MUTLAK DİK TOPLANAN ÖZELLİĞİNE SAHİP MODÜLLER ÜZERİNE

Figen TAKIL

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Haziran - 2003

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Figen Takıl'ın Mutlak Dik Toplanan Özelliğine Sahip Modüller Üzerine başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, **Yüksek Lisans** tezi 19.06.2003 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	Prof.Dr. Adnan TERCAN	
Üye	Prof.Dr. Şahin KOÇAK	
Üye	Prof.Dr. Zekeriya ARVASİ	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 25.06.2003 tarih ve ....21/4...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Orhan ÖZER
Fen Bilimleri Enstitüsü
Müdürü

ABSTRACT

Master of Science Thesis

ON MODULES WITH THE ABSOLUTE DIRECT SUMMAND PROPERTY

FİGEN TAKIL

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Prof. Dr. Adnan TERCAN
2003, 53 Pages

In this thesis, the structural properties of modules with the Absolute Direct Summand Property (ADS) were examined. Firstly, basic notions and theorems in the module theory which will be used in this work were also presented.

Then the neccessary properties of the classes of modules which known as CS (Extending) and Quasi-Continuous in the literature were given with their proofs.

Finally, neccessary and sufficient conditions for a module on an arbitrary ring to have the absolute direct summand property were given. Then the properties which are provided on ADS modules defined on a Noetherian ring were examined. It was shown with examples that the family of ADS modules is independent off the family of SIP modules.

Keywords: CS, Quasi-Continuous Module, Ads-Module, Essential and Complement Submodule, Injective ve Relatively Injective Module

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde, bilimsel katkılarını gördüğüm ve tecrübelerinden yararlandığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Adnan TERCAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde yardım ve katkılarından dolayı sayın Prof. Dr. Mahide KÜÇÜK ve Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK'e teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmamda yardım ve desteğini gördüğüm Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı sayın Doç. Dr. Mehmet ÜREYEN ve bölüm öğretim üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmam süresince destek ve yardımlarını gördüğüm canım annem Ersevim TAKIL ve sevgili kardeşim Engin TAKIL'a teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmam süresince katkılarından dolayı Yard. Doç. Dr. Nülifer ÖZDEMİR, Araş. Gör. Serkan Ali DÜZCE, Araş. Gör. Ali DENİZ ve Araş. Gör. Yunus ÖZDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım..

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\in$	eleman
$\exists$	en az bir
$\forall$	her
$\cap$	kesişim
$\Longrightarrow$	ise
$\Longleftrightarrow$	ancak ve ancak
$\cong$	izomorf
$\ker f$	f nin çekirdeği
$\operatorname{Im} f$	f nin görüntüsü
$\leq$	alt modül
$\leq_d$	dik toplanan alt modül
$\leq_e$	essential alt modül
$\leq_c$	komplement alt modül
$\bigoplus_{i\in I} M_i$	M_i lerin dik toplamı
$\prod_{i\in I} M_i$	M_i lerin dik çarpımı
$E(M)$	M nin injektif hull'ı
$M(\Lambda)$	$\bigoplus_{i\in\Lambda} M_i$
$ann_R(m)$	m nin sıfırlayıcısı
$Hom_R(M,N)$	M den N ye R-homomorfizmaların kümesi
$End_R(M)$	M nin R-endomorfizmalar halkası
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar halkası
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar halkası
$\blacksquare$	Kanıtın sonu

1 GİRİŞ

Bu bölümde çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve sonuçlar verilecektir. Özellikle, sonraki bölümlerdeki sonuçların kanıtlarının bütünlüğü açısından, essential alt modüller, komplement alt modüller ve injektif modüllere ilişkin sonuçların kanıtları eksiksiz verilmiştir. Bu bölüm ve çalışmamızın temel aldığı modül sınıfları hakkında daha geniş bilgi için [1,2,3] önerilir.

Çalışmamızda, R değişmeli olması gerekmeyen bir birimli halka ve M de sağ birimsel $R-$modül olarak alınacaktır.

1.1 Ayrıştırılamaz (Indecomposable) Modüller

Tanım 1.1 *M bir $R-$modül olsun. $N \leq M$ alalım. Eğer $\exists\ N' \leq M$ için $N \cap N' = 0$ ve $M = N + N'$ ise M ye N ile N' nün dik toplamı denir ve $M = N \oplus N'$ ile gösterilir. N ve N' alt modüllerine de M nin dik toplananları denir ve $N, N' \leq_d M$ ile gösterilir.*

Tanım 1.2 *Bir M $R-$modülünün sıfırdan ve kendisinden başka dik toplananı yoksa M_R ye ayrıştırılamaz (indecomposable) modül denir.*

Tanım 1.3 *M bir $R-$modül ve $A, B \leq M$ olsun. A ve B alt modüllerinin toplamı*

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 1.2 ***(Modüler Kuralı)*** *M bir $R-$modül, $A \leq M$ ve $C \leq B \leq M$ olsun. Bu durumda*

$$B \cap (A + C) = C + (A \cap B)$$

dir.

Kanıt. $(A \cap B) \leq A$ ve $(A \cap B) \leq B$ olduğundan

$$C + (A \cap B) \subseteq B \cap (A + C) \tag{1.1}$$

dir. Tersine $b \in B \cap (A + C)$ alalım. Bu durumda $b = a + c$ olacak biçimde $a \in A$ ve $c \in C$ vardır.

$$\begin{aligned} b = a + c &\implies a = b - c \in A \cap B \\ &\implies b = a + c \in C + (A \cap B) \end{aligned}$$

olduğundan

$$B \cap (A + C) \subseteq C + (A \cap B) \tag{1.2}$$

dir. (1.1) ve (1.2) den $B \cap (A + C) = C + (A \cap B)$ olduğu görülür. ■

Önerme 1.1 *M bir $R-$modül ve $e = e^2 \in End_R(M)$ olsun. Bir $t = t^2 \in End_R(M)$ için*

$$\mathrm{Im}\, e = \mathrm{Im}\, t \iff t = e + ex(1 - e), \quad x \in End_R(M)$$

dir.

Kanıt. ($\Longrightarrow$) $\mathrm{Im}\, e = \mathrm{Im}\, t$ olsun. Bir $t(m') \in t(M)$ alalım. O halde

$$t(m') = e(m_1) = m_1 - (1 - e)(m_1)$$

dir. Yukarıdaki eşitlikten

$$t^2(m') = t(m') = te(m_1) = t(m_1) - t(1 - e)(m_1)$$

bulunur. Buradan

$$et(m') = et(m_1) - et(1 - e)(m_1) = e^2(m_1) = e(m_1) = t(m')$$

dür. $x = -t \in End_R(M)$ dersek;

$$t(m') = et(m_1) + ex(1 - e)(m_1) \in e(M) + ex(1 - e)(M)$$

olduğundan

$$t(M) \subseteq e(M) + ex(1 - e)(M) \tag{1.3}$$

dir. Şimdi bir $e(m_1) + ex(1 - e)(m_2) \in e(M) + ex(1 - e)(M)$ alalım.

$$e(m_1) + ex(1 - e)(m_2) = e(m_1) + e(x(1 - e)(m_2)) \in t(M)$$

olduğundan

$$e(M) + ex(1-e)(M) \subseteq t(M) \tag{1.4}$$

dir. O halde (1.3) ve (1.4) den $t = e + ex(1-e)$ dir.

($\Longleftarrow$) $t = e + ex(1-e)$ olsun. $t(m) \in t(M)$ alalım.

$$t(m) = (e + ex(1-e))(m) = e(m) + ex(1-e)(m)$$

dir. $e(m) + ex(1-e)(m) \in e(M)$ olduğundan

$$t(M) \subseteq e(M) \tag{1.5}$$

dir. Şimdi $e(m) \in e(M)$ alalım. $e = t - ex(1-e)$ olduğundan

$$\begin{aligned} e(m) &= e(e(m)) = (t - ex(1-e))(e(m)) \\ &= t(e(m)) - ex(1-e)(e(m)) = t(e(m)) \in t(M) \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$e(M) \subseteq t(M) \tag{1.6}$$

dir. O halde (1.5) ve (1.6) den $e(M) = t(M)$ dir. ■

Önerme 1.2 *[6] M bir $R-$modül olsun. Aşağıdaki koşullar denktir;*

1. $S = End_R(M_R)$ deki tüm idempotentler merkezdedir.

2. $M = N \oplus K = N \oplus L$ ise $K = L$ dir.

Kanıt. ($\Longrightarrow$) $M = N \oplus K = N \oplus L$ olsun. e ile $1-e$ ve t ile $1-t$ ortogonal idempotentler olmak üzere

$$M = e(M) \oplus (1-e)(M) = t(M) \oplus (1-t)(M)$$

ve $\mathrm{Im}\, e = \mathrm{Im}\, t$ olsun. Önerme (1.1) den $t = e + ex(1-e)$ ($x \in End_R(M_R)$) dir. S deki tüm idempotentler merkezde olduğundan

$$t = e + ex(1-e) = e + ex - exe = e + ex - eex = e + ex - ex = e$$

dir. O halde $(1-e)(M) = (1-t)(M)$ dir.

($\Longleftarrow$) $e^2 = e \in End_R(M_R)$ olsun. Bir $x \in End_R(M_R)$ için

$$t = e + ex(1-e)$$

bir idempotent olduğundan Önerme (1.1) den $\mathrm{Im}\, e = \mathrm{Im}\, t$ dir. O halde varsayımdan $(1-e)(M) = (1-t)(M)$ dir. Bir modülün bir ayrışıma karşılık gelen ortogonal idempotentlerin bir tam kümesinin tekliğinden $e = t$ dir. Yani her $x \in End_R(M_R)$ için

$$ex(1-e) = ex - exe = 0$$

dır. Simetrik olarak $(1-e)xe = 0$ bulunur. O halde

$$ex = xe$$

olduğundan e, S nin merkezindedir. ■

1.2 Büyük (Essential) Alt Modüller

Tanım 1.4 *M bir $R-$modül ve $N \leq M$ olsun. Her $0 \neq K \leq M$ için $N \cap K \neq 0$ ise N ye M de essential (büyük) alt modül, M ye N nin essential genişlemesi denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir.*

Örneğin; $M_R = \mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ için sıfırdan farklı her alt modül M_R de essential olarak kapsanır.

Önerme 1.3 *M bir $R-$modül olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır;*

(i) $N \leq_e M \Longleftrightarrow 0 \neq m \in M$ için $N \cap mR \neq 0$

(ii) $K \leq N \leq M$ için $K \leq_e M$ dir $\Longleftrightarrow K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$ dir.

(iii) $N \leq_e M$ ve $K \leq M \Longrightarrow N \cap K \leq_e K$ dır.

(iv) $N_i \leq_e K_i$ $(1 \leq i \leq t) \Longrightarrow (N_1 \cap ... \cap N_t) \leq_e (K_1 \cap ... \cap K_t)$ dir.

(v) $K \leq N \leq M$ için $\frac{N}{K} \leq_e \frac{M}{K} \Longrightarrow N \leq_e M$ dir.

(vi) $m \in M$ ve $N \leq M$ için $m^{-1}N = \{r \in R \mid mr \in N\}$ kümesini tanımlayalım. $m^{-1}N \leq R_R$ dir. Ayrıca

$$N \leq_e M \Longrightarrow m^{-1}N \leq_e R_R$$

dir.

(vii) $N_i \leq M_i \leq M$ ve $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun.

$$N_i \leq_e M_i (i \in I) \Longleftrightarrow \bigoplus_{i \in I} N_i \leq_e \bigoplus_{i \in I} M_i = M$$

dir.

(viii) $f : M \to N$ bir homomorfizma ve $B \leq_e N \Longrightarrow f^{-1}(B) \leq_e M$ dir.

Kanıt. (i)($\Longrightarrow$) $N \leq_e M$ ve $0 \neq m \in M$ ise $N \cap mR \neq 0$ dır.
($\Longleftarrow$) $0 \neq m \in L \leq M$ olsun. Bu durumda bir $r \in R$ vardır ki $0 \neq mr \in N \cap L$ dir. O halde $N \leq_e M$ dir.

(ii) ($\Longrightarrow$) $K \leq_e M$ ve $0 \neq X \leq N$ olsun. Bu durumda $0 \neq X \leq M$ olur. $K \leq_e M$ olduğundan $K \cap X \neq 0$ dır. Her $0 \neq X \leq N$ için $K \cap X \neq 0$ olduğundan $K \leq_e N$ dir. Şimdi $0 \neq T \leq M$ olsun. Bu durumda $0 \neq K \cap T \leq N \cap T$ dir. Her $0 \neq T \leq M$ için $N \cap T \neq 0$ olduğundan $N \leq_e M$ dir.

($\Longleftarrow$) $K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$ olsun. $0 \neq Z \leq M$ için $0 \neq N \cap Z \leq N$ dir. $K \leq_e N$ olduğundan $0 \neq K \cap (N \cap Z) = K \cap Z$ dir. Her $0 \neq Z \leq M$ için $K \cap Z \neq 0$ olduğundan $K \leq_e M$ dir.

(iii) $N \leq_e M$, $K \leq M$ ve $0 \neq S \leq K$ olsun. $(N \cap K) \cap S = N \cap S \neq 0$ dır. Her $0 \neq S \leq K$ için $(N \cap K) \cap S \neq 0$ olduğundan $(N \cap K) \leq_e K$ dır.

(iv) $t = 2$ için $N_1 \leq_e K_1$ ve $N_2 \leq_e K_2 \Longrightarrow (N_1 \cap N_2) \leq_e (K_1 \cap K_2)$ olduğunu görelim. $X \leq K_1 \cap K_2$ olsun. Kabul edelim ki $(N_1 \cap N_2) \cap X = 0$ olsun. Bu durumda

$$(N_1 \cap N_2) \cap X = N_1 \cap (N_2 \cap X) = 0 \Longrightarrow N_2 \cap X = 0 \Longrightarrow X = 0$$

bulunur. O halde $(N_1 \cap N_2) \leq_e (K_1 \cap K_2)$ dir. Tümevarım yöntemi ile genel durum elde edilir.

Bu özellik sonlu olmayan bir index kümesi için doğru değildir. Örneğin; $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünü göz önüne alalım. $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z}$ dir. Fakat

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} n\mathbb{Z} = 0 \not\leq_e \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$$

dir.

