dönüşüm teoremine göre $\mathcal{D}$ bölgesinden birim diske analitik, bire-bir ve örten f fonksiyonu vardır. f fonksiyonu bire-bir, örten olduğu için f^{-1} ters fonksiyonu vardır. Açık dönüşüm teoremine göre f^{-1} fonksiyonu süreklidir. Gerçekten, $A \subset \mathcal{D}$ keyfi açık küme ise A nın f^{-1} altındaki ters görüntüsü $f(A)$ dır ve f fonksiyonu $\mathcal{D}$ üzerinde analitik olduğundan A üzerinde de analitiktir ve Açık Dönüşüm Teoremine göre $f(A)$ da açıktır.

$$f^{-1}(0) = s_* \in \mathcal{D}$$

olsun. $p_t(s)$ polinomu,

$$p_t(s) = a_n[s - f^{-1}[(1-t)f(s_1)]] \cdot [s - f^{-1}[(1-t)f(s_2)]] \cdots [s - f^{-1}[(1-t)f(s_n)]]$$

şeklinde tanımlansın.

1.
$$\begin{aligned} F &: \mathcal{P}_1 \times [0,1] \to \mathcal{P}_1 \\ F(p(s), t) &= \frac{p_t(s)}{(1-t) + ta_n},\ a_n \notin (-\infty, 0) \end{aligned}$$

fonksiyonu süreklidir. Ayrıca

$$\begin{aligned} F(p(s),0) &= p(s), \\ F(p(s),1) &= (s-s_*)^n \end{aligned}$$

olur. $(s-s_*)^n \in \mathcal{P}_1$ dir. Buradan $\mathcal{P}_1$ polinomlar ailesinin $(s-s_*)^n$ polinomuna büzülür.

2.

$$\begin{aligned} \widetilde{F} &: \quad \mathcal{P}_2 \times [0,1] \to \mathcal{P}_2 \\ \widetilde{F}(p(s),t) &= \frac{p_t(s)}{(1-t)-ta_n}, \; a_n \in (-\infty,0) \end{aligned}$$

fonksiyonu süreklidir ve

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(p(s),0) &= p(s), \\ \widetilde{F}(p(s),1) &= -(s-s_*)^n \end{aligned}$$

olur. $-(s-s_*)^n \in \mathcal{P}_2$ dir. Buradan da $\mathcal{P}_2$ polinomlar ailesi $-(s-s_*)^n$ polinomuna büzülmektedir.

□

n. dereceden kompleks katsayılı $\mathcal{D}$-kararlı polinomlar ailesinin tek noktaya büzülemediği gösterilebilir.

$$\mathcal{P}^{\mathcal{S}} = \{p(s) : \; p(s) \; n. \text{ dereceden kompleks katsayılı Schur kararlı polinom}\}$$

ailesi tanımlansın.

Teorem 4.1.6. *n. dereceden kompleks katsayılı Schur kararlı polinomlar ailesi $\mathcal{P}^{\mathcal{S}}$ tek noktaya büzülemez.*

Kanıt.

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Schur kararlı polinomun sağladığı gerekli koşula göre $|a_0| < |a_n|$ dir. Olmayana ergi yöntemine göre, n. dereceden kompleks katsayılı Schur kararlı polinomlar ailesinin tek noktaya, önce s^n polinomuna büzülmesinin mümkün olamayacağı kanıtlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} F &: \mathcal{P}^{\mathcal{S}} \times [0,1] \to \mathcal{P}^{\mathcal{S}} \\ F(p(s),0) &= p(s), \\ F(p(s),1) &= s^n \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

sürekli fonksiyonu vardır. Eğer

$$\begin{aligned} F(p(s),t) &= f_n(a_0,a_1,\ldots,a_n,t)s^n + f_{n-1}(a_0,a_1,\ldots,a_n,t)s^{n-1} + \cdots + \\ &\quad + f_0(a_0,a_1,\ldots,a_n,t) \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

$$\widetilde{A} = \{(a_0,a_1,\ldots,a_n) : \ p(s) \ n. \text{ dereceden Schur kararlı polinom}\}$$

$$A = \widetilde{A} \times [0,1]$$

denilirse o zaman aşağıdakiler sağlanmaktadır:

$$\begin{array}{ll} 1. & f_i : A \to \mathbb{C}, \ (i = 0,1,\ldots,n) \ \text{ fonksiyonları süreklidir,} \\ 2. & f_i(a_0,a_1,\ldots,a_n,0) = a_i, \ (i = 0,1,\ldots,n) \\ 3. & f_i(a_0,a_1,\ldots,a_n,1) = 0, \ (i = 0,1,\ldots,n-1) \\ 4. & f_n(a_0,a_1,\ldots,a_n,1) = 1 \end{array} \tag{4.1.5}$$

(4.1.4) polinomu Schur kararlı olduğundan, her $(a_0,a_1,\ldots,a_n,t) \in A$ için

$$(f_0(a_0,a_1,\ldots,a_n,t), f_1(a_0,a_1,\ldots,a_n,t), \cdots, f_n(a_0,a_1,\ldots,a_n,t)) \in \widetilde{A},$$

$$|f_0(a_0,a_1,\ldots,a_n,t)| < |f_n(a_0,a_1,\ldots,a_n,t)|$$

dır. Şimdi

$$\begin{aligned} k &: \mathbb{C} - \{0\} \times [0,1] \to \mathbb{C} - \{0\} \\ k(z,t) &= f_n(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-tane},z,t) \end{aligned}$$

sürekli fonksiyonu tanımlansın. (4.1.5) e göre

$$\begin{aligned} k(z,0) &= f_n(0,0,\ldots,0,z,0) &= z \\ k(z,1) &= f_n(0,0,\ldots,0,z,1) &= 1 \end{aligned}$$

dir ve k fonksiyonu iyi tanımlıdır.

Yukarıdaki koşullar altında tanımlanan sürekli k fonksiyonu ile delinmiş kompleks düzlem bir noktaya, $z = 1$ noktasına büzüldü. Delinmiş düzlem bir noktaya büzülemeyeceğinden [20] n. dereceden Schur kararlı polinomlar ailesi s^n polinomuna büzülemez. Bu durumda bu küme herhangi bir $p_*(s) \in \mathcal{P}^{\mathcal{S}}$ noktasına da büzülemez. Gerçekten, eğer büzülseydi o zaman her $p(s) \in \mathcal{P}^{\mathcal{S}}$ için

$$\begin{aligned} F(p(s),0) &= p(s), \\ F(p(s),1) &= p_*(s) \end{aligned}$$

olacak biçimde

$$F : \mathcal{P}^{\mathcal{S}} \times [0,1] \rightarrow \mathcal{P}^{\mathcal{S}}$$

sürekli fonksiyonu bulunurdu.

$$f : \mathcal{P}^{\mathcal{S}} \times [1,2] \rightarrow \mathcal{P}^{\mathcal{S}}$$

fonksiyonu s^n ile $p_*(s)$ arasındaki herhangi sürekli yolu göstersin.

$$\begin{aligned} F_1 &= \mathcal{P}^{\mathcal{S}} \times [0,2] \rightarrow \mathcal{P}^{\mathcal{S}} \\ F_1(p(s),t) &= \begin{cases} F(p(s),t), & t \in [0,1] \\ f(p(s),t), & t \in [1,2] \end{cases} \end{aligned}$$

sürekli fonksiyonu tanımlandığında,

$$\begin{aligned} F(p(s),0) &= p(s), \\ F(p(s),1) &= p_*(s) \\ f(p(s),1) &= p_*(s) \\ f(p(s),2) &= s^n \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $\mathcal{P}^{\mathcal{S}}$ kümesi F_1 sürekli fonksiyonu yardımı ile s^n polinomuna da büzülürdü. Bu ise çelişkidir. O halde n. dereceden kompleks katsayılı Schur kararlı polinomlar ailesi tek noktaya büzülemez. □

Teorem 4.1.7. *$\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesi basit bağlantılı ve $\mathcal{D}$ bölgesinin sınırında birden fazla nokta olsun. O zaman n. dereceden kompleks katsayılı $\mathcal{D}$-kararlı polinomlar ailesi $\mathcal{P}^{\mathcal{S}}$ kümesine homeomorfdur.*

Kanıt.

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = a_n (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)$$

$n.$ dereceden $\mathcal{D}$-kararlı bir polinom olsun. $\mathcal{D}$ bölgesi basit bağlantılı ve $\mathcal{D}$ bölgesinin sınırında birden fazla nokta olduğu için Riemann dönüşüm teoremine göre $\mathcal{D}$ bölgesinden birim diske analitik, bire-bir ve örten bir f fonksiyonu vardır. f fonksiyonu analitik ve bire-bir olduğundan f^{-1} ters fonksiyonu vardır. Açık dönüşüm teoremine göre f^{-1} fonksiyonu süreklidir. f ve f^{-1} fonksiyonları yardımı ile $\mathcal{D}$ kararlı polinomlar ailesinden Schur kararlı polinomlar ailesine bir F homeomorfizması tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} F &: \mathcal{P} \to \mathcal{P}^{\mathcal{S}} \\ F(p(s)) &= a_n[s - f(s_1)] \cdot [s - f(s_2)] \cdots [s - f(s_n)] \end{aligned}$$

dönüşümü sürekli, bire-bir ve örtendir.

$$\begin{aligned} F^{-1} &: \mathcal{P}^{\mathcal{S}} \to \mathcal{P} \\ F^{-1}(\tilde{p}(s)) &= a_n[s - f^{-1}(\tilde{s}_1)] \cdot [s - f^{-1}(\tilde{s}_2)] \cdots [s - f^{-1}(\tilde{s}_n)] \end{aligned}$$

fonksiyonu da süreklidir. Buna göre $\mathcal{P}$ kümesiyle $\mathcal{P}^{\mathcal{S}}$ kümesi homeomorfdur. □

Sonuç 4.1.8. *$\mathcal{D}$ bölgesi basit bağlantılı ve $\mathcal{D}$ nin sınırında birden fazla nokta olsun. $n.$ dereceden kompleks katsayılı $\mathcal{D}$-kararlı polinomlar ailesi tek noktaya büzülemez ve iki noktaya büzülmektedir.*

Sonuç 4.1.9. *$n.$ dereceden kompleks katsayılı $\mathcal{D}$-kararlı polinomlar ailesi, iki noktaya büzülebildiğinden polinomlar uzayında iki basit bağlantılı kümenin birleşimidir.*

Sonuç 4.1.10. *$n.$ dereceden kompleks katsayılı $\mathcal{D}$-kararlı polinomlar ailesi yol bağlantılıdır.*

Aşağıda monik polinomlar ailesinin büzülebilirliği araştırılmaktadır.

$\mathcal{P}_1^1 = \{p(s) : p(s)\ n.$ dereceden kompleks katsayılı $\mathcal{D}$-kararlı monik polinom$\}$

kümesi tanımlansın.

Önerme 4.1.11. *$\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesi basit bağlantılı ve $\mathcal{D}$ bölgesinin sınırında birden fazla nokta olsun. Bu durumda $s_* \in \mathcal{D}$ olmak üzere, n. dereceden $\mathcal{D}$-kararlı monik polinomlar ailesi $(s - s_*)^n$ polinomuna büzülmektedir.*

Kanıt. Teorem 4.1.5 in kanıtınında bahsedildiği gibi $\mathcal{D}$ bölgesinden birim diske analitik, bire-bir ve örten f fonksiyonu vardır. f fonksiyonu analitik ve bire-bir olduğundan f^{-1} ters fonksiyonu vardır. Açık dönüşüm teoremine göre f^{-1} fonksiyonu süreklidir. $f^{-1}(0) = s_* \in \mathcal{D}$ ve $p(s) \in \mathcal{P}_1^1$ olsun.

$$\begin{aligned} F &: \mathcal{P}_1^1 \times [0,1] \to \mathcal{P}_1^1 \\ F(p(s),t) &= [s - f^{-1}[(1-t)f(s_1)]] \cdot [s - f^{-1}[(1-t)f(s_2)]] \cdots \\ &\quad \cdot [s - f^{-1}[(1-t)f(s_n)]] \end{aligned}$$

fonksiyonu süreklidir. Ayrıca

$$\begin{aligned} F(p(s),0) &= p(s), \\ F(p(s),1) &= (s - s_*)^n \end{aligned}$$

olur. $(s - s_*)^n \in \mathcal{P}_1^1$ dir. Buradan $\mathcal{P}_1^1$ polinomlar ailesi $(s - s_*)^n$ polinomuna büzülür. □

Benzer şekilde, gerçel katsayılı $\mathcal{D}$-kararlı polinomlar ailesinin büzülebilirliği de incelenebilir.

$$\mathcal{P}_1^{\mathbb{R}} = \{p(s) : a_n > 0,\ p(s) \text{ gerçel katsayılı } \mathcal{D}\text{-kararlı polinom}\},$$

$$\mathcal{P}_2^{\mathbb{R}} = \{p(s) : a_n < 0,\ p(s) \text{ gerçel katsayılı } \mathcal{D}\text{-kararlı polinom}\}$$

ayrık kümeleri tanımlansın. Burada $\mathcal{D}$ bölgesi kompleks düzlemde gerçel eksene göre simetrik bir bölgedir.

Önerme 4.1.12. *$\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesi sınırında birden fazla nokta olan basit bağlantılı ve gerçel eksene göre simetrik olan bir bölge ve $n = 2k$ olsun. Bu durumda $s_* \in \mathcal{D}$ olmak üzere, $2k$. dereceden $\mathcal{D}$ kararlı gerçel katsayılı polinomlar ailesi iki noktaya büzülmektedir:*

1. Baş katsayısı pozitif olan polinomlardan oluşan $\mathcal{P}_1^{\mathbb{R}}$ polinomlar ailesi $[(s-s_*)\cdot(s-\overline{s}_*)]^k$ polinomuna büzülür.

2. Baş katsayısı negatif olan polinomlardan oluşan $\mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}$ polinomlar ailesi $-[(s-s_*)\cdot(s-\overline{s}_*)]^k$ polinomuna büzülür.

Kanıt. $\mathcal{D}$ bölgesi, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_1^*$ biçimindedir. Burada $*$ işareti kompleks eşleniği göstermektedir. Kompleks düzlemde birim disk $\mathcal{B}$ ile gösterilmişti. 4.1.3 ve 4.1.4 Teoremlerine göre

$$f : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{B}$$

analitik, bire-bir, örten ve f^{-1} ters fonksiyonu sürekli olan bir f fonksiyonu vardır. f ve eşlenik fonksiyon yardımı ile

$$\begin{aligned} g &: \mathcal{D}_1^* \to \mathcal{B} \\ g(s) &= f(\overline{s}) \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda g fonksiyonu sürekli, bire-bir, örten ve g^{-1} tersi de sürekli olan bir fonksiyondur.

$$f^{-1}(0) = s_* \in \mathcal{D}_1$$

olsun.

$$\begin{aligned} g^{-1} &: \mathcal{B} \to \mathcal{D}_1^* \\ g^{-1}(w) &= \overline{f^{-1}(w)} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$g^{-1}(0) = \overline{f^{-1}(0)} = \overline{s}_* \in \mathcal{D}_1^*$$

dır.

$$\begin{aligned} p_t(s) &= a_n \left[s - f^{-1}\left[(1-t)f(s_1)\right]\right] \cdot \left[s - f^{-1}\left[(1-t)f(s_2)\right]\right] \cdots \\ &\cdot \left[s - f^{-1}\left[(1-t)f(s_k)\right]\right] \cdot \left[s - g^{-1}\left[(1-t)g(s_1)\right]\right] \cdot \\ &\cdot \left[s - g^{-1}\left[(1-t)g(s_2)\right]\right] \cdots \left[s - g^{-1}\left[(1-t)g(s_k)\right]\right] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

1.
$$\begin{aligned} F &: \mathcal{P}_1^{\mathbb{R}} \times [0,1] \to \mathcal{P}_1^{\mathbb{R}} \\ F(p(s),t) &= \frac{p_t(s)}{(1-t)+ta_n},\ a_n > 0 \end{aligned}$$

fonksiyonu süreklidir. Ayrıca

$$\begin{aligned} F(p(s),0) &= p(s), \\ F(p(s),1) &= [(s-s_*)\cdot(s-\overline{s}_*)]^k \end{aligned}$$

ve $[(s-s_*)\cdot(s-\overline{s}_*)]^k \in \mathcal{P}_1^{\mathbb{R}}$ dir. Buradan $\mathcal{P}_1^{\mathbb{R}}$ polinomlar ailesi $[(s-s_*)\cdot(s-\overline{s}_*)]^k$ polinomuna büzülür.

2.
$$\begin{aligned} F &: \mathcal{P}_2^{\mathbb{R}} \times [0,1] \to \mathcal{P}_2^{\mathbb{R}} \\ F(p(s),t) &= \frac{p_t(s)}{(1-t)-ta_n},\ a_n < 0 \end{aligned}$$

fonksiyonu süreklidir. Ayrıca

$$\begin{aligned} F(p(s),0) &= p(s), \\ F(p(s),1) &= -[(s-s_*)\cdot(s-\overline{s}_*)]^k \end{aligned}$$

ve $-[(s-s_*)\cdot(s-\overline{s}_*)]^k \in \mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}$ dir. Buradan $\mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}$ polinomlar ailesi $-[(s-s_*)\cdot(s-\overline{s}_*)]^k$ polinomuna büzülmektedir.

