

173848

**DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
KALİTATİF KARAKTERLERİNİN
NÜMERİK ÇÖZÜMLER ALTINDA
MUHAFAZA EDİLMESİ**

Yunus ÖZDEMİR
Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Temmuz - 2003

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Yunus ÖZDEMİR 'in Diferansiyel Denklemlerin Kalitatif Karakterlerinin Nümerik Çözümler Altında Muhafaza Edilmesi başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans tezi ~~11.07.2003~~ tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı - Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	Prof.Dr. Hüseyin KOÇAK	
Üye	Prof.Dr. Şahin KOÇAK	
Üye	Doç.Dr. Vakıf CAFEROV	
Üye	Doç.Dr. Mehmet ÜREYEN	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ~~24.07.2003~~ tarih ve ~~24/3~~ sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Ömer ÖZER
Fen Bilimleri Enstitüsü
M ü d ü r ü

Anadolu Üniversitesi
Merkez Kütüphane

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN KALİTATİF KARAKTERLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLER ALTINDA MUHAFAZA EDİLMESİ

Yunus ÖZDEMİR

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin KOÇAK

2003, 70 Sayfa

Bu çalışmada, sürekli ve kesikli dinamik sistemlerle ilgili bazı temel kavramlar verildikten sonra birkaç özel dinamik sistemin nümerik analizi yapılarak algoritma seçiminin sistemin yapısına etkisi görülmüştür.

Periyodik çözüme sahip sistemlerin belli koşullar altında bu periyodik çözüm civarında bir invaryant eğriye sahip olduğu bir teoreme verilmiş ve örneklerle açıklanmıştır.

Son olarak, Theta metodunun yapısı incelenmiştir. Theta metodunun sabit noktalarının çekim bölgeleri ve 2 periyodlu çözümlerinin varlığı ve kararlılığı üzerinde durulmuştur. Parametreye bağlı olarak sahte sabit noktaların ve sahte 2 periyodlu çözümlerin var olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fark denklemi, Theta metodu, Periyodik yörünge,
Nümerik algoritma

ABSTRACT

Master of Science Thesis

**KEEPING QUALITATIVE PROPERTIES OF
DIFFERENTIAL EQUATIONS
UNDER NUMERICAL SOLUTIONS**

Yunus ÖZDEMİR

Anadolu University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Prof. Hüseyin KOÇAK

2003, 70 Pages

In this study, after some basic notions of discrete and continuous dynamical systems are given, the effect of the choice of the algorithm to the system's construction is investigated by doing numerical analysis of some special dynamical systems.

A theorem is given concerning the systems with periodic solution are shown to an invariant curve near this periodic solution under specific conditions, and this is explained through examples.

Finally, the structure of Theta method is examined. The basin of attraction of fixed points and the existence and the stability of period two solutions of Theta method are investigated. Depending on the parameter, the existence of spurious fixed points and spurious period two solutions are shown to exist.

Keywords: Difference equation, Theta method, Periodic orbit, Numerical algorithm

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen danışmanım sayın Prof.Dr. Hüseyin KOÇAK 'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Öneri ve bilgileriyle bana destek olan sayın Doç.Dr. Mehmet ÜREYEN, Prof.Dr. Şahin KOÇAK, Doç.Dr. Vakıf CAFEROV ve Yard.Doç.Dr. Bünyamin DEMİR 'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Fark Denklemleri	3
1.2. Lineerizasyon	6
2. DİNAMİK SİSTEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	8
2.1. Lineer Sıradan Olmayan Diferansiyel Denklem	8
2.2. Harmonik Salınım Hareketi	13
2.3. Harmonik Salınım Hareketinin Center Preserving Algoritması ile İncelenmesi.	20
2.4. Lojistik Fark Denklemleri	25
3. PERİYODİK ÇÖZÜME SAHİP SİSTEMLERİN NÜMERİK ANALİZİNE İLİŞKİN BİR TEOREM	34
4. THETA METODUNUN DİNAMİĞİ	44
4.1. Giriş	44
4.2. Sabit Noktaların Çekim Bölgeleri	44
4.3. 2 Periyodlu Yörüngeler	50
KAYNAKLAR	70

ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1	(2.1.2) nin $h = 0.1$ için ilk 35 adımı	9
2.2	(2.1.2) nin $h = 0.7$ için ilk 35 adımı	9
2.3	(2.1.2) nin $h = 1$ için ilk 35 adımı	9
2.4	(2.1.2) nin $h = 2$ için ilk 35 adımı	10
2.5	(2.1.2) nin $h = 2.1$ için ilk 35 adımı	10
2.6	(2.1.3) ün $h = 1.5$ için ilk 35 adımı	12
2.7	(2.1.3) ün $h = 1.723854358889140$ için ilk 35 adımı	12
2.8	(2.1.3) ün $h = 1.9$ için ilk 35 adımı	12
2.9	(2.1.2) nin $h = 1.723854358889140$ için ilk 35 adımı	13
2.10	(2.2.2) nin $h = 0.1$ için 200 adımı	14
2.11	(2.2.2) nin $h = 0.02$ için 400 adımı	15
2.12	(2.2.3) ün $h = 0.1$ için 200 adımı	16
2.13	(2.2.3) ün $h = 0.02$ için 400 adımı	16
2.14	(2.2.4) ün $h = 0.1$ için 200 adımı	18
2.15	(2.2.4) ün $h = 0.02$ için 400 adımı	18
2.16	(2.2.4) ün $h = 2\pi/10$ için 10 adımı	19
2.17	(2.2.4) ün $h = 0.3167688806$ için 20 adımı	20
2.18	(2.3.2) nin $(1, 1)$ başlangıç noktası için ilk 100 adımı	21
2.19	(2.3.2) nin $(0.2, 5)$ başlangıç noktası için ilk 100 adımı	22
2.20	(2.3.2) nin $(-2, 5)$ başlangıç noktası için ilk 100 adımı	22
2.21	(2.3.2) nin $(-10, 15)$ başlangıç noktası için ilk 100 adımı	22
2.22	(2.4.2) nin $\lambda = 0.8$ ve $u_0 = 0.3$ için yörüngesi	27
2.23	(2.4.2) nin $\lambda = 1.5$ ve $u_0 = 0.8$ için yörüngesi	27
2.24	(2.4.2) nin $\lambda = 2.8$ ve $u_0 = 0.3$ için yörüngesi	27
2.25	(2.4.2) nin $\lambda = 0.8$ ve $u_0 = 0.3$ için basamak-adım diyagramı	28
2.26	(2.4.2) nin $\lambda = 1.5$ ve $u_0 = 0.85$ için basamak-adım diyagramı	28
2.27	(2.4.2) nin $\lambda = 2.8$ ve $u_0 = 0.3$ için basamak-adım diyagramı	29
2.28	(2.4.2) nin $0 < \lambda < 3$ için çatallanma diyagramı	29
2.29	(2.4.2) nin $\lambda = 3.2$ ve $u_0 = 0.3$ için basamak-adım diyagramı	30
2.30	(2.4.2) nin $\lambda = 3.2$ ve $u_0 = 0.3$ için yörüngesi	30

2.31	(2.4.2) nin $\lambda = 3.5$ ve $u_0 = 0.3$ için basamak-adım diyagramı . . .	31
2.32	(2.4.2) nin $\lambda = 3.5$ ve $u_0 = 0.3$ için yörüngesi	31
2.33	(2.4.2) nin $\lambda = 3.65$ ve $u_0 = 0.3$ için yörüngesi	32
2.34	(2.4.2) nin λ ya bağlı olarak çatallanma diyagramı	33
3.1	(3.2) nin $x_0 = (-0.5, 0.5), \varepsilon = 0.1$ ve $h = 0.4$ için ilk 5000 adımı	36
3.2	(3.2) nin $x_0 = (-2, 2), \varepsilon = 0.05$ ve $h = 0.4$ için ilk 5000 adımı . .	36
3.3	(3.2) nin $x_0 = (-0.5, 0.5), \varepsilon = 0.1$ ve $h = 0.11$ için ilk 5000 adımı	36
3.4	(3.2) nin $x_0 = (-0.5, 0.5), \varepsilon = 0.1$ ve $h = 0.05$ için ilk 5000 adımı	37
3.5	(3.2) nin $x_0 = (-0.5, 0.5), \varepsilon = 0.05$ ve $h = 0.05$ için ilk 5000 adımı	37
3.6	(3.2) nin $x_0 = (-2, 2), \varepsilon = 0.1$ ve $h = 0.05$ için ilk 5000 adımı . .	37
3.7	(3.2) nin $x_0 = (-0.5, 0.5), \varepsilon = 0.1$ ve $h = 0.01$ için ilk 15000 adımı	38
3.8	(3.3) ün $x_0 = (0.5, 0)$ ve $h = 0.5$ için ilk 1000 adımı	39
3.9	(3.3) ün $x_0 = (0.5, 0)$ ve $h = 0.51$ için ilk 1000 adımı	40
3.10	(3.3) ün $x_0 = (0.5, 0)$ ve $h = 0.49$ için ilk 1000 adımı	40
3.11	(3.3) ün $x_0 = (0.5, 0)$ ve $h = 0.2$ için ilk 1000 adımı	40
3.12	(3.3) ün $x_0 = (0.5, 0)$ ve $h = 0.1$ için ilk 1000 adımı	41
3.13	(3.3) ün $x_0 = (0.5, 0)$ ve $h = 0.05$ için ilk 1000 adımı	41
3.14	(3.6) nin $x_0 = (0.5, 0.5)$ ve $h = 0.01$ için ilk 3000 adımı	43
4.1	(4.1.2) nin $g(u) = u(1 - u)$ olmak üzere $u_0 = 1.2$ için ilk 150 adımı	48
4.2	(4.1.2) nin $g(u) = u(1 - u)$ olmak üzere $u_0 = 0.2$ için ilk 150 adımı	48
4.3	(4.1.2) nin $g(u) = u(1 - u)$ olmak üzere $u_0 = -1.6$ için ilk 150 adımı	48
4.4	(4.1.2) nin $g(u) = 2(u - 3) + (u - 3)^3$ olmak üzere $u_0 = 3.8$ için ilk 150 adımı	50
4.5	(4.1.2) nin $g(u) = -2u u $ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 0.6$ ve $u_0 = 63$ için ilk 100 adımı	52
4.6	(4.1.2) nin $g(u) = -2u u $ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 0.6$ ve $u_0 = 37$ için ilk 100 adımı	52
4.7	(4.1.2) için (v, w) 2 periyodlu çözümün varlığı	57
4.8	(4.1.2) nin $g(u) = u^5$ olmak üzere $h = 0.5, \theta = 0.51$ ve $u_0 = 6$ için ilk 150 adımı	59

4.9	(4.1.2) nin $g(u) = u^5$ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 0.7$ ve $u_0 \approx 2.659147$ için ilk 150 adımı	59
4.10	(4.1.2) nin $g(u) = u^5$ olmak üzere $h = 0.5, \theta = 0.4$ ve $u_0 = 6$ için ilk 150 adımı	59
4.11	(4.1.2) nin $g(u) = u \ln(1 + u)$ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 0.75$ ve $u_0 = 1$ için ilk 150 adımı	60
4.12	(4.1.2) nin $g(u) = u \ln(1 + u)$ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 1$ ve $u_0 = 1$ için ilk 500 adımı	60
4.13	(4.1.2) nin $g(u) = u^3$ olmak üzere $h = 0.5, \theta = 0.8$ ve $u_0 = 6$ için ilk 150 adımı	61
4.14	(4.1.2) nin $g(u) = -u^3$ olmak üzere $h = 0.5, \theta = 0$ ve $u_0 = 2$ için ilk 150 adımı	63
4.15	(4.1.2) nin $g(u) = -u^3$ olmak üzere $h = 0.5, \theta = 0.4$ ve $u_0 = 2$ için ilk 100 adımı	63
4.16	(4.1.2) nin $g(u) = -u^3$ olmak üzere $h = 0.5, \theta = 0.4$ ve $u_0 = 3$ için ilk 100 adımı	63
4.17	(4.1.2) nin $g(u) = -u^3$ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 0.4$ ve $u_0 = -10 = \frac{\sqrt{2h-4h\theta}}{-h+2h\theta}$ için ilk 100 adımı	64
4.18	(4.1.2) nin $g(u) = -u(u-1)(u+1)$ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 0$ ve $u_0 = \sqrt{h(2+h)}/h$ için ilk 100 adımı	64
4.19	(4.1.2) nin $g(u) = -u(u-1)(u+1)$ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 0.3$ ve $u_0 \approx -7.141428$ için ilk 100 adımı	65
4.20	(4.1.2) nin $g(u) = -u(u-1)(u+1)$ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 0.4$ ve $u_0 = 1.75$ için ilk 100 adımı	65
4.21	(4.1.2) nin $g(u) = -u(u-1)(u+1)$ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 0.4$ ve $u_0 = -1.75$ için ilk 100 adımı	65
4.22	(4.1.2) nin $g(u) = -u$ olmak üzere $u_0 = 1.4, \theta = 0.6, h = 0.1$ için ilk 100 adımı	68
4.23	(4.1.2) nin $g(u) = -u$ olmak üzere $u_0 = -1.4, \theta = 0.6, h = 0.1$ için ilk 100 adımı	69

4.24 (4.1.2) nin $g(u) = 2u - \frac{u}{ u }$ olmak üzere $u_0 = 1.4, \theta = 0.6, h = 0.1$ için ilk 100 adımı	69
4.25 (4.1.2) nin $g(u) = 2u - \frac{u}{ u }$ olmak üzere $u_0 = -1.4, \theta = 0.6, h =$ 0.1 için ilk 100 adımı	69

SİMGELER DİZİNİ

C^n	n . mertebeden türevlenebilir
$\frac{\partial x}{\partial x_i}$	x in x_i ye göre kısmi türevi
A^T	A nın transpozu
$\dot{x}(t)$	x in t (zaman) ye göre türevi
$\dot{x}(p)$	x in p ye göre türevi
■	Kanıtın sonu

1 GİRİŞ

Bilinmektedir ki bir diferansiyel denklemi nümerik olarak çözmek istediğimiz zaman karşımıza fark denklemleri çıkar, ki bu fark denklemleri kesikli dinamik sistemlerdir. Bir kesikli dinamik sistemin hareketi bize sürekli sistemin hareketi hakkında bilgiler verir. Ama acaba hangi metot, parametrenin hangi değeri için daha doğru sonuçlar vermektedir?

$x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.1)$$

otonom dinamik sistemini ele alalım. Bizim amacımız bir dinamik sistemin genel yapısını incelemek değil, nümerik olarak çözümlerin yapısını incelemek olduğundan dinamik sistemlerle ilgili teorik kavramlara fazla girmemeye çalışacağız. Yine de dinamik sistemler için temel bazı kavramları ele alalım.

Tanım 1.1 $\dot{x} = f(x)$ diferansiyel denklemi için $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x noktasına sistemin denge noktası (kritik nokta, sabit nokta) denir.

Tanım 1.2 Her t için $x(t + T) = x(t)$ eşitliğini sağlayan bir T pozitif sayısı bulunabiliyorsa $x(t)$ ye T periyodlu periyodik çözüm ve bu T değerine de $x(t)$ nin periyodu denir. Bu türden sayıların en küçüğüne esas periyod denir.

Denge noktası ve periyodik çözüm kavramları son derece önemlidir. Eğer x_0 denge noktası ise bu noktadan başlayan çözüm yine x_0 ın kendisidir. Sistem bu noktada hareketsizdir. Bu nedenle denge noktasının kararlılığı da önem kazanır. Eğer bu nokta kararlı ise verilen her ε komşuluğuna karşılık bir δ komşuluğu vardır ki δ komşuluğundan başlayan çözümler ε komşuluğunda kalır. x_0 denge noktasının asimtotik kararlı olması için de x_0 ın kararlı olması ve δ komşuluğundan başlayan çözümlerin $t \rightarrow \infty$ iken denge noktasına ulaşması gerekir. Eğer bu nokta kararsız ise en az bir ε komşuluğu vardır ki bu komşuluğa karşılık δ komşuluğundan başlayan çözümler ε komşuluğunda kalamaz. Sıkça kullandığımız aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 1.1 $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, x_0 noktası $\dot{x} = f(x)$ sisteminin denge noktası ve $f \in C^1$ olsun. $f'(x_0) < 0$ ise x_0 denge noktası kararlı denge noktası, $f'(x_0) > 0$ ise x_0 denge noktası kararsız denge noktasıdır ([1]).