(v) $X \leq M$ ve $X \cap N = 0$ olsun. Eğer $X \leq K$ ise

$$X \cap N = X = 0$$

olur. Eğer $K < X$ ise

$$0 \neq \frac{X}{K} \leq \frac{M}{K}$$

dır. Şimdi $\frac{X}{K} \cap \frac{N}{K} = \bar{0}$ olsun. $\frac{N}{K} \leq_e \frac{M}{K}$ olduğundan $\frac{X}{K} = \bar{0}$ yani $X = K$ dır. Bu da $K < X$ olmasıyla çelişir. O halde $N \leq_e M$ dir.

(vi) İlk önce $m^{-1}N \leq R_R$ olduğunu görelim. $0 \in R$ ve $m0 = 0 \in N$ olduğundan $m^{-1}N \neq \varnothing$ dir. $r_1, r_2 \in m^{-1}N$ ve $s \in R$ alalım.

$$m(r_1 - r_2) = mr_1 - mr_2 \in N$$

olduğundan $(r_1 - r_2) \in m^{-1}N$ dir.

$$(mr_1)s = m(r_1 s) \in N$$

olduğundan $r_1 s \in m^{-1}N$ dir. O halde $m^{-1}N \leq R_R$ dir. $N \leq_e M$, $m \in M$ ve $0 \neq I \leq R_R$ olsun. Eğer $mI = 0$ ise

$$I \cap m^{-1}N = I \neq 0$$

dır. Eğer $mI \neq 0$ ise

$$mI \cap N \neq 0.$$

dır (çünkü $N \leq_e M$). Bu durumda bir $0 \neq r \in I$ vardır ki $mr \in N$ dir.

$$mr \in N \Longrightarrow r \in m^{-1}N$$

olduğundan $I \cap m^{-1}N \neq 0$ dır. Sonuç olarak $m^{-1}N \leq_e R_R$ dir.

(vii) ($\Longrightarrow$) Keyfi $0 \neq m \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ alalım. $m = m_{i_1} + m_{i_2} + ... + m_{i_n}$; $m_{i_j} \in M_{i_j}$ $(j = 1, 2, 3, ..., n)$ biçiminde yazabiliriz. n ye göre tümevarımla;

$0 \neq mr \in \bigoplus_{i\in I} N_i$ olacak biçimde $r \in R$ olduğunu gösterelim.

$n = 1$ için açıktır. $n = k$ için $N_i \leq_e M_i$ $(1 \leq i \leq k) \Longrightarrow \bigoplus_{i\in I} N_i \leq_e \bigoplus_{i\in I} M_i$ doğru olduğunu varsayarak $n = k+1$ için doğruluğunu görelim;

$m' = m_{i_1} + m_{i_2} + ... + m_{i_k}$ için (i) den

$$0 \neq m's \in N_{i_1} \oplus ... \oplus N_{i_k}$$

olacak biçimde $s \in R$ vardır. Eğer $m_{i_{k+1}}s \in N_{i_{k+1}}$ ise

$$ms \in \bigoplus_{i\in I} N_i \quad \text{ve} \quad N_{i_{k+1}} \cap (N_{i_1} \oplus ... \oplus N_{i_k}) = 0$$

olduğundan $ms \neq 0$ dır. Eğer $m_{i_{k+1}}s \notin N_{i_{k+1}}$ ise $N_{i_{k+1}} \leq_e M_{i_{k+1}}$ olduğundan (i) den $0 \neq (m_{i_{k+1}}s)t \in N_{i_{k+1}}$ olacak şekilde bir $t \in R$ vardır. O halde $r = st \in R$ için $mr \in \bigoplus_{i\in I} N_i$ ve $\bigoplus_{i\in I} N_i$ dik toplam olduğundan $mr \neq 0$ dır. Sonuç olarak $\bigoplus_{i\in I} N_i \leq_e \bigoplus_{i\in I} M_i$ dir.

($\Longleftarrow$) $\bigoplus_{i\in I} N_i \leq_e \bigoplus_{i\in I} M_i$ ve $N_1 \nleq_e M_1$ olsun. O halde $0 \neq L_1 \leq M_1$ için $N_1 \cap L_1 = 0$ dır. Bir $l_1 \in (\bigoplus_{i\in I} N_i) \cap L_1$ alalım. Bu durumda $l_1 = n_1 + ... + n_n$ olacak biçimde $n_i \in N_i$ vardır.

$$l_1 - n_1 = n_2 + ... + n_n \in M_1 \cap (M_2 \oplus M_3 \oplus ... \oplus M_n) = 0$$

olduğundan $l_1 = n_1 \in L_1 \cap N_1 = 0$ dır. Buradan $(\bigoplus_{i\in I} N_i) \cap L_1 = 0$ dır. $\bigoplus_{i\in I} N_i \leq_e \bigoplus_{i\in I} M_i$ ve $L_1 \leq M_1 \leq M$ olduğundan $L_1 = 0$ dır. Bu da $N_1 \nleq_e M_1$ olmasıyla çelişir. O halde her $i \in I$ için $N_i \leq_e M_i$ dir.

(viii) $f : M \to N$ bir homomorfizma ve $B \leq_e N$ olsun. $f^{-1}(B) \cap U = 0$ olacak biçimde bir $U \leq M$ alalım. $x \in B \cap f(U)$ için $x = f(u)$ olacak biçimde $u \in U$ vardır. $x = f(u) \in B$ olduğundan $u \in U \cap f^{-1}(B) = 0$ dır. Bu durumda $x = f(u) = f(0) = 0$ dır. Yani $B \cap f(U) = 0$ dır. $B \leq_e N$ olduğundan $f(U) = 0$ dır. O halde

$$U \leq \ker f = f^{-1}(0) \leq f^{-1}(B)$$

olduğundan $U = f^{-1}(B) \cap U = 0$ dır. ∎

Tanım 1.5 *M sıfırdan farklı $R-$modül olsun. Eğer her $0 \neq U \leq M$ için $U \leq_e M$ oluyorsa M ye $uniform$ (düzgün) modül denir. Örneğin, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ uniform bir modüldür.*

1.3 Komplement Alt Modüller

Tanım 1.6 *M bir $R-$modül ve $K \leq M$ olsun. K nın öz essential genişlemesi yoksa (yani $K \leq_e N \leq M \Longrightarrow K = N$) K ya M de closed (kapalı) alt modül denir.*

Tanım 1.7 *M bir $R-$modül ve $A \leq M$ olsun. $A \cap B = 0$ özelliğine göre maksimal olan bir B alt modülüne A nın M deki komplementi denir.*

Önerme 1.4 *$A, B \leq M$ olmak üzere $A \cap B = 0$ olsun. Bu durumda $B \leq C$ olmak üzere, A nın bir C komplementi vardır. Dolayısıyla C nin de A yı içeren bir A' komplementi vardır. (bakınız, [1]).*

(Önerme 1.4) den bir M modülünde her alt modülün M de bir komplementi vardır.

Örnek 1.1 *F bir cisim ve $M_R = (F \oplus F)_F$ olsun.*
$B = (1,0)F = \{(a,0) \mid a \in F\} \leq M_R$ alalım.

$$C = (x,1)F, \quad (x \in F)$$

olmak üzere; C, B alt modülünün M_R deki bir komplementidir.

Önerme 1.5 *M bir $R-$modül ve $A \leq M$ olsun. $B \leq M$, A nın bir komplementi ise $A \oplus B \leq_e M$ dir.*

Kanıt. $A \cap B = 0$ olduğundan $A + B = A \oplus B \leq M$ dir. $C \leq M$ ve $(A \oplus B) \cap C = 0$ olsun. Bu durumda $(A \oplus B) + C = (A \oplus B) \oplus C$ dir. Böylece $A \cap (B \oplus C) = 0$ olur. B, A ile arakesiti sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $B \oplus C = B$ olmalıdır. $B \cap C = 0$ olduğundan $C = 0$ bulunur. O halde $A \oplus B \leq_e M$ dir. ∎

Teorem 1.1 *M bir $R-$modül, $A, B \leq M$ ve $A \cap B = 0$ olsun. B nin M de A nın komplementi olması için gerek ve yeter koşul*

$$\frac{A+B}{B} \leq_e \frac{M}{B}$$

olmasıdır.

Kanıt. ($\Longrightarrow$) $\frac{A+B}{B} \cap \frac{U}{B} = \bar{0}$ olacak biçimde $B \leq U \leq M$ alalım. Bu durumda $(A+B) \cap U = B$ dir. Modüler kuralından

$$(A \cap U) + B = B$$

dir. Dolayısıyla $(A \cap U) \leq B$ dir.

$$A \cap U \leq A \cap B$$

olduğundan $A \cap U = 0$ dır. B, A ile arakesiti sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $U = B$ olmalıdır. O halde $\frac{U}{B} = \bar{0}$ dır. Yani

$$\frac{A+B}{B} \leq_e \frac{M}{B}$$

dir.

($\Longleftarrow$) $A \cap U = 0$ ve $B \leq U$ olacak biçimde keyfi bir $U \leq M$ ve $x \in (A+B) \cap U$ alalım. O halde $x = a + b$ olacak biçimde bir $a \in A$ ve $b \in B$ vardır. Buradan $a = x - b \in A \cap U = 0$ olduğundan $a = 0$ dır. Böylece $x = b \in B$ olduğundan

$$(A+B) \cap U = B$$

dir. O halde

$$\frac{A+B}{B} \cap \frac{U}{B} = \bar{0}$$

olduğundan, varsayımdan $\frac{U}{B} = \bar{0}$ yani $U = B$ dir. Böylece B, A nın M de bir komplementidir. ■

Tanım 1.8 *M bir $R-$modül ve $K \leq M$ olsun. K nın M de komplementi olduğu bir $L \leq M$ var ise K ya M de bir komplement alt modül denir ve $K \leq_c M$ ile gösterilir.*

Uyarı 1.4 $0, M \leq_c M$ *olduğu açıktır. Ayrıca M nin her dik toplananı M nin bir komplement alt modülüdür. Gerçekten;*

$M = A \oplus B$, $A \leq N \leq M$ ve $N \cap B = 0$ olsun.

$$N = N \cap M = N \cap (A \oplus B) = A \oplus (N \cap B) = A$$

dır. Fakat bir modülün komplement alt modülü bir dik toplanan olmak zorunda değildir. Örneğin; F bir cisim ve V de F üzerinde boyutu 2 olan bir vektör uzayı olsun. $V = v_1F \oplus v_2F$ alalım. Bu durumda

$$R = \{ \begin{bmatrix} f & v \\ 0 & f \end{bmatrix} \mid f \in F, v \in V\}$$

matris işlemleri ile birimli, değişmeli ve ayrıştırılamaz bir halkadır.

$$I = \{ \begin{bmatrix} 0 & v_1 f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid f \in F\} \leq R_R$$

alalım.

$$J = \{ \begin{bmatrix} 0 & v_2 f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid f \in F\} \leq R_R$$

olmak üzere I, J nin komplementidir. Yani $I \leq_c R_R$ dir. Ancak $I \nleq_d R_R$ dir.

Önerme 1.6 *M bir $R-$modül ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda bir $K \leq M$ vardır ki $N \leq_e K \leq_c M$ dir. K ya N nin M deki closure (kapanışı) denir.*

Kanıt. N', N nin M deki bir komplementi olsun. Bu durumda N' nün M de $N \leq K$ olacak biçimde bir K komplementi vardır. $0 \neq L \leq K$ olsun. $N' \subseteq L + N'$ dür. Böylece

$$(L + N') \cap N \neq 0$$

dır (çünkü N' N nin komplementi). O halde bir $x \in L$, $n' \in N'$ ve $0 \neq n \in N$ vardır ki $n = x + n'$ dür.

$$n' = n - x \in N' \cap K = 0$$

olduğundan $0 \neq n = x \in L \cap N$ dir. Böylece $N \leq_e K \leq_c M$ dir. ∎

Önerme 1.7 *M bir $R-$modül ve $K \leq M$ olsun.*

$$K \leq_c M \Longleftrightarrow K \leq_e L \leq M \text{ ise } K = L \text{ dir.}$$

Kanıt. ($\Longrightarrow$) $K \leq_c M$ ve $K \leq_e L \leq M$ olsun. Bu durumda bir $X \leq M$ vardır ki K, X in komplementidir. Yani K, $K \cap X = 0$ özelliğine göre maksimal olan alt modüldür.

$$0 = K \cap X \leq_e L \cap X \Longrightarrow L \cap X = 0$$

olduğundan $K = L$ dir.

($\Longleftarrow$) $K \leq M$ olduğundan Önerme (1.6) dan bir $L \leq M$ vardır ve $K \leq_e L \leq_c M$ dir. Varsayımdan $K = L$ dir. Yani $K \leq_c M$ dir. ■

Teorem 1.2 *M bir $R-$modül olsun. B, A nın M de komplementi, A' de $A \leq A'$ olmak üzere B nin M de komplementi ise*

$$A \leq_e A'$$

ve A', M nin A yı essential alt modül olarak içeren alt modüller kümesinde maksimal elemandır (yani $A \leq_e K$ ve $A' \leq K \leq M \Longrightarrow A' = K$ dır).

Kanıt. $A \cap U = 0$ olmak üzere keyfi $U \leq A'$ alalım. $a \in A \cap (B + U)$ için $a = b + u$ olacak biçimde $b \in B$ ve $u \in U$ vardır. $b = a - u \in B \cap A' = 0$ olduğundan $a = u \in A \cap U = 0$ dır. Buradan $A \cap (B + U) = 0$ bulunur. B, A ile kesişimi sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $B = B + U$ dur. $U \cap B \leq A' \cap B = 0$ olduğundan $U \cap B = 0$ dır. Buradan $U = 0$ dır. O halde $A \leq_e A'$ dir.

Şimdi A' nün A yı essential olarak kapsayan maksimal alt modül olduğunu görmek için $A \leq_e K$ ve $A' \leq K$ olan bir $K \leq M$ alalım. $A \leq_e K$ olduğundan

$$(K \cap B) \cap A = 0 \Longrightarrow (K \cap B) = 0$$

olur. A', B ile kesişimi sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $K = A'$ dür. ■

Önerme 1.8 *M bir $R-$modül olsun. Eğer $K \leq_c N$ ve $N \leq_c M$ ise $K \leq_c M$ dir.*

Kanıt. $K \leq_c N$ ve $N \leq_c M$ olduğundan bir $K' \leq N$ ve $N' \leq M$ vardır ki K, K' nün bir komplementi ve N de N' nün bir komplementidir. Ayrıca

$$K \cap (K' + N') = 0$$

ve $K' + N' \leq M$ dir. Gerçekten; bir $k \in K \cap (K' + N')$ alırsak $k = k' + n'$ olacak biçimde $k' \in K'$ ve $n' \in N'$ vardır. $k - k' = n' \in N \cap N' = 0$ olduğundan $k = k' \in K \cap K' = 0$ dır. O halde $k = k' = n' = 0$ bulunur.