□

Sonuç 4.1.13. *$\mathcal{D}$ kararlı gerçel katsayılı çift dereceli polinomlar ailesi iki noktaya büzülebildiğinden, polinomlar uzayında iki basit bağlantılı ayrık kümenin birleşimidir.*

Önerme 4.1.14. *$\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesi sınırında birden fazla nokta olan basit bağlantılı, gerçel eksene göre simetrik bölge ve $n = 2k+1$ olsun. Bu durumda $s_* \in \mathcal{D}$ olmak üzere, $(2k+1)$. dereceden $\mathcal{D}$ kararlı gerçel katsayılı polinomlar ailesi iki noktaya büzülmektedir:*

1. *$\mathcal{P}_1^{\mathbb{R}}$ polinomlar ailesi $(s-s_*)^n$ polinomuna büzülür.*

2. *$\mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}$ polinomlar ailesi $-(s-s_*)^n$ polinomuna büzülür.*

Kanıt. (4.1.1) polinomunun kökleri $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_1^*$ bölgesi içinde olur. $\mathcal{D}$ bölgesi sınırında birden fazla nokta olan basit bağlantılı, gerçel eksene göre simetrik ve gerçel ekseni kesen (n nin tek olmasından dolayı) bir bölge olduğu için Riemann dönüşüm teoremine göre $\mathcal{D}$ bölgesinden birim diske analitik, bire-bir ve örten f fonksiyonu vardır. f fonksiyonu bire-bir olduğundan f^{-1} ters fonksiyonu vardır. Açık dönüşüm teoremine göre f^{-1} fonksiyonu süreklidir. $z_* \in \mathcal{B}$ olmak üzere

$$f^{-1}(z_*) = s_* \in \mathcal{D}$$

gerçel eksen üzerinde olsun.

$p_t(s) = a_n[s - f^{-1}[(1-t)f(s_1)]] \cdot [s - f^{-1}[(1-t)f(s_2)]] \cdots [s - f^{-1}[(1-t)f(s_n)]]$

şeklinde tanımlansın.

1.
$$\begin{aligned} F &: \mathcal{P}_1^{\mathbb{R}} \times [0,1] \to \mathcal{P}_1^{\mathbb{R}} \\ F(p(s),t) &= \frac{p_t(s)}{(1-t)+ta_n}, \ a_n > 0 \end{aligned}$$

fonksiyonu süreklidir. Ayrıca

$$\begin{aligned} F(p(s),0) &= p(s), \\ F(p(s),1) &= (s-s_*)^n \end{aligned}$$

olur. $(s-s_*)^n \in \mathcal{P}_1^{\mathbb{R}}$ dir. Buradan $\mathcal{P}_1^{\mathbb{R}}$ polinomlar ailesi $(s-s_*)^n$ polinomuna büzülür.

2.
$$\begin{aligned} \widetilde{F} &: \mathcal{P}_2^{\mathbb{R}} \times [0,1] \to \mathcal{P}_2^{\mathbb{R}} \\ \widetilde{F}(p(s),t) &= \frac{p_t(s)}{(1-t)-ta_n}, \ a_n < 0 \end{aligned}$$

fonksiyonu süreklidir.

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(p(s),0) &= p(s), \\ \widetilde{F}(p(s),1) &= -(s-s_*)^n \end{aligned}$$

olur. $-(s-s_*)^n \in \mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}$ dir. Buradan da $\mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}$ polinomlar ailesi $-(s-s_*)^n$ polinomuna büzülür.

$\square$

Sonuç 4.1.15. *$\mathcal{D}$ kararlı gerçel katsayılı tek dereceli polinomlar ailesi iki noktaya büzülebildiğinden polinomlar uzayında iki basit bağlantılı ayrık kümenin birleşimidir.*

Sonuç 4.1.16. *$\mathcal{P}_1^{\mathbb{R}}$ ve $\mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}$ kümeleri ayrık olduklarından n. dereceden gerçel katsayılı $\mathcal{D}$ kararlı polinomlar ailesi tek noktaya büzülemez.*

$\mathcal{D}$ bölgesi kompleks düzlemde sol açık yarı düzlem seçilsin.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1^{\mathcal{H}} &= \{p(s) : a_n \notin (-\infty, 0),\ p(s) \text{ kompleks (gerçel) katsayılı Hurwitz} \\ &\quad\ \text{kararlı polinom}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_2^{\mathcal{H}} &= \{p(s) : a_n \in (-\infty, 0),\ p(s) \text{ kompleks (gerçel) katsayılı Hurwitz} \\ &\quad\ \text{kararlı polinom}\},\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

Önerme 4.1.17. *$\mathcal{D} = \{s : s \in \mathbb{C}^-\}$ olsun. n. dereceden kompleks (gerçel) katsayılı Hurwitz kararlı polinomlar ailesi iki noktaya büzülmektedir:*

1. *$\mathcal{P}_1^{\mathcal{H}}$ polinomlar ailesi $(s+1)^n$ polinomuna büzülür.*

2. *$\mathcal{P}_2^{\mathcal{H}}$ polinomlar ailesi $-(s+1)^n$ polinomuna büzülür.*

Kanıt. p polinomu (4.1.1) deki gibi kompleks (gerçel) katsayılı kökleri s_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ olan Hurwitz kararlı bir polinom olsun. $p(s)$ polinomu (4.1.2) şeklinde yazılabilir. Şimdi

$$p_t(s) = a_n[s - (1-t)s_1 + t] \cdot [s - (1-t)s_2 + t] \cdots [s - (1-t)s_n + t]$$

polinomu tanımlansın.

1.
$$\begin{aligned} F &: \mathcal{P}_1^{\mathcal{H}} \times [0,1] \to \mathcal{P}_1^{\mathcal{H}} \\ F(p(s), t) &= \frac{p_t(s)}{(1-t) + ta_n},\ a_n \notin (-\infty, 0) \end{aligned}$$

fonksiyonu süreklidir.

$$\begin{aligned} F(p(s),0) &= p(s), \\ F(p(s),1) &= (s+1)^n \end{aligned}$$

ve $(s+1)^n \in \mathcal{P}_1^{\mathcal{H}}$ dır. Buradan $\mathcal{P}_1^{\mathcal{H}}$ polinomlar ailesi $(s+1)^n$ polinomuna büzülür.

2.

$$\begin{aligned} \widetilde{F} &: \mathcal{P}_2^{\mathcal{H}} \times [0,1] \to \mathcal{P}_2^{\mathcal{H}} \\ \widetilde{F}(p(s),t) &= \frac{p_t(s)}{(1-t)-ta_n}, \ a_n \in (-\infty,0) \end{aligned}$$

fonksiyonu süreklidir.

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(p(s),0) &= p(s), \\ \widetilde{F}(p(s),1) &= -(s+1)^n \end{aligned}$$

ve $-(s+1)^n \in \mathcal{P}_2^{\mathcal{H}}$ olduğundan $\mathcal{P}_2^{\mathcal{H}}$ polinomlar ailesi $-(s+1)^n$ polinomuna büzülür.

□

Sonuç 4.1.18. *n. dereceden kompleks (gerçel) katsayılı Hurwitz kararlı polinomlar ailesi iki basit bağlantılı ayrık kümenin birleşimidir.*

$\mathcal{D}$ bölgesi kompleks düzlemde açık birim disk seçilirse, Schur kararlı polinomların büzülebilirliğinden sözedilebilir. Bunun için

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1^{\mathcal{S}} &= \{p(s) : a_n \notin (-\infty,0),\ p(s) \text{ kompleks (gerçel) katsayılı Schur} \\ &\qquad \text{kararlı polinom}\}, \\ \mathcal{P}_2^{\mathcal{S}} &= \{p(s) : a_n \in (-\infty,0),\ p(s) \text{ kompleks (gerçel) katsayılı Schur} \\ &\qquad \text{kararlı polinom}\}, \end{aligned}$$

olsun.

Önerme 4.1.19. *$\mathcal{D} = \{s : |s| < 1, s \in \mathbb{C}\}$ olsun. n. dereceden kompleks (gerçel) katsayılı Schur kararlı polinomlar ailesi iki noktaya büzülmektedir:*

1. $\mathcal{P}_1^{\mathcal{S}}$ polinomlar ailesi s^n polinomuna büzülür.

2. $\mathcal{P}_2^{\mathcal{S}}$ polinomlar ailesi $-s^n$ polinomuna büzülmektedir.

Kanıt. p polinomu (4.1.1) deki gibi kompleks (gerçel) katsayılı ve kökleri ve $|s_i| < 1$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ olan Schur kararlı bir polinom olsun. $p(s)$ polinomu (4.1.2) şeklinde yazılabilir.

$$p_t(s) = a_n[s - (1-t)s_1] \cdot [s - (1-t)s_2] \cdots [s - (1-t)s_n]$$

şeklinde tanımlansın.

1.
$$\begin{aligned} F &: \mathcal{P}_1^{\mathcal{S}} \times [0,1] \to \mathcal{P}_1^{\mathcal{S}} \\ F(p(s),t) &= \frac{p_t(s)}{(1-t)+ta_n}, \; a_n \notin (-\infty, 0) \end{aligned}$$

fonksiyonu süreklidir.

$$\begin{aligned} F(p(s),0) &= p(s), \\ F(p(s),1) &= s^n \end{aligned}$$

dır. $s^n \in \mathcal{P}_1^{\mathcal{S}}$ dır. Buradan $\mathcal{P}_1^{\mathcal{S}}$ polinomlar ailesi s^n polinomuna büzülür.

2.
$$\begin{aligned} \tilde{F} &: \mathcal{P}_2^{\mathcal{S}} \times [0,1] \to \mathcal{P}_2^{\mathcal{S}} \\ \tilde{F}(p(s),t) &= \frac{p_t(s)}{(1-t)-ta_n}, \; a_n \in (-\infty, 0) \end{aligned}$$

fonksiyonu süreklidir.

$$\begin{aligned} \tilde{F}(p(s),0) &= p(s), \\ \tilde{F}(p(s),1) &= -s^n \end{aligned}$$

$-s^n \in \mathcal{P}_2^{\mathcal{S}}$ dir. Buradan $\mathcal{P}_2^{\mathcal{S}}$ polinomlar ailesi $-s^n$ polinomuna büzülür.

□

Sonuç 4.1.20. *n. dereceden kompleks (gerçel) katsayılı Schur kararlı polinomlar ailesi iki basit bağlantılı ayrık kümenin birleşimidir.*

4.2 Kararlı Matrisler Ailesinin Büzülebilirliği

Bu kısımda, $n \times n$ boyutlu kararlı matrisler ailesinin tek noktaya büzülebilir olduğu gösterilmiştir. Diagonal kararlı ve D-kararlı matrisler ailesinin büzülebilirliği de araştırılmıştır.

Önerme 4.2.1. *$\mathcal{S}$, $n \times n$ boyutlu Schur kararlı kompleks (gerçel) matrisler ailesi* 0 *matrisine büzülebilirdir.*

Kanıt.

$$\begin{aligned} F &: \mathcal{S} \times [0,1] \to \mathcal{S} \\ F(A,t) &= (1-t)A \end{aligned}$$

sürekli fonksiyondur. A Schur kararlı matris ise, her $t \in [0,1]$ için $(1-t)A$ matrisi de Schur kararlı olur.

$$F(A,0) = A,\ F(A,1) = 0$$

dır ve sıfır matrisi Schur kararlı matristir. Bu durumda $n \times n$ boyutlu Schur kararlı matrisler ailesi büzülebilir kümedir ve 0 matrisine büzülebilir. □

Sonuç 4.2.2. *$\mathcal{S}$ ailesi basit bağlantılıdır.*

I, $n \times n$ boyutlu birim matrisi göstersin.

Önerme 4.2.3. *$\mathcal{H}$, $n \times n$ boyutlu Hurwitz kararlı kompleks (gerçel) matrisler ailesi $-I$ matrisine büzülebilirdir.*

Kanıt.

$$\begin{aligned} F &: \mathcal{H} \times [0,1] \to \mathcal{H} \\ F(A,t) &= (1-t)A - tI \end{aligned}$$

fonksiyonu süreklidir. $\dfrac{t}{1-t} = \alpha$ denirse, her $t \in (0,1)$ için $\alpha > 0$ dır. A matrisi Hurwitz kararlı ise $A - \alpha I$ matrisi de Hurwitz kararlı olur. Gerçekten, A matrisinin keyfi özdeğeri λ ise, A matrisi Hurwitz kararlı olduğu için $Re(\lambda) < 0$ dır. Özdeğerin tanımından,

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= 0 \\ det(A - \lambda I - \alpha I + \alpha I) &= 0 \\ det(A - \alpha I - (\lambda - \alpha) I) &= 0 \end{aligned}$$

olur. $\alpha > 0$ ve $Re(\lambda) < 0$ olduğu için $Re(\lambda - \alpha) < 0$ olur. Buradan $A - \alpha I$ matrisinin de Hurwitz kararlı olduğu görülür. Ayrıca

$$F(A,0) = A, \; F(A,1) = -I$$

dır ve $-I$ matrisi Hurwitz kararlıdır. Bu durumda $n \times n$ boyutlu Hurwitz kararlı matrisler ailesi büzülebilir kümedir ve $-I$ matrisine büzülebilir. □

Sonuç 4.2.4. *$\mathcal{H}$, $n \times n$ boyutlu Hurwitz kararlı matrisler ailesi basit bağlantılıdır.*

Önerme 4.2.5. *$\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ konveks küme ve $z_* \in \mathcal{D}$ olsun. $\mathcal{M}$, $n \times n$ boyutlu $\mathcal{D}$-kararlı kompleks matrisler ailesi $z_* I$ matrisine büzülebilirdir.*

Kanıt.

$$\begin{aligned} F &: \mathcal{M} \times [0,1] \to \mathcal{M} \\ F(A,t) &= (1-t)A + tz_* I \end{aligned}$$

sürekli fonksiyondur. A matrisi $\mathcal{D}$-kararlı ise, $(1-t)A + tz_* I$ matrisi de $\mathcal{D}$-kararlıdır. Çünkü $(1-t)A + tz_* I$ matrisinin keyfi özdeğeri λ ise, sıfırdan farklı her x vektörü için

$$\begin{aligned} ((1-t)A + tz_* I)x &= \lambda x \\ Ax &= \frac{(\lambda - tz_*)}{1-t} x, \; t \neq 1 \end{aligned}$$

olur. A matrisi $\mathcal{D}$-kararlı olduğu için $\dfrac{(\lambda - tz_*)}{1-t} \in \mathcal{D}$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} \lambda &\in (1-t)\mathcal{D} + tz_* \\ \lambda &= (1-t)d + tz_*, \; d \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

dir. $\mathcal{D}$ kümesi konveks olduğu için $\lambda \in \mathcal{D}$ olur. Böylece $(1-t)A + tz_* I$ matrisinin de $\mathcal{D}$-kararlı olduğu gösterilmiş olur.

$$F(A,0) = A, \; F(A,1) = z_* I$$

dır ve $z_* I$ matrisi $\mathcal{D}$-kararlıdır. Bu durumda, $n \times n$ boyutlu $\mathcal{D}$-kararlı matrisler ailesi büzülebilir kümedir ve $z_* I$ matrisine büzülebilir. □

Sonuç 4.2.6. *$\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ konveks küme olmak üzere, $\mathcal{M}$ $n \times n$ boyutlu $\mathcal{D}$-kararlı kompleks matrisler ailesi basit bağlantılıdır.*

Sonuç 4.2.7. *$\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ konveks küme, $\mathcal{D} \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ ve $z_* \in \mathcal{D}$ gerçel eksen üzerinde bir nokta olsun. $n \times n$ boyutlu $\mathcal{D}$-kararlı gerçel matrisler ailesi büzülebilir kümedir ve $z_* I$ matrisine büzülebilirdir.*

Önerme 4.2.8. *$\mathcal{D}_d$, $n \times n$ boyutlu Schur diagonal kararlı matrisler ailesi* 0 *matrisine büzülebilirdir.*

Kanıt.

$$\begin{aligned} F &: \mathcal{D}_d \times [0,1] \to \mathcal{D}_d \\ F(A,t) &= (1-t)A \end{aligned}$$

süreklidir. A Schur diagonal kararlı matris ise her $t \in [0,1]$ için $(1-t)A$ matrisi de Önerme 3.1.6 e göre Schur diagonal kararlı olur.

$$F(A,0) = A, \; F(A,1) = 0$$

olur ve 0 matrisi Schur diagonal kararlı matristir. Bu durumda $n \times n$ boyutlu Schur diagonal kararlı matrisler ailesi büzülebilir kümedir ve 0 matrisine büzülebilir. □

Sonuç 4.2.9. *$\mathcal{D}_d$, $n \times n$ boyutlu Schur diagonal kararlı matrisler ailesi basit bağlantılıdır.*

Önerme 4.2.10. *$\mathcal{D}_c$, $n \times n$ boyutlu Hurwitz diagonal kararlı matrisler ailesi $-I$ matrisine büzülebilirdir.*

Kanıt.

$$\begin{aligned} F &: \mathcal{D}_c \times [0,1] \to \mathcal{D}_c \\ F(A,t) &= (1-t)A - tI \end{aligned}$$

fonksiyonu süreklidir. $\dfrac{t}{1-t} = \alpha$ denirse, her $t \in (0,1)$ için $\alpha > 0$ dır. A matrisi Hurwitz diagonal kararlı ise $A - \alpha I$ matrisi de Hurwitz diagonal kararlı olur. Çünkü, A matrisi Hurwitz diagonal kararlı olduğundan, en az bir P pozitif diagonal matrisi için Lyapunov eşitsizliğini sağlar; yani $A^TP + PA < 0$ dır. Aynı P pozitif diagonal matrisi için,

$$(A - \alpha I)^T P + P(A - \alpha I) = \underbrace{A^T P + PA}_{<0} - \underbrace{2\alpha P}_{>0} < 0$$

olur. Buradan $A - \alpha I$ Hurwitz diagonal kararlı matristir.

$$F(A, 0) = A,\ F(A, 1) = -I$$

dır. $-I$ matrisi Hurwitz diagonal kararlıdır. Bu durumda $n \times n$ boyutlu Hurwitz diagonal kararlı matrisler ailesi büzülebilir kümedir ve $-I$ matrisine büzülebilir. $\square$

Sonuç 4.2.11. *$\mathcal{D}_c$, $n \times n$ boyutlu Hurwitz diagonal kararlı matrisler ailesi basit bağlantılıdır.*

Önerme 4.2.12. *$\mathbb{D}_d$, $n \times n$ boyutlu Schur D-kararlı matrisler ailesi* 0 *matrisine büzülebilirdir.*

Kanıt.