Eğer (1.1) sistemi lineer bir sistem ise A bir kare matris olmak üzere

$$\dot{x} = Ax \quad (1.2)$$

biçiminde yazılabilir. Burada A ya katsayılar matrisi denir. Eğer A nın determinantı 0 dan farklı ise sistemin tek denge noktası orijindir. A nın determinantının 0 olması durumunda ise sonsuz denge noktası vardır.

Teorem 1.2 (1.1) sistemi lineer bir sistem ve katsayılar matrisi A olsun.

1. A nın özdeğerlerinin reel kısmı negatif ise orijin asimtotik kararlı denge noktasıdır.
2. A nın özdeğerlerinin birinin reel kısmı pozitif ise orijin kararsız denge noktasıdır ([1]).

Eğer sistem lineer değil ise denge noktasının kararlılığını analiz etmek için sistemi bu denge noktası civarında lineerize etmeliyiz. Sistem lineerize edildikten sonra yukarıda verilen teoremler yardımıyla denge noktasının kararlılığı hakkında bir sonuca varılabilir.

Tanım 1.3 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ (1.2) sisteminin n tane lineer bağımsız çözümleri olmak üzere

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

matrisine (1.2) sisteminin temel matrisi denir.

$\Phi(t)$ nin tek olmadığı açıktır. c sabit vektör olmak üzere

$$x(t) = \Phi(t)c$$

biçiminde yazılır. Verilen bir $x(t_0) = x_0$ başlangıç koşulu için x_0 dan başlayan çözüm

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$$

biçimindedir.

Teorem 1.3 $A(t)$, T periyodlu $n \times n$ tipinde sürekli bir matris olmak üzere

$$\dot{x} = A(t)x \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

sürekli sistemini düşünelim. (1.4) ün her $\Phi(t)$ temel matrisi, $P(t)$ T periyodlu ve B sabit $n \times n$ lik matrisler olmak üzere

$$\Phi(t) = P(t)e^{Bt}$$

biçiminde yazılır ([3]).

$C = e^{BT}$ matrisine (1.4) sisteminin monodromy matrisi denir. Bu matrisin özdeğerlerine sistemin karakteristik çarpanları denir ve $\rho_i, i = 1, 2, \dots, n$ karakteristi çarpanlar olmak üzere bu karakteristik çarpanları hesaplamak için genel bir metot olmamasına rağmen karakteristik çarpanların çarpımı için

$$\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n = \exp\left(\int_0^T \text{Tr} A(t) dt\right) \quad (1.5)$$

eşitliği geçerlidir. (1.4) sisteminin aşıkâr denge noktasının kararlılık tipinin belirlenmesinde de bu karakteristik çarpanlar kullanılabilir. Eğer tüm karakteristik çarpanların modülleri 1 den küçük ise orijin asimtotik kararlı denge noktasıdır.

1.1 Fark Denklemleri

Bir nümerik metot yardımıyla sistem incelenirken karşımıza fark denklemleri çıkar. Eğer fark denklemi 1. mertebeden ise

$$x_{n+1} = p(x_n) \quad (1.1.1)$$

biçiminde ifade edilir. Görülmektedir ki (1.1.1) sadece x_n ye bağlıdır. Eğer bu x_{n+1}, x_{n-1} e de bağlı olsaydı

$$x_{n+1} = p(x_n) + q(x_{n-1})$$

formunda olacaktı ve ikinci mertebeden fark denklemi adını alacaktı. Nümerik algoritmalar bu biçimde fark denklemleridir ama elbette bazı parametre değerleriyle beraber verilir. Mesela Euler metodu (1.1) sistemi için h adım aralığı

olmak üzere

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n) \quad (1.1.2)$$

biçimindedir. Sistem lineer değil ise kapalı algoritmalarından elde edeceğimiz fark denklemlerini (1.1.1) formunda yazamayız. Bu fark denklemini en azından bir h (adım aralığı) parametresine bağlıdır.

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ye bir dönüşüm olmak üzere bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktası için

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

dizisine x_0 noktasının iterasyonları denir. Bir x_0 başlangıç değeri için bir fark denklemini de bu biçimde bir dizidir. Bu nedenle açıktır ki fark denklemlerini bir dönüşüm gibi düşünebiliriz. Yani aslında her dönüşüm verilen bir x_0 başlangıç değeri için aynı zamanda bir kesikli dinamik sistemi ifade eder. Şimdi bu dönüşümler ile ilgili basit tanım ve teoremleri verelim.

Tanım 1.4 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü verilsin.

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

noktalarının kümesine $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nin yörüngesi ya da x_0 dan başlayan çözüm denir.

Tanım 1.5 $f(\bar{x}) = \bar{x}$ eşitliğini sağlayan x noktasına dönüşümün sabit noktası (denge noktası, kritik noktası) denir.

Eğer \bar{x} sabit nokta ise \bar{x} den başlayan çözüm (fark denkleminin çözümü, \bar{x} nin yörüngesi)

$$\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \dots$$

biçiminde olacaktır. (1.1) sürekli sisteminin denge noktasından bahsetmiştik. Bu sistem nümerik olarak incelendiğinde ortaya çıkan fark denkleminin sabit noktasının sistemin denge noktası ile çakışması gerekir ya da beklenir. Ama bazı durumlarda bu denge noktaları ile eşleşmeyen sahte sabit noktalar ortaya çıkabilmekte ya da bu denge noktaların veya periyodik çözümlerin kararlılık tipleri korunmamaktadır. Bu da arzu edilen bir durum değildir.

Tanım 1.6 \bar{x} , f dönüşümünün sabit noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\|x - \bar{x}\| < \delta$ iken $n \geq 0$ için $\|f^n(x) - \bar{x}\| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa \bar{x} sabit noktasına kararlı sabit nokta denir. Eğer \bar{x} kararlı değilse kararsızdır denir.

Tanım 1.7 \bar{x} , f dönüşümünün kararlı sabit noktası olsun. Eğer \bar{x} in $\|x - \bar{x}\| < \sigma$ komşuluğundaki her x için $n \rightarrow \infty$ iken $f^n(x) \rightarrow \bar{x}$ olacak şekilde bir $\sigma > 0$ sayısı varsa \bar{x} sabit noktasına asimtotik kararlı sabit nokta denir.

Teorem 1.4 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir C^1 dönüşüm ve \bar{x} , f dönüşümünün sabit noktası olsun.

1. $|f'(\bar{x})| < 1$ ise \bar{x} asimtotik kararlı sabit noktadır.
2. $|f'(\bar{x})| > 1$ ise \bar{x} kararsız sabit noktadır ([1]).

Aşağıdaki teorem de dönüşümümüz lineer olduğunda sabit noktaların kararlılığını belirlemede son derece kullanışlıdır.

Teorem 1.5 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineer dönüşümü verilsin. A katsayılar matrisi olmak üzere;

1. Eğer A nın özdeğerlerinin modülü 1 den küçük ise orijin asimtotik kararlıdır.
2. Eğer A nın en az bir özdeğerinin modülü 1 den büyük ise orijin kararsızdır ([1]).

Bir dönüşüm için diğer önemli olan bir kavram da periyodik noktalar, periyodik çözümlerdir.

Tanım 1.8 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir dönüşüm olsun. $x \in \mathbb{R}^n$ için $f^p(x) = x$ olacak şekilde bir $p \geq 1$ doğal sayısı varsa x noktasına f nin periyodik noktası, p sayısına da bu periyodik noktanın periyodu, en küçük periyoda ise x periyodik noktasının asal periyodu denir.

f dönüşümünün x noktasının asal periyodu p ise bu noktanın yörüngesi

$$x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x), x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x), x, \dots$$

biçimindedir ve bu yörüngeye periyodik yörünge denir. Bu durumda x , f^p nin sabit noktasıdır. Bu sabit nokta f^p nin kararlı sabit noktası ise f nin kararlı periyodik noktasıdır.

Teorem 1.6 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm ve x_0 bu dönüşümün asal periyodu p olan periyodik noktası olsun. Eğer

$$\left| (f^p)'(x_0) \right| < 1$$

ise x_0 noktası f nin asimtotik kararlı periyodik noktasıdır. Eğer

$$\left| (f^p)'(x_0) \right| > 1$$

ise x_0 noktası f nin kararsız periyodik noktasıdır ([2]).

Bir fark denklemini bir dönüşüm gibi düşünebileceğimiz açıktır. Bir x_0 başlangıç noktası için bir fark denkleminin yörüngesine x_0 başlangıç noktası için fark denkleminin çözümü diyeceğiz. Yani bir fark denkleminin bir x_0 dan başlayan yörüngesi

$$x_0, x_1, x_2, \dots$$

sayı dizisidir. Eğer algoritma kapalı bir algoritma değil ise verilen başlangıç koşullarına bağlı olarak sistemin yörüngesini kapalı formda ifade edebiliriz. Ama eğer algoritma kapalı ise her bir adım için teker teker yaparak yörünge elemanlarını görmeliyiz. Dördüncü bölümde bu kapalı algoritmaya bir örnek olan Theta metotunun dinamiğini inceleyeceğiz.

1.2 Lineerizasyon

Eğer dönüşüm lineer değilse bu sabit noktaların kararlılık tipi nasıl belirlenir? Bu durumda da lineer olmayan dönüşüm bu sabit nokta civarında lineerize edilmelidir. Yukarıda vermiş olduğumuz teoremler yardımıyla bu lineerize edilmiş sistemin davranışı için bir fikir sahibi olabilir.

Tanım 1.9 $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ olmak üzere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü verilsin ve \bar{x} , f dönüşümünün sabit noktası olsun.

$$D(f(\bar{x})) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & & & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

matrisine f dönüşümünün \bar{x} noktasındaki Jakobiyeni denir. Ve

$$x \rightarrow D(f(\bar{x}))x$$

dönüşümüne f dönüşümünün \bar{x} noktasındaki linerizasyonu denir.

Teorem 1.7 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir C^1 dönüşüm ve \bar{x} f dönüşümünün sabit noktası olsun.

1. Eğer $D(f(\bar{x}))$ matrisinin tüm özdeğerlerinin modülü 1 den küçük ise \bar{x} sabit noktası asimtotik karardır.
2. Eğer $D(f(\bar{x}))$ matrisinin en az bir özdeğerinin modülü 1 den büyük ise \bar{x} sabit noktası kararsızdır ([1]).

2 DİNAMİK SİSTEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde birkaç dinamik sistemin farklı nümerik metodlarla analizine örnekler verilecektir. Bulunan nümerik çözümün ne kadar az hata verdiği değil, denge noktasının karakteristiği, sahte çözümlerin varlığı ve periyodik çözümün korunması gibi kavramlar dikkate alınacaktır.

2.1 Lineer Sıradan Otonom Diferansiyel Denklem

$$\dot{x} = -x \quad (2.1.1)$$

diferansiyel denklemini inceleyelim. Denklemin tek denge noktası 0 dir. 0 denge çözümünün kararlı olduğu Teorem (1.1) den açıktır. Şimdi sistemimizi nümerik olarak inceleyelim.

Önce Euler algoritmasını alalım. Bu algoritma (1.1) sistemini

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n)$$

fark denklemine dönüştürmektedir. Bu durumda fark denkleminiz (2.1.1) için

$$x_{n+1} = (1 - h)x_n \quad (2.1.2)$$

biçiminde olur. 0 tek sabit noktadır.

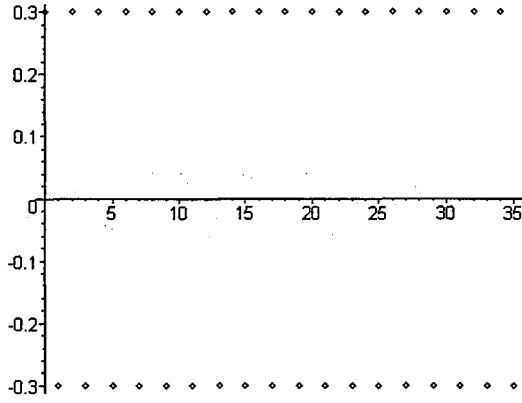
Teorem (1.4) ten $(1 - h) < 1$ olduğunda, yani $0 < h < 2$ olduğunda 0 sabit noktası asimtotik kararlı sabit nokta olacaktır ve bu noktanın civarından başlayan çözümler $n \rightarrow \infty$ için 0 a gidecektir.

Aşağıda h nin farklı değerleri için $x_0 = 0.3$ başlangıç noktasından başlayan yörüngeler verilmektedir. h değeri 1 e yaklaştıkça yapılan hata artmakta ve $h \rightarrow 0$ için hata azalmaktadır. Her durumda da çözümler dengeye ulaşmaktadır. Denge noktasının kararlılığı korunmaktadır. Fakat $h = 1$ alındığında başlangıç noktası ne olursa olsun bir adımda dengeye ulaşılacaktır ve bu yüzden yapılan hata büyük olacaktır.

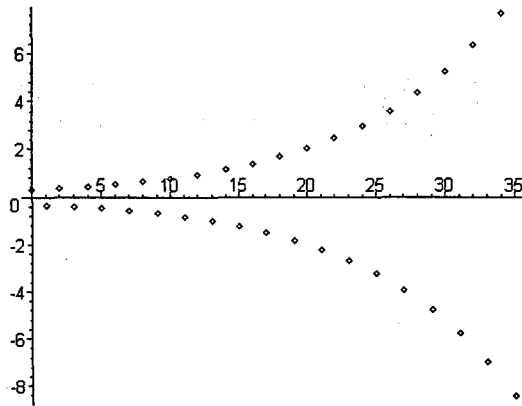
$h = 2$ alındığında ise fark denklemimiz

$$x_{n+1} = -x_n$$

durumuna gelecektir. Bu durumda ise açıktır ki x_0 noktasından başlayan çözümler x_0 ve $-x_0$ noktaları arasında gidip gelecektir. Yani $h = 2$ olması durumunda 0 hariç her nokta 2 periyodlu nokta olacaktır. Ve çözüm asla denge durumuna gelemeyecektir. Yani Euler metodu bu sistem için sahte periyodik noktalar oluşturmaktadır. $h > 2$ durumunda ise fark denklemimizdeki x_n in katsayısı 1 den büyük olacağından bir x_0 noktasından başlayan çözüm uzaklaşacaktır. Sonuç olarak denge noktasının kararlılığını korumak için h değerini 2 den küçük tutmamız gerekmektedir.



Şekil 2.4: (2.1.2) nin $h = 2$ için ilk 35 adımı



Şekil 2.5: (2.1.2) nin $h = 2.1$ için ilk 35 adımı

Şimdi de başka bir algoritma kullanarak denkleminin dinamiğini inceleyelim. Runge Kutta(4) algoritmasını ele alalım. Bu algoritma (1.1) sistemini

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n) \\k_2 &= f\left(x_n + \frac{k_1}{2}\right) \\k_3 &= f\left(x_n + \frac{k_2}{2}\right) \\k_4 &= f(x_n + k_3)\end{aligned}$$

olmak üzere

$$x_{n+1} = x_n + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

fark denkleminin dönüşümüdür. Bu durumda fark denkleminin (2.1.1) için

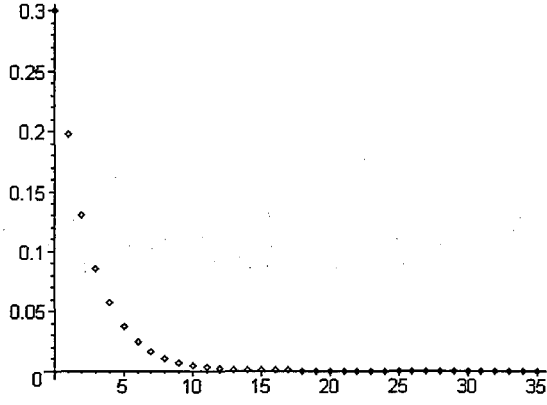
$$x_{n+1} = \left(1 - h + \frac{h^3}{2} - \frac{h^4}{6} + \frac{h^5}{24}\right)x_n \quad (2.1.3)$$

biçiminde olur. 0 sabit noktadır. x_n in katsayısının 1 den küçük olması, Teorem (1.4) ten x_0 noktasından başlayan çözümü dengeye ulaştıracaktır.

