1.7057

PARAKOMPAKT UZAYLAR ÜZERİNE

Ahmet DUMAN

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Aralık-2002

TEŞEKKÜR

Başlangıç aşamasından bitiş aşamasına kadar bu tezin hazırlanmasında verdiği destek ve bana ayırdığı değerli zamanı için Prof. Dr. Orhan ÖZER'e teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\emptyset$	: Boş küme
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Gerçel sayılar kümesi
$\mathcal{P}(X)$	: X in kuvvet kümesi
$\mathcal{U}(x)$	: x noktasının komşuluklar ailesi
$\overline{A}$	: A nın kapanışı
A°	: A nın içi
$\prec$	: İncelik
$st(A,\mathcal{U})$	: A nın $\mathcal{U}$ ya göre yıldızı
$\mathcal{U}^{*}$	: $\mathcal{U}$ ailesinin yıldızı
Δ_X	: X kümesinin köşegeni
$\mathcal{U}^{\Delta} \prec \mathcal{V}$	: $\mathcal{U}$ ailesi $\mathcal{V}$ ailesinin delta inceliği

1. ÖNBİLGİLER

Bu bölümde gerekli bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Önerme niteliğindeki ifadelerin kanıtlarına girmeden kısa hatırlatmalar yapılmıştır.

Tanım 1.1 *X boş olmayan bir küme ve τ da X in alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere, τ aşağıdaki özellikleri sağlasın:*

(i) $\emptyset, X \in \tau$

(ii) *τ dan alınan her sonlu sayıda elemanların kesişimi τ ya aittir; yani $\forall \{A_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ (I sonlu bir indis kümesi) için*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \in \tau$$

olsun.

(iii) *τ da alınan her sonlu ya da sonsuz sayıda elemanların birleşimi τ ya aittir; yani $\forall \{A_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ (I herhangi bir indis kümesi) için*

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$$

olsun.

Bu takdirde τ ya X üzerinde bir topoloji ve (X,τ) ikilisinede bir topolojik uzay denir. τ nun elemanlarına açık kümeler, açık kümelerin tümleyenlerinede kapalı kümeler denir.

X topolojik uzayında $x \in X$ alalım. Eğer X in bir U alt kümesi, x noktasını içeren bir V açık kümesini içeriyorsa, U ya x in bir komşuluğu denir; yani

$$U \text{ , } x \text{ noktasının bir komşuluğudur} \Leftrightarrow \exists V \in \tau \ni x \in V \subset U$$

dır.

Bir topolojik uzayda bir x noktasının tüm komşuluklar ailesini $\mathcal{U}(x)$ ile göstereceğiz.

X topolojik uzayında her $x \in X$ için x noktasını kapsayan X uzayının her açık alt kümesine x noktasının bir açık komşuluğu denir.

A, X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. A kümesinin tüm kapalı üst kümelerinin arakesitine A nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

A, X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. A kümesinin içinde kalan tüm açık kümelerin birleşimine A kümesinin içi denir ve A^o ile gösterilir.

(X, τ) topolojik uzayında $A \subset X$ herhangi bir alt kümesi olsun.

$$\tau_A = \{A \cap U \,:\, U \in \tau\}$$

olarak tanımlanan, A nın alt kümeleri ailesi A üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye A üzerine indirgenmiş topoloji ve (A, τ_A) topolojik uzayına (X, τ) uzayının bir alt uzayı denir.

Tanım 1.2 *(X, τ) bir topolojik uzay ve X in $\{A_i\}_{i \in I}$ alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $X = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ ise $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesine X uzayının bir örtüsü denir.*

$\forall i \in I$ için A_i kümeleri X uzayının açık alt kümeleri ise, $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesine X uzayının bir açık örtüsü denir.

$\forall i \in I$ için A_i kümeleri X uzayının kapalı alt kümeleri ise, $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesine X uzayının bir kapalı örtüsü denir.

$\forall J \subset I$ sonlu ise, X uzayının $\{A_i\}_{i \in J}$ örtüsüne X uzayının bir sonlu örtüsü denir.

$\{A_i\}_{i \in I}$ ailesinin bir alt ailesi X uzayını örterse, bu alt aileye verilen örtünün bir alt örtüsü denir.

Tanım 1.3 *(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\overline{A} = X$ ise, A alt kümesine (X, τ) topolojik uzayında yoğundur denir.*

Bir topolojik uzayın sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa, bu uzaya ayrılabilir uzay denir.

Tanım 1.4 *(X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{B} \subset \tau$ olsun. Eğer her açık küme $\mathcal{B}$ nın bazı elemanlarının birleşimi şeklinde gösterilebiliyorsa; yani*

$\forall G \in \tau$ *için*

$$G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

ise, $\mathcal{B}$ *ailesine* τ *topolojisi için bir tabandır denir.*

Tanım 1.5 (X, τ) *bir topolojik uzay ve* $x \in X$ *olsun. Eğer her* $U \in \mathcal{U}(x)$ *için* $\exists V \in \mathcal{B}(x) \ni V \subset U$ *ise,* $\mathcal{B}(x)$ *ailesine* (X, τ) *topolojik uzayında* x *noktasının bir yerel tabanı veya komşuluklar tabanı denir.*

Tanım 1.6 (X, τ) *bir topolojik uzay olsun. Eğer her* $x \in X$ *noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı varsa,* X *uzayına birinci sayılabilir uzay denir.*

Tanım 1.7 (X, τ) *bir topolojik uzay olsun.Eğer* τ *topolojisinin sayılabilir bir tabanı varsa,* X *uzayına ikinci sayılabilir uzay denir.*

Tanım 1.8 (X, τ) *bir topolojik uzay olsun. Her* $x, y \in X$ $(x \neq y)$ *için,* $\exists U \in \mathcal{U}(x) \ni y \notin U$ *veya* $\exists V \in \mathcal{U}(y) \ni x \notin V$ *ise, yani bu noktalardan en az birinin diğer noktayı içermeyen bir komşuluğu varsa,* (X, τ) *uzayına* $T_0 -$ *uzayı denir.*

Tanım 1.9 (X, τ) *bir topolojik uzay olsun. Her* $x, y \in X$ $(x \neq y)$ *için,* $\exists U \in \mathcal{U}(x) \ni y \notin U$ *ve* $\exists V \in \mathcal{U}(y) \ni x \notin V$ *ise, yani bu noktaların her birinin diğer noktayı içermeyen bir komşuluğu varsa,* (X, τ) *uzayına* $T_1 -$ *uzayı denir.*

Tanım 1.10 (X, τ) *bir topolojik uzay olsun. Her* $x, y \in X$ $(x \neq y)$ *için,* $\exists U \in \mathcal{U}(x)$ *ve* $\exists V \in \mathcal{U}(y) \ni U \cap V = \emptyset$ *ise,* (X, τ) *uzayına* $T_2 -$ *uzay veya Hausdorff uzay denir.*

Tanım 1.11 (X, τ) *bir topolojik uzay olsun.* X *uzayının* F *herhangi bir kapalı alt kümesi ve* $x \notin F$ *koşulunu sağlayan bir* $x \in X$ *noktası verildiğinde,* $F \subset U, x \in V$ *ve* $U \cap V = \emptyset$ *olacak şekilde* U *ve* V *açık alt kümeleri varsa,* (X, τ) *topolojik uzayına regüler uzay denir.*

Önerme 1.12 *(X,τ) topolojik uzayının regüler uzay olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ noktası ve x in herhangi bir U komşuluğu verildiğinde, $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ olacak şekilde x in bir V komşuluğunun varlığıdır.*

Tanım 1.13 *(X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her kapalı $F \subset X$ ve $x \in X$ $(x \notin F)$ için bir $f : X \to [0,1]$ sürekli fonksiyonu $f(x) = 0$ ve $f(F) = 1$ sağlayacak şekilde bulunabiliyorsa, bu (X,τ) uzayına tam regüler uzay denir.*

(X,τ) topolojik uzayı tam regüler ve T_1 uzayı ise, (X,τ) uzayına Tyconoff uzayı veya $T_{3\frac{1}{2}}$ uzayı denir [1].

Tanım 1.14 *(X,τ) bir topolojik uzay olsun. X uzayının verilen herhangi A ve B ayrık kapalı alt kümeleri için $A \subset U$ ve $B \subset V$ koşulunu sağlayan U ve V ayrık açık kümeleri varsa, (X,τ) topolojik uzayına normal uzay denir.*

Önerme 1.15 *Normallik sürekli kapalı dönüşümler altında invaryanttır.*

Önerme 1.16 *Sıra topolojine göre iyi sıralı her küme normal uzaydır* [2].

Önerme 1.17 *(X,τ) Hausdorff uzayının normal olması için gerek ve yeter koşul her $A, B \subset X$ $(A \cap B = \emptyset)$ kapalı kümeleri için, $f(A) = \{0\}$ ve $f(B) = \{1\}$ koşulunu sağlayan bir $f : X \to [0,1]$ sürekli fonksiyonunun varlığıdır.*

Tanım 1.18 *(X,τ) topolojik uzayının her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü varsa, X uzayına Lindelöf uzay denir.*

Tanım 1.19 *(X,τ) Hausdorff topolojik uzayının her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X uzayına kompakt uzay denir.*

2. PARAKOMPAKT UZAYLAR

Parakompaktlık ilk kez 1944 'de Dieudonné tarafından kompaktlığın doğal bir genelleştirilmesi olarak verilmiştir. Bu kavram A.H.Stone tarafından her metrik uzayın parakompakt olduğunun gösterilmesi ile daha büyük önem kazanmış ve bu sonuç Bing, Smirnov ve Nagata tarafından Genel Metriklenebilme Teoreminin ispatında kullanılmıştır.

Parakompaktlık tanımı verilmeden önce bunun için gerekli olan özel tip örtülerle ilgili bazı tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1 *X bir küme$\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$ bu kümenin iki örtüsü olsun. $\forall U \in \mathcal{U}$ için $\exists V \in \mathcal{V} \ni U \subset V$ oluyorsa,$\mathcal{U}$ örtüsüne $\mathcal{V}$ örtüsünün bir inceliği denir ve $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ ile gösterilir.*

Tanım 2.2 *(X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ noktasının en az bir komşuluğu $\mathcal{U}$ nun en fazla sonlu sayıda elemanı ile kesişiyorsa, $\mathcal{U}$ ailesine yerel sonlu aile denir; yani $\forall x \in X$ için $\exists N \in \mathcal{U}(x)$ komşuluğu var ve en fazla sonlu sayıda $U \in \mathcal{U}$ için $N \cap U \neq \emptyset$ ise, $\mathcal{U}$ ailesine yerel sonludur denir.*

Tanım 2.3 *(X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ noktası $\mathcal{U}$ ailesinin sadece sonlu sayıda elemanının içinde kalıyorsa $\mathcal{U}$ ailesine nokta sonlu aile denir; yani $\forall x \in X$ için $x \in U$ olacak şekildeki $U \in \mathcal{U}$ kümeleri sayısı sonlu ise, $\mathcal{U}$ ailesi nokta sonludur denir.*

Tanım 2.4 *(X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ olsun. Eğer her bir $\mathcal{U}_i$ yerel sonlu aile olmak üzere $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i$ şeklinde yazılabiliyorsa, $\mathcal{U}$ ailesine $\sigma -$ yerel sonlu aile denir.*

Önerme 2.5 *(X,τ) bir topolojik uzay ve $\{A_s : s \in S\}$ X in alt kümeleri nin yerel sonlu bir ailesi ise, $\{\overline{A}_s : s \in S\}$ ailesi de yerel sonludur.*

Kanıt. $x \in X$ herhangi bir nokta olsun. $\{A_s : s \in S\}$ ailesi yerel sonlu olduğundan en fazla sonlu sayıda $s \in S$ $(s = s_1, s_2, ..., s_n)$ için

$$U \cap A_s \neq \emptyset$$

olacak şekilde $\exists U \in \mathcal{U}(x)$ açık komşuluğu vardır. Buradan en fazla sonlu sayıda $s \in S$ $(s = s_1, s_2, ..., s_n)$ için

$$U \cap \overline{A}_s \neq \emptyset$$

olur. O halde, $\{\overline{A}_s : s \in S\}$ ailesi de yerel sonludur.■

Önerme 2.6 (X, τ) *bir topolojik uzay ve* $\{A_s : s \in S\}$ X *in alt kümeleri nin yerel sonlu bir ailesi ise,* $\cup\{\overline{A}_s : s \in S\} = \overline{\cup\{A_s : s \in S\}}$ *dir. Bunun sonucu olarak, kapalı kümelerin yerel sonlu bir ailesinin birleşimi de kapalıdır.*

Kanıt. Her $s \in S$ için $\overline{A}_s \subset \overline{\cup\{A_s : s \in S\}}$ olduğundan $\cup\{\overline{A}_s : s \in S\}$ $\subset \overline{\cup\{A_s : s \in S\}}$ dır.

Diğer yandan $x \in \overline{\cup\{A_s : s \in S\}}$ olsun. Her $U \in \mathcal{U}(x)$ için $U \cap (\cup\{A_s : s \in S\}) \neq \emptyset$ dir. $\{A_s : s \in S\}$ ailesi yerel sonlu olduğundan sonlu sayıdaki A_s lerin haricindeki A_s ler için

$$U_* \cap A_s = \emptyset$$

olacak şekilde $\exists U_* \in \mathcal{U}(x)$ vardır. Buradan,

$$U_* \cap \bigcup\{A_s : s \neq s_1, s_2, ..., s_n\} = \emptyset$$

dolayısıyla

$$x \notin \overline{\bigcup\{A_s : s \neq s_1, s_2, ..., s_n\}}$$

dır.

$$x \in \overline{\bigcup\{A_s : s \in S\}} = \overline{\bigcup\{A_{s_i} : i = 1, 2, ..., n\}} \cup \overline{\bigcup\{A_s : s \neq s_1, s_2, ..., s_n\}}$$

olduğundan

$$x \in \overline{\bigcup \{A_{s_i} : i = 1, 2, ..., n\}} = \bigcup \{\overline{A}_{s_i} : i = 1, 2, ..., n\}$$

dır. Buradan en az bir $k \in \{1, 2, ..., n\}$ için $x \in \overline{A}_{s_k}$, dolayısıyla $x \in \bigcup \{\overline{A}_s : s \in S\}$ elde edilir.■

Tanım 2.7 *Bir (X, τ) Hausdorff topolojik uzayının her açık örtüsünün yerel sonlu açık inceliği varsa, (X, τ) topolojik uzayına parakompakt uzay denir.*

Açıktır ki, her kompakt uzay parakompakttır. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin, sonlu olmayan bir ayrık uzay için tüm tek nokta kümelerinin ailesi yerel sonlu açık örtüdür ve her açık örtünün inceliğidir; bu nedenle sonlu olmayan ayrık uzay kompakt olmayan parakompakt uzaydır. Başka bir örnek; bilinen topoloji ile $\mathbb{R}$ kompakt olmayan parakompakt bir uzaydır. $\mathbb{R}$ nin bir açık örtüsü $\{G_s : s \in S\}$ olsun. $\bigcup_{s \in S} G_s = \mathbb{R}$ ve aynı zamanda $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1]$ dir. Diğer yandan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $[n, n+1]$ aralığı kompakt, $\bigcup_{s \in S} G_s \supset [n, n+1]$ olduğundan bu aralıkların her birini sonlu sayıda $G_s^{(n)}$ kümeleriyle örtebiliriz. O zaman, tüm $G_s^{(n)} \cap (n-1, n+2)$ açık kümelerin ailesi $\{G_s : s \in S\}$ nin yerel sonlu açık inceliği olur. Bu nedenle $\mathbb{R}$ parakompakttır.

Daha sonra, genel olarak tüm metrik uzayların parakompakt olduğunu göreceğiz. Dolayısıyla kompakt olmayan her metrik uzay, kompakt olmayan parakompakt uzaydır. Ayrık metrikle sonlu olmayan her uzay, kompakt olmayan parakompakt uzaydır.

Teorem 2.8 *Parakompakt uzayların kapalı alt uzayları parakompakttır* [3].

Kanıt. (X, τ) bir parakompakt uzay ve A, (X, τ) uzayının herhangi bir kapalı alt kümesi olsun. A kümesi üzerinde alt uzay topolojisini tanımlayalım. (A, τ_A) alt topolojik uzayı $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ şeklinde tanımlıdır. (A, τ_A) uzayının Hausdorff olduğu açıktır. $\mathcal{U}$, (A, τ_A) nın açık bir örtüsü olsun. Alt uzay topolojisi tanımından dolayı $\forall U \in \mathcal{U}$ için

$$U = A \cap V_U$$

olacak şekilde $\exists V_U \in \tau$ vardır. $\mathcal{V} = \{V_U : U \in \mathcal{U}\} \cup \{X \backslash A\}$ olsun. $\mathcal{V}$, (X, τ) nun bir açık örtüsüdür. (X, τ) parakompakt olduğundan $\mathcal{V}$ nin açık yerel sonlu bir $\mathcal{W}$ inceliği vardır. Şimdi kolayca görülür ki, $\{A \cap W : W \in \mathcal{W}\}$ ailesi de A nın yerel sonlu açık örtüsüdür ve $\mathcal{U}$ nun da bir inceliğidir. O halde (A, τ_A) kapalı alt uzayı da parakompakttır.■

Teorem 2.9 *Her Hausdorff, regüler, Lindelöf uzay parakompakttır.*

Kanıt. X Lindelöf uzayının bir açık örtüsü $\mathcal{V}$ olsun. X regüler bir uzay olduğundan Önerme 1.14 den $\forall x \in X$ ve $V_x \in \mathcal{V}$ için

$$x \in U_x \subset \overline{U}_x \subset V_x$$

olacak şekilde $\exists U_x$ açık komşuluğu vardır. X Lindelöf uzay olduğundan her açık örtünün sayılabilir bir alt örtüsü vardır. X uzayının $\{U_x\}_{x \in X}$ açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü olarak $\{U_{x_i}\}_{i=1}^{\infty}$ ailesini alalım. $i = 1, 2, ...$ için

$$W_i = V_{x_i} \backslash (\overline{U}_{x_1} \cup \overline{U}_{x_2} \cup ... \cup \overline{U}_{x_{i-1}})$$

kümeleri açıktır ve $i(x)$, $\forall x \in X$ için

$$x \in V_{x_{i(x)}}$$

koşulunu sağlayan en küçük tam sayı olmak üzere

$$x \in V_{x_{i(x)}} \backslash (\overline{U}_{x_1} \cup \overline{U}_{x_2} \cup ... \cup \overline{U}_{x_{i(x)-1}})$$

olduğundan $x \in W_{i(x)}$ olur. Böylece $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ ailesi X uzayının bir örtüsünü oluşturur. $\forall W_i \in \{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ için

$$W_i \subset V_{x_i}$$

olacak şekilde $\exists V_{x_i} \in \mathcal{V}$ vardır. Buradan görülürki $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ örtüsü $\mathcal{V}$ örtüsünün inceliğidir. $i > j$ için

$$U_{x_j} \cap W_i = \emptyset$$

olduğundan $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ örtüsü yerel sonludur. Böylece her Hausdorff, regüler, Lindelöf uzay parakompakttır.■

Tanım 2.10 *$\mathcal{U}$, X topolojik uzayının alt kümelerinin bir ailesi olsun. $\forall x \in X$ için x in en az bir komşuluğu $\mathcal{U}$ nun en fazla bir öğesi ile kesişiyorsa, $\mathcal{U}$ ya ayrık aile denir. Ayrık ailelerin sayılabilir birleşimi olan bir aileye de $\sigma -$ ayrık aile denir.*

Teorem 2.11 (Stone Teoremi Bakınız [4]) *Metriklenebilir bir uzayın her açık örtüsünün hem yerel sonlu hemde σ-ayrık bir açık inceliği vardır.*

Kanıt. X metriklenebilir bir uzay ve $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ X uzayının bir açık örtüsü olsun. X uzayının metriğini ρ ve S damgalayan kümesini de "$\leq$" bağıntısıyla iyi sıralı küme olarak alalım. Tümevarımla $\mathcal{V}_i = \{V_{s,i}\}_{s\in S}$ ailesini şöyle tanımlayalım:

$V_{s,i}$, aşağıdaki sıralanan koşulları sağlayan öyle $c \in X$ ler için

$$V_{s,i} = \underset{i\in \mathbf{N}^+}{\cup} B(c, \frac{1}{2^i})$$

olsun ki;

(1) s, $c \in U_s$ olacak şekilde S nin en küçük elemanı olsun.