Şimdi $K \leq_e L \leq_c M$ olacak biçimde bir $L \leq M$ olsun. Bu durumda

$$K \cap (K' + N') \leq_e L \cap (K' + N')$$

olduğundan $L \cap (K' + N') = 0$ dır. Böylece

$$[N \cap (L + N')] \cap K' = [(N \cap K') \cap (L + N')] = K' \cap (L + N') = 0$$

olur. $K \leq N \cap (L + N') \leq (L + N')$ ve K K' ile arakesiti sıfır olan maksimal alt modül olduğundan

$$K = [N \cap (L + N')]$$

dür. $K = [N \cap (L + N')] \leq_e L$ olduğundan

$$0 = [N \cap (L + N')] \cap N' \leq_e L \cap N'$$

yani $L \cap N' = 0$ dır. Böylece

$$(N + L) \cap N' = L \cap N' = 0$$

dır. $N \leq N + L$ ve N N' nün komplementi olduğundan $N + L = N$ dir. O halde $L \leq N$ dir. Sonuç olarak $K \leq_e L \leq N$ ve $K \leq_c N$ olduğundan Önerme (1.7) den $K = L$ dir. Buradan $K \leq_c M$ olduğu görülür. ■

1.4 İnjektif ve Projektif Modüller

Tanım 1.9 *R bir halka ve P bir $R-$modül olsun. Eğer her $f : M \longrightarrow N$ epimorfizması ve $\phi : P \longrightarrow N$ homomorfizması için $f \circ \phi' = \phi$ olacak biçimde bir $\phi' : P \longrightarrow M$ homomorfizması varsa P ye projektif modül denir. Diğer bir değişle*

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \\
& P \arrow[u, "\phi"'] \arrow[ul, dashed, "\phi'"]
\end{tikzcd}
$$

Şekil 1.1: $f \circ \phi' = \phi$ homomorfizması

diyagramı değişmeli (yani $f \circ \phi' = \phi$) olacak şekilde bir ϕ' homomorfizması varsa P ye projektif modül denir.

Tanım 1.10 *R bir halka olsun. R nin sağ ideallerinin her biri projektif ise R ye sağ kalıtsal (hereditary) halka denir.*

Tanım 1.11 *R bir halka ve I bir $R-$modül olsun. Her $f : A \longrightarrow B$ monomorfizması ve $g : A \longrightarrow I$ homomorfizması için $h \circ f = g$ olacak biçimde bir $h : B \longrightarrow I$ homomorfizması varsa I ya injektif modül denir. Diğer bir değişle*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\
I &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 1.2: $h \circ f = g$ homomorfizması

diyagramı değişmeli (yani $h \circ f = g$) olacak şekilde bir h homomorfizması varsa I ya injektif modül denir.

Teorem 1.3 *$\{I_k \mid k \in J\}$ bir $R-$modüller topluluğu olsun.*

$$I = \prod_{k \in J} I_k \text{ injektif modüldür} \Longleftrightarrow I_k (k \in J) \text{ injektif modüldür.}$$

Kanıt. $(\Longrightarrow)$ $I = \prod_{k \in J} I_k$ injektif modül olsun. $f : A \longrightarrow B$ bir monomorfizma ve $g : A \longrightarrow I_k$ bir homomorfizma olsun. I injektif modül olduğundan, $i_k : I_k \longrightarrow \prod_{k\in J} I_k$ gömme homomorfizması olmak üzere $i_k \circ g : A \longrightarrow I = \prod_{k\in J} I_k$ homomorfizması için $i_k \circ g = h \circ f$ olacak biçimde bir $h : B \longrightarrow I$ homomorfizması bulunur. Yani

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[ddl, dashed, "h"] \\ I_k \arrow[d, shift right, "i_k"'] & \\ I \arrow[u, shift right, "\pi_k"'] & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.3: $i_k \circ g = h \circ f$ homomorfizması

diyagramı değişmelidir. O halde $\pi_k : I \longrightarrow I_k$ k.ncı izdüşüm dönüşümü olmak üzere $\pi_k \circ h : B \longrightarrow I_k$ homomorfizması için, $a \in A$ olmak üzere

$$((\pi_k \circ h) \circ f)(a) = (\pi_k \circ i_k \circ g)(a) = g(a)$$

dır. O halde $\forall k \in J$ için I_k injektif modüldür.

$(\Longleftarrow)$ $I_k (k \in J)$ injektif modül, $\psi : A \longrightarrow B$ bir monomorfizma ve $f : A \longrightarrow I$ bir homomorfizma olsun. Her $k \in J$ için I_k injektif modül olduğundan bir $g_k : B \rightarrow I_k$ homomorfizması vardır ki $g_k \circ \psi = \pi_k \circ f$ dir (Şekil 1.4).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[ddl, dashed, "g_k"] \\ I \arrow[d, "\pi_k"'] & \\ I_k & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.4: $g_k \circ \psi = \pi_k \circ f$ homomorfizması

Şimdi $g : B \rightarrow I$, $g(b) = \{g_k(b)\}_{k\in J}$ $(b \in B)$ fonkiyonunu tanımlayalım. g bir modül homomorfizmasıdır. $b \in B$ için

$$(\pi_k \circ g)(b) = \pi_k(g_k(b)) = g_k(b)$$

olduğundan $(\pi_k \circ g) = g_k$ dır. O halde

$$\pi_k \circ f = g_k \circ \psi = \pi_k \circ g \circ \psi$$

olduğundan $f = g \circ \psi$ dır. Yani I injektif modüldür. ■

Teorem 1.4 *[5] (Baer Kriteri) I bir $R-$modül olsun. I modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul her U (sağ) ideali için her $k : U \longrightarrow I_R$ modül homomorfizmasının bir $m : R \longrightarrow I_R$ modül homomorfizmasına genişletilebilmesidir (yani $m_{|U} = k$ olmasıdır).*

Tanım 1.12 *Bir R halkasının her sağ ideali sonlu üretilmişse R ye Noetherian halka denir.*

Teorem 1.5 *R bir Noetherian halka ve $\{I_i \mid i \in \Lambda\}$ keyfi injektif R-modüllerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigoplus_{i\in\Lambda} I_i$ injektiftir.*

Kanıt. $\bigoplus_{i\in\Lambda} I_i$ nin injektif olduğunu Baer Kriterini kullanarak gösterelim. L, R nin bir sağ ideali ve $h : L \to \bigoplus_{i\in\Lambda} I_i$ bir homomorfizma olsun. R Noetherian halka olduğundan L sonlu üretilmiştir. Dolayısıyla $\operatorname{Im} h$ de sonlu üretilmiştir. Bu durumda I index kümesinin sonlu bir F altkümesi vardır ki $\operatorname{Im} h \subseteq \bigoplus_{i\in F} I_i$ dir. $\{I_i \mid i \in F\}$ injektif modüllerin sonlu bir ailesi olduğundan $\bigoplus_{i\in F} I_i$ injektiftir. O halde bir $g : R \to \bigoplus_{i\in F} I_i$ homomorfizması vardır ki (Şekil 1.5) deki diyagramı değişmeli yapar, yani $g_{|L} = h$ dir.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] & R \arrow[dl, dashed, "g"] \\ \bigoplus_{i\in F} I_i & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.5: $g \circ i = h$ homomorfizması

Böylece $\bigoplus_{i\in\Lambda} I_i$ modülü injektif olur. ■

Teorem 1.6 *[5] Her modül bir injektif modülde alt modül olarak kapsanır.*

Teorem 1.7 *A bir R−modül olsun. Aşağıdakiler denktir;*

(i) A injektif modüldür.

(ii) A, A yı kapsayan her $R-$modülün bir dik toplananıdır.

Kanıt. **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** A injektif bir $R-$modül ve $A \leq A'_R$ olsun. O halde

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_A"'] & A' \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.6: $\phi \circ i = 1_A$ homomorfizması

diyagramı değişmeli olacak şekilde $\phi : A' \longrightarrow A$ homomorfizması vardır. Bir $a' \in A'$ alalım.

$$\begin{aligned} \phi(a') \in A &\Longrightarrow \phi(a') = \phi(\phi(a')) \\ &\Longrightarrow \phi(a' - \phi(a')) = 0 \\ &\Longrightarrow a' - \phi(a') \in \ker \phi \\ &\Longrightarrow a' \in \ker \phi + A \\ &\Longrightarrow A' = A + \ker \phi \end{aligned}$$

dır. Şimdi bir $x \in \ker \phi \cap A$ alalım. $x \in A$ ve $\phi(x) = x = 0$ olduğundan $\ker \phi \cap A = 0$ dır. O halde $A' = A \oplus \ker \phi$ dir. Yani $A \leq_d A'$ dür.

(ii) $\Longrightarrow$ **(i)** Teorem (1.6) dan $A \leq I$ olacak biçimde bir I injektif modülü vardır. Kabulümüzden $I = A \oplus X$ olacak biçimde bir $X \leq I$ vardır. O halde A injektiftir. ∎

Önerme 1.9 *Bir* $0 \neq M$ *$R-$modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul M nin hiçbir essential genişlemesi olmamasıdır (yani $M \leq_e N$ ise $M = N$ dir).*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) M injektif bir $R-$modül ve V de M nin bir essential genişlemesi olsun. Teorem (1.7) den $V = M \oplus T$ olacak şekilde bir $T \leq V$

vardır. $M \cap T = 0$ ve $M \leq_e V$ olduğundan $T = 0$ dır. O halde $V = M$ dir.

($\Longleftarrow$) M nin has (proper) essential genişlemesi olmasın. E de M yi içeren bir injektif modül olsun. M nin E de $M \cap T = 0$ olacak biçimde bir T komplementi vardır. Teorem (1.1) den

$$M \cong \frac{M \oplus T}{T} \leq_e \frac{E}{T}$$

dir. M nin proper essential genişlemesi olmadığından

$$\frac{M \oplus T}{T} = \frac{E}{T} \quad \text{veya} \quad M \oplus T = E$$

dir. Böylece M, E injektif modülünün bir dik toplananı olduğundan Teorem (1.3) den injektiftir. ■

Önerme 1.10 *A bir $R-$modül, E A yı essential olarak kapsayan bir modül ve N de A yı kapsayan bir injektif modül olsun. Bu durumda $i : A \longrightarrow N$ içerme monomorfizması olmak üzere, bir $g : E \longrightarrow N$ monomorfizması vardır ki $g_{|A} = i$ dir.*

Kanıt. N injektif modül olduğundan bir $g : E \longrightarrow N$ homomorfizması vardır ki $g_{|A} = i$ dir (Şekil 1.7).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[dl, dashed, "g"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.7: $g \circ i = i$ homomorfizması

Bundan dolayı $A \cap \ker g = 0$ dır. Gerçekten; bir $a \in A \cap \ker g$ alırsak, $a \in A$ ve $g(a) = a = 0$ dır. $A \leq_e E$ ve $\ker g \leq E$ olduğundan

$$\ker g = 0$$

dır. O halde g bir monomorfizmadır. ■

Önerme 1.11 *A bir $R-$modül ve N de A yı kapsayan bir injektif modül olsun. Bu durumda N nin bir E alt modülü vardır ki E, A nın maksimal essential genişlemesidir.*

Kanıt. $\Omega = \{N' \mid A \leq_e N' \leq N\}$ olsun. $A \in \Omega$ olduğundan $\Omega \neq \emptyset$ dır. Ω kapsama bağıntısıyla bir kısmen sıralı kümedir. O halde Zorn Lemma'dan Ω nın bir maksimal E elemanı vardır. Şimdi E nin A nın maksimal essential genişlemesi olduğunu gösterelim. $E \leq_e E'$ olsun. Bu durumda Önerme (1.10) dan, $i : E \to N$ içerme monomorfizması olmak üzere, bir $\theta : E' \to N$ monomorfizması vardır ki $\theta_{|E} = i$ dir (Şekil 1.8).

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & E' \arrow[dl, dashed, "\theta"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.8: $\theta_{|E} = i$ homomorfizması

Buradan $E = \theta(E) \leq \theta(E') \leq N$ ve $E \leq_e N$ olduğundan $\theta(E') \leq_e N$ dir, yani $\theta(E') \in \Omega$ dır. E, Ω nın maksimal elemanı olduğundan $\theta(E') = E$ dir, yani $E = E'$ dür. ■

Önerme 1.12 *A bir $R-$modül ve $A \leq E$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir;*

(a) E, A yı essential olarak kapsayan injektif modüldür.

(b) E, A yı essential olarak kapsayan maksimal modüldür.

(c) E, A yı kapsayan minimal injektif modüldür.

Kanıt. (a) ve (b) nin denkliği Önerme (1.9) dan açıktır.

(b)$\Longrightarrow$(c) Önerme (1.9) dan E injektiftir. E' injektif olmak üzere $A \leq E' \leq E$ olsun. $A \leq_e E$ olduğundan $E' \leq_e E$ dir. Yine Önerme (1.9) dan $E' = E$ olmalıdır. Böylece E, A yı kapsayan minimal injektif modüldür.

(c)$\Longrightarrow$(b) Önerme (1.11) den E nin bir E'' alt modülü vardır ki E'', A nın maksimal essential genişlemesidir ve böylece Önerme (1.9) dan injektiftir. O halde varsayımdan $E = E''$ dür. Böylece (b) koşulu sağlanır. ■

Teorem 1.8 *A bir $R-$modül olsun. Bu durumda bir E $R-$modülü vardır ki aşağıdaki koşulları sağlar;*

(a) E, A yı essential olarak kapsayan injektif modüldür.

(b) E, A yı essential olarak kapsayan maksimal modüldür.

(c) E, A yı kapsayan minimal injektif modüldür.

