NEWTON-LEVY-LEBLOND

DENKLEMLERİ

Murat LİMONCU

Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Ekim - 2005

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Murat Limoncu'nun " Newton-Levy-Leblond Denklemleri " başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki, DOKTORA tezi 14 Ekim 2005 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:Prof. Dr. Tekin DERELİ	....
Üye	:Prof. Dr. Şahin KOÇAK	....
Üye	:Prof. Dr. Sadettin ERDEM	....
Üye	:Yard. Doç. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ	....
Üye	:Yard. Doç. Dr. Nejat Tevfik YILMAZ	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

NEWTON-LEVY-LEBLOND DENKLEMLERİ

MURAT LİMONCU

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Tekin DERELİ

2005, 70 sayfa

Bu tezde dejenere metrik tensörle donatılabilen türevlenebilir M manifoldlarıyla ilgilenilmiştir. Ko-rankı bir olan dejenere metrik tensör kullanılarak Newton-Cartan manifoldu, Newton-Cartan bağlantısı ve Galilei grubu tanımlanıp, özellikleri verildikten sonra, dejenere Clifford cebri yardımıyla dejenere spin grubu, dejenere simetrik bilineer formun ortogonal ve özel ortogonal grubu inşa edilip, bunların yarı-doğrudan çarpımla olan ilişkileri gösterilmiştir. Newton-Cartan 4-manifoldunda, Newton-Cartan bağlantısı dejenere spinor demetine taşınmıştır. Son olarak, taşınan bu bağlantıyla dejenere Dirac işlemcisi ve Newton-Levy-Leblond denklemleri tanımlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dejenere metrik tensör, Yarı-Doğrudan Çarpım, Dejenere Spin Grup, Dejenere Spinor Demet, Dirac İşlemcisi

ABSTRACT

PhD. Thesis

NEWTON-LEVY-LEBLOND EQUATIONS

MURAT LİMONCU

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Prof.Dr. Tekin DERELİ

2005, 70 pages

In this thesis, it is concerned with smooth manifolds M which can be furnished by degenerate metric tensor. Newton-Cartan manifolds, Newton-Cartan connections and Galilei group are defined by the use of co-rank one degenerate metric tensor and their properties are given. Orthogonal and special orthogonal group of degenerate symmetric bilinear form, degenerate spin group are constructed by the aid of degenerate Clifford algebra, and their relation with semi-direct product is shown. Newton-Cartan connection is lifted on degenerate spinor bundle in Newton-Cartan 4-manifold. Finally, degenerate Dirac operator and Newton-Levy-Leblond equations are defined with the lifted connection.

Keywords: Degenerate Metric Tensor, Semi-Direct Product, Degenerate Spin Group, Degenerate Spinor Bundle, Dirac Operator

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında benden yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Prof.Dr. Tekin DERELİ 'ye gösterdiği yoğun ilgi ve büyük sabırdan dolayı en içten teşekkürlerimi sunarım.

Problemlerin şekillenmesindeki yardımlarından ve bana ayırdığı geniş zamandan dolayı hocam Prof.Dr. Şahin KOÇAK 'a teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında gösterdiği sabır ve bütün maddi, manevi destekten dolayı sevgili eşim Berna LİMONCU 'ya teşekkürlerimi sunarım.

Murat LİMONCU

Ekim 2005

İÇİNDEKİLER

1 GİRİŞ

Newton'un gravitasyon teorisinin geometrik formulasyonu ilk kez 1920'lerde E.Cartan ve K.Friedrichs tarafından düşünülmüştür [3] , [4] , [13]. Daha yakın zamanlarda Newton-Cartan uzay-zamanlarında gravitasyon teorileri Trautman [22], Havas [15], Künzle [17] ve Dixon [9] tarafından tekrar ele alınmıştır. Dejenere metrik içeren gravitasyon teorileri ile ilgili çalışmalar günümüzde de devam etmektedir [14] , [7] , [12] , [21] , [20] , [8]. Einstein'ın teorisinde olduğu gibi bu teorilerde de herhangi bir madde dağılımı uzay-zaman eğriliğine kaynaklık eder. Öte yandan J.M. Levy-Leblond 1967 de quantum mekaniğiğinin temelini oluşturan Schrödinger denklemini lineerleştirerek relativistik Dirac denkleminin relativistik olmayan karşılığını bulmuştur [19]. Bu denklemler Levy-Leblond denklemleri olarak bilinmektedir. Daha sonraları Schrödinger ve Levy-Leblond denklemleri Newton-Cartan uzay-zamanlarında gravitasyon teorileri ile birlikte eğriliği olan uzay-zamanlarda tekrar ele alınmıştır [16] , [11] , [18]. Bu teorilerin zeminini oluşturan matematik yapı, matematik açıdan ilgi çekicidir. Bu teorilerde manifoldun dejenere bir metrik tensörle donatılması ve yarı-doğrudan çarpım kavramı temel bir rol oynamaktadır [10] , [5] , [2]. Cebirsel olarak dejenere Clifford cebri ve bu cebrin içinde gömülü olan dejenere spin grubu tanımlanmıştır [1] , [6]. Fakat dejenere spin grubunun yarı-doğrudan çarpımla olan ilişkisi herhangi bir boyut ve rank için açıkça ortaya konmamıştır. Diferansiyel geometri açısından dejenere spin ve spinor yapısı başlı başına bir araştırma konusudur. Özellikle, dejenere metrikle uyumlu simetrik bir bağlantının teğet demetinden dejenere spinor demetine invaryant bir biçimde taşınarak, spinorler için bir kovaryant türev işlemcisi tanımlamak önemlidir. Bağlantının invaryant olarak taşınması, Dirac işlemcisinin dejenere yapıdaki karşılığının oluşturulmasını sağlar. Dirac işlemcisinin dejenere olmayan yapılarda hem fiziksel hem de matematiksel açıdan önemi ortadadır. Dolayısıyla böyle bir işlemcinin dejenere durumlardaki karşılığı hem fiziksel hem de matematiksel olarak önemli olmalıdır.

Tezde, Newton-Cartan manifoldu, Galilei grubu ve Newton-Cartan bağlantısı tanımlanarak, Newton-Cartan bağlantısının özellikleri verildikden sonra,

i) Dejenere bilineer formun ortogonal grubu $O(r, p, q)$, dejenere bilineer formun özel ortogonal grubu $SO(r, p, q)$ ve dejenere spin grubu $SPIN(r, p, q)$ tanımlanarak yarı-doğrudan çarpımla olan ilişkisi ortaya konacak, dejenere metriğin korankının 1'e eşit olduğu özel durumda, dejenere spin grubuna denk olan grup belirlenecek,

ii) Dejenere spin manifoldu tanımlanarak, $SO(1, 0, 3)$ ve $SPIN(1, 0, 3)$ özel durumunda Lie cebirleri belirlenecek, $M^{1,0,3}$ dejenere spin manifoldunun simetrik ve dejenere metrikle uyumlu bağlantısı invaryant olarak dejenere spinor demetine taşınarak dejenere Dirac işlemcisi tanımlanacak ve Newton-Levy-Leblond denklemi oluşturulacaktır.

2 NEWTON-CARTAN MANİFOLDLARI

Tanım 2.1 *n-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldunun* $(\Gamma(TM), C^{\infty}(M))$ *vektör alanı modülünde g ve τ tensör alanları aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde verilsin:*

(G1) g (0,2)-tipinde, simetrik, dejenere $(\det g = 0)$ *ve* $rank\,(g) = n-1$,

(G2) τ (0,1)-tipinde (yani bir kovektör alanı) ve g nin dejenerelik şartını sağlayan öyle bir $V \in \Gamma(TM)$ vektör alanı vardır ki $\tau(V) = 1$ dir.

(M, g, τ) üçlüsüne (M nin g, τ ile donatılmasına) Newton-Cartan manifoldu denir.

g tensör alanının dejenere olması, $\forall p \in M$ için g_p tensörünün dejenere olmasıdır. O zaman öyle bir $U \in \Gamma(TM)$ vardır ki, $\forall p \in M$ ve $\forall X \in \Gamma(TM)$ için $[g(U, X)](p) = g_p(U_p, X_p) = 0$ eşitliğini sağlayan $U_p \in T_pM$ teğet vektörü $\forall p \in M$ için sıfırdan farklıdır. g tensör alanının rankı demek $\forall p \in M$ için g_p tensörünün rankı demektir. Bu durumda T_pM nin herhangi bir bazı kullanılarak g_p tensörünün oluşturduğu matrisin rankı $\forall p \in M$ için $n-1$'dir ve bilindiği gibi rank baz seçiminden bağımsızdır.

Teorem 2.2 *g'nin dejenerelik şartını sağlayan bütün vektör alanları birbirleriyle lineer bağımlıdır ve τ altındaki görüntüleri sıfırdan farklıdır.*

Kanıt. Varsayalım ki birbiriyle lineer bağımsız olan ve dejenerelik şartını sağlayan iki vektör alanı U, W olsun. Bu takdirde $\forall p \in M$ için U_p, W_p teğet vektörleri de lineer bağımsız olacaktır ve g_p nin dejenerelik şartını sağlayacaklardır. Bu teğet vektörlerini T_pM nin bir $\{U_p, W_p, (X_1)_p, ..., (X_{n-2})_p\}$ bazına tamamlayarak g_p nin matrisini oluşturursak dejenerelikten dolayı ilk iki sütun ile ilk iki satır tamamen sıfır değerini alacaktır. Bunun anlamı ise, $rank(g)$'nin $n-2$ olmasıdır. Bu sonuç $rank(g) = n-1$ ile çelişmektedir. Demek ki, dejenerelik şartını sağlayan bütün vektör alanları birbiriyle lineer bağımlıdır. Bunun sonucu olarak, $\forall p \in M$ için $\alpha(p) \neq 0$ olan $\alpha \in C^{\infty}(M)$ kullanılarak dejenerelik şartını sağlayan bütün vektör alanlarını tanımda verilen $V \in \Gamma(TM)$

vektör alanı cinsinden αV olarak yazabiliriz. Son olarak göstermemiz gereken $\forall p \in M$ için $\tau_p(\alpha(p) V_p) \neq 0$ olduğudur. $\tau(V) = 1$ olduğunu biliyoruz. Öyleyse; $\forall p \in M$ için $[\tau(V)](p) = \tau_p(V_p) = 1$ olmalıdır. Buradan ispatımızın son adımı $\tau_p(\alpha(p) V_p) = \alpha(p) \tau_p(V_p) = \alpha(p) \neq 0$ şeklinde elde edilir. ■

Teorem 2.3 $\overline{g} = g + \tau \otimes \tau$ *şeklinde tanımlı* $\overline{g}$*, dejenere olmayan, simetrik bir tensör alanıdır.*

Kanıt. Simetriklik açıkça gözükmektedir. g nin simetrik olmasından dolayı $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\overline{g}(X, Y) = g(X, Y) + \tau(X) \tau(Y) \tag{2.1}$$

$$\overline{g}(X, Y) = g(Y, X) + \tau(Y) \tau(X) \tag{2.2}$$

$$\overline{g}(X, Y) = \overline{g}(Y, X) \tag{2.3}$$

bulunur. Demek ki $\overline{g}$ de simetriktir.

g'nin ker(τ)'ya kısıtlanmışının $g\ |_{\ker(\tau)\times\ker(\tau)}$: $\ker(\tau) \times \ker(\tau) \to C^\infty(M)$ yani, $\forall p \in M$ için $(g_p)\ |_{\ker(\tau_p)\times\ker(\tau_p)}$: $\ker(\tau_p) \times \ker(\tau_p) \to \mathbb{R}$'nin dejenere olmadığını göstermeliyiz. Öyleyse, öyle bir $U \in \ker(\tau)$ vektör alanı olmalıdır ki; $\forall p \in M$ ve $\forall X \in \ker(\tau)$ için $(g_p)\ |_{\ker(\tau_p)\times\ker(\tau_p)}\ (U_p, X_p) = 0$ eşitliğini sağlayan $U_p \in \ker(\tau_p)$ teğet vektörü $\forall p \in M$ için sıfır olmalıdır. Eğer, $\forall p \in M$ için $U_p \neq 0$ olsaydı U vektör alanı g'nin dejenereliğini sağlayan bir vektör alanı olurdu ki, biz (2.2) de bu vektör alanlarının τ altındaki görüntülerinin sıfırdan farklı olduğunu göstermiştik. Öyleyse burada (2.2) ile bir çelişki vardır. Bilindiği gibi $\ker(\tau) = \{X \in \Gamma(TM) \mid \tau(X) = 0\}$ dır. Dolayısıyla $\forall p \in M$ için $U_p = 0$, yani $(g_p)\ |_{\ker(\tau_p)\times\ker(\tau_p)}$dejenere değildir. Cebirin bir temel teoremi; aynı bir F cismi üzerinde sonlu boyutlu iki vektör uzayı X ve Y ise, bir F-lineer $f : X \to Y$ dönüşümü için $\dim X = \dim(Y) + \dim(\ker(f))$ eşitliğinin var olmasıdır. Bu teorem gereği $\dim T_pM = \dim M = n$ ve $\dim \mathbb{R} = 1$ olduğundan $\mathbb{R}$-lineer $\tau_p : T_pM \to \mathbb{R}$ dönüşümü için $n = 1 + \dim(\ker \tau_p)$ olur. Buradan $\dim(\ker \tau_p) = n - 1$ bulunur. Bu durumda artık $\forall p \in M$ için $\ker \tau_p$ nin öyle bir $\{(a_p)_1, (a_p)_2 ..., (a_p)_{n-1}\}$ bazını seçebiliriz ki, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ ve $1 \leqslant j \leqslant n-1$ olmak üzere;

$$(g_p)\,|_{\ker\tau_p \times \ker\tau_p}\left((a_p)_i, (a_p)_j\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \quad , \quad i \neq j \quad \text{için} \\ 1 \quad , \quad i = j \quad \text{için} \end{cases} \tag{2.4}$$

olur. Eğer bu baza, $\forall p \in M$ için $\tau_p(V_p) = 1$ olduğu için $\ker\tau_p$'nin elemanı olmayan V_p teğet vektörünü dahil edersek ($\forall p \in M$ için $V_p \neq 0$), T_pM için $\{V_p, (a_p)_1, (a_p)_2 ..., (a_p)_{n-1}\}$ bazını bulmuş oluruz. $\forall p \in M$ için teoremde verilen $\overline{g}_p = g_p + \tau_p \otimes \tau_p$ tensörünün matrisini bu baza göre oluşturursak, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ ve $1 \leqslant j \leqslant n-1$ olmak üzere;

$$\overline{g}_p(V_p, V_p) = g_p(V_p, V_p) + \tau_p(V_p)\,\tau_p(V_p) = 1 \tag{2.5}$$

$$\overline{g}_p\left((a_p)_i, (a_p)_j\right) = g_p\left((a_p)_i, (a_p)_j\right) + \tau_p\left((a_p)_i\right)\tau_p\left((a_p)_j\right) = \delta_{ij} \tag{2.6}$$

$$\overline{g}_p\left(V_p, (a_p)_i\right) = g_p\left(V_p, (a_p)_i\right) + \tau_p(V_p)\,\tau_p\left((a_p)_i\right) = 0 \tag{2.7}$$

olacağı için, söz konusu matrisin köşegenindeki elemanlarının hepsi sıfırdan farklı, diğer elemanları ise sıfır olacaktır. Öyleyse, $\forall p \in M$ için, bu baza göre $\det \overline{g}_p \neq 0$ olmalıdır. Biz biliyoruz ki, bu yolla oluşturulan matrislerin determinantının sıfırdan farklı olması (veya sıfır olması) baz seçiminden bağımsızdır. Dolayısıyla, daima $\forall p \in M$ için $\det \overline{g}_p \neq 0$ dır. Determinantın sıfırdan farklı olması $\forall p \in M$ için $\overline{g}_p$ tensörünün dejenere olmaması demektir. Bu da $\overline{g}$ tensör alanının dejenere olmaması demektir. ■

Önerme 2.4 *$\forall X \in \Gamma(TM)$ için $\tau(X) = \overline{g}(V, X)$ dir.*

Not: Bir başka deyişle τ nun duali V dir $\tau^* = V$. Burada V vektör alanı g nin dejenerelik şartını sağlayan ve $\tau(V) = 1$ olan vektör alanıdır.

Kanıt. $\overline{g} = g + \tau \otimes \tau$ ise $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için $\overline{g}(X, Y) = g(X, Y) + \tau(X)\,\tau(Y)$ yazılabilir. Eğer $X = V$ alınırsa $\tau(V) = 1$ ve $\forall Y \in \Gamma(TM)$ için $g(V, Y) = 0$ olduğundan, $\forall Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\overline{g}(V, Y) = g(V, Y) + \tau(V)\,\tau(Y) \tag{2.8}$$

$$\overline{g}(V, Y) = \tau(Y) \tag{2.9}$$

bulunmuş olur. ■

Sonuç 2.5 *$\bar{g}$ yardımıyla $(2,0)$ tipinden $\bar{h}$ tensör alanı $\bar{h}(\alpha,\beta) = \bar{g}(\alpha^*,\beta^*)$ olarak tanımlansın. Burada α ve β 1-formlar ve α^*,β^* onların $\bar{g}$-dualleridir. $\bar{h}$ nin simetrik olduğu açıktır. Bunun yanısıra $\bar{h}$ dejenere değildir. Bu metrik-dualitenin tanımındaki $\Gamma(T^*M) \longrightarrow \Gamma(TM)$ şeklindeki bire-bir ve örten olan doğrusal dönüşümün açık sonucudur.*

Önerme 2.6 *$h = \bar{h} - V \otimes V$ olarak tanımlanan h tensörü simetrik ve dejeneredir.*

Kanıt. h'nin simetrik olduğu açıktır. Dejenereliği şu şekilde gösterilebilir. Her θ 1-form için

$$\begin{aligned} h(\tau,\theta) &= \bar{h}(\tau,\theta) - V(\tau)V(\theta) \\ &= \bar{g}(\tau^*,\theta^*) - \tau(V)\theta(V) \\ &= \bar{g}(V,\theta^*) - \theta(V) \\ &= 0. \end{aligned}$$

bulunur ki, bu dejenerik için yeterlidir. ■

Önerme 2.7 *Herhangi bir koordinat sisteminde*

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \bar{h}^{\mu\lambda}\bar{g}_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{2.10}$$

ve

$$\sum_{\lambda=1}^{n} h^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - V^{\mu}\tau_{\nu} \tag{2.11}$$

dir.

Kanıt. $(x^1,...,x^n)$ koordinat sisteminde

$$\partial^*_{\mu} = \sum_{\lambda=1}^{n} \bar{g}_{\mu\lambda} dx^{\lambda} \tag{2.12}$$

olacaktır. $\overline{g}$ dejenere olmadığından $\overline{g}_{\mu\nu}$ terslenebilir bir matrisdir. Bu matrisi $\overline{g}^{\mu\nu}$ ile gösterirsek yukarıdaki eşitlikten

$$dx^{\mu} = \sum_{\lambda=1}^{n} \overline{g}^{\mu\lambda} \partial_{\lambda}^{*} \tag{2.13}$$

sonucunu buluruz. Öyleyse,

$$\begin{aligned} \overline{h}(dx^{\mu}, dx^{\nu}) &= \sum_{\lambda,\kappa=1}^{n} \overline{g}^{\mu\lambda} \overline{g}^{\nu\kappa} \overline{h}(\partial_{\lambda}^{*}, \partial_{\kappa}^{*}) \\ &= \sum_{\lambda,\kappa=1}^{n} \overline{g}^{\mu\lambda} \overline{g}^{\nu\kappa} \overline{g}(\partial_{\lambda}, \partial_{\kappa}) \\ &= \sum_{\lambda,\kappa=1}^{n} \overline{g}^{\mu\lambda} \overline{g}^{\nu\kappa} \overline{g}_{\lambda\kappa} \\ &= \overline{g}^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.14}$$

bulunur ki bu; açıkça,

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \overline{h}^{\mu\lambda} \overline{g}_{\lambda\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n} \overline{h}(dx^{\mu}, dx^{\lambda}) \overline{g}_{\lambda\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$$

demektir. Diğer eşitlik şöyle elde edilir: $\overline{g} = g + \tau \otimes \tau$ ve $\overline{h} = h + V \otimes V$ ifadelerinden yukarıdaki sonuç kullanılarak

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \left(h^{\mu\lambda} + V^{\mu} V^{\lambda}\right) \left(g_{\lambda\nu} + \tau_{\lambda} \tau_{\nu}\right) = \delta_{\nu}^{\mu} \tag{2.15}$$

yazılabilir. Buradan da,

$$\sum_{\lambda=1}^{n} (h^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} + h^{\mu\lambda} \tau_{\lambda} \tau_{\nu} + V^{\mu} V^{\lambda} g_{\lambda\nu} + V^{\mu} V^{\lambda} \tau_{\lambda} \tau_{\nu}) = \delta_{\nu}^{\mu} \tag{2.16}$$

elde edilir. Burada $\tau(V) = 1$ ve g, h dejenere olduğundan $\sum_{\lambda=1}^{n} V^{\lambda} \tau_{\lambda} = 1$, $\sum_{\lambda=1}^{n} g_{\mu\lambda} V^{\lambda} = 0$ ve $\sum_{\lambda=1}^{n} h^{\mu\lambda} \tau_{\lambda} = 0$ eşitlikleri geçerlidir. Dolayısıyla

$$\sum_{\lambda=1}^{n} h^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} - V^{\mu} \tau_{\nu} \tag{2.17}$$

sonucu bulunmuş olur. ■

Tanım 2.8 *Her* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *için* $g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(X, Y)$ *ve* $\varphi(V) = V$ *özelliklerini sağlayan* $C^\infty(M)$*-lineer* $\varphi : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$ *dönüşümüne dejenere metriği koruyan dönüşüm denir.*

Bu durumda, her $p \in M$ noktasında g_p dejenere metriği koruyan $\mathbb{R}$-lineer $\varphi_p : T_pM \longrightarrow T_pM$ dönüşümleri vardır. Yani her $p \in M$ ve $X_p, Y_p \in T_pM$ için $g_p(\varphi_p(X_p), \varphi_p(Y_p)) = g_p(X_p, Y_p)$ ve $\varphi_p(V_p) = V_p$ dir.

Tanım 2.9 *Dejenere metriği koruyan ve* $det(\varphi) = 1$ *olan* φ *dönüşümlerinin oluşturduğu gruba, Galilei grubu denir.*

Not: İkinci bölümde böyle dönüşümlerin bir grup oluşturduğu ve Galilei grubunun matrislerle

$$SO(1, 0, n-1) = \{ \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & R \end{pmatrix} \mid R \in SO(n-1) \quad A \in Mat(1 \times (n-1)) \}$$

şeklinde ifade edilebileceği gösterilecektir. Galilei grubunun, daha genel bir yapının özel bir hali olduğu ve yarı-doğrudan çarpımla olan ilişkisi de ikinci bölümde ortaya konulacaktır.

Tanım 2.10 ∇_X *herhangi bir bağlantının kovaryant türevi olmak üzere*

$$\nabla_X \tau = 0 \quad , \quad \nabla_X g = 0$$

ise, bu bağlantıya Newton-Cartan bağlantısı denir.