(2) $j < i$ ve $t \in S$ için $c \notin V_{t,j}$

(3) $B(c, \frac{3}{2^i}) \subset U_s$

Bu şekilde tanımlanan $V_{s,i}$ kümeleri açık kümelerdir ve açıktır ki $V_{s,i} \subset U_s$ dir. (Çünkü $x \in V_{s,i} \Rightarrow \exists c\, var \ni x \in B(c, \frac{1}{2^i}) \Rightarrow \rho(x,c) < \frac{1}{2^i}$ ve $\frac{1}{2^i} < \frac{3}{2^i}$ olduğundan $\rho(x,c) < \frac{3}{2^i}$, yani $x \in B(c, \frac{3}{2^i})$ dir. Böylece (3)'e göre $x \in U_s$ dir.)

Şimdi $\mathcal{V} = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} \mathcal{V}_i$ ailesinin X uzayının bir örtüsü olduğunu gösterelim:

$x \in X$ verilsin. $x \in U_s$ olacak şekilde S kümesinin en küçük s öğesini ve $B(c, \frac{3}{2^i}) \subset U_s$ olacak şekilde i doğal sayısını alalım. $j < i$ ve $t \in S$ için

$$x \in V_{t,j} \text{ veya } x \notin V_{t,j}$$

dir. Eğer $x \notin V_{t,j}$ ise (1), (2) ve (3) koşulları birlikte x için sağlanmış olacağından $x \in V_{s,i}$ olur. Böylece $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i$ ailesinin X uzayının bir açık örtüsü olduğu görülür. Ayrıca $V_{s,i} \subset U_s$ olduğundan $\mathcal{V}$ örtüsü $\{U_s\}_{s \in S}$ örtüsünün bir açık inceliğidir. Bu inceliğin $\sigma - ayrık$ olduğunu gösterelim.

$\forall\, i$ için $\mathcal{V}_i$ ailesinin ayrık incelik olduğunu göstermek yetecektir. Bir $x \in X$ için $B(x, \frac{1}{2^{i+1}})$ açık topunun $\mathcal{V}_i$ ailesine ait iki kümeyle kesiştiğini kabul edelim. Bu kümeler $s_1 < s_2$ olmak üzere, $V_{s_1,i}$ ve $V_{s_2,i}$ olsunlar.

$$B(x, \tfrac{1}{2^{i+1}}) \cap V_{s_1,i} \neq \emptyset \quad \text{ve} \quad B(x, \tfrac{1}{2^{i+1}}) \cap V_{s_2,i} \neq \emptyset$$

$$\exists\, x_1 \in B(x, \tfrac{1}{2^{i+1}}) \Rightarrow \rho(x, x_1) < \tfrac{1}{2^{i+1}} \quad \text{ve } \exists\, c_1 \text{ için } x_1 \in B(c_1, \tfrac{1}{2^i}) \subset V_{s_1,i}$$

$$\exists\, x_2 \in B(x, \tfrac{1}{2^{i+1}}) \Rightarrow \rho(x, x_2) < \tfrac{1}{2^{i+1}} \quad \text{ve } \exists\, c_2 \text{ için } x_2 \in B(c_2, \tfrac{1}{2^i}) \subset V_{s_2,i}$$

Ayrıca

$$B(c_1, \tfrac{3}{2^i}) \subset U_{s_1} \quad \text{ve} \quad B(c_2, \tfrac{3}{2^i}) \subset U_{s_2}$$

dir. $s_1 < s_2$ olduğundan $c_2 \notin U_{s_1}$ dir. Böylece $x \notin B(c_1, \frac{3}{2^i})$ yani $\rho(c_1, c_2) \geq \frac{3}{2^i}$ dir. Bu durumda

$$\rho(c_1, c_2) \leq \rho(c_1, x_1) + \rho(x_1, c_2) \leq \rho(c_1, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, c_2)$$

veya

$$\rho(x_1, x_2) \geq \rho(c_1, c_2) - \rho(c_1, x_1) - \rho(x_2, c_2) > \frac{3}{2^i} - \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^i}$$

dir. Oysa diğer yandan,

$$\rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_1, x) + \rho(x, x_2) < \frac{1}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^i}$$

dir. Bu sonuç bir çelişki oluşturur. O halde $\forall\, x \in X$ noktasının en az bir komşuluğu $B(x, \frac{1}{2^{i+1}})$,$\mathcal{V}_i$ ailesinin en fazla bir kümesiyle kesişebilir, böylece $\mathcal{V}_i$ ailesi ayrıktır. Sonuç olarak $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i$ ailesi $\sigma -$ ayrıktır.

Şimdide $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i$ ailesinin yerel sonlu olduğunu kanıtlayalım. $x \in X$ için

$$x \in V_{t,j}$$

olacak şekilde $\exists t \in S$ ve j doğal sayısı vardır. $V_{t,j}$ açık küme olduğundan

$$B(x, \frac{1}{2^k}) \subset V_{t,j}$$

olacak şekilde $\exists k$ doğal sayısı vardır. Şimdi $i \geq j+k$ ve $s \in S$ olmak üzere

$$B(x, \frac{1}{2^{j+k}}) \cap V_{s,i} = \emptyset$$

olduğunu gösterirsek, x noktasının $B(x, \frac{1}{2^{j+k}})$ komşuluğunun $\mathcal{V}$ nin en fazla $j+k-1$ tane öğesiyle kesişebileceği görülür. Tersini kabul edelim. Yani arakesite ait bir $z \in X$ bulunsun.

$$z \in B(x, \tfrac{1}{2^{j+k}}) \cap V_{s,i} \Rightarrow z \in B(x, \tfrac{1}{2^{j+k}}) \quad \text{ve} \quad \exists c\,,\, z \in B(c, \tfrac{1}{2^i}) \subset V_{s,i}$$

$i \geq j+k$, $s \in S$ ve $V_{s,i}$ nin tanımındaki c için $i > j$ olduğundan **(2)** ye göre,

$$c \notin V_{t,j}$$

dir. Dolayısıyla

$$c \notin B(x, \frac{1}{2^k})$$

buradan

$$\rho(x,c) \geq \frac{1}{2^k}$$

dir. Diğer taraftan

$$j+k \geq k+1\,,\, i \geq k+1 \quad \text{ve} \quad z \in B(x, \tfrac{1}{2^{j+k}}) \cap B(c, \tfrac{1}{2^i})$$

olduğundan

$$z \in B(x, \tfrac{1}{2^{j+k}}) \quad \text{ve} \quad z \in B(c, \tfrac{1}{2^i})$$

$$\rho(x,c) \leq \rho(x,z) + \rho(z,c) < \frac{1}{2^{j+k}} + \frac{1}{2^i} \leq \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}$$

olur. Bu sonuç

$$\rho(x,c) \geq \frac{1}{2^k}$$

oluşuyla çelişir. Böylece teoremin kanıtı tamamlanmış olur.■

Sonuç 2.12 *Her metriklenebilir uzay parakompakttır.*

Kanıt. Teorem 2.11 in bir sonucu olarak kolayca görülür.■

Her parakompakt uzay metriklenebilir veya kompakt olmayabilir. Şimdi metriklenebilir olmayan, kompakt olmayan fakat parakompakt olan bir topoloji örneği verelim.

Örnek 2.13 [5] $X = \mathbb{R}$ *olmak üzere,* $\mathcal{B} = \{[a,b) : a,b \in X\}$ *ailesi* X *üzerinde bir* τ *topolojisi için tabandır. Bu topolojiye sağ yarı açık aralık topolojisi veya alt limit topolojisi denir. Bu topolojiye göre* $[a,b)$, (a,b) , $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$, $[a,+\infty)$ *aralıkları açık kümelerdir; çünkü sözgelişi* $(a,b) = \bigcup\{[\alpha,b) : a < \alpha < b\}$ *olarak yazılabileceğinden* (a,b) *aralığı* τ *topolojisine göre açık kümedir.* $(-\infty,a)$, $[a,b)$, $[a,+\infty)$ *aralıkları hem açık hem kapalı kümelerdir. Açıktır ki,* τ *topolojisi* $\mathbb{R}$ *nin bilinen topolojisinden daha kuvvetli bir topolojidir. Bu nedenle Hausdorff tur. Bir* $x \in X$ *için* $\{[x, x+\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^+\}$ *aileleri sayılabilir yerel taban olduğundan,* τ *topolojisi* 1. *sayılabilirdir. Fakat* 2. *sayılabilir değildir. Çünkü, eğer* $S = \{[x_i, y_i) : i \in \mathbb{N}\}$ *ailesi taban elemanlarının sayılabilir bir ailesi ise,* $\exists a \in X$ *için* $a \neq x_i$, $i \in \mathbb{N}$ *dir. Bu nedenle, bir* $b > a$ *için* $[a,b)$ *aralığı* S *nin öğelerinin bir birleşimi olarak yazılamaz. O halde,* τ *topolojisi* 2. *sayılabilir değildir. Diğer taraftan rasyonel sayılar* τ *topolojisine göre de sayılabilir yoğun küme olduğundan,* τ *ayrılabilir topolojidir. Eğer* τ *metriklenebilir olsa idi, ayrılabilir olduğundan* 2. *sayılabilir olurdu. Öyleyse* τ *metriklenebilir değildir.* (X,τ) *uzayı kompakt da değildir. Çünkü sözgelişi* $\{(-n,n) : n \in \mathbb{N}\}$ *açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü yoktur. Fakat* (X,τ) *Lindelöftür. Bunu şöyle gösterelim.* $\{U_\alpha\}$, (X,τ) *nun* *bir açık örtüsü olsun.* U_α^o *ile* U_α *nın* $\mathbb{R}$ *nin bilinen topolojisine göre iç noktalar kümesini gösterelim.* $U = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha^o$ *dersek,* U *açık bir kümedir ve* $\mathbb{R}$ *bilinen topoloji ile Lindelöf olduğundan* U *da Lindelöftür. Dolayısıyla* U *yu* U_α^o *ların sayılabilir sayıdakileriyle örtebiliriz. Şimdi* $A = X \backslash U$ *kümesinin sayılabilir olduğunu gösterirsek,* A *yı da* $\{U_\alpha\}$ *nın sayılabilir bir alt ailesiyle örteriz ve böylece* (X, τ) *nun* $\{U_\alpha\}$ *açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü seçilmiş olur.*

Şimdi A *nın sayılabilir küme olduğunu gösterelim.* $p \in A$ *olsun.* $\exists\, x_p > p$ *için* $(p, x_p) \cap A = \emptyset$. *Fakat her* $p \in A$ *için bulacağımız* (p, x_p) *aralıkları ayrık olacaklarından bunların sayısı sayılamaz çoklukta olamaz.*

(X, τ) *uzayı regüler ve Lindelöf olduğundan parakompakt olur.*

Önteorem 2.14 X *bir parakompakt uzay ve* A, B X *uzayının iki kapalı alt kümesi olsun. Eğer* $\forall x \in B$ *için,* $A \subset U_x$, $x \in V_x$ *ve* $U_x \cap V_x = \emptyset$ *olacak şekilde* U_x, V_x *açık kümeleri varsa,* $A \subset U$, $B \subset V$ *ve* $U \cap V = \emptyset$ *olacak şekilde* U, V *açık kümeleride vardır.*

Kanıt. $\{V_x\}_{x \in B} \cup \{X \backslash B\}$ ailesi X parakompakt uzayının bir açık örtüsü dür. X uzayı parakompakt olduğundan bu açık örtünün, yerel sonlu açık bir inceliği vardır. $\{W_s\}_{s \in S}$, $\{V_x\}_{x \in B} \cup \{X \backslash B\}$ açık örtüsünün yerel sonlu açık inceliği olsun, $S_0 = \{s \in S : W_s \cap B \neq \emptyset\}$ kümesini tanımlayalım. Bu durumda $\forall s \in S_0$ için

$$A \cap \overline{W}_s = \emptyset \text{ ve } B \subset \bigcup_{s \in S_0} W_s$$

olur. $\{W_s\}_{s \in S}$, $\{V_x\}_{x \in B} \cup \{X \backslash B\}$ örtüsünün inceliği olduğundan $\forall s \in S_0$ için

$$W_s \cap B \neq \emptyset$$

ise $\exists x \in B$ için

$$W_s \cap V_x \neq \emptyset$$

olduğundan

$$W_s \cap X \backslash B = \emptyset$$

dir. $s \in S_0$ için $W_s \cap B \neq \emptyset$ olduğundan

$$W_s \subset V_x$$

olacak şekilde $\exists x \in B$ vardır. Bu V_x ve karşılık gelen U_x için

$$A \subseteq U_x \; ve \; U_x \cap V_x = \emptyset$$

olduğundan

$$U_x \cap W_s = \emptyset \text{ veya } A \cap \overline{W}_s = \emptyset$$

olur. Böylece $U = X \backslash \underset{s \in S_0}{\cup} \overline{W}_s$ ve $V = \underset{s \in S_0}{\cup} W_s$ dersek, U, V açık küme lerdir. Ayrıca $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ için

$$U \cap V = \emptyset$$

olur.■

Teorem 2.15 *Her parakompakt uzay normaldir.*

Kanıt. X parakompakt uzay ve $B \subseteq X$ kapalı alt küme olsun. $y \notin B$ için $A = \{y\}$, B kapalı küme ve X Hausdorff olduğundan $x \in B$ için $\exists U_x$, V_x açık kümeleri vardır ki, $A = \{y\} \in U_x$, $x \in V_x$ ve $U_x \cap V_x = \emptyset$ olur.Önteorem 2.14 e göre , öyle U, V açık kümeleri bulunur ki,

$$A = \{y\} \subset U \; , B \subseteq V \quad \text{ve} \quad U \cap V = \emptyset$$

olur. O halde, X uzayı regülerdir. Şimdi X in normal olduğunu gösterelim. A, B kapalı ayrık kümeler olsunlar. X regüler olduğundan $\forall x \in B$ için, U_x, V_x açık kümeleri vardır öyle ki;

$$A \subseteq U_x \; , x \in V_x \text{ ve } U_x \cap V_x = \emptyset$$

dir. Böylece Önteorem 2.14 ün koşulları sağlandığından

$$A \subseteq U \,,\, B \subseteq V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde U ve V açık kümeleri vardır. O halde X uzayı normaldir.■

Tanım 2.16 *Ω iyi sıralı sayılamaz bir küme olsun. Ω kümesi şu koşulları sağlasın: Ω kümesinin en büyük elemanı w_1 ve $\alpha \in \Omega$ ve $\alpha < w_1$ ise $\{\beta \in \Omega \,:\, \beta \leq \alpha\}$ kümesi sayılabilir olsun. $\Omega_0 = \Omega \backslash \{w_1\}$ olarak tanımlanan Ω_0 kümesine sayılabilir ordinaller kümesi denir.*

Her parakompakt uzay normaldir fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Aşağıda ki örnekte Önerme 1.16 dan dolayı sıralı topoloji ile normal olan Ω_0 sayılabilir ordinaller uzayının parakompakt olmadığını göstereceğiz.

Örnek .2.17 [1] *Ω_0 parakompakt değildir.*

Kabul edelim ki, Ω_0 parakompakttır. O zaman

$$\beta \in \Omega_0 \,,\quad U_\beta = \{\gamma \in \Omega_0 \,:\, \gamma < \beta\}$$

olmak üzere, $\{U_\beta : \beta \in \Omega_0\}$ açık örtüsünün yerel sonlu açık bir $\{V_a : a \in A\}$ inceliği vardır. $\forall \alpha \in \Omega_0$ için

$$\exists a \in A \;\ni \alpha \in V_a \quad \text{ve} \quad \gamma_\alpha < \alpha \;\ni (\gamma_\alpha \,, \alpha] \subset V_a$$

dır. Şimdi en az bir β_0 ın sonsuz çoklukta α için $(\gamma_\alpha \,, \alpha]$ ya ait olduğunu, böylece de β_0 ın sonsuz çoklukta V_a ya ait olduğunu gösterirsek bir çelişki elde etmiş oluruz. Çünkü $\{V_a \,:\, a \in A\}$ ailesi yerel sonlu idi. Eğer böyle bir $\beta_0 \in \Omega_0$ yoksa, $\forall \beta_0 \in \Omega_0$ için

$$\{\beta \,:\, \forall \alpha \geq \beta \,,\, \gamma_\alpha \geq \beta_0\}$$

kümesi boş küme değildir. Bu kümenin en küçük öğesi $\alpha(\beta_0)$ olsun. Şimdi $\alpha_0 = \alpha(0)$ ve $\alpha_n = \alpha(\alpha_{n-1})$ $n \geq 1$ olarak tanımlayalım. Açıktır ki,

$$\alpha \geq \alpha_n \;,\; \gamma_\alpha \geq \alpha_{n-1}$$

dir. Şimdi $\alpha_* = \sup\{\alpha_n\}$ *diyelim.* $\alpha_* \in \Omega_0$ *dır.* $\forall n$ için

$$\alpha_* \geq \alpha_n \text{ ve } \gamma_{\alpha_*} \geq \alpha_{n-1}$$

dir.Buradan

$$\gamma_{\alpha_*} \geq \alpha_*$$

dır. Bu sonuç çelişkidir; çünkü her α *için* $\gamma_\alpha < \alpha$ *olarak alınmıştı.*

Teorem 2.18 *X topolojik uzayı regüler uzay ise aşağıdaki ifadeler birbirine denktirler.*

(i) *X uzayı parakompakttır.*

(ii) *X uzayının her açık örtüsünün açık* $\sigma-$ *yerel sonlu bir inceliği vardır.*

(iii) *X uzayının her açık örtüsünün (keyfi kümelerden oluşan) yerel sonlu bir inceliği vardır.*

(iv) *X uzayının her açık örtüsünün kapalı yerel sonlu bir inceliği vardır.*

Kanıt. (i)$\Rightarrow$(ii) X uzayı parakompakt uzay ve $\mathcal{U}$, X in bir açık örtüsü olsun. Her yerel sonlu örtü $\sigma-$yerel sonlu olduğundan $\mathcal{U}$ açık örtüsünün açık $\sigma-$yerel sonlu inceliği vardır.

(ii)$\Rightarrow$(iii) $\mathcal{U}$ ailesi, X uzayının bir açık örtüsü olsun. Hipotezden dolayı $\mathcal{U}$ örtüsünün açık $\sigma-$yerel sonlu bir $\mathcal{V}$ inceliği vardır. Yani $\mathcal{V}_n$ aileleri açık yerel sonlu olmak üzere

$$\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n \text{ ve } \mathcal{V} \prec \mathcal{U}$$

dir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n = \{V_{n_s} : s \in S\}$ olsun. $W_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{n_s}$ olarak tanımlayalım. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ailesi X uzayının bir açık örtüsüdür. $A_1 = W_1$ ve $A_n = W_n - \bigcup_{i<n} W_i$ şeklinde tanımlayalım. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ailesi yerel sonlu mudur?

$\forall x \in X$ için $\exists k \in \mathbb{N}$ vardır $\ni x \in W_k$ olur. W_k , $x \in X$ in bir açık komşuluğudur ve sonlu tane A_n ile kesişir. (A_n lerin tanımından $p > k$ için $A_p \cap W_k = \emptyset$) $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n \subset W_n$$

dir. O halde $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ailesi $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ailesinin bir inceliğidir. $\mathcal{A} = \{A_n \cap V_{n_s} : n \in \mathbb{N},\ s \in S\}$ ailesini oluşturalım. $\mathcal{A}$ ailesi yerel sonlu mudur?

$\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi yerel sonlu olduğundan, $\forall x \in X$ için $\exists N_x \in \tau(x)$ vardır öyle ki N_x en fazla sonlu tane A_n ile kesişir ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{V}_n$ ailesi yerel sonlu olduğundan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x \in X$ in en az bir komşuluğu sonlu sayıda V_{n_s} ile kesişir. Öyleyse $\mathcal{A}$ ailesi yerel sonludur ve bir $x \in X$ noktasının en az bir N komşuluğu en fazla sonlu tane $A_n \cap V_{n_s}$ ile kesişir. $\mathcal{A}$ ailesi $\mathcal{V}$ ailesinin bir inceliği midir?