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{D}_d \times [0,1] \to \mathbb{D}_d \\ F(A,t) &= (1-t)A \end{aligned}$$

sürekli fonksiyondur. A Schur D-kararlı matris ise her $|D| \leq I$ için AD Schur kararlı matristir. Burada $|D| \leq I$ ile $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $|d_i| \leq 1$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ kastedilmektedir. Her $t \in [0, 1]$ için $(1 - t)AD$ matrisi Schur kararlı olduğu için her $t \in [0, 1]$ için $(1 - t)A$ matrisi Schur D-kararlı olur.

$$F(A, 0) = A,\ F(A, 1) = 0$$

dır ve 0 matrisi Schur D-kararlı matristir. Bu durumda $n \times n$ boyutlu Schur D-kararlı matrisler ailesi büzülebilir kümedir ve 0 matrisine büzülebilir. $\square$

Sonuç 4.2.13. *$\mathbb{D}_d$, $n \times n$ boyutlu Schur D-kararlı matrisler ailesi basit bağlantılıdır.*

Önerme 4.2.14. *$\mathbb{D}_c$, 2×2 boyutlu Hurwitz D-kararlı gerçel matrisler ailesi $-I$ matrisine büzülebilirdir.*

Kanıt.

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{D}_c \times [0,1] \to \mathbb{D}_c \\ F(A,t) &= (1-t)A - tI \end{aligned}$$

sürekli fonksiyondur. $\dfrac{t}{1-t} = \alpha$ denirse, her $t \in (0,1)$ için $\alpha > 0$ dır.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matrisi Hurwitz D-kararlı ise $A - \alpha I$ matrisi de Hurwitz D-kararlı olur. Gerçekten, A matrisi Hurwitz D-kararlı ise her

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}, \; d_1, d_2 > 0$$

diagonal matrisi için

$$AD = \begin{pmatrix} ad_1 & bd_2 \\ cd_1 & dd_2 \end{pmatrix}$$

matrisi Hurwitz kararlı olur. AD matrisinin karakteristik polinomu,

$$p_{AD}(s) = s^2 - (ad_1 + dd_2)s + d_1 d_2(ad - bc)$$

dır. 2. dereceden polinomun Hurwitz kararlılığı kriterinden

$$ad_1 + dd_2 < 0 \text{ ve } d_1 d_2(ad - bc) > 0 \tag{4.2.6}$$

dır. $D = I$ matrisi için A matrisi Hurwitz kararlı olacağından A matrisinin kararkteristik polinomu,

$$p_A(s) = s^2 - (a + d)s + ad - bc$$

olup 2. dereceden polinomun Hurwitz kararlılığı kriterinden

$$a + d < 0 \text{ ve } ad - bc > 0 \tag{4.2.7}$$

dır.

$$(A-\alpha I)D = \begin{bmatrix} (a-\alpha)d_1 & bd_2 \\ cd_1 & (d-\alpha)d_2 \end{bmatrix}$$

matrisinin karakteristik polinomu ise,

$$\begin{aligned} p_{(A-\alpha I)D}(s) &= s^2 + (\alpha(d_1+d_2) - (ad_1+dd_2))\,s + \\ &\quad + \left(ad - bc + \alpha^2 - \alpha(a+d)\right) d_1 d_2 \end{aligned}$$

dır. (4.2.6) ve (4.2.7) eşitsizliklerinden $p_{(A-\alpha I)D}(s)$ polinomunun tüm katsayıları pozitif olduğu için $p_{(A-\alpha I)D}(s)$ polinomu Hurwitz kararlıdır. Buradan $(A-\alpha I)D$ matrisi Hurwitz kararlı buradan da $A-\alpha I$ matrisi Hurwitz D-kararlı olur.

$$F(A,0) = A,\ F(A,1) = -I$$

dır, $-I$ matrisi Hurwitz D-kararlı olduğundan 2×2 boyutlu Hurwitz D-kararlı gerçel matrisler ailesi büzülebilir kümedir ve $-I$ matrisine büzülebilir. □

Önerme 4.2.15. $\mathbb{D}_c$, 3×3 *boyutlu Hurwitz D-kararlı gerçel matrisler ailesi* $-I$ *matrisine büzülebilirdir.*

Kanıt.

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{D}_c \times [0,1] \to \mathbb{D}_c \\ F(A,t) &= (1-t)A - tI \end{aligned}$$

sürekli fonksiyondur. $\frac{t}{1-t} = \alpha$ denirse, her $t \in (0,1)$ için $\alpha > 0$ dır. A matrisi Hurwitz D-kararlı ise $A-\alpha I$ matrisi de Hurwitz D-kararlı olur. Gerçekten [21] deki teoreme göre A matrisi Hurwitz D-kararlı ise her $D \geq 0$ diagonal matrisi için $A-D$ matrisi de Hurwitz D-kararlıdır. Burada $D=\alpha I$ alınırsa $A-\alpha I$ matrisi de Hurwitz D-kararlı matris olur.

$$F(A,0) = A,\ F(A,1) = -I$$

dır ve $-I$ matrisi Hurwitz D-kararlı olduğundan 3×3 boyutlu Hurwitz D-kararlı gerçel matrisler ailesi büzülebilir kümedir ve $-I$ matrisine büzülebilirdir. □

Sonuç 4.2.16. $\mathbb{D}_c$, 2×2 *ve* 3×3 *boyutlu Hurwitz D-kararlı matrisler ailesi basit bağlantılıdır.*

$n \times n$ boyutlu Hurwitz D-kararlı gerçel matrisler ailesinin büzülebilir olup olmadığı ise bilinmemektedir.

5 KONVEKS YÖNLER, ARALIK POLİNOMLAR ve 2×2, 3×3 ARALIK MATRİSLER AİLESİ

Bu bölümde, kararlı polinomlar uzayında düşük dereceli polinomların Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Matrisler için konveks yön kavramı ele alınmıştır. Aralık polinomlar ailesinin kararlılığı için bilinen teoremin Rantzer'in artım koşulu kullanılarak yeni bir kanıtı yapılmıştır. 2×2 ve 3×3 aralık matrisler ailesinin gürbüz kararlılığı için gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

5.1 Polinomlar İçin Schur Konveks Yön Kavramı

Bu kısımda, gürbüz kararlılıkta önemli rol oynayan konveks yönlerden bahsedilecek ve derecesi $n \leq 3$ olan bir polinomun Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşullar verilecektir.

Tanım 5.1.1. *n. dereceden Schur (Hurwitz) kararlı polinomlar uzayında, aşağıdaki koşulları sağlayan ve derecesi $m \leq n$ olan $g(z)$ polinomuna Schur (Hurwitz) konveks yön denir.*

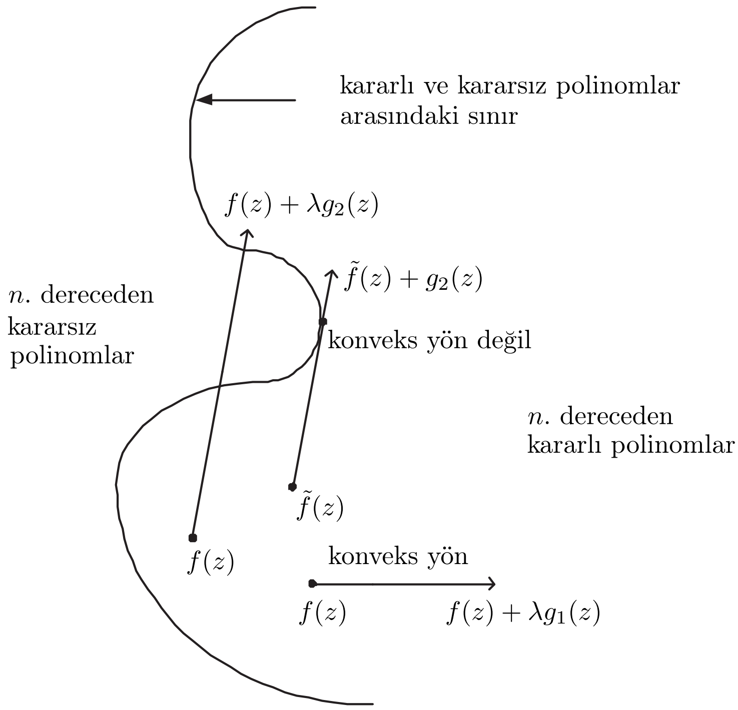
1. *$f(z)$ n. dereceden Schur (Hurwitz) kararlı,*

2. *$f(z) + g(z)$ Schur (Hurwitz) kararlı,*

3. *Her $\lambda \in [0, 1]$ için derece$(f(z) + \lambda g(z)) = n$ iken,*

her $\lambda \in (0, 1)$ için $f(z) + \lambda g(z)$ polinomu Schur (Hurwitz) kararlıdır.

Şekil 5.1 den de açıkça görüldüğü gibi, kararlı polinomlar uzayında her $\lambda \in [0, 1]$ için $f(z)+\lambda g_1(z)$ kararlı kaldığından, $g_1(z)$ polinomu konveks yöndür. Diğer taraftan, $f(z) + \lambda g_2(z)$ polinomu en az bir $\lambda > 0$ değeri için kararsız olduğundan, $g_2(z)$ polinomu konveks yön değildir.



Şekil 5.1: Polinomlar uzayında konveks yönler

Teorem 5.1.2. *$g(z)$ polinomunun Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşul*

$$\tilde{g}(s) = (s-1)^m \, g(\frac{s+1}{s-1}) \tag{5.1.1}$$

polinomunun Hurwitz konveks yön olmasıdır.

Bu teorem, Hurwitz kararlılıkla Schur kararlılık arasındaki bilinen bağlantının bir sonucudur.

Tanım 5.1.3 ([1], [22])**.** *Her $w > 0$, $\tilde{g}(iw) \neq 0$ için*

$$\frac{d}{dw}\arg(\tilde{g}(iw)) \leq \left|\frac{\sin 2(\arg(\tilde{g}(iw)))}{2w}\right| \tag{5.1.2}$$

koşulunu sağlayan $\tilde{g}(s)$ polinomuna, "growth" artım koşulunu sağlayan polinom denir.

Teorem 5.1.4 ([22])**.** *$\tilde{g}(s)$ polinomunun Hurwitz konveks yön olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{g}(s)$ polinomunun (5.1.2) artım koşulunu sağlamasıdır.*

$$\tilde{g}(iw) = x(w) + iy(w) \tag{5.1.3}$$

olmak üzere, (5.1.2) artım koşulu aşağıdaki forma dönüştürülebilir [23]. Burada, $x(w)$ ve $y(w)$ gerçel değerli fonksiyonlardır.

$$y'(w)x(w) - x'(w)y(w) \leq \frac{1}{w}\left|x(w)y(w)\right|, \forall w > 0 \tag{5.1.4}$$

$x'(w)$ ve $y'(w)$ ile türev kastedilmektedir.

$\tilde{g}(s)$ polinomu Hurwitz konveks yön ise, her $k \neq 0$ sayısı için $k\tilde{g}(s)$ polinomu da Hurwitz konveks yön olur [1].

5.1.1 I. Dereceden Schur Konveks Yön

$$g_1(z) = z + a$$

olsun. Bu durumda,

$$\tilde{g}_1(s) = s + \frac{1-a}{1+a},\ 1 + a \neq 0$$

olur. $\tilde{g}_1(s)$ polinomu için (5.1.4) artım koşulu

$$\frac{1-a}{1+a} \leq \left|\frac{1-a}{1+a}\right|$$

eşitsizliğine denktir. Bu eşitsizlik tüm $a \neq -1$ değerleri için sağlanır.

Eğer $a = -1$ olursa,

$$g_1(z) = z - 1 \Rightarrow \tilde{g}_1(s) = (s-1)(\frac{s+1}{s-1} - 1) \Rightarrow \tilde{g}_1(s) = 2$$

olur. Her sabit polinom Hurwitz konveks yön olduğundan, her a için $g_1(z)$ polinomu Schur konveks yön olur.

Sonuç 5.1.2. *Schur kararlı polinomlar uzayında* 1. *dereceden her polinom Schur konveks yöndür.*

5.1.2 II. Dereceden Schur Konveks Yön

$$g_2(z) = z^2 + bz + a$$

olsun.

$$\tilde{g}_2(s) = s^2 + \frac{2(1-a)}{1+a+b}s + \frac{1+a-b}{1+a+b}, \; 1+a+b \neq 0$$

olur. $\tilde{g}_2(s)$ polinomu için (5.1.4) artım koşulundan

$$\frac{2(1-a)}{1+a+b} \leq 0 \text{ veya } \frac{1+a-b}{1+a+b} \leq 0$$

elde edilir.

Önerme 5.1.3. *$g_2(z)$ polinomunun Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşul*

$$a \geq 1, a+b > -1$$

veya

$$a \leq 1, a+b < -1$$

veya

$$a-b \leq -1, a+b > -1$$

veya

$$a-b \geq -1, a+b < -1$$

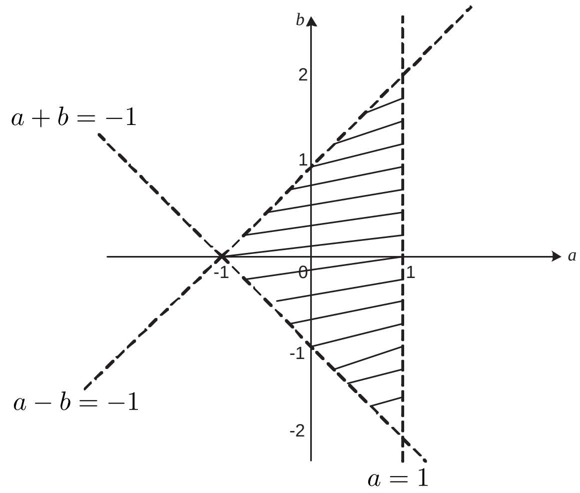
olmasıdır.

Buradan şu sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1.4. *$g_2(z)$ polinomunun Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşul (a,b) vektörünün Şekil 5.2 deki taralı bölgenin dışında olmasıdır.*

5.1.3 III. Dereceden Schur Konveks Yön

3. dereceden bir polinomun Hurwitz konveks yön olması için bilinen koşullar kullanılarak, 3. dereceden bir polinomun Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşul verilebilir.



Şekil 5.2: II. dereceden Schur konveks yönlere karşılık gelen bölgenin tümleyeni

Yardımcı Teorem 5.1.4 ([23])**.** 3. *dereceden* $c(s) = s^3 + \alpha s^2 + \beta s + \gamma$ *polinomunun Hurwitz konveks yön olması için gerek ve yeter koşul*

$$\alpha\beta \leq \gamma \text{ veya } \alpha w^4 - 2\gamma w^2 + \beta\gamma \leq 0,\ \forall w > 0 \tag{5.1.5}$$

olmasıdır.

Yukarıdaki Yardımcı Teorem daha da iyileştirilerek aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Sonuç 5.1.5. $c(s)$ *polinomunun* (5.1.5) *artım koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul*

$$\alpha\beta \leq \gamma \text{ veya } \alpha < 0,\ \beta \leq 0,\ \gamma \geq 0 \tag{5.1.6}$$

olmasıdır.

Kanıt.

$$\alpha w^4 - 2\gamma w^2 + \beta\gamma \leq 0 \tag{5.1.7}$$

eşitsizliğini araştırmak için $w^2 = t$ olsun. Buradan

$$\sup_{t>0}(\alpha t^2 - 2\gamma t + \beta\gamma) \leq 0 \tag{5.1.8}$$

olur.

$$\alpha\beta > \gamma, \ \sup_{t>0} \left(\alpha t^2 - 2\gamma t + \beta\gamma\right) \leq 0 \tag{5.1.9}$$

eşitsizlikleri doğru ise

$$\alpha < 0, \ \beta \leq 0, \ \gamma \geq 0 \tag{5.1.10}$$

olduğunu göstermek gerekmektedir.

$\alpha > 0$ olsun. $t \to \infty$ iken $\alpha t^2 - 2\gamma t + \beta\gamma \to \infty$ olacağından, (5.1.8) eşitsizliği sağlanmaz, bu durumda $\alpha > 0$ olamaz. (5.1.9) ifadesinin ikinci eşitsizliğine göre $\alpha \leq 0$ olmalıdır. $\alpha = 0$ olması da mümkün değildir. Eğer $\alpha = 0$ olursa, (5.1.9) dan $\gamma < 0$ elde edilir, bu ise (5.1.9) ifadesinin ikinci eşitsizliğine çelişkidir. Dolayısıyla $\alpha < 0$ dır. Bu durumda

$$\sup_{t>0} \left(t^2 - \frac{2\gamma}{\alpha} t + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right) \geq 0 \tag{5.1.11}$$

elde edilir. (5.1.11) in gerçekleşmesi için parantez içindeki üç terimlinin Δ diskirminantı için üç durum vardır:

1. $\Delta = 0$,

2. $\Delta < 0$,

3. $\Delta > 0$, ancak üçterimlinin t_1 ve t_2 köklerinin her ikisi pozitif değil.

1. durumda,

$$\Delta = \frac{1}{\alpha^2} \left(\gamma(\gamma - \alpha\beta)\right) = 0$$

dır. (5.1.9) ifadesinin ilk eşitsizliğinde $\gamma - \alpha\beta < 0$ olduğu için $\gamma = 0$ bulunur.