Önerme 2.11 ∇_X *bir Newton-Cartan bağlantısı ise* $\nabla_X V = 0$*,* $\nabla_X h = 0$ *ve* $\nabla_X \overline{h} = 0$ *dir.*

Kanıt. Öncelikle $\nabla_X \bar{g} = \nabla_X g + \nabla_X \tau \otimes \tau + \tau \otimes \nabla_X \tau = 0$ dir. Şimdi Önerme 2.4 den herhangi bir $Y \in \Gamma(TM)$ için $\tau(Y) = \bar{g}(V, Y)$ bulunur. O zaman $\nabla_X \tau = 0$ ve $\nabla_X \bar{g} = 0$ den

$$\begin{aligned} \nabla_X(\tau(Y)) &= \nabla_X(\bar{g}(V, Y)) \\ (\nabla_X \tau)(Y) + \tau(\nabla_X Y) &= (\nabla_X \bar{g})(V, Y) + \bar{g}(\nabla_X V, Y) + \bar{g}(V, \nabla_X Y) \\ \tau(\nabla_X Y) &= \bar{g}(\nabla_X V, Y) + \bar{g}(V, \nabla_X Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar Önerme 2.4 kullanılırsa, $\tau(\nabla_X Y) = \bar{g}\,(V, \nabla_X Y)$ olacağından $\bar{g}(\nabla_X V, Y) = 0$ buradanda $\nabla_X V = 0$ bulunur.
Şimdi $h = \bar{h} - V \otimes V$ ifadesi göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_X h &= \nabla_X \bar{h} - V \otimes \nabla_X V - \nabla_X V \otimes V \\ \nabla_X h &= \nabla_X \bar{h} \end{aligned}$$

bulunur. Öyleyse, $\nabla_X \bar{h} = 0$ olduğu gösterilirse $\nabla_X h = 0$ elde edilmiş olur. α, β herhangi iki 1-form alanı ve α^*, β^*'lar onların $\bar{g}$-dualleri olan vektör alanları olsun. Burada $(\nabla_X \alpha)^* = \nabla_X(\alpha^*)$ dir. Gerçekten

$$\begin{aligned} \bar{g}(\alpha^*, U) &= \alpha(U) \qquad U \in \mathcal{X}\,(M) \\ \nabla_X(\bar{g}(\alpha^*, U)) &= \nabla_X(\alpha(U)) \\ \bar{g}(\nabla_X \alpha^*, U) + \bar{g}(\alpha^*, \nabla_X U) &= (\nabla_X \alpha)(U) + \alpha(\nabla_X U) \\ \bar{g}(\nabla_X \alpha^*, U) &= (\nabla_X \alpha)(U) \end{aligned}$$

olur. Öte yandan $\bar{g}(\alpha^*, \nabla_X U) = \alpha(\nabla_X U)$ olduğundan $(\nabla_X \alpha)^* = \nabla_X \alpha^*$ olur. Bu sonuç ile birlikte $\bar{h}(\alpha, \beta) = \bar{g}(\alpha^*, \beta^*)$ ve $\nabla_X \bar{g} = 0$ aşağıda kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla_X \bar{h})(\alpha, \beta) &= \nabla_X(\bar{h}(\alpha, \beta)) - \bar{h}(\nabla_X \alpha, \beta) - \bar{h}(\alpha, \nabla_X \beta) \\ \left(\nabla_X \bar{h}\right)(\alpha, \beta) &= \nabla_X(\bar{g}(\alpha^*, \beta^*)) - \bar{g}(\nabla_X \alpha^*, \beta^*) - \bar{g}(\alpha^*, \nabla_X \beta^*) = 0. \end{aligned}$$

bulunur. ■

Şimdi Newton-Cartan bağlantısının varlığıyla ilgileneceğiz. (M, g, τ) Newton-Cartan manifoldlarından, $(M, \bar{g})$ Riemann manifoldlarına geçiş yapılabileceğini daha önce gördük. Bu durumda $\bar{g}$ nin burulmasız ve metrikle uyumlu olan Levi-Civita bağlantısının bir Newton-Cartan bağlantısı olup olamayacağı sorusu gündeme gelmektedir. Bu tartışma aşağıdaki teoremle verilmektedir [20],[8].

Teorem 2.12 *Newton-Cartan manifoldundan elde edilen $\bar{g}$ nin Levi-Civita bağlantısının kovaryant türevi ∇_X ile gösterilirse, $\nabla_X \tau = 0$, $\nabla_X\, g = 0$ (Newton-Cartan bağlantısı) olması için gerek ve yeter koşul, $d\tau = 0$, $L_V\, g = 0$ olmasıdır. (Burada "L_V" ile Lie (tensör) türevi gösterilmektedir. V vektör alanı g nin dejenerelik şartını sağlayan ve $\tau\,(V) = 1$ olan vektör alanıdır)*

Kanıt. Önce, $d\tau = 0$ ve $L_V\, g = 0$ olması durumunda Newton-Cartan bağlantısını elde edelim. $d\tau = 0$ ifadesinin anlamı $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$X\tau\,(Y) - Y\tau\,(X) - \tau\,([X, Y]) = 0 \tag{2.18}$$

eşitliğidir. Bu eşitlik Önerme 2.4 den dolayı

$$X\overline{g}\,(V, Y) - Y\overline{g}\,(V, X) - \overline{g}\,(V, [X, Y]) = 0 \tag{2.19}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $[X, Y]$ parantezi X, Y nin Lie parantezidir. Öte yandan herhangi bir tensör türevi için verilen çarpım kuralını Lie (tensör) türevi için kullanırsak, $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} (L_V\,\tau)\,(X) &= L_V\,\tau\,(X) - \tau\,(L_V X) \\ (L_V\,\tau)\,(X) &= V\tau\,(X) - \tau\,([V, X]) \end{aligned} \tag{2.20}$$

olur. İlk eşitlikten

$$V\tau\,(X) - \tau\,([V, X]) = X\tau\,(V) \tag{2.21}$$

elde edilir. Bu yukarıda yerine konursa

$$(L_V\,\tau)\,(X) = X\tau\,(V) \tag{2.22}$$

bulunur. $\tau\,(V) = 1$ olduğundan dolayı

$$L_V\,\tau = 0 \tag{2.23}$$

olur. Öte yandan $L_V\,\tau = 0$ ise, $\overline{g} = g + \tau \otimes \tau$ olduğundan

$$L_V\,\overline{g} = L_V\,g + L_V\,(\tau \otimes \tau) \tag{2.24}$$

$$L_V\,\overline{g} = L_V\,g + (L_V\,\tau) \otimes \tau + \tau \otimes (L_V\,\tau) \tag{2.25}$$

$$L_V\,\overline{g} = L_V\,g = 0 \tag{2.26}$$

elde edilir. Çünkü teoremimizin koşullarından birisi $L_V\,g = 0$ dir. Bu durumda, tensör türevleri için verilen çarpım kuralından, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$\begin{aligned} V\overline{g}\,(X, Y) - \overline{g}\,([V, X]\,, Y) - \overline{g}\,(X, [V, Y]) &= 0 \\ V\overline{g}\,(X, Y) + \overline{g}\,(Y, [X, V]) - \overline{g}\,(X, [V, Y]) &= 0 \end{aligned} \tag{2.27}$$

bulunur. Şimdi herhangi bir tensör türevi için verilen çarpım kuralını kovaryant (tensör) türevi için kullanırsak, $\forall U, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \left(\nabla_U\, \tau\right)(W) &= \nabla_U\, \tau\,(W) - \tau\left(\nabla_U W\right) \\ \left(\nabla_U\, \tau\right)(W) &= U\tau\,(W) - \tau\left(\nabla_U W\right) \end{aligned} \tag{2.28}$$

yazabiliriz. Burada da Önerme 2.4 den yararlanırsak ifademiz

$$\left(\nabla_U\, \tau\right)(W) = U\overline{g}\,(V, W) - \overline{g}\,(V, \nabla_U W) \tag{2.29}$$

şeklini alır. Levi-Civita bağlantısı, Koszul formülü ile karakterize edilir ve bu formül $\Gamma(TM)$ nin bütün elemanları için geçerlidir. Bu durumda yukarıdaki eşitlikte $\overline{g}\,(V, \nabla_U W) = \overline{g}\,(\nabla_U W, V)$'nin yerine Koszul formülünden;

$$\begin{aligned} \overline{g}\,(\nabla_U W, V) &= \frac{1}{2}\{U\overline{g}\,(W, V) + W\overline{g}\,(V, U) - V\overline{g}\,(U, W) \\ &\quad -\overline{g}\,(U, [W, V]) + \overline{g}\,(W, [V, U]) + \overline{g}\,(V, [U, W])\} \end{aligned} \tag{2.30}$$

ifadesi konur ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \left(\nabla_U\, \tau\right)(W) &= \frac{1}{2}\{V\overline{g}\,(U, W) + \overline{g}\,(U, [W, V]) - \overline{g}\,(W, [V, U])\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\{U\overline{g}\,(W, V) - W\overline{g}\,(V, U) - \overline{g}\,(V, [U, W])\} \end{aligned} \tag{2.31}$$

bulunur. Kıvrık parantez içerisindeki ilk terim ile ikinci terimin sıfır olduğu yukarıda (2.19) ve (2.27) da gösterilmişti. Bu durumda,

$$\left(\nabla_U\, \tau\right)(W) = 0 \tag{2.32}$$

elde edilir. Öyleyse $\forall U \in \Gamma(TM)$ için $\nabla_U\, \tau = 0$ olduğu gösterilmiştir. Son olarak, $\overline{g} = g + \tau \otimes \tau$ ve $\forall U, W \in \Gamma(TM)$ için $\left(\nabla_U\, \tau\right)(W) = 0$ olduğundan,

$$\nabla_X\, \overline{g} = \nabla_X\, g + \nabla_X\, (\tau \otimes \tau) \tag{2.33}$$

$$\nabla_X\, \overline{g} = \nabla_X\, g + (\nabla_X\, \tau) \otimes \tau + \tau \otimes (\nabla_X\, \tau) \tag{2.34}$$

$$\nabla_X\, \overline{g} = \nabla_X\, g \tag{2.35}$$

bulunur. Teoremde $\nabla_X\, \overline{g} = 0$ olduğu verilmiştir (metrikle uyumluluk). Öyleyse yukarıdaki eşitlikten dolayı $\forall X \in \Gamma(TM)$ için $\nabla_X\, g = 0$ bulunmuş olur.

Şimdide $\nabla_X g = 0$ ve $\nabla_X \tau = 0$ olması durumunda $d\tau = 0$ ve $L_V g = 0$ olduğunu görelim: $\nabla_X \tau = 0$ ise, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$X\tau(Y) - \tau(\nabla_X Y) = 0$$
$$Y\tau(X) - \tau(\nabla_Y X) = 0$$

yazılabilir. Bu iki ifade taraf tarafa çıkarılırsa

$$X\tau(Y) - Y\tau(X) - \tau(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = 0$$

elde edilir. Levi-Civita bağlantısının burulması sıfır olduğundan

$$X\tau(Y) - Y\tau(X) - \tau([X, Y]) = 0$$

sonucuna ulaşılır ki; bu, $(d\tau)(X, Y) = 0$ yani $d\tau = 0$ demektir. İkinci olarak $\nabla_X g = 0$ ise, özel olarak $X = V$ alınırsa her $U, W \in \Gamma(TM)$ için

$$Vg(U, W) = g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W)$$

yazılabilir. Burulmanın sıfır olması burada da kullanılırsa,

$$Vg(U, W) = g([V, U] + \nabla_U V, W) + g(U, [V, W] + \nabla_W V)$$

elde edilir. Genel olarak $L_X Y = [X, Y]$ demek olduğundan,

$$Vg(U, W) - g([L_V U, W) - g(U, L_V W) = g(\nabla_U V, W) + g(U, \nabla_W V)$$
$$(L_V g)(U, W) = g(\nabla_U V, W) + g(U, \nabla_W V)$$

bulunur. Bu durumda, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $g(Y, \nabla_X V) = 0$ olduğunu gösterirsek $(L_V g)(U, W) = 0$ yani $L_V g = 0$ olduğunu göstermiş oluruz. Tekrar $\nabla_X g = 0$'dan, her $Z, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikte $Z = V$ alındığında, g'nin dejenereliğinden dolayı $g(Y, \nabla_X V) = 0$ bulunur. ■

Sonuç 2.13 *Eğer* ∇_X *ile* $\overline{g}$ *nin burulmasız ve metrikle uyumlu olan (Levi-Civita) bağlantısının kovaryant (tensör) türevini gösterirsek, bir* $(x^1, ..., x^n)$ *koordinat sisteminde* ∇_X *in bağlantı katsayıları (Christoffel sembolleri) bilindiği gibi*

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{2}\overline{h}^{\kappa\lambda}\left(\frac{\partial \overline{g}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \overline{g}_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \overline{g}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\right)$$

olmaktadır. İfadeyi dejenere tensörler cinsinden yazmak istersek, yukarıda elde edilen sonuçlar kullanılarak

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{2}h^{\kappa\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\right) + V^{\kappa}\frac{\partial \tau_{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

ifadesini elde ederiz.

3 DEJENERE SPİN GRUBU

Tanım 3.1 *$\mathbb{R}^n$ de $\langle,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ simetrik bilineer form olsun. Eğer her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\langle v, x\rangle = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı en az bir $v \in \mathbb{R}^n$ varsa $\langle,\rangle$ ye dejenere simetrik bilineer form denir.*

$\mathbb{R}^n$'nin $\{e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_{r+p}, e_{r+p+1}, \ldots, e_{r+p+q}\}$ $(r+p+q=n)$ olarak gösterilen ve

$$\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = \ldots = \langle e_r, e_r\rangle = 0$$
$$\langle e_{r+1}, e_{r+1}\rangle = \langle e_{r+2}, e_{r+2}\rangle = \ldots = \langle e_{r+p}, e_{r+p}\rangle = -1$$
$$\langle e_{r+p+1}, e_{r+p+1}\rangle = \langle e_{r+p+2}, e_{r+p+2}\rangle = \ldots = \langle e_{r+p+q}, e_{r+p+q}\rangle = 1$$

olan (diğer bileşenler sıfır) bir bazı vardır. Bu baz göz önüne alındığında, $\langle,\rangle$ dejenere simetrik bilineer formu $\{e_{r+1} \ldots e_{r+p+q}\}$ baz elemanlarının gerdiği $(p+q)$-boyutlu alt uzaya kısıtlandığında (p,q) şeklinde ne pozitif ne de negatif tanımlı dejenere olmayan bir simetrik bilineer form elde ederiz. $(p+q)$ olan bu boyut değerine dejenere simetrik bilineer formun rankı, r değerine de korankı denir.

Teorem 3.2 *$\varphi : \mathbb{R}^{r,p,q} \longrightarrow \mathbb{R}^{r,p,q}$ lineer dönüşümler olmak üzere*

$$O(r,p,q) = \{\varphi \mid \forall v, w \in \mathbb{R}^{r,p,q} \text{ için } \langle \varphi v, \varphi w\rangle = \langle v, w\rangle \text{ ve } \varphi\mid_{sp\{e_1 \ldots e_r\}} = id\}$$

olarak tanımlanan $O(r,p,q)$ kümesi $Aut(\mathbb{R}^n) \equiv GL(n,\mathbb{R})$ grubunun bir alt grubudur.

Kanıt. Öncelikle $O(r,p,q)$ nin $Aut(\mathbb{R}^n) \equiv GL(n,\mathbb{R})$ nin bir alt kümesi olduğunu görelim. O zaman $O(r,p,q)$ nin elemanlarının terslenebilir, bir başka deyişle φ lerin bire-bir ve örten olduğunu göstermeliyiz. Elimizdeki korankı r olan dejenere simetrik bilineer form nedeniyle $\mathbb{R}^{r,p,q} = \mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^{p,q}$ yazılabilir (burada $\mathbb{R}^r = sp\{e_1 \ldots e_r\}$ ve $\mathbb{R}^{p,q} = sp\{e_{r+1} \ldots e_{r+p+q}\}$ dir). Bu durumda $\mathbb{R}^{r,p,q}$ nin her elemanını, $v = v^r + v^{p,q}$ şeklinde ikiye ayırabiliriz $(v \in \mathbb{R}^{r,p,q})$.

Ayrıca $\langle , \rangle$ nin $\mathbb{R}^{p,q}$ ye olan kısıtlanışından elde edilen $\langle , \rangle \mid_{\mathbb{R}^{p,q}}$ nin dejenere olmayan bir simetrik bilineer form olduğu açıktır. Gerçekten yukarıdaki bazların yardımıyla $\langle , \rangle \mid_{\mathbb{R}^{p,q}}$ nin oluşturduğu matrisin determinantı sıfırdan farklıdır. İlk olarak φ nin bire-bir olduğunu görelim. Herhangi iki $v, w \in O(r,p,q)$ için $\varphi(v) = \varphi(w)$ ise

$$\begin{aligned} \varphi(v^r + v^{p,q}) &= \varphi(w^r + w^{p,q}) \\ v^r + \varphi(v^{p,q}) &= w^r + \varphi(w^{p,q}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

olur ($O(r,p,q)$ nin özelliklerinden). Her $x = x^r + x^{p,q} \in \mathbb{R}^{r,p,q}$ için

$$\begin{aligned} \langle v^r + \varphi(v^{p,q}), \varphi(x) \rangle &= \langle w^r + \varphi(w^{p,q}), \varphi(x) \rangle \\ \langle v^r + \varphi(v^{p,q}), \varphi(x^r + x^{p,q}) \rangle &= \langle w^r + \varphi(w^{p,q}), \varphi(x^r + x^{p,q}) \rangle \\ \langle v^r + \varphi(v^{p,q}), x^r + \varphi(x^{p,q}) \rangle &= \langle w^r + \varphi(w^{p,q}), x^r + \varphi(x^{p,q}) \rangle \\ \langle \varphi(v^{p,q}), \varphi(x^{p,q}) \rangle &= \langle \varphi(w^{p,q}), \varphi(x^{p,q}) \rangle \\ \langle v^{p,q}, x^{p,q} \rangle &= \langle w^{p,q}, x^{p,q} \rangle \\ \langle v^{p,q}, x^{p,q} \rangle \mid_{\mathbb{R}^{p,q}} &= \langle w^{p,q}, x^{p,q} \rangle \mid_{\mathbb{R}^{p,q}} \end{aligned}$$

bulunur ($O(r,p,q)$ nin özelliklerinden ve v^r, w^r, x^r dejenereliği sağlayan vektörler olduğundan). $\langle , \rangle \mid_{\mathbb{R}^{p,q}}$ nin dejenere olmadığı söylenmişti. Bu durumda her $x^{p,q} \in \mathbb{R}^{p,q}$ için

$$\langle v^{p,q} - w^{p,q}, x^{p,q} \rangle \mid_{\mathbb{R}^{p,q}} = 0$$

olacağından $v^{p,q} - w^{p,q} = 0$ ve $v^{p,q} = w^{p,q}$ bulunur. Bu sonuç (3.1) de yerine konursa $v^r = w^r$ olur. Öyleyse $v = w$ olup φ bire-birdir. Artık örtenlik açıktır. Çünkü φ bire-bir olduğundan $\text{Ç}ek(\varphi) = \{0\}$ dır ve cebrin bilinen teoreminden φ nin görüntüsünün boyutu $r + p + q = n$ bulunur ki bu φ nin örten olması demektir. Şimdi alt gurup aksiyomlarına bakalım. $\varphi, \eta \in O(r,p,q)$ ise

$$\begin{aligned} \langle (\varphi \circ \eta)(v), (\varphi \circ \eta)(w) \rangle &= \langle \varphi(\eta(v)), \varphi(\eta(w)) \rangle \\ &= \langle \eta(v), \eta(w) \rangle \\ &= \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

olacaktır. $(\varphi \circ \eta) \mid_{sp\{e_1 \dots e_r\}} = id$ olduğu açıktır. Bu durumda $\varphi \circ \eta \in O(r,p,q)$ dir. Aynı şekilde $\eta = \varphi^{-1}$ alınırsa

$$\langle (\varphi \circ \varphi^{-1})(v), (\varphi \circ \varphi^{-1})(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

ve $\varphi \in O(r,p,q)$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} \langle (\varphi \circ \varphi^{-1})(v), (\varphi \circ \varphi^{-1})(w) \rangle &= \langle \varphi(\varphi^{-1}(v)), \varphi(\varphi^{-1}(w)) \rangle \\ &= \langle \varphi^{-1}(v), \varphi^{-1}(w) \rangle \end{aligned}$$

dir. Öyleyse bu iki eşitlikten $\langle \varphi^{-1}(v), \varphi^{-1}(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ bulunur. Öte yandan $\varphi \mid_{sp\{e_1 \dots e_r\}} = id$ olduğundan $\varphi^{-1} \mid_{sp\{e_1 \dots e_r\}} = id$ dir. O zaman $\varphi^{-1} \in O(r,p,q)$ demektir. Bu iki aksiyom sağlandığından $O(r,p,q) \leqslant Aut(\mathbb{R}^n)$ dir. ■

Önerme 3.3 $\mathbb{R}^{r,p,q}$ *nin* $\{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{r+p}, e_{r+p+1}, \dots, e_{r+p+q}\}$ *bazı için* $O(r,p,q)$ *grubu*

$$O(r,p,q) = \{ \begin{pmatrix} I_{r\times r} & A_{r\times(p+q)} \\ 0_{(p+q)\times r} & R_{(p+q)\times(p+q)} \end{pmatrix} \mid R \in O(p,q) \quad A \in Mat(r \times (p+q)) \}$$

olur.