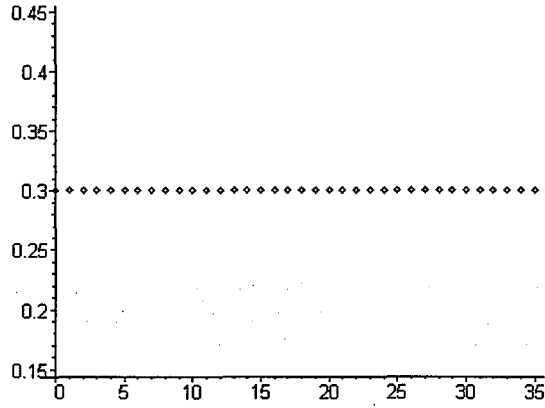
$h \approx 1.723854358889140$ olduğunda

$$1 - h + \frac{h^3}{2} - \frac{h^4}{6} + \frac{h^5}{24} = 1$$

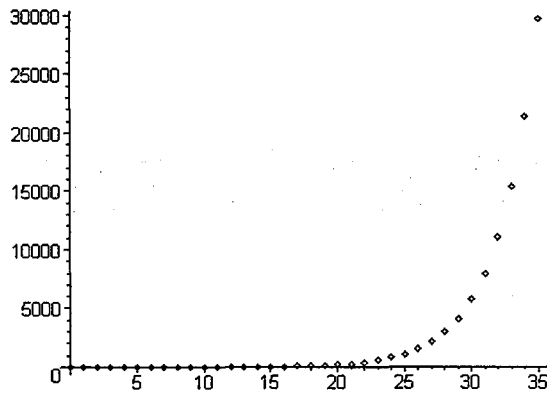
olur. Katsayımızın 1 den küçük olması için h nin 1.723854358889140 ten küçük olması gerekiyor. Yani $h > 1.723854358889140$ olduğunda x_0 dan başlayan çözümler denge durumuna gelemeyecek, dengeden uzaklaşacaktır ve $t \rightarrow \infty$ iken ∞ a veya $-\infty$ a gidecektir. $h = 1.723854358889140$ olduğunda da sistem başlangıç noktasında kalır, yani bu h değeri için her nokta sahte kararlı sabit nokta olmaktadır. $h = 1.5$ ve $h = 1.9$ için yörüngelerin ilk 30 adımını resmeden grafikleri aşağıdaki gibidir. Ayrıca $h = 1.723854358889140$ için de ilk 30 adımı resmeden grafik de aşağıda verilmektedir. Bu h değerini biraz arttırdığımızda yörünge denge durumuna asla gelemeyecektir.



Şekil 2.6: (2.1.3) ün $h = 1.5$ için ilk 35 adımı



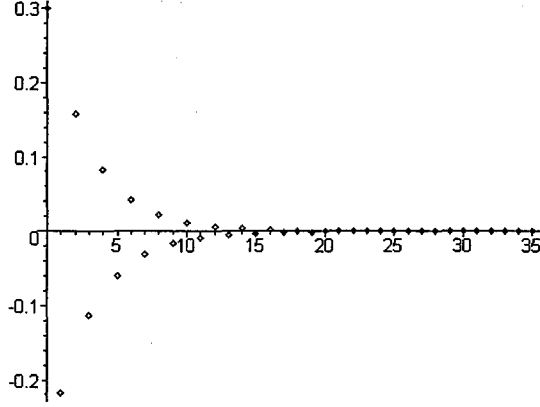
Şekil 2.7: (2.1.3) ün $h = 1.723854358889140$ için ilk 35 adımı



Şekil 2.8: (2.1.3) ün $h = 1.9$ için ilk 35 adımı

Karşılaştırma açısından aşağıdaki grafikte $h = 1.723854358889140$ için

(2.1.2) nin 0.3 ten başlayan yörüngesinin ilk 30 adımı verilmiştir. Algoritmaların ne kadar farklı davrandığı açık. Bu değer Runge Kutta için orijinden farklı bir sabit nokta olurken Euler de ise, aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi yörünge orijin denge noktasına gitmektedir.



Şekil 2.9: (2.1.2) nin $h = 1.723854358889140$ için ilk 35 adımı

Sonuç olarak şunu söyleyebiliriz ki, bu lineer sistem için Euler ve Runge Kutta algoritması yeterince küçük h değerleri için sistemin genel özelliğini korumaktadır. Fakat her ne kadar Euler algoritmasından daha az hata ile dengeye ulaşılsa da, Runge Kutta algoritmasının sahte denge noktaları üretmesi arzu edilir bir durum değildir.

2.2 Harmonik Salınım Hareketi

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (2.2.1)$$

lineer diferansiyel denklemini düşünelim. Sistemimizin tek denge noktası $(0, 0)$ dır ve (2.2.1) in bir x_0 noktasından başlayan çözümleri $\|x_0\|$ yarıçaplı çemberlerdir. Bu yüzden $(0, 0)$ in bu sistemin kararlı ama asimtotik kararlı olmayan bir denge çözümü olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi 3 farklı nümerik yöntem ile sistemin dinamiğini inceleyelim.

Önce Euler algoritmasını düşünelim. Bu algoritma (2.2.1) sistemini

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (2.2.2)$$

fark denklemine dönüştür. $(0, 0)$ noktasının (2.2.2) fark denkleminin tek sabit noktası olduğu görülüyor. Şimdi bu sabit noktanın kararlılık durumunu inceleyelim. Bu durumda önce

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -h & 1 \end{pmatrix}$$

katsayılar matrisinin özdeğerlerine bakalım. Katsayılar matrisinin özdeğerleri $\det(A - \lambda I) = 0$ eşitliğinden

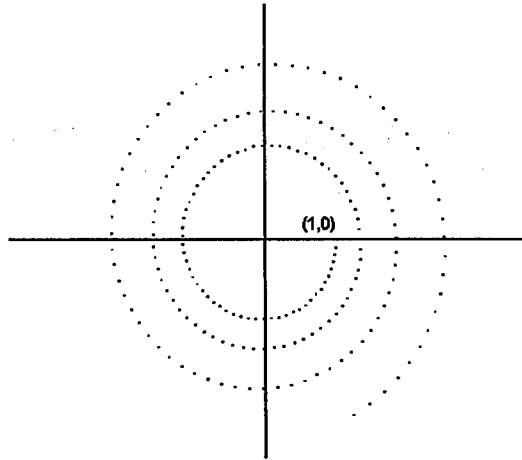
$$\lambda_1 = 1 + ih, \lambda_2 = 1 - ih$$

olarak bulunur.

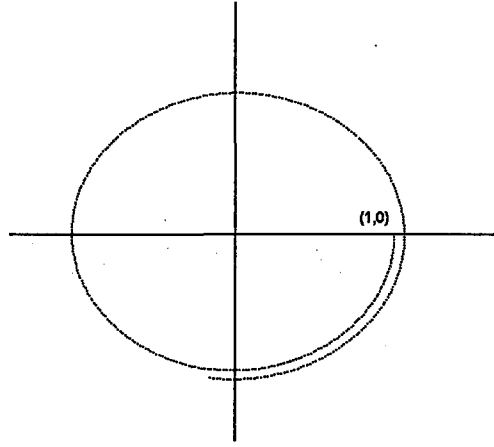
$$\|\lambda_1\| = \|\lambda_2\| = \sqrt{1 + h^2} > 1$$

olduğundan, h ne olursa olsun Teorem (1.5) e göre $(0, 0)$ sabit noktası kararsızdır. h adım aralığımızı küçültünce hatamızda küçülecektir. Ama h yi ne kadar küçültürsek küçültelim asla 0 olamayacağından çözümlerimiz bir çember üzerinde yatamayacak, ancak çembere yaklaşacaklardır.

Şimdi $(0, 0)$ a yakın bir noktadan başlayan bir çözümün nasıl hareket ettiğini bir örnekle görelim. $(1, 0)$ noktasını ele alalım. Bu noktadan başlayan çözümün 1 yarıçaplı orijin merkezli çember üzerinde gezmesi beklenir. Aşağıdaki şekillerde $(1, 0)$ dan başlayan çözümün 0.1 ve 0.02 adım aralığı için sırasıyla 200 ve 400 ilk adımı resmedilmiştir.



Şekil 2.10: (2.2.2) nin $h = 0.1$ için 200 adımı



Şekil 2.11: (2.2.2) nin $h = 0.02$ için 400 adımı

Şimdi Implicit Euler algoritmasını ele alalım. Bu algoritma (1.1) sistemini.

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + hf(\mathbf{x}_{n+1})$$

fark denkleminde dönüştürmektedir. Şu halde (2.2.1) sistemi

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+h^2)} & \frac{h}{(1+h^2)} \\ \frac{-h}{(1+h^2)} & \frac{1}{(1+h^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

fark denkleminde dönüşür. $(0, 0)$ noktasının (2.2.3) fark denkleminin tek sabit noktası olduğu açıktır.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+h^2)} & \frac{h}{(1+h^2)} \\ \frac{-h}{(1+h^2)} & \frac{1}{(1+h^2)} \end{pmatrix}$$

katsayılar matrisinin özdeğerlerine bakmalıyız. Katsayılar matrisinin özdeğerleri $\det(A - \lambda I) = 0$ eşitliğinden

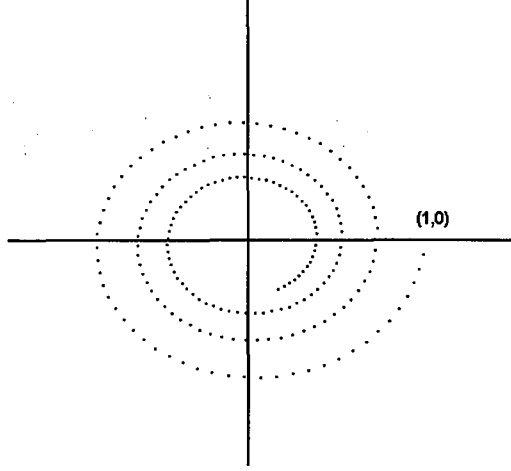
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{(1+h^2)} + i \frac{h}{(1+h^2)} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{(1+h^2)} - i \frac{h}{(1+h^2)} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

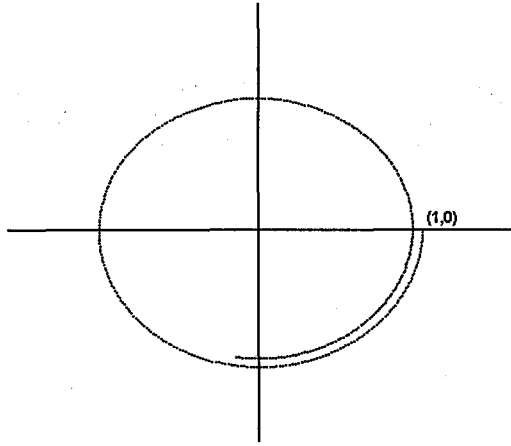
$$\|\lambda_1\| = \|\lambda_2\| = \sqrt{\frac{1}{(1+h^2)}} < 1$$

olduğundan, h ne olursa olsun Teorem (1.4) den $(0, 0)$ sabit noktası asimtotik kararlı sabit nokta olur. Tabi h değeri küçüldükçe hatamız orantılı olarak küçülecek ve çözümler biraz daha çembere yaklaşacaktır.

Aşağıdaki şekillerde $(1, 0)$ dan başlayan çözümün 0.1 ve 0.02 adım aralığı için sırasıyla 200 ve 400 ilk adımı resmedilmiştir.



Şekil 2.12: (2.2.3) ün $h = 0.1$ için 200 adımı



Şekil 2.13: (2.2.3) ün $h = 0.02$ için 400 adımı

Son olarak Implicit Midpoint algoritmasını düşünelim. Bu algoritma (1.1) sistemini

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf(g) \\ g &= x_n + \frac{h}{2}f(g) \end{aligned}$$

fark denkleminde dönüştürmektedir. Buradan (2.2.1) sistemi

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4-h^2}{(4+h^2)} & \frac{4h}{(4+h^2)} \\ \frac{-4h}{(4+h^2)} & \frac{4-h^2}{(4+h^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

fark denklemine dönuşür. $(0, 0)$ noktası (2.2.4) fark denkleminin tek sabit noktasıdır.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4-h^2}{(4+h^2)} & \frac{4h}{(4+h^2)} \\ \frac{-4h}{(4+h^2)} & \frac{4-h^2}{(4+h^2)} \end{pmatrix}$$

katsayılar matrisinin özdeğerleri $\det(A - \lambda I) = 0$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{4-h^2}{(4+h^2)} + i \frac{4h}{(4+h^2)} \\ \lambda_2 &= \frac{4-h^2}{(4+h^2)} - i \frac{4h}{(4+h^2)} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\|\lambda_1\| = \|\lambda_2\| = 1$$

olduğundan şu ana kadar verdiğimiz teoremler yardımıyla orijinin kararlılığı için birşey söyleyemeyiz.

Herhangi bir

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \beta \neq 0 \quad (2.2.5)$$

katsayılar matrisi için özdeğerler $\alpha \pm i\beta$ biçimindedir. Eğer bu sayıları $-\pi < \omega < \pi$ olmak üzere

$$\alpha = \lambda \cos \omega$$

$$\beta = \lambda \sin \omega$$

biçiminde yazarsak $\lambda = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ olmak üzere

$$A_1 = \lambda \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$$

olur. Açıktır ki

$$A_1^n = \lambda^n \begin{pmatrix} \cos n\omega & \sin n\omega \\ -\sin n\omega & \cos n\omega \end{pmatrix}$$

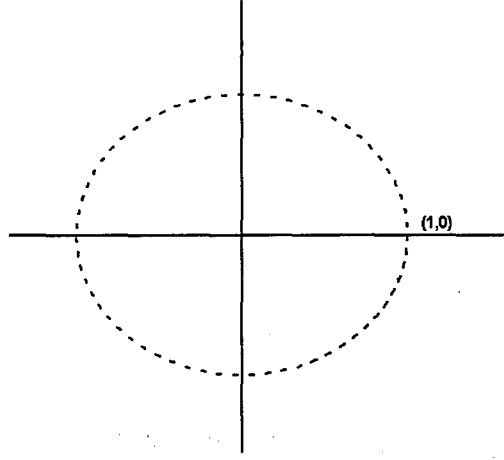
şeklindedir. Buradan açıktır ki $\lambda = 1$ olması durumunda (2.2.5) katsayılar matrisinin belirttiği fark denkleminin yörüngeleri bir (x_1, y_1) başlangıç noktası için $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ yarıçaplı orijin merkezli çemberlerdir.

Şu halde (2.2.4) fark denkleminiz için de

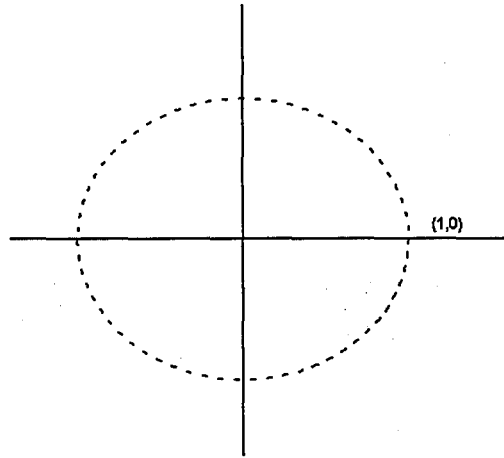
$$\sqrt{\left(\frac{4-h^2}{4+h^2}\right)^2 + \left(\frac{4h}{4+h^2}\right)^2} = 1$$

olduğundan bir (x_0, y_0) noktasından başlayan çözüm $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ yarıçaplı orijin merkezli çemberdir.

Aşağıdaki şekillerde $(1, 0)$ dan başlayan yörüngenin 0.1 ve 0.02 adım aralığı için sırasıyla 200 ve 400 ilk adımı resmedilmiştir.