$A_n \cap V_{n_s} \subset V_{n_s}$ dir. O halde $\mathcal{A} \prec \mathcal{V}$ ve $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ olduğundan $\mathcal{A} \prec \mathcal{U}$ olur.

(iii)$\Rightarrow$(iv) $\mathcal{U}$ ailesi X uzayının bir açık örtüsü olsun. $x \in X$ için

$$x \in U_x$$

olacak şekilde $U_x \in \mathcal{U}$ vardır. X uzayımız regüler olduğundan Önerme 1.14 den

$$x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset U_x \qquad (*)$$

olacak şekilde $\exists V_x$ açık kümesi vardır. $\mathcal{V} = \{V_x : x \in X\}$ ailesi X uzayının bir açık örtüsüdür. Hipotezimizden dolayı $\mathcal{V}$ açık örtüsünün bir yerel sonlu inceliği vardır. Bu aile $\mathcal{A} = \{A_s : s \in S\}$ olsun. $\mathcal{A} = \{A_s : s \in S\}$ ailesi yerel sonlu olduğundan Önerme 2.5 gereğince $\mathcal{A}_* = \{\overline{A}_s : s \in S\}$ aileside yerel sonludur. $\mathcal{A} = \{A_s : s \in S\}$ ailesi $\mathcal{V} = \{V_x : x \in X\}$ ailesinin yerel sonlu inceliği olduğundan $A_s \in \mathcal{A}$ için

$$A_s \subset V_x$$

olacak şekilde $\exists V_x \in \mathcal{V}$ vardır. $(*)$ dan dolayı

$$\overline{A}_s \subset \overline{V}_x \subset U_x$$

olur. Buradan

$$\overline{A}_s \subset U_x$$

dir. O halde $\mathcal{A}_*$ ailesi $\mathcal{U}$ ailesinin kapalı yerel sonlu inceliğidir.

(iv)$\Longrightarrow$(i) $\mathcal{U}$, X uzayının bir açık örtüsü ve $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ açık örtüsünün yerel sonlu kapalı bir inceliği olsun. $\forall x \in X$ için W_x , x noktasının sadece sonlu sayıda $V \in \mathcal{V}$ kümesini kesen açık komşuluk olmak üzere $\mathcal{W} = \{W_x : x \in X\}$ açık örtüsünü ele alalım. $\mathcal{A}$, $\mathcal{W}$ örtüsünün yerel sonlu kapalı bir inceliği olsun. $\forall V \in \mathcal{V}$ için;

$$V_* = X \setminus \cup \{A \in \mathcal{A} : A \cap V = \emptyset\}$$

olarak tanımlayalım. V_* kümesi açık bir kümedir. Çünkü kapalı kümelerden oluşan yerel sonlu bir ailenin birleşimi de kapalıdır. $\mathcal{V}$, X uzayının bir örtüsü olduğundan $\forall x \in X$ için

$$x \in V$$

olacak şekilde bir $V \in \mathcal{V}$ vardır. $x \in V$ olduğundan

$$x \notin \cup \{A \in \mathcal{A} : A \cap V = \emptyset\}$$

o halde

$$x \in V_* = X \setminus \cup \{A \in \mathcal{A} : A \cap V = \emptyset\}$$

dir. Böylece $\mathcal{V}_* = \{V_* : V \in \mathcal{V}\}$ ailesinin X uzayının açık bir örtüsü olduğunu gösterdik.

$\mathcal{V}_*$ örtüsünün yerel sonlu olduğunu görelim. $\mathcal{A}$ ailesi yerel sonlu olduğundan $x \in X$ için $\exists x \in N_x$ komşuluğu vardır öyleki en fazla sonlu sayıda $A_i \in \mathcal{A}$ ile kesişir. N_x komşuluğunun kesişimi boştan farklı olan $A_i \in \mathcal{A}$ kümeleri $A_1, A_2, ..., A_n$ olsun. $N_x \cap V_* \neq \emptyset$ ise en az bir $k = 1, 2, ..., n$ için

$$A_k \cap V_* \neq \emptyset$$

dir. Buradan

$$A_k \cap V \neq \emptyset$$

olur. Yani her bir A_k sonlu sayıda V ile kesişir. Böylece sonlu sayıda V_* hariç geriye kalan V_* lar için

$$U \cap V_* = \emptyset$$

dur. Buradan görülür ki $\mathcal{V}_*$ ailesi yerel sonludur. $\forall V \in \mathcal{V}$ için

$$V \subset U$$

olacak biçimde bir $U \in \mathcal{U}$ seçelim. $\mathcal{U}_* = \{U \cap V_* : V \in \mathcal{V}\}$ ailesi $\mathcal{U}$ örtüsünün yerel sonlu açık inceliği olur.■

Tanım 2.19 *X uzayından kapalı birim I aralığına tanımlı, sürekli fonksiyonların bir ailesi $\{f_s\}_{s\in S}$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $\sum\limits_{s\in S} f_s(x) = 1$ oluyorsa, $\{f_s\}_{s\in S}$ fonksiyon ailesine X uzayı üzerinde birimin bir parçalanışı denir.*

$\sum\limits_{s\in S} f_s(x) = 1$ eşitliğinin anlamı sabit bir $x_0 \in X$ için sadece sayılabilir çoklukta f_s fonksiyonları x_0 noktasında sıfır değerini almaz ve $\{s_1, s_2, \ldots s_k, \ldots\} = \{s \in S : f_s(x_0) \neq 0\}$ olmak üzere $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_{s_i}(x)$ serisi 1 e yakınsar.

X üzerinde $\{f_s\}_{s\in S}$ birimin bir parçalanışı olmak üzere, $\{f_s^{-1}((0,1])\}_{s\in S}$ örtüsü X uzayında yerel sonlu ise, $\{f_s\}_{s\in S}$ fonksiyon ailesine X uzayında yerel sonludur denir. Bu demektir ki sabit bir $x_0 \in X$ için

$$\forall x \in U_0 \quad \text{ve} \quad s \in S \backslash S_0 \quad \text{iken} \quad f_s(x) = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{k} f_{s_i}(x) = 1$$

olacak şekilde x_0 noktasının U_0 komşuluğu ve sonlu bir $S_0 = \{s_1, s_2, \ldots s_k\} \subset S$ kümesi vardır.

$\mathcal{A}$,X uzayının bir örtüsü ve $\{f_s\}_{s\in S}$, X uzayı üzerinde birimin bir parçalanışı olsun. X uzayının $\{f_s^{-1}((0,1])\}_{s\in S}$ örtüsü $\mathcal{A}$ örtüsünün bir inceliği ise, $\{f_s\}_{s\in S}$ fonksiyon ailesine $\mathcal{A}$ örtüsüne etkiyen (*subordinate*) birimin parçalanışı denir.

Örnek 2.20 [6] *$\mathbb{R}$ de bilinen topoloji ile, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere*

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunu

$$f_n(x) = \begin{cases} x-n\,, & n < x \leq n+1 \\ -x+n+2, & n+1 < x < n+2 \\ 0, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $a \in \mathbb{R}$ için $n \in \mathbb{Z}$ tam sayısı $n \leq a \leq n+1$ olacak şekilde seçilebilir. $\varepsilon = \min\{\frac{a-n}{2}, \frac{n+1-a}{2}\}$ alınırsa, sadece $B(a,\varepsilon) \cap f_{n-1}^{-1}((0,1]) \neq \emptyset$ ve $B(a,\varepsilon) \cap f_n^{-1}((0,1]) \neq \emptyset$ olur. Bu nedenle $\mathbb{R}$ de $(f_n^{-1}(0,1])_{n\in\mathbb{Z}}$ ailesi yerel sonludur; yani $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ fonksiyon ailesi yerel sonludur. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $f_n \geq 0$ ve $x \in \mathbb{R}$ için bir $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq x < n+1$ olacak şekilde bulunabileceğinden, $i \neq n-1, n$ için $f_i(x) = 0$ dır. Böylece,

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(x) = f_{n-1}(x) + f_n(x) = (-x+n+1) + (x-n) = 1$$

dir. O halde, $\forall n \in \mathbb{Z}$ için f_n sürekli bir fonksiyon olduğundan $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ailesi $\mathbb{R}$ de bilinen topolojiye göre birimin parçalanışıdır.

Önerme 2.21 *X regüler uzayının her açık örtüsünün (keyfi kümelerden oluşan) yerel sonlu bir inceliği varsa , X uzayının her $\{U_s\}_{s\in S}$ açık örtüsü için X in kapalı yerel sonlu öyle bir $\{F_s\}_{s\in S}$ örtüsü, her $s \in S$ için $F_s \subset U_s$ olacak şekilde vardır.*

Kanıt. $\{U_s\}_{s\in S}$, X uzayının bir açık örtüsü olsun. X uzayı regüler olduğundan $x \in U_s$ için

$$x \in W_x \subset \overline{W}_x \subset U_s$$

olacak şekilde $\exists W_x$ açık kümesi vardır. Buradan $\mathcal{W} = \{W_x\}_{x\in X}$ ailesi X uzayının bir açık örtüsü ve $\{\overline{W}_x\}_{x\in X}$ ailesi $\{U_s\}_{s\in S}$ ailesinin bir inceliğidir. Hipotezden dolayı $\mathcal{W}$ örtüsünün $\{A_t\}_{t\in T}$ yerel sonlu inceliği vardır. $\forall t \in T$ için

$$\overline{A}_t \subset U_{s(t)}$$

olacak şekilde bir $s(t) \in S$ seçelim. $U_{s(t)}$ içinde kalan A_t ler tek olmayabilir.

$F_s = \bigcup_{s=s(t)} \overline{A}_t$ kümesini tanımlayalım. $\{A_t\}_{t\in T}$ ailesi yerel sonlu olduğundan Önerme 2.5 den $\{\overline{A}_t\}_{t\in T}$ ailesi de yerel sonludur. $\{\overline{A}_t\}_{t\in T}$ ailesi yerel sonlu olduğundan, $\{F_s\}_{s\in S}$ ailesi kapalı yerel sonlu aile ve $\forall s \in S$ için

$$F_s \subset U_s$$

dir. $\{A_t\}_{t\in T}$, $\mathcal{W}$ nin yerel sonlu inceliği olduğundan $x \in X$ için öyle bir $t \in T$ ve bu t için öyle bir $s(t) \in S$ vardır ki,

$$x \in A_t \subset \overline{A}_t \subset U_{s(t)}$$

dir. Bu durumda $s = s(t)$ için

$$x \in F_s$$

olur. Öyleyse $\{F_s\}_{s\in S}$ ailesi aynı zamanda X in bir örtüsüdür.■

Uyarı 2.22 *$\{A_t\}_{t\in T}$ örtüsü açıksa, $V_s = \bigcup_{s=s(t)} A_t$ kümeleri açıktır ve $F_s = \overline{V}_s$ dir. O halde bir parakompakt uzayın her $\{U_s\}_{s\in S}$ açık örtüsü için yerel sonlu öyle bir $\{V_s\}_{s\in S}$ açık örtüsü var ki $\forall s \in S$ için*

$$\overline{V}_s \subset U_s$$

olur.

Önerme 2.23 *X uzayının bir $\mathcal{U}$ açık örtüsüne etkiyen birimin bir parçalanışı $\{f_s\}_{s\in S}$ varsa , $\mathcal{U}$ nun açık yerel sonlu bir inceliği vardır.*

Kanıt. $\mathcal{U}$, X uzayının bir açık örtüsü $\{f_s\}_{s\in S}$ de bu örtüye etkiyen birimin bir parçalanışı olsun. Önce şunu gösterelim : $g : X \to I$ sürekli bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ de $g(x_0) > 0$ koşulunu sağlayan bir nokta olsun. Bu durumda x_0 ın bir U_0 komşuluğu ve sonlu bir $S_0 \subset S$ kümesi, $x \in U_0$ ve $s \in S \backslash S_0$ için

$$f_s(x) < g(x) \qquad (1)$$

koşulunu sağlayacak şekilde vardır. Gerçekten, herhangi $S_0 = \{s_1, \ldots, s_n\} \subset S$ kümesini $1 - \sum_{i=1}^{k} f_{s_i}(x_0) < g(x_0)$ olacak şekilde alırsak,

$$U_0 = \{x \in X : 1 - \sum_{i=1}^{k} f_{s_i}(x) < g(x)\}$$

açık kümesi (1) i sağlar. Çünkü $x \in U_0$ ve $s \in S \backslash S_0$ için

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{i=1}^{k} f_{s_i}(x) &< g(x) \Longrightarrow \sum_{s\in S} f_s(x) - \sum_{i=1}^{k} f_{s_i}(x) < g(x) \Longrightarrow \\ f_s(x) &< \sum_{s \neq \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}} f_{s_i}(x) < g(x) \end{aligned}$$

olur. Şimdi $\forall x \in X$ için öyle bir $s(x) \in S$ seçelim ki $f_{s(x)}(x) > 0$ olsun. $g = f_{s(x)}$ olarak alalım. $f(x) = \sup_{s\in S} f_s(x)$ eşitliği $f : X \to (0, 1]$ yarı açık aralığına sürekli bir fonksiyon tanımlar. $\forall s \in S$ için

$$V_s = \left\{x \in X \ : \ f_s(x) > \frac{1}{2} f(x)\right\}$$

kümelerini tanımlayalım. Her $s \in S$ için V_s açık kümedir.

Diğer yandan $x \in X$ için $f(x) = \sup_{s\in S} f_s(x)$ olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$f(x) - \varepsilon < f_s(x)$$

olacak şekilde $\exists\, s \in S$ vardır. $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x) > 0$ olarak alalım

$$\frac{1}{2} f(x) < f_s(x)$$

olur. Böylece $x \in V_s$ olur. O halde $\mathcal{V} = \{V_s\}_{s \in S}$ ailesi X in bir açık örtüsü olur. Ayrıca $\forall s \in S$ için

$$V_s \subset f_s^{-1}((0,1])$$

olduğu açıktır. $\mathcal{U}$ örtüsüne etkiyen birimin parçalanışı $\{f_s\}_{s \in S}$ olduğundan

$$V_s \subset f_s^{-1}((0,1]) \subset U$$

olacak şekilde $\forall s \in S$ için $\exists U \in \mathcal{U}$ vardır. Böylece $\mathcal{V} = \{V_s\}_{s \in S}$ ailesi $\mathcal{U}$ örtüsünün bir inceliğidir.

Şimdi başlangıçtaki g fonksiyonu olarak $g = \frac{1}{2}f$ i alalım. $x_0 \in X$ olsun. x_0 noktasının U_0 bir komşuluğu ve $S_0 \subset S$ sonlu bir küme olmak üzere $\forall x \in U_0$ ve $s \in S \backslash S_0$ için

$$f_s(x) < g(x)$$

olacak şekilde seçilsin. O halde $s \in S_0$ için $f_s(x) \geq g(x)$ dir. $x \in U_0$ için

$$x \in V_s = \{x \in X \, : \, f_s(x) > g(x)\}$$

en fazla $s \in S_0$ için doğrudur. Böylece bir $x_0 \in X$ için öyle bir U_0 komşuluğu bulundu ki $\mathcal{V} = \{V_s\}_{s \in S}$ ailesinin en fazla sonlu sayıda elemanı U_0 komşuluğu ile kesişir. $\mathcal{V} = \{V_s\}_{s \in S}$ ailesi yerel sonludur.■

Teorem 2.24 *Her X T_1-uzayı için aşağıdakiler eşdeğerdir.*

(i) *X uzayı parakompakttır.*

(ii) *X uzayının her açık örtüsüne etkiyen yerel sonlu birimin bir parçalanışı vardır.*

(iii) *X uzayının her açık örtüsüne etkiyen birimin bir parçalanışı vardır.*

Kanıt. **(i)$\Rightarrow$(ii)** Varsayalım ki X parakompakt uzay ve $\mathcal{A}$, X uzayının açık örtüsü olsun. $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s \in S}$, $\mathcal{A}$ açık örtüsünün yerel sonlu açık inceliği olsun.X, parakompakt uzay normal olduğundan regülerdir. Önerme 2.21 den X uzayının öyle bir $\{F_s\}_{s \in S}$ kapalı örtüsü vardır ki, $\forall s \in S$ için

$$F_s \subset U_s$$

dir. Urysohn Lemma ya göre $\forall s \in S$ için bir $g_s : X \to I$ fonksiyonu bulabiliriz öyle ki;

$$\forall x \in X \backslash U_s \text{ için bir } g_s(x) = 0 \text{ ve } x \in F_s \text{ için } g_s(x) = 1$$

dir. $\mathcal{U}$ yerel sonlu olduğundan $x \in X$ için $\sum_{s \in S} g_s(x)$ serisi yakınsaktır. Bu nedenle $g(x) = \sum_{s \in S} g_s(x)$ eşitliğiyle tanımlanan $g : X \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyondur.

Şimdi $f_s = \frac{g_s}{g}$ olarak alalım. $\forall x \in X$ için $g(x) \neq 0$ dır. $\forall s \in S$ için g_s ve g fonksiyonları sürekli olduğundan $f_s = \frac{g_s}{g}$ fonksiyonu da süreklidir. $\forall s \in S$ için

$$f_s : X \to [0, 1]$$

tanımlı ve süreklidir. $x \in X$ için

$$\sum_{s \in S} f_s(x) = \sum_{s \in S} \frac{g_s(x)}{g(x)} = \frac{1}{g(x)} \sum_{s \in S} g_s(x) = \frac{1}{g(x)} g(x) = 1$$

olduğundan $\{f_s\}_{s \in S}$ ailesi X uzayı üzerinde birimin bir parçalanışıdır.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Olduğu açıktır.

(iii)$\Rightarrow$(i) Önerme 2.23 e göre bir uzayın her açık örtüsüne etkiyen birimin bir parçalanışı varsa, bu örtünün açık yerel sonlu bir inceliği vardır. Böylece **(iii)** yi sağlayan her X, T_1 uzayının Hausdorff olduğunu göstermek yeterli olacaktır. X uzayının Tychonoff uzay olduğunu gösterelim. Bir $x_0 \in X$ noktasını alalım ve bir $F \subset X$ kapalı kümesi için $x_0 \notin F$ olsun. X uzayının $\mathcal{U} = \{X \backslash F, X \backslash \{x_0\}\}$ açık örtüsüne etkiyen birimin parçalanışı $\{f_s\}_{s \in S}$ vardır. $s_0 \in S$ alalım öyle ki

$$f_{s_0}(x_0) = a \ \ (a > 0) \quad \text{ve} \quad f_{s_0}^{-1}((0, 1]) \subset X \backslash F$$

yani

$$f_{s_0}(F) \subset \{0\}$$

olsun. $f : X \to I$, $f(x) = 1 - \min\left\{1, \frac{f_{s_0}(x)}{a}\right\}$ fonksiyonu $f(x_0) = 0$ ve $f(F) \subset \{1\}$ koşullarını sağlar. Buradan X uzayımızın Tychonoff uzay olduğu görülür.■

Teorem 2.25 (Mıchael Teoremi Bakınız [4]) *Parakompaktlık sürekli kapalı dönüşümler altında invaryanttır.*

Kanıt. X parakompakt uzayından Y topolojik uzayı üzerine $f : X \to Y$ sürekli kapalı dönüşümü verilsin. Önerme 1.15. ve Teorem 2.15 den Y topolojik uzayı normaldir. Böylece Teorem 2.18 den Y uzayının herhangi bir $\{U_s\}_{s\in S}$ açık örtüsünün açık σ-ayrık bir inceliğe sahip olduğunu göstermek yeter.