Kanıt. Bu baza göre $\langle \varphi v, \varphi w \rangle = \langle v, w \rangle$ ve $\varphi \mid_{sp\{e_1 \dots e_r\}} = id$ nin matris ifadeleri

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \varphi_{\mu\alpha} \varphi_{\nu\beta} \langle e_\mu, e_\nu \rangle = \langle e_\alpha, e_\beta \rangle \qquad (\varphi \mid_{sp\{e_1 \dots e_r\}})_{r\times r} = I_{r\times r}$$

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \varphi^t_{\alpha\mu} G_{\mu\nu} \varphi_{\nu\beta} = G_{\alpha\beta} \qquad (\varphi \mid_{sp\{e_1 \dots e_r\}})_{r\times r} = I_{r\times r}$$

$$\Phi^t G \Phi = G \qquad (\Phi \mid_{sp\{e_1 \dots e_r\}})_{r\times r} = I_{r\times r} \tag{3.2}$$

olur. Burada

$$G = \langle e_\mu, e_\nu \rangle = \begin{pmatrix} 0_{r\times r} & 0_{r\times(p+q)} \\ 0_{(p+q)\times r} & I_{(p+q)\times(p+q)} \end{pmatrix}$$

dir. ϕ blok matrislerle yazılırsa (3.2)'nin ikinci ifadesinden dolayı

$$\Phi = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & A_{r\times(p+q)} \\ B_{(p+q)\times r} & C_{(p+q)\times(p+q)} \end{pmatrix}$$

olur. Bu matris (3.2)'nin ilk ifadesinde yerine konduğunda $\phi^t G$ nin eşiti

$$\begin{pmatrix} I_{r\times r} & B^t_{r\times(p+q)} \\ A^t_{(p+q)\times r} & C^t_{(p+q)\times(p+q)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{r\times r} & 0_{r\times(p+q)} \\ 0_{(p+q)\times r} & I_{(p+q)\times(p+q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{r\times r} & B^t_{r\times(p+q)} \\ 0_{(p+q)\times r} & C^t_{(p+q)\times(p+q)} \end{pmatrix}$$

olacağından

$$\begin{pmatrix} (B^tB)_{r\times r} & (B^tC)_{r\times(p+q)} \\ (C^tB)_{(p+q)\times r} & (C^tC)_{(p+q)\times(p+q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{r\times r} & 0_{r\times(p+q)} \\ 0_{(p+q)\times r} & I_{(p+q)\times(p+q)} \end{pmatrix}$$

bulunur ve buradan

$$C^tC = I \qquad C^tB = 0 \qquad B^tC = 0 \qquad B^tB = 0$$

elde edilir. Burada ilk eşitlikten $det(C) = \mp 1$ bulunur ki bu C nin terslenebilir olduğunu, dolayısıyla CC^t nin terslenebilir olduğunu gösterir. Öte yandan yine ilk eşitlikten

$$\begin{aligned} C^tC &= I \\ CC^tC &= C \\ CC^tCC^t &= CC^t \end{aligned}$$

bulunur. Her iki taraf CC^t nin tersiyle çarpılırsa $CC^t = I$ sonucu elde edilir. O zaman yukarıdaki ikinci eşitlik soldan C ile çarpılırsa $B = 0$ bulunur. Bu sonuç üçüncü ve dördüncü denklemlerle de uyumludur ve $C \in O(p, q)$ olduğu artık açıkça ortadadır. Bu durumda $O(r, p, q)$

$$O(r,p,q) = \{ \begin{pmatrix} I_{r\times r} & A_{r\times(p+q)} \\ 0_{(p+q)\times r} & R_{(p+q)\times(p+q)} \end{pmatrix} \mid R \in O(p,q) \quad A \in Mat(r \times (p+q))\}$$

olarak ifade edilebilir. ■

Sonuç 3.4 *Eğer $R \in SO(p, q)$ ise*

$$SO(r,p,q) = \{ \begin{pmatrix} I_{r\times r} & A_{r\times(p+q)} \\ 0_{(p+q)\times r} & R_{(p+q)\times(p+q)} \end{pmatrix} \mid R \in SO(p,q) \quad A \in Mat(r \times (p+q))\}$$

kümesi $O(r,p,q)$ *nin bir alt grubu olur. Bu kümeye ait matrislerin determinantının* 1 *olduğu, determinantın ilk* r *sütuna göre açılımından kolayca görülür. Ayrıca* $X, Y \in SO(r,p,q)$ *ise* $det(XY) = det(X)det(Y) = 1$ *ve* $det(XX^{-1}) = det(X)det(X^{-1}) = det(X^{-1}) = 1$ *olacaktır. Öyleyse gerçekten* $SO(r,p,q) \leqslant O(r,p,q)$ *dir.*

Tanım 3.5 *$O(r,p,q)$ ye dejenere bilineer formun ortogonal grubu, $SO(r,p,q)$'ye dejenere bilineer formun özel ortogonal grubu denir.*

Sonuç 3.6 *Özel ortogonal grubunda $r = 1, p = 0, q = n-1$ olarak alınırsa birinci bölümde tanımlanan $SO(1,0,n-1)$ Galilei grubu elde edilmiş olur.*

Önerme 3.7 *$O(r,p,q)$ ve $SO(r,p,q)$ için*

$$\begin{aligned} O(r,p,q) &\simeq O(p,q) \ltimes_{id} Mat((p+q)\times r) \\ SO(r,p,q) &\simeq SO(p,q) \ltimes_{id} Mat((p+q)\times r) \end{aligned}$$

dir.

Kanıt. İzomorfizmi

$$\begin{array}{lccc} \lambda: & O(r,p,q) & \longrightarrow & O(p,q) \ltimes_{id} Mat((p+q)\times r) \\ & \begin{pmatrix} I_{r\times r} & A_{r\times(p+q)} \\ 0_{(p+q)\times r} & R_{(p+q)\times(p+q)} \end{pmatrix} & \longmapsto & (R, A^t) \end{array}$$

olarak alırsak bire-bir ve örten olduğu açıkdır. Homomorfizmayı görelim. Herhangi iki elemanın çarpımının

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A' + AR' \\ 0 & RR' \end{pmatrix}$$

olduğnu daha önceden biliyoruz. O zaman

$$\begin{aligned} \lambda \begin{pmatrix} I & A' + AR' \\ 0 & RR' \end{pmatrix} &= (RR', (A' + AR')^t) \\ &= (RR', A'^t + R'^t A^t) \end{aligned}$$

olur. Öte yandan

$$\begin{aligned}(R, A^t)(R', A'^t) &= (RR', id(R'^{-1})(A^t) + A'^t) \\ &= (RR', A'^t + id(R'^t)(A^t)) \\ &= (RR', A'^t + R'^t(A^t)) \\ &= (RR', A'^t + R'^t A^t)\end{aligned}$$

bulunur. Burada $R' \in O(p,q)$ olduğundan $R'^{-1} = R'^t$ dir. Verilen λ izomorfizması $SO(r,p,q)$ için de aynen geçerlidir. ■

Sonuç 3.8 *Öyleyse* $SO(1,0,n-1)$ *şeklindeki Galilei grubu yarı-doğrudan çarpımla* $SO(1,0,n-1) \simeq SO(n-1) \ltimes_{id} Mat((n-1)\times 1)$ *olarak ifade edilir.*

Bundan sonrasında her $v, w \in \mathbb{R}^{r,p,q}$ için $(r+p+q=n)$ işlemi; bu dejenere bilineer form yardımıyla

$$vw + wv = 2\langle v, w\rangle$$

olarak tanımlanan $\mathcal{C}\ell_{r,p,q}$ "Dejenere Clifford Cebrinin" içerisinde yatan $SPIN(r,p,q)$ "Dejenere Spin Grubu" tanımlanıp, bu grubun yarı-doğrudan çarpımla olan ilişkisi belirlenecektir.

Not: $\langle,\rangle$ nin dejenereliğine olan vurguyu güçlendirmek için

$$\{e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_{r+p}, e_{r+p+1}, \ldots, e_{r+p+q}\}$$

olarak gösterdiğimiz bazları bundan sonra

$$\{f_1, \ldots, f_r, e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_{p+q}\}$$

olarak göstereceğiz.

Önerme 3.9 $a, b \in sp\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_{p+q}\}$, $F, F' \in sp\{f_1, \ldots, f_r\}$ *elemanları alınsın, öyle ki* $\langle a, b\rangle = 0$ *olsun. Bu durumda*

$$\exp(aF) = 1 + aF \tag{3.3}$$

$$\exp(aF)\exp(bF') = \exp(aF + bF') \tag{3.4}$$

dir.

Kanıt. Üstel fonksiyonun seriye açılımından

$$\exp(aF) = 1 + aF + \frac{1}{2}aFaF + \dots$$

dir. Burada dejenerelik ve Clifford çarpımının özelliğinden $aF = -Fa$, $F^2 = 0$ olduğunu biliyoruz. Öyleyse gerçekten

$$\exp(aF) = 1 + aF$$

dir. İkinci eşitliği görmek için her iki tarafı ayrı ayrı oluşturalım:

$$\begin{aligned} \exp(aF)\exp(bF') &= (1 + aF)(1 + bF') \\ &= 1 + aF + bF' + aFbF' \end{aligned}$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \exp(aF + bF') &= 1 + aF + bF' + \frac{1}{2}(aF + bF')(aF + bF') + \dots \\ &= 1 + aF + bF' + \frac{1}{2}(aFaF + aFbF' + bF'aF + bF'bF') + \dots \end{aligned}$$

olur ki, buradan $aF = -Fa$, $F^2 = 0$ ve $bF' = -F'b$, $F'^2 = 0$ eşitliklerinden

$$\exp(aF + bF') = 1 + aF + bF' + \frac{1}{2}(aFbF' + bF'aF) + \dots$$

bulunur. $\langle a, b\rangle = 0$ olduğundan $ab = -ba$ dir. Ayrıca $Fb = -bF$, $F'a = -aF'$ ve $FF' = -F'F$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \exp(aF + bF') &= 1 + aF + bF' + \frac{1}{2}(ab - ba)F'F + \dots \\ \exp(aF + bF') &= 1 + aF + bF' + abF'F + \dots \\ \exp(aF + bF') &= 1 + aF + bF' + aFbF' \end{aligned}$$

bulunur ve ikinci eşitliğin doğruluğu kanıtlanmış olur. Burada diğer terimler özdeş olarak sıfıra eşittir. Gerçekten

$$\begin{aligned} (aF + bF')^3 &= (aF + bF')^2(aF + bF') \\ (aF + bF')^3 &= abF'F(aF + bF') \end{aligned}$$

olduğu yukarıdaki sonucun ikinci satırından anlaşılmaktadır. Öyleyse $F^2 = 0$, $F'^2 = 0$ ve $FF' = -F'F$ eşitliklerinden

$$(aF + bF')^3 = 0$$

olduğu kolayca görülür. ∎

Teorem 3.10 (Crumeyrolle, [6]) *$\mathcal{C}\ell_{r,p,q}$ nin bir alt kümesi olan $S_{r,p,q}$ Clifford çarpımı altında bir gruptur.*

$$S_{r,p,q} = \{s\gamma_1 \dots \gamma_{p+q}(1+G) \mid s \in SPIN(p,q),$$
$$\gamma_i = 1 + e_i \sum_{l=1}^{r} c_{il} f_l,\ G \in sp(f_{k_1} \dots f_{k_j})\}$$

Not. $1 \leqslant l, j, k_j \leqslant r$, $1 \leqslant i \leqslant p+q$ ve $c_{il} \in \mathbb{R}$ olup, $sp(f_{k_1} \dots f_{k_j})$ ise $\mathbb{R}^{r,p,q}$ nin sadece $\{f_1, \dots, f_r\}$ den ibaret baz elemanlarının Clifford çarpımından oluşturulan $\mathcal{C}\ell_{r,p,q}$ nin $\{f_{k_1} \dots f_{k_j}\}$ tipindeki baz elemanlarının gerdiği alt cebirdir.

Kanıt. Öncelikle Clifford çarpımının bu küme üzerinde kapalı olduğunu gösterelim. Bunun için $S_{r,p,q}$ den

$$\begin{aligned} \Theta &= s\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_{p+q}(1+G) \\ \Pi &= s'\gamma_1'\gamma_2' \dots \gamma_{p+q}'(1+G') \end{aligned}$$

şeklindeki iki elemanın Clifford çarpımına bakalım:

$$\begin{aligned} \Theta\Pi &= s\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_{p+q}(1+G)s'\gamma_1'\gamma_2' \dots \gamma_{p+q}'(1+G') \\ &= s\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_{p+q}(s'\gamma_1'\gamma_2' \dots \gamma_{p+q}' + Gs'\gamma_1'\gamma_2' \dots \gamma_{p+q}')(1+G'). \end{aligned}$$

γ_i çarpanlarını $\gamma_i = 1 + e_iF_i$ ile gösterip $Gs' = s'G$ ve $G\gamma_i' = \gamma_i'G$ eşitlikleri kullanılırsa

$$(1+G)(1+G') = 1 + G' + G + GG' = 1 + G'' \tag{3.5}$$

gösterimiyle birlikte

$$\begin{aligned}
\Theta\Pi &= s\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{p+q}(s'\gamma_1'\gamma_2'\ldots\gamma_{p+q}' + s'\gamma_1'\gamma_2'\ldots\gamma_{p+q}'G)(1+G') \\
&= s\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{p+q}s'\gamma_1'\gamma_2'\ldots\gamma_{p+q}'(1+G)(1+G') \\
&= s\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{p+q}s'\gamma_1'\gamma_2'\ldots\gamma_{p+q}'(1+G'') \\
&= s(1+e_1F_1)\ldots(1+e_{p+q}F_{p+q})s'\gamma_1'\ldots\gamma_{p+q}'(1+G'') \\
&= s(1+e_1F_1)\ldots(s'+e_{p+q}F_{p+q}s')\gamma_1'\ldots\gamma_{p+q}'(1+G'')
\end{aligned}$$

olur. $F_is' = s'F_i$ den

$$\begin{aligned}
\Theta\Pi &= s(1+e_1F_1)\ldots(s'+e_{p+q}s'F_{p+q})\gamma_1'\ldots\gamma_{p+q}'(1+G'') \\
&= s(1+e_1F_1)\ldots(s'+s's'^{-1}e_{p+q}s'F_{p+q})\gamma_1'\ldots\gamma_{p+q}'(1+G'') \\
&= s(1+e_1F_1)\ldots s'(1+s'^{-1}e_{p+q}s'F_{p+q})\gamma_1'\ldots\gamma_{p+q}'(1+G'')
\end{aligned}$$

olur. Burada her $v \in \mathbb{R}^{p,q}$ için

$$\begin{aligned}
\rho:\ \ SPIN(p,q) &\longrightarrow SO(p,q) \\
s &\longmapsto \rho(s)(v) := svs^{-1}
\end{aligned}$$

olarak tanımlanan $2:1$ grup homomorfizması kullanılırsa

$$\Theta\Pi = s(1+e_1F_1)\ldots s'(1+\rho(s'^{-1})(e_{p+q})F_{p+q})\gamma_1'\ldots\gamma_{p+q}'(1+G'')$$

buluruz. s' çarpanını γ_{p+q-1} üzerinden aynı şekilde atlatıp bu işlemi γ_1 yi de kapsayacak şekilde devam ettirirsek

$$\Theta\Pi = ss'(1+\rho(s'^{-1})(e_1)F_1)\ldots(1+\rho(s'^{-1})(e_{p+q})F_{p+q})\gamma_1'\ldots\gamma_{p+q}'(1+G'')$$

olur. Burada γ_i' çarpanlarınıda $\gamma_i' = 1+e_iF_i'$ olarak gösterip (3.3) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\Theta\Pi = ss'&(1+\rho(s'^{-1})(e_1)F_1)\ldots(1+\rho(s'^{-1})(e_{p+q})F_{p+q})(1+e_1F_1') \\
&\ldots(1+e_{p+q}F_{p+q}')(1+G'') \\
= ss'&\exp(\rho(s'^{-1})(e_1)F_1)\ldots\exp(\rho(s'^{-1})(e_{p+q})F_{p+q})\exp(e_1F_1') \\
&\ldots\exp(e_{p+q}F_{p+q}')(1+G'')
\end{aligned}$$

bulunur. $\rho(s'^{-1}) \in SO(p,q)$ olduğundan $\langle \rho(s'^{-1})(e_k), \rho(s'^{-1})(e_l)\rangle = \langle e_k, e_l\rangle = 0$ dır. O zaman elde edilen son ifade de (3.4) kullanılabilir ve

$$\Theta\Pi \;=\; ss' \exp(\sum_{j=1}^{p+q} \rho(s'^{-1})(e_j)F_j) \exp(\sum_{k=1}^{p+q} e_k F'_k)(1+G'') \tag{3.6}$$

bulunur.

$$\rho(s'^{-1})(e_j) = \sum_{m=1}^{p+q} \rho_{mj} e_m \tag{3.7}$$

dersek ($\rho_{mj} \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p+q} \rho(s'^{-1})(e_j)F_j &= \sum_{m,j=1}^{p+q} \rho_{mj} e_m F_j \\ &= \sum_{m,j=1}^{p+q} e_m \rho_{mj} F_j \\ &= \sum_{m=1}^{p+q} e_m F''_m \end{aligned} \tag{3.8}$$

bulunur. Burada

$$F''_m = \sum_{j=1}^{p+q} \rho_{mj} F_j \tag{3.9}$$

dir. (3.8)'i (3.6)'da yerinde kullanılırsa

$$\Theta\Pi \;=\; ss' \exp(\sum_{m=1}^{p+q} e_m F''_m) \exp(\sum_{k=1}^{p+q} e_k F'_k)(1+G'')$$

elde edilir. Burada tekrar (3.4) ve sonra (3.3) kullanılırsa

$$\Theta\Pi \;=\; ss'(1+e_1F''_1)\dots(1+e_{p+q}F''_{p+q})(1+e_1F'_1)\dots(1+e_{p+q}F'_{p+q})(1+G'')$$

bulunur. Genel olarak $\langle a,b\rangle = 0$ ise $(1+aF'')(1+bF') = (1+bF')(1+aF'')$ olduğu kolayca görülebilir. Öyleyse $\Theta\Pi$ ifadesini

$$\Theta\Pi \;=\; ss'(1+e_1F''_1)(1+e_1F'_1)\dots(1+e_{p+q}F''_{p+q})(1+e_{p+q}F'_{p+q})(1+G'')$$

olarak yazabiliriz. Burada parantezler açılırsa ve genel olarak geçerli olan $F''F' = -F'F''$, $F''^2 = F'^2 = 0$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Theta\Pi = ss'(1+e_1(F''_1+F'_1) - F''_1F'_1) \\ \dots(1+e_{p+q}(F''_{p+q}+F'_{p+q}) - F''_{p+q}F'_{p+q})(1+G'') \end{aligned}$$

$$\Theta\Pi = ss'(1 + e_1(F_1'' + F_1'))(1 - F_1''F_1'))$$
$$\dots (1 + e_{p+q}(F_{p+q}'' + F_{p+q}'))(1 - F_{p+q}''F_{p+q}'))(1 + G'')$$

olur. $k \neq l$ için $(1 - F_k''F_k')(1 + e_l(F_l'' + F_l')) = (1 + e_l(F_l'' + F_l'))(1 - F_k''F_k')$ olduğu kolayca gösterilebilir. Öyleyse

$$\Theta\Pi = ss'(1 + e_1(F_1'' + F_1')) \dots (1 + e_{p+q}(F_{p+q}'' + F_{p+q}'))(1 - F_1''F_1'))$$
$$\dots (1 - F_{p+q}''F_{p+q}'))(1 + G'')$$

olacaktır. Burada

$$F_i''' = F_i'' + F_i' \tag{3.10}$$
$$1 + G''' = (1 - F_1''F_1')) \dots (1 - F_{p+q}''F_{p+q}'))(1 + G'') \tag{3.11}$$

gösterimleri kullanılırsa

$$\Theta\Pi \;=\; ss'(1 + e_1F_1''') \dots (1 + e_{p+q}F_{p+q}''')(1 + G''') \tag{3.12}$$

bulunur ki bu Clifford çarpımının küme üzerinde kapalı olduğunu gösterir.

Clifford cebri birleşmeli bir cebir olduğundan Clifford çarpımı bu küme (ki Clifford cebrinin bir alt kümesidir) üzerinde de birleşmelidir.

Birim elemanı $\mathbf{1_{S_{r,p,q}}} = \mathbf{1_{SPIN(p,q)}} = 1$ dir. Gerçekten $S_{r,p,q}$ de $c_{il} = 0$ olarak seçilip $G = 0$ alınırsa $(G = f_1 f_1 = 0)$ $1 \in S_{r,p,q}$ olur.

Son olarak $\Theta = s(1 + e_1F_1) \dots (1 + e_{p+q}F_{p+q})(1 + G) \in S_{r,p,q}$ gibi bir elemanın tersinin

$$\Theta^{-1} = s^{-1}(1 - e_1 \sum_{k=1}^{p+q} \rho_{1k}F_k) \dots (1 - e_{p+q} \sum_{k=1}^{p+q} \rho_{(p+q)k}F_k)(1 - G)$$

olduğunu görelim (burada ρ_{ik} ile (3.7) numaralı eşitlikdeki matris gösterilmiştir). Dikkat edilirse kapalılık gösterilirken kullandığımız Π elemanında

$$s' = s^{-1} \qquad F_i' = -\sum_{k=1}^{p+q} \rho_{ik}F_k \qquad G' = -G$$

almış oluyoruz. O zaman $\Theta\Theta^{-1}$ oluşturulduğunda (3.5) den hemen $G'' = 0$ buluruz. (3.9) dan dolayı da $F_i' = -F_i''$ olur ve bu (3.10) dan $F_i''' = 0$ sonucunu çıkarır. $F_i'' = -F_i'$ ise $F_i'F_i'' = 0$ demektir ve artık $G'' = 0$ olduğundan (3.11) ifadesi $G''' = 0$ sonucunu verir. Öyleyse $F_i''' = 0$ ve $G''' = 0$ sonuçları (3.12) de yerinde kullanılırsa $\Theta\Theta^{-1} = ss^{-1} = 1$ elde ederiz. Aynı yolla $\Theta^{-1}\Theta = 1$ bulunur. ■

Önerme 3.11 *$S_{r,p,q}$ grubu üzerinde*

$$s\gamma_1 \ldots \gamma_{p+q}(1+G) \sim s'\gamma_1' \ldots \gamma_{p+q}'(1+G') \quad \Leftrightarrow \quad s\gamma_1 \ldots \gamma_{p+q} = s'\gamma_1' \ldots \gamma_{p+q}'$$

olarak tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısı olup, $S_{r,p,q}$ grubunun işlemi (Clifford çarpımı) $S_{r,p,q}/\sim$ nin üzerine taşınabilir.

Kanıt. Bağıntının denklik bağıntısı olduğu açıktır. İşlemin taşınabilirliğini görebilmek için $\gamma = \gamma_1 \ldots \gamma_{p+q}$ gösterimini kullanarak, $s\gamma(1+G) \sim s'\gamma'(1+G')$ ve $\overline{s}\,\overline{\gamma}(1+\overline{G}) \sim \overline{s}'\overline{\gamma}'(1+\overline{G}')$ şeklinde iki eleman alalım. Bu durumda

$$s\gamma(1+G)\overline{s}\,\overline{\gamma}(1+\overline{G}) = s\gamma\overline{s}\,\overline{\gamma}(1+\overline{G}+G+G\overline{G}) \tag{3.13}$$

olacağını biliyoruz. Öte yandan bunlara denk olan elemanların çarpımından

$$\begin{aligned} s'\gamma'(1+G')\overline{s}'\,\overline{\gamma}'(1+\overline{G}') &= s'\gamma'\overline{s}'\,\overline{\gamma}'(1+\overline{G}'+G'+G'\overline{G}') \\ &= s\gamma\overline{s}\,\overline{\gamma}(1+\overline{G}'+G'+G'\overline{G}') \end{aligned} \tag{3.14}$$

bulunur. Çünkü denklik bağıntımızın tanımı gereği $s\gamma = s'\gamma'$ ve $\overline{s}\,\overline{\gamma} = \overline{s}'\overline{\gamma}'$ dir. Dolayısıyla (3.13) ve (3.14)'e bakıldığında yine denklik bağıntımızın gereği çarpım sonuçlarının aynı denklik sınıfında olduğunu buluruz. ■

Dolayısıyla $S_{r,p,q}/\sim$ de taşınan bu işlemle birlikte bir grup olur. Bu durumda aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 3.12 (Crumeyrolle, [6]) *Denklik sınıflarından oluşan $S_{r,p,q}/\sim$ grubuna Dejenere Spin grubu denir ve $SPIN(r,p,q)$ ile gösterilir.*

Bu tanım dejenere spin grubunun elemanlarının denklik sınıflarından oluştuğunu söyler. Fakat özel olarak $r = 1$ alınırsa $SPIN(1, p, q)$ grubunun, denklik sınıfları içermeyen, Clifford cebrinin içinde yatan ve işlemi Clifford çarpımı olan bir gruba izomorf olduğu gösterilebilir. Bunun için iki adım vardır.