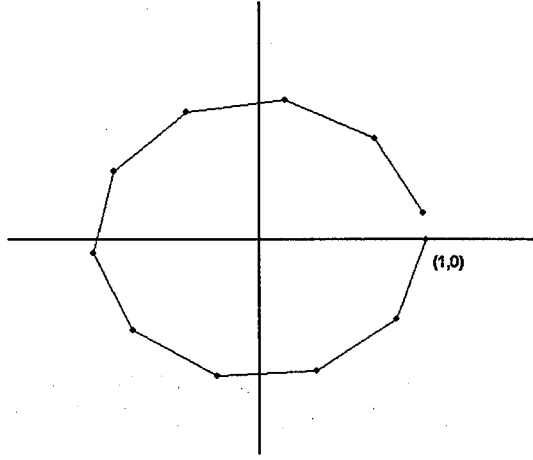
Şekil 2.14: (2.2.4) ün $h = 0.1$ için 200 adımı



Şekil 2.15: (2.2.4) ün $h = 0.02$ için 400 adımı

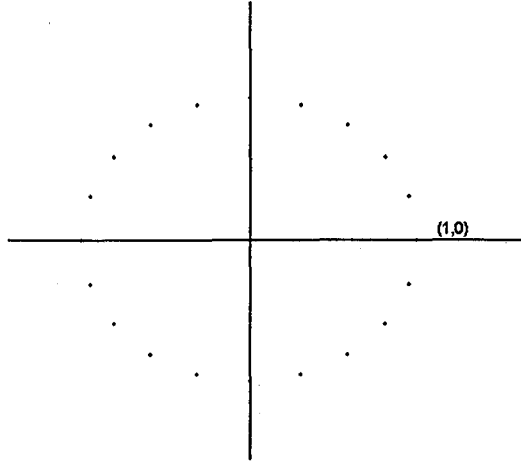
Bu algoritma ile çözümlerin bir çember üzerinde gezdiği görülmektedir. Şu halde akla şu sorular geliyor. Acaba çözümler periyodik mi? Periyodik ise bu periyod nedir?

Bir nokta alalım bunu araştırmak için. Mesela yine $(1, 0)$ noktasını ele alalım. Bu noktadan geçen gerçek çözüm 1 yarıçaplı ve orijin merkezli çemberdir ve periyodu da 2π dir. Algoritmamızla bu noktadan başladığımızda, mesela $h = 2\pi/10 \cong 0.62831853071$ için 10 adım attığımızda gözardı edilebilecek bir hata ile aynı noktada olmamız gerekir. Ama aşağıdaki Şekilde de görüldüğü gibi $(1, 0)$ dan başlayan çözüm yukarıdaki değerler için yaklaşık 2π zaman sonra çemberi tamamlayamamaktadır, aynı noktaya gelememektedir. Yani bu kesikli sistemin periyodu 2π dir diyemeyiz.



Şekil 2.16: (2.2.4) ün $h = 2\pi/10$ için 10 adımı

O halde periyodik ise bile periyodunda bir kayma olduğunu söyleyebiliriz. Ufak bir analizle $h = 0.649839392$ alındığında 10 adım sonra tekrar aynı noktaya geldiğimiz görülmüyor. Tabii çok ufak bir hata ile, ki bu hata 10^{-9} dan küçük bir hata. h yi küçültüp aynı oranda adım sayısını arttırdığımızda da bu hata daha da azalmaktadır. Başka bir h değeri verelim. Mesela $h = 0.3167688806$ için, bu sefer $(1, 0)$ dan başlayan yörünge 20. adımda aynı noktaya gelmektedir. Sonuç olarak $h \rightarrow 0$ iken bu hata minimuma inecektir ve h değerine göre hareketin periyodu değişecektir. Hatta $h \rightarrow 0$ için kesikli sistemin periyodu 2π ye gidecektir.



Şekil 2.17: (2.2.4) ün $h = 0.3167688806$ için 20 adımı

Sonuç olarak $(0, 0)$ in civarında başlayan çözümlerin, Euler metodu ile bir spiral çizerek uzaklaştığını, Implicit Euler metodu ile yine bir spiral çizerek $(0, 0)$ denge durumuna gittiğini, Implicit Midpoint metodu ile ise o noktadan geçen ve orijin merkezli bir çember üzerinde olduğunu söyleyebiliriz. Şu halde bu algoritmalar içinde (2.2.1) sisteminin temel yapısını en iyi koruyan algoritma Implicit Midpoint algoritmasıdır.

2.3 Harmonik Salınım Hareketinin Center Preserving Algoritması İle İncelenmesi

$$\ddot{y} + y = 0 \quad (2.3.1)$$

2.mertebeden diferansiyel denklemini düşünelim. Center-Preserving Algoritması $h > 0$ adım aralığı olmak üzere

$$\ddot{y} = \frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2}$$

biçiminde verilir. Bu durumda (2.3.1) sistemimiz

$$y_{n+1} + (h^2 - 2)y_n + y_{n-1} = 0$$

fark denklemine dönüşür. $x_1^n = y_n$ ve $x_2^n = y_{n-1}$ alırsak sistemimiz

$$x_1^{n+1} = (2 - h^2)x_1^n - x_2^n$$

$$x_2^{n+1} = x_1^n$$

fark denklemine dönuşür. Bu fark denklemini de

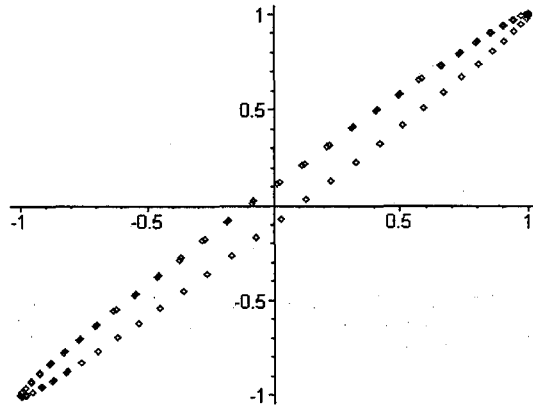
$$\begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - h^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \end{pmatrix} \quad (2.3.2)$$

biçiminde yazılabilir. Elde ettiğimiz fark denklemini bir dönüştürme gibi düşünürsek ve katsayılar matrisinin özdeğerlerini hesaplırsak bu özdeğerler

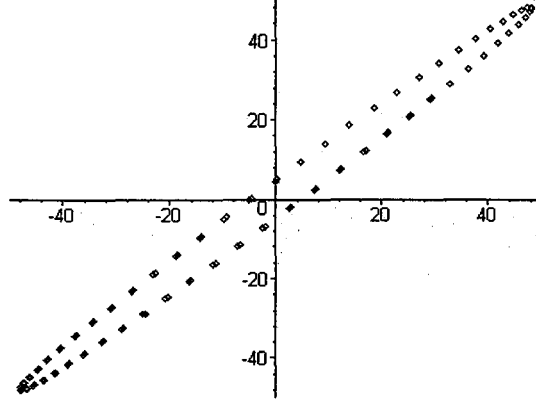
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}(2 - h^2 + ih\sqrt{4 - h^2}) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(2 - h^2 - ih\sqrt{4 - h^2}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bulduğumuz özdeğerlerin modüllerinin 1 olduğu kolayca görülebilir. Özdeğerlerin modülleri 1 olduğundan orijinin kararlılığı hakkında verdiğimiz teoremler yardımıyla bir yorum yapamayız. Eğer katsayılar matrisimiz (2.2.5) formunda olsaydı yörüngelerin bir çember üzerinde gezdiğini söyleyebilecektik.

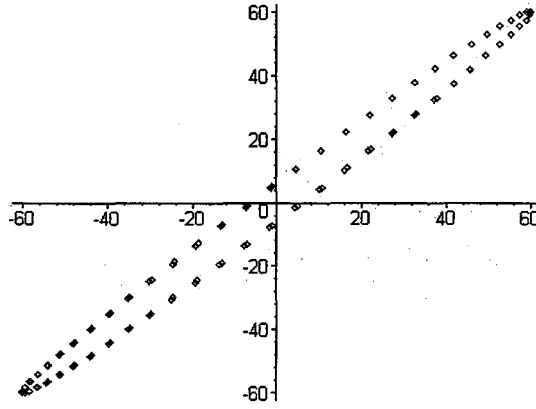
Fark denkleminin yörüngelerinin nasıl davrandığını parametrelerin bazı değerleri için görmeye çalışalım. (2.3.2) fark denkleminin $h = 0.1$ ve 4 farklı başlangıç noktası için ilk 100 adımı aşağıda verilmiştir.



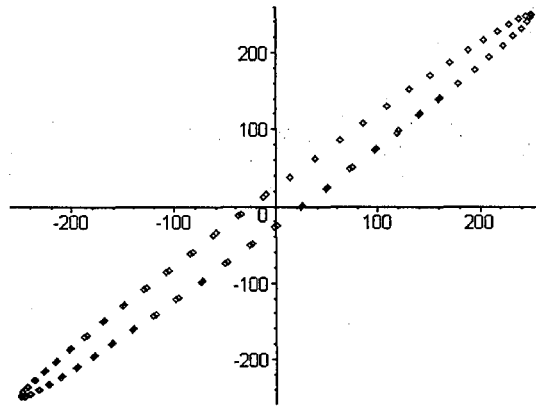
Şekil 2.18: (2.3.2) nin (1, 1) başlangıç noktası için ilk 100 adımı



Şekil 2.19: (2.3.2) nin $(0.2, 5)$ başlangıç noktası için ilk 100 adımı



Şekil 2.20: (2.3.2) nin $(-2, 5)$ başlangıç noktası için ilk 100 adımı



Şekil 2.21: (2.3.2) nin $(-10, 15)$ başlangıç noktası için ilk 100 adımı

Şimdi yörüngelerimizin hangi başlangıç noktasından başlarsa başlasın grafiklerden de tahmin edilebileceği gibi elips olduğunu gösterelim. Yukarıdaki grafiklerden sistemin bir $x^0 = (x_0, y_0)^T$ başlangıç noktasından başlayan çözümlerinin 45° döndürülmüş orijin merkezli elips olduğunu düşünelim. Şimdi bunu görmeye çalışalım. Orijin merkezli bir elipsin denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

biçimindedir. Bu elipsi 45° saat yönünde döndürürsek (ki bu koordinat sistemini 45° saatin tersi yönde döndürmek demektir)

$$\begin{aligned} x' &= \cos 45^\circ x + \sin 45^\circ y \\ y' &= \sin 45^\circ y - \sin 45^\circ x \end{aligned}$$

yeni koordinat sistemimiz olur ve bu nedenle denklemde yerine yazarsak 45° döndürülmüş elipsimiz

$$\frac{1}{2a}(x+y)^2 + \frac{1}{2b}(y-x)^2 = 1$$

biçiminde olur. Önce a ve b sabitlerini tahmin etmemiz ya da bulmamız gerekiyor. Yukarıda denklem bizim yörüngelerimiz olduğundan bir $x^0 = (x_0, y_0)^T$ başlangıç noktası olmak üzere

$$\begin{aligned} Ax^0 &= \begin{pmatrix} (2-h^2)x_0 - y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \\ A^2x^0 &= \begin{pmatrix} (2-h^2)(x_0(2-h^2) - y_0) - x_0 \\ (2-h^2)x_0 - y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

noktalarının 45° döndürerek elde ettiğimiz elipsin üzerinde olması gerekir. Bu ifadeleri denklemde yerine yazarsak b ve a ya göre 2 bilinmeyenli 2 denklem elde ederiz ve bu denklemi çözersek

$$\begin{aligned} a &= \frac{2(x_0y_0h^2 + (x_0 - y_0)^2)}{h^2} \\ b &= -\frac{2(x_0y_0h^2 + (x_0 - y_0)^2)}{h^2 - 4} \end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. Şu halde aradığımız elips denklemi

$$\frac{1}{2\left(\frac{2(x_0y_0h^2 + (x_0 - y_0)^2)}{h^2}\right)}(x+y)^2 + \frac{1}{2\left(\frac{-2(x_0y_0h^2 + (x_0 - y_0)^2)}{h^2 - 4}\right)}(y-x)^2 = 1$$

ya da

$$\frac{1}{x_0 y_0 h^2 + (x_0 - y_0)^2} (x^2 + y^2 - (2 - h^2)xy) = 1 \quad (2.3.3)$$

biçiminde bulunur. Şimdi bu denklemin aradığımız elipsin denklemi olduğunu, yani

$$\begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - h^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \end{pmatrix}$$

dönüşümünün yörüngelerini temsil ettiğini ispatlamalıyız. Göstermemiz gereken şey $A^m x^0$ in da bu elips üzerinde olduğudur. Bunu göstermek için tümevarım yöntemini kullanalım.

$m = 1$ için doğruluğu açık.

$m = n$ için doğruluğunu kabul edelim. Yani

$$\begin{pmatrix} 2 - h^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

değerinin elip üzerinde olduğunu kabul edelim. İşlem kalabalığından kurtulmak için

$$\begin{pmatrix} 2 - h^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1(x_0, y_0, h) \\ \Psi_2(x_0, y_0, h) \end{pmatrix}$$

diyelim. O halde (2.3.3) de yerine yazarsak

$$\frac{((\Psi_1(x_0, y_0, h))^2 + (\Psi_2(x_0, y_0, h))^2 - (2 - h^2)\Psi_1(x_0, y_0, h)\Psi_2(x_0, y_0, h))}{x_0 y_0 h^2 + (x_0 - y_0)^2} = 1$$

olduğunu kabul etmiş olalım. Şimdi de $m = n + 1$ için doğru olduğunu görelim.

Göstermemiz gereken

$$\begin{pmatrix} 2 - h^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

değerinin elips üzerinde olduğudur.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 - h^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 - h^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(x_0, y_0, h) \\ \Psi_2(x_0, y_0, h) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2 - h^2)\Psi_1(x_0, y_0, h) - \Psi_2(x_0, y_0, h) \\ \Psi_1(x_0, y_0, h) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

biçiminde yazalım. Şimdi bu değeri (2.3.3) denkleminde yerine yazalım.

$$\frac{1}{x_0 y_0 h^2 + (x_0 - y_0)^2} \left((2 - h^2) \Psi_1(x_0, y_0, h) - \Psi_2(x_0, y_0, h) \right)^2 + (\Psi_1(x_0, y_0, h))^2 - (2 - h^2) \left((2 - h^2) \Psi_1(x_0, y_0, h) - \Psi_2(x_0, y_0, h) \right) \Psi_1(x_0, y_0, h) = 1$$

eşitliğinin sağlandığını görmeliyiz. İfademizi sadeleştirirsek

$$\frac{1}{x_0 y_0 h^2 + (x_0 - y_0)^2} \left[(2 - h^2)^2 (\Psi_1(x_0, y_0, h))^2 + (\Psi_2(x_0, y_0, h))^2 - 2(2 - h^2) \Psi_1(x_0, y_0, h) \Psi_2(x_0, y_0, h) + (\Psi_1(x_0, y_0, h))^2 - (2 - h^2)^2 (\Psi_1(x_0, y_0, h))^2 + (2 - h^2) \Psi_1(x_0, y_0, h) \Psi_2(x_0, y_0, h) \right] = 1$$

Basit sadeleştirmeler ile

$$\frac{(\Psi_1(x_0, y_0, h))^2 + (\Psi_2(x_0, y_0, h))^2 - (2 - h^2) \Psi_1(x_0, y_0, h) \Psi_2(x_0, y_0, h)}{x_0 y_0 h^2 + (x_0 - y_0)^2} = 1$$

haline gelir. Bu zaten $m = n$ için var olduğunu kabul ettiğimiz eşitlik idi. Şu durumda tümevarım ispatımız sona erer. Yani bir $x^0 = (x_0, y_0)^T$ başlangıç noktası ve h adım aralığı olmak üzere (2.3.1) sisteminin "Center-Preserving Algoritması" kullanılarak elde edilen yörüngeleri

$$\frac{1}{x_0 y_0 h^2 + (x_0 - y_0)^2} [x^2 + y^2 - (2 - h^2)xy] = 1$$

elipsi üzerinde gezer.

2.4 Lojistik Fark Denklemi

r büyüme hızı, a sabit ve $K = \frac{r}{a}$ olmak üzere

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K} \right) \quad (2.4.1)$$

diferansiyel denklemini düşünelim. (2.4.1) sisteminin dinamiğini incelemek için Euler metodunu kullanırsak ve $k = \frac{(1+hr)K}{hr}$, $\lambda = 1 + hr$ ve $u_n = \frac{y_n}{k}$ değişken değiştirmesini uygularsak $\lambda > 0$ olmak üzere

$$u_{n+1} = \lambda u_n (1 - u_n) \quad (2.4.2)$$

fark denklemini (Lojistik Fark Denklemi) elde ederiz.