S kümesi üzerinde " $<$ " bağıntısı bir iyi sıralama bağıntısı olsun. X uzayının aşağıda verilen koşulları sağlayan kapalı yerel sonlu $\mathcal{F}_i = \{F_{s,i}\}_{s\in S}$ örtüsünü tümevarımsal olarak $i = 1, 2, \ldots$ için tanımlayalım.

$$s \in S \text{ ve } i = 1, 2, \ldots \text{için } F_{s,i} \subset f^{-1}(U_s) \qquad (1)$$

$$i > 1 \text{ için } E_{s,i-1} = \bigcup_{t<s} F_{t,i-1} \text{ olmak üzere } f(E_{s,i}) \cap f(E_{s,i-1}) = \emptyset \qquad (2)$$

olsun. $\mathcal{F}_1$ in varlığı Önerme 2.21 in sonucundan görülür. Varsayalım ki $i < k$ için $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_{k-1}$ tanımlanmış ve (1), (2) koşullarını sağlıyor olsunlar. $\mathcal{F}_{k-1}$ in yerel sonlu ve f sürekli kapalı dönüşüm olmasından dolayı

$$W_{s,k} = f^{-1}(U_s) \backslash f^{-1} f(E_{s,k-1}) \subset f^{-1}(U_s) \qquad (3)$$

kümeleri açıktır. Her $x \in X$ için $s(x) \in S$ ile $x \in f^{-1}(U_{s(x)})$ özelliğini sağlayan en küçük elemanı gösterelim. $E_{s(x),k-1} \subset \bigcup_{s<s(x)} f^{-1}(U_s)$ olduğundan (1) den $f^{-1} f(E_{s(x),k-1}) \subset \bigcup_{s<s(x)} f^{-1}(U_s)$ dir. Böylece $x \in W_{s(x),k}$ dır; yani $\{W_{s,k}\}_{s\in S}$ ailesi X uzayının bir açık örtüsüdür. Önerme 2.21 i uygulayarak $\forall s \in S$ için $F_{s,k} \subset W_{s,k}$ olacak şekilde X uzayının bir yerel sonlu kapalı $\mathcal{F}_k = \{F_{s,k}\}_{s\in S}$ örtüsünü elde ederiz. (3) den dolayı $\mathcal{F}_k$ örtüsü $i = k$ için (1) ve (2) koşullarını sağlar böylece $\mathcal{F}_i$ ailesinin elde edilişi tamamlanmış olur.

$V_{s,i} = Y \backslash f(\underset{t \neq s}{\cup} F_{t,i})$ açık kümelerini ele alalım. $\{f(F_{s,i})\}_{s \in S}$ ailesi Y uzayının bir örtüsü olduğundan $V_{s,i} \subset f(F_{s,i})$ olur. Böylece

$$s \neq t \text{ iken } V_{s,i} \cap V_{t,i} = \emptyset \tag{4}$$

dir. $\mathcal{V} = \{V_{s,i}\}_{i=1, s \in S}^{\infty}$ ailesinin Y uzayı için bir örtü olduğunu gösterelim. $\forall y \in Y$ için $s(y) \in S$ elemanı, bir i tam sayısı için $y \in f(F_{s(y),i})$ özelliğini sağlayan en küçük eleman olsun ve $y \in f(F_{s(y),i(y)-1})$ olacak şekilde bir $i(y)$ tam sayısı alalım. Böylece $\forall s > s(y)$ için $y \in f(E_{s,i(y)-1})$ ve (2) den $s > s(y)$ iken $y \notin f(F_{s,i(y)})$ dir. Diğer taraftan $s < s(y)$ iken $y \notin f(F_{s,i(y)})$ olduğundan $y \in V_{s(y),i(y)}$ dir. Böylece $\mathcal{V}$ ailesi Y uzayının bir örtüsüdür. $V_{s,i} \subset f(F_{s,i})$ ve (1) den $\mathcal{V}$ ailesinin $\{U_s\}_{s \in S}$ ailesinin bir inceliği olduğu görülür. Önerme 2.21 i tekrar uygularsak $V_i = \underset{s \in S}{\cup} V_{s,i}$ olmak üzere $i = 1, 2, ...$ için $K_i \subset f^{-1}(V_i)$ olacak şekilde X uzayının bir $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ örtüsünü alabiliriz. Y uzayı normal olduğundan

$$i = 1, 2, ... \text{ için } f(K_i) \subset W_i \subset \overline{W_i} \subset V_i \tag{5}$$

olacak şekilde $W_i \subset Y$ açık kümeleri vardır. (4) ü uygulayarak ve $\overline{W_i} \subset V_i$ den görürüz ki sabit bir i için $\{V_{s,i} \cap W_i\}_{i=1, s \in S}^{\infty}$ ailesi ayrıktır. $f(K_i) \subset W_i$ den $\{V_{s,i} \cap W_i\}_{i=1, s \in S}^{\infty}$ ailesi Y uzayının bir örtüsüdür. Açıktır ki $\{V_{s,i} \cap W_i\}_{i=1, s \in S}^{\infty}$ ailesi $\{U_s\}_{s \in S}$ ailesinin bir açık $\sigma-$ayrık inceliğidir.■

3.SAYILABİLİR PARAKOMPAKT UZAYLAR

Parakompakt uzay kavramı, kompaktlık kavramında olduğu gibi kimi zaman örtünün inceliği, kimi zaman da örtünün türü zayıflatılarak çeşitli biçimlerde genelleştirilmiştir; sayılabilir parakompaktlık, zayıf parakompaktlık, güçlü parakompaktlık, yaklaşık parakompaktlık gibi... Bu bölümde sayılabilir parakompaktlık kavramına ilişkin bazı sonuçları vermeye çalışacağız.

Tanım 3.1 *Bir X Hausdorff topolojik uzayının her sayılabilir açık örtüsünün yerel sonlu açık inceliği varsa, X topolojik uzayına sayılabilir parakompakt uzay denir.*

Açıktır ki her parakompakt uzay sayılabilir parakompakt uzaydır.

Teorem 3.2 *Her X Hausdorff uzayı için aşağıdaki önermeler denktir.*

(i) *X uzayı sayılabilir parakompakttır.*

(ii) *X uzayının her sayılabilir açık $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ örtüsünün $i = 1, 2, \ldots$ için $V_i \subset U_i$ olacak şekilde bir yerel sonlu açık $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ örtüsü vardır.*

(iii) *X uzayının açık kümelerinden oluşan artan $W_1 \subset W_2 \subset \ldots$ dizisi $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} W_i = X$ eşitliğini sağlarsa, $F_i \subset W_i$* ve *$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (F_i)^o = X$ olacak şekilde X uzayının kapalı kümelerinden oluşan $F_1, F_2, \ldots$ dizisi vardır.*

(iv) *X uzayının kapalı alt kümelerinden oluşan azalan bir $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ dizisi için $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$ ise, $F_i \subset W_i$ ve $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \overline{W_i} = \emptyset$ olacak şekilde X uzayının açık alt kümelerinden oluşan $W_1, W_2, \ldots$ dizisi vardır.*

Kanıt. **(i)$\Rightarrow$(ii)** X uzayımız sayılabilir parakompakt olduğundan $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ örtüsünün yerel sonlu açık bir $\mathcal{V}$ inceliği vardır. $\mathcal{V}$, $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ örtüsünün bir inceliği olduğundan her $V \in \mathcal{V}$ için

$$V \subset U_{i(V)}$$

olacak şekilde bir $i(V)$ seçebiliriz. $V_i = \bigcup\limits_{i(V)=i} V$ olarak tanımlayalım. $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ ailesi aradığımız ailedir.

(ii)⇒(iii) X uzayının açık kümelerinden oluşan artan $W_1 \subset W_2 \subset \ldots$ dizisi $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} W_i = X$ eşitliğini sağlasın. $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$, X uzayının sayılabilir açık bir örtüsü olduğundan, her $i = 1, 2, \ldots$ için

$$V_i \subset W_i$$

olacak şekilde, yerel sonlu açık $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ örtüsü vardır. $F_i = X \setminus \bigcup\limits_{j>i} V_j \subset \bigcup\limits_{j\leq i} V_j$ olarak tanımlanan F_i kümeleri kapalıdır ve $\bigcup\limits_{j\leq i} V_j \subset \bigcup\limits_{j\leq i} W_j = W_i$ olduğundan her $i = 1, 2, \ldots$ için

$$F_i \subset W_i$$

dir. $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ ailesi X uzayının yerel sonlu bir örtüsü olduğundan $\forall x \in X$ için $\exists x \in N$ açık komşuluğu var ve sonlu sayıda V_i için

$$N \cap V_i \neq \emptyset$$

dir. $i(x)$, $N \cap V_{i(x)} \neq \emptyset$ özelliğini sağlayan en büyük pozitif tam sayı olsun. $j > i(x)$ için

$$N \cap \bigcup_{j>i(x)} V_j = \emptyset$$

dir. Buradan

$$N \subset \left(X \setminus \bigcup_{j>i(x)} V_j \right)$$

olduğu görülür. Bu da

$$N \subset F_{i(x)}$$

demektir. Buradan $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (F_i)^o = X$ eşitliğinin doğru olduğu görülür.

(iii)⇒(iv) X in kapalı kümelerinin azalan bir dizisi $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ için $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$ olsun. Bu durumda, $i = 1, 2, \ldots$ için $A = X \setminus F_i$ dersek,

$A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ açık kümelerin artan bir dizisi olur ve De Morgan kuralına göre $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X$ dir. **(iii)** varsayımına göre, bu durumda kapalı kümelerin öyle bir $B_1, B_2, \ldots$ dizisi vardır ki, $i = 1, 2, \ldots$ için $B_i \subset A_i$ ve $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^o = X$ dir. Şimdi $i = 1, 2, \ldots$ için $X \backslash B_i = W_i$ dersek, $W_1, W_2, \ldots$ açık kümelerinin öyle bir dizisi olur ki, $i = 1, 2, \ldots$ için

$$F_i = X \backslash A_i \subset X \backslash B_i = W_i$$

ve

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{W}_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{(X \backslash B_i^o)} = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \backslash B_i^o) = X \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^o = X \backslash X = \emptyset$$

olur.

Tamamen benzer olarak, **(iv)**$\Rightarrow$**(iii)** olduğu kolayca görülür. Onun için şimdi **(iii)**$\Rightarrow$**(i)** olduğunu gösterelim.

(iii)$\Rightarrow$**(i)** $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ ailesi X uzayının bir sayılabilir açık örtüsü olsun. X uzayının açık alt kümelerinden oluşan $W_1 \subset W_2 \subset \ldots$ artan dizisi $W_i = \bigcup_{j \leq i} U_j$ şeklinde tanımlansın. $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i = X$ olduğundan X uzayının kapalı alt kümelerinden oluşan $F_1, F_2, \ldots$ dizisi vardır ve her $i = 1, 2, \ldots$ için

$$F_i \subset W_i. \text{ ve } \bigcup_{i=1}^{\infty} (F_i)^o = X$$

dir. Her $i = 1, 2, \ldots$ için V_i kümelerini $V_i = U_i \backslash \bigcup_{j<i} F_j \subset U_i$ olarak tanımlayalım. F_i kümeleri kapalı olduğundan V_i kümeleri açık kümelerdir ve

$$\bigcup_{j<i} F_j \subset \bigcup_{j<i} W_j \subset \bigcup_{j<i} U_j$$

olduğundan

$$U_i \backslash \bigcup_{j<i} U_j \subset V_i$$

dir. Buradan $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ ailesinin X uzayının bir örtüsü olduğu görülür. $\bigcup_{i=1}^{\infty}(F_i)^o = X$ olduğundan her $x \in X$ noktasının $(F_j)^o$ türünde bir komşuluğu vardır ve bu komşuluk $i > j$ için

$$V_i \cap (F_j)^o = \emptyset$$

dir. Bundan dolayı $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ ailesi yerel sonludur.■

Sonuç 3.3 *Bir X, T_1 normal uzayı sayılabilir parakompakttır $\Leftrightarrow$ X uzayının kapalı altkümelerinden oluşan her $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ azalan dizisi $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$ koşulunu sağlıyorsa, her $i = 1, 2, \ldots$ için $F_i \subset W_i$ ve $\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i = \emptyset$ olacak şekilde X uzayının açık altkümelerinden oluşan $W_1, W_2, \ldots$ dizisi vardır.*

Kanıt. $W_i \subset \overline{W_i}$ olduğundan yeterlilik açıktır. Gereklilik kolayca görülebilir.■

Önerme 3.4 [4] *$\{U_s\}_{s\in S}$, X normal uzayının nokta sonlu açık örtüsü olsun. $\forall s \in S$ için $\overline{V}_s \subset U_s$ olacak şekilde X in bir $\{V_s\}_{s\in S}$ açık örtüsü vardır.*

Teorem 3.5 *Her X, T_1 uzayı için aşağıdaki koşullar eşdeğerdir.*

(i) *X uzayı normal ve sayılabilir parakompakttır.*

(ii) *X uzayının her sayılabilir $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ açık örtüsü için X uzayının yerel sonlu açık $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ örtüsü vardır, öyle ki $i = 1, 2, \ldots$ için $\overline{V_i} \subset U_i$ dir.*

(iii) *X uzayının her sayılabilir $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ açık örtüsü için X uzayının bir kapalı $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ örtüsü vardır, öyle ki $i = 1, 2, \ldots$ için $F_i \subset U_i$ dir.*

Kanıt. **(i)$\Rightarrow$(ii)** X normal ve sayılabilir parakompakt uzay olsun. $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ X uzayının bir sayılabilir açık örtüsü olsun. Teorem 3.2 den dolayı X uzayının her $i = 1, 2, \ldots$ için $W_i \subset U_i$ olacak şekilde $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ bir yerel sonlu açık örtüsü vardır. $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ örtüsü için Önerme 3.4 ü uygularsak

$$\overline{V_i} \subset W_i \subset U_i$$

elde ederiz.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Gerektirmesi kolaylıkla görülür.

(iii)$\Rightarrow$(i) İlk olarak her X, T_1 uzayı eğer **(iii)** koşulunu sağlıyorsa normal olduğunu gösterelim. X uzayının $U \cup V = X$ eşitliğini sağlayan U, V açık alt kümeleri verilsin. $U_1 = U$, $U_2 = V$ ve $U_3 = U_4 = ... = \emptyset$ olarak açık küme dizisini alırsak **(iii)** koşulundan $F_1 \subset U$, $F_2 \subset V$ ve $F_1 \cup F_2 = X$ olacak şekilde F_1, F_2 kapalı kümeleri vardır. Bu nedenle X uzayı normaldir. Çünkü A, B kapalı kümeler ve $A \cap B = \emptyset$ ise, $X \backslash A = U$, $X \backslash B = V$ dersek, $F_1 \subset U$, $F_2 \subset V$, $F_1 \cup F_2 = X$ koşulunu sağlayan F_1, F_2 kümeleri vardır. Buradan $A \subset X \backslash F_1$, $B \subset X \backslash F_2$ ve $(X \backslash F_1) \cap (X \backslash F_2) = \emptyset$ olduğundan X normal uzay olur.

Şimdi **(iii)** koşulunu sağlayan X uzayının sayılabilir parakompakt olduğunu gösterelim. X in kapalı kümelerinin azalan bir dizisi $F_1 \supset F_2 \supset ...$, $\bigcap_{i=1} F_i = \emptyset$ koşulunu sağlasın. Şimdi $i = 1, 2, ...$ için $U_i = X \backslash F_i$ diyelim. $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ açık kümeler dizisi X i örter; yani $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = X$ dır. **(iii)** varsayımına göre, kapalı kümelerin öyle bir $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi vardır ki, $i = 1, 2, ...$ için $A_i \subset U_i$ ve $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X$ dır.Şimdi $i = 1, 2, ...$ için $W_i = X \backslash A_i$ dersek, W_i ler açık kümelerdir,

$$W_i = X \backslash A_i \supseteq X \backslash U_i = F_i$$

ve

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i = X \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X \backslash X = \emptyset$$

koşullarını sağlar. Yani sonuç 3.3 nin koşulları sağlanır. Öyleyse X uzayı sayılabilir parakompakttır.■

Yerel sonlu ve nokta sonlu küme ailelerine ilaveten yıldız sonlu ve yıldız sayılabilir aileleri de göz önüne alabiliriz. Bir X kümesinin A_s alt kümelerinden oluşan $\{A_s\}_{s \in S}$ ailesi verilsin. Eğer $\forall s_0 \in S$ için $\{s \in S : A_s \cap A_{s_0} \neq \emptyset\}$ kümesi sonlu (sayılabilir) ise X uzayıda yıldız sonludur (yıldız sayılabilirdir) denir [4].

Açıktır ki herhangi bir yıldız sonlu aile nokta sonludur. Dikkat etmeliyiz ki bir topolojik uzayın yıldız sonlu ailesi her zaman yerel sonlu olmak zorunda değildir. Bununla birlikte bir topolojik uzayın yıldız sonlu açık örtüsü yerel sonludur.

Tanım 3.6 *X bir topolojik uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun. Eğer $A = f^{-1}(0)$ olacak şekilde $f : X \to [0,1]$ sürekli fonksiyonu varsa, A kümesine fonksiyonel kapalı küme denir.*

Fonksiyonel kapalı kümelerin tümleyenleri fonksiyonel açık kümelerdir.

Önerme 3.7 *Bir X topolojik uzayının, $i = 1, 2, ...$ için U_i kümeleri fonksi yonel açık küme olmak üzere, her sayılabilir $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ örtüsünün fonksi yonel açık kümelerden oluşan sayılabilir yıldız sonlu inceliği vardır.*

Kanıt. $f_i : X \to I$ sürekli olmak üzere $U_i = f_i^{-1}((0,1])$ olarak tanımlayalım. $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} f_i(x)$ olsun. Böylece $f : X \to I$ sürekli fonksiyonunu tanımlamış oluruz. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i = X$ olduğundan $\forall x \in X$ için

$$f(x) > 0$$

dır. $V_k = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{k}, 1\right]\right)$, $F_k = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{k}, 1\right]\right)$ olmak üzere $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ ve $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ aileleri X uzayının örtüleridir. Bu örtüler sırasıyla fonksiyonel açık ve fonksiyonel kapalı kümelerden oluşmaktadır.Şimdi fonksiyonel açık kümelerin X uzayı için bir yıldız sonlu örtü oluşturduğunu gösterelim. $k = 1, 2, ...$ $1 \leq j \leq k$ için ve $F_0 = \emptyset$ olmak üzere $U_{k,j} = U_j \cap (V_{k+1}/F_{k-1})$ olarak tanımlayalım. $x \in X$ olmak üzere k ile $x \in F_k$ özelliğini sağlayan en küçük tam sayıyı ifade edelim. $F_k \subset \bigcup\limits_{j \leq k} U_j$ dir. Çünkü $x \notin \bigcup\limits_{j \leq k} U_j$ ise, $\forall j \leq k$ için

$$x \notin U_j = f_j^{-1}((0,1])$$

ise $j \leq k$ için

$$f_j(x) \notin (0,1]$$

buradan $j \leq k$ için

$$f_j(x) = 0$$

dır. Böylece;

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}f_i(x)=\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}f_i(x)\leq\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2^{k+1}}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}\right)=\frac{1}{2^k}<\frac{1}{k}\Rightarrow$$
$$f(x)\notin[\tfrac{1}{k},1]\ \Rightarrow\ x\notin f^{-1}\left([\tfrac{1}{k},1]\right)$$

dir. O halde

$$F_k\subset\bigcup_{j\leq k}U_j$$

dir. $x\in U_j$ olmak üzere bir

$$x\in U_j\cap(F_k/F_{k-1})\subset U_{k,j}$$

olacak şekilde bir $j\leq k$ vardır. $\forall j\leq k$ için

$$U_{k,j}\subset V_{k+1}\subset F_{k+1}$$

olduğundan $m\geq k+2$ ve $i\leq m$ için

$$U_{k,j}\cap U_{m,i}=\emptyset \tag{1}$$

olur. (1) nolu eşitliğin bir sonucu olarak $\{U_{k,j}\}_{j\leq k,k=1}^{\infty}$ ailesi yıldız sonludur.■

Teorem 3.8 *Her X normal uzayı için aşağıdakiler eşdeğerdir.*

(i) *X uzayı sayılabilir parakompakttır.*

(ii) *X uzayının her sayılabilir açık örtüsünün yıldız sonlu açık inceliği vardır.*

(iii) *X uzayının her sayılabilir açık örtüsünün nokta sonlu açık inceliği vardır.*

Kanıt. **(i)⇒(ii)** Gerektirmesi Teorem 3.5 ün sonucudur. Uryshon Lemma ve Önerme 3.7 dan doğruluğu sağlanır.

(ii)⇒(iii) Gerektirmesi açıktır.