Önerme 3.13 *$r = 1$ için $S_{1,p,q}$*

$$S_{1,p,q} = \{s(1 + vf)(1 + \epsilon f) \mid s \in SPIN(p, q),\ v \in \mathbb{R}^{p,q},\ \epsilon \in \mathbb{R}\}$$

dir

Kanıt. Özel olarak $r = 1$ ise $1 \leqslant i \leqslant p + q$ ve $c_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$S_{1,p,q} = \{s\gamma_1 \ldots \gamma_{p+q}(1 + G) \mid s \in SPIN(p, q),\ \gamma_i = 1 + e_i c_i f,\ G \in sp(f)\}$$

dir. Burada herhangi bir ϵ gerçel sayısı için $G = \epsilon f$ den başka birşey olamaz. Öyleyse

$$\begin{aligned} s\gamma_1 \ldots \gamma_{p+q}(1 + G) &= s(1 + c_1 e_1 f) \ldots (1 + c_{p+q} e_{p+q} f)(1 + \epsilon f) \\ &= s \exp(c_1 e_1 f) \ldots \exp(c_{p+q} e_{p+q} f)(1 + \epsilon f) \\ &= s \exp(c_1 e_1 f + \ldots + c_{p+q} e_{p+q} f)(1 + \epsilon f) \\ &= s \exp((c_1 e_1 + \ldots + c_{p+q} e_{p+q}) f)(1 + \epsilon f) \\ &= s \exp(vf)(1 + \epsilon f) \\ &= s(1 + vf)(1 + \epsilon f) \end{aligned}$$

bulunur. ■

Önerme 3.14 *$\mathcal{C}\ell_{1,p,q}$ nin*

$$S = \{s(1 + vf) \mid s \in SPIN(p, q),\ v \in \mathbb{R}^{p,q}\}$$

olarak tanımlanan alt kümesi Clifford çarpımı altında bir grup ve

$$SPIN(1, p, q) \simeq S$$

dir.

Kanıt. Önce kapalılığı görelim:

$$\begin{aligned} s(1+vf)s'(1+v'f) &= (s+svf)(s'+s'v'f) \\ &= ss'+ss'v'f+svfs'+svfs'v'f \\ &= ss'+ss'v'f+svs'f-svf^2s'v' \end{aligned}$$

$f^2 = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} s(1+vf)s'(1+v'f) &= ss'+ss'v'f+svs'f \\ &= ss'+ss'v'f+ss's'^{-1}vs'f \end{aligned}$$

bulunur. Genel olarak $\rho(s)(x) = sxs^{-1}$ olduğundan dolayıda

$$\begin{aligned} s(1+vf)s'(1+v'f) &= ss'+ss'v'f+ss'\rho(s'^{-1})(v)f \\ &= ss'(1+(v'+\rho(s'^{-1})(v))f) \end{aligned}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi işlem kapalıdır.

Clifford cebri birleşmeli bir cebir olduğundan Clifford çarpımı bu küme (ki Clifford cebrinin bir alt kümesidir) üzerinde de birleşmelidir.

Birim elemanı $\mathbf{1_S} = \mathbf{1_{SPIN(p,q)}} = 1$ dir. Gerçekten S de $v = 0$ olarak seçilirse $1 \in S$ olur.

Ters eleman

$$(s(1+vf))^{-1} = s^{-1}(1-\rho(s)(v)f)$$

dir. Yukarıda kapalılık için yapılan adımlar burada tekrarlanırsa bu elemanın ters eleman olduğu hemen görülür. Öyleyse S bir grupdur. Ayrıca Önerme 3.13 den ve $SPIN(1,p,q) = S_{1,p,q}/\sim$ olduğundan $[s(1+vf)] \in SPIN(1,p,q)$ olacaktır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \Xi : \quad SPIN(1,p,q) &\longrightarrow S \\ [s(1+vf)] &\longmapsto s(1+vf) \end{aligned}$$

dönüşümünün bire-bir örten ve işlem koruyan olduğu açıktır, yani bir grup izomarfizmasıdır. Öyleyse $SPIN(1,p,q) \simeq S$ dir. ■

Not: Bundan sonraki bölümde $r = 1, p = 0, q = 3$ özel durumunda dejenere spin grubu alınıp asal demetler üzerinden bağlantı taşınarak dejenere Dirac işlemcisi oluşturulacaktır. Bu nedenden dolayı Önerme 3.13 ve 3.14 önemlidir. Ayrıca önermedeki $SPIN(1,p,q) \simeq S$ izomorfizmasından dolayı artık $r = 1$ için dejenere spin grubunun elemanları S nin elemanları olarak alınacaktır. Fakat gösterim olarak S kullanılmayıp yine $SPIN(1,p,q)$ kullanılacaktır.

Önerme 3.15 $SPIN(r,p,q) \simeq SPIN(p,q) \ltimes_\rho Mat((p+q) \times r)$

Not: Burada $Mat((p+q) \times r)$ ile gösterilen $(p+q) \times r$ tipinden matrislerin kümesi, matrislerin bilinen toplama işlemi altında bir gruptur. O zaman $\rho : SPIN(p,q) \longrightarrow SO(p,q)$ şeklindeki $2:1$ örten grup homomorfizmasını $\rho : SPIN(p,q) \longrightarrow Aut(Mat((p+q) \times r))$ şeklindeki bir grup homomorfizması olarak da alabiliriz. Gerçekten $\rho(s) \in SO(p,q)$ olduğundan elimizde $(p+q) \times (p+q)$ tipinden terslenebilir matrisler var demektir ve bunların $(p+q) \times r$ tipinden matrislerle bilinen matris çarpımı anlamlıdır. Matrislerin çarpımı, matrislerin toplamı üzerine soldan (ve sağdan) dağılabildiklerinden $\rho(s)$ matrisleri bu anlamda $Aut(Mat((p+q) \times r))$ nin de elemanlarıdırlar.

Kanıt. İzomorfizim

$$\begin{array}{rccl} \eta: & SPIN(r,p,q) & \longrightarrow & SPIN(p,q) \ltimes_\rho Mat((p+q) \times r) \\ & [s\gamma_1 \ldots \gamma_{p+q}] & \longmapsto & (s,(c_{il})) \end{array}$$

dönüşümü ile vereceğiz. Buradaki $(c_{il}) \in Mat((p+q) \times r)$ matrisini $S_{r,p,q}$ nin tanımından bildiğimiz, $\gamma_i = 1 + e_i \sum_{l=1}^{r} c_{il} f_l = 1 + e_i F_i$ ifadesinden elde ediyoruz. Dolayısıyla, bu dönüşümün bire-bir ve örten olduğu açıkca ortadadır. Geriye dönüşümün bir grup homomorfizması olduğunu göstermek kalmıştır. $S_{r,p,q}$ den alınan iki elemanın çarpımını

$$F''_m = \sum_{j=1}^{p+q} \rho_{mj} F_j$$

şeklindeki (3.9) gösteriminin yanısıra (3.10), (3.11) ve (3.12) gösterimlerini gözönünde tutarak

$$\begin{aligned}
[\Theta][\Pi] &= [ss'(1+e_1(F_1''+F_1'))\ldots(1+e_{p+q}(F_{p+q}''+F_{p+q}'))(1+G''')] \\
&= [ss'(1+e_1(\sum_{j=1}^{p+q}\rho_{1j}F_j+F_1'))\ldots(1+e_{p+q}(\sum_{j=1}^{p+q}\rho_{(p+q)j}F_j+F_{p+q}'))(1+G''')] \\
&= [ss'(1+e_1(\sum_{j=1}^{p+q}\rho_{1j}F_j+F_1'))\ldots(1+e_{p+q}(\sum_{j=1}^{p+q}\rho_{(p+q)j}F_j+F_{p+q}'))]
\end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Ayrıca $F_i = \sum_{l=1}^{r} c_{il} f_l$ ve $F_i' = \sum_{l=1}^{r} c_{il}' f_l$ olduğundan

$$[\Theta][\Pi] = [ss'(1+e_1\sum_{l=1}^{r}(\sum_{j=1}^{p+q}\rho_{1j}c_{jl}+c_{1l}')f_l)\ldots(1+e_{p+q}\sum_{l=1}^{r}(\sum_{j=1}^{p+q}\rho_{(p+q)j}c_{jl}+c_{(p+q)l}')f_l)]$$

olur. O zaman bu ifadenin yukarıda verilen η altındaki görüntüsü

$$\eta([\Theta][\Pi]) = (ss', (\sum_{j=1}^{p+q}\rho_{ij}c_{jl}+c_{il}')) \tag{3.15}$$

olacaktır. Öte yandan $\eta([\Theta]) = (s,(c_{il}))$ ve $\eta([\Pi]) = (s',(c_{il}'))$ ifadelerinin yarı-doğrudan çarpımı

$$\eta([\Theta])\eta([\Pi]) = (s,(c_{il}))(s',(c_{il}')) \;=\; (ss', \rho(s'^{-1})((c_{il}))+(c_{il}')))$$

olacaktır. Burada

$$\rho(s'^{-1})(e_j) = \sum_{m=1}^{p+q}\rho_{mj}e_m$$

şeklindeki (3.7) gösterimi hatırlanırsa ρ_{ij} matrisi $\rho(s'^{-1})$ nin matrisinden başkası değildir. Ayrıca yukarıda belirtildiği gibi $(c_{il}) \in Mat((p+q)\times r)$ grubunun işlemi matrislerin bildiğimiz toplama işlemi olduğundan ve matrislerin bilinen çarpımıyla $\rho(s'^{-1}) \in Aut(Mat((p+q)\times r))$ olduğundan

$$\eta([\Theta])\eta([\Pi]) = (s,c_{il})(s',c_{il}') = (ss', (\sum_{j=1}^{p+q}\rho_{ij}c_{jl}+c_{il}'))$$

bulunur ki bu (3.15) numaralı ifadenin aynısıdır. ∎

Sonuç 3.16 *Bu durumda özel olarak*

$$SPIN(1,p,q) \simeq SPIN(p,q) \ltimes_\rho Mat((p+q)\times 1) \simeq SPIN(p,q) \ltimes_\rho \mathbb{R}^{p,q}$$

dir. Gerçekten $Mat((p+q)\times 1)$ nin elemanları sütun vektörleri olarak düşünülürse $s(1+vf) \simeq [s(1+vf)] \in SPIN(1,p,q)$ elemanındaki (Önerme 3.13 ve 3.14 den) $v \in \mathbb{R}^{p,q}$ vektörü bu matrislerle bire-bir eşlenmiş olur.

Önerme 3.17 *Aşağıdaki gibi tanımlanan Λ dönüşümü $2:1$ grup homomorfizmadır;*

$$\begin{array}{rccc} \Lambda: & SPIN(p,q) \ltimes_\rho Mat((p+q)\times r) & \longrightarrow & SO(p,q) \ltimes_{id} Mat((p+q)\times r). \\ & (s,A) & \longmapsto & \Lambda(s,A) := (\rho(s), 2A) \end{array}$$

Kanıt. ρ grup homomorfizması $2:1$ olduğundan Λ nın da $2:1$ olduğu açık olarak ortadadır. Ayrıca

$$(s,A)(s',A') = (ss', \rho(s'^{-1})(A) + A')$$

dir. Buradan

$$\Lambda((s,A)(s',A')) = (\rho(ss'), 2(\rho(s'^{-1})(A) + A')) = (\rho(s)\rho(s'), 2\rho(s'^{-1})(A) + 2A')$$

elde edilir. Öte yandan

$$\begin{aligned} \Lambda((s,A))\Lambda((s',A')) = (\rho(s),2A)(\rho(s'),2A') &= (\rho(s)\rho(s'), id(\rho(s')^{-1})(2A) + 2A') \\ &= (\rho(s)\rho(s'), 2\rho(s'^{-1})(A) + 2A') \end{aligned}$$

bulunur ki bu Λ nın homomorfizma olması demektir. ■

Not: Bu homomorfizmada $2A$ şeklinde duran 2 çarpanı yerine sıfırdan farklı bir başka çarpan da kullanılabilirdi. 2 çarpanının özelliği

$$\begin{tikzcd} SPIN(p,q) \ltimes_\rho Mat((p+q)\times r) \arrow[r, "\Lambda"] & SO(p,q) \ltimes_{id} Mat((p+q)\times r) \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \\ SPIN(r,p,q) \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "\rho'"] & SO(r,p,q) \end{tikzcd}$$

diagramını komutatif yapmasıdır. Burada λ ve η Önerme 3.7 ve 3.15'in ispatında not edilen grup izomorfizmaları olup,

$$\begin{array}{rccc} \rho' : & SPIN(r,p,q) & \longrightarrow & SO(r,p,q) \\ & \mathfrak{s} & \longmapsto & \rho'(\mathfrak{s})(x) := \mathfrak{s}x\mathfrak{s}^{-1} \end{array}$$

olarak verilen 2 : 1 grup homomorfizmasıdır [6]. Kısaca birçok Λ vardır (çarpana bağlı olarak) fakat ρ' ile komutatif olan 2 çarpanınına sahip olan Λ dır.

Sonuç 3.18 *Yukarıdaki diagram göz önüne alınırsa*

$$\begin{array}{rccc} \rho' = \lambda^{-1}\Lambda\eta : & SPIN(r,p,q) & \longrightarrow & SO(r,p,q) \\ & \mathfrak{s} & \longmapsto & \begin{pmatrix} I & 2(c_{ij})^t \\ 0 & \rho(s) \end{pmatrix} \end{array}$$

dir. Burada $\mathfrak{s} = [s\gamma_1 \dots \gamma_{p+q}]$ *olup,* $\gamma_i = 1 + e_i \sum_{l=1}^{r} c_{il} f_l$ *olduğundan dolayı* $c_{ij} \in Mat((p+q) \times r)$ *matrisinin transpozesi ve* $\rho(s) \in SO(p,q)$ *anlamlıdır.*

4 DEJENERE DİRAC İŞLEMCİSİ

Önceki bölümde bahsedilen grupların işlemlerinin sürekli, türevlenebilen olması ve elemanları terslerine götüren dönüşümün de sürekli, türevlenebilir olması bu gruplara bir Lie grubu yapısı kazandırır. Ayrıca, geçen bölümde yarı-doğrudan çarpım yoluyla elde edilen

$$SO(r,p,q) \simeq SO(p,q) \ltimes_{\rho} Mat((p+q)\times r)$$
$$SPIN(r,p,q) \simeq SPIN(p,q) \ltimes_{id} Mat((p+q)\times r)$$

izomorfizmaları yoluyla $\rho : SPIN(p,q) \xrightarrow{2:1} SO(p,q)$ şeklindeki grup homomorfizmasından

$$\rho' : SPIN(r,p,q) \xrightarrow{2:1} SO(r,p,q)$$

homomorfizmasını elde ettik. Bu durumda artık aşağıdaki tanımları verebiliriz:

Tanım 4.1 *Dejenere bir metrikle donatılmış herhangi bir M manifoldunun, $P_{SO(r,p,q)}$ ve $P_{SPIN(r,p,q)}$ asal demetlerinin $\varphi_{\alpha\beta} = \rho' \circ \widetilde{\varphi}_{\alpha\beta}$ eşitliğini sağlayan geçiş fonksiyonları varsa, yani;*

$$\begin{tikzcd} & SPIN(r,p,q) \arrow[d, "\rho'"', "2:1"] \\ U_\alpha \cap U_\beta \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "\varphi_{\alpha\beta}"'] & SO(r,p,q) \end{tikzcd}$$

diagramı komutatif ise M'ye Dejenere Spin Manifoldu denir.

Bundan sonra özel olarak yukarıdaki diagramı $r = 1$, $p = 0$, $q = 3$ durumunda kullanarak 4-boyutlu Newton-Cartan manifoldunda Newton-Cartan bağlantısını $P_{SO(1,0,3)}$ asal demetinden $P_{SPIN(1,0,3)}$ asal demetine, buradan da dejenere spinor demetine taşıyarak, dejenere Dirac işlemcisini oluşturacağız. Bunun için öncelikle Lie cebirlerini belirlemeliyiz.

Önerme 4.2 $\mathbb{R}^{1,0,3}$ *ün $\{f, e_1, e_2, e_3\}$ bazına göre*

$$SO(1,0,3) = \{\Phi \in Mat(4\times 4) \mid \Phi^t G \Phi = G \quad \Phi \mid_{sp\{f\}} = 1\}$$

yani;

$$SO(1,0,3)=\{\begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & R \end{pmatrix} \mid R\in SO(3) \quad A\in Mat(1\times 3)\}$$

olan Galilei grubunun Lie cebri

$$so(1,0,3)=\{\phi\in Mat(4\times 4)\mid (G\phi)^t+G\phi=0\}$$

yani;

$$so(1,0,3)=\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid r\in so(3) \quad a\in Mat(1\times 3)\}$$

dir. Burada

$$G=\begin{pmatrix} 0 & 0\,0\,0 \\ 0 & I_{3\times 3} \end{pmatrix}$$

dir.

Kanıt. $SO(1,0,3)$ den $\alpha(t)$ eğrisini alalım öyleki $\alpha(0)=I$ olsun. Bu durumda $\alpha(t)^tG\alpha(t)=G$ olacağından

$$\begin{aligned} ((\frac{d}{dt}\alpha(t)^t)G\alpha(t)+\alpha(t)^tG\frac{d}{dt}\alpha(t))\mid_{t=0}&=0\\ (\frac{d}{dt}\alpha(t)^t\mid_{t=0})G\alpha(0)+\alpha(0)^tG(\frac{d}{dt}\alpha(t)\mid_{t=0})&=0\\ (\frac{d}{dt}\alpha(t)\mid_{t=0})^tG+G(\frac{d}{dt}\alpha(t)\mid_{t=0})&=0 \end{aligned}$$

bulunur. $\phi=\frac{d}{dt}\alpha(t)\mid_{t=0}$ denirse

$$\begin{aligned} \phi^tG+G\phi&=0\\ (G\phi)^t+G\phi&=0 \end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha(t)$ eğrisi

$$\alpha(t)=\begin{pmatrix} 1 & A(t) \\ 0 & R(t) \end{pmatrix}$$

şeklinde olacağından ($t = 0$ için $A(0) = (0\,0\,0)$ ve $R(0) = I_{3\times 3}$ olacak şekilde)

$$\frac{d}{dt}\alpha(t)\mid_{t=0} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 1 & A(t) \\ 0 & R(t) \end{pmatrix}\mid_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{dt}A(t)\mid_{t=0} \\ 0 & \frac{d}{dt}R(t)\mid_{t=0} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilen matris birimdeki teğet uzaya yani, Lie cebrine aittir. Burada $R(t) \in SO(3)$ olduğundan $\dfrac{d}{dt}R(t)\mid_{t=0} = r \in so(3)$ olacaktır. $\dfrac{d}{dt}A(t)\mid_{t=0}$ ise a ile gösterilen (1×3) tipinden herhangi bir matristir. ■

Not: Bu durumda $so(1, 0, 3)$'ün taban elemanları

$$E_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1\,0\,0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0\,1\,0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0\,0\,1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0\,0\,0 \\ 0 & r_{12} \end{pmatrix} \qquad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0\,0\,0 \\ 0 & r_{13} \end{pmatrix} \qquad E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0\,0\,0 \\ 0 & r_{23} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

olarak seçilebilir. Burada

$$r_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

matrisleri $so(3)$'ün bir tabanıdır.

Önerme 4.3 $\mathbb{R}^{1,0,3}$ *ün* $\{f, e_1, e_2, e_3\}$ *bazına göre,*

$$SPIN(1, 0, 3) = \{s(1 + vf) \mid s \in SPIN(3), w \in \mathbb{R}^3 = sp\{e_1, e_2, e_3\}\}$$

olarak tanımladığımız Lie grubunun Lie cebri;

$$spin(1, 0, 3) = \{a \mid a \in sp\{fe_1, fe_2, fe_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3\}\} \subset \mathcal{C}\ell_{1,0,3}$$

dir.

Not: Burada $SPIN(1, 0, 3)$ Önerme 2.14 de not edilen $r = 1$ durumunda verilen gruptur.

Kanıt. Önce $i, j = 1, 2, 3$ için

$$\alpha(t) = \cos(t) + \sin(t)e_ie_j$$

eğrilerini alalım. Görüldüğü gibi $t = 0$ için $\alpha(0) = \cos(0) + \sin(0)e_ie_j = 1$. Bu durumda,

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) \mid_{t=0} = (-\sin(t) + \cos(t)e_ie_j) \mid_{t=0} = e_ie_j$$

olarak elde edilen $\{e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3\}$ elemanları birimdeki teğet uzaya yani Lie cebrine aittir. Şimdi de $i = 1, 2, 3$ için

$$\beta(t) = 1 - \sin(t)e_if$$

eğrilerini alalım. $\alpha(t)$ gibi bu eğri de grubun biriminden geçmektedir. Yani $\beta(0) = 1 - \sin(0)e_if = 1$ dir. Bu durumda,

$$\frac{d}{dt}\beta(t) \mid_{t=0} = (-\cos(t)e_if) \mid_{t=0} = -e_if = fe_i$$

olarak elde edilen $\{fe_1, fe_2, fe_3\}$ elemanları da birimdeki teğet uzaya yani Lie cebrine aittir. Öyleyse lineer bağımsız $\{fe_1, fe_2, fe_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3\}$ elemanlarının gerdiği altı boyutlu vektör uzayı aradığımız Lie cebridir. ■

Bir önceki bölümde Sonuç 2.18 de açık olarak verilen ρ' grup homomorfizması bu özel durumda $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \rho' = \lambda^{-1}\Lambda\eta : \quad SPIN(1,0,3) &\longrightarrow \quad SO(1,0,3) \\ s(1+vf) &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2v_1 \; 2v_2 \; 2v_3 \\ 0 & \rho(s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Bu homomorfizmanın türev dönüşümü yukarıdaki Lie cebirleri arasında bir izomorfizmadır.

Önerme 4.4 *ρ' nün türev dönüşümü olan*

$$(d\rho')_{1_{SPIN(1,0,3)}} : spin(1,0,3) \longrightarrow so(1,0,3)$$

izomorfizması, bazlar üzerinden

$$(d\rho')_{1_{SPIN(1,0,3)}}(e_ie_j) = 2E_{ij}$$
$$(d\rho')_{1_{SPIN(1,0,3)}}(fe_i) = -2E_{0i}$$

dir. Burada E_{0i} ve E_{ij} sırasıyla (4.1), (4.2) de verilen matrislerdir.