Ayrıca E_1 ve E_2, A yı essential olarak kapsayan iki injektif modül ise bir $\theta : E_1 \longrightarrow E_2$ izomorfizması vardır ki (Şekil 1.9) daki diyagramı değişmeli yapar.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & E_1 \arrow[dl, "\theta"] \\ E_2 & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.9: $\theta \circ i = i$ homomorfizması

Kanıt. Teorem (1.6), Önerme (1.11) ve Önerme (1.12) den bu koşulları sağlayan bir E modülü vardır. Şimdi E_1 ve E_2, A yı essential olarak kapsayan iki injektif modül olsun. Önerme (1.10) dan, $i : A \longrightarrow E_2$ içerme monomorfizması olmak üzere, bir $\theta : E_1 \longrightarrow E_2$ monomorfizması vardır ki $\theta_{|A} = i$ dir. O halde $E_1 \cong \theta(E_1)$ dir. E_1 injektif modül olduğundan $\theta(E_1)$ de injektiftir. $A \leq_e E_2$ ve $A = \theta(A) \leq \theta(E_1) \leq E_2$ olduğundan

$$\theta(E_1) \leq_e E_2$$

dir. $\theta(E_1)$ injektif olduğundan Önerme (1.9) dan $\theta(E_1) = E_2$ dir. Sonuç olarak θ örten monomorfizma olduğundan izomorfizmadır. ■

Tanım 1.13 *A bir $R-$modül olsun. Teorem(1.8) deki koşullardan birini sağlayan bir E $R-$modülüne A modülünün $injektif$ hull ı denir ve $E(A) = E$ ile gösterilir.*

Tanım 1.14 *M ve X R-modüller ve $N \leq M$ olsun. Her $\phi : N \longrightarrow X$ homomorfizması için $\psi : M \longrightarrow X$, $\psi_{|N} = \phi$ olacak biçimde bir ψ homomorfizması varsa (yani her $\phi : N \rightarrow X$ homomorfizması bir $\psi : M \longrightarrow X$ homomorfizmasına genişlerse) X modülüne $M-injektif$ modül denir. Yani*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"'] & M \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.10: $\psi \circ i = \phi$ homomorfizması

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir ψ homomorfizması varsa X modülüne $M - injektif$ modül denir.

X_R injektif bir modül ise X her M_R modülü için M-injektiftir.

X_R modülü R-injektif ise X_R injektif modüldür.

Örnek 1.2 *$\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ modülü için $E(\mathbb{Z}_\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}_\mathbb{Z}$ dir. Gerçekten; $\mathbb{Z}$ nin bir $0 \neq I$ idealinden $\mathbb{Q}$ ya keyfi bir $f : I \rightarrow \mathbb{Q}$ homomorfizması alalım. I, $\mathbb{Z}$ nin bir ideali olduğundan $n > 0$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $I = n\mathbb{Z}$ dir. $\mathbb{Q}$ nun her $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ elemanı ve her $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ için*

$$\frac{a}{b} = n.\frac{c}{d}$$

olacak biçimde bir $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ $(d \neq 0)$ bulunabildiğinden

$$f(n) = n\frac{p}{q}$$

olacak biçimde bir $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $(q \neq 0)$ *vardır. Her* $m \in \mathbb{Z}$ *için*

$$g(m) = m\frac{p}{q}$$

olmak üzere $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ *fonksiyonunu tanımlayalım.* g *bir homomorfizmadır. Her* $nk \in n\mathbb{Z} = I$ *için*

$$g(nk) = nk\frac{p}{q} = kn\frac{p}{q} = kf(n) = f(nk)$$

olduğundan $g_{|I} = f$ *dir. Yani* $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ *injektiftir.*

Teorem 1.9 *[1]* M *bir* $R-$*modül ve* $K \leq M$ *olsun.*

Bir X *modülü* M*-injektiftir* $\Longleftrightarrow$ *Aşağıdaki üç koşul sağlanır;*

1. X modülü K-injektiftir
2. X modülü $\frac{M}{K}$-injektiftir.
3. Herhangi bir $\phi : K \longrightarrow X$ homomorfizması $\varphi : M \longrightarrow X$ homomorfizmasına genişler.

Önerme 1.13 *[3]* R *bir halka,* $M = \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ $(M_\lambda \leq M)$ *ve* X R*-modül olsun.*

X *modülü* M*-injektiftir* $\Longleftrightarrow$ X *modülü* M_λ*-injektiftir.*$(\lambda \in \Lambda)$

Önerme 1.14 *[3]* R *bir halka,* $M = \prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ *ve* A R*-modül olsun.*

$\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ A*-injektiftir* $\Longleftrightarrow$ *Her* $\alpha \in \Lambda$ *için* M_α A*-injektiftir.*

Teorem 1.10 R *bir halka ve* M *bir* $R-$*modül olsun. Bir* X $R-$*modülünün* $M-$*injektif olması için gerek ve yeter koşul her* $\varphi \in Hom_R(E(M), E(X))$ *için* $\varphi(M) \subseteq X$ *olmasıdır.*

Kanıt. $E(X)$ injektif olduğundan, $\varphi \in Hom_R(M, E(X))$ i göz önüne almak yeterlidir.

($\Longleftarrow$) $N \leq M$ ve $\alpha \in Hom_R(N, X)$ olsun. $E(X)$ injektif olduğundan bir $\varphi \in Hom_R(M, E(X))$ vardır ki $\varphi_{|N} = \alpha$ dır (Şekil 1.11).

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & M \arrow[ddl, dashed, "\varphi"] \\ X \arrow[d, "i"'] & \\ E(X) & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.11: $\beta \circ i = \varphi$ homomorfizması

Kabulümüzden, $\varphi(M) \subseteq X$ olduğundan $\varphi : M \longrightarrow X$ dir. Yani $\varphi_{|N} = \alpha$ dır. Böylece X modülü $M-$injektiftir.

$(\Longrightarrow)$ $N = \{m \in M \mid \varphi(m) \in X\}$ olsun. Açıktır ki $N \leq M$ dir. X modülü $M-$injektif olduğundan bir $\theta \in Hom_R(M, X)$ vardır ki $\theta_{|N} = \varphi_{|N}$ dir (Şekil 1.12).

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi_{|N}"'] & M \arrow[dl, dashed, "\theta"'] \arrow[ddl, "\varphi"] \\ X \arrow[d, "i"'] & \\ E(X) & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.12: $\theta \circ i = \varphi_{|N}$ homomorfizması

Şimdi iddiamız $X \cap (\theta - \varphi)(M) = 0$ olduğudur. Gerçekten; $x \in X$ ve $m \in M$ için $x = (\theta - \varphi)(m)$ olsun. Bu durumda $\varphi(m) = \theta(m) - x \in X$ dir ve sonuç olarak $m \in N$ dir. O halde $x = \theta(m) - \varphi(m) = \varphi(m) - \varphi(m) = 0$ dır. $X \leq_e E(X)$ ve $(\theta - \varphi)(M) \leq E(X)$ olduğundan $(\theta - \varphi)(M) = 0$ dır. Böylece $\theta(M) = \varphi(M) \leq X$ dir. ■

Tanım 1.15 *Bir M modülü $M-$injektif ise M ye yarı-injektif (quasi-injektif) modül denir.*

Sonuç 1.6 *Bir M modülünün yarı-injektif olması için gerek ve yeter koşul her $\varphi \in End_R(E(M))$ için $\varphi(M) \subseteq M$ olmasıdır.*

Önerme 1.15 *$M = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ bir $R-$modül olsun. Aşağıdakiler denktir;*

(i) M modülü yarı-injektiftir.

(ii) Her $\alpha \in \Lambda$ için M_α alt modülü yarı-injektif ve $M(\Lambda - \alpha)$ alt modülü $M_\alpha-$injektiftir.

Kanıt. (i) $\Longrightarrow$ (ii) M modülü yarı-injektif olsun. Önerme (1.13) den her $\alpha \in \Lambda$ için $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ $M_\alpha-$injektiftir. O halde Önerme (1.14) den her $\alpha \in \Lambda$ için M_α $M_\alpha-$injektif ve $\bigoplus_{i\in\Lambda-\alpha} M_i = M(\Lambda - \alpha)$ $M_\alpha-$injektiftir.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Her $\alpha \in \Lambda$ için M_α alt modülü yarı-injektif ve $M(\Lambda - \alpha)$ alt modülü $M_\alpha-$injektif olsun. O halde Önerme(1.14) den $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ $M_\alpha-$injektif olduğundan Önerme (1.13) den $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ yarı-injektiftir. ∎

2 YARI-SÜREKLİ (QUASI-CONTINUOUS) MODÜLLER

Bu bölümde, son yıllarda üzerinde aktif araştırmaların devam ettiği CS ve Yarı-Sürekli (Quasi-Continuous) modüller tanıtılıp bir sonraki bölümde inceleyeceğimiz modül sınıfı için gerekli olan temel özellikler verilecektir.

CS modüller hakkında ayrıntılı bilgi için [4], yarı-sürekli modüller için [3,6] önerilir.

Bir M $R-$modülü için aşağıdaki koşulları göz önüne alalım;

(C_1) M nin her altmodülü, M nin bir dik toplananı içinde essential olarak kapsanır.

(C_3) M nin $M_1 \cap M_2 = 0$ olacak biçimdeki her M_1 ve M_2 dik toplanan alt modülleri için $M_1 \oplus M_2$ de M nin bir dik toplananıdır.

Önerme 2.1 *Herhangi bir (quasi-)injektif M modülü (C_1) koşulunu sağlar.*

Kanıt. $N \leq M$, $E_1 = E(N)$ olmak üzere $E(M) = E_1 \oplus E_2$ olsun. M (quasi-)injektif modül olduğundan

$$M = M \cap E(M) = M \cap (E_1 \oplus E_2) = (M \cap E_1) \oplus (M \cap E_2)$$

dir. $N \leq_e E_1$ ve $N \leq M$ olduğundan $N \leq M \cap E_1 \leq E_1$ dir. O halde Önerme (1.3) (iii) den $N \leq_e M \cap E_1$ dir. ■

Tanım 2.1 *Bir M $R-$modülüne; (C_1) özelliğini sağlıyorsa CS, (C_1) ve (C_3) özelliklerini sağlıyorsa yarı-sürekli ($yarı - sürekli$) modül denir.*

Önerme 2.2 *M bir $R-$modül olsun. M modülünün (C_1) özelliğini sağlaması için gerekli ve yeterli koşul M nin her kapalı altmodülünün M nin bir dik toplananı olmasıdır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) $X \leq M$ kapalı bir alt modül ve M modülü (C_1) özelliğini sağlasın. Bu durumda varsayımdan $X \leq_e K \leq_d M$ olacak biçimde bir $K \leq M$ vardır. X kapalı bir altmodül olduğundan essential genişlemesi yoktur, yani $X = K \leq_d M$ dir.

($\Longleftarrow$) $Y \leq M$ alalım. Önerme (1.6) dan $Y \leq_e X \leq_c M$ olacak biçimde bir $X \leq M$ vardır. Varsayımdan $X \leq_d M$ dir. Böylece M modülü (C_1) özelliğini sağlar. ■

Önerme 2.3 *M bir ayrıştırılamaz $R-$modül olsun.*

$$M \text{ modülü } (C_1) \text{ özelliğini sağlar} \Longleftrightarrow M \text{ düzgün modüldür.}$$

Ayrıca herhangi bir düzgün modül yarı-sürekli modüldür.

Kanıt. ($\Longrightarrow$) M modülü (C_1) özelliğini sağlasın. M ayrıştırılamaz modül olduğundan M nin sıfırdan farklı her alt modülü M içinde essential olarak kapsanır. Böylece M nin düzgün bir modül olduğu görülür.
($\Longleftarrow$) M düzgün bir modül olsun. $\forall\ 0 \neq N \leq M$ için $N \leq_e M$ ve M ayrıştırılamaz olduğundan M (C_1) özelliğini sağlar.

N herhangi bir düzgün modül olsun. N nin sıfır ve kendinden başka bir dik toplananı olmadığından N (C_3) özelliğini sağlar. ■

Yardımcı Teorem 2.1 *M keyfi bir modül ve $A \leq M$ olsun. Eğer A, M nin bir dik toplananında kapalı ise M de de kapalıdır.*

Kanıt. $A \leq_c M_1 \leq_d M$ olsun. Bir modüldeki her dik toplanan bir komplement alt modül olduğundan

$$A \leq_c M_1 \leq_c M$$

dir. O halde Önerme (1.8) den $A \leq_c M$.dir. ■

Önerme 2.4 *M (C_i) $(i = 1, 3)$ koşulunu sağlayan bir modül ve $N \leq_d M$ ise N de (C_i) $(i = 1, 3)$ koşulunu sağlar.*

Kanıt. M CS modül olsun. $N \leq_d M$ ve $K \leq_c N$ alalım. Her dik toplanan bir komplement olduğundan $N \leq_c M$ dir. Önerme (1.8) den $K \leq_c M$ dir. M CS olduğundan $K \leq_d M$ dir. Dolayısıyla $M = K \oplus K'$ olacak biçimde bir $K' \leq M$ vardır. Buradan

$$N = N \cap M = N \cap (K \oplus K') = K \oplus (N \cap K')$$

olduğundan $K \leq_d N$ dir. Yani N CS tir.

M modülü (C_3) özelliğini sağlasın. $N \leq_d M$, K_1 ve K_2 de N nin $K_1 \cap K_2 = 0$ olacak biçimde iki dik toplananı olsun. O halde $M = K_1 \oplus K_2 \oplus L$ olacak biçimde bir $L \leq M$ vardır.

$$N = N \cap M = N \cap (K_1 \oplus K_2 \oplus L) = K_1 \oplus (N \cap (K_2 \oplus L)) = K_1 \oplus K_2 \oplus (N \cap L)$$

olduğundan N (C_3) özelliğini sağlar. ∎

Teorem 2.1 *Bir M modülü için aşağıdaki koşullar denktir;*

1. M yarı-sürekli modüldür.
2. X ve Y M nin birbirlerinin komplementleri olan iki alt modülü ise $M = X \oplus Y$ dir.
3. Her $f^2 = f \in End_R(E(M))$ için $f(M) \leq M$ dir.
4. $E(M) = \bigoplus_{i \in I} E_i$ ise $M = \bigoplus_{i \in I} M \cap E_i$ dir.

Kanıt. **(1) $\Longrightarrow$ (2)** M yarı-sürekli modül, X ve Y de M nin birbirlerinin komplementleri olan iki alt modülü olsun. Önerme (2.2) den $X, Y \leq_d M$ dir. M (C_3) özelliğini sağladığından $X \oplus Y \leq_d M$ dir. Ayrıca Önerme (1.5) den $X \oplus Y \leq_e M$ olduğundan $M = X \oplus Y$ dir.

(2) $\Longrightarrow$ (3) $A_1 = M \cap f(E(M))$ ve $A_2 = M \cap (1-f)(E(M))$ olsun. $A_1 \subseteq B_1$ olmak üzere B_1, A_2 nin bir komplementi ve $A_2 \subseteq B_2$ olmak üzere B_2 de B_1 in bir komplementi olsun. Bu durumda B_1 de B_2 nin bir komplementidir. Gerçekten; $B_2 \cap U = 0$ olacak biçimde bir $B_1 \leq U \leq M$ olsun.