(iii)⇒(i) Gerektirmesi Önerme 3.4 ve Teorem 3.2 in direkt bir sonucudur.■

4. ZAYIF PARAKOMPAKT UZAYLAR

Tanım 4.1 *Bir X Hausdorff topolojik uzayının her açık örtüsünün nokta sonlu açık inceliği varsa, X topolojik uzayına zayıf parakompakt uzay denir* [4].

Her parakompakt uzay zayıf parakompakt uzaydır, fakat tersinin doğru olduğunu söyleyemeyiz.

Örnek 4.2 [5] *$X = \mathbb{R}$ ve $A = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, ...\}$ olsun. X üzerinde τ topolojisi şöyle tanımlansın : U, $\mathbb{R}$ nin öklid topolojisinde açık küme ve $B \subseteq A$ olmak üzere, $G = U \backslash B$ olarak yazılabilen kümelere $\tau-$açık diyelim. Kısaca*

$$G \in \tau \Leftrightarrow \exists U \text{ öklidyen açık ve } B \subseteq A \text{olmak üzere, } G = U \backslash B$$

olsun. τ nun X üzerinde bir topoloji olduğu kolayca doğrulanır. $B = \emptyset \subset A$ olduğundan X üzerindeki τ topolojisi öklidyen topolojiden daha kuvvetli bir topolojidir. Bu nedenle Hausdorff topolojidir. Fakat τ regüler değildir. Çünkü A, $\tau-$kapalı küme ve $0 \notin A$ dır. Oysa A yı kapsayan her açık küme, sıfırı bulunduran her açık kümeyle kesişir.

X uzayı sayılabilir parakompakt değildir. Çünkü $G_n = X \backslash (A \backslash \{\frac{1}{n}\})$, $n = 1, 2, ...$ açık kümeleri ailesinin yerel sonlu bir inceliği yoktur. Çünkü sıfırı bulunduran bir açık küme $\frac{1}{n}$ hariç sıfırın çevresindeki tüm açık aralıkları bulundurur. Bu nedenle de, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ nin her inceliğindeki sıfırı bulunduran her açık küme inceliğin sonsuz çoklukta kümesiyle kesişir.

Şimdi X uzayının zayıf parakompakt olduğunu gösterelim. $G_\alpha = U_\alpha - B_\alpha$ $(B_\alpha \subset A)$ olmak üzere $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$, X in bir açık örtüsü olsun. Bu durumda $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$, öklidyen uzay $\mathbb{R}$ nin bir açık örtüsüdür. $\mathbb{R}$ zayıf parakompakt olduğundan bu açık örtünün nokta sonlu açık bir inceliği $\{V_\beta\}_{\beta \in \Sigma}$ vardır. Bu durumda $\{V_\beta - A\}_{\beta \in \Sigma}$ ailesi U_α nın bir inceliğidir, fakat sadece $X \backslash A$

yı örter. Diğer yandan A nın her bir öğesi en az bir G_α içinde bulunur. Bu nedenle, her bir $\frac{1}{n}$ yi uzunluğu $\frac{1}{2n(n+1)}$ olan ve bir G_α içinde kalan bir I_n açık aralığına düşürebiliriz. Bu aralıklar ayrıktır; böylece $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ nın $\{V_\beta - A\}_{\beta\in\Sigma} \cup \{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ inceliği X i örter ve nokta sonludur. Sonuç olarak, X zayıf parakompakttır.

Teorem 3.8 den her zayıf parakompakt, normal, Lindelöf uzay sayılabilir parakompakttır.

Önerme 4.3 *Bir zayıf parakompakt X uzayının her açık $\{U_s\}_{s\in S}$ örtüsü için X in nokta sonlu açık bir $\{V_s\}_{s\in S}$* örtüsü vardır, öyle ki $\forall s \in S$ *için $V_s \subset U_s$ dir.*

Önerme 4.4 *X zayıf parakompakt uzayından Y uzayına sürekli örten kapalı bir f dönüşümü varsa, Y uzayının sayılabilir sayıda nokta sonlu ailelerin birleşimi olarak temsil edilebilen her açık örtüsünün, bir nokta sonlu açık inceliği vardır.*

Kanıt. $\mathcal{U}_i = \{U_s\}_{s\in S_i}$ aileleri nokta sonlu olmak üzere $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i$ ailesi Y uzayının bir açık örtüsü olsun. Önerme 4.3 e göre, $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i$ ve $G_i \subset f^{-1}(U_i)$ olmak üzere, X uzayının nokta sonlu bir $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ açık örtüsü vardır. G_i kümeleri açık kümeler olduğundan $k = 1, 2, ...$ için $E_k = X \setminus \bigcup_{i\geq k} G_i$ kümesi kapalıdır; kolaylıkla görülür ki $E_1 \subset E_2 \subset ...$ ve $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ ailesi X uzayını örter. Ayrıca $k = 1, 2, ...$ için

$$f(E_k) \subset f\left(\bigcup_{i<k} G_i\right) \subset \bigcup_{i<k} f(G_i) \subset \bigcup_{i<k} U_i$$

dir. $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ olarak alalım. $i \neq j$ iken $S_i \cap S_j = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Kanıtı tamamlamak için $\forall s \in S_i$ için

$$W_s = U_s / f(E_i)$$

şeklinde tanımlı olmak üzere $\mathcal{W} = \{W_s\}_{s\in S}$ ailesinin Y uzayının bir nokta sonlu açık örtüsü olduğunu göstermek yeterlidir. f kapalı dönüşüm olduğundan W_s kümeleri açıktır. Bu kümelerin nokta sonlu bir aile oluşturduklarını gösterelim. $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(E_k)$ olduğundan $\forall y \in Y$ bir $f(E_k)$ kümesine aittir ve bunun sonucunda $i \geq k$, $s \in S_i$, $y \notin W_s$ dir. $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, ..., \mathcal{U}_{k-1}$ aileleri nokta sonlu ve böylece y, $\mathcal{W}$ nin sadece sonlu tane öğesine aittir. Şimdi de $\mathcal{W}$ nin Y uzayı için bir örtü olduğunu gösterelim. $\forall y \in Y$ için $i(y)$ ile $y \in U_{i(y)}$ özelliğini sağlayan en küçük doğal sayıyı gösterelim. $f\left(E_{i(y)}\right) \subset \underset{i<i(y)}{\cup} U_i$ olduğundan öyle bir $s(y) \in S_{i(y)}$ vardır ki $y \in W_{s(y)}$ olur.■

Teorem 4.5 *X zayıf parakompakt uzay, Y Hausdorff uzay olmak üzere X uzayından Y uzayına sürekli kapalı bir f dönüşümü varsa, Y uzayında zayıf parakompakt uzaydır.*

Kanıt. Önerme 4.4 den Y uzayının herhangi bir $\{U_s\}_{s \in S}$ açık örtüsünün sayılabilir sayıda nokta sonlu ailelerin birleşimi olan bir açık inceliğin varlığını kanıtlamak yeterli olacaktır.

S kümesi üzerinde " $<$ " iyi sıralama bağıntısı olsun.Tümevarımsal olarak X uzayının bir $\mathcal{G}_i = \{G_{s,i}\}_{s \in S}$ açık nokta sonlu örtüsünü, $s \in S$ ve $i = 1, 2, ...$ için

$$G_{s,i} \subset f^{-1}(U_s) \tag{1}$$

$i > 1$ için $E_{s,i-1} = X \backslash \bigcup_{t \geq s} G_{t,i-1}$ olmak üzere

$$f(G_{s,i}) \cap f(E_{s,i-1}) = \emptyset \tag{2}$$

(1) ve (2) koşullarını sağlayacak şekilde oluşturalım. $\mathcal{G}_1$ in varlığını Önerme 4.2 den söyleyebiliriz. Varsayalım ki $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, ..., \mathcal{G}_{k-1}$ tanımlı örtüleri $i < k$ için (1) ve (2) koşullarını sağlasın. f sürekli kapalı dönüşüm olduğundan

$$W_{s,k} = f^{-1}(U_s) \backslash f^{-1} f(E_{s,k-1}) \subset f^{-1}(U_s) \tag{3}$$

kümeleri açıktır. Her x için $s(x) \in S$ ile $x \in f^{-1}\left(U_{s(x)}\right)$ özelliğini sağlayan en küçük elemanı gösterelim. $E_{s(x),k-1} \subset \bigcup_{s<s(x)} G_{s,k-1}$ ve (1) den

$$\bigcup_{s<s(x)} G_{s,k-1} \subset \bigcup_{s<s(x)} f^{-1}(U_s)$$

buradan

$$f^{-1}f\left(E_{s(x),k-1}\right) \subset \bigcup_{s<s(x)} f^{-1}\left(U_s\right)$$

dir. Böylece $x \in W_{s(x),k}$ ve $\{W_{s,k}\}_{s\in S}$ ailesi X uzayının bir açık örtüsüdür. Önerme 4.3 den $\forall s \in S$ için

$$G_{s,k} \subset W_{s,k}$$

olacak şekilde X uzayının bir nokta sonlu $\mathcal{G}_k = \{G_{s,k}\}_{s\in S}$ örtüsü elde ederiz. (3) den dolayı $\mathcal{G}_k$ örtüsü $i = k$ için (1) ve (2) koşullarını sağlar böylece $\mathcal{G}_i$ ailesinin oluşturulması tamamlanmış olur. $\forall s_0 \in S$ ve $i = 1, 2, ...$ için

$$E_{s_0,i} = X\backslash\bigcup_{t\geq s_0} G_{t,i} \subset \bigcup_{s<s_0}\left(X\backslash\bigcup_{t>s} G_{t,i}\right) \tag{4}$$

dir. Gerçekten eğer $x \notin \bigcup_{t\geq s_0} G_{t,i}$ ise

$$x \notin \bigcup_{t>s} G_{t,i}$$

olacak şekilde bir $s < s_0$ ve $x \in G_{s,i}$ olacak şekilde en büyük $s \in S$ vardır. Benzer şekilde; $i = 1, 2, ...$ için

$$X = \bigcup_{s\in S}\left(X\backslash\bigcup_{t>s} G_{t,i}\right) \tag{5}$$

dir. $V_{s,i} = Y\backslash f\left(X\backslash G_{s,i}\right)$ açık kümelerini tanımlayalım. $s \in S$ ve $i = 1, 2, ...$ için

$$f^{-1}\left(V_{s,i}\right) \subset G_{s,i} \tag{6}$$

olduğundan $i = 1, 2, ...$ için $\mathcal{V}_i = \{V_{s,i}\}_{s\in S}$ ailesi nokta sonludur. $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i$ ailesinin Y uzayı için bir örtü olduğunu gösterelim. (5) den dolayı $\forall y \in Y$ için $s(y) \in S$ en küçük elemanı vardır. Bu $s(y)$ için $y \in f\left(X\backslash \bigcup_{t>s(y)} G_{t,i}\right)$ özelliği pozitif bir i tam sayısı için vardır. $y \in f\left(X\backslash \bigcup_{t>s(y)} G_{t,i(y)-1}\right)$ olacak şekilde bir $i(y)$ tam sayısı seçelim. Buradan $\forall s > s(y)$ için

$$y \in f\left(E_{s,i(y)-1}\right)$$

ve (2) den dolayı

$$y \notin \bigcup_{s>s(y)} f\left(G_{s,i(y)}\right) = f\left(\bigcup_{s>s(y)} G_{s,i(y)}\right)$$

veya

$$f^{-1}(y) \cap \bigcup_{s>s(y)} G_{s,i(y)} = \emptyset$$

dir. Diğer yandan (4) den dolayı

$$f\left(X \backslash \bigcup_{t \geq s(y)} G_{t,i}\right) \subset f\left(\bigcup_{s<s(y)} \left(X \backslash \bigcup_{t>s} G_{t,i}\right)\right) = \bigcup_{s<s(y)} f\left(X \backslash \bigcup_{t>s} G_{t,i}\right)$$

olup buradan

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup_{s \geq s(y)} G_{s,i(y)}$$

ve dolayısıyla

$$f^{-1}(y) \subset G_{s(y),i(y)}$$

veya

$$y \in V_{s(y),i(y)}$$

olur. Böylece $\mathcal{V}$, Y uzayının bir örtüsü olduğunu gösterdik. (1) ve (6) dan $\mathcal{V}$ nin $\{U_s\}_{s \in S}$ ailesinin inceliği olduğunu görülür.■

5. GÜÇLÜ PARAKOMPAKT UZAYLAR

Tanım 5.1 *Bir X kümesinin $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ örtüleri ve bir $A \subset X$ verilsin. $st(A,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : A \cap U \neq \emptyset\}$ olarak tanımlanan kümeye A nın $\mathcal{U}$ ya göre yıldızı denir. Eğer her $U \in \mathcal{U}$ için $st(U,\mathcal{U}) \subset V$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{V}$ kümesi varsa, $\mathcal{U}$ ya $\mathcal{V}$ nin yıldız inceliği denir ve bu durum $\mathcal{U}^* \prec \mathcal{V}$ yazılarak gösterilir.*

Tanım 5.2 *X Hausdorff topolojik uzayının her açık örtüsünün yıldız sonlu açık inceliği varsa, X topolojik uzayına güçlü parakompakt uzay denir.*

Her güçlü parakompakt uzay aynı zamanda parakompakt ve normal uzaydır, fakat tersi doğru değildir.

$\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ ailesini alalım. Bu ailenin elemanları X uzayının alt kümelerinden oluşsun. A_s elemanından $A_{s'}$ elemanına bir zincir ile şunu ifade edelim ; $\mathcal{A}$ nın sonlu tane öyle $A_{s_1}, A_{s_2}, ..., A_{s_k}$ elemanı bulunsun, öyle ki $s_1 = s$, $s_k = s'$ olsun ve $i = 1,2,...,k-1$ için

$$A_{s_i} \cap A_{s_{i+1}} \neq \emptyset$$

olsun. Eğer her A_s ve $A_{s'}$ elemanları için bu öğeler arasında bir zincir varsa, $\mathcal{A}$ ailesine bağlantılıdır diyelim. Herhangi bir $\mathcal{A}$ ailesi için $\mathcal{A}$ nın bileşenleri diye $\mathcal{A}$ nın maksimal bağlantılı alt ailelerine diyelim; yani bağlantılı alt aileler başka hiçbir bağlantılı ailenin öz alt kümesi olmayacaktır.

Önerme 5.3 *X uzayının alt kümelerinin her $\mathcal{A}$ ailesi bileşenlerinin birleşimine ayrışır. Eğer $\mathcal{A}_1$ ve $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}$ nın farklı iki bileşeni ise*

$$\left(\bigcup \mathcal{A}_1\right) \cap \left(\bigcup \mathcal{A}_2\right) = \emptyset$$

dir.

Önerme 5.4 *Her bağlantılı yıldız sayılabilir küme ailesi sayılabilirdir.*

Teorem 5.5 *Her X T_1-regüler uzayı için aşağıdaki koşullar eşdeğerdir.*

(i) *X uzayı güçlü parakompakttır.*

(ii) *X uzayının her açık örtüsünün hem yerel sonlu hemde yıldız sonlu olan kapalı bir inceliği vardır.*

(iii) *X uzayının her açık örtüsünün hem yerel sonlu hemde yıldız sayılabilir olan kapalı bir inceliği vardır.*

(iv) *X uzayının her açık örtüsünün yıldız sayılabilir açık inceliği vardır.*

Kanıt. **(i)$\Rightarrow$(ii)** $\mathcal{U}$ ailesi X uzayının bir örtüsü olsun. $\mathcal{V} = \{V_s\}_{s\in S}$ ailesi ise $\mathcal{U}$ ailesinin yıldız sonlu açık inceliği olsun. X uzayı normal ve $\mathcal{V}$ ailesi yerel sonlu olduğundan Teorem 3.5 den X uzayının $\forall s \in S$ için

$$F_s \subset V_s$$

olacak şekilde bir $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s\in S}$ kapalı örtüsü vardır. Açıktır ki $\mathcal{F}$ ailesi $\mathcal{U}$ ailesinin bir inceliğidir ve hem yerel sonlu hemde yıldız sonludur.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Gerektirmesi açıktır.

(iii)$\Rightarrow$(iv) $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in S}$, X uzayının bir açık örtüsü olsun. Bu $\mathcal{U}$ örtüsünün hem yerel sonlu hemde yıldız sayılabilir olan kapalı bir inceliği $\mathcal{F}$ olsun. $\mathcal{F}_t$ ler $\mathcal{F}$ nin bileşenleri olmak üzere $\mathcal{F} = \bigcup_{t\in T} \mathcal{F}_t$ dir. Önerme 5.4 den tüm $\mathcal{F}_t$ aileleri sayılabilirdir. $\mathcal{F}_t = \{\mathcal{F}_{t,i}\}_{i=1}^{\infty}$ olarak alalım. $C_t = \bigcup \mathcal{F}_t$ aileleri iki şer ikişer ayrık ve - $\mathcal{F}$ nin yerel sonluluğundan - hem açık hemde kapalıdır. $\forall t \in T$ ve herhangi bir i doğal sayısı için

$$\mathcal{F}_{t,i} \subset U_{s(t,i)}$$

olacak şekilde bir $s(t,i) \in S$ alalım. $\{C_t \, , \, U_{s(t,i)}\}_{i=1,t\in T}^{\infty}$ ailesi yıldız sayılabilir açık bir inceliktir ve bu incelik $\mathcal{U}$ ya aittir.

(iv)$\Rightarrow$(i) İlk olarak **(iv)** nolu koşulu sağlayan her X regüler uzayının parakompakt olduğunu gösterelim.

$\mathcal{U}$, X uzayının açık örtüsü ve $\mathcal{V}$ ailesi ise $\mathcal{U}$ nun açık yıldız sayılabilir inceliği olsun. $\{V_s\}_{s\in S}$ ailesi $\mathcal{V}$ nin bileşenleri olsun. Önerme 5.4 den

$\forall t \in T$ için

$$\mathcal{V}_t = \{V_{t,i}\}_{i=1}^{\infty}$$

dir. $i = 1, 2, ...$ için $\{V_{t,i}\}_{t\in T}$ ailesi ayrık olduğundan $\mathcal{V}$ ailesi $\mathcal{U}$ nun $\sigma-$yerel sonlu açık inceliğidir. Bundan dolayı X uzayı Teorem 2.18 den dolayı parakompakttır.

Şimdi X uzayının açık bir $\mathcal{U}$ örtüsünü ele alalım. $\mathcal{U}$ nun yıldız sayılabilir açık bir inceliği $\mathcal{V}$ ailesi olsun. $\{V_t\}_{t\in T}$ ailesi $\mathcal{V}$ nin tüm bileşenlerinden oluşsun. $\forall t \in T$ için $\mathcal{V}_t = \{V_{t,i}\}_{i=1}^{\infty}$ ve $C_t = \bigcup \mathcal{V}_t$ eşitliği sağlansın. C_t kümeleri açık ve ikişer ikişer ayrık olduğundan bu kümeler hem açık hemde kapalı kümelerdir. Kanıtta ki ilk adımdan $\forall t \in T$ için C_t uzayı parakompakt ve Teorem 3.4 den C_t nın kapalı bir $\mathcal{F}_t = \{F_{t,i}\}_{i=1}^{\infty}$ örtüsü vardır ki $i = 1, 2, ...$ için $F_{t,i} \subset V_{t,i}$ dir. $f_{t,i} : X \to I$ sürekli bir fonksiyon olsun öyleki $x \in X \backslash V_{t,i}$ için

$$f_{t,i}(x) = 0$$

ve $x \in F_{t,i}$ için

$$f_{t,i}(x) = 1$$

koşullarını sağlasın. $\forall t \in T$ için $\{U_{t,i}\}_{i=1}^{\infty}$ her bir $U_{t,i} = f_{t,i}^{-1}((0,1])$ şeklinde tanımlı olmak üzere ailesi C_t uzayının bir sayılabilir açık örtüsüdür. Bu aile fonksiyonel açık kümeler içermektedir. Bu fonksiyonel açık kümeler $\mathcal{V}_t$ ailesinin inceliğidir. Önerme 3.7 den $\{U_{t,i}\}_{i=1}^{\infty}$ ailesinin sayılabilir yıldız sonlu açık bir $\{G_{t,i}\}_{i=1}^{\infty}$ inceliği vardır. $\{G_{t,i}\}_{i=1,t\in T}^{\infty}$ ailesi $\mathcal{U}$ örtüsünün yıldız sonlu açık inceliğidir.