Kanıt. Tekrar, baz elemanlarını veren

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \cos(t) + \sin(t)e_ie_j \\ \beta(t) &= 1 - \sin(t)e_if \end{aligned}$$

eğrileri alınırsa türev dönüşümünün tanımından

$$\begin{aligned} (d\rho')_{1_{SPIN(1,0,3)}}(e_ie_j) &= (d\rho')_{1_{SPIN(1,0,3)}}(\frac{d}{dt}\alpha(t) \mid_{t=0}) \\ &= \frac{d}{dt}(\rho' \circ \alpha)(t) \mid_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\rho'(\alpha(t)) \mid_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 1 & 0\ 0\ 0 \\ 0 & \rho(\alpha(t)) \end{pmatrix} \mid_{t=0} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0\ 0\ 0 \\ 0 & \frac{d}{dt}\rho(\alpha(t)) \mid_{t=0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Burada matris içersindeki ifadenin eşiti;

$$\frac{d}{dt}\rho(\alpha(t)) \mid_{t=0} = (d\rho)_{1_{SPIN(3)}}(\frac{d}{dt}\alpha(t) \mid_{t=0}) = (d\rho)_{1_{SPIN(3)}}(e_ie_j)$$

dir. Bilindiği gibi $SPIN(3)$ için;

$$(d\rho)_{1_{SPIN(3)}}(e_ie_j) = 2r_{ij}$$

dir. Burada r_{ij} matrisleri (4.3) de verilenlerdir. Bu sonuç $SPIN(3)$'ün Lie cebrinin bazlarını verecek şekilde seçilen bir eğri ve ρ nun türev dönüşümü kullanılarak kolaylıkla elde edilebilir. Öyleyse

$$\begin{aligned} (d\rho')_{1_{SPIN(1,0,3)}}(e_ie_j) &= \begin{pmatrix} 0 & 0\ 0\ 0 \\ 0 & 2r_{ij} \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} 0 & 0\ 0\ 0 \\ 0 & r_{ij} \end{pmatrix} \\ &= 2E_{ij} \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $i = 1$ için $\beta(t) = 1 - \sin(t)e_1 f$ olur. Öyleyse

$$\begin{aligned}
(d\rho')_{1_{SPIN(1,0,3)}}(fe_1) &= (d\rho')_{1_{SPIN(1,0,3)}}(\frac{d}{dt}\beta(t) \mid_{t=0}) \\
&= \frac{d}{dt}(\rho' \circ \beta(t) \mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\rho'(\beta(t)) \mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 1 & -2\sin(t) \; 0 \; 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid_{t=0} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2\cos(t) \mid_{t=0} \; 0 \; 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2 \; 0 \; 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -2\begin{pmatrix} 0 & 1 \; 0 \; 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -2E_{01}
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer yolla $i = 2$ ve $i = 3$ için $(d\rho')_{1_{SPIN(1,0,3)}}(e_2 f) = -2E_{02}$, $(d\rho')_{1_{SPIN(1,0,3)}}(e_3 f) = -2E_{03}$ olacağı açıkça ortadadır. Bu durumda gerçekten $(d\rho')_{1_{SPIN(1,0,3)}}(e_i f) = -2E_{0i}$ dir. ■

Şimdi dört boyutlu Newton-Cartan manifoldunun Newton-Cartan bağlantısı ∇ yardımıyla bir U_α açığında $W \in \Gamma(TU_\alpha)$ olmak üzere

$$\mathcal{A}_\alpha(W) = e^a(\nabla_W X_b) = \sum_{c=0}^{3} W^c \Gamma^a_{cb} \tag{4.4}$$

yani, girdileri reel değerli 1-formlar olan matrisler olarak

$$\mathcal{A}_\alpha = \sum_{c=0}^{3} \Gamma^a_{cb} e^c := \omega_{ab} \tag{4.5}$$

şeklindeki gösterimle ifade edilen matris değerli $\mathcal{A}_\alpha$ 1-formunu alalım. Burada $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ kümesi $\Gamma(TU_\alpha)$'nın, $\{e^0, e^1, e^2, e^3\}$ kümesi de, $e^a(X_b) = \delta^a_b$ olarak tanımlanan, $\Gamma(T^*U_\alpha)$'nın yerel kesit tabanlarıdır (çerçeve ve ko-çerçeve tabanları) öyle ki; bu tabanlar $i, j = 1, 2, 3$ olmak üzere;

$$g(X_0, X_i) = g(X_i, X_0) = 0 \qquad g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$$
$$h(e^0, e^i) = h(e^i, e^0) = 0 \qquad h(e^i, e^j) = \delta^{ij}$$

eşitliklerini sağlarlar. g ve h nin matris gösterimleri

$$(g_{ab}) = G = G_{ab} \begin{pmatrix} 0 & 0\,0\,0 \\ 0 & I_{3\times 3} \end{pmatrix} \qquad (h^{ab}) = H = H^{ab} = G_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0\,0\,0 \\ 0 & I_{3\times 3} \end{pmatrix}$$

şeklindeki gösterimle verilir. Newton-Cartan bağlantısı metrikle uyumlu olduğundan, $a, b, c = 0, 1, 2, 3$ olmak üzere;

$$X_c g(X_a, X_b) - g(\nabla_{X_c} X_a, X_b) - g(X_a, \nabla_{X_c} X_b) = 0$$

dir. Burada $g(X_a, X_b)$ değeri 1 yada 0 olduğundan gerekli gösterimler kullanılarak

$$\sum_{d=0}^{3} (g_{db} \Gamma^d_{ca} + g_{ad} \Gamma^d_{cb}) = 0$$
$$\sum_{c,d=0}^{3} (g_{db} \Gamma^d_{ca} e^c + g_{ad} \Gamma^d_{cb} e^c) = 0$$
$$\sum_{d=0}^{3} (g_{bd} \omega^d_{\ a} + g_{ad} \omega^d_{\ b}) = 0$$
$$\sum_{d=0}^{3} (g_{bd} \omega^d_{\ a}(W) + g_{ad} \omega^d_{\ b}(W)) = 0$$

sonucu elde edilir. Demek ki;

$$(G\mathcal{A}_\alpha(W))^t + G\mathcal{A}_\alpha(W) = 0$$

dir. Görüldüğü gibi $\mathcal{A}_\alpha(W) \in \Gamma(so(1, 0, 3))$ dir. Bu durumda bir $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ atlası için (4.4) deki gibi tanımlanan $\Gamma(so(1, 0, 3))$ değerli $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ 1-form ailesinin bağlantı 1-formları olduğunu yani, uyumluluk koşulunu sağladığını göstermeliyiz. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olacak şekildeki bir U_β açığında, $\Gamma(TU_\beta)$ ve $\Gamma(T^*U_\beta)$ nın yerel kesit tabanlarını sırasıyla $\{\tilde{X}_a\}$ ve $\{\tilde{e}^a\}$ ile gösterelim $(\tilde{e}^a(\tilde{X}_b) = \delta^a_b)$. TM nin geçiş fonksiyonu $\varphi_{\beta\alpha}$ ile T^*M nin geçiş fonksiyonu $\xi_{\beta\alpha}$ arasında her $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ ve $\theta \in (\mathbb{R}^4)^*$ için

$$\xi_{\beta\alpha}(x)(\theta) = \theta \circ \varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}$$

bağıntısı vardır. Buradan $\xi_{\beta\alpha}$'nın matrisi Ξ, $\varphi_{\beta\alpha}$'nın matrisi de Φ olarak gösterilirse;

$$\Xi^{ab} = ((\Phi^{-1})_{ab})^t = (\Phi^{-1})_{ba} \tag{4.6}$$

sonucu elde edilir. Ayrıca TM ve T^*M'nin basitleştirmeleri kullanılarak,

$$X_a = \varphi_\alpha^{-1}(v_a) \qquad e^a = \xi_\alpha^{-1}(\epsilon^a) \tag{4.7}$$

$$\tilde{X}_a = \varphi_\beta^{-1}(v_a) \qquad \tilde{e}^a = \xi_\beta^{-1}(\epsilon^a) \tag{4.8}$$

şeklinde, açıklar üzerindeki $\{X_a\}, \{\tilde{X}_a\}, \{e^a\}, \{\tilde{e}^a\}$ tabanlarını veren $\{v_a\} \in \mathbb{R}^4$ ve $\{\epsilon^a\} \in (\mathbb{R}^4)^*$ tabanları vardır. Öyleyse (4.4) numaralı ifade tekrar yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\alpha(W) &= e^a(\nabla_W X_b) \\
&= \xi_\alpha^{-1}(\epsilon^a)(\nabla_W \varphi_\alpha^{-1}(v_b)) \\
&= \xi_\beta^{-1}(\xi_{\beta\alpha}(\epsilon^a))(\nabla_W \varphi_\beta^{-1}(\varphi_{\beta\alpha}(v_b)))
\end{aligned}$$

olur. Burada $\xi_{\beta\alpha}$ ve $\varphi_{\beta\alpha}$'nin matrisleri ve (4.6) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\alpha(W) &= \sum_{c,d=0}^{3} \xi_\beta^{-1}(\Xi^{ca}\epsilon^c)(\nabla_W \varphi_\beta^{-1}(\Phi_{db} v_d)) \\
&= \sum_{c,d=0}^{3} \Xi^{ca} \xi_\beta^{-1}(\epsilon^c)(\nabla_W \Phi_{db} \varphi_\beta^{-1}(v_d)) \\
&= \sum_{c,d=0}^{3} \Xi^{ca} \tilde{e}^c(\nabla_W \Phi_{db} \tilde{X}_d) \\
&= \sum_{c,d=0}^{3} \Xi^{ca} \tilde{e}^c(W(\Phi_{db})\tilde{X}_d + \Phi_{db} \nabla_W \tilde{X}_d) \\
&= \sum_{c=0}^{3} (\Phi^{-1})_{ac} W(\Phi_{cb}) + \sum_{c,d=0}^{3} (\Phi^{-1})_{ac} \Phi_{db} \tilde{e}^c(\nabla_W \tilde{X}_d) \\
&= \sum_{c=0}^{3} (\Phi^{-1})_{ac} (d\Phi_{cb})(W) + \sum_{c,d=0}^{3} (\Phi^{-1})_{ac} (\tilde{e}^c(\nabla_W \tilde{X}_d)) \Phi_{db}
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Dikkat edilirse üzerinde toplam olan indisler matrislerin çarpımına uygun olarak yerlerini almaktadırlar. O zaman son ifade geçiş fonksiyonlarına bağlı olarak yazılırsa,

$$\mathcal{A}_\beta(W) = \tilde{e}^c(\nabla_W \tilde{X}_d)$$

olduğundan;

$$\mathcal{A}_\alpha(W) = \varphi_{\beta\alpha}^{-1} \circ (d\varphi_{\beta\alpha})(W) + \varphi_{\beta\alpha}^{-1} \circ \mathcal{A}_\beta(W) \circ \varphi_{\beta\alpha}$$

şeklindeki uyumlululuk koşulu bulunur. Öyleyse $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ 1-form ailesi $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ atlasına göre bağlantı 1-formlarıdır.

Bu durumda $so(1,0,3)$'ün (4.1), (4.2) şeklindeki baz seçimine ve (4.5) gösterimine bağlı olarak

$$\mathcal{A}_\alpha = \sum_{i=1}^{3} \omega_{0i} E_{0i} + \sum_{i<j=1}^{3} \omega_{ij} E_{ij} \tag{4.9}$$

$$\mathcal{A}_\alpha = \sum_{i=1}^{3} \omega_{0i} E_{0i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \omega_{ij} E_{ij} \tag{4.10}$$

yazılır.

Yapı grubu G olan bir E vektör demetinden, P_G asal G-demetine geçilebildiğini biliyoruz. Öyleyse yapı grubu $SO(1,0,3)$ olan TM teğet demetinden de $P_{SO(1,0,3)}$ asal $SO(1,0,3)$-demetine (çerçeve demeti) geçilebilir ve TM nin $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ bağlantı 1-formları artık $P_{SO(1,0,3)}$'ün de bağlantı 1-formlarıdır. Bu durumda Önerme 3.4 de verilen ρ' 2:1 grup homomorfizmasının türev dönüşümü yardımıyla $P_{SO(1,0,3)}$'ün $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ bağlantı 1-formları $P_{SPIN(1,0,3)}$'e taşınabilir. Ek'de verildiği gibi

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha(W) = (d\rho')^{-1}_{1_{SPIN(1,0,3)}}(\mathcal{A}_\alpha(W))$$

ifadesi $P_{SPIN(1,0,3)}$'ün bağlantı 1-formlarıdır. Önerme 3.4 ile birlikte (4.9) (veya (4.10)) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha(W) &= (d\rho')^{-1}_{1_{SPIN(1,0,3)}}(\sum_{i=1}^{3}\omega_{0i}(W)E_{0i} + \sum_{i<j=1}^{3}\omega_{ij}(W)E_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\omega_{0i}(W)(d\rho')^{-1}_{1_{SPIN(1,0,3)}}(E_{0i}) + \sum_{i<j=1}^{3}\omega_{ij}(W)(d\rho')^{-1}_{1_{SPIN(1,0,3)}}(E_{ij}) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\omega_{0i}(W)fe_i + \frac{1}{2}\sum_{i<j=1}^{3}\omega_{ij}(W)e_ie_j
\end{aligned}$$

veya

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha(W) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\omega_{0i}(W)fe_i + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3}\omega_{ij}(W)e_ie_j \tag{4.11}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan $P_{SPIN(1,0,3)}$'ün bağlantı 1-formları

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\omega_{0i}fe_i + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3}\omega_{ij}e_ie_j \tag{4.12}$$

olur.

Bilindiği gibi $SPIN(1,0,3)$ grubunun işlemi Clifford çarpımı olup, küme olarak da $\mathcal{C}\ell_{1,0,3}$'ün bir alt kümesidir. Öyleyse $\mathcal{C}\ell_{1,0,3}$ için verilecek bir cebir homomorfizması, $SPIN(1,0,3)$ için bir grup homomorfizması olacaktır.

Tanım 4.5 *$\mathcal{C}\ell_{1,0,3}$'ün $\theta : \mathcal{C}\ell_{1,0,3} \longrightarrow End(\mathbb{C}^4)$ şeklindeki cebir homomorfizması (temsili) verilsin. $\theta : SPIN(1,0,3) \longrightarrow Aut(\mathbb{C}^4)$ grup homomorfizmasıyla verilen $P_{SPIN(1,0,3)}$'ün $P_{SPIN(1,0,3)} \times_\theta \mathbb{C}^4$ asosiye vektör demetine Dejenere Spinor Demeti denir.*

Bu tanımdaki θ temsili, ileride Newton-Levy-Leblond denklemleri bahsinde örneklendirilecektir. Şimdi $P_{SPIN(1,0,3)}$'e ait olan (4.12)'da verilen bağlantı 1-formlarını $\theta : SPIN(1,0,3) \longrightarrow Aut(\mathbb{C}^4)$ grup temsilinin türev dönüşümü yoluyla Ek'de

$$\overline{\mathcal{A}}_\alpha(W) = (d\theta)_{1_{SPIN(1,0,3)}}(\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha(W))$$

olarak verildiği gibi $P_{SPIN(1,0,3)} \times_\theta \mathbb{C}^4$ dejenere spinor demetine taşıyabiliriz. Burada baz elemanlarını veren

$$
\begin{aligned}
\alpha(t) &= \cos(t) + \sin(t) e_i e_j \\
\beta(t) &= 1 - \sin(t) e_i f
\end{aligned}
$$

eğrileri alınırsa türev dönüşümünün tanımından ve θ'nın bir cebir homomorfizması olduğu da göz önünde tutularak

$$
\begin{aligned}
(d\theta)_{1_{SPIN(1,0,3)}}(e_i e_j) &= (d\theta)_{1_{SPIN(1,0,3)}}(\frac{d}{dt}\alpha(t) \mid_{t=0}) \\
&= \frac{d}{dt}(\theta \circ \alpha)(t) \mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\theta(\alpha(t)) \mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\cos(t) I + \sin(t)\theta(e_i)\theta(e_j)) \mid_{t=0} \\
&= (-\sin(t) I + \cos(t)\theta(e_i)\theta(e_j)) \mid_{t=0} \\
&= \theta(e_i)\theta(e_j)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
(d\theta)_{1_{SPIN(1,0,3)}}(f e_i) &= (d\theta)_{1_{SPIN(1,0,3)}}(\frac{d}{dt}\beta(t) \mid_{t=0}) \\
&= \frac{d}{dt}(\theta \circ \beta)(t) \mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\theta(\beta(t)) \mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(I - \sin(t)\theta(e_i)\theta(f)) \mid_{t=0} \\
&= (-\cos(t)\theta(e_i)\theta(f)) \mid_{t=0} \\
&= -\theta(e_i)\theta(f) \\
&= \theta(f)\theta(e_i)
\end{aligned}
$$

sonuçlarına ulaşırız. Bu sonuçlarla birlikte, (4.11) kullanıldığında $\{\overline{\mathcal{A}}_\alpha\}$ bağlantı 1-formları

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{A}}_\alpha(W) &= (d\theta)_{1_{SPIN(1,0,3)}}(\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha(W)) \\
&= (d\theta)_{1_{SPIN(1,0,3)}}(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\omega_{0i}(W)fe_i + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3}\omega_{ij}(W)e_ie_j) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\omega_{0i}(W)(d\theta)_{1_{SPIN(1,0,3)}}(fe_i) + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3}\omega_{ij}(W)(d\theta)_{1_{SPIN(1,0,3)}}(e_ie_j) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\omega_{0i}(W)\theta(f)\theta(e_i) + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3}\omega_{ij}(W)\theta(e_i)\theta(e_j) \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\overline{\mathcal{A}}_\alpha = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\omega_{0i}\theta(f)\theta(e_i) + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3}\omega_{ij}\theta(e_i)\theta(e_j) \qquad (4.14)$$

elde edilir.

Dejenere spinor demeti bir vektör demeti olup artık bu demet üzerinde (4.14) ile verilen bağlantı 1-formları vardır. Dolayısıyla bu vektör demeti üzerinde bir bağlantıdan ve kovaryant türev işlemcisinden bahsedebilriz. ψ_α ile $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ atlasına göre yerel dejenere spinor alanı gösterirsek;

$$(\nabla\psi_\alpha)(W) = \nabla_W\psi_\alpha = (d\psi_\alpha)(W) + (\overline{\mathcal{A}}_\alpha(W))(\psi_\alpha)$$

ifadesi dejenere spinor demetinin bağlantısı, dolayısıyla kovaryant türev işlemcisidir. (4.13) numaralı ifade burada yerine yazılırsa, dejenere spinor demetinin bağlantısı (veya kovaryant türev işlemcisi)

$$\begin{aligned}
(\nabla\psi_\alpha)(W) = \nabla_W\psi_\alpha = (d\psi_\alpha)(W) &- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\omega_{0i}(W)\theta(f)\theta(e_i)(\psi_\alpha) \\
&+ \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3}\omega_{ij}(W)\theta(e_i)\theta(e_j)(\psi_\alpha)
\end{aligned} \qquad (4.15)$$

olarak elde edilir.

Dirac işlemcisini oluşturabilmek için $\mathcal{C}\ell_{1,0,3}$ ün θ ile verilen temsilini teğet demetinin dejenere Clifford demetine $\mathcal{C}\ell(TM)$ genişletmemiz gerekecektir.

Önerme 4.6 *$P_{SPIN(1,0,3)} \times_\sigma \mathcal{C}\ell_{1,0,3} \cong \mathcal{C}\ell(TM)$ dir.*

Buradaki $\sigma : SPIN(1,0,3) \longrightarrow Aut(\mathcal{C}\ell_{1,0,3})$ grup temsili her $c \in \mathcal{C}\ell_{1,0,3}$ için

$$\mathfrak{s} \longmapsto \sigma(\mathfrak{s})(c) := \mathfrak{s} c \mathfrak{s}^{-1}$$

şeklinde tanımlıdır.