$x \in (B_1 \oplus B_2) \cap (A_2 \cap U)$ alalım. $x = b_1 + b_2$ olacak biçimde bir $b_1 \in B_1$ ve $b_2 \in B_2$ vardır. Buradan

$$b_2 = x - b_1 \in B_2 \cap [(A_2 \cap U) + B_1] = B_2 \cap [(A_2 + B_1) \cap U] = 0$$

dır. Böylece $x = b_1 \in (A_2 \cap U) \cap B_1 = 0$ bulunur. O halde

$$(B_1 \oplus B_2) \cap (A_2 \cap U) = 0$$

dır. Önerme (1.5) den $B_1 \oplus B_2 \leq_e M$ olduğundan $A_2 \cap U = 0$ dır. B_1, A_2 ile arakesiti sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $U = B_1$ olmalıdır. Buradan B_1 in B_2 nin bir komplementi olduğu görülür. Şimdi $\pi : B_1 \oplus B_2 \to B_1$ projeksiyon dönüşümü olmak üzere iddiamız $M \cap (f - \pi)(M) = 0$ olduğudur. $(f - \pi)(x) = y$ olacak biçimde $x, y \in M$ alalım. Bu durumda

$$f(x) = y + \pi(x) \in M \text{ ve } f(x) \in M \cap f(E(M)) = A_1$$

dir. Böylece $(1 - f)(x) \in M$ ve bundan dolayı $(1 - f)(x) \in A_2$ dir. O halde

$$\pi(x - f(x)) \in \pi(A_2) = 0 \text{ yani } \pi(x) = \pi(f(x)) = f(x)$$

dir. $f(x) = y + \pi(x)$ olduğundan $y = 0$ dır ve bundan dolayı $M \cap (f - \pi)(M) = 0$ dır. $M \leq_e E(M)$ olduğundan $(f - \pi)(M) = 0$ dır. Sonuç olarak

$$f(M) = \pi(M) \leq M$$

dir.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Açıktır ki $\underset{i \in I}{\oplus} M \cap E_i \leq M$ dir. Şimdi keyfi bir $m \in M$ alalım. Sonlu bir $F \subseteq I$ için $m \in \underset{i \in F}{\oplus} E_i$ dir. $E(M) = \underset{i \in F}{\oplus} E_i \oplus E^*$, $E^* \leq E(M)$ yazabiliriz. Bu durumda $E_i = f_i(E(M))$ olacak biçimde ortogonal $f_i^2 = f_i \in End_R(E(M))$ $(i \in F)$ vardır. $f_i(M) \leq M$ olduğundan

$$m = \left(\sum_{i \in F} f_i \right)(m) = \sum_{i \in F} f_i(m) \in \underset{i \in F}{\oplus} M \cap E_i$$

dir. Böylece $M \leq \underset{i \in I}{\oplus} M \cap E_i$ ve bundan dolayı $M = \underset{i \in I}{\oplus} M \cap E_i$ dir.

(4) $\Longrightarrow$ (1) $A \leq M$ olsun. $E(M) = E(A) \oplus E^*$, $E^* \leq E(M)$ şeklinde yazalım. Bu durumda

$$M = M \cap E(M) = M \cap (E(A) \oplus E^*) = (M \cap E(A)) \oplus (M \cap E^*)$$

ve $A \leq_e M \cap E(A)$ dır. Buradan görüldüğü gibi, M nin her alt modülü bir dik toplanan içinde essential olarak kapsandığından M modülü (C_1) özelliğini sağlar.

Şimdi, M_1 ve M_2, M nin $M_1 \cap M_2 = 0$ olacak biçimdeki iki dik toplananı olsun. $E_i = E(M_i)$ $(i = 1,2)$ olmak üzere $E(M) = E_1 \oplus E_2 \oplus E'$, $E' \leq E(M)$ şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$M = (M \cap E_1) \oplus (M \cap E_2) \oplus (M \cap E')$$

dür. $M_i \leq_d M$ olduğundan $M = M_i \oplus K_i$ olacak biçimde $K_i \leq M$ $(i = 1,2)$ vardır. Ayrıca $M_i \leq_e M \cap E_i$ $(i = 1,2)$ olduğundan

$$M \cap E_i = (M \cap E_i) \cap M = (M \cap E_i) \cap (M_i \oplus K_i) = M_i \oplus (M \cap E_i \cap K_i)$$

dir. Buradan $M_i \leq_d M \cap E_i$ olduğundan $M_i = M \cap E_i$ $(i = 1,2)$ dir. Böylece M (C_3) özelliğini sağladığından yarı-sürekli modüldür. ∎

Tanım 2.2 *M bir R-modül ve $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ olsun. Eğer $i \neq j$ $(i, j = 1, ..., n)$ için M_i M_j-injektif ve M_j de M_i-injektif ise M_i lere göreceli (relatively) injektif denir.*

Örnek 2.1 *p bir asal tamsayı olmak üzere $M_R = (\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Q})_{\mathbb{Z}}$ olsun. Bu durumda $(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}})_{\mathbb{Z}}$ ve $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ alt modülleri relatively injektif değillerdir.*

Kanıt. $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ injektif olduğundan her N modülüne göre N-injektif dolayısıyla $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$-injektiftir. Şimdi, $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ nin $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$-injektif olduğunu kabul edelim. $\pi : \mathbb{Z} \to \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$, $\pi(n) = n + p\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ doğal epimorfizması olsun. Varsayımdan bir $\alpha : \mathbb{Q} \to \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ bir homomorfizması vardır ki $\alpha_{|\mathbb{Z}} = \pi$ dir (Şekil 2.1).

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & Q \arrow[dl, "\alpha"] \\ Z_{/pZ} & \end{tikzcd}$$

Şekil 2.1: $\alpha \circ i = \pi$ homomorfizması

Böylece $\alpha(\frac{1}{p}) = x + p\mathbb{Z}$ olacak biçimde $x \in \mathbb{Z}$ vardır. O halde

$$p.\alpha(\frac{1}{p}) = \alpha(1) = \pi(1) = 1 + p\mathbb{Z}$$

olduğundan $px + p\mathbb{Z} = 1 + p\mathbb{Z}$ dir. Buradan

$$1 = tpx \ (t \in \mathbb{Z}) \quad \text{yani} \quad 1 \equiv 0 \ (\operatorname{mod} p)$$

olup çelişkidir. ■

Önerme 2.5 *Eğer $M_1 \oplus M_2$ yarı-sürekli modül ise M_1 ve M_2 relatively injektiftir.*

Kanıt. $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. M_2 alt modülünün M_1-injektif olduğunu gösterelim. $X \leq M_1$ ve $\varphi : X \to M_2$ bir homomorfizma ve $B = \{x - \varphi(x) \mid x \in X\}$ olsun. $B \leq M$ dir. Bir $b \in B \cap M_2$ alalım. Bu durumda $b = x - \varphi(x)$ olacak biçimde bir $x \in X$ vardır.

$$b + \varphi(x) = x \in M_2 \cap M_1 = 0$$

olduğundan $x = 0$ dır. Bundan dolayı $b = 0$ ve $B \cap M_2 = 0$ dır. $B \subseteq M_1^* \leq M$ olmak üzere M_1^*, M_2 nin bir komplementi olsun. Teorem (2.1) den $M = M_1^* \oplus M_2$ dir. $\pi : M_1^* \oplus M_2 \to M_2$ projeksiyon dönüşümü olmak üzere, $\forall\ x \in X$ için

$$0 = \pi(x - \varphi(x)) = \pi(x) - \pi(\varphi(x)) = \pi(x) - \varphi(x)$$

dir. Böylece $\pi_{|M_1} = \varphi$ dir. Sonuç olarak M_2 alt modülü M_1-injektiftir. Benzer şekilde M_1 alt modülünün de M_2-injektif olduğu görülür. ■

Teorem 2.2 $\{M_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ *yarı-sürekli modüllerin bir ailesi olsun. Aşağıdakiler denktir;*

1. $M = \underset{\alpha\in\Lambda}{\oplus} M_\alpha$ yarı-sürekli modüldür.

2. Her $\alpha \in \Lambda$ için $M(\Lambda-\alpha) = \underset{i\in\Lambda-\alpha}{\oplus} M_i$ alt modülü M_α-injektiftir.

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$ (2) Önerme (2.5) dan $M(\Lambda-\alpha) = \underset{i\in\Lambda-\alpha}{\oplus} M_i$ alt modülü M_α-injektiftir.

(2) $\Longrightarrow$ (1) $\forall\, e^2 = e \in End_R(E(M))$ için $e(M) \leq M$ olduğunu gösterirsek Teorem (2.1) den M nin yarı-sürekli modül olduğu görülür.

$$e(M) = e(\underset{\alpha\in\Lambda}{\oplus} M_\alpha) = \sum_{\alpha\in\Lambda} e(M_\alpha)$$

olduğundan her $\alpha \in \Lambda$ için $e(M_\alpha) \leq M$ olduğunu gösterelim. Sabit bir $\alpha \in \Lambda$ yı göz önüne alalım. Her $\alpha \in \Lambda$ için $M(\Lambda-\alpha) = \underset{i\in\Lambda-\alpha}{\oplus} M_i$ alt modülü $M_\alpha - injektif$ olduğundan Önerme (1.14) den $\forall\, \alpha \neq \beta \in \Lambda$ için M_α alt modülü $M_\beta - injektiftir$. O halde Önerme (1.13) den M_α alt modülü $M(\Lambda-\alpha) - injektiftir$. $N_1 = M_\alpha$ ve $N_2 = M(\Lambda-\alpha)$ olsun. Bu durumda N_1 $N_2 - injektif$, N_2 $N_1 - injektif$ ve N_1 yarı-sürekli alt modüldür. $E = E(M)$, $E_1 = E(N_1)$ ve $E_2 = E(N_2)$ olsun. O zaman $E = E_1 \oplus E_2$ ve $e_{ij} : E_j \to E_i$ olmak üzere

$$e = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}$$

dir. N_2 $N_1 - injektif$ olduğundan Teorem (1.10) dan $e_{21}(N_1) \leq N_2$ dir. Netice olarak

$$e(N_1) = e_{11}(N_1) + e_{21}(N_1) \leq e_{11}(N_1) + N_2$$

dir. Böylece $e(N_1) = e(M_\alpha) \leq M$ olduğunu görmek için $e_{11}(N_1) \leq M$ olduğunu görmek yeterli olacaktır. $e = e^2$ olduğundan

$$e_{11} = e_{11}^2 + e_{12}.e_{21}$$

dir. $a = e_{11}$ ve $b = 1 - e_{11}$ olsun. O halde

$$ab = e_{11}(1-e_{11}) = e_{11} - e_{11}^2 = ba = a - a^2 = e_{12}e_{21} \in End_R E_1$$

dır. $K = \ker ab$ olsun. Bu durumda

$$a(K) \cap b(K) = 0$$

dır. Gerçekten; $x \in a(K) \cap b(K)$ alırsak $x = a(k_1) = b(k_2)$ olacak biçimde $k_1, k_2 \in K$ vardır.

$$a(x) = a(b(k_2)) = (ab)(k_2) = 0 \text{ olduğundan } x \in \ker a \text{ dır.}$$
$$b(x) = b(a(k_1)) = (ba)(k_1) = (ab)(k_1) \text{ olduğundan } x \in \ker b \text{ dir.}$$

O halde $x \in \ker a \cap \ker b = \ker a \cap \ker(1-a)$ dır. Buradan

$$0 = a(x) = (1-a)(x)$$

olduğundan $x = a(x) = 0$ dır. Sonuç olarak $a(K) \cap b(K) = 0$ dır.
Ayrıca

$$\begin{aligned} a(K) &\leq \ker b \leq \ker ab = K \quad \text{ve} \\ b(K) &\leq \ker a \leq \ker ab = K \end{aligned}$$

olduğundan

$$a(K) \oplus b(K) \leq K \tag{2.1}$$

dır. Bir $k \in K$ alalım.

$$k = a(k) + k - a(k) = a(k) + (1-a)(k) = a(k) + b(k) \in a(K) \oplus b(K)$$

şeklinde yazılabildiğinden

$$K \leq a(K) \oplus b(K) \tag{2.2}$$

dır. O halde (2.1) ve (2.2) den

$$K = a(K) \oplus b(K)$$

dır. Buradan $E_1 = f(E_1) \oplus g(E_2)$ olacak biçimde $f, g \in End_R(E_1)$ ortogonal idempotentleri vardır ki $a(K) \leq f(E_1)$ ve $b(K) \leq g(E_1)$ dir. O halde

$$f(K) = f(a(K) \oplus b(K)) = f(a(K)) = a(K)$$

dır. Gerçekten; $x \in a(K)$ alalım. Bu durumda $x = a(k_1)$ olacak biçimde $k_1 \in K$ vardır.

$$x = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(x) \in f(K)$$

olduğundan

$$a(K) \leq f(K) \tag{2.3}$$

dır. $y \in f(a(K)) = f(K)$ alalım. Bu durumda $y = f(a(k))$ olacak biçimde $k \in K$ vardır.

$$y = f(a(k)) = (1-g)(a(k)) = a(k) - g(a(k)) = a(k) \in a(K)$$

olduğundan

$$f(K) = f(a(K)) \leq a(K) \tag{2.4}$$

dır. O halde (2.3) ve (2.4) dan sonuç elde edilir.