Şimdi bu fark denkleminin yapısını inceleyelim.

$$u_{n+1} = u_n = \lambda u_n(1 - u_n)$$

eşitliğinden $\alpha_1 = 0$ ve $\alpha_2 = 1 - \frac{1}{\lambda}$ fark denkleminin sabit noktaları yani denkleminin denge çözümleridir. Sistemimizi

$$f(u) = \lambda u(1 - u)$$

şeklinde bir dönüşüm gibi düşünebiliriz. $f'(u) = \lambda(1 - 2u)$ dur.

Önce $\alpha_1 = 0$ denge çözümünün kararlılık durumunu inceleyelim. Teorem (1.4) $\alpha_1 = 0$ denge çözümünün $\lambda < 1$ için asimtotik kararlı olduğunu söylemektedir. Çünkü

$$\left| f'(0) \right| = |\lambda(1 - 2 \cdot 0)| = |\lambda| = \lambda < 1$$

olmalıdır.

$\alpha_2 = 1 - \frac{1}{\lambda}$ yı düşünelim. $\alpha_2 = 1 - \frac{1}{\lambda}$ denge çözümünün $3 > \lambda > 1$ için asimtotik kararlı olduğunu söylemektedir. Çünkü yine Teorem (1.4) ten

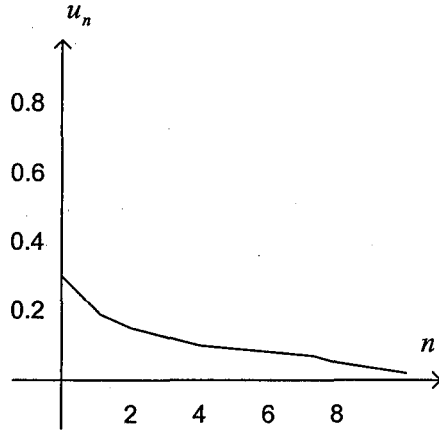
$$\left| f'\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \right| = \left| \lambda\left(1 - 2\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\right) \right| = |2 - \lambda| < 1$$

olmalıdır.

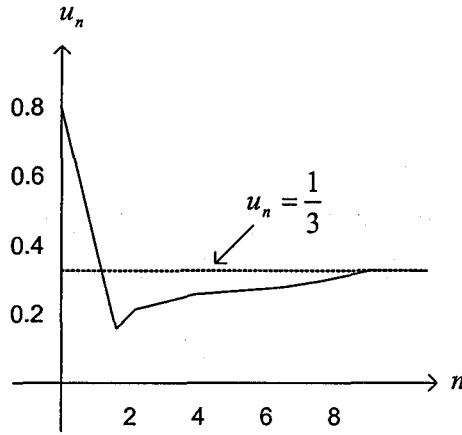
Sonuç olarak $\lambda < 1$ için 0 sabit noktası asimtotik kararlı, diğer sabit nokta $1 - \frac{1}{\lambda}$ kararsız ve $1 < \lambda < 3$ için 0 sabit noktası kararsız, diğer sabit nokta $1 - \frac{1}{\lambda}$ asimtotik kararlıdır.

$r = 1$ özel durumu için $\lambda = 1 + h$ ve $h > 0$ olduğundan $\lambda > 1$ olur. Yani $r = 1$ olduğunda h ne olursa olsun 0 denge noktası kararsız $1 - \frac{1}{\lambda}$ denge noktası kararlıdır. $r = 2$ olduğunda ise $h > \frac{1}{2}$ için $1 - \frac{1}{\lambda}$ denge noktası kararlıdır, diğer denge noktası kararsızdır. 0 denge noktasının kararlı olması için $\lambda < 1$ olmalıdır ki bunun için de $rh < -1$ yani $r < -\frac{1}{h}$ olmalıdır.

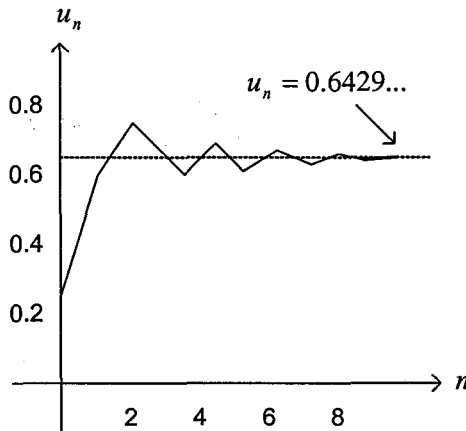
Aşağıdaki şekillerde verilen bir u_0 başlangıç noktasından başlayan çözümlerin λ nın farklı değerlerine göre nasıl hareket ettiğini görmekteyiz. Ayrıca yine aşağıdaki tablolarda belli bir λ ve 0.3 başlangıç değerleri için (2.4.2) nin yörüngeleri verilmiştir, $(1 - 1/(2.8)) = 0.6428571429$ ve $(1 - 1/(1.5)) = 0.333333... olduğuna dikkat edelim.$



Şekil 2.22: (2.4.2) nin $\lambda = 0.8$ ve $u_0 = 0.3$ için yörüngesi

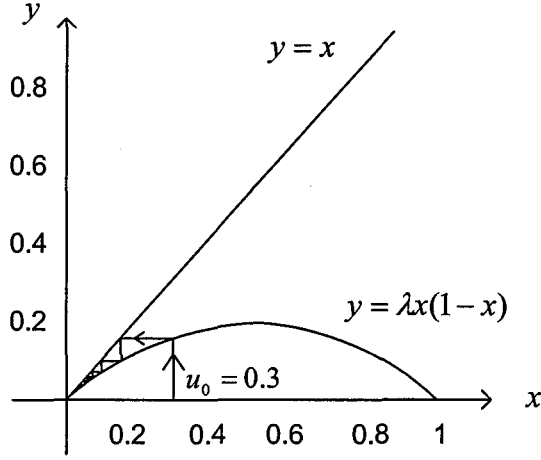


Şekil 2.23: (2.4.2) nin $\lambda = 1.5$ ve $u_0 = 0.8$ için yörüngesi

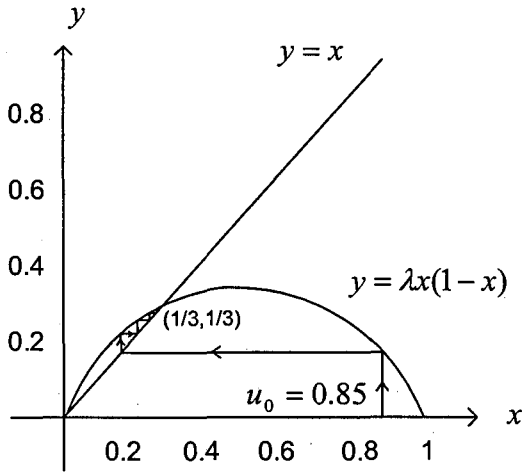


Şekil 2.24: (2.4.2) nin $\lambda = 2.8$ ve $u_0 = 0.3$ için yörüngesi

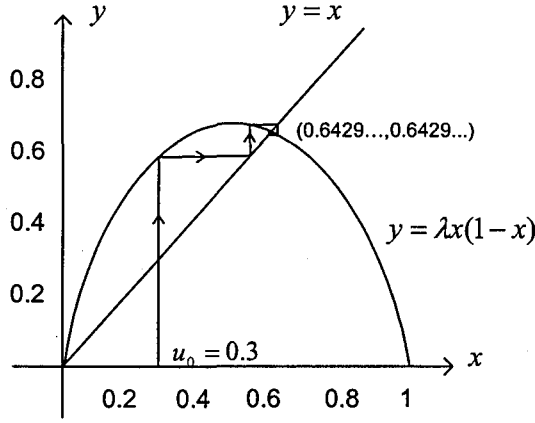
Ayrıca basamak - adım diyagramı ile de bir u_0 noktasından başlayan çözümlerin zamandan bağımsız olarak nasıl hareket ettiğini de görebiliriz. Aşağıdaki grafiklerde de yukarıda verilen u_0 ve λ değerleri için basamak - adım diyagramları verilmiştir.



Şekil 2.25: (2.4.2) nin $\lambda = 0.8$ ve $u_0 = 0.3$ için basamak-adım diyagramı

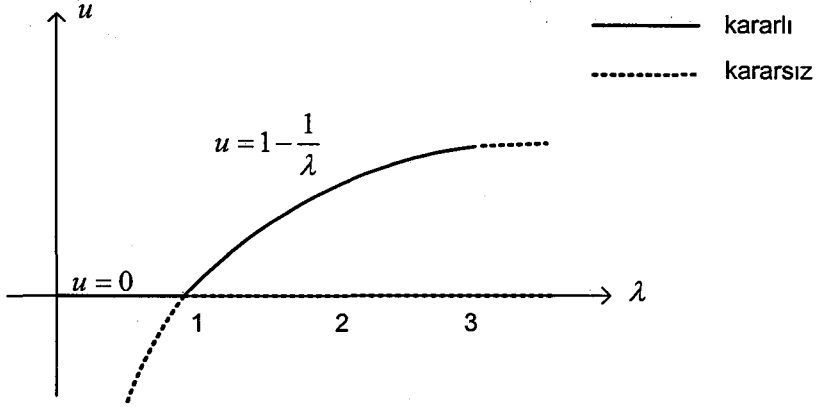


Şekil 2.26: (2.4.2) nin $\lambda = 1.5$ ve $u_0 = 0.85$ için basamak-adım diyagramı



Şekil 2.27: (2.4.2) nin $\lambda = 2.8$ ve $u_0 = 0.3$ için basamak-adım diyagramı

$\lambda = 1$ durumu kararlılığın bir denge çözümünden diğer denge çözümüne geçtiği durumdur. Bu durumda 0 denge çözümü kararlılığını $1 - \frac{1}{\lambda}$ denge çözümüne verir. Aşağıdaki şekilde λ parametresine bağlı olarak sabit noktaların kararlılıklarının nasıl değiştiğini görebilirsiniz.



Şekil 2.28: (2.4.2) nin $0 < \lambda < 3$ için çatallanma diyagramı

$\lambda > 3$ olduğunda $1 - \frac{1}{\lambda}$ denge çözümü kararlılığını yitirir. Ve bu değer için u_n dizisi oldukça hızlı bir şekilde 2 periyodlu iki nokta arasında gidip gelir. Bunu görmek için (2.4.2) fark denklemini

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lambda x(1 - x)$$

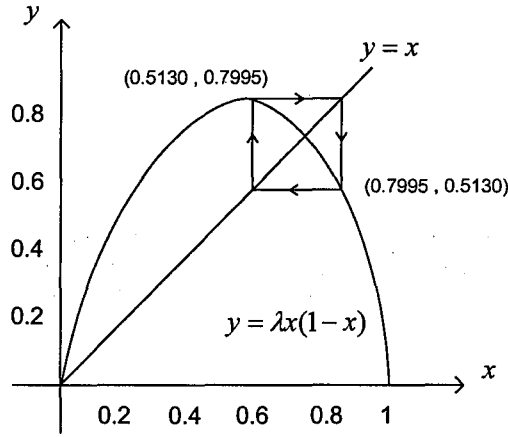
şeklinde bir dönüşüm gibi düşünüp $f^2(x) - x = 0$ denkleminin çözümünün

varlığını araştırmalıyız. Denklem çözüldüğünde $\lambda > 3$ için

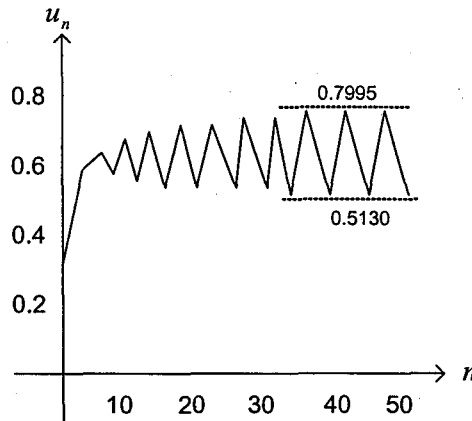
$$x_1 = \frac{\lambda + 1 + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2\lambda}$$

$$x_2 = \frac{\lambda + 1 - \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2\lambda}$$

biçimine bulunan x_1 ve x_2 nin (2.4.2) fark denkleminin 2 periyodu periyodik noktaları olduğu belirlenir. Yani denge çözümlerimizin yerini yeni bir 2 periyodlu çözüm alır. Mesela $\lambda = 3.2$ için herhangi bir u_0 noktasından başlayan çözümler belli bir adım sonra (20 adım yeterlidir) 0.5130... ve 0.7995... noktaları arasında gidip gelirler. Aşağıdaki grafikte (0, 1) aralığında başlayan yörüngeler için 2 periyodlu yörünge verilmiştir.



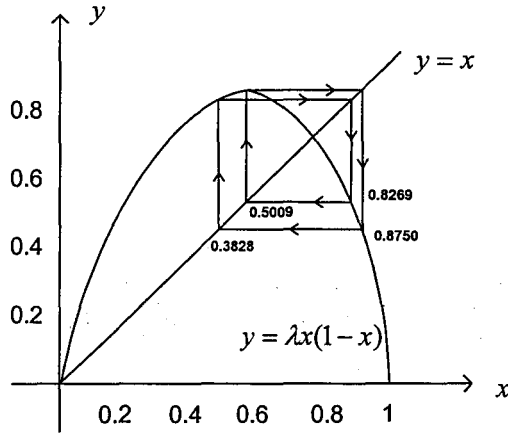
şekil 2.29: (2.4.2) nin $\lambda = 3.2$ ve $u_0 = 0.3$ için basamak-adım diyagramı



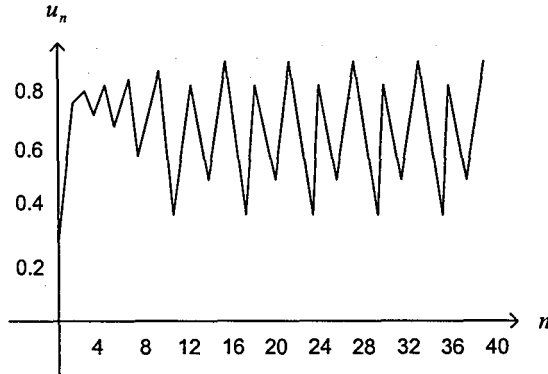
şekil 2.30: (2.4.2) nin $\lambda = 3.2$ ve $u_0 = 0.3$ için yörüngesi

λ biraz daha arttırıldığında, yaklaşık $\lambda = 1 + \sqrt{6}$ için bu 2 periyodlu salınımdaki herbir nokta kararlılıklarını kaybederek benzer biçimde 4 periyodlu ikişer noktaya ayrılır. Yani u_n dizimiz, yörüngemiz, 4 periyodlu bir salınım girer, periyodik çözümümüz 4 periyodludur. Mesela $\lambda = 3.5$ için periyodik çözümümüz belli bir adım sonra 0.3828, 0.5009, 0.8269 ve 0.8750 noktaları arasında gidip gelir, aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi.

Bu düzen böylece devam eder ve 8, 16, 32 periyodlu çözümler görülür λ artarken. Bu yeni çözümlerin oluştuğu parametre değerlerine "çatallanma değeri" denir.