2. durumda,

$$\Delta = \frac{1}{\alpha^2} \left(\gamma(\underbrace{\gamma - \alpha\beta}_{<0})\right) < 0$$

olduğundan, $\gamma > 0$ elde edilir.

3. durumda, $\Delta > 0$ dan $\gamma(\gamma - \alpha\beta) > 0$, buradan da $\gamma < 0$ elde edilir. Bu eşitsizlik ise, $\alpha < 0$ eşitsizliği ile birlikte

$$t_1 + t_2 = \frac{2\gamma}{\alpha} \leq 0$$

eşitsizliği ile çelişir. Yani 3. durum gerçekleşemez.

Diğer taraftan, $\alpha < 0$, $\gamma \geq 0$ ise $\alpha\beta > \gamma$ eşitsizliğinden, $\beta \leq 0$ elde edilir.

Tersine, (5.1.6) eşitsizliğinden, (5.1.5) in çıktığı açıktır. $\square$

Elde edilen Sonuç 5.1.5, 3. dereceden polinomun Schur konveks yön olması problemine uygulanabilir.

$$g_3(z) = z^3 + cz^2 + bz + a$$

olsun.

$$\tilde{g}_3(s) = s^3 + \underbrace{\frac{3-3a-b+c}{1+a+b+c}}_{\alpha} s^2 + \underbrace{\frac{3+3a-b-c}{1+a+b+c}}_{\beta} s + \underbrace{\frac{1-a+b-c}{1+a+b+c}}_{\gamma}, \quad 1+a+b+c \neq 0$$

olur. $\tilde{g}_3(s)$ polinomunun (5.1.6) eşitsizliklerini sağlaması için

$$a^2 + b - ac - 1 \geq 0 \text{ veya}$$

$$\frac{3-3a-b+c}{1+a+b+c} < 0, \quad \frac{3+3a-b-c}{1+a+b+c} \leq 0, \quad \frac{1-a+b-c}{1+a+b+c} \geq 0$$

olmalıdır. O halde, 3. dereceden bir polinomun Schur konveks yön olması için şu sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1.6. *$g_3(z)$ polinomunun Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşul*

$$A: \; a^2 + b - ac - 1 \geq 0$$

veya

$$\left\{ \begin{array}{c} A_1: \; 1+a+b+c > 0 \\ A_2: \; 3-3a-b+c < 0 \\ A_3: \; 3+3a-b-c \leq 0 \\ A_4: \; 1-a+b-c \geq 0 \end{array} \right\} \; \textit{veya} \; \left\{ \begin{array}{c} B_1: \; 1+a+b+c < 0 \\ B_2: \; 3-3a-b+c > 0 \\ B_3: \; 3+3a-b-c \geq 0 \\ B_4: \; 1-a+b-c \leq 0 \end{array} \right\}$$

olmasıdır.

3. dereceden bir polinomun Schur konveks yön olduğu bölge Sonuç 5.1.6 da verilmiştir ve bu bölge $\mathcal{K}$ ile gösterilsin.

$$\mathcal{K} = A \cup \{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\} \cup \{B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4\}$$

olur. Bu bölgenin tümleyeni alındığında,

$$\mathcal{K}^{'} = A^{'} \cap \{A_1^{'} \cup A_2^{'} \cup A_3^{'} \cup A_4^{'}\} \cap \{B_1^{'} \cup B_2^{'} \cup B_3^{'} \cup B_4^{'}\}$$

dır. Yani

$$A^{'}: \ a^2 + b - ac - 1 < 0$$

$$\text{ve}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} A_1^{'}: \ 1+a+b+c \leq 0 \\ veya \\ A_2^{'}: \ 3-3a-b+c \geq 0 \\ veya \\ A_3^{'}: \ 3+3a-b-c > 0 \\ veya \\ A_4^{'}: \ 1-a+b-c < 0 \end{array} \right\} \text{ ve } \left\{ \begin{array}{c} B_1^{'}: \ 1+a+b+c \geq 0 \\ veya \\ B_2^{'}: \ 3-3a-b+c \leq 0 \\ veya \\ B_3^{'}: \ 3+3a-b-c < 0 \\ veya \\ B_4^{'}: \ 1-a+b-c > 0 \end{array} \right\}$$

bulunur. Tümleyenin oluşturduğu $\mathcal{K}^{'}$ bölgesinden örneğin

$$A^{'} = \{(a,b,c) : a^2 + b - ac - 1 < 0\}$$

$$A_1^{'} = \{(a,b,c) : 1 + a + b + c \leq 0\}$$

$$B_3^{'} = \{(a,b,c) : 3 + 3a - b - c < 0\}$$

eşitsizlikleri ele alınıp, $b = 0$, $a = -n$, $c = 2a$ seçilirse,

$$\underbrace{-n^2 - 1}_{n \to \infty} \to -\infty$$

olacağından, $A^{'} \cap A_1^{'} \cap B_3^{'}$ nün sınırsız olduğu görülür. Buradan $\mathcal{K}^{'}$ bölgesi sınırsızdır.

Sonuç olarak, 2. dereceden Schur konveks yön olmayan polinomların katsayılarının oluşturduğu bölge sınırlı olmasına rağmen, 3. dereceden Schur konveks yön olmayan polinomlarda böyle bölge sınırsızdır.

Örnek 5.1.7.

$$p_1(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$$
$$p_2(z) = b_3z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0$$

simetrik kısımları aynı olan polinomlar ise, $p_2(z) - p_1(z)$ *Schur konveks yön olur. Simetrik kısımlarının aynı olması,*

$$\begin{aligned} a_0 + a_3 &= b_0 + b_3 \\ a_1 + a_2 &= b_1 + b_2 \end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlanması demektir. Gerçekten,

$$p_2(z) - p_1(z) = \left(z^3 + \underbrace{\frac{b_2 - a_2}{b_3 - a_3}}_{c} z^2 + \underbrace{\frac{b_1 - a_1}{b_3 - a_3}}_{b} z + \underbrace{\frac{b_0 - a_0}{b_3 - a_3}}_{a} \right) \cdot (b_3 - a_3)$$

olur.

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \Rightarrow b_1 - a_1 = -(b_2 - a_2)$$

$$a_0 + a_3 = b_0 + b_3 \Rightarrow b_3 - a_3 = -(b_0 - a_0)$$

dır.

$$a = \frac{b_0 - a_0}{b_3 - a_3} = \frac{b_0 - a_0}{-(b_0 - a_0)} = -1$$

bulunur.

$p_2(z) - p_1(z)$ *in Schur konveks yön olması için, III. dereceden Schur konveks yön koşullarından birini sağlaması gerekir. Burada* $a^2 + b - ac - 1 \geq 0$ *koşulu sağlanır. Gerçekten elde edilen değerler yerine yazılırsa,*

$$\begin{aligned} (-1)^2 + \frac{b_1 - a_1}{b_3 - a_3} - (-1)\frac{b_2 - a_2}{b_3 - a_3} - 1 &= \frac{b_1 - a_1 + b_2 - a_2}{b_3 - a_3} \\ &= \frac{b_1 - a_1 - (b_1 - a_1)}{b_3 - a_3} = 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde, $p_2(z) - p_1(z)$ *Schur konveks yöndür.*

5.2 Matrisler İçin Schur Konveks Yön Kavramı

Polinomların gürbüz Schur ve Hurwitz kararlılığının incelenmesinde konveks yön kavramı sık kullanılmıştır. Fakat matrisler için konveks yön kavramına daha az değinilmiştir. [24] makalesinde, matrisler için Hurwitz konveks yönler karakterize edilmiştir. Burada ise Schur kararlı matrisler uzayında bir matrisin Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşul olan bilinen bir teorem verilecektir.

Tanım 5.2.1. *$n \times n$ Schur (Hurwitz) kararlı matrisler uzayında, A matrisi Schur (Hurwitz) kararlı ve $A + G$ matrisi de Schur (Hurwitz) kararlı iken, her $\lambda \in (0, 1)$ için $A+\lambda G$ matrisi de Schur (Hurwitz) kararlı oluyor ise G matrisine Schur (Hurwitz) konveks yön denir.*

Tanım 5.2.2. *Eğer tekil olmayan bir $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi için $B = S^{-1}AS$ eşitliği sağlanıyor ise, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisine $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisine benzerdir denir.*

Schur kararlı matrisler uzayında konveks yönlerin bir kaç özel sınıfta toplandığını karakterize eden teorem şu şekildedir.

Teorem 5.2.3 ([25])**.** *G matrisinin Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki matrislerden birine benzer olmasıdır.*

i) $G_1 = \alpha I_n$

ii) $G_2 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G_3 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

iii) $G_4 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Burada I_n matrisi $n \times n$ birim matris, α ise gerçel sayıdır.

Örnek 5.2.4. 2×2 *boyutlu Schur kararlı matrisler uzayında,*

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi Schur konveks yön iken,

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

matrisi Schur konveks yön değildir. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} -1.5 & 1.6 \\ -0.8 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Schur kararlı matrisi ele alındığında, $A + C_1$ *ve* $A + C_2$ *matrisleri de Schur kararlıdır. Her* $\lambda \in [0, 1]$ *için* $A + \lambda C_1$ *in Schur kararlı olduğu görülebilir.*

$$A + \lambda C_2 = \begin{bmatrix} -1.5 + 0.7\lambda & 1.6 \\ -0.8 & 1.5 + 0.2\lambda \end{bmatrix}$$

matrisi ise, $\lambda = 0.7$ *değeri için Schur kararlı değildir.*

5.3 Aralık Polinomlar Ailesinin Schur Kararlılığı

Bu bölümde, kararlı polinomlar uzayında Schur konveks yön kavramının bir uygulaması olan aralık polinomlar ailesinin Schur kararlılığı incelenecektir.

Q uç noktaları $\{\mathbf{q^i}\}$ olan bir kutu olsun.

$$p(z, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^{n} [q_i^-, q_i^+] z^i \tag{5.3.12}$$

şeklinde aralık polinomu tanımlansın ve

$$\mathcal{P}_{\mathcal{I}} = \{p(\cdot, \mathbf{q}) : \ \mathbf{q} \in Q\} \tag{5.3.13}$$

aralık polinomlar ailesini göstersin. Kharitonov Teoremine göre [26], Q kutusunun uç noktalarına karşılık gelen özel seçilmiş dört tane polinomun Hurwitz kararlı olması aralık polinomlar ailesinin gürbüz Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşuldur. Fakat Q kutusunun uç noktalarına karşılık gelen polinomların Schur kararlı olması aralık polinomlar ailesinin gürbüz Schur kararlılığı için yeterli değildir. Buna karşıt bir örnek verilmektedir.

Örnek 5.3.1 ([27]).

$$p(z,q) = z^4 + [-\frac{17}{8}, \frac{17}{8}]z^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{3} \tag{5.3.14}$$

aralık polinomlar ailesinin gürbüz Schur kararlılığı araştırılsın.

$q = -\frac{17}{8}$ *için* $p(z, -\frac{17}{8})$ *polinomunun kökleri* $z_{1,2} \simeq 0.786 \pm 0.596i$, $z_3 \simeq 0.924$, $z_4 \simeq -0.371$ *dir ve kompleks düzlemde açık birim diskin içindedir.* $q = \frac{17}{8}$ *için* $p(z, \frac{17}{8})$ *polinomunun kökleri de* $z_{1,2} \simeq 0.786 \pm 0.596i$, $z_3 \simeq -0.924$, $z_4 \simeq 0.371$ *dir ve kompleks düzlemde açık birim diskin içindedir. Ama* $q = 0$ *için* $p(z, 0)$ *polinomunun kökleri* $z_{1,2} \simeq \pm 1.303i$, $z_{3,4} \simeq \pm 0.4433$ *dır ve* $p(z, 0)$ *polinomunun tüm kökleri kompleks düzlemde açık birim diskin içinde değildir. Buradan* (5.3.14) *aralık polinomlar ailesi Schur kararlı değildir.*

Q kutusunun uç noktalarının kararlılığından tüm ailenin Schur kararlılığı çıkmadığına göre aralık polinomlar ailesinin Schur kararlılığını test etmek için yeni teoremlere ihtiyaç duyulmuştur. Bunlardan [28] deki ve biraz daha geliştirilmiş hali Teorem 5.3.3 tür ve [29] makalesinde verilmiştir. Burada ise Teorem 5.3.3 Schur kararlı polinomlar uzayında konveks yön kavramından yararlanılarak yeniden kanıtlanmaktadır.

Tanım 5.3.2 ("Nontriviality" Koşulu).

$\mu_0^- = \sum_{i=0}^{n} q_i^-$ *ve* $\mu_0^+ = \sum_{i=0}^{n} q_i^+$ *olsun. Eğer*

$$\mu_0^+ < 0 \text{ veya } \mu_0^- > 0$$

ise, (5.3.12) *aralık polinomuna "Nontriviality" koşulunu sağlar denir.*

Teorem 5.3.3. *Q uç noktaları $\{\mathbf{q^i}\}$ olan bir kutu olsun, $\mathcal{P_I}$ aralık polinomlar ailesi verilsin ve "nontriviality" koşulu sağlansın. Ayrıca*

$$\text{Eğer } n \text{ tek ise,} \quad i = \tfrac{(n+1)}{2} + 1, \cdots, n \text{ için} \quad q_i^- = q_i^+$$

$$\text{Eğer } n \text{ çift ise,} \quad i = \tfrac{n}{2} + 1, \cdots, n \text{ için} \quad q_i^- = q_i^+$$

olsun. Bu durumda $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ ailesinin gürbüz Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul $p(z, \mathbf{q^i})$ uç polinomlarının Schur kararlı olmasıdır.

Kanıt. Kanıtın gerekli koşulu açıktır. $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ ailesi gürbüz Schur kararlı olsun. $p(z, \mathbf{q^i}) \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ olduğu için $p(z, \mathbf{q^i})$ uç polinomları da Schur kararlı olur.

Şimdi yeterliliği kanıtlamak için $p(z, \mathbf{q^i})$ uç polinomları Schur kararlı olsun. Bu durumda ailenin gürbüz Schur kararlı olduğu gösterilecektir.

$$p(z, \mathbf{q}) = q_n z^n + q_{n-1} z^{n-1} + \cdots + q_1 z + q_0, \ \mathbf{q} \in Q$$

polinomunun bilineer dönüşüm altındaki görüntüsü,

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(s, \mathbf{q}) &= (s-1)^n p\left(\frac{s+1}{s-1}, \mathbf{q}\right) \\
&= (s-1)^n \left[q_n \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^n + q_{n-1}\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^{n-1} + \cdots + q_1 \left(\frac{s+1}{s-1}\right) + q_0 \right] \\
&= q_n (s+1)^n + q_{n-1}(s+1)^{n-1}(s-1) + \cdots + \\
&\quad + q_1 (s+1)(s-1)^{n-1} + q_0 (s-1)^n \qquad (5.3.15)
\end{aligned}$$

dır. $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ aralık polinomlar ailesinin gürbüz Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\widetilde{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}} = \{\tilde{p}(\cdot, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$$

polinomlar ailesinin gürbüz Hurwitz kararlı olmasıdır. (5.3.15) den de görüldüğü gibi s^n nin katsayısı $\sum_{i=0}^{n} q_i$ dir. "Nontriviality" koşulu bu toplamın sıfır olmasını engeller, buradan $\widetilde{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}}$ ailesi invaryant derecelidir. Başlangıçta uç polinomlar Schur kararlı kabul edilmişti, bilineer dönüşüm ile her bir $\tilde{p}(s, \mathbf{q^i})$ polinomu Hurwitz kararlı olur. Şimdi $\widetilde{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}}$ ailesinin Hurwitz kararlı olduğu gösterilebilir.

$n = 2m - 1$ olsun. $\tilde{p}(s, \mathbf{q})$ afin belirsizlik yapısına sahip olduğu için Kenar Teoremi kullanılabilir [1]. Bu ailenin herhangi bir kenarı için öyle $k \leq \dfrac{n+1}{2} = m$ vardır ki $i \neq k$ için $q_i = q_i^{\pm}$ ve $i = k$ için ise, q_k parametresi $[q_k^-, q_k^+]$ aralığında değişmektedir:

$$\tilde{p_k}(s, q_k) = q_k (s+1)^k (s-1)^{n-k} + \sum_{i \neq k} q_i^{\pm} (s+1)^i (s-1)^{n-i} \qquad (5.3.16)$$

$$q_k^- \leq q_k \leq q_k^+$$

Bu kenar $q_k = q_k^-$ ve $q_k = q_k^+$ değerleri için Hurwitz kararlıdır.

Her $q_k \in (q_k^-, q_k^+)$ değeri için (5.3.16) kenar polinomunun Hurwitz kararlı olduğu gösterilirse, $\widetilde{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}}$ ailesinin Hurwitz kararlılığı kanıtlanmış olur. Bunun için,

$$\tilde{p_k}(s, q_k) = q_k \underbrace{(s+1)^k (s-1)^{n-k}}_{g(s)} + \sum_{i \neq k} q_i^{\pm} (s+1)^i (s-1)^{n-i} \qquad (5.3.17)$$

denkleminde $g(s) = (s+1)^k (s-1)^{n-k}$ polinomunun Hurwitz konveks yön olduğu gösterilmesi yeterlidir.