Şimdi bir $k \in K \cap f(E_1)$ alalım. Bu durumda $k = f(e_1)$ olacak biçimde $e_1 \in E_1$ vardır. O halde

$$f(k) = f^2(e_1) = f(e_1) = k$$

olduğundan

$$K = f(K)$$

dır. Buradan

$$K \cap f(E_1) = f(K) \cap f(E_1) = f(K) = a(K) \leq \ker b$$

dir. Böylece $a_{|b(f(E_1))}$ bir monomorfizmadır. Gerçekten; $s \in \ker a_{|b(f(E_1))}$ alalım. $s \in b(f(E_1))$ olduğundan $s = b(f(e_1))$ olacak biçimde $e_1 \in E_1$ vardır. O halde $a(s) = a(b(f(e_1))) = 0$ olduğundan $f(e_1) \in \ker ab = K$ dır. Ayrıca $f(e_1) \in f(E_1)$ olduğundan $f(e_1) \in K \cap f(E_1) \leq \ker b$ dir. O halde $s = b(f(e_1)) = 0$ dır. Yani $a_{|b(f(E_1))}$ bir monomorfizmadır. E_1 injektif modül olduğundan bir $\psi : E_1 \longrightarrow E_1$ homomorfizması vardır ki $bf = \psi abf$ dir (Şekil 2.2).

$$\begin{tikzcd} bf(E_1) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i"'] & E_1 \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ E_1 & \end{tikzcd}$$

Şekil 2.2: $\psi \circ a = i$ homomorfizması

N_1 yarı-sürekli, N_1 $N_2 - injektif$ ve N_2 de $N_1 - injektif$ olduğundan Teorem (2.1) ve Teorem (1.10) dan

$$bf(N_1) = \psi abf(N_1) \leq \psi ab(N_1) = \psi e_{12}e_{21}(N_1) \leq \psi e_{12}(N_2) \leq N_1$$

dir. Benzer şekilde $ag(N_1) \leq N_1$ olduğu da görülür. O halde

$$a(N_1) = (a(f+g))(N_1) = af(N_1) + ag(N_1) = (1-b)f(N_1) + ag(N_1) \leq N_1$$

dir. Böylece $e_{11}(N_1) = a(N_1) \leq N_1$ dir. ■

Sonuç 2.1 $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i$ *nin yarı-sürekli modül olması için gerekli ve yeterli koşul her bir* M_i *nin quasi-continous ve her* $i \neq j$ *için* M_i *nin* $M_j - injektif$ *olmasıdır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i$ modülü yarı-sürekli ve $\Lambda = \{1, 2, 3, ..., n\}$ olsun.

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i = \left(\underset{i\in\Lambda - j}{\oplus} M_i \right) \oplus M_j = M(\Lambda - j) \oplus M(j)$$

olduğundan Teorem (2.2) den $M(\Lambda - j)$ $M(j) - injektiftir$. O halde Önerme (1.14) den her $i \neq j$ için M_i $M_j - injektiftir$. Ayrıca Önerme (2.4) den her $i \in \Lambda$ için M_i yarı-süreklitur.

($\Longleftarrow$) Önerme (1.14) den $\underset{i\in\Lambda - j}{\oplus} M_i$ $M_j - injektiftir$. O halde Teorem (2.2) den $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i$ yarı-sürekli modüldür. ■

3 MUTLAK DİK TOPLANAN ÖZELLİĞİNE SAHİP (ADS) MODÜLLER

Bu bölümde, ads-modüller tanımlanıp, temel özellikleri ve dönüşümler cinsinden karakterizasyonları verilecektir.

Mutlak dik toplanan (absolute direct summand) alt grup kavramı, abel gruplarda (yani, $\mathbb{Z}-$modüllerde) ilk olarak L. Fuchs [7] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra bu tür alt modüller, genel bir halka üzerinde tanımlı modüllere genelleştirilmiş ve incelenmiştir (bakınız, [8]).

Tanım 3.1 *M bir R-modül olsun. Herhangi bir $M = A \oplus B$ ayrışımı için; C, A nın M deki bir komplementi iken $M = A \oplus C$ oluyorsa M ye ads veya ads-modül denir.*

Örneğin, ayrıştırılamaz modüller ve düzgün modüller ads'tir.

Önerme 3.1 *M bir $R-$modül olsun. M CS ve ads ise yarı-sürekli modüldür.*

Kanıt. $M = Y \oplus Y'$ olsun. X de Y nin bir komplementi olsun. Bu durumda X bir kapalı alt modüldür. M CS olduğundan $X \leq_d M$ dir. O halde $M = X \oplus X'$ olacak biçimde bir $X' \leq M$ vardır. M ads olduğundan $M = X \oplus Y$ dir. Böylece (C_3) özelliği sağlandığından M yarı-sürekli modüldür. ■

3.1 Karakterizasyonlar ve Genel Sonuçlar

Teorem 3.1 *M_R modülünün ads olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $M = A \oplus B$ ayrışımı için B nin A-injektif olmasıdır.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) M ads-modül, $U \subseteq A$ ve $\phi : U \longrightarrow B$ bir homomorfizma olsun. $X = \{u - \phi(u) \mid u \in U\}$ kümesini tanımlayalım. $X \leq M$ ve $X \cap B = 0$ dır. Bu durumda B nin M de $X \subseteq C$ olacak biçimde bir C komplementi vardır. Varsayımdan $M = C \oplus B$ dir. Böylece her bir $a \in A$, $c - b$, $c \in C, b \in B$

formunda yazılır. O halde $\pi_1 : M \longrightarrow C$ ve $\pi_2 : M \longrightarrow B$ projeksiyon dönüşümleri olmak üzere $\pi_2 \circ \pi_{1|A} : A \longrightarrow B$ dir. Bu durumda $i : U \to A$ içerme dönüşümü olmak üzere, $\forall\ u \in U$ için

$$\begin{aligned}
(\pi_2 \circ \pi_{1|A} \circ i)(u) &= \pi_2(\pi_{1|A}(u)) \\
&= \pi_2(u) \\
&= \pi_2(u - \phi(u) + \phi(u)) \\
&= \pi_2(u - \phi(u)) + \pi_2(\phi(u)) \\
&= \pi_2(\phi(u)) = \phi(u)
\end{aligned}$$

olduğundan B alt modülü $A-$injektiftir.

($\Longleftarrow$) $M = A \oplus B$, C B nin bir komplementi ve $U = A \cap (B \oplus C) \leq M$ olsun. O halde her bir $u \in U$, $b + c$, $b \in B$, $c \in C$ formunda yazılır. $\pi : B \oplus C \to B$ projeksiyon dönüşümü olmak üzere $\varphi = \pi_{|U} : U \longrightarrow B$ bir homomorfizmadır. Kabulümüzden φ homorfizması bir $\psi : A \longrightarrow B$ homomorfizmasına genişler. $a \in A$ için $D = R(a - \psi(a)) + C$ alt modülünü göz önüne alalım. $b = ra - r\psi(a) + c \in D \cap B$, $c \in C$, $r \in R$ olsun. Bu durumda $ra = b + r\psi(a) - c \in U$ dur. O halde

$$\begin{aligned}
\varphi(ra) &= (\psi \circ i)(ra) = r\psi(a) \\
\varphi(ra) &= \varphi(b + r\psi(a) - c) \\
&= (\pi \circ i)(b + r\psi(a) - c) \\
&= \pi(b) + \pi(r\psi(a)) - \pi(c) \\
&= b + r\psi(a)
\end{aligned}$$

olduğundan $b = 0$ bulunur. Yani $B \cap D = 0$ dır. R halkası birimli ve C de B nin komplementi olduğundan $\forall a \in A$ için $a - \psi(a) \in C$ dir. Böylece $\forall m \in M$ için

$$m = a + b = (a - \psi(a) + \psi(a)) + b \in B \oplus C$$

dir. Sonuç olarak $M = B \oplus C$ dir. ∎

Teorem (3.1) kullanılarak ads-modüllere örnekler verilebilir.

Örnek 3.1

1. $M = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ modülü CS tir fakat ads-modül değildir.

2. Yarı-sürekli (quasi-continuous) modüller ads'tir. Ancak ads koşulu yarı-sürekliliği gerektirmez.

3. Tüm idempotentleri merkezde olan bir R halkası için R_R bir ads modüldür.

Kanıt. **(1)** Tanım (1.14) ve Örnek (1.2) den $\mathbb{Z}$ modülü $\mathbb{Z}$-injektif değildir. O halde Teorem (3.1) den $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ads-modül değildir. Ayrıca [9] dan $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ CS modüldür.

(2) Teorem (2.1) den yarı-sürekli modüller ads'tir. Ancak ads bir modül yarı-sürekli olmak zorunda değildir. Örneğin; M_R olarak Tanım (1.8) deki halkayı alalım. M_R ayrıştırılamaz ve böylece ads'tir. Ancak M_R düzgün olmadığından Önerme (2.3) den CS değildir.

(3) R halkasının tüm idempotentleri merkezde olduğundan R_R nin

$$R_R = e(R) \oplus (1-e)(R), \quad e \in End_R(R)$$

olacak biçimde tek bir ayrışımı vardır. C, $e(R)$ nin bir komplementi olsun. O halde $C \oplus e(R) \leq_e R_R = e(R) \oplus (1-e)(R)$ dir. Önerme (1.3) (vii) den $C \leq_e (1-e)(R)$ dir. O halde C, $e(R)$ nin komplementi olduğundan Önerme (1.7) den $C = (1-e)(R)$ dir. ∎

Tanım 3.2 *M bir R-modül ve $m \in M$ olsun.*

$$\{r \in R \mid mr = 0\}$$

kümesine m nin sağ sıfırlayıcısı (annihilator) denir ve $ann_R(m)$ ile gösterilir. $ann_R(m)$, R halkasının bir sağ idealidir.

Sonuç 3.2

i) $M = A \oplus B$ ads-modül olsun. A, $ann_R(a) = 0$ olacak biçimde bir a elemanı içeriyorsa B injektif alt modüldür.

ii) $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$, $End_R(M)$ nin orthogonal merkez idempotentlerinin tam bir kümesi olsun. Bu durumda M nin ads-modül olması için gerek ve yeter koşul herbir e_iM nin ads-modül olmasıdır.$(i = 1, 2, ..., k)$

Kanıt. **i)** B nin injektif olduğunu Baer kriterini kullanarak görelim. Yani $\forall\ I \leq R$ ideali için $\varphi : I \longrightarrow B_R$ modül homomorfizmasının bir $g : R \longrightarrow B_R$ homomorfizmasına genişletilebileceğini görelim. $\varphi : I \longrightarrow B_R$ bir modül homomorfizması olsun. $Ra \leq A$ ve $\phi : Ra \longrightarrow B$, $\phi(ra) = rb$ $(a \in A,\ b \in B)$ bir homomorfizmadır.

$$Y = \{sa - \varphi(s) \mid s \in I,\ a \in A\}$$

kümesini tanımlayalım. $Y \leq M$ dir. Ayrıca $Y \cap B = 0$ dır. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
b \in Y \cap B &\Longrightarrow b = sa - \varphi(s) \text{ olacak biçimde } s \in I, a \in A \text{ vardır.}\\
&\Longrightarrow b + \varphi(s) = sa \in B \cap Ra \leq B \cap A = 0\\
&\Longrightarrow sa = 0\\
&\Longrightarrow s \in ann(a) = 0\\
&\Longrightarrow s = 0\\
&\Longrightarrow b = 0 \text{ dır}
\end{aligned}$$

Bu durumda B nin M de $Y \subseteq C$ olacak biçimde bir C komplementi vardır. Varsayımdan $M = C \oplus B$ dir. O halde her bir $c \in C$; $c = a + b$, $a \in A$, $b \in B$ formunda ve herbir $a \in A$; $a = b + c$, $b \in B$, $c \in C$ formunda yazılabilir. Bu durumda $\pi_1 : M \longrightarrow C$ ve $\pi_2 : M \longrightarrow B$ projeksiyon dönüşümleri olmak üzere

$$\pi_2 \circ \pi_{1|A} : A \longrightarrow B$$

olduğunu görülür. $\forall\ ra \in Ra$ için $(\pi_2 \circ \pi_{1|A} \circ i)(ra) = \phi(ra)$ dır (Şekil 3.1).

$$\begin{tikzcd}
Ra \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[dl, dashed, "\pi_2 \circ \pi_1"] \\
B &
\end{tikzcd}$$

Şekil 3.1: $\pi_2 \circ \pi_1 \circ i = \phi$ homomorfizması

Böylece Önerme(1.13) den A_1 alt modülü B_1-injektiftir. Sonuç olarak $\forall i = 1, ..., k$ için A_i alt modülü B_i-injektiftir. Yani $\forall i = 1, ..., k$ için $e_i(M)$ ler ads-modüllerdir.

($\Longleftarrow$) $\forall i = 1, ..., k$ için $e_i(M)$ ler ads-modüller olsun. $M = \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} e_i(M)$ nin ads-modül olduğunu tümevarım yöntemi ile görelim. $k = 1$ için $M = e_1(M)$ ads-modüldür. $k = n-1$ için $M = \overset{n-1}{\underset{i=1}{\oplus}} e_i(M)$ ads-modül olsun. $k = n$ için $M = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} e_i(M)$ ads-modül müdür?

$$M = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} e_i(M) = \overset{n-1}{\underset{i=1}{\oplus}} e_i(M) \oplus e_n(M)$$

dir. $0 \neq X \leq e_n(M)$ ve $0 \neq \phi : X \longrightarrow \overset{n-1}{\underset{i=1}{\oplus}} e_i(M)$ bir homomorfizma olsun. Öyle bir $\varphi : e_n(M) \longrightarrow \overset{n-1}{\underset{i=1}{\oplus}} e_i(M)$ homomorfizması bulabilirmiyiz ki $\varphi_{|X} = \phi$ olsun. $\forall\ x \in X$ için $x \in e_n(M)$ olduğundan $x = e_n(m)$ olacak biçimde bir $m \in M$ vardır. $\phi(x) = \phi(e_n(m)) \in \overset{n-1}{\underset{i=1}{\oplus}} e_i(M)$ olduğundan

$$\phi(x) = \phi(e_n(m)) = \sum_{i=1}^{n-1} e_i(m_i)$$

olacak biçimde $m_i \in M$ $(i = 1, ..., n-1)$ vardır. Buradan

$$e_n(\phi(x)) = e_n(\phi(e_n(m))) = e_n(\sum_{i=1}^{n-1} e_i(m_i)) = 0 \Longrightarrow e_n(\phi(e_n(m))) = 0$$

dır. e_n merkezde olan bir idempotent olduğundan

$$\phi(e_n^2(m)) = \phi(e_n(m))) = \phi(x) = 0$$

bulunur. Yani $\forall\ x \in X$ için $\phi(x) = 0$ olduğundan $\phi = 0$ dır. O halde X den $\overset{n-1}{\underset{i=1}{\oplus}} e_i(M)$ ye sıfırdan farklı olan bir homomorfizma bulunamaz. Sonuç olarak M ads-modüldür. ∎

Ads-modüllerin Teorem (3.1) de bir karakterizasyonu verildi. Şimdi, injektif hull ayrışımı içeren dönüşümler cinsinden bir karakterizasyonu daha verilecektir.