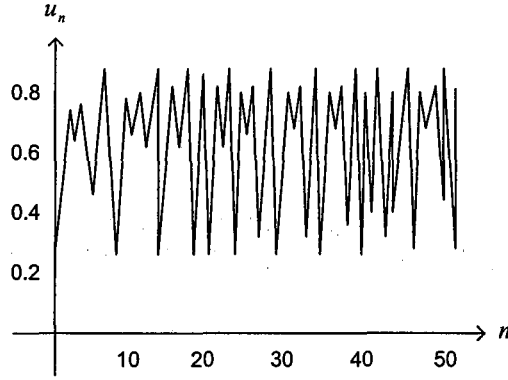
Şekil 2.31: (2.4.2) nin $\lambda = 3.5$ ve $u_0 = 0.3$ için basamak-adım diyagramı



Şekil 2.32: (2.4.2) nin $\lambda = 3.5$ ve $u_0 = 0.3$ için yörüngesi

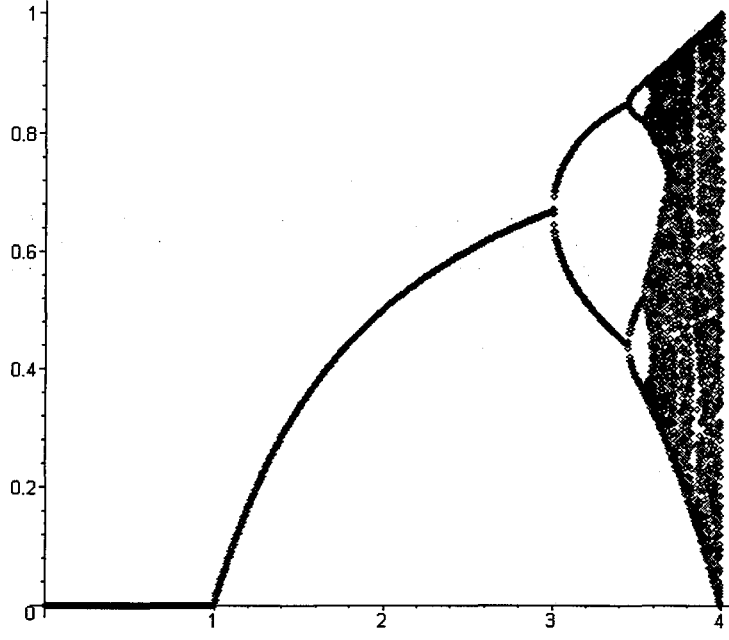
λ nın yaklaşık olarak 3.544 değerinde bahsetmiş olduğumuz periyodik noktalar kararlılıklarını kaybederek ikişer ikişer 8 periyodlu periyodik noktalar ayrılır. Bu şekilde devam edildiğinde kararlı periyodik noktalar belli bir değerden sonra kararlılıklarını periyodu kendisinin iki katı olan periyodik noktalara vererek kararsız hale gelirler.

$\lambda > 3.57$ değerinden sonra bu düzen bozulur ve yörüngeler λ nın değerine göre düzgün bir şekilde ifade belirlenemez. Mesela $\lambda = 3.65$ için yörünge aşağıdaki gibidir. Yaklaşık olarak 0.3 ile 0.95 değerleri arasında sallanmaktadır fakat salınım biçimi düzgün ve periyodik değildir. Bu durum için "kaotik" terimi kullanılmaktadır.



Şekil 2.33: (2.4.2) nin $\lambda = 3.65$ ve $u_0 = 0.3$ için yörüngesi

λ parametresine bağlı olarak kararlı denge noktalarının grafiği, yani çatalanma diyagramı aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.34: (2.4.2) nin λ ya bağlı olarak çatallanma diyagramı

3 PERİYODİK ÇÖZÜME SAHİP SİSTEMLERİN NÜMERİK ANALİZİNE İLİŞKİN BİR TEOREM

Teorem (3.1) periyodik çözüme sahip ve belirtilen özellikleri taşıyan sistemlerin nümerik metodlar kullanılarak incelendiğinde bu periyodik çözüm civarında bir kapalı invaryant eğri elde edildiğini söylemektedir. Dikkat edilmesi gereken bir nokta teoremin "en az Euler algoritması" kadar doğru olan algoritmalar için geçerli olduğudur.

Tanım 3.1 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunu düşünelim. Eğer her $x \in M$ için $f(x) \in M$ oluyorsa M ye invaryant küme ya da f altında invaryanttır denir.

Teorem 3.1 $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.1)$$

diferansiyel denklemini ve onun $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n = 1$ karakteristik çarpanları ile verilen $x = \phi(t)$ periyodik çözümünü düşünelim.

$$x_{k+1} = F(x_k, h)$$

denklemi de (3.1) in en az Euler kadar doğru olan bir sonlu fark yaklaşımının denklemi olsun. Eğer ya $|\mu_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n - 1$ ya da $|\mu_i| > 1, i = 1, 2, \dots, n - 1$ ise fark denklemi uygun küçüklükteki h değerleri için $x = \phi(t)$ periyodik çözümü yakınında bir Γ kapalı invaryant eğrisine sahiptir. Ayrıca Γ ye yeterince yakın bir x_0 için $k \rightarrow \infty$ ($-\infty$) iken x_0 in x_k iterasyonları Γ içine spiral çizer ([4]).

Örnek 3.1

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

sistemini düşünelim. Sistemi

$$\dot{x} = y \quad (3.2)$$

$$\dot{y} = -x - \varepsilon(x^2 - 1)y$$

formunda yazabiliriz.

Uygun küçüklükteki pozitif ε değerleri için sistemimizin $x = \phi(t)$ periyodik çözümü vardır ([6]). Teorem (3.1) i uygulayabilmemiz için μ_1 karakteristik çarpanının 1 den farklı olması gerekir. $x = \phi(t)$ periyodik çözüm olduğundan diğer karakteristik çarpan μ_2 nin 1 olduğunu biliyoruz ([6]). (3.2) nin bir periyodik çözümü olan

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ -2 \sin t \end{pmatrix} + O(\varepsilon)$$

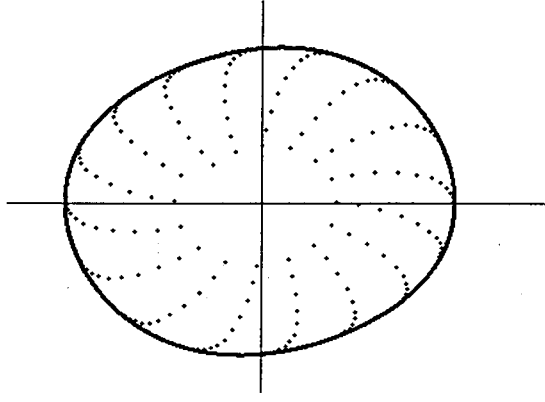
civarında (3.2) yi lineerize edersek

$$\dot{\zeta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 8\varepsilon \cos t \sin t & -\varepsilon(2 \cos t)^2 - 1 \end{pmatrix} \zeta$$

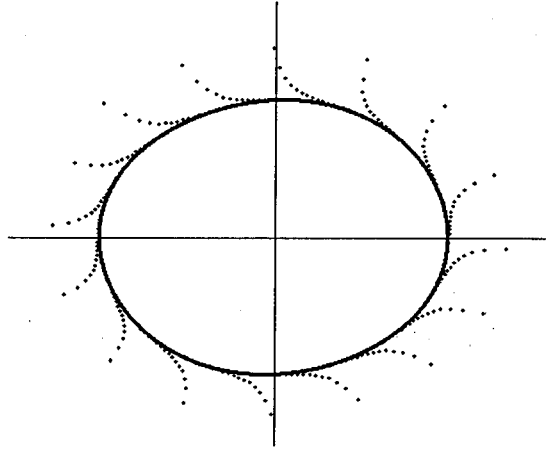
sistemi elde edilir. Buradan sistemin iki karakteristik çarpanının çarpımı (1.5) den

$$\begin{aligned} \mu_1 \mu_2 &= \mu_1 \\ &= \exp \left(-\varepsilon \int_0^{2\pi} \left[4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \right) - 1 \right] dt + O(\varepsilon^2) \right) \\ &= \exp(-2\pi\varepsilon + O(\varepsilon^2)) \end{aligned}$$

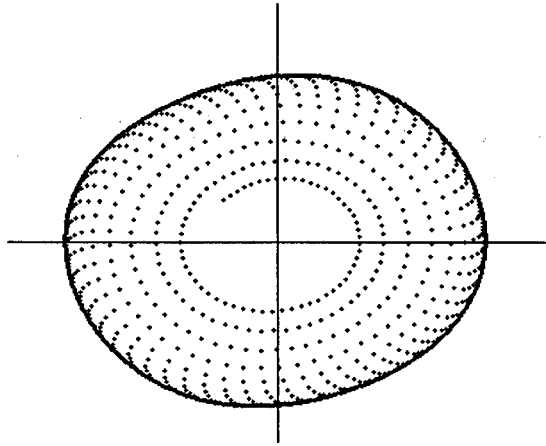
bulunur. μ_1 yeterince küçük pozitif ε değerleri için 1 den küçüktür. Sonuç olarak (3.2) sisteminin en az Euler kadar doğru sonuç veren her sonlu fark yaklaşımı, uygun küçüklükteki $h > 0$ ve $\varepsilon > 0$ değerleri için 2 yarıçaplı çember yakınında bir kapalı invaryant eğriye sahiptir. Farklı parametre değerleri için yörüngeler aşağıda verilmiştir. Bu grafikleri elde ederken en az Euler kadar doğru sonuç veren Implicit Midpoint algoritmasını kullandık. (3.2) lineer bir sistem olmadığından Implicit Midpoint algoritması ile bir yaklaşımını kapalı bir formda ifade edemiyoruz. ε değeri küçüldükçe invaryant eğrimiz çembere daha çok yaklaşacaktır. $\varepsilon = 0$ için ise (3.2) sisteminin (2.2.1) sistemine dönüştüğü açıktır. Bu durumda çözümler 2π periyodludur ve orijin kararlı denge noktasıdır.



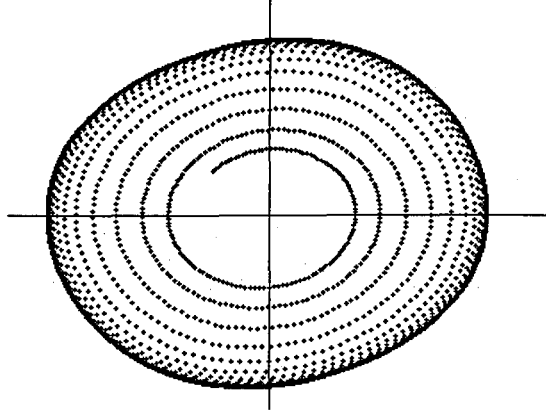
Şekil 3.1: (3.2) nin $x_0 = (-0.5, 0.5)$, $\varepsilon = 0.1$ ve $h = 0.4$ için ilk 5000 adımı



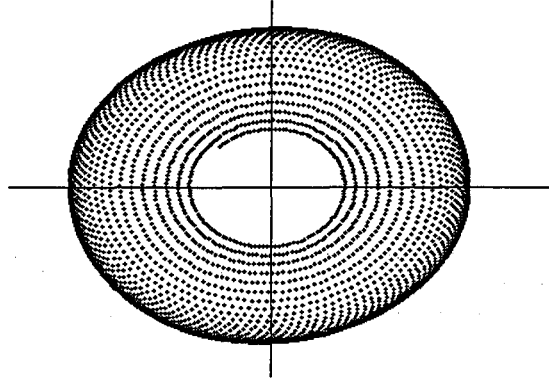
Şekil 3.2: (3.2) nin $x_0 = (-2, 2)$, $\varepsilon = 0.05$ ve $h = 0.4$ için ilk 5000 adımı



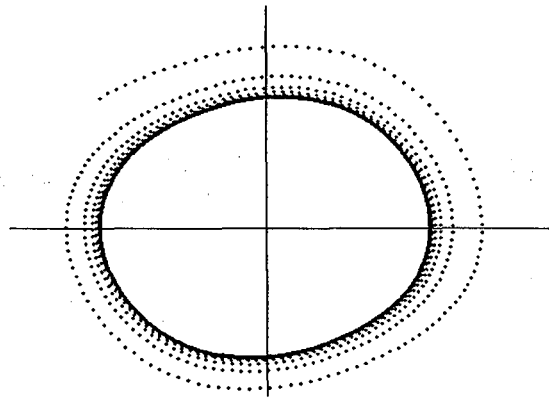
Şekil 3.3: (3.2) nin $x_0 = (-0.5, 0.5)$, $\varepsilon = 0.1$ ve $h = 0.11$ için ilk 5000 adımı



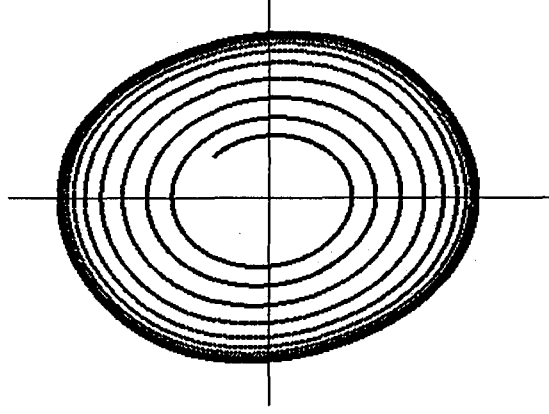
Şekil 3.4: (3.2) nin $x_0 = (-0.5, 0.5)$, $\varepsilon = 0.1$ ve $h = 0.05$ için ilk 5000 adımı



Şekil 3.5: (3.2) nin $x_0 = (-0.5, 0.5)$, $\varepsilon = 0.05$ ve $h = 0.05$ için ilk 5000 adımı



Şekil 3.6: (3.2) nin $x_0 = (-2, 2)$, $\varepsilon = 0.1$ ve $h = 0.05$ için ilk 5000 adımı



Şekil 3.7: (3.2) nin $x_0 = (-0.5, 0.5)$, $\varepsilon = 0.1$ ve $h = 0.01$ için ilk 15000 adımı

Örnek 3.2

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \quad (3.3)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

sistemini düşünelim. Polar koordinatlara geçerse sistemimiz

$$\dot{r} = r(1 - r^2) \quad (3.4)$$

$$\dot{\theta} = 1$$

biçiminde olur. Sistemimiz 1 yarıçaplı çemberler olan kararlı periyodik çözümlere sahiptir. O halde bu çözümleri

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

ile belirtebiliriz. Şimdi teoremin koşullarının sağlanıp sağlanmadığını görmek için $\phi(t)$ nin karakteristik çarpanlarını bulalım.

Teorem (3.1) i uygulayabilmemiz için μ_1 nin 1 den farklı olduğunu görelim ($\mu_2 = 1$ olduğunu biliyoruz). (3.5) periyodik çözümü civarında (3.3) ü lineerize edersek

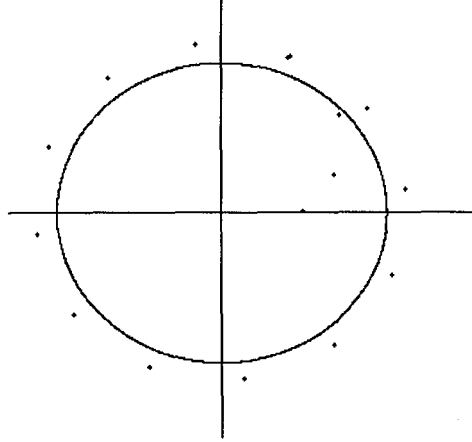
$$\dot{\zeta} = \begin{pmatrix} 1 - 3(\cos t)^2 - (-\sin t)^2 & -1 \\ 1 & 1 - (\cos t)^2 - 3(-\sin t)^2 \end{pmatrix} \zeta$$

sistemi elde edilir. Bu durumda sistemin iki karakteristik çarpanının çarpımı (1.5) den

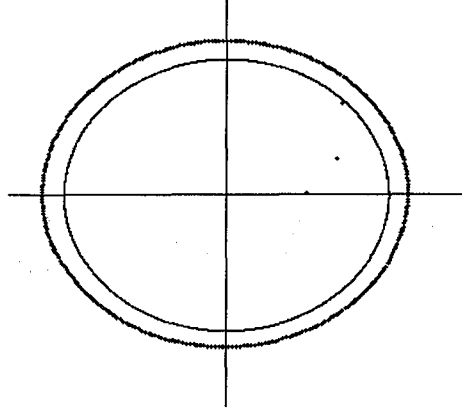
$$\begin{aligned}\mu_1\mu_2 &= \mu_1 \\ &= \exp\left(\int_0^{2\pi} [2 - 4(\cos^2 t + \sin^2 t)] dt\right) \\ &= \exp\left(\int_0^{2\pi} [-2] dt\right) = \exp(-4\pi)\end{aligned}$$

bulunur. $\mu_1 < 1$ olduğu son derece açıktır. O halde sisteminin en az Euler kadar doğru sonuç veren her sonlu fark yaklaşımı, uygun küçüklükteki $h > 0$ değerleri için 1 yarıçaplı çember yakınında bir kapalı invaryant eğriye sahiptir.