Kanıt. Bu denklik için, bir U_α açığında $\tilde{\varphi}_\alpha(x)$ ile $P_{SPIN(1,0,3)}$'ün, $\eta_\alpha(x)$ ile de $\mathcal{C}\ell(TM)$'nin trivilizasyonları gösterilirse; her $x \in U_\alpha$ için $\pi_{SPIN(1,0,3)}(u) = x$ olmak üzere; önce yerel,

$$[u,c] \longmapsto \eta_\alpha(x)^{-1}(\sigma(\tilde{\varphi}_\alpha(x)(u))(c)) = \eta_\alpha(x)^{-1}(\tilde{\varphi}_\alpha(x)(u)\, c\, \tilde{\varphi}_\alpha(x)(u)^{-1}) \quad (4.16)$$

dönüşümünün iyi tanımlı bir diffeomorfizim olduğunu, sonra bu diffeomorfizmin koordinat sisteminden bağımsız yani evrensel olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten $[u,c]$ ye denk olan $[u\mathfrak{s}, \sigma(\mathfrak{s})^{-1}(c)]$ alınırsa

$$[u\mathfrak{s}, \sigma(\mathfrak{s})^{-1}(c)] \longmapsto \eta_\alpha(x)^{-1}(\tilde{\varphi}_\alpha(x)(u\mathfrak{s})\sigma(\mathfrak{s})^{-1}(c)\tilde{\varphi}_\alpha(x)(u\mathfrak{s})^{-1})$$

$$[u\mathfrak{s}, \sigma(\mathfrak{s})^{-1}(c)] \longmapsto \eta_\alpha(x)^{-1}(\tilde{\varphi}_\alpha(x)(u)\mathfrak{s}\mathfrak{s}^{-1}c\mathfrak{s}(\tilde{\varphi}_\alpha(x)(u)\mathfrak{s})^{-1})$$

$$[u\mathfrak{s}, \sigma(\mathfrak{s})^{-1}(c)] \longmapsto \eta_\alpha(x)^{-1}(\tilde{\varphi}_\alpha(x)(u)\mathfrak{s}\mathfrak{s}^{-1}c\mathfrak{s}\mathfrak{s}^{-1}\tilde{\varphi}_\alpha(x)(u)^{-1})$$

$$[u\mathfrak{s}, \sigma(\mathfrak{s})^{-1}(c)] \longmapsto \eta_\alpha(x)^{-1}(\tilde{\varphi}_\alpha(x)(u)c\tilde{\varphi}_\alpha(x)(u)^{-1})$$

bulunur ki bu denk elemanların tek bir değer aldığını gösterir (genel olarak herhangi bir asal demet için $\varphi_\alpha(x)(ug) = \varphi_\alpha(x)(u)g$ dir). Şimdi bu dönüşümün tersini bulalım. Herhangi bir $\mathbf{c} \in \pi^{-1}_{\mathcal{C}\ell(TU_\alpha)}(x)$ alındığında $\eta_\alpha(x)(\mathbf{c}) \in \mathcal{C}\ell_{1,0,3}$ olacaktır. Bu elemana karşılık gelen $\mathfrak{s} \in SPIN(1,0,3)$ ve $c \in \mathcal{C}\ell_{1,0,3}$ vardır öyle ki;

$$\sigma(\mathfrak{s})(c) = \eta_\alpha(x)(\mathbf{c}) \quad (4.17)$$

dir. Gerçekten bir $\mathfrak{s} \in SPIN(1,0,3)$ için $\sigma(\mathfrak{s}) \in Aut(\mathcal{C}\ell_{1,0,3})$ olduğundan $\eta_\alpha(x)(\mathbf{c}) \in \mathcal{C}\ell_{1,0,3}$ e karşılık bir $c \in \mathcal{C}\ell_{1,0,3}$ vardır. Öyleyse $\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x)(\mathfrak{s}) \in \pi^{-1}(x)$ olacağından, dönüşümün tersini

$$\mathbf{c} \longmapsto [\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x)(\mathfrak{s}), c]$$

olarak alabiliriz. Kontrol edilirse

$$[\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x)(\mathfrak{s}), c] \longmapsto \eta_\alpha(x)^{-1}(\sigma(\tilde{\varphi}_\alpha(x)(\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x)(\mathfrak{s})))(c))$$

$$[\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x)(\mathfrak{s}), c] \longmapsto \eta_\alpha(x)^{-1}(\sigma(\mathfrak{s})(c)),$$

(4.17) den dolayı da

$$[\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x)(\mathfrak{s}), c] \longmapsto \mathbf{c}$$

bulunur. Burada şuna dikkat edilmelidir: $\eta_\alpha(x)(\mathbf{c}) \in \mathcal{C}\ell_{1,0,3}$ elemanı için

$$\sigma(\mathfrak{s}')(c') = \eta_\alpha(x)(\mathbf{c}) \tag{4.18}$$

olacak şekilde başka $\mathfrak{s}' \in SPIN(1,0,3)$ ve $c' \in \mathcal{C}\ell_{1,0,3}$ elemanları da olabilir. Bu durumda

$$\mathbf{c} \longmapsto [\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x)(\mathfrak{s}'), c']$$

olur. Fakat dikkat edilirse $[\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x)(\mathfrak{s}), c] \sim [\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x)(\mathfrak{s}'), c']$ dir. Gerçekten $\mathfrak{s}^{-1}\mathfrak{s}' \in SPIN(1,0,3)$ için

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x)(\mathfrak{s})\mathfrak{s}^{-1}\mathfrak{s}' &= \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x)(\tilde{\varphi}_\alpha(x)(\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x)(\mathfrak{s}))\mathfrak{s}^{-1}\mathfrak{s}') \\ &= \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x)(\mathfrak{s}\mathfrak{s}^{-1}\mathfrak{s}') \\ &= \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x)(\mathfrak{s}') \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sigma(\mathfrak{s}^{-1}\mathfrak{s}')^{-1}(c) &= \sigma(\mathfrak{s}'^{-1}\mathfrak{s})(c) \\ &= \sigma(\mathfrak{s}'^{-1})(\sigma(\mathfrak{s})(c)) \end{aligned}$$

(4.17) den dolayı

$$\begin{aligned}\sigma(\mathfrak{s}^{-1}\mathfrak{s}')^{-1}(c) &= \sigma(\mathfrak{s}'^{-1})(\eta_\alpha(x)(\mathbf{c}))\\ &= \sigma(\mathfrak{s}')^{-1}(\eta_\alpha(x)(\mathbf{c}))\end{aligned}$$

olur ve (4.18) den

$$\sigma(\mathfrak{s}^{-1}\mathfrak{s}')^{-1}(c) = \tilde{c}$$

bulunur. Kullanılan dönüşümler türevlenebilir olduğundan (4.16) ile verilen dönüşüm diffeomorfizmadır. Şimdi de (4.16)'ün koordinat sisteminden bağımsız, yani evrensel olduğunu görelim. Bu dönüşüme kısaca f deyip tekrar yazarsak; $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasında geçiş fonksiyonları kullanılarak,

$$\begin{aligned}f([u,c]) &= \eta_\alpha(x)^{-1}(\sigma(\tilde{\varphi}_\alpha(x)(u))(c))\\ &= \eta_\beta(x)^{-1}\eta_{\beta\alpha}(x)(\sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)(\tilde{\varphi}_\beta(x)(u)))(c))\end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Burada $\mathcal{C}\ell(TM)$'nin geçiş fonksiyonları $\eta_{\alpha\beta}(x)$ ve $P_{SPIN(1,0,3)}$ nin geçiş fonksiyonları da $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)$ dir. $P_{SPIN(1,0,3)}$ bir asal demet olduğundan $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x) \in SPIN(1,0,3)$ olup $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)(\tilde{\varphi}_\beta(x)(u)) = \tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)\tilde{\varphi}_\beta(x)(u)$ dir. Dolayısıyla σ bir cebir homomorfizması olduğundan ($SPIN(1,0,3) \subset \mathcal{C}\ell_{1,0,3}$) yukarıdaki son ifade

$$\begin{aligned}f([u,c]) &= \eta_\beta(x)^{-1}\eta_{\beta\alpha}(x)(\sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)\tilde{\varphi}_\beta(x)(u))(c))\\ &= \eta_\beta(x)^{-1}\eta_{\beta\alpha}(x)(\sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x))(\sigma(\tilde{\varphi}_\beta(x)(u))(c)))\\ &= \eta_\beta(x)^{-1}((\eta_{\beta\alpha}(x)\circ\sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)))(\sigma(\tilde{\varphi}_\beta(x)(u))(c)))\end{aligned}$$

şeklini alır. Burada $\sigma(\tilde{\varphi}_\beta(x)(u))(c) \in \mathcal{C}\ell_{1,0,3}$ olduğundan

$$\sigma(\tilde{\varphi}_\beta(x)(u))(c) \in sp\{1, f, e_1, \ldots, e_3, fe_1, \ldots, fe_3, \ldots, fe_1e_2e_3\}$$

dir. Öte yandan $\eta_{\beta\alpha}(x)$ ve $\sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x))$'nın ikisi de cebir otomorfizmi olduğundan, bunların bileşkeleri de cebir otomorfizmasıdır. Yani; hem lineer, hem cebrin işlemini koruyan bir dönüşümdür. O zaman $\eta_{\beta\alpha}(x)\circ\sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x))$ otomorfizması önce, $\sigma(\tilde{\varphi}_\beta(x)(u))(c)$'yi oluşturan toplam terimlerinin (lineerlikden), sonra da çarpanların (cebrin işlemini korumasından) içine kadar girer. Bu

$$(\eta_{\beta\alpha}(x) \circ \sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)))(\sigma(\tilde{\varphi}_\beta(x)(u))(c)) = \ldots + \ldots (\eta_{\beta\alpha}(x) \circ \sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)))(e_a) \ldots + \ldots$$

şeklindeki gösterimle ifade edilirse, artık önemli olan $\eta_{\beta\alpha}(x) \circ \sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x))$'nın $\mathbb{R}^{1,0,3}$'ün taban elemanları olan $\{e_a\}$'lar ($a = 0, 1, 2, 3$ ve $e_0 = f$) altındaki değerleridir. O zaman, Tanım 4.1 deki $\varphi_{\alpha\beta} = \rho' \circ \widetilde{\varphi}_{\alpha\beta}$ ile verilen komutatif diagram hatırlanırsa, her $v \in \mathbb{R}^{1,0,3} \subset \mathcal{C}\ell_{1,0,3}$ ve $\mathfrak{s} \in SPIN(1, 0, 3)$ için $\sigma(\mathfrak{s})(v) = \rho'(\mathfrak{s})(v)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
(\eta_{\beta\alpha}(x) \circ \sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)))(e_a) &= (\eta_{\beta\alpha}(x) \circ \rho'(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)))(e_a) \\
(\eta_{\beta\alpha}(x) \circ \sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)))(e_a) &= (\eta_{\beta\alpha}(x) \circ \varphi_{\alpha\beta}(x)))(e_a)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\varphi_{\alpha\beta}(x)$ teğet demetinin geçiş fonlsiyonlarıdır. Bilindiği gibi $\mathcal{C}\ell(TM)$'nin geçiş fonksiyonları $\eta_{\alpha\beta}(x)$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{1,0,3} \arrow[r, "\varphi_{\alpha\beta}(x)"] \arrow[d, "i"] & \mathbb{R}^{1,0,3} \arrow[d, "j"] \\
\mathcal{C}\ell_{1,0,3} \arrow[r, "\eta_{\alpha\beta}(x)"] & \mathcal{C}\ell_{1,0,3}
\end{tikzcd}$$

şeklindeki diagramla anlatıldığı gibi $\varphi_{\alpha\beta}(x)$'den elde edilen genişletmeyle verilir ve özel olarak her $v \in \mathbb{R}^{1,0,3} \subset \mathcal{C}\ell_{1,0,3}$ için $\eta_{\alpha\beta}(x)(v) = \varphi_{\alpha\beta}(x)(v)$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(\eta_{\beta\alpha}(x) \circ \sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)))(e_a) &= (\eta_{\beta\alpha}(x) \circ \varphi_{\alpha\beta}(x)))(e_a) \\
(\eta_{\beta\alpha}(x) \circ \sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)))(e_a) &= (\varphi_{\beta\alpha}(x) \circ \varphi_{\alpha\beta}(x)))(e_a) \\
(\eta_{\beta\alpha}(x) \circ \sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)))(e_a) &= (\varphi_{\alpha\beta}(x)^{-1} \circ \varphi_{\alpha\beta}(x)))(e_a) \\
(\eta_{\beta\alpha}(x) \circ \sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)))(e_a) &= e_a
\end{aligned}$$

bulunur ki; bu,

$$\begin{aligned}
(\eta_{\beta\alpha}(x) \circ \sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)))(\sigma(\tilde{\varphi}_\beta(x)(u))(c)) &= \ldots + \ldots (\eta_{\beta\alpha}(x) \circ \sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)))(e_a) \ldots + \ldots \\
(\eta_{\beta\alpha}(x) \circ \sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)))(\sigma(\tilde{\varphi}_\beta(x)(u))(c)) &= \ldots + \ldots e_a \ldots + \ldots
\end{aligned}$$

demektir. Bu yukarıdaki gösterimle verilen her çarpanda böyledir. Öyleyse,

$$(\eta_{\beta\alpha}(x) \circ \sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)))(\sigma(\tilde{\varphi}_{\beta}(x)(u))(c)) = \sigma(\tilde{\varphi}_{\beta}(x)(u))(c)$$

sonucunu elde ederiz. Bu sonuç, yukarıda $f([u,c])$ için elde edilen

$$f([u,c]) = \eta_{\beta}(x)^{-1}((\eta_{\beta\alpha}(x) \circ \sigma(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)))(\sigma(\tilde{\varphi}_{\beta}(x)(u))(c)))$$

ifadesinde yerine konursa,

$$f([u,c]) = \eta_{\beta}(x)^{-1}(\sigma(\tilde{\varphi}_{\beta}(x)(u))(c))$$

bulunur. Bu f'nin koordinat sisteminden bağımsız yani evrensel olması demektir. ■

Artık $\mathcal{C}\ell_{1,0,3}$'ün temsili olan θ cebir homomorfizması $\mathcal{C}\ell(TM)$ demetine genişletilebilir. Bu genişletme, $\mathcal{C}\ell(TM)$'ye denk olan $P_{SPIN(1,0,3)} \times_{\sigma} \mathcal{C}\ell_{1,0,3}$ kullanılarak

$$\begin{array}{rccc} \theta: & P_{SPIN(1,0,3)} \times_{\sigma} \mathcal{C}\ell_{1,0,3} & \longrightarrow & End(P_{SPIN(1,0,3)} \times_{\theta} \mathbb{C}^4) \\ & [u,c] & \longmapsto & \theta([u,c])([u,v]) := [u, \theta(c)(v)] \end{array}$$

şeklinde verilir. Öncelikle verilen bu dönüşümün iyi tanımlı olduğunu görelim. Bunun için

$$[u,c] \sim [u\mathfrak{s}, \sigma(\mathfrak{s})^{-1}(c)]$$

$$[u,v] \sim [u\mathfrak{s}, \theta(\mathfrak{s})^{-1}(v)]$$

şeklindeki denk elemanlar alınırsa

$$\begin{aligned} \theta([u\mathfrak{s}, \sigma(\mathfrak{s})^{-1}(c)])([u\mathfrak{s}, \theta(\mathfrak{s})^{-1}(v)]) &= [u\mathfrak{s}, \theta(\sigma(\mathfrak{s})^{-1}(c))(\theta(\mathfrak{s})^{-1}(v))] \\ &= [u\mathfrak{s}, \theta(\sigma(\mathfrak{s}^{-1})(c))(\theta(\mathfrak{s})^{-1}(v))] \\ &= [u\mathfrak{s}, \theta(\mathfrak{s}^{-1}c\mathfrak{s})(\theta(\mathfrak{s})^{-1}(v))] \\ &= [u\mathfrak{s}, \theta(\mathfrak{s})^{-1}\theta(c)\theta(\mathfrak{s})(\theta(\mathfrak{s})^{-1}(v))] \\ &= [u\mathfrak{s}, \theta(\mathfrak{s})^{-1}(\theta(c)(v))] \end{aligned}$$

bulunur. Dikkat edilirse burada $[u, \theta(c)(v)] \sim [u\mathfrak{s}, \theta(\mathfrak{s})^{-1}(\theta(c)(v))]$ dir. O zaman,

$$\theta([u\mathfrak{s}, \sigma(\mathfrak{s})^{-1}(c)])([u\mathfrak{s}, \theta(\mathfrak{s})^{-1}(v)]) = [u, \theta(c)(v)]$$

elde edilir. Denk elemanlar tek bir değer aldığından, yapılan tanım iyidir. Şimdi homomorfizma'yı elde edelim: $\mathcal{C}\ell(TM)$ bir cebir demetidir ve işlem

$$[u, c][u, c'] = [u, cc']$$

ile verilir (işlemin iyi tanımlı olduğu açıktır). Öyleyse

$$\begin{aligned}
\theta([u, cc'])([u, v]) &= [u, \theta(cc')(v)] \\
&= [u, \theta(c)(\theta(c')(v))] \\
&= \theta([u, c])(\theta([u, c'])([u, v])) \\
&= (\theta([u, c]) \circ \theta([u, c']))([u, v])
\end{aligned}$$

olacağından

$$\theta([u, cc']) = \theta([u, c]) \circ \theta([u, c'])$$

elde edilir.

Bu durumda $P_{SPIN(1,0,3)} \times_\sigma \mathcal{C}\ell_{1,0,3} \cong \mathcal{C}\ell(TM)$ den dolayı $a = 0, 1, 2, 3$ olmak üzere, yerel kesit tabanları $\{X_a\}$ için $[u, e_a] \cong X_a$ denkliğinden dolayı ($e_a \in \mathbb{R}^{1,0,3} \subset \mathcal{C}\ell_{1,0,3}$), Dirac işlemcisi aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 4.7 *$P_{SPIN(1,0,3)} \times_\theta \mathbb{C}^4$ dejenere spinor demetinde*

$$D\psi := \sum_{a,b=0}^{3} (\bar{g}(X_a, X_b))^{-1} \theta(X_a)((\nabla\psi)(X_b)) = \sum_{a,b=0}^{3} (\bar{g}(X_a, X_b))^{-1} \theta(X_a)(\nabla_{X_b}\psi)$$

olarak ifade edilen $D : \Gamma(P_{SPIN(1,0,3)} \times_\theta \mathbb{C}^4) \longrightarrow \Gamma(P_{SPIN(1,0,3)} \times_\theta \mathbb{C}^4)$ işlemcisine dejenere Dirac işlemcisi denir.

Burada $\bar{g}$ ilk bölümde tanımlanan dejenere olmayan kovaryant metrik tensörüdür. Eğer $\bar{h}(e^a, e^b) = (\bar{g}(X_a, X_b))^{-1}$ kullanılırsa ($e^a(X_b) = \delta^a_b$); Dirac işlemcisi

$$D\psi = \sum_{a,b=0}^{3} \bar{h}(e^a, e^b) \theta(X_a)((\nabla\psi)(X_b)) = \sum_{a,b=0}^{3} \bar{h}(e^a, e^b) \theta(X_a)(\nabla_{X_b}\psi)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $\theta(X_a) \in End(\mathbb{C}^4) = gl(4,\mathbb{C})$ elemanı $\theta(X_a) = \gamma_a$ ile gösterilip, indis kaldırma $\bar{h}^{ab}\gamma_a = \gamma^b$ ile gösterilirse; Dirac işlemcisi klasik olarak

$$D\psi = \sum_{a=0}^{3} \gamma^a (\nabla\psi)(X_a) = \sum_{a=0}^{3} \gamma^a \nabla_{X_a}\psi$$

biçiminde ifade edilebilir.

Dirac işlemcisinin tanımı koordinat sisteminden bağımsızdır. Yani Dirac işlemcisi evrenseldir. Gerçekten burada $\Gamma(TU_\alpha)$'nın $\{X_a\}$ yerel kesit tabanlarının yanısıra, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olacak şekilde $\Gamma(TU_\beta)$'nın yerel kesit tabanları $\{\tilde{X}_a\}$ olarak gösterilirse, (4.7) ve (4.8) dan

$$\begin{aligned}
D\psi &:= \sum_{a,b=0}^{3} (\bar{g}(X_a, X_b))^{-1}\theta(X_a)((\nabla\psi)(X_b)) \\
&= \sum_{a,b=0}^{3} (\bar{g}(\varphi_\alpha^{-1}(v_a), \varphi_\alpha^{-1}(v_b)))^{-1}\theta(\varphi_\alpha^{-1}(v_a))((\nabla\psi)(\varphi_\alpha^{-1}(v_b))) \\
&= \sum_{a,b=0}^{3} (\bar{g}(\varphi_\beta^{-1}(\varphi_{\beta\alpha}(v_a)), \varphi_\beta^{-1}(\varphi_{\beta\alpha}(v_b))))^{-1}\theta(\varphi_\beta^{-1}(\varphi_{\beta\alpha}(v_a)))((\nabla\psi)(\varphi_\beta^{-1}(\varphi_{\beta\alpha}(v_b)))
\end{aligned}$$

olur. Hatırlanacağı gibi $\varphi_{\beta\alpha}$'nın matrisi Φ ile gösterilmişdi öyleyse

$$\begin{aligned}
D\psi &= \sum_{a,b,c,d,p,q=0}^{3} (\bar{g}(\varphi_\beta^{-1}(\Phi_{ca}v_c), \varphi_\beta^{-1}(\Phi_{db}v_d)))^{-1}\theta(\varphi_\beta^{-1}(\Phi_{pa}v_p))((\nabla\psi)(\varphi_\beta^{-1}(\Phi_{qb}v_q)) \\
&= \sum_{a,b,c,d,p,q=0}^{3} \Phi_{pa}\Phi_{qb}(\Phi_{ca}\Phi_{db}\bar{g}(\varphi_\beta^{-1}(v_c), \varphi_\beta^{-1}(v_d)))^{-1}\theta(\varphi_\beta^{-1}(v_p))((\nabla\psi)(\varphi_\beta^{-1}(v_q)) \\
&= \sum_{a,b,c,d,p,q=0}^{3} \Phi_{pa}\Phi_{qb}(\Phi_{ca}\Phi_{db}\bar{g}(\tilde{X}_c, \tilde{X}_d))^{-1}\theta(\tilde{X}_p)((\nabla\psi)(\tilde{X}_q) \\
&= \sum_{a,b,c,d,p,q=0}^{3} \Phi_{pa}(\Phi_{ac}^t\bar{g}(\tilde{X}_c, \tilde{X}_d)\Phi_{db})^{-1}\Phi_{bq}^t\theta(\tilde{X}_p)((\nabla\psi)(\tilde{X}_q)
\end{aligned}$$

bulunur. Dikkat edilirse üzerinde toplam olan indisler matris çarpımına göre yer almaktadır. Demek ki $\bar{G}_{pq} = \bar{g}(\tilde{X}_p, \tilde{X}_q)$ gösterimi kullanılırsa

$$\begin{aligned} D\psi &= \sum_{p,q=0}^{3} (\Phi(\Phi^t \bar{G}\Phi)^{-1}\Phi^t)_{pq}\theta(\tilde{X}_p)((\nabla\psi)(\tilde{X}_q) \\ &= \sum_{p,q=0}^{3} (\Phi\Phi^{-1}\bar{G}^{-1}(\Phi^t)^{-1}\Phi^t)_{pq}\theta(\tilde{X}_p)((\nabla\psi)(\tilde{X}_q) \\ &= \sum_{p,q=0}^{3} \bar{G}^{-1}_{pq}\theta(\tilde{X}_p)((\nabla\psi)(\tilde{X}_q) \\ &= \sum_{p,q=0}^{3} (\bar{g}(\tilde{X}_p, \tilde{X}_q))^{-1}\theta(\tilde{X}_p)((\nabla\psi)(\tilde{X}_q) \end{aligned}$$

bulunur. Bu Dirac işlemcisinin koordinat sisteminden bağımsız olması, yani evrensel olması demektir.

Dirac işlemcisinde kovaryant türev işlemcisinin yerine (4.15) ile verilen eşitini kullanırsak

$$\begin{aligned} D\psi = \sum_{a=0}^{3} \gamma^a((d\psi_\alpha)(X_a) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \omega_{0i}(X_a)\theta(f)\theta(e_i)(\psi_\alpha) \\ +\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3} \omega_{ij}(X_a)\theta(e_i)\theta(e_j)(\psi_\alpha)) \end{aligned} \tag{4.19}$$

ifadesini elde ederiz. Dahası

$$\mathcal{A}_\alpha = \sum_{c=0}^{3} \Gamma^a_{cb} e^c := \omega_{ab}$$

şeklindeki (4.5) gösterimi tersden kullanılırsa

$$\begin{aligned} D\psi = \sum_{a=0}^{3} \gamma^a((d\psi_\alpha)(X_a) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \Gamma^0_{ai}\theta(f)\theta(e_i)(\psi_\alpha) \\ +\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3} \Gamma^i_{aj}\theta(e_i)\theta(e_j)(\psi_\alpha)) \end{aligned} \tag{4.20}$$

bulunur.

$\mathcal{C}\ell_{1,0,3}$'ün θ temsiline verilebilecek örneklerden biri $i = 1, 2, 3$ için

$$\theta(f) = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \theta(e_i) = \gamma_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

dir. Burada σ_i'ler Pauli spin matrisleridir. Yukarıdaki matrisler Levy-Leblond tarafından Schrödinger dalga denkleminin lineerleştirilmesi esnasında ortaya konmuştur. Sonuçta ortaya çıkan denklem Levy-Leblon denklemi olarak isimlendirilmiştir.

Tanım 4.8 $P_{SPIN(1,0,3)} \times_\theta \mathbb{C}^4$ *dejenere spinor demetinde*

$$D\psi + 2mi\gamma_0^t\psi = 0$$

olarak ifade edilen denkleme Newton-Levy-Leblond denklemi denir.

Burada $D\psi$ Dirac işlemcisi; (4.21)'de verilen temsiller kullanılarak oluşturulan ve (4.19) (yada (4.20)) ile verilen işlemcidir. m ile söz konusu parçacığın kütlesi gösterilmektedir.