Her $w > 0$ için $g(s)$ nin artım koşulunu sağladığı gösterilmelidir. Bunun için buna denk olan (5.1.4) eşitsizliğinin gerçekleştirdiğini göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}
g(iw) &= (iw+1)^k (iw-1)^{n-k} \\
&= \left[\sqrt{1+w^2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^k \cdot \\
&\quad \cdot \left[\sqrt{1+w^2}(\cos(\pi-\varphi) + i\sin(\pi-\varphi)\right]^{n-k} \\
&= \left(\sqrt{1+w^2}\right)^{n-k+k} [\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi)] \cdot \\
&\quad \cdot [\cos((n-k)(\pi-\varphi)) + i\sin((n-k)(\pi-\varphi))] \\
&= (1+w^2)^{\frac{n}{2}} [\cos((n-k)\pi - (n-k)\varphi + k\varphi) + \\
&\quad + i\sin((n-k)\pi - (n-k)\varphi + k\varphi)] \\
&= (1+w^2)^{\frac{n}{2}} [\cos((n-k)\pi - (n-2k)\varphi) + \\
&\quad + i\sin((n-k)\pi - (n-2k)\varphi)] \\
&= \underbrace{\left(1+w^2\right)^{\frac{n}{2}} \left[(-1)^{n-k}\cos((n-2k)\varphi)\right]}_{x(w)} + \\
&\quad + i\underbrace{\left(1+w^2\right)^{\frac{n}{2}} \left[(-1)^{n-k+1}\sin((n-2k)\varphi)\right]}_{y(w)},
\end{aligned}$$

$$g(iw) = x(w) + iy(w)$$

yazılabilir. $x(w)$ ve $y(w)$ fonksiyonlarının türevleri hesaplanırsa,

$$x'(w) = (-1)^{n-k} \left(1+w^2\right)^{\frac{n}{2}-1} [nw\cos((n-2k)\varphi) - (n-2k)\sin((n-2k)\varphi)]$$

$$y'(w) = (-1)^{n-k+1} \left(1+w^2\right)^{\frac{n}{2}-1} [nw\sin((n-2k)\varphi) + (n-2k)\cos((n-2k)\varphi)]$$

bulunur. Her $w > 0$ için artım koşulunun dengi olan

$$y'(w)x(w) - x'(w)y(w) \leq \frac{1}{w}\,|x(w)y(w)| \tag{5.3.18}$$

eşitsizliğinin sağlandığını görmek yeterlidir.

$$\begin{aligned} y'(w)x(w) &= (-1)^{2(n-k)+1}(1+w^2)^{n-1}\left[nw\sin\left((n-2k)\varphi\right) + \right. \\ &\left. + (n-2k)\cos\left((n-2k)\varphi\right)\right] \cdot \cos\left((n-2k)\varphi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'(w)y(w) &= (-1)^{2(n-k)+1}(1+w^2)^{n-1}\left[nw\cos\left((n-2k)\varphi\right) - \right. \\ &\left. - (n-2k)\sin\left((n-2k)\varphi\right)\right] \cdot \sin\left((n-2k)\varphi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(w)x(w) - x'(w)y(w) &= -(1+w^2)^{n-1}(n-2k)\left[\cos^2\left((n-2k)\varphi\right) + \right. \\ &\left. + \sin^2\left((n-2k)\varphi\right)\right] \\ &= -(1+w^2)^{n-1}(n-2k) \end{aligned} \tag{5.3.19}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{w}\,|x(w)y(w)| &= \frac{1}{w}\left|(1+w^2)^n(-1)^{2(n-k)+1}\cos\left((n-2k)\varphi\right)\sin\left((n-2k)\varphi\right)\right| \\ &= \frac{(1+w^2)^n}{2w}\cdot\left|\sin 2\left((n-2k)\varphi\right)\right| \\ &= \frac{(1+w^2)^n}{2w}\cdot|\sin(-2\varphi)| \\ &= \frac{(1+w^2)^n}{2w}\cdot\sin(2\varphi) \\ &= \frac{(1+w^2)^n}{2w}\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi \\ &= \frac{(1+w^2)^n}{w}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos^2\varphi \\ &= \frac{(1+w^2)^n}{w}\cdot\frac{\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi} \\ &= \frac{(1+w^2)^n}{w}\cdot\frac{w}{1+w^2} \\ &= (1+w^2)^{n-1} \end{aligned} \tag{5.3.20}$$

(5.3.19) ve (5.3.20) eşitlikleri yardımı ile (5.3.18) yeniden yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
y'(w)x(w) - x'(w)y(w) &\leq \frac{1}{w}\,|x(w)y(w)| \qquad (5.3.21)\\
-(1+w^2)^{n-1}(n-2k) &\leq (1+w^2)^{n-1}\\
2k-n &\leq 1\\
k &\leq m
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan $g(s)$ polinomu Hurwitz konveks yöndür.

(5.3.16) kenar polinomununun uç polinomları Hurwitz kararlı idi. $k \leq m$ için $g(s)$ Hurwitz konveks yön olduğundan, (5.3.16) kenar polinomu Hurwitz kararlı olur. Kenar Teoremine göre, katsayıları afin belirsizlik yapısına sahip $\widetilde{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}}$ polinomlar ailesinin Hurwitz kararlılığı tüm kenarlarının Hurwitz kararlılığı ile test edilebilir. Tüm kenarlar kararlı olduğu için aile Hurwitz kararlı olur. O halde $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ aralık polinomlar ailesi Schur kararlıdır.

n'nin çift olduğu durum da benzer yolla kanıtlanır.

□

Şimdi ise, gerçel katsayılı aralık polinomlar ailesinin Schur kararlılığı için bilinen bazı gerekli koşullar verilecektir. Burada, kompleks analizin bazı teoremlerinden yararlanılmış ve iki baş katsayı yardımı ile ailenin Schur kararlılığı için gerekli koşullar verilmiştir.

Teorem 5.3.4 ([30]). *$q_n^- > 0$ ve $n+1$ tane gerçel aralık $I_i = [q_i^-, q_i^+]$ şeklinde gösterilsin. $p(z) = \sum_{i=0}^{n} q_i z^i$, $q_i \in I_i$, n. dereceden aralık polinomlar ailesi olsun. Eğer ailede her polinom Schur kararlı ise, bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır:*

$$\max\{|q_{n-1}^-|, |q_{n-1}^+|\} \leq 2\left(\ln^+\left(\frac{|q_n^-|}{q_n^+ - q_n^-}\right) + C\right)\cdot q_n^- \qquad (5.3.22)$$

$$\ln^+(x) := \max(0, \ln x) \text{ ve } C := \left(\Gamma^4(\frac{1}{4})/4\pi^2\right) < 4.38$$

Eğer $q_n^+ - q_n^- = 0$ ise (5.3.22) eşitsizliğinin sağ tarafı ∞ olur.

Eğer $q_n^+ - q_n^- = 2 \cdot t \cdot q_n^-$ ise (5.3.22) eşitsizliği

$$\max\{|q_{n-1}^-|, |q_{n-1}^+|\} \leq 2 \left(\ln^+ \left(\frac{1}{2t} \right) + C \right) \cdot q_n^-$$

eşitsizliğine dönüşür.

Yukarıdaki teoremden yararlanılarak aşağıdaki gerekli koşullar da elde edilebilir.

Teorem 5.3.5 ([31]). *$q_n^- > 0$ ve $n+1$ tane gerçel aralık $I_i = [q_i^-, q_i^+]$ şeklinde gösterilsin. $p(z) = \sum_{i=0}^{n} q_i z^i$, $q_i \in I_i$, n. dereceden aralık polinomlar ailesi ve $q_n^+ - q_n^- = 2 \cdot t \cdot q_n^-$ olsun. Eğer ailede her polinom Schur kararlı ise bu durumda aşağıdaki koşul sağlanır: $C := \left(\Gamma^4(\frac{1}{4})/4\pi^2\right)$ olmak üzere,*

$$\max\{|q_{n-1}^-|, |q_{n-1}^+|\} \leq (1+t) \left(2 \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) + C \right) \cdot q_n^- \tag{5.3.23}$$

dır.

Teorem 5.3.6 ([31]). *$q_n^- > 0$ ve $n+1$ tane gerçel aralık $I_i = [q_i^-, q_i^+]$ şeklinde gösterilsin. $p(z) = \sum_{i=0}^{n} q_i z^i$, $q_i \in I_i$, n. dereceden aralık polinomlar ailesi ve $q_n^+ - q_n^- = 2 \cdot t \cdot q_n^-$ olsun. Eğer ailede her polinom Schur kararlı ise bu durumda aşağıdaki koşul sağlanır:*

$$\max\{|q_{n-1}^-|, |q_{n-1}^+|\} \leq 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{2t} \right) \cdot q_n^- \tag{5.3.24}$$

dır.

Teorem 5.3.7 ([31]). *$q_n^- > 0$ ve $n+1$ tane gerçel aralık $I_i = [q_i^-, q_i^+]$ şeklinde gösterilsin. $p(z) = \sum_{i=0}^{n} q_i z^i$, $q_i \in I_i$, n. dereceden aralık polinomlar ailesi olsun. Eğer ailede her polinom Schur kararlı ise bu durumda*

$$q_{n-1}^+ - q_{n-1}^- \leq 4 \cdot q_n^- \tag{5.3.25}$$

dır.

5.4 2×2 ve 3×3 Aralık Matrisler Ailesinin Kararlılığı

Bu kısımda, 2×2 aralık matrisler ailesinin Schur kararlılığı ve 3×3 aralık matrisler ailesinin hem Schur hem de Hurwitz kararlılığı araştırılmıştır. Polinomlar uzayında konveks yön kavramı ve multilineer polinomlar ailesinin kararlılığı ile ilgili elde edilen algoritmanın uygulaması yapılmıştır.

Tanım 5.4.1. *Eğer $n \times n$ matriste her eleman bir aralıkta değişiyorsa, bu aileye aralık matrisler ailesi denir ve $A(\mathbf{q})$ ile gösterilir. Örneğin,*

$$A(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} [q_1^-, q_1^+] & [q_2^-, q_2^+] \\ [q_3^-, q_3^+] & [q_4^-, q_4^+] \end{bmatrix}$$

2×2 aralık matrisler ailesidir.

Tanım 5.4.2. *Eğer*

$$P(\lambda, \mathbf{q}) = \det(A(\mathbf{q}) - \lambda I)$$

karakteristik polinomu gürbüz Schur kararlı ise, $n \times n$ boyutlu

$$\mathcal{A} = \{A(\mathbf{q}) : \ \mathbf{q} \in Q\}$$

matrisler ailesine gürbüz Schur kararlıdır denir.

2×2 aralık matrisler ailesinde, uç noktalarının kararlılığından, ailenin gürbüz Schur kararlılığının çıktığını ifade eden Önerme aşağıdaki gibidir.

Önerme 5.4.3.

$$A(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{q} \in Q$$

$$Q = \{\mathbf{q} : q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, \ i = 1, 2, 3, 4\}$$

2×2 aralık matrisler ailesinin Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul her bir $A(q^i)$ uç matrisinin Schur kararlı olmasıdır.

Kanıt. $\Rightarrow$). Kanıtın bu yönü açıktır.

$\Leftarrow$). Her $A(q^i)$ uç matrisi Schur kararlı olsun. $A(\mathbf{q})$ matrisinin karaktesistik polinomu,

$$p_{A(\mathbf{q})}(z) = z^2 + \underbrace{(-q_1 - q_4)}_{a_1(\mathbf{q})}z + \underbrace{q_1q_4 - q_2q_3}_{a_0(\mathbf{q})} = z^2 + a_1(\mathbf{q})z + a_0(\mathbf{q}) \qquad (5.4.26)$$

katsayıları multilineer fonksiyon olan ikinci dereceden multilineer bir polinomlar ailesidir. $p_{A(\mathbf{q})}(z)$ polinomunun Schur kararlı olması için

$$1 > |a_0(\mathbf{q})| \text{ ve } |a_1(\mathbf{q})| < 1 + a_0(\mathbf{q}),\ \forall \mathbf{q} \in Q$$

veya bunlara denk olan

$$\begin{array}{cc} 1 - a_0(\mathbf{q}) > 0, & 1 + a_0(\mathbf{q}) > 0, \\ 1 + a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q}) > 0, & 1 + a_0(\mathbf{q}) - a_1(\mathbf{q}) > 0, \quad \forall \mathbf{q} \in Q \end{array} \qquad (5.4.27)$$

koşullarının sağlanması gerekir [3]. $p_{A(\mathbf{q})}(z)$ polinomuna bilineer dönüşüm uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{A(\mathbf{q})}(s) &= (1 + a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q}))s^2 + (2 - 2a_0(\mathbf{q}))s + 1 + a_0(\mathbf{q}) - a_1(\mathbf{q}) \\ &= (1 - q_1 - q_4 + q_1q_4 - q_2q_3)\, s^2 + 2(1 - q_1q_4 + q_2q_3)s + \\ &\quad +1 + q_1 + q_4 + q_1q_4 - q_2q_3 \end{aligned} \qquad (5.4.28)$$

olur. $\tilde{p}_{A(\mathbf{q})}(s)$ polinomunun katsayıları da multilineer fonksiyon olduğu için multilineer polinomlar ailesi olur. $\tilde{p}_{A(\mathbf{q})}(s)$ polinomunun Hurwitz kararlılığı araştırılılabilir. Multilineer fonksiyon maksimum ve minimum değerlerini Q kutusunun uç noktalarında alacağı için Q kutusunun uç noktalarında,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \min\limits_{i=1,\ldots,16}\{1 - q_1 - q_4 + q_1q_4 - q_2q_3\} & > & 0 \\ \min\limits_{i=1,\ldots,16}\{1 - q_1q_4 + q_2q_3\} & > & 0 \\ \min\limits_{i=1,\ldots,16}\{1 + q_1 + q_4 + q_1q_4 - q_2q_3\} & > & 0 \end{array} \right.$$

veya

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \max\limits_{i=1,\ldots,16}\{1 - q_1 - q_4 + q_1q_4 - q_2q_3\} & < & 0 \\ \max\limits_{i=1,\ldots,16}\{1 - q_1q_4 + q_2q_3\} & < & 0 \\ \max\limits_{i=1,\ldots,16}\{1 + q_1 + q_4 + q_1q_4 - q_2q_3\} & < & 0 \end{array} \right.$$

ise, aile Schur kararlıdır. (Burada $i = 1, 2, \ldots, 16$ indisi Q kutusunun uçlarının numarasını göstermektedir)

(5.4.28) polinomunun katsayıları (5.4.27) den dolayı hiç bir zaman negatif olamaz. Her $\mathbf{q} \in Q$ için (5.4.28) polinomunun katsayıları pozitif olduğu için $\tilde{p}_{A(\mathbf{q})}(s)$ polinomu Hurwitz kararlı olup, buradan $p_{A(\mathbf{q})}(z)$ polinomu Schur kararlı olur. $\square$

Ancak 2×2 aralık matrisler ailesinden farklı olarak, daha yüksek boyutlu matris ailelerinde uç noktaların kararlılığından tüm ailenin kararlılığı çıkmayabilir.

Örnek 5.4.4.

$$A(q) = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.8 & -0.6 \\ 0.8 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & -0.4 & q \end{bmatrix}, \ q \in [-0.5, 0.5] \tag{5.4.29}$$

aralık matrisler ailesi verilsin. $q = -0.5$ *için* $A(q)$ *matrisi Schur kararlıdır. Çünkü,*

$$A(-0.5) = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.8 & -0.6 \\ 0.8 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & -0.4 & -0.5 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri $\lambda_{1,2} \simeq -0.25591 \pm 0.96343i$, $\lambda_3 \simeq -0.18819$ *olup modülleri* 1 *den küçüktür.* $q = 0.5$ *için* $A(q)$ *matrisi de Schur kararlıdır. Çünkü,*

$$A(0.5) = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.8 & -0.6 \\ 0.8 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & -0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri $\lambda_{1,2} \simeq -7.1775 \times 10^{-2} \pm 0.97392i$, $\lambda_3 \simeq 0.44355$ *olup modülleri* 1 *den küçüktür. Fakat* $q = 0$ *değeri için* $A(q)$ *matrisi Schur kararlı değildir. Çünkü,*

$$A(0) = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.8 & -0.6 \\ 0.8 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & -0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerlerinin modülleri:

$$\begin{aligned}|\lambda_{1,2}| &\simeq |-0.15749 \pm 1.0007i| \simeq 1.013 > 1,\\ |\lambda_3| &\simeq |0.11499| < 1\end{aligned}$$

dir. O halde, (5.4.29) *aralık matrisler ailesi Schur kararlı değildir.*

$A(q)$ *matrisinin karakteristik polinomu,*

$$p(\lambda, q) = \lambda^3 + (0.2 - q)\lambda^2 + (-0.2q + 0.99)\lambda - 0.61q - 0.118$$

dır. Bu örnekte, $p_{q^+}(\lambda) - p_{q^-}(\lambda)$ *polinomunun konveks yön olmadığı da gösterilebilir:*

1. $q^- = -0.5$ *için* $p_{q^-}(\lambda) = \lambda^3 + 0.7\lambda^2 + 1.09\lambda + 0.187$ *polinomu* 3. *dereceden Schur kararlı polinom,*

2. $q^+ = 0.5$ *için* $p_{q^+}(\lambda) = \lambda^3 - 0.3\lambda^2 + 0.89\lambda - 0.423$ *polinomu Schur kararlı polinom,*

3. $$\begin{aligned}p_{q^-}(\lambda) + \alpha(p_{q^+}(\lambda) - p_{q^-}(\lambda)) &= \lambda^3 + (0.7 - \alpha)\lambda^2 + (1.09 - 0.2\alpha)\lambda +\\ &\quad +0.187 - 0.61\alpha,\end{aligned}$$

   her $\alpha \in [0, 1]$ *için* $\textit{derece}\,(p_{q^-}(\lambda) + \alpha(p_{q^+}(\lambda) - p_{q^-}(\lambda)) = 3$

   iken her $\alpha \in [0, 1]$ *için* $p_{q^-}(\lambda) + \alpha\,(p_{q^+}(\lambda) - p_{q^-}(\lambda))$ *polinomu Schur kararlı olmayabilir.*

Örneğin $\alpha = 0.3$ *için,*

$p_{q^-}(\lambda) + \alpha\,(p_{q^+}(\lambda) - p_{q^-}(\lambda))$ *polinomunun köklerinin modülleri:*

$$|\lambda_{1,2}| \simeq 1.014129874 > 1,$$

$$|\lambda_3| \simeq 0.003889912 < 1$$

dir. O halde $p_{q^+}(\lambda) - p_{q^-}(\lambda)$ *polinomu Schur konveks yön değildir.*

$p_{q^+}(\lambda) - p_{q^-}(\lambda)$ *polinomu Schur konveks yön değil ise bu durum bize ailenin Schur kararlı olup olmadığını hala söylemez. Ancak yukarıda bu ailenin Schur kararsız olduğu gösterilmiştir.*

Örnek 5.4.5.

$$A(q)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ q & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \; q\in[q^-,q^+] \tag{5.4.30}$$

biçiminde aralık matrisler ailesi verilsin.