(ii) ve **(iii)** nolu koşulları için yerel sonluluğun gerekli olduğunu gösterelim. Gerçekten her X, T_1 uzayı için tüm tek nokta alt kümeler ailesinin yıldız sonlu ve kapalı bir incelik olduğu görülür.■

6. YAKLAŞIK PARAKOMPAKT UZAYLAR

Yaklaşık parakompaktlık kavramı Singal ve Arya [7] tarafından tanımlanmıştır. Parakompaktlık kavramının bir çok sayıda değiştirilmiş formu sunulduğu ve üzerinde çalışıldığı halde en geniş parakompaktlık kavramı yaklaşık parakompaktlıktır.

Tanım 6.1 *(X,τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A = \left(\overline{A}\right)^o$ ise A kümesine regüler açık küme denir.*

Her regüler açık küme açıktır, fakat tersi her zaman doğru olmayabilir.

Örnek 6.2 *$X = \{a,b\}$ üzerinde tanımlanan $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ topolojisine göre $\{a\}$ açık bir kümedir. Ancak $\left(\overline{\{a\}}\right)^o = X$ olduğundan $\{a\}$ regüler açık değildir.*

Tanım 6.3 *(X,τ) topolojik uzay ve $B \subset X$ olsun. $B = \overline{(B^o)}$ ise B kümesine regüler kapalı küme denir.*

Her regüler kapalı küme kapalı bir kümedir, fakat tersi her zaman doğru olmayabilir.

Örnek 6.4 *Bir önceki örnekte $\{b\}$ kapalı bir küme, $\overline{(\{b\}^o)} = \emptyset$ olup $\{b\}$ regüler kapalı değildir.*

Bir (X,τ) topolojik uzayında tüm regüler açık kümelerin sınıfı τ dan daha kaba bir topolojidir. Bu topolojiye semi regülizasyon topolojisi denir ve τ_s ile gösterilir. τ_s topolojisinin elemanları X uzayının $\delta-$açık kümeleridir, bu kümelerin tümleyenleri ise $\delta-$kapalı kümeleridir.

$\{(x,x) : x \in X\}$ olarak tanımlanan kümeye X uzayının köşegeni denir ve Δ_X ile gösterilir [8].

Tanım 6.5 *A, X uzayında bir küme olsun. Eğer $x \in A$ noktasının $x \in U \subset A$ olacak şekilde U $\delta -$ açık kümesi varsa, A kümesine x noktasının $\delta -$ komşuluğu denir. A kümesi $\delta -$ açık küme ise x noktasının $\delta -$ açık komşuluğudur.*

Tanım 6.6 *(X, τ) topolojik uzay ve $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ noktası ve sonlu sayıda $U \in \mathcal{U}$ için $V \cap U \neq \emptyset$ olacak şekilde x noktasının bir regüler açık V komşuluğu varsa, $\mathcal{U}$ ailesine güçlü yerel sonlu aile denir.*

Tanım 6.7 *(X, τ) topolojik uzay ve $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ olsun. Eğer her bir $\mathcal{U}_i$ güçlü yerel sonlu olmak üzere $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i$ şeklinde ifade edilebiliyorsa, $\mathcal{U}$ ailesine $\sigma -$ güçlü yerel sonlu aile denir.*

Tanım 6.8 *X topolojik uzayının her regüler açık örtüsünün yerel sonlu açık inceliği varsa, X uzayına yaklaşık parakompakt uzay denir.* [9]

Tanım 6.9 *$\mathcal{U}$, X topolojik uzayının bir örtüsü olsun. Eğer $X \times X$ kartezyen çarpım uzayında tanımlı Δ_X köşegeninin, $\{V[x] : x \in X\} \prec \mathcal{U}$ olacak şekilde bir V $\delta -$ komşuluğu varsa, $\mathcal{U}$ örtüsüne çift regüler örtü denir.*

Teorem 6.10 *X topolojik uzayının bir regüler açık örtüsü $\mathcal{U}$ olsun. Eğer $\mathcal{U}$ örtüsünün bir $\mathcal{R}$ regüler kapalı yerel sonlu (güçlü yerel sonlu) inceliği varsa, $\mathcal{U}$ örtüsü çift regüler örtüdür.*

Kanıt. $\forall A \in \mathcal{R}$ için $A \subset U_A$ kapsamasını sağlayan $U_A \in \mathcal{U}$ seçebiliriz. $\forall A \in \mathcal{R}$ için

$$V_A = (U_A \times U_A) \cup (X \backslash A) \times (X \backslash A) \tag{1}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda her V_A kümesi $X \times X$ kartezyen çarpım uzayında Δ_X köşegeninin $\delta -$ *açık* komşuluğudur. $\forall x \in A$ için $V_A[x] = U_A$ olduğunu gösterelim. $x \in A \Rightarrow x \notin X \backslash A$ dır.Bundan dolayı $\forall y \in X$ için

$$(x, y) \notin (X \backslash A) \times (X \backslash A)$$

$$y \in V_A[x] \Rightarrow (x,y) \in V_A \Rightarrow (x,y) \in U_A \times U_A$$

(1) den

$$y \in U_A$$

dır. Tekrar

$$y \in U_A \Rightarrow (x,y) \in U_A \times U_A \,(\text{Çünkü } A \subset U_A \text{ dan}) \Rightarrow (x,y) \in V_A \Rightarrow y \in V_A[x]$$

olur. Böylece $\forall x \in A$ için

$$V_A[x] = U_A$$

dır. Şimdi $V = \cap\{V_A : A \in \mathcal{R}\}$ olarak alalım. $\forall x \in X$ için

$$x \in A \quad \text{ve} \quad V[x] \subset V_A[x] = U_A$$

olacak şekilde bir $A \in \mathcal{R}$ vardır. Sonuç olarak

$$\{V[x] : x \in X\} \prec \mathcal{U}$$

dur. Şimdi V kümesinin $X \times X$ içinde Δ_X in bir $\delta-$komşuluğu olduğunu görmemiz gerekir. Bir $(x,x) \in \Delta_X$ seçelim. $\mathcal{R}$ nin yerel sonluluğundan (güçlü yerel sonluluğundan) sonlu sayıda A kümesi için

$$W_x \cap A \neq \emptyset$$

olacak şekilde $x \in X$ elemanını içeren bir W_x açık (regüler açık) komşuluğu vardır. Bu sonlu sayıda A kümeleri $A_1, A_2, ..., A_k$ olsun. Şimdi

$$\left(\left(\overline{W_x}\right)^o \times \left(\overline{W_x}\right)^o\right) \cap V_{A_1} \cap V_{A_2} \cap ... \cap V_{A_k} \subset V \tag{2}$$

doğru olduğunu gösterelim. Herhangi bir $A \in \mathcal{R} \setminus \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ için

$$W_x \cap A = \emptyset \Rightarrow W_x \subset X \setminus A \Rightarrow \left(\overline{W_x}\right)^o \subset \left(\overline{X \setminus A}\right)^o = X \setminus A$$

dır. Buradan $\forall A \neq A_1, A_2, ..., A_k$ için

$$\left(\overline{W_x}\right)^o \times \left(\overline{W_x}\right)^o \subset (X \backslash A) \times (X \backslash A) \subset V_A$$

olur. Yani

$$\left(\overline{W_x}\right)^o \times \left(\overline{W_x}\right)^o \subset \{V_A \ : \ A \in \mathcal{R}, A \neq A_1, A_2, ..., A_k\}$$

olup (2) buradan görülür. (2) nin sol tarafı (x, x) noktasını içeren $\delta-$ açık küme olup (x, x) noktasının keyfi olması V kümesinin Δ_X in $\delta-$komşuluğu olduğunu kanıtlar.■

Tanım 6.11 *X bir topolojik uzay ve F regüler kapalı bir küme olsun. F kümesini ve $x \in X \backslash F$ noktasını içeren ayrık açık kümeler varsa, X topolojik uzayına hemen hemen regüler denir.*

Teorem 6.12 *Hemen hemen regüler bir X topolojik uzayında aşağıdakiler sağlanır* [9].

(i) *X uzayının regüler açık örtüsünün yerel sonlu inceliği varsa, bu örtünün kapalı yerel sonlu inceliği vardır.*

(ii) *X uzayının regüler açık örtüsünün yerel sonlu kapalı inceliği varsa, bu örtünün yerel sonlu regüler kapalı inceliği vardır.*

Teorem 6.13 *X, her regüler açık örtüsü çift regüler olan bir topolojik uzay olsun. Eğer U kümesi $X \times X$ kartezyen çarpım uzayında Δ_X köşegeninin bir $\delta-$komşuluğu ise, Δ_X köşegeninin $\delta-$ açık simetrik V komşuluğu vardır, öyle ki $VoV = \{(x, y) \in X \times X : (x, z), (z, y) \in V, z \in X\}$ olup $VoV \subset U$ dur.*

Kanıt. Δ_X köşegeninin $\delta-$komşuluğu U kümesi olduğundan, $\forall x \in X$ için

$$W_x \times W_x \subset U$$

olacak şekilde regüler açık W_x komşuluğu vardır. $\mathcal{W} = \{W_x \ : \ x \in X\}$, X uzayının regüler açık örtüsü olduğundan bu örtü X in çift regüler örtüsüdür.

$\mathcal{W}$ çift regüler örtü olduğundan $X \times X$ kartezyen çarpım uzayında Δ_X köşegeninin

$$\{V_1[x] : x \in X\} \prec \mathcal{W}$$

olacak şekilde bir V_1 $\delta-$komşuluğu vardır. Bu $V_1[x]$ komşuluğu için

$$V_1[x] \times V_1[x] \subset U$$

dır. Burada V_1 i açık küme olarak alabiliriz. $V = V_1 \cap V_1^{-1}$ olarak alalım. Açıktır ki V kümesi simetriktir ve Δ_X köşegenini içerir. $x \in X$ olmak üzere; $f_x : X \to X \times X$, $g : X \times X \to X \times X$ dönüşümleri $f_x(y) = (y, x)$ ve $g(x, y) = (y, x)$ şeklinde tanımlı olup, X üzerinde τ_s ve $X \times X$ üzerinde $\tau_s \times \tau_s$ topolojileri varsa ve II. izdüşüm dönüşümü $p_2 : X \times X \to X$ olmak üzere

$$f_x o p_2 = g$$

dir. p_2 ve f_x dönüşümleri sürekli olduğundan g dönüşümüde süreklidir. Buradan U, X in bir $\delta-$ açık komşuluğu ise, $g^{-1}(U) = U^{-1}$ kümesi de $\delta-$ açıktır. Böylece V_1 $\delta-$açık küme olduğundan V_1^{-1} de açık bunun sonucunda $V_1 \cap V_1^{-1}$ yani V açıktır. Bundan dolayı V, simetrik $\delta-$açık komşuluktur öyle ki $\forall x \in X$ için

$$V[x] \times V[x] \subset U$$

dur. $VoV = \bigcup_{x \in X} (V[x] \times V[x])$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $(z, y) \in \bigcup_{x \in X} (V[x] \times V[x])$ alalım, en az bir $x \in X$ için $(z, y) \in V[x] \times V[x]$ buradan $(x, z), (x, y) \in V$ dir. V simetrik $\delta-$açık komşuluk olduğundan (z, x), $(x, y) \in V$ olur. VoV tanımından dolayı $(z, y) \in VoV$ dir. O halde $VoV = \bigcup_{x \in X} (V[x] \times V[x])$ olup

$$VoV \subset U$$

dur.■

Teorem 6.14 *X her regüler açık örtüsü çift regüler olan bir topolojik uzay ve $\mathcal{R}$, X in alt kümelerinin güçlü yerel sonlu (güçlü ayrık) ailesi olsun. Bu durumda $X \times X$ de köşegenin, $\{W[A] : A \in \mathcal{R}\}$ güçlü yerel sonlu (güçlü ayrık) olacak şekilde $\delta -$ açık W komşuluğu vardır.*

Kanıt. $\mathcal{R}$ güçlü yerel sonlu (güçlü ayrık) olduğundan $\forall x \in X$ için x i içeren regüler açık V_x kümesi vardır, öyle ki

$$V_x \cap R \neq \emptyset$$

eşitsizliği en çok sonlu sayıda $R \in \mathcal{R}$ için doğrudur. $\mathcal{V} = \{V_x : x \in X\}$ ailesi X in regüler açık örtüsüdür böylece bu örtü çift regülerdir. Böylece çift regüler örtü tanımından Δ_X köşegeninin

$$\{U[x] : x \in X\} \prec \mathcal{V}$$

olacak şekilde bir U $\delta-$komşuluğu vardır. Tekrar U kümesinin Δ_X köşegeninin bir $\delta-$komşuluğu olmasını kullanırsak, Teorem 6.13 den

$$WoW \subset U$$

olacak şekilde Δ_X köşegeninin bir simetrik $\delta -$ açık W komşuluğu vardır. Şimdi gösterebiliriz ki herhangi bir $A \subset X$ için

$$(WoW)[x] \cap A = \emptyset \Rightarrow W[x] \cap W[A] = \emptyset \qquad (1)$$

dir. Gerçekten

$$y \in W[x] \cap W[A]$$

bir $z \in A$ için

$$(x, y) \in W \; ve \; (z, y) \in W$$

dir. W simetrik olduğundan

$$(x, y), (y, z) \in W \Rightarrow (x, z) \in WoW \Rightarrow z \in (WoW)[x] \cap A$$

dır. $\forall x \in X$ ve bir $V \in \mathcal{V}$ için

$$(WoW)[x] \subset U[x] \subset V$$

dir. $\mathcal{V}$ nin tanımından V kümesi $\mathcal{R}$ nin en çok sonlu sayıda elemanı ile kesişir. Sonuç olarak $(WoW)[x]$, $\mathcal{R}$ nin en çok sonlu sayıda elemanı ile kesişir. (1) den $W[x]$ in en çok sonlu tane $W[A]$ $(A \in \mathcal{R})$ ile kesiştiği görülür.

W, Δ_X in $\delta -$ açık komşuluğu, $f_x : (X, \tau_s) \to (X \times X, \tau_s \times \tau_s)$, $f_x(y) = (x, y)$ olarak alınan f_x sürekli dönüşümü ve $W[x] = f_x^{-1}(W)$ olduğundan $W[x]$, x in $\delta -$ açık komşuluğudur. $W[x]$, x in $\delta -$ açık komşuluğu olmasından dolayı regüler açık bir $x \in T \subset W[x]$ kümesi vardır ve açıktır ki T en çok sonlu sayıda $W[A]$ ile kesişir. Böylece $\{W[A] : A \in \mathcal{R}\}$ güçlü yerel sonlu (güçlü ayrık) bir ailedir.■

Sonuç 6.15 X, *her regüler açık örtüsü çift regüler olan bir topolojik uzay olsun. Eğer X uzayının bir regüler açık $\mathcal{U}$ örtüsünün güçlü yerel sonlu (güçlü ayrık) $\mathcal{R}$ inceliği varsa, bu örtünün güçlü yerel sonlu (güçlü ayrık) açık inceliği vardır.*

Kanıt. Teorem 6.14 den Δ_X köşegeninin, $\{V[A] : A \in \mathcal{R}\}$ ailesi güçlü yerel sonlu olacak şekilde bir V $\delta -$ açık komşuluğu vardır. Bu aile $\mathcal{U}$ örtüsünün inceliği olmayabilir. Bundan dolayı $\forall A \in \mathcal{R}$ için $A \subset U_A$ olacak şekilde $U_A \in \mathcal{U}$ seçebiliriz. $W_A = U_A \cap V[A]$ olarak tanımlayalım. $\{W_A : A \in \mathcal{R}\}$ ailesi aradığımız ailedir.■

Teorem 6.16 X, *her regüler açık örtüsü çift regüler olan bir topolojik uzay ise, X in her regüler açık örtüsünün açık $\sigma -$ güçlü ayrık inceliği vardır.*

Kanıt. Sonuç 6.15 den dolayı $\sigma -$ güçlü ayrık bir incelik bulmak yeterli olacaktır.

$\mathcal{U}$ örtüsü çift regüler bir örtü olduğundan Δ_X in $\{V[x] : x \in X\} \prec \mathcal{U}$ olacak şekilde bir V $\delta -$ açık komşuluğu vardır. $V_0 = V$ olarak tanımlayalım, $V_n o V_n \subset V_{n-1}$ olacak şekilde Teorem 6.13 e tümevarım uygulayarak

Δ_X köşegeni ve $n \in \mathbb{N}$ için simetrik V_n $\delta-$ açık komşuluğunu inşa edebiliriz. $U_1 = V_1$ ve $n = 2, 3, ...$ için

$$U_{n+1} = U_n o V_{n+1}$$

olarak tanımlayalım. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$U_n \subset V_0 = V$$

olduğunu gösterelim. Teorem 6.13 den $V_n o V_n = \bigcup_{x \in X} (V_n[x] \times V_n[x])$ olduğunu biliyoruz. O halde $\forall x \in X$ için $V_n[x] \times V_n[x] \subset V_{n-1}$ ise $V_n[x] \subset V_{n-1}[x]$ buradan $V_n \subset V_{n-1}$ elde edilir. Böylece

$$V_n[x] \times V_n[x] \subset V_{n-1}[x] \times V_n[x] \subset V_{n-1}[x] \times V_{n-1}[x] \subset V_{n-2}$$

yazabiliriz. Yukarıdaki kapsama $\forall x \in X$ için geçerli olduğundan

$$V_n o V_n \subset V_{n-1} o V_n \subset V_{n-1} o V_{n-1} \subset V_{n-2}$$

elde ederiz. Tümevarım metodunu kullanarak

$$U_1 = V_1 \subset V$$

$$U_2 = V_1 o V_2 \subset V_1 o V_1 \subset V$$

ve böylece

$$U_n = V_1 o [V_2 o [...o [V_{n-2} o (V_{n-1} o V_n)]]] \subset V_1 o [V_2 o [...o (V_{n-2} o V_{n-2})]]$$

işlemini devam ettirirsek

$$U_n \subset V_0 = V$$

olduğu görülür. $\{V_0[x] : x \in X\} = \{V[x] : x \in X\} \prec \mathcal{U}$ iken $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\{U_n[x] : x \in X\} \prec \mathcal{U}$$

dır. Zermelo teoreminden (her küme iyi sıralanabilirdir) X içinde bir "$\leq$" iyi sıralama bağıntısı alalım. Her bir $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ için

$$U_n^1(x) = U_n[x] \backslash \bigcup \{U_{n+1}[y] \,:\, y < x\}$$

olsun. $\forall y \in X$ için

$$V_{n+1}[U_n^1(y)]$$

y nin $\delta-$açık komşuluğudur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{U}_n = \{U_n^1(x) \,:\, x \in X\}$$

ailesi güçlü ayrıktır. Bunu doğrulamak için $x \neq y$ iken

$$U_n^1(x) \cap V_{n+1}[U_n^1(y)] = \emptyset$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Aslında bunun tersine

$$p \in U_n^1(x) \cap V_{n+1}[U_n^1(y)] \quad (y \neq x)$$

$$p \in U_n^1(x) = U_n[x] \backslash \bigcup \{U_{n+1}[y] \,:\, y < x\} \quad \text{ve} \quad z \in U_n^1(y) \text{ için } p \in V_{n+1}[z]$$

buradan $\forall y < x \, (y \in X)$ için

$$p \in U_n[x] \quad \text{ve} \quad p \notin U_{n+1}[y] \tag{1}$$

ve $z \in U_n[y]$ için

$$(z, p) \in V_{n+1}$$

fakat

$$z \notin \bigcup \{U_{n+1}[q] \,:\, q < y\} \tag{2}$$

bu durumda

$$(y, p) \in U_n o V_{n+1} = U_{n+1}$$

dir. Yani

$$p \in U_{n+1}[y] \tag{3}$$

(1) ve (3) den $y > x$ ve sonuç olarak (2) den

$$z \notin U_{n+1}[x] \tag{4}$$

olur. Tekrar $(x, p) \in U_n$ ve $(p, z) \in V_{n+1}$ (her bir V_n simetrik olduğundan)

$$(x, z) \in U_n o V_{n+1} = U_{n+1}$$

yani $z \in U_{n+1}[x]$ olup (4) ile çelişir. Çelişkiden dolayı $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{U}_n = \{U_n^1(x) \ : \ x \in X\}$$

ailesi güçlü ayrık olduğu doğrulanmış olur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{U_n[z] \ : \ z \in X\}$ X in bir örtüsüdür. Sonuç olarak $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ ailesinin X in bir örtüsü olduğunu göstermeliyiz. Bir $x \in X$ alalım. $\forall n \in \mathbb{N}$ için, X in ilk noktası olarak,

$$x \in U_n[y(n)]$$

olacak şekilde bir $y(n)$ seçelim. $y(k) = \min\{y(n)\,;\, n = 1, 2, ...\}$ olarak alalım. Bu durumda $z < y(k)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$x \notin U_n[z]$$

dir. $y = y(k)$ yerine koyalım. $\forall z < y$ için

$$x \in U_k[y] \quad \text{ve} \quad x \notin U_{k+1}[z]$$

olduğunu görülür. Böylece $x \in U_k(y)$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ X in bir örtüsü olduğu kanıtlanmış olur.■