Teorem 3.2 *Bir M $R-$modülünün ads-modül olması için gerek ve yeter koşul bir $A \leq_d M$ ve $E_1 = E(A)$ olmak üzere $E(M) = E_1 \oplus E_2$ ayrışımı ve $\pi : E(M) = E_1 \oplus E_2 \to E_1$ projeksiyon dönüşümü için $\pi(M) \subseteq M$ olmasıdır.*

Kanıt. M bir ads-modül olsun. $B = E_2 \cap M$ alt modülü A nın M deki bir komplementidir. Gerçekten; $B \subseteq C$, C A nın bir komplementi ve $c \in C$ olsun. Bu durumda $c = e_1 + e_2$, $e_i \in E_i$ olarak yazılabilir.
Eğer $e_1 = 0$ ise $c = e_2 \in E_2 \cap M = B$ dir. Yani $C = B$ dir.
Eğer $e_1 \neq 0$ ise $A \leq_e E(A)$ olduğundan bir $r \in R$ vardır ki $0 \neq re_1 \in A$ dır. Bu durumda

$$B = E_2 \cap M \leq C \leq M \leq_e E(M) = E_1 \oplus E_2$$

ve

$$B = B \cap E_2 \leq C \cap E_2 \leq M \cap E_2 \leq_e E(M) \cap E_2 = E_2$$

olduğundan $C \cap E_2 \leq E_2$ dir.
Eğer $C \leq E_2$ ise

$$re_1 = rc - re_2 \in A \cap E_2 = (M \cap A) \cap E_2 = A \cap B \leq A \cap C = 0$$

dır.
Eğer $E_2 \leq C$ ise

$$re_1 = rc - re_2 \in A \cap C = 0$$

dır. Bu iki durum da $re_1 \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $e_1 = 0$ yani $C = B$ olduğundan B alt modülü A nın komplementidir. Varsayımdan $M = A \oplus B$ dir. O halde $\pi(M) = A$ dır.

Tersine, $M = A \oplus B$, C de A nın M deki komplementi olsun. E_1 A nın injektif hull'ı olmak üzere $E(M) = E_1 \oplus E_2$ olarak yazılabilir. $A \leq_d M$ olduğundan $A = M \cap E_1$ olarak seçebilir. Gerçekten; $A \leq_e E_1$ ve $A \leq M$ olduğundan

$$A \leq_e E_1 \cap M \leq_e E_1$$

ve

$$E_1 \cap M = E_1 \cap (A \oplus B) = A \oplus (E_1 \cap B)$$

dir. Ayrıca $A \leq_e E_1$ olduğundan

$$A \cap B \leq_e E_1 \cap B \quad \text{ve} \quad A \cap B = 0$$

olduğundan

$$(E_1 \cap B) = 0$$

dir. O halde $E_1 \cap M = A$ dır. C A nın komplementi olduğundan injektif hull'ı E_2 dir. $\pi : E(M) \longrightarrow E_1$ projeksiyon dönüşümü olsun. Kabulümüzden $\pi(M) \subseteq M$ dir. Bir $x \in M$ yi $x = e_1 + e_2$, $e_i \in E_i$ olarak yazabiliriz. Buradan $\pi(x) = \pi(e_1 + e_2) = e_1$ olduğundan $e_1 \in \pi(M) \subseteq M$ dir. O halde $e_2 = x - e_1 \in M$ dir. $C \leq_e M \cap E_2$ ve C A nın komplementi olduğundan $C = M \cap E_2$ dir.

$$M = M \cap (E_1 \oplus E_2) \leq (M \cap E_1) \oplus (M \cap E_2) = A \oplus C \leq M$$

olduğundan $M = A \oplus C$ dir. ∎

Önerme 3.2 $M = \underset{I}{\oplus} M_\alpha$ *olsun.*

(i) Her bir $\alpha \in I$ için M_α lar yarı-injektif ise M nin ads-modül olması için gerek ve yeter koşul M nin yarı-injektif olmasıdır.

(ii) Her bir $\alpha \in I$ için M_α lar yarı-sürekli ise M nin ads-modül olması için gerek ve yeter koşul M nin yarı-sürekli olmasıdır.

Kanıt. **i)** M ads-modül olsun. Teorem (3.1) den her bir $\alpha \in I$ için $M(I - \{\alpha\}) = \underset{n \in I - \{\alpha\}}{\oplus} M_n$ alt modülü M_α-injektiftir. O halde Önerme (1.15) dan M modülü yarı-injektiftir.

Tersine, M yarı-injektif modül olsun. Önerme (1.15) dan her bir $\alpha \in I$ için $M(I - \{\alpha\})$ alt modülü M_α-injektiftir. O halde Teorem (3.1) den M ads-modüldür.

ii) M ads-modül olduğundan her bir $\alpha \in I$ için $M(I - \{\alpha\})$ alt modülü M_α-injektiftir. O halde Teorem (2.2) den M yarı-sürekli modüldür.

Tersine, M yarı-sürekli modül ise Teorem (2.2) den her bir $\alpha \in I$ için $M(I - \{\alpha\})$ alt modülü M_α-injektiftir. O halde Teorem (3.1) den M ads-modüldür. ∎

Önerme 3.3 *M_α lar ayrıştırılamaz modüller olmak üzere $M = \underset{I}{\oplus} M_\alpha$ ve M nin her ayrışımındaki dik toplananları sayısı aynı olsun. Bu durumda M*

modülünün ads olması için gerek ve yeter koşul herbir $J \subset I$ için $M(J)$ ve $M(I \backslash J)$'nin relatively injektif olmalarıdır.

Kanıt. $M = A \oplus B$ olsun. Kabulümüzden, $K_1 \cup K_2$ ile I nın kardinalleri aynı olmak üzere $A = \underset{K_1}{\oplus} N_\alpha$ ve $B = \underset{K_2}{\oplus} N_\beta$ yazabiliriz. $\psi : K_1 \cup K_2 \longrightarrow I$ birebir ve örten bir fonksiyon olduğundan $\psi(K_1) = J$ olarak alırsak $A \cong M(J)$ ve $B \cong M(I \backslash J)$ dir. $M(J)$ ve $M(I \backslash J)$ relatively injektif alt modüller olduklarından A ve B alt modülleri de relatively injektiftirler. Sonuç olarak M ads-modüldür.

Tersine, M ads-modül olsun.

$$M = \underset{I}{\oplus} M_\alpha = (\underset{J}{\oplus} M_\alpha) \oplus (\underset{I\backslash J}{\oplus} M_\alpha) = M(J) \oplus M(I \backslash J)$$

olduğundan $M(J)$ ve $M(I \backslash J)$ relatively injektif alt modüllerdir. ∎

3.2 Sağ Noetherian Halkalar Üzerindeki Ads-Modüller

Bir sağ noetherian R halkası üzerindeki injektif modüllerin bir dik toplamı Teorem (1.5) den injektif olduğundan ve bu tür bir halka üzerindeki keyfi bir modül; injektif bir alt modül ile sıfırdan başka injektif alt modülü olmayan (reduced) diğer bir alt modülün bir dik toplamı olarak yazılabilir (bakınız, [10]).

Bu kesimde, yukarıda belirtilen gerçeklerden dolayı bir sağ Noetherian halka üzerindeki ads-modüllerin yapısal özellikleri hakkında daha fazla bilgi verilecektir.

Önerme 3.4 *R bir sağ Noetherian halka olsun.*

(i) M injektif olmayan bir ads-modül olsun. V torsion ve injective , $0 \neq U$ reduced olmak üzere $M = U \oplus V$ şeklinde yazılabilir. Ayrıca V nin alt modüllerinden U ya sıfırdan farklı olacak biçimde bir monomorfizma bulunamaz.

(ii) R düzgün R-modül ve M de injektif olmayan ads-modül olsun. M nin $ann_R(a) = 0$ olan bir a elemanı varsa i) şıkkında bahsedilen U ayrıştırılamaz alt modüldür.

(iii) R bir kalıtsal halka, V torsion ve injective , $0 \neq U$ reduced olmak üzere $M = U \oplus V$ injektif olmayan bir ads-modül olsun. Bu durumda V nin alt modüllerinden U ya sıfırdan farklı bir homomorfizma bulunamaz.

Kanıt. i) V torsion ve injektif, U da sıfırdan farklı bir reduced alt modül olmak üzere $M = U \oplus V$ biçiminde yazılabilir (bakınız, [10]). $0 \neq W \leq V$ ve $f : W \longrightarrow U$ bir monomorfizma olsun. M ads-modül olduğundan U alt modülü V-injektiftir. O halde

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & U \\ V \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Şekil 3.3: $g \circ i = f$ homomorfizması

diyagramı değişmeli olacak biçimde bir $g : V \to U$ homomorfizması vardır. C, $\ker g$ nin V deki komplementi olsun. Bu durumda Önerme (1.5) den $C \oplus \ker g \leq_e V$ dir. $\pi : C \oplus \ker g \to C$ doğal epimorfizma olmak üzere, V injektif olduğundan

$$\begin{tikzcd} C \oplus \ker g \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "i"'] & C \arrow[r, "i"] & V \\ V \arrow[urr, dashed, "t"'] & & \end{tikzcd}$$

Şekil 3.4: $t \circ i = i \circ \pi$ homomorfizması

diyagramı değişmeli olacak biçimde bir $t : V \to V$ homomorfizması vardır. $t_{|C}(C) = \pi(C) = C$ olduğundan $(t_{|C})^2 = t_{|C}$ dir, yani $t_{|C}$ idempotent homomorfizmadır.

$$\frac{C}{\ker t_{|C}} \cong t_{|C}(C) = C \leq V$$

olduğundan $\ker t_{|C} = \ker \pi = \ker g = 0$ dır. Buradan g nin bir monomorfizma olduğu görülür. O halde

$$V = \frac{V}{\ker g} \cong g(V) \leq U$$

dur. V injektif olduğundan $g(V)$ de injektiftir. Bu da U nun reduced olmasıyla çelişir. O halde V nin alt modüllerinden U ya sıfırdan farklı olacak biçimde bir monomorfizma bulunamaz.

ii) (i) şıkkından, U reduced; V torsion ve injective olmak üzere $M = U \oplus V$ olarak yazılabildiğini biliyoruz. M nin $ann_R(A) = 0$ olan bir a elemanı olsun. $a \in M$ olduğundan $a = u + v$ olacak biçimde $u \in U$ ve $v \in V$ vardır. O halde $ann_R(u) \cap ann_R(v) = 0$ dır. Gerçekten;

$$\begin{aligned} r \in ann_R(a) &\implies r(a) = r(u+v) = ru + rv = 0 \\ &\implies ru = -rv \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $u \neq -v$ dir. Eğer $u = -v$ olsaydı $a = u + v = 0$ olurdu. O halde $ru = rv = 0$ olur. Sonuç olarak $r \in ann_R(u) \cap ann_R(v)$ dir. Yani

$$ann_R(a) \subseteq ann_R(u) \cap ann_R(v)$$

dir. Tersine,

$$\begin{aligned} s \in ann_R(u) \cap ann_R(v) &\implies s \in ann_R(u) \text{ ve } s \in ann_R(v) \\ &\implies su = sv = 0 \\ &\implies sa = s(u+v) = su + sv = 0 \\ &\implies s \in ann_R(a) \\ &\implies ann_R(u) \cap ann_R(v) \subseteq ann_R(a) \end{aligned}$$

O halde $ann_R(u) \cap ann_R(v) = ann_R(a) = 0$ dır. $ann_R(u), ann_R(v) \leq R_R$ ve $ann_R(u) \cap ann_R(v) = 0$ olduğundan $ann_R(u)$ veya $ann_R(v)$ den biri sıfır olmak zorundadır. Eğer $ann_R(v) = 0$ ise Sonuç (3.2) (i) den U injective olur. V de injektif olduğundan M injective olur. Bu M nin injektif olmamasıyla çelişir. O halde $ann_R(u) = 0$ olmalıdır. Eğer U nun bir aşikar olmayan $U = U_1 \oplus U_2$ ayrışımı varsa aynı şekilde işlem yapılarak U_1 veya U_2 den birinin injektif olduğu görülür. Bu da U nun reduced olmasıyla çelişir. O halde U ayrıştırılamaz alt modüldür.

iii) $0 \neq W \leq V$ ve $\phi : W \longrightarrow U$ bir homomorfizma olsun. M ads-modül olduğundan U alt modülü V-injektiftir. O halde $f' : V \longrightarrow U$ bir modül homomorfizması vardır ki $f'_{|W} = \phi$ dır.

$$\frac{V}{\ker f'} \cong f'(V) \leq U$$

dur. R kalıtsal bir halka olduğundan $\frac{V}{\ker f'}$ injektif modüldür. Bu da U nun reduced olmasıyla çelişir. O halde $\phi = 0$ olmalıdır. ■

Önerme 3.5 *U bir ads-modül ve $U \cong M$ ise M de ads-modüldür.*

Kanıt. $f : M \longrightarrow U$ bir izomorfizma ve $M = A \oplus B$ olsun. Bu durumda

$$f(M) = f(A \oplus B) = f(A) \oplus f(B) = U$$

olur. U modülü ads olduğundan $f(A)$ alt modülü $f(B)$-injektiftir. Göstermemiz gereken A alt modülünün B-injektif olduğudur. $0 \neq Y \leq B$ ve $0 \neq \phi : Y \longrightarrow A$ bir homomorfizma olsun. Bu durumda

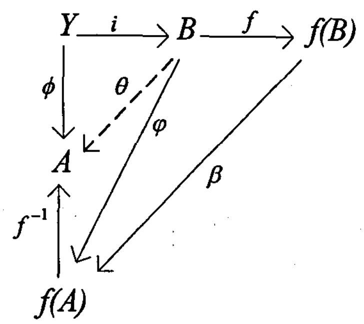
$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"'] & B \arrow[r, "f"] & f(B) \arrow[ddll, dashed, "\beta"] \\
A \arrow[d, "f"'] & & \\
f(A) & &
\end{tikzcd}$$

Şekil 3.5: $\beta \circ f \circ i = f \circ \phi$ homomorfizması

diyagramı değişmeli olacak biçimde bir $\beta : f(B) \longrightarrow f(A)$ homomorfizması vardır. O halde $\varphi = \beta \circ f : B \longrightarrow f(A)$ bir homomorfizmadır. Buradan $\theta = f^{-1}\varphi : B \longrightarrow A$ bir homomorfizmadır (Şekil 3.6). $\forall\, y \in Y$ için

$$(\theta \circ i)(y) = ((f^{-1} \circ \varphi) \circ i)(y) = (f^{-1} \circ (\beta \circ f) \circ i)(y) = (f^{-1} \circ f \circ \phi))(y) = \phi(y)$$

olduğundan A alt modülü B-injektiftir. Yani M ads-modüldür.