$A(q)$ matrisinin karakteristik polinomu,

$$p(\lambda,q)=\lambda^3-\tau\lambda^2+\mu\lambda-\delta$$

olur. Burada, $\tau=a_{11}+a_{22}+a_{33}$, $\delta=\det(A(q))$, $\mu=m_{11}+m_{22}+m_{33}$,

$$m_{11}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\;,\; m_{22}=a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}\;,\; m_{33}=a_{11}a_{22}-a_{12}q$$

dur. $q=q^-$ için $A(q)$ matrisi Schur kararlı olsun ve karakteristik polinomu $p_{q^-}(\lambda)$ ile gösterilsin.

$q=q^+$ için $A(q)$ matrisi de Schur kararlı olsun ve karakteristik polinomunu $p_{q^+}(\lambda)$ ile gösterilsin.

$$p_{q^-}(\lambda)=\lambda^3-\tau\lambda^2+(m_{11}+m_{22}+a_{11}a_{22}-a_{12}q^-)\lambda-\delta(q^-)$$

$$p_{q^+}(\lambda)=\lambda^3-\tau\lambda^2+(m_{11}+m_{22}+a_{11}a_{22}-a_{12}q^+)\lambda-\delta(q^+)$$

$$p_{q^+}(\lambda)-p_{q^-}(\lambda)=a_{12}(q^--q^+)\lambda+\underbrace{(q^+a_{12}a_{33}-q^+a_{13}a_{32}-q^-a_{12}a_{33}+q^-a_{13}a_{32})}_{b(q)=sabit}$$

$$p_{q^+}(\lambda)-p_{q^-}(\lambda)=a(q)\lambda+b(q)$$

bulunur. $p_{q^+}(\lambda)-p_{q^-}(\lambda)$ ifadesi λ ya bağlı birinci dereceden bir polinomdur. Her birinci dereceden polinom Schur konveks yön olduğu için $p_{q^+}(\lambda)-p_{q^-}(\lambda)$ Schur konveks yön olur ve (5.4.30) aralık matrisler ailesi Schur kararlıdır.

Şimdi daha genel olarak

$$A(\mathbf{q})=\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ q_4 & q_5 & q_6 \\ q_7 & q_8 & q_9 \end{bmatrix}, \; \mathbf{q}\in Q \tag{5.4.31}$$

$$Q=\{\mathbf{q}:\; q_i^-\leq q_i\leq q_i^+,\; i=1,2,...,9\}$$

3×3 aralık matrisler ailesinin hem Schur hem de Hurwitz kararlılığının araştırılmasına geçilmektedir.

1) (5.4.31) aralık matrisler ailesinin Schur (Hurwitz) kararlı olması için gerek ve yeter koşul iki boyutlu yüzlerin Schur (Hurwitz) kararlı olmasıdır [32].

Aralık matrisler ailesinde belirsizlik parametre sayısı k ise, iki boyutlu yüz sayısı $2^{k-2} \cdot \dfrac{k(k-1)}{2}$ dir. $k = 9$ için iki boyutlu yüz sayısı 4608 olur. Burada iki boyutlu yüz ile örneğin,

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2^+ & q_3^- \\ q_4^+ & q_5 & q_6^- \\ q_7^- & q_8^+ & q_9^+ \end{bmatrix}, \; q_1^- \leq q_1 \leq q_1^+, \; q_5^- \leq q_5 \leq q_5^+ \tag{5.4.32}$$

gibi matrisler kastedilmektedir. İki boyutlu yüzlerin kararlılığı şu şekilde kontrol edilebilir. (5.4.32) matrisinin karakteristik polinomu,

$$\begin{aligned} p(z, q_1, q_2) = {} & z^3 + (-q_1 - q_9^+ - q_5)z^2 + (-q_7^- q_3^- + q_1 q_9^+ + q_5 q_9^+ - q_4^+ q_2^+ + q_1 q_5 - \\ & - q_6^- q_8^+)z + (-q_7^- q_2^+ q_6^- + q_1 q_6^- q_8^+ + q_7^- q_3^- q_5 + q_4^+ q_2^+ q_9^+ - q_1 q_5 q_9^+ - \\ & - q_4^+ q_3^- q_8^+) \end{aligned}$$

üçüncü dereceden multilineer polinomdur. Böylece iki boyutlu yüzlerin kararlılığı multilineer polinomlar ailesinin kararlılığı problemine dönüşür. Bu ise multilineer polinomlar ailesinin kararlılığı ile ilgili 2. Bölümde verilen algoritma yardımı ile çözülebilir.

2) Eğer (5.4.31) aralık matrisler ailesi

$$A(q) = \begin{bmatrix} \alpha & q_2 & q_3 \\ q_4 & \beta & q_6 \\ q_7 & q_8 & \gamma \end{bmatrix}, \; q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, \; (i = 2,3,4,6,7,8) \text{ ve } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \tag{5.4.33}$$

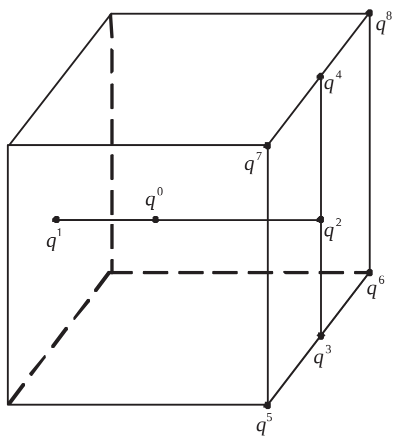
biçiminde ise, yani aralıklar köşegen dışında ise (5.4.33) matrisler ailesinin kararlı olması için gerek ve yeter koşul $A(q^i)$ uç matrislerinin kararlı olmasıdır.

$\Rightarrow$). (5.4.33) aralık matrisler ailesi kararlı olsun. $A(q^i) \in A(q)$ olduğu için $A(q^i)$ uç matrisleri de kararlı olur.

$\Leftarrow$). (5.4.33) matrisinin karakteristik polinomu

$$
\begin{aligned}
p_{\mathbf{q}}(z) \quad = \quad & z^3 + \underbrace{(-\alpha - \beta - \gamma)}_{\eta \in \mathbb{R}} z^2 + \underbrace{(-q_3 q_7 + \alpha\gamma + \beta\gamma - q_2 q_4 + \alpha\beta - q_6 q_8)}_{a_1(\mathbf{q})} z + \\
& + \underbrace{\alpha q_6 q_8 - q_2 q_6 q_7 + q_3 q_7 \beta + q_2 q_4 \gamma - \alpha\beta\gamma - q_3 q_4 q_8}_{a_0(\mathbf{q})} \qquad (5.4.34)
\end{aligned}
$$

3. dereceden multilineer bir polinomdur. (5.4.34) polinomu uç noktalarda kararlı ve $q^0 = (q_2^0, q_3^0, q_4^0, q_6^0, q_7^0, q_8^0)$ kutu içinde keyfi bir nokta olsun (Şekil 5.3).



Şekil 5.3: Kutunun herhangi noktasındaki kararlılığın gösterilmesi

Örneğin,

$$q^5 = (q_2^-, q_3^-, q_4^-, q_6^-, q_7^-, q_8^-), \; q^6 = (q_2^+, q_3^-, q_4^-, q_6^-, q_7^-, q_8^-)$$

Q nun iki uç noktası ele alındığında bu uç noktalar için $p_{q^5}(z)$ ve $p_{q^6}(z)$ polinomları kararlıdır. Ailede derece düşmesi yoktur ve

$$p_{q^6}(z) - p_{q^5}(z) = (a_1(q^6) - a_1(q^5))z + (a_0(q^6) - a_0(q^5)) \qquad (5.4.35)$$

birinci dereceden bir polinom olur. Kararlı polinomlar uzayında her birinci derece polinom konveks yön olduğu için

$$\lambda p_{q^6}(z) + (1-\lambda) p_{q^5}(z), \lambda \in [0, 1]$$

polinomu kararlı olur. Buradan $q^3 = \lambda q^5 + (1-\lambda)q^6, \lambda \in [0,1]$ noktasına karşılık gelen polinom kararlı olur. Benzer olarak (5.4.34) polinomu q^7 ve q^8 noktalarında kararlı olduğu için (5.4.35) dan dolayı

$$\lambda p_{q^7}(z) + (1-\lambda)p_{q^8}(z), \lambda \in [0,1]$$

polinomlar segmenti kararlı olur. Bu durumda $q^4 = \lambda q^7 + (1-\lambda)q^8$ noktasında da kararlıdır. (5.4.34) polinomu q^3 ve q^4 noktalarında kararlı olduğu için q^2 noktasında da kararlı olur. Benzer düşünce ile (5.4.34) polinomunun q^1 noktasın da da kararlı olduğu gösterilir. Böylece (5.4.34) polinomu q^1 ve q^2 noktalarında kararlı olduğu için, (5.4.35) den her birinci derece polinom konveks yön olduğu için q^0 noktasında da kararlı olur. q^0 keyfi nokta olduğu için kutu üzerinde alınan her noktaya karşılık elde edilen polinom kararlı olur. (5.4.34) polinomlar ailesi kararlıdır. Buradan (5.4.33) aralık matrisler ailesi de kararlı olur.

(5.4.31) aralık matrisler ailesinin kararlılığı araştırılırken konveks yön yardımı ile iki boyutlu yüz sayısı 1920 tane azalır ve 2688 yüzün kararlılığına bakılır.

Örnek 5.4.6.

$$A(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & q_1 \\ 1 & 0.5 & -1 \\ q_2 & q_3 & 0.3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{q} \in Q \tag{5.4.36}$$

$$Q = \{(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3 : -0.5 \leq q_1 \leq 0.2,\ -0.4 \leq q_2 \leq 0.25,\ -0.2 \leq q_3 \leq 0.17\}$$

olsun. (5.4.36) aralık matrisler ailesinin kararkteristik polinomu,

$$p_A(z,\mathbf{q}) = z^3 - 0.3z^2 + (q_3 - 0.25 - q_1q_2)z + 0.075 + 0.5q_3 - q_1q_3 + 0.5q_1q_2 \tag{5.4.37}$$

dir. (5.4.37) polinomu Q kutusunun uç noktalarında Schur kararlıdır. 2. duruma göre uçların kararlılığından (5.4.37) polinomlar ailesi Schur kararlıdır. Buradan (5.4.36) aralık matrisler ailesi Schur kararlı olur.

Örnek 5.4.7.

$$B(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & q_2 \\ 1 & q_3 & -1 \\ q_4 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \tag{5.4.38}$$

$$\begin{aligned} Q \;=\; & \{(q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathbb{R}^4 : \; -0.8 \le q_1 \le 0.8, \quad -0.9 \le q_2 \le 0.9, \\ & -0.5 \le q_3 \le 0.5, \quad -0.1 \le q_4 \le 0.1\} \end{aligned}$$

$B(\boldsymbol{q})$ matrisinin karakteristik polinomu,

$$p_B(z, \boldsymbol{q}) = z^3 + (-q_1 - q_3 - 0.3)z^2 + (-q_2q_4 + q_1q_3 + 0.3q_1 + 0.3q_3)z + q_2q_3q_4 - 0.3q_1q_3$$

dır. $B(\boldsymbol{q})$ matrisinde belirsizlik parametre sayısı 4 olduğundan 24 tane iki boyutlu yüz vardır. Bunlardan 20 *tanesi,*

$$\begin{bmatrix} q_1 & 0 & q_2 \\ 1 & q_3^{\pm} & -1 \\ q_4^{\pm} & 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_1 & 0 & q_2^{\pm} \\ 1 & q_3 & -1 \\ q_4^{\pm} & 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_1 & 0 & q_2^{\pm} \\ 1 & q_3^{\pm} & -1 \\ q_4 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_1^{\pm} & 0 & q_2 \\ 1 & q_3 & -1 \\ q_4^{\pm} & 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_1^{\pm} & 0 & q_2^{\pm} \\ 1 & q_3 & -1 \\ q_4 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

dır. 1. *duruma göre bu* 20 *tane yüzün kararlılığı multilineer polinomlar ailesinin kararlılığı ile ilgili Algoritma 2.2.1 yardımı ile test edilebilir ve bu yüzlerin kararlı olduğu görülmektedir.*

4 *tane*

$$\begin{bmatrix} q_1^{\pm} & 0 & q_2 \\ 1 & q_3^{\pm} & -1 \\ q_4 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

yüzün kararlılığı ise 2. *duruma göre uçların kararlılığından çıkar. Buradan* (5.4.38) *aralık matrisler ailesi Schur kararlıdır.*

Böylece:

1. 3×3 boyutlu aralık matrisler ailesinin Schur (Hurwitz) kararlılığı genelde 2688 tane 2 boyutlu yüzlerin kararlılığından çıkar. İki boyutlu yüzlerin kararlılığı da 2. Bölümdeki Algoritmayla test edilebilir.

2. Eğer aralıklar köşegen dışında ise, yani köşegendeki elemanlar kesin biliniyorsa uçların kararlılığından ailenin kararlılığı çıkar.

3. Eğer aralık tek bir tane ve köşegen üzerinde ise ailenin kararlılığı polinomlar segmentinin kararlılığına dönüşür.

4. Eğer aralık iki tane ve köşegen üzerinde ise ailenin kararlılığı bir tane multilineer ailenin kararlılığına dönüşür ve 2. Bölümdeki Algoritmayla test edilir.

5. Eğer aralıklar üç tane ve hepsi köşegen üzerinde ise ailenin kararlılığı altı tane iki boyutlu yüzlerin kararlılığına dönüşür ve 2. Bölümdeki Algoritmayla test edilir.

6 SCHUR D ve ANTİ SCHUR KARARLILIK

Bu bölümde, 2×2 gerçel matrislerin Schur D-kararlılığı için bilinen bir sonucun daha kısa kanıtı verilmiş ve Schur kararlı matrisin yörüngesinin bir özelliği incelenmiştir. Son olarak, kompleks matrislerin bir konveks kompakt alt kümesinin anti Schur kararlılığı için Minimaks Teoreminden elde edilen gerek ve yeter bir koşul verilmiştir.

6.1 Schur D-Kararlılık

2×2 gerçel matrislerin Schur D-kararlı olması için gerek ve yeter koşul uç kararlı olmasıdır. Burada, bu bilinen teorem ikinci dereceden polinomların Hurwitz kararlılığı kriteri kullanılarak yeniden kanıtlanmıştır.

A, $n \times n$ matrisinin tüm $\lambda \in \mathbb{C}$ özdeğerlerinin kümesine A matrisinin **spektrumu** denir ve $\sigma(A)$ ile gösterilir.

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

sayısına da A matrisinin **spektral yarıçapı** denir.

A, $n \times n$ matrisinin belirlediği politop,

$$\mathcal{P}(A) = \{AD : D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n), -1 \leq d_i \leq 1, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

şeklinde tanımlansın.

Eğer $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ köşegen matrisinde $|d_i| \leq 1$ ise, ($|d_i| = 1$) ($i = 1, 2, \ldots, n$) bu matris için $|D| \leq I$ ($|D| = I$) sembolü kullanılır.

Tanım 6.1.1. *A $n \times n$ gerçel matrisine,*

i) Eğer $|D| \leq I$ olmak üzere, her D gerçel köşegen matrisi için $\rho(AD) < 1$ ise Schur D-kararlı, *ii) Eğer $|D| = I$ olmak üzere, her D gerçel köşegen matrisi için $\rho(AD) < 1$ ise uç kararlı,*

iii) Eğer $n-1$ elemanının mutlak değeri 1 olmak üzere, her $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n),\ \ -1 \leq d_i \leq 1,\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ gerçel köşegen matrisi için $\rho(AD) < 1$ ise kenar kararlı,

matris denir.

A matrisi Schur D-kararlı ise $A \in \mathbb{D}_d$ yazılır.

Önerme 6.1.2 ([4])**.**

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

2×2 gerçel matris olsun. Bu durumda A matrisinin Schur D-kararlı olması için gerek ve yeter koşul

i) $|ad - bc| < 1$,

ii) $|a + d| < 1 + (ad - bc)$,

iii) $|a - d| < 1 - (ad - bc)$

olmasıdır.

Önerme 6.1.3 ([4])**.** *A 2×2 gerçel matrisinin Schur D-kararlı olması için gerek ve yeter koşul uç kararlı olmasıdır.*

Önerme 6.1.3 bilineer dönüşümden yararlanılarak yeniden kanıtlanmıştır.

Kanıt. $\Rightarrow$). A matrisi Schur D-kararlı olsun. Bu durumda $|D| \leq I$ olan her D gerçel köşegen matrisi için $\rho(AD) < 1$ demektir. $|D| = I$ alınırsa her D için $\rho(AD) < 1$ olur. Buradan A matrisi köşe kararlıdır.