Teorem 6.17 *X uzayının her regüler açık örtüsünün açık $\sigma -$ (güçlü) yerel sonlu inceliği varsa, X in her regüler açık örtüsünün (güçlü) yerel sonlu inceliği vardır.*

Kanıt. $\mathcal{U}$, X in regüler açık örtüsü olsun. $\mathcal{U}$ nun her bir $\mathcal{V}_n$ (*güçlü*) yerel sonlu olmak üzere $\mathcal{V} = \bigcup \{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ açık $\sigma -$ (*güçlü*) yerel sonlu inceliği olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ ve $V \in \mathcal{V}_n$ için

$$V_n^1 = V \backslash \bigcup \{U : U \in \mathcal{V}_k; k < n \text{ için } \}$$
$$\left(V_n^1 = \left(\overline{V}\right)^o \backslash \bigcup \left\{\left(\overline{U}\right)^o : U \in \mathcal{V}_k;\ k < n \text{ için } \right\}\right)$$

olarak tanımlayalım. $\mathcal{W} = \{V_n^1 : n \in \mathbb{N}, V \in \mathcal{V}_n\}$ olsun. Bir $x \in X$ alalım. $V \in \mathcal{V}_n$ için $x \in V\left(x \in \left(\overline{V}\right)^o\right)$ olacak şekilde n ilk pozitif tam sayı olsun. Buradan açıktır ki $x \in V_n^1$ dır. Sonuç olarak $\mathcal{W}$ ailesi X uzayını örter ve $\mathcal{W} \prec \mathcal{U}$ dur. Şimdi $\mathcal{W}$ ailesinin (güçlü) yerel sonlu olduğunu gösterelim. $x \in X$ için

$$x \in V \ \left(x \in \left(\overline{V}\right)^o\right)$$

olmak üzere $V \in \mathcal{V}_n$ özelliğini sağlayan ilk pozitif tam sayı n olsun. Bu durumda V $\left(\left(\overline{V}\right)^o\right)$ x in bir açık (regüler açık) komşuluğudur. $\forall k > n$ ve her bir $P \in \mathcal{V}_k$ için

$$P_k^1 \cap V = \emptyset \quad \left(P_k^1 \cap \left(\overline{V}\right)^o = \emptyset\right)$$

$k \leq n$ iken her bir $\mathcal{V}_k$ (güçlü) yerel sonludur. Buradan $x \in X$ in, $\mathcal{V}_k$ $(k \leq n)$ nın en çok sonlu sayıda öğesini kesecek şekilde bir U_k komşuluğu (regüler açık komşuluk) vardır. Bu durumda $S_x = V \cap U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n$ $\left(S_x = \left(\overline{V}\right)^o \cap U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n\right)$ x in, $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ nin en çok sonlu sayıda elemanını kesecek şekilde bir komşuluğudur. Böylece S_x, $\mathcal{W}$ nin en çok sonlu sayıda elemanını keser, yani $\mathcal{W}$ (güçlü) yerel sonludur.■

Teorem 6.18 *X uzayı hemen hemen regüler uzay ise aşağıdakiler eşdeğerdir.*

(i) *X yaklaşık parakompakttır.*

(ii) *X in her regüler açık örtüsünün bir güçlü yerel sonlu inceliği vardır.*

(iii) *X in her regüler açık örtüsünün bir yerel sonlu inceliği vardır.*

(iv) *X in her regüler açık örtüsünün bir kapalı yerel sonlu inceliği vardır.*

(v) X *in her regüler açık örtüsünün bir regüler kapalı yerel sonlu inceliği vardır.*

(vi) X *in her regüler açık örtüsü çift regülerdir.*

(vii) X *in her regüler açık örtüsünün bir açık* $\sigma -$ *güçlü ayrık inceliği vardır.*

(viii) X *in her regüler açık örtüsünün bir açık* $\sigma -$*güçlü yerel sonlu inceliği vardır.*

(ix) X *in her regüler açık örtüsünün bir açık* $\sigma -$*yerel sonlu inceliği vardır.*

Kanıt. **(i)⇒(ii)** $\mathcal{U}$, X uzayının regüler açık örtüsü olsun. X uzayı yaklaşık parakompakt olduğundan $\mathcal{U}$ nun açık yerel sonlu $\mathcal{V}$ inceliği vardır. $\mathcal{V}$ ailesi yerel sonlu olduğundan $\forall x \in X$ ve x in en çok sonlu sayıda $V \in \mathcal{V}$ elemanı için

$$U_x \cap V \neq \emptyset$$

olacak şekilde U_x açık komşuluğu vardır. Bu özelliği sağlayan sonlu sayıda V kümeleri $V_1, V_2, ..., V_k$ olsun. Bu durumda $V \in \mathcal{V} / \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ için

$$\left(\overline{U_x}\right)^o \cap V = \emptyset$$

dir. Böylece $\mathcal{V}$ ailesi $\mathcal{U}$ ailesinin güçlü yerel sonlu inceliğidir.

(ii)⇒(iii), **(vii)⇒(viii)** ve **(viii)⇒(ix)** gerektirmeleri açıktır.

(iii)⇒(iv) ve **(iv)⇒(v)** gerektirmeleri Teorem 6.12 den görülür.

(v)⇒(vi) gerektirmesi Teorem 6.10 dan görülür.

(vi)⇒(vii) gerektirmesi Teorem 6.16 dan görülür.

(viii)⇒(ii) ve **(ix)⇒(iii)** gerektirmeleri Teorem 6.17 den görülür.

(ii)⇒(i) $\mathcal{U}$, X uzayının regüler açık örtüsü ve $\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$ örtüsünün güçlü yerel sonlu inceliği olsun. $\forall A \in \mathcal{R}$ için $A \subset U_A$ olacak şekilde bir $U_A \in \mathcal{U}$ seçelim. X uzayı hemen hemen regüler olduğundan Teorem 6.10 ve 6.12 den $\mathcal{U}$ örtüsü çift regülerdir. Böylece Teorem 6.14 den $X \times X$ kartezyen çarpım uzayında Δ_X köşegeninin $\{V[A] : A \in \mathcal{R}\}$ ailesi güçlü yerel sonlu olacak şekilde $\delta -$ açık V komşuluğu vardır. $W_A = V[A] \cap U_A$ olarak alalım. Bu durumda $\{W_A : A \in \mathcal{R}\}$ ailesi $\mathcal{U}$ örtüsünün yerel sonlu açık inceliğidir.■

Teorem 6.21 *X hemen hemen regüler topolojik uzay, A kümesi $\alpha-$yaklaşık parakompakt alt küme ve U kümesi A nın regüler açık komşuluğu ise, A kümesinin $A \subset V \subset U$ olacak şekilde bir V regüler kapalı komşuluğu vardır.*

Kanıt. X uzayı hemen hemen regüler olduğundan, $\forall x \in A$ için

$$x \in W_x \subset \overline{W_x} \subset U$$

olacak şekilde x noktasının regüler açık W_x komşuluğu vardır. $\mathcal{W} = \{W_x : x \in A\}$ ailesi A kümesinin regüler açık örtüsüdür. Bundan dolayı A kümesini örten ve $\mathcal{W}$ ailesinin inceliği olan, X içinde yerel sonlu $\mathcal{U}$ açık ailesi vardır. $W = \bigcup \{\overline{V_i} : V_i \in \mathcal{U}\}$ olsun. Böylece

$$V = \overline{W} = \overline{\bigcup \{V_i : V_i \in \mathcal{U}\}} = \bigcup \{\overline{V_i} : V_i \in \mathcal{U}\}$$

ailesi A kümesinin regüler kapalı bir komşuluğu olup

$$A \subset V \subset U$$

dur.■

Sonuç 6.22 *X uzayı hemen hemen regüler topolojik uzay, A kümesi $\alpha-$yaklaşık güçlü parakompakt alt küme ve U kümesi A nın regüler açık komşuluğu ise, $A \subset V \subset U$ olacak şekilde A kümesinin bir V regüler kapalı komşuluğu vardır.*

Kanıt. Her $\alpha-$yaklaşık güçlü parakompakt alt küme, $\alpha-$yaklaşık parakompakttır.■

Tanım 6.23 *X uzayına ait her noktanın, $\overline{U}$ kümesi $\alpha-$yaklaşık parakompakt olmak üzere bir U açık komşuluğu varsa X uzayına yerel yaklaşık parakompakt uzay denir* [11].

Açıktır ki, her yaklaşık parakompakt uzay yerel yaklaşık parakompakttır. Fakat yerel yaklaşık parakompakt uzay, yaklaşık parakompakt olmayabilir.

Bu kısımda amacımız A.H.Stone nun "her parakompakt uzay normaldir„ teoremini genişletmektir. Bu teorem bir Hausdorff topolojik uzayda yaklaşık parakompaktlık kavramının bir uzayın tam normalliğe denk olduğunu belirtir.

Tanım 6.24 *X uzayının her regüler açık $\mathcal{U}$ örtüsü için X uzayının açık $\mathcal{V}$ örtüsü var ve $\mathcal{V}^* \prec \mathcal{U}$ oluyorsa, X uzayına yaklaşık tam normal uzay denir* [12].

Tanım 6.25 *Bir X kümesinin $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ örtüleri verilsin. Her $x \in X$ için $st(x,\mathcal{U}) \subset V$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{V}$ varsa, $\mathcal{U}$ ya $\mathcal{V}$ nin delta inceliği ($\delta-$inceliği) denir ve bu durum $\mathcal{U}^\Delta \prec \mathcal{V}$ yazılarak gösterilir.*

X in bir $\mathcal{U}$ örtüsü için

$$\mathcal{U} \prec \mathcal{U}^\Delta \prec \mathcal{U}^* \prec \mathcal{V}$$

olduğu kolayca görülür. Yani her yıldız incelik delta inceliktir. Ayrıca $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ örtüleri için

$$\mathcal{U}^\Delta \prec \mathcal{V} ve\ \mathcal{V}^\Delta \prec \mathcal{W}$$

ise

$$\mathcal{U}^* \prec \mathcal{W}$$

olduğunu kısaca gösterelim: $U \in \mathcal{U}$ alalım. $st(U,\mathcal{U}) \subset W$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{W}$ olduğunu görmeliyiz. Şimdi $x \in st(U,\mathcal{U})$ için $\mathcal{U}^\Delta \prec \mathcal{V}$ olduğundan öyle bir $V_x \in \mathcal{V}$ vardır ki, $st(x,\mathcal{U}) \subset V_x$ olur. O zaman

$$st(U,\mathcal{U}) = \bigcup_{x\in U} st(x,\mathcal{U}) \subseteq \bigcup_{x\in U} V_x \tag{1}$$

yazılabilir. Şimdi keyfi, fakat seçildikten sonra sabit bir $x_0 \in U$ alalım. Her $x \in U$ için $U \subseteq st(x,\mathcal{U}) \subseteq V_x$ olduğundan $x_0 \in V_x$ dir. Böylece

$$\bigcup_{x\in U} V_x \subseteq st(x_0,\mathcal{V}) \tag{2}$$

olur. $\mathcal{V}^{\Delta} \prec \mathcal{W}$ *olduğundan* $x_0 \in X$ *için* $\exists W \in \mathcal{W} \ni st(x_0, \mathcal{V}) \subseteq W$ *dir. Böylece* (1) *ve* (2) *den*

$$st(U,\mathcal{U}) \subseteq \bigcup_{x \in U} V_x \subseteq st(x_0, \mathcal{V}) \subseteq \mathcal{W}$$

bulunur. O halde $\mathcal{U}^* \prec \mathcal{W}$ *dir.*

Örnek 6.26 *Bir* (X,d) *metrik uzayında* $\mathcal{U} = \{B(x, \frac{1}{3}) : x \in X\}$ *ve* $\mathcal{V} = \{B(x, \frac{1}{9}) : x \in X\}$ *örtüleri için*

$$\mathcal{V}^* \prec \mathcal{U}$$

dur. Çünkü $x \in X$ *için* $st(B(x, \frac{1}{9}), \mathcal{V}) \subseteq B(x, \frac{1}{3})$ *dur. Gerçekten* $y \in st(B(x, \frac{1}{9}), \mathcal{V})$ *için* $\exists x_1 \in X \ni y \in B(x_1, \frac{1}{9})$ *ve* $B(x, \frac{1}{9}) \cap B(x_1, \frac{1}{9}) \neq \emptyset$. *Şimdi* $z \in B(x, \frac{1}{9}) \cap B(x_1, \frac{1}{9})$ *ise,*

$$d(x,y) \leq d(x,x_1) + d(x_1,y) \leq d(x,z) + d(z,x_1) + d(x_1,y) \leq \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

olur. Yani $st(B(x, \frac{1}{9}), \mathcal{V}) \subseteq B(x, \frac{1}{3})$ *dur. Öyleyse* $\mathcal{V}^* \prec \mathcal{U}$ *dur.*

Teorem 6.27 *Bir* X *uzayı yaklaşık tam normaldir* $\Leftrightarrow$ X *uzayının her regüler açık örtüsünün regüler açık* $\delta-$*inceliği vardır.*

Kanıt. X uzayı yaklaşık tam normal ise X uzayının herhangi bir $\mathcal{V}$ örtüsü için $\mathcal{V}^{\Delta} \prec \mathcal{U}$ olduğundan kanıt açıktır.

Tersine X uzayının regüler açık $\mathcal{U}$ örtüsü verildiğinde $\mathcal{V}^{\Delta} \prec \mathcal{U}$ olacak şekilde regüler açık $\mathcal{V}$ örtüsü vardır. Şimdi X uzayının regüler açık $\mathcal{V}$ örtüsü için $\mathcal{W}^{\Delta} \prec \mathcal{V}$ olacak şekilde regüler açık $\mathcal{W}$ örtüsü vardır.

$$\mathcal{W} \prec \mathcal{W}^{\Delta} \prec \mathcal{V}$$

buradan

$$\mathcal{W}^{\Delta} \prec \mathcal{W}^{\Delta\Delta} \prec \mathcal{V}^{\Delta}$$

ve böylece

$$\mathcal{W}^{\Delta} \prec \mathcal{W}^{*} \prec \mathcal{W}^{\Delta\Delta}$$

olduğundan X uzayının regüler açık $\mathcal{W}$ örtüsü elde ederiz öyle ki $\mathcal{W}^{*} \prec \mathcal{U}$ dir. Böylece X uzayının yaklaşık tam normal olduğunu göstermiş olduk.■

Tanım 6.28 *X uzayının F ve G iki ayrık alt kümesi biri regüler kapalı ve diğeri $\delta-$kapalı olsun. $F \subset U$, $G \subset V$ $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri varsa, X uzayına yaklaşık normaldir denir.*

Teorem 6.29 *Her yaklaşık tam normal uzay yaklaşık normaldir.*

Kanıt. X yaklaşık tam normal uzayında, F ve G ayrık sırasıyla regüler kapalı ve $\delta-$kapalı kümeler olsun. $X \backslash F$ regüler açık ve $X \backslash G$ $\delta-$açık kümedir. Bu durumda X uzayı içinde $X \backslash G = \bigcup_{s \in S} G_s$ olacak şekilde regüler açık kümelerin $\{G_s : s \in S\}$ ailesi vardır. Böylece $\mathcal{U} = \{X \backslash F, G_s : s \in S\}$ ailesi X uzayının regüler açık örtüsüdür. Teorem 6..27 den ve X in yaklaşık tam normal olmasından $\mathcal{B}^{\Delta} \prec \mathcal{U}$ olacak şekilde X uzayının regüler açık $\mathcal{B}$ örtüsü vardır. $U = st\,(F, \mathcal{B})$ ve $V = st\,(G, \mathcal{B})$ olarak alalım. Bu durumda $F \subset U$ ve $G \subset V$ olacak şekilde X uzayında U ve V açık kümeleri vardır. Şimdi $U \cap V = \emptyset$ olduğunu görmeliyiz.

$U \cap V \neq \emptyset$ olarak alalım. Bu durumda $V_1 \cap F \neq \emptyset$, $V_2 \cap G \neq \emptyset$ ve $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ olacak şekilde $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ vardır. O halde bir $p \in V_1 \cap V_2$ vardır. Açıktır ki

$$V_1 \cup V_2 \subset st\,(p, \mathcal{B})\ , \quad st\,(p, \mathcal{B}) \cap F \neq \emptyset \quad \text{ve} \quad st\,(p, \mathcal{B}) \cap G \neq \emptyset$$

dır. Sonuç olarak

$$st\,(p, \mathcal{B}) \nsubseteq X \backslash F \quad \text{ve} \quad st\,(p, \mathcal{B}) \nsubseteq X \backslash G = \bigcup_{s \in S} G_s$$

dır. Yani $\forall s \in S$ için

$$st\,(p, \mathcal{B}) \nsubseteq G_s$$

dır. Bu bir çelişkidir, çünkü $\mathcal{B}^{\Delta} \prec \mathcal{U}$ olduğundan $U \cap V = \emptyset$ dur. Böylece X uzayı yaklaşık normaldir.■

Sonuç 6.30 *Bir Hausdorff yaklaşık normal uzay hemen hemen regülerdir.*

Sonuç 6.31 *Bir Hausdorff yaklaşık tam normal uzay hemen hemen regü lerdir.*

Teorem 6.32 *Bir Hausdorff yaklaşık parakompakt uzay yaklaşık normaldir.*

Kanıt. İlk olarak bir Hausdorff yaklaşık parakompakt uzayın hemen hemen regüler olduğunu gösterelim. F kümesi regüler kapalı küme ve $p \in X \backslash F$ olsun. $\forall q \in F$ için X uzayının Hausdorff olmasından, $V(q) \cap U_q(p) = \emptyset$ olacak şekilde $q \in V(q)$ ve $p \in U_q(p)$ açık kümeleri vardır. Buradan $p \notin \overline{V(q)}$ olduğu görülür. Sonuç olarak

$$\mathcal{V} = \left\{X \backslash F \,,\, \left(\overline{V(q)}\right)^{o} \,:\, q \in F\right\}$$

X uzayının regüler açık örtüsü olur. X uzayının yaklaşık parakompaktlığından $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ olacak şekilde X in yerel sonlu açık bir $\mathcal{U}$ örtüsü vardır. Şimdi $st\,(F,\mathcal{U})$ $(= U$ diyelim) kümesi açık bir kümedir ve $F \subset U$ dur. Buradan X uzayının hemen hemen regüler olduğunu göstermek için $p \notin \overline{U}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten $U' \in \mathcal{U}$ ve $U' \cap F \neq \emptyset$ ise $U' \not\subset X \backslash F$ dir. $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ olduğundan $U' \subset \overline{V(q)}$ olacak şekilde $q \in F$ vardır. Buradan $\overline{U'} \subset \overline{V(q)}$ dur. $p \notin \overline{V(q)}$ olduğundan $p \notin \overline{U'}$ dir. Yani

$$p \notin \bigcup \{\overline{U'} \,:\, U' \in \mathcal{U} \,,\, U' \cap F \neq \emptyset\} =$$

$$\overline{\left[\bigcup \{U' \in \mathcal{U} \,:\, U' \cap F \neq \emptyset\}\right]} \; (\mathcal{U} \text{ ailesi yerel sonlu olduğundan}) = \overline{U}$$

dır. Şimdi X uzayının yaklaşık normal olduğunu gösterelim. X uzayında F ve G ayrık, sırasıyla $\delta-$kapalı ve regüler kapalı kümeler olsunlar. X uzayının hemen hemen regülerliğinden $\forall p \in F$ için

$$\overline{V(p)} \cap G = \emptyset \tag{1}$$

olacak şekilde açık bir $V(p)$ kümesi vardır. $X \backslash F$ kümesi $\delta-$açık olduğundan $\{G_s : s \in S\}$ ailesi X uzayının regüler açık kümelerinin bir ailesi olmak üzere

$$X \backslash F = \bigcup_{s \in S} G_s$$

dir. $\mathcal{V} = \left\{G_s, \left(\overline{V(p)}\right)^o : s \in S, p \in F\right\}$ ailesi X uzayının bir regüler açık örtüsüdür. $U = st(F, \mathcal{U})$ olarak alalım. O halde

$$\overline{U} = \overline{\left[\bigcup \{U' \in \mathcal{U} : U' \cap F \neq \emptyset\}\right]} = \bigcup \{\overline{U'} : U' \in \mathcal{U}, U' \cap F \neq \emptyset\} \qquad (2)$$

$\forall s \in S$ için

$$U' \cap F \neq \emptyset \Rightarrow U' \not\subset X \backslash F = \bigcup_{s \in S} G_s \Rightarrow U' \not\subset G_s$$

dir. $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ olduğundan, $U' \subset \left(\overline{V(p)}\right)^o$ olacak şekilde $p \in F$ vardır. Bu durumda (1) den

$$\overline{U'} \subset \overline{V(p)}$$

ve (2) den

$$\overline{U} \subset X \backslash G$$

dir. Sonuç olarak

$$F \subset U \subset \overline{U} \subset X \backslash G$$

den X uzayının yaklaşık normal olduğu görülür.■

Önerme 6.33 *X bir yaklaşık normal uzay olsun. X in her $\Omega = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$ nokta sonlu regüler açık örtüsünün $\forall \alpha \in I$ için $\overline{V_\alpha} \subset G_\alpha$ olacak şekilde bir $\{V_\alpha : \alpha \in I\}$ regüler açık örtüsü vardır.*

Kanıt. X yaklaşık normal uzayında Zermelo Teoreminden I kümesi üzerinde bir iyi sıralama bağıntısı " $\leq$ " seçelim öyleki T herhangi bir sayı olmak üzere

$$\Omega = \{G_\alpha : \alpha < T\}$$

olsun. $\forall \alpha < T$ için

$$X \backslash \left[\bigcup \{ V_\beta : \beta < \alpha \} \cup \bigcup \{ G_\gamma : \gamma > \alpha \} \right] \subset V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset G_\alpha \qquad (1)$$

olacak şekilde bir regüler açık küme tanımlayalım. Bunun için α üzerinde tümevarım uygulayalım. İlk olarak V_0 kümesini tanımlayalım.