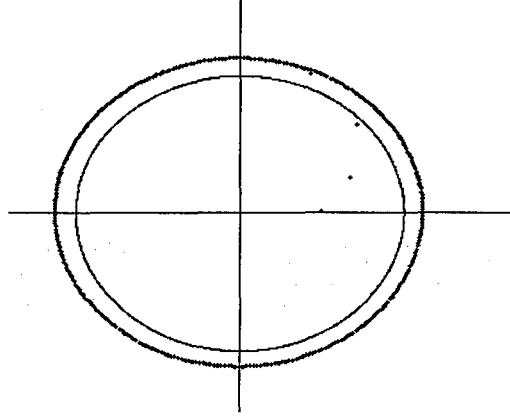
Farklı parametre değerleri için yörüngeler aşağıda verilmiştir. Bu grafikleri elde ederken yine en az Euler kadar doğru sonuç veren Midpoint Algoritması kullanıldı. Ayrıca şekillerde parametre değerine göre yörüngenin nasıl davrandığını daha iyi görmek için 1 yarıçaplı çember de yer almaktadır.



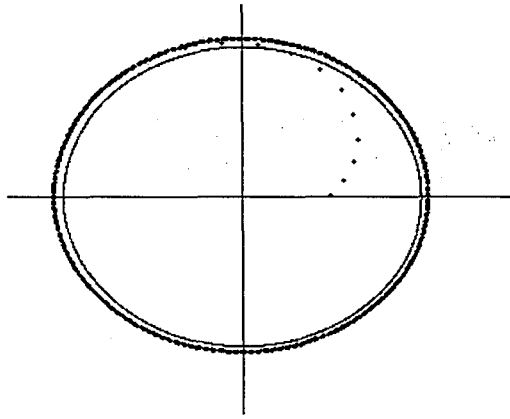
Şekil 3.8: (3.3) ün $x_0 = (0.5, 0)$ ve $h = 0.5$ için ilk 1000 adımı



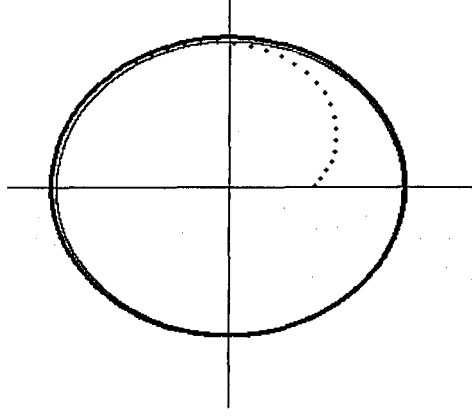
Şekil 3.9: (3.3) ün $x_0 = (0.5, 0)$ ve $h = 0.51$ için ilk 1000 adımı



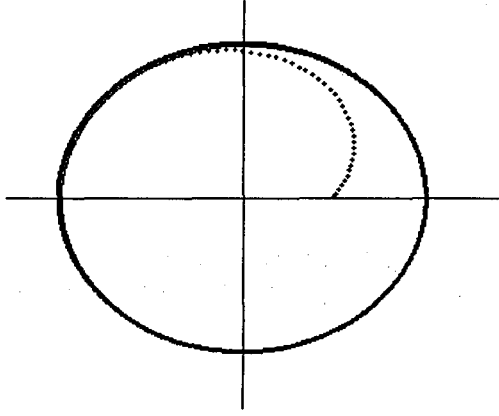
Şekil 3.10: (3.3) ün $x_0 = (0.5, 0)$ ve $h = 0.49$ için ilk 1000 adımı



Şekil 3.11: (3.3) ün $x_0 = (0.5, 0)$ ve $h = 0.2$ için ilk 1000 adımı



Şekil 3.12: (3.3) ün $x_0 = (0.5, 0)$ ve $h = 0.1$ için ilk 1000 adımı



Şekil 3.13: (3.3) ün $x_0 = (0.5, 0)$ ve $h = 0.05$ için ilk 1000 adımı

Şekillerde de görüldüğü gibi, h değeri azaldıkça hata azalmaktadır. Fakat bir h değeri için, $h = 0.5$ için kapalı yörünge oluşmamakta, adım sayısı sonsuza giderken sonlu bir küme oluşmaktadır. Ama bu kümede bir invaryant kapalı eğri üzerindeki noktalardan oluşmaktadır ve ilginçtir ki bu h değerinin sağında veya solunda bir değerde böyle bir durum meydana gelmemektedir.

h değerleri için oluşan yörüngelerin (kapalı invaryant eğriler) yarıçapları da h değeri azaldıkça azalmaktadır, h ile doğru orantılıdır ve bu yarıçap

$$r = 1 + O(h)$$

ile verilir. Bu yarıçapın $r = 1 + O(h)$ biçiminde olduğunu şekillerden tahmin edilebileceği gibi BEYN [5] tarafından da gösterilmiştir.

Teorem (3.1) in koşulları sağlanmadığında, mesela karakteristik çarpanların ikisi birden 1 olduğunda periyodik çözüm civarındaki bir fark yaklaşımı kapalı invaryant bir eğri olmayabilir, aşağıdaki örnekte olduğu gibi.

Örnek 3.3

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)^2 \quad (3.6)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)^2$$

sistemini düşünelim. Polar koordinatlara geçerse sistemimiz

$$\dot{r} = r(1 - r^2)^2 \quad (3.7)$$

$$\dot{\theta} = 1$$

biçiminde olur. Sistemimiz 1 yarıçaplı çemberler olan periyodik çözümlere sahiptir. O halde bu çözümleri

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

ile belirtebiliriz. (3.8) periyodik çözümünü civarında (3.6) sistemini lineerize edersek

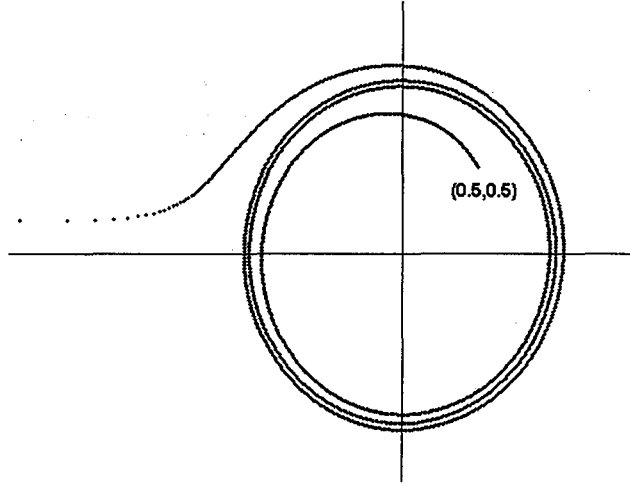
$$\dot{\zeta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \zeta$$

sistemi elde edilir. Yukarıdaki denklemden sistemin iki karakteristik çarpanının çarpımına (1.5) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \mu_1 \mu_2 &= \mu_1 \\ &= \exp \left(\int_0^{2\pi} 0 dt \right) = \exp(0) = 1 \end{aligned}$$

bulunur. $\mu_1 = 1$ dir. O halde Teorem (3.1) in koşulları sağlanmadı. Bu nedenle sisteminin en az Euler kadar doğru sonuç veren her sonlu fark yaklaşımının uygun küçüklükteki $h > 0$ değerleri için 1 yarıçaplı çember yakınında bir kapalı invaryant eğriye sahip olduğunu Teorem (3.1) den söyleyemeyiz. Aşağıdaki grafik de Euler metodu ile bu sistemin periyodik çözüm civarında başlayan bir

yörüngesi verilmiştir ve görülmektedir ki bu yörünge ne kadar adım atarsak atalım bir invaryant kapalı eğri üzerinde gezmemektedir.



Şekil 3.14: (3.6) nın $x_0 = (0.5, 0.5)$ ve $h = 0.01$ için ilk 3000 adımı

4 THETA METODUNUN DİNAMIĞI

4.1 Giriş

Bu bölümde Theta metodunun verdiği sabit noktaların kararlılığı ve çekim bölgeleri ile yeterince küçük h değerleri için oluşan 2 periyodlu sahte çözümlerin varlığı ve kararlılığı üzerinde durulmuştur. Daha fazla bilgi için [7] önerilir.

$$u' = g(u), u(0) = u_0 \quad (4.1.1)$$

skaler otonom sıradan diferansiyel denklemini düşünelim. Theta metodu bu denklemi

$$u_j = u_{j-1} + h(1 - \theta)g(u_{j-1}) + h\theta g(u_j) \quad (4.1.2)$$

fark denklemine dönüştürür. Burada h adım aralığı ve $0 \leq \theta \leq 1, \theta \neq 0$ için (4.1.2) kapalı bir fark denklemdir. Bu yüzden genelde lineer olmayan denklemler için yörüngeyi bulurken adım adım hesaplama yapılmalıdır. Sabit katsayılı lineer problemde, $g(u) = \lambda u$ için, (4.1.2) den

$$R(z) = \frac{1 + (1 - \theta)z}{1 - \theta z} \quad (4.1.3)$$

olmak üzere

$$u_j = R(\lambda h)^j u_0$$

elde ederiz. R ye metodun *kararlılık fonksiyonu* denir.

Açıktır ki $\theta = 0$ olması durumunda (4.1.2) bize Euler metodunu, $\theta = \frac{1}{2}$ olması durumunda Trapezoid Kuralını ve $\theta = 1$ olması durumunda da Implicit Euler metodunu vermektedir.

4.2 Sabit Noktaların Çekim Bölgeleri

Açıktır ki $u_j \equiv \beta$ nin (4.1.2) fark denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul $g(\beta) = 0$ olmasıdır. Yani (4.1.1) sistemi ile (4.1.2) fark denklemi aynı sabit noktalara sahiptir. Theta metodu hiçbir zaman sahte sabit nokta üretmez. Varsayalım $u_i \equiv \alpha$ (4.1.2) nin sabit noktası olsun ama (4.1.2) in sabit

noktası (denge noktası) olmasın. Bu durumda (4.1.2) den

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha + h(1 - \theta)g(\alpha) + h\theta g(\alpha) \\ \Rightarrow h(1 - \theta)g(\alpha) + h\theta g(\alpha) &= 0, h \neq 0 \\ \Rightarrow g(\alpha) &= 0\end{aligned}$$

olur. Bu da α nın (4.1.1) in denge noktası olduğunu söyler. Yani Theta metodu asla sahte sabit nokta üretmez.

Eğer $g(\beta) = 0$ ve $g'(\beta) < 0$ ise (4.1.1) in sabit noktasının kararlı olduğunu Teorem (1.1) den biliyoruz. Bu durumda (4.1.2) fark denkleminin sabit noktası da $hg'(\beta)$, $\{z : |R(z)| < 1\}$ aralığında olduğunda kararlı olur. Bunu görmek için $u_j = f(u_{j-1})$ olmak üzere (4.1.2) den

$$f(u) = u + h(1 - \theta)g'(u) + h\theta g(f(u))$$

biçiminde yazalım. $f(\beta) = \beta$ olduğu açıktır. $1 - h\theta g'(f(u)) \neq 0$ için

$$f'(u) = \frac{1 + h(1 - \theta)g'(u)}{1 - h\theta g'(f(u))}$$

bulunur. Teorem (1.4) ten β nın kararlı sabit nokta olması için

$$\left| f'(u) \right| = \left| \frac{1 + h(1 - \theta)g'(u)}{1 - h\theta g'(f(u))} \right| < 1$$

olması gerekir. R metodun kararlılık fonksiyonu olmak üzere

$$R(hg'(\beta)) = \frac{1 + h(1 - \theta)g'(u)}{1 - h\theta g'(f(u))}$$

olduğundan $hg'(\beta)$ nin $\{z : |R(z)| < 1\}$ aralığında olması ile mümkündür.

Ufak bir analizle

$$|R(z)| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2}{1-2\theta} < z < 0 & , \quad 0 \leq \theta < \frac{1}{2} \\ z < 0 & , \quad \theta = \frac{1}{2} \\ z < 0 \text{ ya da } z > \frac{2}{2\theta-1} & , \quad \frac{1}{2} < \theta \leq 1 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

çift gerektirmesi elde edilir.

$g'(\beta) \neq 0$ ve $\theta \geq \frac{1}{2}$ olmak üzere $u(t) \equiv \beta$ (4.1.1) sistemi için kararlı ise $u_j \equiv \beta$ da h den bağımsız olarak (4.1.2) fark denkleminin kararlı sabit

noktasıdır. Bununla birlikte $\theta > \frac{1}{2}$ olduğunda (4.1.1) in kararsız sabit noktaları $g'(\beta) > 0$ ve $h > \frac{2}{g'(\beta)(2\theta-1)}$ ise (4.1.2) nin kararlı sabit noktasıdır. Bu durum Örnek (4.2) de örneklendirilmiştir. Yani $\theta > \frac{1}{2}$ olduğunda (4.1.1) in kararsız sabit noktaları (4.1.2) fark denkleminin kararlı sabit noktası olabilir. $\theta < \frac{1}{2}$ için de uygun küçüklükteki h değerleri için, $h < -\frac{2}{g'(\beta)(1-2\theta)}$ için, (4.1.1) in kararsız sabit noktası (4.1.2) nin kararlı sabit noktası olur.

(4.1.2) fark denkleminin sabit nokta civarında nasıl davrandığı, salınım yapıp yapmadığı, yakınsamamın monoton olup olmadığı önemlidir. Bu durumu ele almak için $|R(z)| < 1$ koşulu ile $0 < R(z) < 1$ koşulunu değiştirelim. Açık ki

$$0 < R(z) < 1 \Leftrightarrow -1 < (1 - \theta)z < 0$$

çift gerektirmesi sağlanır. Buradan eğer $g'(\beta) < 0$ ise

$$(1 - \theta)h |g'(\beta)| < 1 \quad (4.2.2)$$

olduğunda (4.1.2) fark denkleminin çözümü salınımsız bir hareket yapar, yani sabit noktaya bir tarafından yaklaşır.

Teorem 4.1 $g \in C^1, g(\beta) = 0, g'(\beta) < 0, I \subset \mathbb{R}$ açık bağlantılı kümesindeki her $u \in I$ için $g'(u) < 0, \beta \in I$ ve $g'_{\text{sup}} := \sup_{x \in I} |g'(x)|$ olsun. Eğer

$$h(1 - \theta)g'_{\text{sup}} < 1$$

ise herhangi bir $u_0 \in I$ için (4.1.2) fark denkleminin yörüngesi β ya monoton olarak yaklaşır ve yörüngeyi elemanları β nın tek bir tarafında kalır.

Kanıt. $u_{j-1} \in I$ iterasyonunu düşünelim. Eğer $u_{j-1} = \beta$ ise $u_j = \beta$ dir ve sonuç açıktır.

$u_{j-1} \neq \beta$ olsun. $H_{j-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$H_{j-1}(u) := u - h\theta g(u) - u_{j-1} - h(1 - \theta)g(u_{j-1}) \quad (4.2.3)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. H_{j-1} in sıfırı (4.1.2) nin çözümünü verir. $\xi_{j-1} \in I$ olmak üzere Ortalama Değer Teoremini kullanırsak

$$\begin{aligned} H_{j-1}(u_{j-1}) &= -hg(u_{j-1}) = -h(g(u_{j-1}) - g(\beta)) \\ &= -hg'(\xi_{j-1})(u_{j-1} - \beta) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

biçiminde bulunur. Benzer olarak

$$\begin{aligned} H_{j-1}(\beta) &= \beta - u_{j-1} - h(1 - \theta)g(u_{j-1}) \\ &= (\beta - u_{j-1})(1 + h(1 - \theta)g'(\xi_{j-1})) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

olur. (4.2.5) ve (4.2.4) den

$$H_{j-1}(u_{j-1})H_{j-1}(\beta) = h(\beta - u_{j-1})^2 g'(\xi_{j-1})(1 + h(1 - \theta)g'(\xi_{j-1})) < 0$$

olur ($h(1 - \theta)g'_{\text{sup}} < 1$ olduğundan). O halde H_{j-1} in sıfırı olan u_j, u_{j-1} ile β arasındadır. Yani (4.1.2) nin çözümleri olan u_j ler u_{j-1} ile β arasındadır. Çünkü I bağlantılı ve $H_{j-1}(u_j) = 0$ dir. Monotonluğu göz önüne alırsak sonuca ulaşırız. ■

$\theta = 1$ olduğunda $h(1 - \theta)g'_{\text{sup}} = 0 < 1$ koşulu sürekli sağlanacağından bu tür davranış h den bağımsızdır.