$\Leftarrow$). A matrisi uç kararlı olsun. $|D| = I$ olan her D gerçel köşegen matrisi için $\rho(AD) < 1$ dir. A matrisi uç kararlı olduğundan, $|D| = I$ için AD matrisleri Schur kararlıdır.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix},\ d_1, d_2 \in [-1, 1]$$

olsun ve AD matrisinin Schur kararlı olduğu görülebilir.

$$AD = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad_1 & bd_2 \\ cd_1 & dd_2 \end{bmatrix}$$

matrisinin karakteristik polinomu,

$$p(z) = z^2 - (ad_1 + dd_2)z + (ad - bc)d_1d_2$$

dir. $p(z)$ polinomu için bilineer dönüşüm uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{p}(s) &= (s-1)^2 \left[\left(\frac{s+1}{s-1} \right)^2 - (ad_1 + dd_2) \left(\frac{s+1}{s-1} \right) + (ad - bc)d_1d_2 \right] \\ &= (1 - ad_1 - dd_2 + (ad - bc)d_1d_2)\, s^2 + 2\,(1 - (ad - bc)d_1d_2)\, s + \\ &\quad +1 + ad_1 + dd_2 + (ad - bc)d_1d_2 \end{aligned}$$

olur. $p(z)$ polinomu $d_1, d_2 \in [-1, 1]$ aralığının uç noktalarında yani

$$(d_1, d_2) \in \{(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)\}$$

değerleri için Schur kararlı olduğundan, $\tilde{p}(s)$ polinomu da bu uç noktalarda Hurwitz kararlı olur.

$$\begin{aligned} \tilde{p}(s) &= \underbrace{(1 - ad_1 - dd_2 + (ad - bc)d_1d_2)}_{a_2(d)}\, s^2 + \underbrace{2\,(1 - (ad - bc)d_1d_2)}_{a_1(d)}\, s + \\ &\quad + \underbrace{(1 + ad_1 + dd_2 + (ad - bc)d_1d_2)}_{a_0(d)} \end{aligned}$$

$\tilde{p}(s,d) = a_2(d)s^2 + a_1(d)s + a_0(d)$ polinomunun katsayıları d_1 ve d_2 ye göre multilineer fonksiyonlardır.

$$a_1(d) = 2(1 - (ad - bc)d_1d_2)$$

katsayısı ele alınırsa, A matrisi Schur kararlı olduğundan,

$$|ad - bc| < 1 \Rightarrow -1 < ad - bc < 1$$

olur. $(d_1, d_2) \in (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$ değerleri için

$$a_1(d) = 2(1 - (ad - bc)d_1d_2) > 0$$

bulunur.

$\tilde{p}(s)$ polinomunu d_1, d_2 nin uç noktalarında Hurwitz kararlı ve $a_1(d) > 0$ olduğu için ikinci dereceden bir polinomun Hurwitz kararlı olabilmesi için tüm katsayıların aynı işaretli olması koşulundan dolayı, $a_2(d) > 0$ ve $a_0(d) > 0$ olur. O halde tüm katsayılar d_1, d_2 nin uç değerlerinde pozitif olur. $d_1, d_2 \in [-1, 1]$ ve

$$a_i : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}, (i = 0, 1, 2)$$

multilineer fonksiyon olduğu için maksimum ve minimum değerlerini uç noktalarda alır. d_1, d_2 nin uç değerlerinde katsayılar pozitif ve minimum değeride pozitif olduğundan, d_1, d_2 nin diğer değerleri yani $d_1, d_2 \in [-1, 1]$ için de tüm katsayılar pozitif olmak zorundadır. O halde $\tilde{p}(s)$ polinomu Hurwitz kararlı olur. Bu ise $p(z)$ polinomunun Schur kararlı olması demektir. Dolayısıyla AD matrisleri Schur kararlı olur. Buradan da A matrisi Schur D-kararlıdır. $\square$

Önerme 6.1.4 de ise 3×3 gerçel matrisin Schur D-kararlı olması için gerek ve yeter koşul verilmektedir.

Önerme 6.1.4 ([33])**.** *A 3×3 gerçel matrisinin Schur D-kararlı olması için gerek ve yeter koşul*

i) $|\delta| < 1,$

ii) $|\tau + \delta| < 1 + \mu,$

iii) $|a_{11} - a_{22} - a_{33} + \delta| < 1 + m_{11} - m_{22} - m_{33},$

iv) $|a_{11} + a_{22} - a_{33} - \delta| < 1 - m_{11} - m_{22} + m_{33},$

v) $|a_{11} - a_{22} + a_{33} - \delta| < 1 - m_{11} + m_{22} - m_{33},$

vi) $|\tau\delta - \mu| < 1 - \delta^2,$

vii) $|(-a_{11} - a_{22} + a_{33})\delta + m_{11} + m_{22} - m_{33}| < 1 - \delta^2,$

viii) $|(-a_{11} + a_{22} - a_{33})\delta + m_{11} - m_{22} + m_{33}| < 1 - \delta^2,$

ix) $|(a_{11} - a_{22} - a_{33})\delta - m_{11} + m_{22} + m_{33}| < 1 - \delta^2$

olmasıdır. Burada δ : A matrisinin determinantı, τ : A matrisinin izi, m_{ii} : $(i = 1, 2, 3)$ A matrisinin 2×2 başlıca minörleri, μ ise A matrisinin 2×2 başlıca minörleri toplamıdır.

Önerme 6.1.5 ([33])**.** *A 3×3 gerçel matrisinin Schur D-kararlı olması için gerek ve yeter koşul uç kararlı olmasıdır.*

Ancak $n > 3$ için A gerçel matrisi uç kararlı olduğu halde Schur D-kararlı olmayabilir.

Örnek 6.1.6 ([33])**.**

$$A = \frac{1}{75}\begin{bmatrix} 32 & -39 & -27 & 19 \\ 40 & 36 & 35 & 41 \\ 48 & -40 & 40 & 25 \\ -21 & -14 & -8 & -35 \end{bmatrix} \tag{6.1.1}$$

matrisi uç kararlıdır. Ancak

$$D = diag(1, 1, 1, 0)$$

matrisi için AD matrisi Schur kararlı değildir.

(6.1.1) A matrisinde son $n-4$ tane satır ve sütun sıfırlarla tamamlandığında $n\times n$ boyutlu bir $\tilde{A}$ matrisi elde edilir, öyleki $\tilde{A}$ matrisi uç kararlı olduğu halde Schur D-kararlı değildir.

Bu örnekten yola çıkarak $n > 3$ için, A gerçel matrisinin kenar kararlı olması Schur D-kararlı olmasını gerektirir mi sorusu sorulabilir. Bu sorunun cevabı ise şimdilik bilinmemektedir.

Tanım 6.1.7. *Her D pozitif diagonal matrisi için AD veya DA matrisi Hurwitz kararlı ise A matrisine Hurwitz D-kararlıdır denir ve $A \in \mathbb{D}_c$ ile gösterilir.*

Bir matris Schur D-kararlı ise Cayley dönüşümü altında ki görüntüsü Hurwitz D-kararlı olmak zorunda değildir. Benzer olarak, A matrisi Hurwitz D-kararlı ise Cayley dönüşümü altında ki görüntüsü de Schur D-kararlı olmayabilir.

Örnek 6.1.8.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisi verilsin. Her D pozitif diagonal matrisi için AD matrisi Hurwitz kararlıdır. Gerçekten,

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}, d_1 > 0,\ d_2 > 0$$

olsun.

$$AD = \begin{bmatrix} 0 & -d_2 \\ d_1 & -d_2 \end{bmatrix}$$

ve AD matrisinin karakteristik polinomu,

$$p(s) = s^2 + d_2 s + d_1 d_2$$

olur. $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ *ve ikinci dereceden monik polinomun Hurwitz kararlılığı kriterinden* $p(s)$ *polinomu Hurwitz kararlı olur. Buradan A matrisi Hurwitz D-kararlıdır.*

A matrisinin $\tilde{A} = (I - A)^{-1}(I + A)$ *dönüşümü altında ki görüntüsü,*

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $\tilde{A}$ *matrisinin Schur D-kararlı olması için her*

$$D = \begin{bmatrix} [-1,1] & 0 \\ 0 & [-1,1] \end{bmatrix}$$

matrisi ile çarpımı Schur kararlı olmalıdır. Örneğin,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

alınırsa,

$$\tilde{A}D = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

olur. $\tilde{A}D$ *matrisinin özdeğerleri ise* $1, -\dfrac{1}{3}$ *olduğu için Schur kararlı değildir. Buradan* $\tilde{A}$ *matrisi Schur D-kararlı değildir.*

6.2 Schur Kararlı Matrisin Yörüngesinin Bir Özelliği

Tanım 6.2.1. *Aşağıdaki koşulları sağlayan* $||\cdot|| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonuna matris normu denir.*

1. $||A|| \geq 0$, $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

2. Her $c \in \mathbb{C}$ için $||cA|| = |c|||A||$

3. $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$

4. $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$

Matrisler üzerinde (1)-(3) özelliklerini sağlayan norma **genelleştirilmiş matris normu** denir.

$||A||_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$ ve $||A||_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ matris normuna örnek olarak verilebilir.

Genelleştirilmiş matris normu olup, matris normu olmayan $||\cdot|| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna örnek olarak,

$$||A|| = \max_{i,j=1,2,\ldots,n} |a_{ij}|$$

gösterilebilir. Bu fonksiyon için Tanım 6.2.1 in $(1)-(3)$ koşulları sağlanmaktadır, ancak 4. koşul sağlanmayabilir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ise

$$A^2 = 2A,$$

$$||A^2|| = ||2A|| = 2$$

$$||A||^2 = 1$$

olduğu için 4. koşul sağlanmamaktadır.

Tanım 6.2.2. $||\cdot||$ *normu gerçel vektör uzayında bir vektör normu olsun.* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *de bu vektör normu tarafından üretilen matris norm*

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||Ax|| \tag{6.2.2}$$

şeklinde tanımlanır. Bu matris normuna operatör normu da denir.

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||Ax|| = \max_{||x||\leq 1} ||Ax|| = \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

olduğu gösterilebilir.

Yardımcı Teorem 6.2.3 ([34])**.** $||\cdot||$, *(6.2.2) ile tanımlanan operatör normu olsun. Her* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *ve her* $x \in \mathbb{R}^n$ *için* $||Ax|| \leq ||A||.||x||$ *dir.*

Yardımcı Teorem 6.2.4 ([34])**.** *A matrisi Schur kararlı ise* $||A|| < 1$ *olacak şekilde* $||\cdot||$ *matris normu vardır.*

Teorem 6.2.5. *A* $n\times n$ *gerçel matris ve* $x \neq 0$ *olmak üzere her* $x \in \mathbb{R}^n$ *için* $k \to \infty$ *iken* $A^k x \to 0$ *olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin Schur kararlı olmasıdır.*

Kanıt. $\Rightarrow$). $x \neq 0$ olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^n$ için $k \to \infty$ iken $A^k x \to 0$ olsun. Her $z \in \mathbb{C}^n$ için de $A^k z \to 0$ dır. Çünkü $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $z = x + iy$ olsun. O zaman

$$A^k z = A^k x + iA^k y$$

olur.

$$A^k x \to 0 \text{ ve } A^k y \to 0$$

olduğundan

$$A^k z \to 0$$

olur. $\lambda \in \mathbb{C}$, A matrisinin keyfi özdeğeri olsun. $Az_0 = \lambda z_0$ olacak şekilde λ özdeğerine karşılık z_0 kompleks özvektörü vardır.

$$\begin{aligned} Az_0 &= \lambda z_0 \\ A^k z_0 &= \lambda^k z_0 \end{aligned}$$

$A^k z_0 \to 0$ olduğundan $\lambda^k z_0 \to 0$ olur. Buradan

$$||\lambda^k z_0|| = |\lambda^k|.||z_0|| = |\lambda|^k ||z_0|| \to 0$$

dır. z_0, A matrisinin özvektörü olduğu için $z_0 \neq 0$ dır. O halde $|\lambda|^k \to 0$ olmak zorundadır.

$$|\lambda|^k \to 0 \Rightarrow |\lambda| < 1$$

dir. Bu eşitsizlik A matrisinin her özdeğeri için gerçekleşeceğinden A matrisi Schur kararlı olur.

$\Leftarrow$). A matrisi Schur kararlı olsun Bu durumda Yardımcı Teorem 6.2.4 ten $||A|| < 1$ olacak şekilde en az bir $|| \cdot ||$ matris normu vardır. Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $k \to \infty$ iken $||A^k x|| \leq ||A||^k ||x|| \to 0$ dır. O halde $k \to \infty$ iken $A^k x \to 0$ olur. □

6.3 Matrisler Ailesinin Anti Schur Kararlılığı

Tanım 6.3.1. *Eğer bir matrisin tüm özdeğerleri kompleks düzlemde kapalı birim diskin dışında ise bu matrise anti Schur kararlı matris denir.*

Önerme 6.3.2. *$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin anti Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul*

$$A^* PA - P > 0 \tag{6.3.3}$$

olacak şekilde P pozitif belirli matrisinin olmasıdır.

Kanıt. $\Rightarrow$). $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi anti Schur kararlı olsun. A matrisinin keyfi özdeğeri λ ile gösterilirse $|\lambda| > 1$ dir. O zaman A^{-1} vardır. Bu durumda A^{-1} matrisinin özdeğerleri $\dfrac{1}{\lambda}$ olup modülleri 1 den küçüktür. A^{-1} matrisi Schur kararlıdır. Stein teoremine göre en az bir $P > 0$ matrisi vardır öyleki

$$(A^{-1})^* P A^{-1} - P < 0,$$

veya $M > 0$ olmak üzere,

$$(A^{-1})^* P A^{-1} - P = -M$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} (A^{-1})^* P - PA &= -MA \\ P - A^* P A &= -A^* M A \\ A^* P A - P &= A^* M A \end{aligned}$$

elde edilir. $M > 0$ ve A matrisi tersinir olduğundan $A^* M A > 0$ olur. Gerçekten,

1. $A^* M A$ Hermityen matristir:

   $$(A^* M A)^* = A^* M^* A = A^* M A$$

   dır.

2. Her $z \neq 0$ kompleks vektörü için,

   $$z^*(A^* M A) z = z^* A^* M A z = z_1^* M z_1 > 0$$

   Burada

   $$Az = z_1,\ z^* A^* = z_1^* \text{ ve } z \neq 0 \ \Leftrightarrow z_1 \neq 0$$

   olduğundan $A^* P A - P > 0$ dır.

   $\Leftarrow$). P pozitif belirli matrisi için $A^* P A - P > 0$ ve A matrisi anti Schur kararlı olmasın. Bu durumda A marisinin $|\lambda| \leq 1$ koşulunu sağlayan λ özdeğeri vardır. Bu özdeğere karşılık z özvektörü için

   $$Az = \lambda z \Leftrightarrow z^* A^* = \bar{\lambda} z^*$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} z^*(A^*PA-P)z &> 0 \\ z^*A^*PAz - z^*Pz &> 0 \\ \underbrace{(|\lambda|^2-1)}_{\leq 0}\underbrace{z^*Pz}_{>0} &> 0 \end{aligned}$$

olur. Bu çelişkiden dolayı $|\lambda| > 1$ olmak zorundadır.

□

Önerme 6.3.3. *A matrisinin anti Schur kararlı olması için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı her $z \in \mathbb{C}^n$ için*

$$z^*(A^*PA-P)z > 0 \tag{6.3.4}$$

olacak şekilde $P = P(z)$ pozitif belirli matrisinin olmasıdır.

Kanıt. $\Rightarrow$). A matrisi anti Schur kararlı olsun. En az bir $P > 0$ matrisi için $A^*PA - P > 0$ olduğundan sıfırdan farklı her $z \in \mathbb{C}^n$ için

$$z^*(A^*PA-P)z > 0$$

sağlanır. O halde bu P matrisi $P(z)$ olarak alınabilir.

$\Leftarrow$). Sıfırdan farklı her $z \in \mathbb{C}^n$ için (6.3.4) eşitsizliğini sağlayan $P = P(z) > 0$ matrisi var olsun, fakat A matrisi anti Schur kararlı olmasın. Bu durumda A matrisinin $|\lambda| \leq 1$ koşulunu sağlayan bir λ özdeğeri vardır. Bu özdeğere karşılık gelen z özvektörü için $Az = \lambda z$ ve $z^*A^* = \bar{\lambda}z^*$ sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} z^*(A^*PA-P)z &= z^*A^*PAz - z^*Pz \\ &= \bar{\lambda}z^*P\lambda z - z^*Pz \\ &= (|\lambda|^2-1)z^*Pz \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (6.3.4) ile çelişir. □

Önerme 6.3.4. *$\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ kompakt, konveks küme ve $z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$ için*

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}, z) = \{P > 0 : z^*(A^*PA-P)z > 0, \text{ her } A \in \mathcal{A} \text{ için}\}$$

kümesi tanımlansın. $\mathbb{P}$ *pozitif belirli matrisler kümesini göstersin.*

Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

1. $\mathcal{A}$ *anti Schur kararlıdır.*

2. *Her* $z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$ *için* $\mathcal{P}(\mathcal{A},\, z) \neq \phi$ *dır.*

Kanıt. (2) $\Rightarrow$ (1). $\mathcal{P}(\mathcal{A},\, z) \neq \phi$ ise her $A \in \mathcal{A}$ ve her $z \neq 0$ için

$$z^*(A^*PA - P)z > 0$$

olacak şekilde $P \in \mathcal{P}(\mathcal{A},\, z)$ vardır. Önerme 6.3.3 e göre $\mathcal{A}$ anti Schur kararlıdır.