5 TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, dejenere spin grubu $SPIN(r,p,q)$ ve dejenere bilineer formun özel ortogonal grubu $SO(r,p,q)$ arasındaki $2:1$ grup homomorfizmasının verilmesinin yanı sıra, bunların yarı-doğrudan çarpımla olan denkleri grup izomorfizmaları yoluyla elde edilmiştir. $SPIN(r,p,q)$'nin dejenere Clifford cebrine denklik sınıfları oluşturularak nasıl gömüldüğü açıkça verilmiştir. Bütün bunlar herhangi birer rank ve boyut değerleri için yapılmıştır. Özellikle yarı-doğrudan çarpımla verilen tüm denkliklerin herhangi bir rank ve boyutta açıkça ortaya konması tezin özgün taraflarından biridir. Tezin bir diğer özgün tarafı $r=1$ özel durumunda $SPIN(1,p,q)$'nin dejenere Clifford cebrinin içinde yatan, denklik sınıfları içermeyen bir başka gruba izomorf olmasıdır. Verilen bu denklik sayesinde $SPIN(1,0,3)$-manifoldları incelenirken grubun Lie cebrinin tayini kolaylaşmış ve dolayısıyla bağlantının dejenere spinor demetine taşınması basitleşmiştir. Dejenere spin manifoldları ve dejenere spinor demeti, üzerindeki bağlantı yapısı ile birlikte $M^{1,0,3}$ özel durumunda [15] , [10] , [17]'de fiziksel motivasyonla dile getirilse de, diferansiyel geometri açısından matematiksel olarak invaryant bir biçimde bu tezde ortaya konmuştur.

Herhangi bir boyut ve rank için böyle bir bağlantının varlığı halinde onun dejenere spin manifoldu kurularak dejenere spinor demetine invaryant bir biçimde taşınıp taşınamıyacağı yanıtlanması gereken önemli bir sorudur.

KAYNAKLAR

[1] ABLAMOWICZ, R., J. Math. Phys., **27**(**1**), 1-6, (1986).

[2] BAKER, A., *Matrix Groups An Introduction to Lie Group Theory*, (2002).

[3] CARTAN, E., Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **40**, 325-412, (1923).

[4] CARTAN, E., Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **41**, 1-25, (1924).

[5] CRAMPIN, M., Proc.Camb.Phil.Soc., **64**, 307-316, (1968).

[6] CRUMEYROLLE, A., *Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras Spinor Structures*, (1990).

[7] DAUTCOURT, G., Class. Quantum Grav., **14**, 109-118, (1997).

[8] DERELİ, T., KOÇAK, Ş. ve LİMONCU, M., ARI Bull. Istan. Tech. Univ., **54**(**1**), 1-5, (2004)

[9] DIXON, W. G., Commun. Math. Phys., **45**, 167-182, (1975).

[10] DOMBROWSKI, H.D. ve HORNEFTER, K., Math. Zeitschrift, **86**, 291, (1964).

[11] DUVAL, C. ve KUNZLE, H. P., General Relativity and Gravitation, **16**(**4**), 333-347, (1984).

[12] EHLERS, J., Class. Quantum Grav., **14**, 119-126, (1997).

[13] FRIEDRICHS, K., Math. Ann., **98**, 566, (1927).

[14] GOENNER, H., Phys. Letters, **93**(**9**), 469-471, (1983).

[15] HAVAS, P., Reviews of Modern Physics, **36**, 938-965, (1964).

[16] KUCHAR, K., Physical Review D, **22**(**6**), 1285-1299, (1980).

[17] KUNZLE, H. P., Ann. Ins. Henri Poincare, **17**(**4**), 337-362, (1972).

[18] KUNZLE, H. P. ve DUVAL, C., Ann. Ins. Henri Poincare, **41**(**4**), 363-384, (1984).

[19] LEVY-LEBLOND, J. M., Commun. Math. Phys., **6**, 286-311, (1967).

[20] LİMONCU, M., Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, (2001)

[21] RUEDE, C. ve STRAUMANN, N., Helv. Phys. Acta, **70**, 318-335, (1997).

[22] TRAUTMAN, A., C. R. Acad. Sci. Paris, **257**, 617-620, (1963).

EK-1

BAĞLANTI VE BAĞLANTININ KALDIRILIŞI

Tanım 1 *E türevlenebilir bir vektör G-demeti olsun. E üzerinde ∇ bağlantısı her $f \in C^\infty(M)$ ve $\psi \in \Gamma(E)$ için*

$$\nabla(f\psi) = f\nabla\psi + df \otimes \psi$$

koşulunu sağlayan $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ dönüşümüne denir.

Kovaryant türev işlemcisi $\nabla_X : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, $\nabla_X\psi := (\nabla\psi)(X)$ olarak tanımlanan işlemcidir. Görüldüğü gibi bu işlemci X e göre $C^\infty(M)$-lineerdir.

Teorem 2 *E nin bir $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ atlası için $\mathcal{A}_\alpha : TU_\alpha \to \mathcal{G}$ şeklinde $\mathcal{G}$-değerli $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ 1-form ailesi verilsin. $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ ve $v \in T_x(U_\alpha \cap U_\beta)$ olmak üzere*

$$(\mathcal{A}_\alpha(x))(v) = \varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1} \circ (\mathcal{A}_\beta(x))(v) \circ \varphi_{\beta\alpha}(x) + \varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1} \circ (d\varphi_{\beta\alpha})(x)(v) \quad (1)$$

uyumluluk koşulunun sağlanması için gerek ve yeter şart,

$$(\nabla\psi)(x)(v) = \varphi_\alpha(x)^{-1}((d\psi_\alpha)(x)(v) + \mathcal{A}_\alpha(x)(v)(\psi_\alpha(x))) \quad (2)$$

ifadesinin E üzerinde bir bağlantı olmasıdır. Burada $\psi_\alpha(x) := \varphi_\alpha(x)(\psi(x))$ şeklinde tanımlı standart lifin yerel demet kesitidir.

Kanıt. (2)'nin Tanım 1 deki koşulu sağladığı açıktır. Şimdi, (2) ifadesinin E üzerinde bir bağlantı olması durumunda, (1)'in elde edildiğini gösterelim. (2)'nin bağlantı olması demek, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ ve $v \in T_x(U_\alpha \cap U_\beta)$ için

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(x)^{-1}((d\psi_\alpha)(x)(v) + \mathcal{A}_\alpha(x)(v)(\psi_\alpha(x)))&\\ = \varphi_\beta(x)^{-1}((d\psi_\beta)(x)(v) + \mathcal{A}_\beta(x)(v)(\psi_\beta(x)))& \quad (3)\end{aligned}$$

olması demektir. Geçiş fonksiyonları $\varphi_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\alpha(x) \circ \varphi_\beta(x)^{-1}$ olduğundan standart lifin yerel kesiti

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(x) &:= \varphi_\alpha(x)(\psi(x)) \\
&= (\varphi_{\alpha\beta}(x) \circ \varphi_\beta(x))(\psi(x)) \\
&= \varphi_{\alpha\beta}(x)(\varphi_\beta(x)(\psi(x))) \\
&= \varphi_{\alpha\beta}(x)(\psi_\beta(x)) \qquad (4)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Eğer $x = \gamma(t_0)$ ve $v = \frac{d}{dt}\gamma(t) \mid_{t=t_0}$ olacak şekilde $\gamma(t)$ eğrisi alınırsa, (4) ile birlikte

$$\begin{aligned}
(d\psi_\alpha)(x)(v) &= \frac{d}{dt}(\psi_\alpha \circ \gamma)(t) \mid_{t=t_0} \\
&= \frac{d}{dt}\psi_\alpha(\gamma(t)) \mid_{t=t_0} \\
&= \frac{d}{dt}\varphi_{\alpha\beta}(\gamma(t))(\psi_\beta(\gamma(t))) \mid_{t=t_0} \\
&= (\frac{d}{dt}\varphi_{\alpha\beta}(\gamma(t)) \mid_{t=t_0})(\psi_\beta(\gamma(t_0))) + \varphi_{\alpha\beta}(\gamma(t_0))(\frac{d}{dt}\psi_\beta(\gamma(t)) \mid_{t=t_0}) \\
&= ((d\varphi_{\alpha\beta})(x)(v))(\psi_\beta(x)) + \varphi_{\alpha\beta}(x)((d\psi_\beta)(x)(v))
\end{aligned}$$

elde edilen bu eşitlik (3)'de kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\varphi_\alpha(x)^{-1}(((d\varphi_{\alpha\beta})(x)(v))(\psi_\beta(x)) + \varphi_{\alpha\beta}(x)((d\psi_\beta)(x)(v)) + \mathcal{A}_\alpha(x)(v)(\psi_\alpha(x))) \\
&\qquad = \varphi_\beta(x)^{-1}((d\psi_\beta)(x)(v) + \mathcal{A}_\beta(x)(v)(\psi_\beta(x)))
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\varphi_\alpha(x)^{-1} \circ \varphi_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\alpha(x)^{-1} \circ \varphi_\alpha(x) \circ \varphi_\beta(x)^{-1} = \varphi_\beta(x)^{-1}$ ve (4)'den ifade,

$$\begin{aligned}
\varphi_\beta(x)^{-1}\mathcal{A}_\beta(x)(v)(\psi_\beta(x))) &= \varphi_\alpha(x)^{-1}((d\varphi_{\alpha\beta})(x)(v))(\psi_\beta(x)) \\
&\quad +\varphi_\alpha(x)^{-1}(\mathcal{A}_\alpha(x)(v)(\psi_\alpha(x))) \\
\mathcal{A}_\beta(x)(v)(\psi_\beta(x))) &= \varphi_{\beta\alpha}(x)(\mathcal{A}_\alpha(x)(v)(\psi_\alpha(x))) \\
&\quad +\varphi_{\beta\alpha}(x)((d\varphi_{\alpha\beta})(x)(v))(\psi_\beta(x)) \\
\mathcal{A}_\beta(x)(v)(\psi_\beta(x))) &= \varphi_{\alpha\beta}(x)^{-1}(\mathcal{A}_\alpha(x)(v)(\varphi_{\alpha\beta}(x)(\psi_\beta(x)))) \\
&\quad +\varphi_{\alpha\beta}(x)^{-1}((d\varphi_{\alpha\beta})(x)(v))(\psi_\beta(x))
\end{aligned}$$

şeklinde sadeleşir. Son olarak $\psi_\beta(x) = \varphi_\beta(x)(\psi(x))$'den

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\beta(x)(v)(\varphi_\beta(x)(\psi(x))) &= (\varphi_{\alpha\beta}(x)^{-1} \circ \mathcal{A}_\alpha(x)(v) \circ \varphi_{\alpha\beta}(x) \\ &\quad + \varphi_{\alpha\beta}(x)^{-1} \circ (d\varphi_{\alpha\beta})(x)(v))(\varphi_\beta(x)(\psi(x)))\end{aligned}$$

olacaktır. Bütün ψ kesitleri için yukarıdaki ifade geçerli olacağından

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\beta(x)(v) \circ \varphi_\beta(x) &= (\varphi_{\alpha\beta}(x)^{-1} \circ \mathcal{A}_\alpha(x)(v) \circ \varphi_{\alpha\beta}(x) \\ &\quad + \varphi_{\alpha\beta}(x)^{-1} \circ (d\varphi_{\alpha\beta})(x)(v)) \circ \varphi_\beta(x)\end{aligned}$$

yazılır ve buradan, $\varphi_\beta(x)^{-1}$ kullanılarak kolayca

$$\mathcal{A}_\beta(x)(v) = \varphi_{\alpha\beta}(x)^{-1} \circ \mathcal{A}_\alpha(x)(v) \circ \varphi_{\alpha\beta}(x) + \varphi_{\alpha\beta}(x)^{-1} \circ (d\varphi_{\alpha\beta})(x)(v)$$

bulunur.

Şimdi (1)'den hareketle (2)'nin bağlantı olduğunu, yani (2)'nin koordinat sisteminden bağımsız olduğunu gösterelim. (1) ifadesi, (2)'de yerine konulduğunda,

$$\begin{aligned}(\nabla\psi)(x)(v) &= \varphi_\alpha(x)^{-1}((d\psi_\alpha)(x)(v)) \\ &\quad + \varphi_\alpha(x)^{-1}(\varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1} \circ (\mathcal{A}_\beta(x))(v) \circ \varphi_{\beta\alpha}(x) \\ &\qquad + \varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1} \circ (d\varphi_{\beta\alpha})(x)(v))(\psi_\alpha(x))) \\ (\nabla\psi)(x)(v) &= \varphi_\beta(x)^{-1}((\mathcal{A}_\beta(x))(v)(\psi_\beta(x))) \\ &\quad + \varphi_\alpha(x)^{-1}((d\psi_\alpha)(x)(v)) + \varphi_\beta(x)^{-1}((d\varphi_{\beta\alpha})(x)(v))(\psi_\alpha(x)))\end{aligned}$$

(4) kullanılarak bulunur. Burada $(d\varphi_{\beta\alpha})(x)(v)$ için aynı yukarıdaki gibi γ eğrisi kullanılırsa $\varphi_{\beta\alpha}(x) = \varphi_\beta(x) \circ \varphi_\alpha(x)^{-1}$ olduğundan dolayı,

$$((d\varphi_{\beta\alpha})(x)(v))(\psi_\alpha(x)) = (d\psi_\beta)(x)(v) - \varphi_{\beta\alpha}(x)((d\psi_\alpha)(x)(v))$$

sonucu bulunur. Bu yukarıdaki ifadenin son teriminde kullanılırsa,

$$(\nabla\psi)(x)(v) = \varphi_\beta(x)^{-1}((d\psi_\beta)(x)(v) + \mathcal{A}_\beta(x)(v)(\psi_\beta(x)))$$

elde edilir. ■

Bu teoremde $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ 1-form ailesi bir vektör G-demeti üzerinde verilmiştir. Vektör G-demetinin tanımı gereği G Lie grubu, girdileri cismin $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$ elemanı olan bir matris grubudur (yani doğrusal dönüşümlerin grubudur). Bu yüzden G'nin Lie cebri bir matris cebridir. Dolayısıyla (1)'deki bileşke gösterimi (yani matris çarpımı) anlamlı bir gösterimdir. Bu 1-form ailesini, herhangi bir G-demeti üzerinde düşünmek istersek (mesela bir asal G-demeti üzerinde), G Lie grubu artık bir matris grubu olmak zorunda olmadığından (1)'deki gösterim (bileşke gösterimi) her zaman anlamlı olmayabilir. Gösterimlerin kesin olarak anlamlı olması için bazı ön hazırlıklar yapmak gerekecektir.

Tanım 3 *Herhangi bir G Lie grubu üzerinde belirlenmiş bir $g \in G$ için*

$$\begin{array}{rccc} R_g: & G & \longrightarrow & G \\ & h & \longmapsto & R_g(h) := hg \end{array} \tag{5}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} L_g: & G & \longrightarrow & G \\ & h & \longmapsto & L_g(h) := gh \end{array} \tag{6}$$

olarak tanımlanan türevlenebilir R_g, L_g dönüşümlerine sırasıyla sağdan etki ve soldan etki denir.

Önerme 4 *Herhangi bir G Lie grubu üzerinde $\Upsilon_g := L_g \circ R_{g^{-1}}$ olarak tanımlanan*

$$\begin{array}{rccc} \Upsilon_g: & G & \longrightarrow & G \\ & h & \longmapsto & \Upsilon_g(h) := ghg^{-1} \end{array} \tag{7}$$

dönüşümü türevlenebilir grup izomorfizmasıdır.

Kanıt. Bire-bir, örten ve türevlenebilir iki dönüşümün bileşkesi yine bire-bir, örten ve türevlenebilir bir dönüşümdür. Öte yandan

$$\Upsilon_g(hh') = ghh'g^{-1} = ghg^{-1}gh'g^{-1} = \Upsilon_g(h)\Upsilon_g(h')$$

olduğundan dönüşüm izomorfizmadır. ■

Artık, herhangi bir G-demet üzerinde adına bağlantı 1-formları diyeceğimiz $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ 1-form ailesini tanımlayabiliriz.

Tanım 5 *$\mathcal{F}_G$ herhangi bir G-demeti ve bu demetin $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ atlası için verilen $\mathcal{A}_\alpha : TU_\alpha \to \mathcal{G}$ şeklindeki $\mathcal{G}$-değerli $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ 1-form ailesi, her $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ ve $v \in T_x(U_\alpha \cap U_\beta)$ için*

$$\mathcal{A}_\alpha(x)(v) = (d\Upsilon_{\varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_e(\mathcal{A}_\beta(x)(v)) + (dL_{\varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\varphi_{\beta\alpha}(x)}((d\varphi_{\beta\alpha})(x)(v)) \quad (8)$$

koşulunu sağlıyorsa $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ ailesine $\mathcal{F}_G$'nin $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ atlasına göre bağlantı 1-formları denir. Bu koşula uyumluluk koşulu adı verilir.

Burada $\varphi_{\alpha\beta}(x)$ geçiş fonksiyonları tanımı gereği G nin elemanıdır. Bu durumda, $\Upsilon_{\varphi_{\alpha\beta}(x)^{-1}}$ ve $L_{\varphi_{\alpha\beta}(x)^{-1}}$ tanımlı olup türev dönüşümleri

$$(d\varphi_{\beta\alpha})(x) : T_x(U_\beta \cap U_\alpha) \longrightarrow T_{\varphi_{\beta\alpha}(x)}G$$

$$(d\Upsilon_{\varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_e : T_eG = \mathcal{G} \longrightarrow T_eG = \mathcal{G}$$

$$(dL_{\varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\varphi_{\beta\alpha}(x)} : T_{\varphi_{\beta\alpha}(x)}G \longrightarrow T_eG = \mathcal{G}$$

şeklindedir.

Önerme 6 *Yukarıdaki tanımda özel olarak, G bir matris grubu ise (8) numaralı uyumluluk koşulu*

$$(\mathcal{A}_\alpha(x))(v) = \varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1} \circ (\mathcal{A}_\beta(x))(v) \circ \varphi_{\beta\alpha}(x) + \varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1} \circ (d\varphi_{\beta\alpha})(x)(v)$$

şeklindeki (1) numaralı uyumluluk koşuluna dönüşür.

Kanıt. G matris grubu üzerinde $a = \dfrac{d}{dt}\gamma(t) \mid_{t=t_0} \in \mathcal{G}$ ve $\gamma(t_0) = e \in G$ olacak şekilde bir γ matris eğrisi seçelim (öyleyse a da bir matristir). Belirlenmiş bir $g \in G$ için $(d\Upsilon_g)_e : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ dönüşümü

$$\begin{aligned}
(d\Upsilon_g)_e(a) &= \frac{d}{dt}(\Upsilon_g \circ \gamma)(t) \mid_{t=t_0} \\
&= \frac{d}{dt}(\Upsilon_g(\gamma(t)) \mid_{t=t_0} \\
&= \frac{d}{dt}(g\gamma(t)g^{-1}) \mid_{t=t_0} \\
&= g\frac{d}{dt}\gamma(t) \mid_{t=t_0} g^{-1} \\
&= gag^{-1}
\end{aligned}$$

olacaktır. Bu matrisler, birer doğrusal dönüşüm belirttiğinden matris çarpımı gösterimi yerine $(d\Upsilon_g)_e(a) = g \circ a \circ g^{-1}$ gösterimi de kullanılabilir. O zaman $a = (\mathcal{A}_\beta(x))(v)$ ve $g = \varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}$ olarak alınırsa (1)'in ilk terimi elde edilmiş olur.

Benzer şekilde, $b = \frac{d}{dt}\gamma(t)\mid_{t=t_0} \in T_gG$ ve $\gamma(t_0) = g \in G$ olacak şekilde bir γ matris eğrisi seçelim (öyleyse b de bir matristir). Belirlenmiş bir $g \in G$ için $(dL_{g^{-1}})_g : T_gG \longrightarrow \mathcal{G}$ dönüşümü

$$\begin{aligned}
(dL_{g^{-1}})_g(b) &= \frac{d}{dt}(L_{g^{-1}} \circ \gamma)(t)\mid_{t=t_0} \\
&= \frac{d}{dt}(L_{g^{-1}}(\gamma(t))\mid_{t=t_0} \\
&= \frac{d}{dt}(g^{-1}\gamma(t))\mid_{t=t_0} \\
&= g^{-1}\frac{d}{dt}\gamma(t)\mid_{t=t_0} \\
&= g^{-1}b
\end{aligned}$$

olacaktır. Bir önceki paragrafdaki nedenlerle $(dL_{g^{-1}})_g(b) = g^{-1} \circ b$ olarak gösterilebilir. Eğer $b = (d\varphi_{\beta\alpha})(x)(v)$ ve $g = \varphi_{\beta\alpha}(x)$ olarak alınırsa (1)'in, ikinci terimi de elde edilmiş olur. ∎

İleride önemli iki teoremin ispatında kullanacağımız bazı eşitlikleri aşağıdaki önermede ifade edelim.

Önerme 7 *$G, \widetilde{G}$ Lie grupları arasında $\rho : \widetilde{G} \to G$ grup homomorfizması verilsin. Belirlenmiş herhangi bir $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$ için*

$$L_{\rho(\widetilde{g})} \circ \rho = \rho \circ L_{\widetilde{g}} \qquad R_{\rho(\widetilde{g})} \circ \rho = \rho \circ R_{\widetilde{g}} \qquad \Upsilon_{\rho(\widetilde{g})} \circ \rho = \rho \circ \Upsilon_{\widetilde{g}} \tag{9}$$

ve

$$\begin{aligned}
(dL_{\rho(\widetilde{g})^{-1}})_{\rho(\widetilde{g})} \circ (d\rho)_{\widetilde{g}} &= (d\rho)_{\widetilde{e}} \circ (dL_{\widetilde{g}^{-1}})_{\widetilde{g}} &(10)\\
(dR_{\rho(\widetilde{g})})_e \circ (d\rho)_{\widetilde{e}} &= (d\rho)_{\widetilde{g}} \circ (dR_{\widetilde{g}})_{\widetilde{e}} &(11)\\
(d\Upsilon_{\rho(\widetilde{g})})_e \circ (d\rho)_{\widetilde{e}} &= (d\rho)_{\widetilde{e}} \circ (d\Upsilon_{\widetilde{g}})_{\widetilde{e}} &(12)
\end{aligned}$$

dir. Burada $\widetilde{e}$, e sırasıyla $\widetilde{G}$ ve G nin birim elemanlarıdır.