Şekil 3.6: $\theta = f^{-1}\varphi$ homomorfizması

■

Önerme 3.6 *R bir Noetherian halka, U reduced ve ads, V de injektif olmak üzere $M_R = U \oplus V$ olsun. Ayrıca V nin alt modüllerinden U ya sıfırdan başka bir homomorfizma bulunamasın. Bu durumda M ads-modüldür.*

Kanıt. $M = A \oplus B$ olsun. A_1 ve B_1 reduced; A_2 ve B_2 injektif olmak üzere $A = A_1 \oplus A_2$ ve $B = B_1 \oplus B_2$ şeklinde yazalım. O halde [11,1.1] den $A_1 \oplus B_1 \cong U$ ve $A_2 \oplus B_2 \cong V$ dir. M nin ads olduğunu görmek için A nın B-injektif olduğunu görmek yeterli olacaktır. $\forall\ \phi \in Hom(E(A), E(B))$ için $\phi(A) \subseteq B$ mi?

$\phi : E(A_1) \oplus A_2 \longrightarrow E(B_1) \oplus B_2$ homomorfizmasını $\phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$ olarak gösterelim. Burada

$$\begin{aligned} \phi_{11} &: E(A_1) \longrightarrow E(B_1) \\ \phi_{12} &: A_2 \longrightarrow E(B_1) \\ \phi_{21} &: E(A_1) \longrightarrow B_2 \\ \phi_{22} &: A_2 \longrightarrow B_2 \end{aligned}$$

dir. B alt modülünün A-injektif'liği için; $\phi_{11}(A_1) \subseteq B_1$, $\phi_{12}(A_2) \subseteq B_1$, $\phi_{21}(A_1) \subseteq B_2$ ve $\phi_{22}(A_2) \subseteq B_2$ olduğunu görmek yeterli olacaktır.

U ads olduğundan Önerme (3.5) den $A_1 \oplus B_1$ ads tir. O halde B_1 alt modülü A_1-injektiftir. Yani $\forall\ \phi \in Hom(E(A_1), E(B_1))$ için $\phi(A_1) \subseteq B_1$ dir.

O halde $\phi_{11} \in Hom(E(A_1), E(B_1))$ olduğundan $\phi_{11}(A_1) \subseteq B_1$ dir. $\phi_{12} \in Hom(A_2, E(B_1))$ için kabulümüzden $\phi_{12} = 0$ olmalıdır. Gerçekten; $0 \neq \phi_{12} : A_2 \longrightarrow E(B_1)$ bir homomorfizma olsun. $f : A_2 \oplus B_2 \longrightarrow V$ bir izomorfizma olmak üzere, $E(B_1)$ injektif modül olduğundan

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, "\phi_{12}"] \arrow[d, "f"'] & E(B_1) \\ f(A_2) \arrow[ur, dashed, "t"'] & \end{tikzcd}$$

Şekil 3.7: $t \circ f = \phi_{12}$ homomorfizması

diyagramı değişmeli olacak biçimde bir $t : f(A_2) \longrightarrow E(B_1)$ homomorfizması vardır. $0 \neq t(f(A_2)) \leq E(B_1)$ ve $B_1 \leq_e E(B_1)$ olduğundan $B_1 \cap t(f(A_2)) \neq 0$ dır. O halde $0 \neq b_1 = t(f(a_2))$ olacak biçimde $b_1 \in B_1$ ve $a_2 \in A_2$ vardır. Şimdi

$$X = \{f(a_2) \in f(A_2) \mid b_1 = t(f(a_2)),\ b_1 \in B_1,\ a_2 \in A_2\}$$

kümesini tanımlayalım. Açıktır ki $0 \neq X \subset f(A_2) \leq V$ dir. $f(a_2), f(a_2') \in X$ ve $r \in R$ alalım. Bu durumda $t(f(a_2)) = b_1$ ve $t(f(a_2')) = b_1'$ olacak biçimde $b_1, b_2' \in B_1$ vardır.

$$\begin{aligned} t(f(a_2) + f(a_2')) &= t(f(a_2)) + t(f(a_2')) = b_1 + b_1' \in B_1 \\ t(f(a_2)r) &= t(f(a_2))r = b_1 r \in B_1 \end{aligned}$$

olduğundan $0 \neq X \leq f(A_2) \leq V$ dir. O halde $h : X \longrightarrow B_1$, $h(f(a_2)) = t(f(a_2))$ ile tanımlı fonksiyonu bir homomorfizmadır. $g : A_1 \oplus B_1 \longrightarrow U$ bir izomorfizma olmak üzere

$$i \circ g \circ h : X \xrightarrow{h} B_1 \xrightarrow{g} g(B_1) \xrightarrow{i} U$$

bir homomorfizmadır. Varsayımdan $i \circ g \circ h = 0$ dır. O halde $h = 0$ olmalı, yani

$$t(f(A_2)) \cap B_1 = 0$$

dır. $B_1 \leq_e E(B_1)$ olduğundan $t(f(A_2)) = 0$ yani $\phi_{12} = 0$ dır. Bu da $\phi_{12} \neq 0$ olmasıyla çelişir.

$\phi_{21} \in Hom(E(A_1), B_2)$ için $\phi_{21}(A_1) \subseteq B_2$ mi? $\phi_{21}(E(A_1)) \subseteq B_2$ dir. $A_1 \leq E(A_1)$ olduğundan $\phi_{21}(A_1) \subseteq \phi_{21}(E(A_1)) \subseteq B_2$ dir.
$\phi_{22} \in Hom(A_2, B_2)$ için $\phi_{22}(A_2) \subseteq B_2$ dir.
Sonuç olarak B alt modülü A-injektiftir. Yani M ads-modüldür. ■

Önerme 3.7 *R bir Noetherian halka, her $\alpha \in I$ için M_α lar ads-modüller olmak üzere $M = \underset{I}{\oplus} M_\alpha$ olsun. Her $\alpha \neq \beta$ için $Hom_R(E(M_\alpha), E(M_\beta)) = 0$ ise M ads-modüldür.*

Kanıt. $M = A \oplus B$ olsun. Her bir $\beta \in I$ için $M_\beta = (M_\beta \cap A) \oplus (M_\beta \cap B)$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda

$$M = \underset{I}{\oplus}((M_\beta \cap A) \oplus (M_\beta \cap B))$$

dır. R bir Noetherian halka olduğundan

$$E(M) = E(A) \oplus E(B) = \underset{I}{\oplus}(E(M_\beta \cap A) \oplus E(M_\beta \cap B))$$

dir. $\phi : E(A) \longrightarrow E(B)$ bir homomorfizma olsun. $\phi(A) \subseteq B$ mi?
ϕ'ın $E(M_\alpha \cap A)$ ya kısıtlanmışını ϕ_α olarak alalım (Şekil 3.8).

$$\begin{tikzcd}
E(M_\alpha \cap A) \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[dr, "g"'] & E(B) \arrow[d, "\pi"] \\
 & E(M_\beta \cap B)
\end{tikzcd}$$

Şekil 3.8: $g = \pi \circ \phi_\alpha$ homomorfizması

Eğer $\alpha \neq \beta$ ise kabulümüzden $g = \pi \circ \phi_\alpha = 0$ olacaktır. Halbuki $\phi_\alpha \neq 0$ aldığımıza göre $E(M_\alpha \cap B) = E(M_\beta \cap B)$ olmalıdır. $\forall\ a \in E(M_\alpha \cap A)$ için $a \in E(M_\alpha \cap B)$ dır.

$$g(a) = (\pi \circ \phi_\alpha)(a) = \pi(\phi_\alpha(a)) \in E(M_\alpha \cap B)$$

olduğundan $\phi_\alpha(a) \in E(M_\alpha \cap B)$ dır. Yani $\mathrm{Im}\,\phi_\alpha \subseteq E(M_\alpha \cap B)$ dır. Buradan

$$\phi_\alpha \in Hom(E(M_\alpha \cap A), E(M_\alpha \cap B))$$

dir.

$$M_\alpha = (M_\alpha \cap A) \oplus (M_\alpha \cap B)$$

ve M ads-modül olduğundan $(M_\alpha \cap B)$ alt modülü $(M_\alpha \cap A)$-injektiftir. O halde $\phi_\alpha(M_\alpha \cap A) \subseteq (M_\alpha \cap B)$ dır. Buradan $i \circ \phi_\alpha = \phi_\alpha : (M_\alpha \cap A) \longrightarrow B$ dönüşümü bir homomorfizmadır (Şekil 3.9).

$$\begin{tikzcd}
M_\alpha \cap A \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, dashed, "i \circ \phi_\alpha = \phi_\alpha"] & M_\alpha \cap B \arrow[d, "i"] \\
A \arrow[r, dashed, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Şekil 3.9: $i \circ \phi_\alpha = \phi_\alpha$ homomorfizması

A dan B ye $g \circ i = \phi_\alpha$ olacak biçimdeki g homomorfizmasını ϕ alırsak $\phi(A) \subseteq B$ bulunur. Yani B alt modülü A-injektiftir. Sonuç olarak M ads-modüldür. ■

Tanım 3.3 *M bir modül ve $E(M) = \underset{I}{\oplus} E_\alpha$ olsun. Eğer $\forall\ \alpha, \beta \in I$ için E_α lar ayrıştırılamaz modüller olmak üzere $E_\alpha \cong E_\beta$ ise M ye homogeneous modül denir.*

Sonuç 3.3 *R bir Noetherian halka ve M de ads olan homogeneous modül olsun. Bu durumda M ya ayrıştırılamaz ya da yarı-injektiftir.*

Kanıt. M nin aşikar olmayan bir ayrışımı $M = A \oplus B$ olsun. M ads-modül olduğundan B alt modülü A-injektif ve A alt modülü de B-injektiftir. $E(M) = E(A) \oplus E(B)$ ve M homogeneous modül olduğundan $E(A) \cong E(B)$ dir. $g : E(A) \to E(B)$ bir izomorfizma olmak üzere, B alt modülü A-injektif olduğundan Teorem (1.10) dan $g(A) \leq B$ dir. Benzer şekilde $g^{-1}(B) \leq A$ dır. Böylece

$$B = (gg^{-1})(B) = g(g^{-1}(B)) \leq g(A) \leq B$$

olduğundan $g(A) = B$ dir. O halde $g_{|A} : A \longrightarrow B$ bir izomorfizmadır. B alt modülü A-injektif ve $A \cong B$ olduğundan B alt modülü B-injektif, yani yarı-injektiftir. Benzer şekilde A alt modülünün de yarı-injektif olduğu görülür. O halde Önerme (3.2) den M modülü yarı-injektiftir. ∎

M bir R-modül olsun. Her $K, L \leq_d M$ için $K \cap L \leq_d M$ (her iki dik toplananının kesişimi de dik toplanan olan modül) oluyorsa M ye dik toplanan kesişim özelliğine (SIP) sahip bir modül denildiğini hatırlayalım. Bu modüller [12] ve [13] de ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu durumda

"Ads-modüller ile SIP özelliğine sahip modüller arasında bir gerektirme var mıdır?" sorusunu düşünmek doğaldır. Aşağıdaki örnekler bu soruya negatif cevap verecektir.

Örnek 3.2 *K bir cisim olmak üzere $R = \begin{bmatrix} K & K \\ 0 & K \end{bmatrix}$ olsun. $N = \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{bmatrix}$ ve $L = \begin{bmatrix} K & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sağ R-modüllerdir. $M = R/L$, $U = M \oplus N$ olsun. U SIP özelliğine sahip değildir (bakınız, [10]).*

Ayrıca, $\frac{R}{L} \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \cong K$ olduğundan $\frac{R}{L}$ bir cisim olup Baer Kriterinden injektiftir. O halde $M = \frac{R}{L}$ $N-$injektiftir. Diğer yandan, $M = \frac{R}{L}$ cisim olduğundan sıfır ve kendinden başka alt modülleri yoktur. O halde N $M-$injektiftir. Buradan U nun ads-modül olduğu görülür.

Örnek 3.3 *$M_R = (\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Q})_{\mathbb{Z}}$ modülünü alalım. M_R nin dik toplananları; $(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \oplus 0)$, $(0, \mathbb{Q})$, 0 ve kendisi olduğundan açıkça M_R SIP özelliğine sahiptir. Diğer yandan, Örnek (2.1) den M_R ads-modül değildir.*

Örnek (3.2) ve Örnek (3.3) den SIP ve ads koşullarının birbirlerinden bağımsız olduğu görülür. O halde;

Tanım 3.4 *M bir R-modül olsun. M_R SIP ve Ads koşullarını sağlıyorsa M ye $SA-$ modül diyelim.*

Örneğin; düzgün, semisimple (her alt modülü bir dik toplananı olan modül) ve ayrıştırılamaz modüller SA-modüllerdir.

SA-modüllerin kendi içerisinde araştırılması ilginç olacaktır. O halde bu çalışmamızı aşağıdaki açık soru ile tamamlayalım;

Açık Soru 1 *Ya SIP ya da Ads-modüllerde sağlanmayan hangi modül özellikleri SA-modüllerde doğru olur?*

KAYNAKLAR

1. ANDERSON, F.W. ve FULLER, K.R., *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, (1974).
2. GOODEARL, K.R., *Ring Theory*, Marker Dekker, (1976).
3. MOHAMED, S.H ve MULLER, B.J., *Continuous and Discrete Modules*, Cambridge University Press, (1990).
4. DUNG, N.V., SMITH, P.F. ve WISBAUER, R., *Extending Modules*, Longman, (1994).
5. SHARPE, D.W. ve VÂMOS, P., *Injective Modules*, Cambridge University Press, (1972).
6. YU, H.P. ve CAMILLO, V.P., *On Modules for which The Finite Exchange Property Implies The Countable Exchange Property*, Communications in Algebra, **22 (10)**, 3887-3901, (1994).
7. FUCHS, L., *Infinite Abelian Groups*, Volume 1, Academic Press, (1970).
8. BURGESS, W.D. ve RAPHAEL, R., *On Modules with The Absolute Direct Summand Property*, Proceedings of the Ohio State University Conference, 137-148, (1992).
9. KAMAL, M.A. ve MULLER, B.J., *Extending Modules Over Commutative Domains*, Osaka Journal Math., **25**, 531-538 (1988).
10. KAPLANSKY, I., *Infinite Abelian Groups*, University of Michegan Press, (1969).
11. MATLİS, E., *Injective Modules Over Noetherian Rings*, Pacific J. Math., **8**, 511-528 (1958).
12. GARCIA, J.L., *Properties of Direct Summands of Modules*, Communications in Algebra, **17**, 73-92 (1989).

13. HAUSEN, J., *Modules with the Summand Intersection Property*, Communications in Algebra, **17**, 135-148 (1989).