(1) $\Rightarrow$ (2). $\mathcal{A}$ anti Schur kararlı olsun. Keyfi $A_0 \in \mathcal{A}$ için bir $P_0 > 0$ vardır öyleki sıfırdan farklı her $z \in \mathbb{C}^n$ için

$$z^*(A_0^*P_0A_0 - P_0)z > 0$$

olur.

$$z^*(A_0^*P_0A_0 - P_0)z = \alpha$$

denirse $\alpha > 0$ dır. Keyfi $\lambda > 0$ için

$$z^*(A_0^*(\lambda P_0)A_0 - \lambda P_0)z = \lambda\alpha$$

olur.

$$\sup_{P\in\mathbb{P}} z^*(A_0^*PA_0 - P)z \geq \sup_{\lambda>0} z^*(A_0^*(\lambda P_0)A_0 - \lambda P_0)z = \sup_{\lambda>0} \lambda\alpha = +\infty,$$

Buradan

$$\inf_{A\in\mathcal{A}} \sup_{P\in\mathbb{P}} z^*(A^*PA - P)z = +\infty$$

olur. Minimaks Teoreminden [35]

$$\sup_{P\in\mathbb{P}} \inf_{A\in\mathcal{A}} z^*(A^*PA - P)z = +\infty$$

$$\inf_{A\in\mathcal{A}} z^*(A^*PA - P)z > 1$$

dir. Buradan $\mathcal{P}(\mathcal{A},\, z) \neq \emptyset$ dır. □

7 SONUÇLAR, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, katsayı fonksiyonları bir kutu üzerinde tanımlı multilineer fonksiyonlar olan multilineer polinomlar ailesinin Schur kararlılığı için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Bu sonuçlar Sıfırı İçermeme Prensibine ve multilineer fonksiyonların ekstremal özelliklerine dayanmaktadır. Multilineer polinomlar ailesinin Schur kararlılığının araştırılması problemi elde edilen yeni kutunun multilineer dönüşüm altındaki görüntüsünün sıfırı içerip içermediği problemine dönüşmektedir. Bir kutunun multilineer dönüşüm altındaki görüntüsünü bulmak kolay değil, fakat görüntünün konveks zarfını bulmak kolaydır. Bu konveks zarf, kutunun uç noktalarının görüntülerinin konveks zarfıdır. Konveks zarfın sıfırı içerip içermediği ise doğrusal programlama yöntemiyle belirlenebilir. Bu tezde, elde edilen sonuçlar ve bilinenler yardımıyla multilineer polinomlar ailesinin Schur kararlılığını test etmek için yeni bir algoritma oluşturulmuştur. Eğer kutunun uç noktalarının görüntülerinin konveks zarfı sıfırı içermiyorsa multilineer polinomlar ailesi kararlıdır. Konveks zarf sıfırı içeriyorsa bu kutu daha küçük kutulara bölünür ve her yeni konveks zarf sıfırı içermiyorsa aile kararlıdır. Eğer hala sıfırı içeren konveks zarflar varsa bunlar yeniden bölünür ve böyle devam eder. Burada amacımız kutuları bölerek gerçek görüntü kümesine yaklaşmaktır. Eğer aile kararlı ise belli bir adımda hiç bir konveks zarf sıfırı içermez. Eğer algoritma döngüye giriyorsa bu ailenin kararsız olması anlamına gelir. Bu algoritma, Hurwitz kararlılıkla Schur kararlılık arasındaki bilineer dönüşümden yararlanılarak multilineer polinomlar ailesinin Hurwitz kararlılığının incelenmesinde de kullanılabilir.

Algoritmanın uygulanmasında, polinomun derecesi yüksek ve polinomun katsayılarının değiştiği kutu da yüksek boyutlu ise kutu bölünerek her bir yeni kutu için doğrusal programlama çalışacağından ve defalarca tekrarlanacağından bilgisayarın kapasitesi yetmeyebilir. Diğer durumlarda algoritma iyi çalışmaktadır. Sonuç olarak, multilineer polinomlar ailesinin kararlılığı için bilinen yeter koşul [1], [2] yerine gerek ve yeter koşul verilmiş, kararlılığı test etmek için bir algoritma oluşturulmuştur.

Tezde, Stein eşitsizliğinin pozitif diagonal çözümü var olan Schur diagonal kararlı matrisler ele alınmıştır. Bir A matrisi Schur diagonal kararlı ise, $|\alpha| < 1$ koşulunu sağlayan her α gerçel sayısı için αA matrisinin de Schur diagonal kararlı olduğu gösterilmiştir.

Hurwitz diagonal kararlı matrisin Cayley dönüşümü altındaki görüntüsünün Schur diagonal kararlı olduğu, Schur diagonal matrisin ters Cayley dönüşümü altındaki görüntüsünün ise Hurwitz diagonal kararlı olduğu görülmüştür.

Bir matris Schur diagonal kararlı ise herhangi Q pozitif belirli matrisine karşılık Stein eşitsizliğini sağlayan bir tek D pozitif diagonal matrisi vardır. Ancak Schur diagonal matris için Schur kararlılıkta olduğu gibi I birim matrise karşılık pozitif diagonal D matrisinin bulunamayacağına dair bir örnek verilmiştir.

2×2 boyutlu Schur diagonal kararlı matris için Stein eşitsizliğini sağlayan pozitif diagonal çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşul verilmiştir. Bu durum, sonlu tane 2×2 boyutlu Schur diagonal kararlı matris için Stein eşitsizliklerinin ortak diagonal çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşula genelleştirilmiştir.

$-\mathcal{Z}$ sınıfından yani, köşegen elemanları dışındaki elemanları sıfır veya pozitif olan bir matrisin Hurwitz kararlı olması Hurwitz diagonal kararlı olmasınına denkliğinden yararlanıp 3×3 boyutlu bir matrisin Schur diagonal kararlılığı için bir yeter koşul elde edilmiştir.

P pozitif diagonal matrisi A_1 ve A_2 matrislerine karşılık gelen Stein eşitsizliğinin ortak çözümü ise, P matrisinin her $\lambda \in [0, 1]$ için $\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2$ matrisine karşılık gelen Stein eşitsizliğini de sağladığı gösterilmiştir.

$\mathcal{D}$ kompleks düzlemin basit bağlantılı, açık bir alt kümesi olmak üzere, tüm kökleri $\mathcal{D}$ bölgesinde olan, n. dereceden $\mathcal{D}$-kararlı polinomlar ailesinin polinomlar uzayında basit bağlantılı açık koni oluşturduğu [17] ve [18] den bilinmektedir. Basit bağlantılılıkta kümede alınan her kapalı eğri kümede kalacak şekilde sürekli bir biçimde kümedeki bir noktaya büzülmektedir. Oysa büzülebilirlikte, bir küme kümedeki bir noktaya büzülmektedir. Buna göre büzülebilirlik kavramı basit bağlantılılıktan daha kuvvetlidir. Bu tezde, n. dereceden $\mathcal{D}$-kararlı kompleks ve gerçel katsayılı polinomlar ailesinin tek noktaya büzülemeyeceği ancak iki noktaya büzülebileceği ispatlanmıştır. $\mathcal{D}$-kararlı n. dereceden monik polinomlar ailesinin ise tek noktaya büzülebilirliği gösterilmiştir. $\mathcal{D}$ bölgesi kompleks düzlemde sol açık yarı düzlem ve açık birim disk alınarak, n. dereceden kompleks ve gerçel katsayılı, Hurwitz ve Schur kararlı polinomlar ailesi için de benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Benzer düşünceyle, $n \times n$ boyutlu Schur ve Hurwitz kararlı matrisler ailesinin tek noktaya büzülebilir olduğu görülmüştür. Tüm özdeğerleri açık, konveks bir kümede olan tüm kompleks matrisler kümesinin tek noktaya büzülebilirliği gösterilmiştir. $n \times n$ boyutlu Hurwitz ve Schur diagonal kararlı matrisler ailesinin de tek noktaya büzülebilir olduğu kanıtlanmıştır. $n \times n$ boyutlu Schur D-kararlı matrisler ailesinin tek noktaya büzülebilirliği gösterilmiş olup, Hurwitz D-kararlı matrisler için böyle bir özellik, ancak 2×2 ve 3×3 boyutlu matrisler için kanıtlanmıştır. $n > 3$ iken, $n \times n$ boyutlu Hurwitz D-kararlı matrisler ailesinin büzülebilir olup olmadığı ise araştırma konusudur.

Konveks yön kavramı polinomların kararlılığı için oldukça önemlidir. Bu tezde, derecesi $n \leq 3$ olan polinomların Schur konveks yön olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Schur kararlı polinomlar uzayında 1. dereceden her polinomun Schur konveks yön olduğu gösterilmiştir. 2. dereceden Schur konveks yön olmayan polinomların katsayılarının oluşturduğu bölge sınırlı olmasına rağmen, 3. dereceden Schur konveks yön olmayan polinomlarda katsayılarının oluşturduğu bölgenin sınırsız olduğu görülmüştür.

Aralık polinomlar ailesinin Schur kararlılığı ile ilgili [29] daki teoremin Rantzer'in artım koşulu kullanılarak yeni bir kanıtı yapılmıştır.

Bu çalışmada, 2×2 aralık matrisler ailesinin Schur kararlılığı ve 3×3 aralık matrisler ailesinin hem Schur hem de Hurwitz kararlığı için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. 2×2 boyutlu aralık matrisler ailesinde her bir uç matrisin

Schur kararlı olmasından ailenin Schur kararlılığı çıkmaktadır. Ancak, 3×3 boyutlu aralık matrisler ailesinde her bir uç matrisin Schur kararlı olmasından ailenin Schur kararlı olamayacağı bir örnekle gösterilmiştir. Bu durum daha yüksek boyuta da genelleştirilebilir.

[32] ye göre, 3×3 aralık matrisler ailesinin Schur (Hurwitz) kararlılığı için iki boyutlu yüzlerin Schur (Hurwitz) kararlı olması gerek ve yeter koşuldur. 3×3 aralık matrisler ailesinde iki boyutlu yüz sayısı 4608 dir. 3×3 aralık matrisler ailesinin kararlılığı araştırılırken, konveks yön yardımı ile iki boyutlu yüz sayısı 1920 tane azaltılabilir. Diğer iki boyutlu yüzlerin kararlılığı da 2. Bölümdeki Algoritmayla test edilebilir. Sonuç olarak, aralıklar köşegen dışında ise, yani köşegendeki elemanlar kesin biliniyorsa uçların kararlılığından ailenin kararlılığı çıkar. Eğer, aralık tek bir tane ve köşegen üzerinde ise ailenin kararlılığı polinomlar segmentinin kararlılığına dönüşür. Eğer aralık iki tane ve köşegen üzerinde ise ailenin kararlılığı bir tane multilineer ailenin kararlılığına dönüşür ve 2. Bölümdeki Algoritmayla test edilir. Eğer aralıklar üç tane ve hepsi köşegen üzerinde ise ailenin kararlılığı altı tane iki boyutlu yüzlerin kararlılığına dönüşür ve 2. Bölümdeki Algoritmayla test edilebilir.

Bu çalışmada [4] deki, "2×2 gerçel matrisinin Schur D-kararlı olması için gerek ve yeter koşul uç kararlı olmasıdır", Teoreminin bilineer dönüşümden yararlanılarak daha kısa kanıtı yapılmıştır. Burada $n > 3$ için, bir gerçel matrisin kenar kararlı olması Schur D-kararlı olmasını gerektirir mi sorusu sorulabilir ve bu sorunun cevabı şu anda bilinmemektedir.

Cayley dönüşümünün, Schur D-kararlı matrisi Hurwitz D-kararlı matrise ve Hurwitz D-kararlı matrisi de Schur D-kararlı matrise dönüştürmeyebileceği bir örnekle görülmüştür. Schur kararlı matrisin yörüngesinin sıfıra gittiği gösterilmiştir. Kompleks matrislerin konveks kompakt kümesinin Schur kararlılığı için bilinen gerekli koşuldan yola çıkarak, kompleks matrislerin konveks kompakt kümesinin anti Schur kararlılığı için Minimaks Teoreminden elde edilen gerek ve yeter bir koşul verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] BARMISH, B.R., *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan Publishing Company, New York (1994).

[2] BHATTACHARYYA, S.P., CHAPELLAT, H. ve KEEL, L.H., *Robust Control The Parametric Approach*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ (1995).

[3] JURY, E. I., *Theory and Applications of the z Transform Method*, John Wiley, New York (1964).

[4] FLEMING, R., GROSSMAN, G., LENKER, T., NARAYAN, S. ve ONG, S.-C., *On Schur D-Stable Matrices*, Linear Algebra Appl., **279**, 39-50 (1998).

[5] BOSE, N. K., *Digital Filters Theory and Applications*, Elsevier Science Publishing Co., Inc., North-Holland (1985).

[6] MARDEN, M., *Geometry of Polynomials*, American Mathematical Society, Providence, R. I. (1966).

[7] JURY, E.I. ve PAVLIDIS, T., *Stability and Aperiodicity Constraints for Control Systems Design*, IEEE Trans. Circuits, 128-141 (1963).

[8] ACKERMANN, J.E. ve BARMISH, B.R., *Robust Schur Stability of a Polytope of Polynomials*, IEEE Transactions on Automatic Control, **33**(10), 984-986 (1988).

[9] GANTMACHER, F. R., *The Theory of Matrices*, Vol. II. Chelsea Publishing Company, New York (1959).

[10] STEIN, P., *Some General Theorems on Iterants*, J. Res. Natl. Bur. Stand., **48**, 82-83 (1952).

[11] TAUSSKY, O., *Matrices C with $C^n \to 0$*, Journal of Algebra, **1**, 5-10 (1964).

[12] ZADEH, L. A. ve DESOER, C. A., *Linear System Theory-A State-Space Approach*, McGraw-Hill, New York (1963).

[13] BÜYÜKKÖROĞLU, T., *Polinomlar Politopunun Hurwitz ve Sektör Kararlılığı*, Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, Türkiye (2002).

[14] KASZKUREWİCZ, E. ve BHAYA A., *Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation*, Birkhäuser, Boston (2000).

[15] BHAYA, A. ve KASZKUREWICZ, E., *On Discrete-Time Diagonal and D-Stability*, Linear Algebra and its Applications, **187**, 87-104 (1993).

[16] CROSS, G. W., *Three types of Matrix Stability*, Linear Algebra and its Applications, **20**, 253-263 (1978).

[17] DUAN, G. R. ve WANG, M. Z., *Properties of the Entire Set of Hurwitz Polynomials and Stability Analysis of Polynomial Families*. IEEE Trans. Automat. Contr., **39**(2), 2490-2494 (1994).

[18] DUAN, G. R. ve WANG, Z. X., *Simple Connectivity of the $\mathcal{D}$-Stability Domain and $\mathcal{D}$-Stability of Polynomial Families*, In Proc. of the 35th IEEE Conf. on Decision and Control, Kobe, Japan, 11-13 December, 1301-1302 (1996).

[19] BOAS, R.P., *Invitation to Complex Analysis*, Birkhäuser Mathematics Series, McGraw-Hill, New York (1987)

[20] MASSEY, W. S., *Algebraraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, New York (1977).

[21] CAIN, B., E., *Real,* 3×3*, D-stable matrices*, Journal of Research of the National Bureau of Standards-B. Mathematical Sciences, **80B**, 75-77 (1976).

[22] RANTZER, A., *Stability Conditions for Polytopes of Polynomials*, IEEE Transactions on Automatic Control, **37**, 79-89 (1992).

[23] DZHAFAROV, V., KOÇAK, Ş. ve AZCAN, H., *A Note on a Theorem of Rantzer*, International Journal of Robust and Nonlinear Control, **12**(5), 403-407 (2002).

[24] KOKAME, H., Ito, H. ve Moti, T., *Entire Family of Convex Directions for Real Hurwitz Matrices*, Proceedings of IEEE Conf. on Decision and Control, 3835-3836 (1994).

[25] XIE, L., ve FU, M., *Discrete-Time Convex Direction for Matrices* , European Journal of Control, **2**, 126-134 (1996).

[26] KHARITONOV, V. L., *Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations*, Differentsial'nye Uravneniya, **14**, 2086-2088 (1978).

[27] BOSE, N.K. ve ZEHEB, E., *Kharitonov's theorem and stability test of multidimensional digital filters*, IEE Proceedings, Part G, **133**, 187-190 (1986).

[28] HOLLOT, C. V. ve BARTLETT, A. C., *Some Discrete-Time Counterparts to Kharitonov's Stability Criterion for Uncertain Systems*, IEEE Trans Automat. Contr., **31**(4), 355-356 (1986).

[29] PEREZ, F., ABDALLAH, C. ve DOCAMPO, D., *Extreme Point Stability Tests for Discrete-time Polynomials*, In Proc. of the 31th IEEE Conf. on Decision and Control, Tucson, AZ, December, 1552-1553 (1992).

[30] BLONDEL, V., *On Interval Polynomials With No Zeros In The Unit Disk*, IEEE Transactions on Automatic Control, **40**, 479-480 (1995).

[31] BATRA P., *On Necessary Conditions for Real Robust Schur Stability*, IEEE Transactions on Automatic Control, **48**(2), 259-261 (2003).

[32] XIAO, Y. ve UNBEHAUEN, R., *Robust Hurwitz and Schur Stability Test for Interval Matrices*, Pro. of the 39^{th} IEEE conference on decision and control, Sydney, Australia, December (2000).

[33] FLEMING, R., GROSSMAN, G., LENKER, T., NARAYAN, S.ve ONG, S.-C., *Classes of Schur D-Stable Matrices*, Linear Algebra Appl., **306**, 15-24 (2000).

[34] HORN, R. A., JOHNSON C. R., *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York (1985).

[35] AUBIN, J. P., *Optima and Equilibria: an Introduction to Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, Berlin (1998).