Kanıt. ρ bir grup homomorfizması olduğu için $\rho(\widetilde{e}) = e$, $\rho(\widetilde{g}^{-1}) = \rho(\widetilde{g})^{-1}$ ve $\rho(\widetilde{g}\widetilde{h}) = \rho(\widetilde{g})\rho(\widetilde{h})$ dir. Öyleyse sağdan ve soldan etki tanımları kullanılarak

$$\begin{aligned}(L_{\rho(\widetilde{g})} \circ \rho)(\widetilde{h}) &= \rho(\widetilde{g})\rho(\widetilde{h}) \\ &= \rho(\widetilde{g}\widetilde{h}) \\ &= \rho(L_{\widetilde{g}}(\widetilde{h})) \\ &= (\rho \circ L_{\widetilde{g}})(\widetilde{h})\end{aligned}$$

bulunur. Aynı yöntemle, diğer iki eşitlik kolayca elde edilir. Türev donüşümleri ile ilgili eşitliklerde, türev dönüşümünün $d(f \circ g)(x) = (df)(g(x)) \circ (dg)(x)$ özelliği kullanılacaktır. Birinci eşitlik $L_{\rho(\widetilde{g}^{-1})} \circ \rho = \rho \circ L_{\widetilde{g}^{-1}}$'den hareketle

$$\begin{aligned}d(L_{\rho(\widetilde{g}^{-1})} \circ \rho)_{\widetilde{g}} &= d(\rho \circ L_{\widetilde{g}^{-1}})_{\widetilde{g}} \\ (dL_{\rho(\widetilde{g}^{-1})})_{\rho(\widetilde{g})} \circ (d\rho)_{\widetilde{g}} &= (d\rho)_{(L_{\widetilde{g}^{-1}}\widetilde{g})} \circ (dL_{\widetilde{g}^{-1}})_{\widetilde{g}} \\ (dL_{\rho(\widetilde{g})^{-1}})_{\rho(\widetilde{g})} \circ (d\rho)_{\widetilde{g}} &= (d\rho)_{\widetilde{e}} \circ (dL_{\widetilde{g}^{-1}})_{\widetilde{g}}\end{aligned}$$

bulunur. Diğer iki eşitliğe,

$$d(R_{\rho(\widetilde{g})} \circ \rho)_{\widetilde{e}} = d(\rho \circ R_{\widetilde{g}})_{\widetilde{e}} \qquad d(\Upsilon_{\rho(\widetilde{g})} \circ \rho)_{\widetilde{e}} = d(\rho \circ \Upsilon_{\widetilde{g}})_{\widetilde{e}}$$

ifadelerinden aynı şekilde ulaşılır. ∎

Teorem 8 *Aynı M manifoldu üzerinde $\mathcal{F}_G$, $\widetilde{\mathcal{F}}_{\widetilde{G}}$ demetleri ve $\rho : \widetilde{G} \longrightarrow G$ $k:1$ örten grup homomorfizması verilsin ($k \in \mathbb{Z}^+$). Ayrıca $\mathcal{F}_G$, $\widetilde{\mathcal{F}}_{\widetilde{G}}$'nin öyle $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ ve $\{U_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha\}$ atlasları olsun ki, $\mathcal{F}_G$ ve $\widetilde{\mathcal{F}}_{\widetilde{G}}$'nin geçiş fonsiyonları ile ρ arasında $\rho \circ \widetilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta}$ özelliği sağlansın.*

Demetlerin yandaki diagram komutatif olacak şekilde atlasları var olsun: $\rho \circ \widetilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta}$.

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{G} \arrow[d, "\rho"', "k:1"] \\ U_\alpha \cap U_\beta \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "\varphi_{\alpha\beta}"'] & G \end{tikzcd}$$

Eğer $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ ailesi $\mathcal{F}_G$ nin $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ atlasına göre bağlantı 1-formları ise, her $x \in U_\alpha$ için

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha(x) = (d\rho)^{-1}_{\widetilde{e}} \circ \mathcal{A}_\alpha(x) \tag{13}$$

olarak tanımlanan $\{\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha\}$ ailesi de $\widetilde{\mathcal{F}}_{\widetilde{G}}$ nin $\{U_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha\}$ atlasına göre bağlantı 1-formlarıdır.

Not. Burada ρ grup homomorfizması $k : 1$ ve örten olduğundan, $(d\rho)_{\widetilde{e}}$ bire-bir ve örten, yani terslenebilirdir.

Kanıt. $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ ailesi $\mathcal{F}_G$ nin $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ atlasına göre bağlantı 1-formları ise

$$\mathcal{A}_\alpha(x)(v) = (d\Upsilon_{\varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_e(\mathcal{A}_\beta(x)(v)) + (dL_{\varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\varphi_{\beta\alpha}(x)}((d\varphi_{\beta\alpha})(x)(v))$$

şeklindeki (8) numaralı uyumluluk koşulu geçerli demektir. Öteyandan teoremde verilen $\rho \circ \widetilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta}$, yani $\rho(\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)) = \varphi_{\alpha\beta}(x)$ ifadesinden

$$\mathcal{A}_\alpha(x)(v) = (d\Upsilon_{\rho(\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x))^{-1}})_e(\mathcal{A}_\beta(x)(v)) + (dL_{\rho(\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x))^{-1}})_{\rho(\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x))}((d(\rho \circ \widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}))(x)(v))$$

yazabiliriz. Her iki tarafın $(d\rho)_{\widetilde{e}}^{-1}$ altındaki görüntülerine bakılırsa,

$$\begin{aligned}
(d\rho)_{\widetilde{e}}^{-1}(\mathcal{A}_\alpha(x)(v)) &= (d\rho)_{\widetilde{e}}^{-1}((d\Upsilon_{\rho(\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x))^{-1}})_e(\mathcal{A}_\beta(x)(v))) \\
&\quad + (d\rho)_{\widetilde{e}}^{-1}((dL_{\rho(\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x))^{-1}})_{\rho(\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x))}((d(\rho \circ \widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}))(x)(v))), \\
((d\rho)_{\widetilde{e}}^{-1} \circ \mathcal{A}_\alpha(x))(v) &= ((d\rho)_{\widetilde{e}}^{-1} \circ (d\Upsilon_{\rho(\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x))^{-1}})_e)(\mathcal{A}_\beta(x)(v)) \\
&\quad + ((d\rho)_{\widetilde{e}}^{-1} \circ (dL_{\rho(\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x))^{-1}})_{\rho(\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x))})((d(\rho \circ \widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}))(x)(v)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha(x)(v) &= ((d\rho)_{\widetilde{e}}^{-1} \circ (d\Upsilon_{\rho(\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x))^{-1}})_e)(\mathcal{A}_\beta(x)(v)) \\
&\quad + ((d\rho)_{\widetilde{e}}^{-1} \circ (dL_{\rho(\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x))^{-1}})_{\rho(\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x))} \circ (d\rho)_{\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x)})((d\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha})(x)(v)) \quad (14)
\end{aligned}$$

elde edilir. (12) ifadesinde, $\widetilde{g} = \widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)^{-1}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
(d\Upsilon_{\rho(\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x))^{-1}})_e \circ (d\rho)_{\widetilde{e}} &= (d\rho)_{\widetilde{e}} \circ (d\Upsilon_{\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\widetilde{e}} \\
(d\rho)_{\widetilde{e}}^{-1} \circ (d\Upsilon_{\rho(\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x))^{-1}})_e &= (d\Upsilon_{\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\widetilde{e}} \circ (d\rho)_{\widetilde{e}}^{-1} \quad (15)
\end{aligned}$$

buluruz (burada ρ grup homomorfizma olduğundan $\rho(\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)^{-1}) = \rho(\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x))^{-1}$ dir). Benzer yolla (10) ifadesinde de $\widetilde{g} = \widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)$ olarak alınırsa,

$$(dL_{\rho(\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x))^{-1}})_{\rho(\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x))} \circ (d\rho)_{\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)} = (d\rho)_{\widetilde{e}} \circ (dL_{\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)} \quad (16)$$

buluruz. (15) ve (16) eşitlikleri (14)'de yerlerinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha(x)(v) &= ((d\Upsilon_{\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\widetilde{e}} \circ (d\rho)_{\widetilde{e}}^{-1})(\mathcal{A}_\beta(x)(v)) \\
&\quad +((d\rho)_{\widetilde{e}}^{-1} \circ (d\rho)_{\widetilde{e}} \circ (dL_{\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)})((d\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha})(x)(v)) \\
&= (d\Upsilon_{\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\widetilde{e}}((d\rho)_{\widetilde{e}}^{-1}(\mathcal{A}_\beta(x)(v))) \\
&\quad +(dL_{\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)}((d\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha})(x)(v)) \\
&= (d\Upsilon_{\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\widetilde{e}}((d\rho)_{\widetilde{e}}^{-1} \circ \mathcal{A}_\beta(x))(v) \\
&\quad +(dL_{\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)}((d\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha})(x)(v)) \\
&= (d\Upsilon_{\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\widetilde{e}}(\widetilde{\mathcal{A}}_\beta(x)(v)) + (dL_{\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}(x)}((d\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha})(x)(v))
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Dikkat edilirse bu son eşitlik, $\{\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha\}$ ailesi ve $\{U_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha\}$ atlası için (8) numaralı uyumluluk koşulunun aynısıdır. O zaman $\{\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha\}$ ailesi $\widetilde{\mathcal{F}}_{\widetilde{G}}$ nin $\{U_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha\}$ atlasına göre bağlantı 1-formlarıdır. ∎

Teorem 9 *P_G bir asal G-demeti olmak üzere; onun $E = P_G \times_\theta V^k$ ile gösterilen ve $\theta : G \to Aut(V^k) = GL(k, V)$ grup homomorfizması ile verilen P_G'nin asosiye vektör demeti alınsın. Eğer $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ ailesi P_G'nin $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ atlasına göre bağlantı 1-formları ise, her $x \in U_\alpha$ için*

$$\overline{\mathcal{A}}_\alpha(x) = (d\theta)_e \circ \mathcal{A}_\alpha(x) \tag{17}$$

olarak tanımlanan $\{\overline{\mathcal{A}}_\alpha\}$ ailesi de E'nin $\{U_\alpha, \overline{\varphi}_\alpha\}$ atlasına göre bağlantı 1-formlarıdır.

Not: Burada V^k ile $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$ cismi üzerindeki k-boyutlu V vektör uzayı gösterilmektedir.

Kanıt. $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ ailesi P_G nin $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ atlasına göre bağlantı 1-formları ise

$$\mathcal{A}_\alpha(x)(v) = (d\Upsilon_{\varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_e(\mathcal{A}_\beta(x)(v)) + (dL_{\varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\varphi_{\beta\alpha}(x)}((d\varphi_{\beta\alpha})(x)(v))$$

şeklindeki (8) numaralı uyumluluk koşulu sağlanır. $\overline{\mathcal{A}}_\alpha(x) = (d\theta)_e \circ \mathcal{A}_\alpha(x)$ ifadesi $v \in T_x(U_\alpha \cap U_\beta) \subset T_x U_\alpha$ için $\overline{\mathcal{A}}_\alpha(x)(v) = (d\theta)_e(\mathcal{A}_\alpha(x)(v))$ demektir.

Öyleyse,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{A}}_\alpha(x)(v) &= (d\theta)_e((d\Upsilon_{\varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_e(\mathcal{A}_\beta(x)(v)) \\
&\quad +(dL_{\varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\varphi_{\beta\alpha}(x)}((d\varphi_{\beta\alpha})(x)(v))) \\
&= ((d\theta)_e \circ (d\Upsilon_{\varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_e)(\mathcal{A}_\beta(x)(v)) \\
&\quad +((d\theta)_e \circ (dL_{\varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\varphi_{\beta\alpha}(x)})((d\varphi_{\beta\alpha})(x)(v))
\end{aligned} \tag{18}$$

elde edilir. (12) ifadesindeki $\rho : \widetilde{G} \to G$ homomorfizmasının yerini, burada $\theta : G \to Aut(V^k) = GL(k, V)$ homomorfizması almıştır. Dolayısıyla (12) burada

$$(d\Upsilon_{\theta(g)})_{id} \circ (d\theta)_e \quad = \quad (d\theta)_e \circ (d\Upsilon_g)_e$$

şeklindedir ve $g = \varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}$ olarak seçilirse,

$$(d\theta)_e \circ (d\Upsilon_{\varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_e = (d\Upsilon_{\theta(\varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1})})_{id} \circ (d\theta)_e \tag{19}$$

bulunur. Benzer şekilde (10) ifadesi de burada,

$$(dL_{\theta(g)^{-1}})_{\theta(g)} \circ (d\theta)_g \quad = \quad (d\theta)_e \circ (dL_{g^{-1}})_g$$

şeklini alacaktır ve $g = \varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}$ olarak seçilirse,

$$(d\theta)_e \circ (dL_{\varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\varphi_{\beta\alpha}(x)} = (dL_{\theta(\varphi_{\beta\alpha}(x))^{-1}})_{\theta(\varphi_{\beta\alpha}(x))} \circ (d\theta)_{\varphi_{\beta\alpha}(x)} \tag{20}$$

bulunur. (19) ve (20) eşitlikleri (18)'de yerlerinde kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{A}}_\alpha(x)(v) &= ((d\Upsilon_{\theta(\varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1})})_{id} \circ (d\theta)_e)(\mathcal{A}_\beta(x)(v)) \\
&\quad +((dL_{\theta(\varphi_{\beta\alpha}(x))^{-1}})_{\theta(\varphi_{\beta\alpha}(x))} \circ (d\theta)_{\varphi_{\beta\alpha}(x)})((d\varphi_{\beta\alpha})(x)(v)) \\
&= (d\Upsilon_{\theta(\varphi_{\beta\alpha}(x))^{-1}})_{id}((d\theta)_e(\mathcal{A}_\beta(x)(v))) \\
&\quad +((dL_{\theta(\varphi_{\beta\alpha}(x))^{-1}})_{\theta(\varphi_{\beta\alpha}(x))}((d\theta)_{\varphi_{\beta\alpha}(x)} \circ (d\varphi_{\beta\alpha})(x))(v) \\
&= (d\Upsilon_{\theta(\varphi_{\beta\alpha}(x))^{-1}})_{id}(\overline{\mathcal{A}}_\beta(x)(v))) \\
&\quad +((dL_{\theta(\varphi_{\beta\alpha}(x))^{-1}})_{\theta(\varphi_{\beta\alpha}(x))}(d(\theta \circ \varphi_{\beta\alpha}))(x))(v)
\end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Bir asal G-demetinin geçiş fonksiyonları $\varphi_{\alpha\beta}$ ise bu asal demetin asosye vektör demetinin geçiş fonksiyonlarının $\psi_{\alpha\beta} = \theta \circ \varphi_{\alpha\beta}$ (veya

$\psi_{\alpha\beta}(x) = \theta(\varphi_{\alpha\beta}(x)))$ olduğunu biliyoruz. Öyleyse bu eşitlik elde edilen son ifadede kullanılırsa,

$$\overline{\mathcal{A}}_\alpha(x)(v) = (d\Upsilon_{\psi_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{id}(\overline{\mathcal{A}}_\beta(x)(v)) + (dL_{\psi_{\beta\alpha}(x)^{-1}})_{\psi_{\beta\alpha}(x)}((d\psi_{\beta\alpha})(x)(v))$$

sonucunu elde ederiz. Dikkat edilirse bu son eşitlik $\overline{\mathcal{A}}_\alpha$ ailesi ve $\{U_\alpha, \overline{\varphi}_\alpha\}$ atlası için (8) numaralı uyumluluk koşulunun aynısıdır. O zaman, $\{\overline{\mathcal{A}}_\alpha\}$ ailesi de E asosye demetinin $\{U_\alpha, \overline{\varphi}_\alpha\}$ atlasına göre bağlantı 1-formlarıdır. ■

Not: Bu uyumluluk koşulu, Önerme 6'dan dolayı,

$$(\overline{\mathcal{A}}_\alpha(x))(v) = \psi_{\beta\alpha}(x)^{-1} \circ (\overline{\mathcal{A}}_\beta(x))(v) \circ \psi_{\beta\alpha}(x) + \psi_{\beta\alpha}(x)^{-1} \circ (d\psi_{\beta\alpha})(x)(v)$$

olarak da yazılabilir.

EK-2

YARI-DOĞRUDAN ÇARPIM

Tanım 1 *G bir grup, $H \leqslant G$, $N \trianglelefteq G$ onun alt ve normal alt grupları olsun. Eğer $G = HN$ ve $H \cap N = \{1\}$ ise G ye H ile N nin yarı-doğrudan çarpımı denir ve $G = H \ltimes N$ olarak yazılır.*

Önerme 2 *Eğer $G = H \ltimes N$ ise $h \longmapsto \theta(h)(n) := hnh^{-1}$ olarak tanımlanan $\theta : H \longrightarrow Aut(N)$ grup homomorfizması vardır.*

Not: $Aut(N)$ bileşke işlemi altında gruptur.

Kanıt. Normal alt grubun tanımı gereği, her $g \in G$ ve $n \in N$ için $gng^{-1} \in N$ olacağından verilen dönüşüm iyi tanımlıdır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \theta(hh')(n) &= hh'n(hh')^{-1} \\ &= hh'nh'^{-1}h^{-1} \\ &= h\theta(h')(n)h^{-1} \\ &= \theta(h)((\theta(h')(n))) \\ &= (\theta(h) \circ \theta(h'))(n) \end{aligned}$$

olur ve $\theta(hh') = \theta(h) \circ \theta(h')$ şeklindeki homomorfizma da elde edilir. ■

Teorem 3 *H ve N gibi herhangi iki grup ve $\theta : H \longrightarrow Aut(N)$ grup homomorfizması verilsin. O zaman $H \times N$ kümesi üzerinde*

$$(h, n)(h', n') = (hh', \theta(h'^{-1})(n)n') \tag{1}$$

olarak verilen işlem aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) Bu işlemle birlikte $H \times N$ bir gruptur,

2) $H \backsimeq H \times 1_N \leqslant H \times N$,

3) $N \backsimeq 1_H \times N \trianglelefteq H \times N$,

4) $H \times N = (H \times 1_N)(1_H \times N)$ ve $(H \times 1_N) \cap (1_H \times N) = \{(1_H, 1_N)\}$,

5) $H \times N = (H \times 1_N) \ltimes_\theta (1_H \times N) \backsimeq H \ltimes_\theta N$.

Not: Bu özellikleri sağlayan (1) işlemi tek değildir. Bu işlemden farklı olan işlemler vardır, öyle ki bu özellikler sağlanır.

Kanıt. İşlemin kapalı olduğu açıktır.

Birleşme özelliği:

$$\begin{aligned}((h,n)(h',n'))(h'',n'') &= (hh', \theta(h'^{-1})(n)n')(h'',n'') \\ &= (hh'h'', \theta(h''^{-1})(\theta(h'^{-1})(n)n')n'') \\ &= (hh'h'', \theta(h''^{-1})(\theta(h'^{-1})(n))\theta(h''^{-1})(n')n'') \\ &= (hh'h'', (\theta(h''^{-1}) \circ \theta(h'^{-1}))(n)\theta(h''^{-1})(n')n'') \\ &= (hh'h'', \theta(h''^{-1}h'^{-1})(n)\theta(h''^{-1})(n')n'')\end{aligned}$$

öte yandan,

$$\begin{aligned}(h,n)((h',n')(h'',n'')) &= (h,n)(h'h'', \theta(h''^{-1})(n')n'') \\ &= (hh'h'', \theta((h'h'')^{-1})(n)\theta(h''^{-1})(n')n'') \\ &= (hh'h'', \theta(h''^{-1}h'^{-1})(n)\theta(h''^{-1})(n')n'')\end{aligned}$$

bulunur.

Birim eleman $1_{H\times N} = (1_H, 1_N)$

$$\begin{aligned}(h,n)(1_H,1_N) &= (h1_H, \theta(1_H^{-1})(n)1_N) \\ &= (h, id(n)1_N) = (h,n)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(1_H,1_N)(h,n) &= (1_H h, \theta(h^{-1})(1_N)n) \\ &= (h, 1_N n) = (h,n)\end{aligned}$$

bulunur. Burada $Aut(N)$ grubunun birim elemanı id birim dönüşümdür. θ grup homomorfizması olduğundan, $\theta(1_H) = id$ olur. $\theta(h^{-1}) \in Aut(N)$ de bir grup otomorfizması olduğundan, $\theta(h^{-1})(1_N) = 1_N$ dir.

Ters eleman: $(h,n)^{-1} = (h^{-1}, \theta(h)(n^{-1}))$

$$\begin{aligned}(h,n)(h^{-1},\theta(h)(n^{-1})) &= (hh^{-1},\theta((h^{-1})^{-1})(n)\theta(h)(n^{-1}))\\ &= (1_H,\theta(h)(nn^{-1}))\\ &= (1_H,\theta(h)(1_N)) = (1_H,1_N)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(h^{-1},\theta(h)(n^{-1}))(h,n) &= (h^{-1}h,\theta(h^{-1})(\theta(h)(n^{-1}))n)\\ &= (1_H,(\theta(h^{-1})\circ\theta(h))(n^{-1})n)\\ &= (1_H,(\theta(h)^{-1}\circ\theta(h))(n^{-1})n)\\ &= (1_H,n^{-1}n) = (1_H,1_N)\end{aligned}$$

bulunur. Burada θ grup homomorfizması olduğundan $\theta(h^{-1}) = \theta(h)^{-1}$ dır.

$H \backsimeq H \times 1_N$ olduğu açıkça ortadadır. $(h,1_N)^{-1} = (h^{-1},1_N) \in H \times 1_N$ ve $(h,1_N)(h',1_N) = (hh',1_N) \in H \times 1_N$ olduğundan, $H \times 1_N \leqslant H \times N$ dir.

Aynı şekilde $N \backsimeq 1_H \times N$ olduğu da açıktır.

$$(1_H,n)^{-1} = (1_H,\theta(1_H)(n^{-1})) = (1_H,id(n^{-1})) = (1_H,n^{-1}) \in 1_H \times N$$

ve

$$(1_H,n)(1_H,n') = (1_H,\theta(1_H^{-1})(n)n') = (1_H,id(n)n') = (1_H,nn') \in 1_H \times N$$

olduğundan, $1_H \times N \trianglelefteq H \times N$ dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}(h,n)(1_H,n')(h,n)^{-1} &= (h,n)(1_H,n')(h^{-1},\theta(h)(n^{-1}))\\ &= (h,\theta(1_H^{-1})(n)n')(h^{-1},\theta(h)(n^{-1}))\\ &= (h,nn')(h^{-1},\theta(h)(n^{-1}))\\ &= (1_H,\theta(h)(nn')\theta(h)(n^{-1})) \in 1_H \times N\end{aligned}$$

olduğundan dolayı da $1_H \times N \trianglelefteq H \times N$ olur.

$(h,n) \in H \times N$ elemanı için aday olarak $(h, 1_N)$ ve $(1_H, n)$ elemanları seçilirse, $(h, 1_N)(1_H, n) = (h, \theta(1_H^{-1})(1_N)n) = (h, n)$ bulunur. Varsayalım ki, $(1_H, 1_N)$'den başka bir de, $(h,n) \in (H \times 1_N) \cap (1_H \times N)$ olsun. Öyleyse $(h,n) \in H \times 1_N$ olur ki, bu $n = 1_N$ demektir. $(h,n) \in 1_H \times N$'de olacağından, $h = 1_H$ olur. Demek ki $(h,n) = (1_H, 1_N)$ dir.

Dördüncü adımdaki bu özellikler yarı-doğrudan çarpımın şartlarıdır. O zaman, $H \times N$ kümesi bu işlem altında $H \times N = (H \times 1_N) \ltimes_\theta (1_H \times N) \backsimeq H \ltimes_\theta N$ şeklinde bir yarı-doğrudan çarpımdır. Buradaki izomorfizma, ikinci ve üçüncü adımdaki izomorfizmalardan kolayca elde edilir. ■