$X \backslash [\bigcup \{ G_\gamma : \gamma > 0 \}]$, X uzayında bir $\delta-$kapalı kümedir ve G_0 kümesi tarafından kapsanır. (Ω, X uzayının örtüsü olduğundan) X uzayı yaklaşık normal olduğundan

$$X \backslash \left[\bigcup \{ G_\gamma : \gamma > 0 \} \right] \subset V_0 \subset \overline{V_0} \subset G_0$$

olacak şekilde bir regüler açık V_0 kümesi vardır. Varsayalım ki $\forall \beta < \alpha$ için V_β kümesini tanımlamış olalım. Bu durumda $\{ V_\beta : \beta < \alpha \} \cup \{ G_\gamma : \gamma \geq \alpha \}$ kümesi X uzayının bir örtüsüdür. Gerçekten eğer $p \in X$ ise $\forall \gamma \geq \alpha$ için $p \notin G_\gamma$ ise Ω nın nokta sonluluğundan $p \in G_\beta$ olacak şekildeki $\beta < \alpha$ en büyük sayı olsun. Eğer $\forall \beta' < \beta$ için $p \notin V_{\beta'}$ ise (1) den

$$p \in X \backslash \left[\bigcup \{ V_{\beta'} : \beta' < \beta \} \cup \bigcup \{ G_{\beta''} : \beta'' > \beta' \} \right] \subset V_\beta$$

olup $p \in V_\beta$ dır. Şimdi

$$X \backslash \left[\bigcup \{ V_\beta : \beta < \alpha \} \cup \bigcup \{ G_\gamma : \gamma > \alpha \} \right] \subset G_\alpha$$

olup, X uzayının yaklaşık normalliğinden,

$$X \backslash \left[\bigcup \{ V_\beta : \beta < \alpha \} \cup \bigcup \{ G_\gamma : \gamma > \alpha \} \right] \subset V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset G_\alpha$$

olacak şekilde bir regüler açık V_α kümesi vardır. Buradan $\forall \alpha < T$ için (1) i sağlayan V_α regüler açık kümelerini inşa edebiliriz, bir başka deyişle $\forall \alpha < T$ için V_α regüler açık küme olup

$$\overline{V_\alpha} \subset G_\alpha$$

dır. Son olarak $\{ V_\alpha : \alpha < T \}$ ailesinin X uzayını örttüğünü göstermeliyiz. Bir $p \in X$ seçelim. X uzayının Ω örtüsü nokta sonlu olduğundan $p \in G_\beta$

olacak şekildeki $\beta < T$ en büyük sayı vardır. Buradan $p \notin \bigcup\{G_\gamma : \gamma > \beta\}$ dır. Eğer $\forall \beta' < \beta$ için $p \notin V_{\beta'}$ ise

$$p \in X \backslash \left[\left[\bigcup\{G_\gamma : \gamma > \beta\}\right] \cup \left[\bigcup\{V_{\beta'} : \beta' < \beta\}\right]\right] \subset V_\beta$$

dır. Böylece $p \in V_\beta$ dır. Sonuç olarak $\forall \alpha \in I$ için $\overline{V_\alpha} \subset G_\alpha$ olan $\{V_\alpha : \alpha \in I\}$ regüler açık örtüyü elde ederiz.■

Önerme 6.34 *Bir yaklaşık normal uzayın her regüler açık yerel sonlu örtüsünün bir regüler açık delta inceliği vardır.*

Kanıt. Varsayalım ki $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in I\}$ X yaklaşık normal uzayının bir yerel sonlu regüler açık örtüsüdür. Önerme 6.33 i kullanırsak, $\forall \alpha \in I$ için $\overline{W_\alpha} \subset V_\alpha$ olacak şekilde bir regüler açık $\mathcal{W} = \{W_\alpha : \alpha \in I\}$ örtüsü vardır. I' kümesi I indeks kümesinin alt kümesi olsun. $P(I') = [\bigcap\{V_\alpha : \alpha \in I'\}] \cap [\bigcap\{X \backslash \overline{W_\alpha} : \alpha \in I \backslash I'\}]$ kümesini tanımlayalım. $P(I')$ kümesi nin regüler açık küme olduğunu kanıtlayalım.

$\mathcal{V}$ ailesi yerel sonlu olduğundan $\overline{\mathcal{W}}(= \{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\})$ aileside yerel sonludur. Bu durumda

$$\bigcap\{X \backslash \overline{W_\alpha} : \alpha \in I \backslash I'\} = X \backslash \bigcup\{\overline{W_\alpha} : \alpha \in I \backslash I'\} = X \backslash \overline{\bigcup\{W_\alpha : \alpha \in I \backslash I'\}}$$

dır. Diğer taraftan $\mathcal{V}$ ailesi yerel sonlu olduğundan, $\bigcap\{V_\alpha : \alpha \in I'\} = \emptyset$ eşitliği I' kümesi sonsuzsa doğrudur ve I' kümesi sonlu ise $\bigcap\{V_\alpha : \alpha \in I'\}$ regüler açıktır. Buradan I nın her I' alt kümesi için $P(I')$ kümesi regüler açık kümedir. Bir $p \in X$ için $I' = \{\alpha \in I : p \in \overline{W_\alpha}\}$ iken $p \in P(I')$ dir. Bundan dolayı $\mathcal{P} = \{P(I') : I' \subset I\}$ ailesi X uzayının regüler açık örtüsüdür. $\mathcal{P}^\Delta \prec \mathcal{V}$ olduğunu kanıtlamak için bir $p \in X$ noktasını göz önüne alalım. $\mathcal{W}$ ailesi X uzayının bir örtüsü olduğundan bir $\beta \in I$ için $p \in W_\beta$ dır. $p \in P(I')$ olsun, bu durumda $P(I')$ nın tanımından $\beta \in I'$ olduğunu biliyoruz. Çünkü $\beta \in I \backslash I'$ ise $p \notin X \backslash \overline{W_\beta} \supset P(I')$ olup $p \in P(I')$ oluşuyla çelişir. Bundan dolayı $P(I') \subset V_\beta$ dır. Bu durum p noktasını içeren her $P(I')$ için sağlandığından $st(p,\mathcal{P}) \subset V_\beta$ den

$$\mathcal{P}^\Delta \prec \mathcal{V}$$

dir.■

Teorem 6.35 Bir X Hausdorff uzayı, yaklaşık parakompakttır $\Leftrightarrow$ X uzayı yaklaşık tam normaldir.

Kanıt. Varsayalım ki, X Hausdorff uzayı yaklaşık parakompakt olsun. Bu durumda Teorem 6.32 den X uzayı yaklaşık normaldir. $\mathcal{U}$, X uzayının regüler açık örtüsü ise $\mathcal{U}$ örtüsünün bir regüler açık yerel sonlu $\mathcal{V}$ inceliği vardır ve Öner me 6.34 den $\mathcal{V}$ nin bir regüler açık delta $\mathcal{W}$ inceliği vardır yani $\mathcal{W}^\Delta \prec \mathcal{V}$,ise $\mathcal{W}^\Delta \prec \mathcal{U}$ dur. Bu durumda Teorem 6.27 den X uzayı yaklaşık tam normaldir.

Tersine, X Hausdorff uzayı yaklaşık tam normal olsun. $\Omega = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$ X uzayının bir regüler açık örtüsü olsun. $\Omega_0 = \Omega$ ve $n = 0,1,2,...$ için Ω_{n+1}, Ω_n in regüler açık yıldız inceliği inceliği olacak şekilde tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan $\{\Omega_i\}$ regüler açık kümelerin dizisini oluşturarak X uzayının bir örtüsünü oluşturalım. $\forall\ \alpha \in I$ ve $n = 1,2,...$ için

$$G_{\alpha,n} = \{x \in X : x \in V,\ st(V,\Omega_n) \subset G_\alpha \text{ olacak şekilde } V \text{ regüler açık kümesi vardır}\}$$

olarak alalım. Gösterelim ki, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{G_{\alpha,n} : \alpha \in I\}$ ailesi X uzayının açık örtüsü olup Ω ailesinin bir inceliğidir. $\{G_{\alpha,n} : \alpha \in I\}$ ailesine $\forall n \in \mathbb{N}$ için n üzerinden tümevarım uygulayarak X uzayının bir örtüsü olduğunu gösterelim. $x \in X$ alalım. Bu durumda bir $V^1 \in \Omega_1$ için $x \in V^1$ olur. $\Omega_1^* \prec \Omega$ olduğundan $st(V^1,\Omega_1) \subset G_\alpha$ olacak şekilde $G_\alpha \in \Omega$ vardır. Böylece $G_{\alpha,1}$ in tanımından $x \in G_{\alpha,1}$ dir. Buradan $\{G_{\alpha,1} : \alpha \in I\}$ ailesi X uzayının bir örtüsüdür. Varsayalım ki $\{G_{\alpha,n-1} : \alpha \in I\}$ ailesi X uzayının bir örtüsü olsun. Bu durumda bir $x \in X$ için x elemanını içeren regüler açık V kümesi vardır, öyle ki bir $\alpha \in I$ için $st(V,\Omega_{n-1}) \subset G_\alpha$ ve $x \in G_{\alpha,n-1}$ dir. Ω, X uzayının örtüsü olduğundan bir $V^n \in \Omega$ için $x \in V^n$

dir. $\Omega_n^* \prec \Omega_{n-1}$ olduğundan $st(V^n, \Omega_n) \subset T^{n-1}$ olacak şekilde $T^{n-1} \in \Omega_{n-1}$ vardır. $x \in st(V^n, \Omega_n)$ olduğundan $x \in T^{n-1} \in \Omega_{n-1}$ dır. Bundan dolayı $x \in V \cap T^{n-1}$ yani $V \cap T^{n-1} \neq \emptyset$ dir. Böylece $T^{n-1} \subset st(V, \Omega_{n-1}) \subset G_\alpha$ buradan $st(V^n, \Omega_n) \subset T^{n-1} \subset G_\alpha$ dır. Bu durumda $x \in G_{\alpha,n}$ ve böylece $\forall n \in N$ için $\{G_{\alpha,n} : \alpha \in I\}$ ailesi X uzayının bir örtüsüdür. Eğer $x \in G_{\alpha,n}$ ve $y \notin G_{\alpha,n+1}$ ise $x, y \in G$ olacak şekilde bir $G \in \Omega_{n+1}$ yoktur. Gerçekten her $G \in \Omega_{n+1}$ için

$$st(G, \Omega_{n+1}) \subset H$$

olacak şekilde $(\Omega_{n+1}^* < \Omega_n$ olduğundan) $H \in \Omega_n$ vardır. Bundan dolayı

$$x \in G \cap G_{\alpha,n} \Rightarrow H \subset st(x, \Omega_n) \subset G_\alpha$$

dır. Gerçekten $x \in G$ olduğundan $x \in st(G, \Omega_{n+1})$ burdan $x \in H$ dir. Buradan

$$H \subset st(x, \Omega_n)$$

dir. Tekrar $x \in G_{\alpha,n}$ olduğundan x noktasının

$$st(V, \Omega_n) \subset G_\alpha$$

olacak şekilde bir açık V komşuluğu vardır. $x \in V$ olduğundan Ω_n in x noktasını içeren tüm elemanlarının V kümesi ile arakesitleri boş kümeden farklıdır, bundan dolayı her biri $st(V, \Omega_n)$ kümesinin içindedir. Buradan

$$H \subset st(x, \Omega_n) \subset G_\alpha$$

dır. Şimdi bir $H \in \Omega_n$ için $st(G, \Omega_{n+1}) \subset H$ ve $H \subset G_\alpha$ dir. Bir $z \in G$ için G kümesi x noktasını içeren regüler açık küme olup $st(G, \Omega_{n+1})$ dan $z \in G_{\alpha,n+1} \subset G_\alpha$ olup $G \subset G_{\alpha,n+1}$ dir. Böylece $y \notin G$ dir. I kümesi "$\leq$" bağıntısı ile iyi sıralı olsun ve $\forall \beta \in I$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$H_{\beta,n} = G_{\beta,n} \setminus \overline{\left[\bigcup_{\alpha<\beta} G_{\alpha,n+1} \right]}$$

olsun. $\gamma, \eta \in I$ birbirinden farklı iki öğe olsun. Bu durumda $\gamma > \eta$ yada $\gamma < \eta$ dir. $\gamma < \eta$ ise

$$H_{\eta,n} \subset X \backslash G\gamma, n+1$$

veya $\gamma > \eta$ ise

$$H_{\gamma,n} \subset X \backslash G\eta, n+1$$

dir. Şimdi eğer $\gamma \neq \eta \, (\gamma < \eta \, ise)$ $x \in H_{\gamma,n}$ ve $y \in H_{\eta,n}$ olup $G \in \Omega_{n+1}$ ve $x, y \in G$ olacak şekilde bir $G \in \Omega_{n+1}$ kümesi yoktur. Gerçekten $x \in H_{\gamma,n}$ ise $x \in G_{\gamma,n}$ dir. Tekrar $y \in H_{\eta,n} \subset X \backslash G_{\gamma,n+1}$ ise $y \notin G_{\gamma,n+1}$ dir. Bu durumda $x, y \in G$, $G \in \Omega_{n+1}$ olacak şekilde bir G kümesi yoktur. Bundan dolayı $\forall x \in X$ için bir $G \in \Omega_{n+1}$ vardır, öyle ki $x \in G$ ve $n \in \mathbb{N}$ sabit olmak üzere G kümesi en fazla bir $H_{\alpha,n}$ kümesi ile kesişir. Böylece $\{H_{\alpha,n} : \alpha \in I \, , \, n \in \mathbb{N}\}$ ailesi $n = 1, 2...$ için açık kümelerin ayrık bir ailesidir. Sonuç olarak $\{H_{\alpha,n} : \alpha \in I, n \in \mathbb{N}\}$ ailesinin X uzayının bir örtüsü olduğunu gösterelim.

$y \in X$ ve α_n , $y \in G_{\alpha_n,n}$ özelliğini sağlayan ilk indeks sayısı olsun. ($\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{G_{\alpha,n} : \alpha \in I\}$ ailesinin X uzayı için bir örtü olduğunu kanıtladık) $\alpha(y) = \inf \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ olarak alırsak, bir $n \in \mathbb{N}$ için $y \in G_{\alpha(y),n}$ elde ederiz. Böylece $\alpha < \alpha(y) < \alpha_{n+2}$ için $y \notin G_{\alpha,n+2}$ dir. $\alpha < \alpha(y)$ için $x \in G_{\alpha,n+1}$ olsun. Bu durumda hem x hemde y noktasını içine alacak bir $G \in \Omega_{n+2}$ yoktur. Dolayısıyla y noktasını içeren Ω_{n+2} içindeki küme ailesi $\bigcup\{G_{\alpha,n+1} : \alpha < \alpha(y)\}$ ailesi ile kesişmezler. Şimdi

$$H_{\alpha(y),n} = G_{\alpha(y),n} \backslash \overline{\left[\bigcup_{\alpha < \alpha(y)} G_{\alpha,n+1} \right]}$$

ve $y \in G_{\alpha(y),n}$ dir. Fakat

$$st(y, \Omega_{n+2}) \cap \left[\bigcup \{G_{\alpha,n+1} : \alpha < \alpha(y)\} \right] = \emptyset \, , \, y \notin \overline{\left[\bigcup_{\alpha < \alpha(y)} G_{\alpha,n+1} \right]}$$

olduğundan $y \in H_{\alpha(y),n}$ dir. Böylece X uzayının her regüler açık örtüsünün bir açık $\sigma-$ayrık inceliği vardır. Her $\sigma-$ayrık incelik, $\sigma-$yerel sonlu olup Sonuç 6.31 ve Teorem 6.18 den X uzayının yaklaşık parakompakt olduğu görülür.■

KAYNAKLAR

[1] WILLARD, S., *General Topology. Addision-Welley Pub.* (1970)

[2] MUNKRES, J. R., *Topology A First Course, Prentice Hall Inc.* (1975)

[3] JOHN, G. H. ve GAIL, S. Y., *Topology, Michigan State University,* Michigan (1961)

[4] ENGELKING, R., *General Topology, Polish Scientific Publishers,* Poland (1977)

[5] STEEN, L. A. ve SEEBACH, J. A., *Counter Examples in Topology, Rinehart and Wintson Inc.* (1970)

[6] ÖZDAMAR, E., GÖRGÜLÜ, A. ve ALP, M., *Genel Topoloji, Uludağ Üniversitesi Yayınları,* Bursa (1999)

[7] SINGAL, M. K. ve ARYA, S. P., *On Nearly Paracompact Spaces, Mat. Vesnik.* **21**, 3-16, (1969)

[8] ARHANGEL'SKII, A. V., *General Topology, Springer Verlag,* Berlin (1995)

[9] MUKHERJEE, M. N. ve DEBRAY, A., *On Nearly Paracompact Spaces Regular Even Covers*, Calcuta University, **50**, 23-29 (1998)

[10] KOVACEVIC, I., *On Nearly Parakompact Spaces, Publications De L'ıntıtut Mathematıque*, **25**, 63-69 (1979)

[11] KOVACEVIC, I., *Locally Nearly Parakompact Spaces*, Publications *De L'ıntıtut Mathematıque*, **29**, 117-124 (1981)

[12] MUKHERJEE, M. N. ve DEBRAY, A., *On Nearly Paracompact Spaces And Nearly Full Normality*, Calcuta University, **50**, 99-104, (1998)