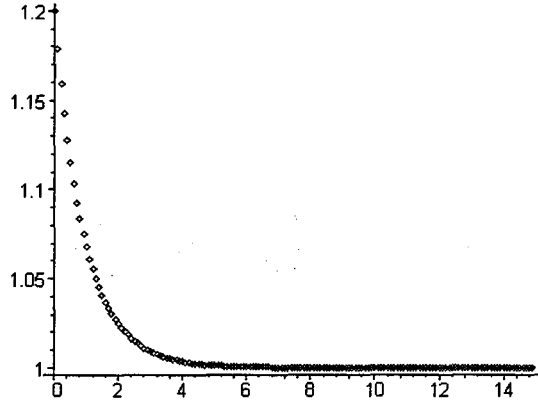
Örnek 4.1 $g(u) = u(1 - u)$ fonksiyonunu düşünelim. Bu durumda $\beta = 1$ sabit noktadır. $g'(u) = 1 - 2u$ olduğundan $u > \frac{1}{2}$ için $g'(u) < 0$ dir. Bu durumda $I \subset (\frac{1}{2}, \infty)$ alabiliriz. $\beta = 1$ atraktördür. Şimdi bu atraksiyonun mümkün en büyük tabanını elde edelim.

Eğer $\frac{1}{2} < u_0 < 1$ ise $u_0 - \varepsilon > \frac{1}{2}$ olacak şekilde bir ε değeri için $I = (u_0 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ alabiliriz. Bu durumda $g'_{\text{sup}} = 1 + 2\varepsilon$ ve (4.2.2) denklemi $h(1 - \theta)(1 + 2\varepsilon) < 1$ biçiminde olur. Bu koşul da uygun küçüklükteki ε lar için $(1 - \theta)h < 1$ olursa sağlanır.

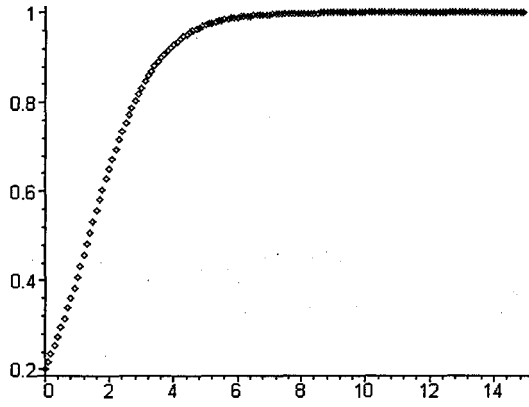
Eğer $u_0 > 1$ ise $I = (\frac{1}{2}, u_0)$ alabiliriz. Bu durumda $g'_{\text{sup}} = 2u_0 - 1$ olur ve (4.2.2) denklemi $h(1 - \theta)(2u_0 - 1) < 1$ biçiminde olur. Sonuç olarak (4.2.2) fark denkleminin bir u_0 dan başlayan yörüngesinin β ya bir tarafından monoton olarak yakınsaması için aşağıdaki zorunluluk elde edilir.

$$(1 - \theta)h < \begin{cases} 1 & , \frac{1}{2} < u_0 < 1 \\ \frac{1}{2u_0 - 1} & , 1 < u_0 \end{cases}$$

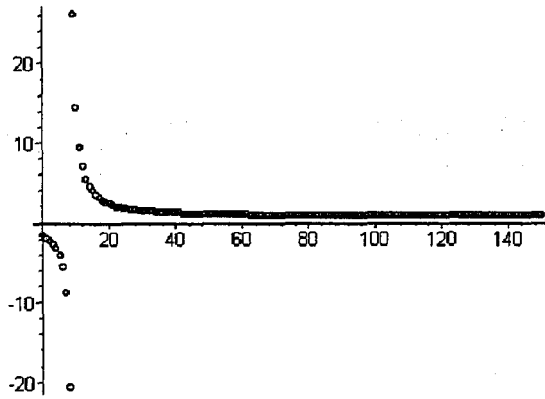
Aşağıdaki grafiklerde birkaç u_0 değeri için $h = 0.1$ ve $\theta = 0.7$ olmak üzere yörüngeler verilmiştir. $u_0 < \frac{1}{2}$ için yörünge yine 1 e yakınsar fakat bu yakınsama Şekil 4.3 te görüldüğü gibi monoton olmayabilir.



Şekil 4.1: (4.1.2) nin $g(u) = u(1 - u)$ olmak üzere $u_0 = 1.2$ için ilk 150 adımı



Şekil 4.2: (4.1.2) nin $g(u) = u(1 - u)$ olmak üzere $u_0 = 0.2$ için ilk 150 adımı



Şekil 4.3: (4.1.2) nin $g(u) = u(1 - u)$ olmak üzere $u_0 = -1.6$ için ilk 150 adımı

Teorem 4.2 $g \in C^1, g(\beta) = 0, g'(\beta) > 0$ ve $I \subset \mathbb{R}$ açık bağlantılı ve her $u \in I$ için $g'(u) > 0$ olmak üzere $\beta \in I$ ve $g'_{\inf} := \inf_{x \in I} |g'(x)|$ olsun. Eğer $\theta = 1$ ve

$$hg'_{\inf} > 2$$

ise (4.1.2) fark denkleminin yörüngesi β ya her iki tarafından salınarak yaklaşır.

Kanıt. $u_{j-1} \in I$ iterasyonunu düşünelim. Eğer $u_{j-1} = \beta$ ise $u_j = \beta$ dir ve sonuç açıktır.

$u_{j-1} \neq \beta$ olsun. σ_{j-1}

$$\sigma_{j-1} := u_{j-1} - hg(u_{j-1})$$

olarak tanımlansın. (4.2.3) de tanımladığımız H fonksiyonundan yararlanarak, $\xi_{j-1} \in I$ olmak üzere

$$(\sigma_{j-1} - \beta)(u_{j-1} - \beta) = (\beta - u_{j-1})^2(1 - hg'(\xi_{j-1})) < 0$$

elde edilir. Bu yüzden u_{j-1} ve σ_{j-1}, β nın farklı tarafında yer alır. Her $u \in I$ için $hg'_{\inf} > 2$ olduğundan

$$H'_{j-1}(u) = 1 - h\theta g'(u) = 1 - hg'(u) < -1$$

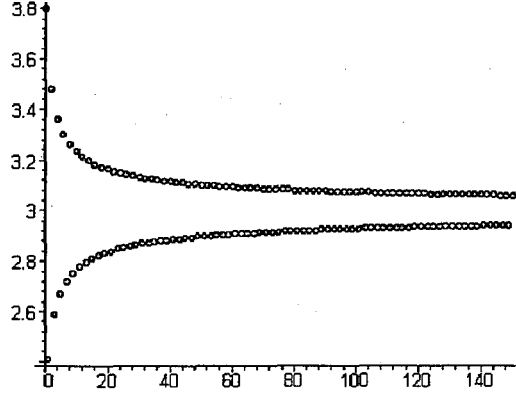
dir. Önce $u_{j-1} < \beta$ olsun. Bu durumda $H_{j-1}(\beta) = \beta - u_{j-1} > 0$ dir. Herhangi bir $u > u_{j-1}$ için

$$\begin{aligned} H_{j-1}(u) &= H_{j-1}(u_{j-1}) + \int_{u_{j-1}}^u H'_{j-1}(u) du, \quad (H'_{j-1}(u) < -1) \\ &< H_{j-1}(u_{j-1}) - u + u_{j-1} \end{aligned}$$

dir. Burada u yerine σ_{j-1} yazarsak $H_{j-1}(\sigma_{j-1}) < 0$ olur. Yani H_{j-1} in u_j köktü için $u_j \in (\beta, \sigma_{j-1})$ yazılır. O halde $u_{j-1} < \beta$ olduğundan u_j ile u_{j-1}, β nın farklı tarafında yer alır. $u_{j-1} > \beta$ durumunda da benzer biçimde yapılır. ■

Örnek 4.2 $g(u) = 2(u - 3) + (u - 3)^3$ fonksiyonunu düşünelim. $\beta = 3$ sabit noktadır ve $g'(u) = 2 + 3(u - 3)^2 \geq 2$ dir. Şu halde (4.1.2) fark denklemi için

$\beta = 3$ e yeterince yakın başlayan çözümler $hg'_{\text{inf}} > 2$ için sabit noktaya salınım yaparak yakınsar. $h = 1$ ve $u_0 = 3.8$ için yörünge aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.4: (4.1.2) nin $g(u) = 2(u - 3) + (u - 3)^3$ olmak üzere $u_0 = 3.8$ için ilk 150 adımı

4.3 2 Periyodlu Yörüngeler

Theta metodu hiçbir zaman sahte sabit nokta üretmemesine rağmen 2 periyodlu sahte çözümler üretebilir. Bu bölümde 2 periyodlu çözümlerin varlığı ve kararlılığı üzerinde duracağız.

Eğer $(v, w), v \neq w$ olmak üzere (4.1.2) nin 2 periyodlu bir çözümü ise

$$w = v + h(1 - \theta)g(v) + h\theta g(w)$$

$$v = w + h(1 - \theta)g(w) + h\theta g(v)$$

yazılabilir. Buradan

$$v + h(1 - 2\theta)g(v) = w \quad (4.3.1)$$

$$g(v) + g(w) = 0 \quad (4.3.2)$$

elde edilir. Açıktır ki $\theta = \frac{1}{2}$ için 2 periyodlu çözüm var olamaz. Theta metodunu $u_j = S(u_{j-1})$ olmak üzere (4.1.2) den

$$S(u) = u + h(1 - \theta)g(u) + h\theta g(S(u))$$

biçiminde yazabiliriz. $v = S(w)$ ve $w = S(v)$ dir. Eğer $1 - h\theta g'(S(u)) \neq 0$ ise

$$S'(u) = \frac{1 + h(1 - \theta)g'(u)}{1 - h\theta g'(S(u))} \quad (4.3.3)$$

şeklinde olur. Bu durumda (v, w) 2 periyodlu çözümü Teorem (1.6) dan $|S'(v)S'(w)| < 1$ ise kararlı, $|S'(v)S'(w)| > 1$ ise kararsızdır. $|S'(v)S'(w)| < 1$ ise v ve w periyodik noktaları kararlıdır ve süreklilikten 2 periyodlu yörüngenin de kararlı olduğu kolayca görülebilir.

$v = S(w)$ ve $w = S(v)$ olduğundan biz bu koşulları $z_v = hg'(v)$, $z_w = hg'(w)$ ve R , (4.1.3) de tanımlanan kararlılık fonksiyonu olmak üzere $|R(z_v)R(z_w)| < 1$ ve $|R(z_v)R(z_w)| > 1$ ile değiştirebiliriz.

Örnek 4.3 $\theta < \frac{1}{2}$ için $g(u) = -2u|u|$ olmak üzere (4.1.2) nin 2 periyodlu çözümü

$$\left(v = \frac{1}{(2\theta - 1)h}, w = -v \right) \quad (4.3.4)$$

ile, $\theta > \frac{1}{2}$ için $g(u) = 2u|u|$ olmak üzere (4.1.2) nin 2 periyodlu çözümü

$$\left(v = \frac{1}{(2\theta - 1)h}, w = -v \right) \quad (4.3.5)$$

şeklindedir. İki durumda da

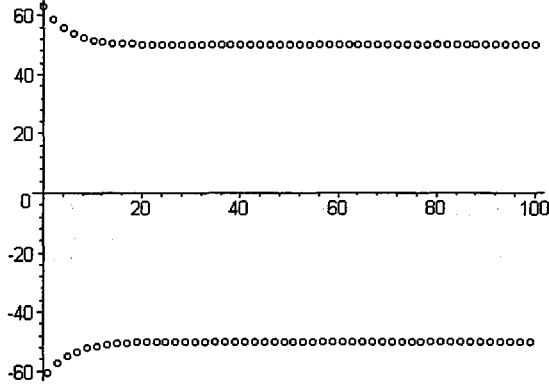
$$g'(v) = g'(w) = \frac{4}{(2\theta - 1)h}$$

$$|R(z_v)R(z_w)| = \left| \frac{3 - 2\theta}{1 + 2\theta} \right|^2 \quad (4.3.6)$$

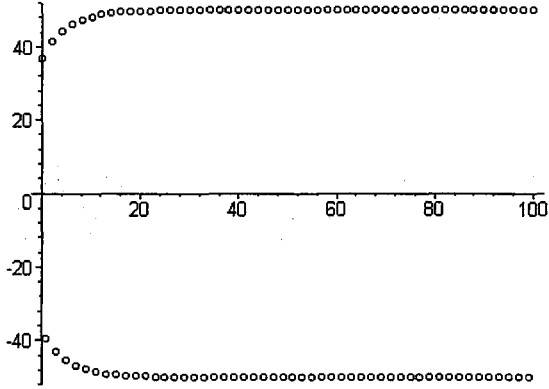
şeklinde bulunur. O halde açıktır ki bu 2 periyodlu çözümün kararlı olması için gerekli ve yeterli şart $\theta > \frac{1}{2}$ olmasıdır. Çünkü (4.3.6) nın 1 den küçük olması için gerek ve yeter koşul $\theta > \frac{1}{2}$ olmasıdır. Şu halde $\theta < \frac{1}{2}$ için $g(u) = -2u|u|$ olmak üzere (4.1.2) nin 2 periyodlu çözümü

$$\left(v = \frac{1}{(2\theta - 1)h}, w = -v \right) \quad (4.3.4)$$

kararsızdır.



Şekil 4.5: (4.1.2) nin $g(u) = -2u|u|$ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 0.6$ ve $u_0 = 63$ için ilk 100 adımı



Şekil 4.6: (4.1.2) nin $g(u) = -2u|u|$ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 0.6$ ve $u_0 = 37$ için ilk 100 adımı

Yardımcı Teorem 4.1 g sürekli olmak üzere (4.1.2) fark denklemini düşünelim. Uygun küçüklükteki h değerleri için varsayalım (v, w) sürekli olarak h ye bağlı olan 2 periyodlu çözüm olsun ve $g(v)$ ile $g(w)$ küçük h değerleri için 0 dan uzakta sınırlı olsun. Bu durumda $h \rightarrow 0$ için

$$|v| \rightarrow \infty, |w| \rightarrow \infty, |g(v)| \rightarrow \infty, |g(w)| \rightarrow \infty$$

olur. Ayrıca yine küçük h değerleri için

$$vw < 0, (1 - 2\theta)vg(v) < 0, (1 - 2\theta)wg(w) < 0$$

olur ve v ile w monoton olarak sonsuza gider.

Kanıt.

$$v + h(1 - 2\theta)g(v) = w$$

$$g(v) + g(w) = 0$$

denklemlerini hatırlayalım. Varsayalım $h \rightarrow 0$ için v sınırlı olsun. Bu durumda $hg(v) \rightarrow 0$ olur ki bu durumda (4.3.1) den $w \rightarrow v$ olur. Buradan da (4.3.2) den $g(v) \rightarrow 0$ olur. $g(v)$ küçük h ler için 0 dan uzakta sınırlı olduğundan bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz $h \rightarrow 0$ için v nin sınırlı olması yanlıştır, yani v sınırlı olamaz. Benzer olarak da $|w| \rightarrow \infty$ olduğu gösterilir.

$g(v)$ ve $g(w)$, 0 dan uzakta sınırlı olduğundan (4.3.2) den küçük h değerleri için $vw < 0$ olur. Eğer öyle olmasaydı $v \rightarrow \infty$ için $w \rightarrow \infty$ olurdu ve $g(v)$ ile $g(w)$ aynı işaretli olurdu ki buradan $|g(v) + g(w)| \rightarrow \infty$ elde edilirdi.

(4.3.1) den $h \rightarrow 0$ iken

$$|g(v)| = \frac{1}{h} \frac{|v| + |w|}{|1 - 2\theta|} \rightarrow \infty$$

olur. Benzer olarak $|g(w)| \rightarrow \infty$ olur.

Yine (4.3.1) den küçük h değerleri için

$$v^2 + h(1 - 2\theta)vg(v) = vw < 0$$

ise

$$(1 - 2\theta)vg(v) < 0$$

olur. Simetriden

$$(1 - 2\theta)wg(w) < 0$$

olduğu gösterilir. Şimdi yörüngenin monoton olarak sonsuza gittiğini göstermeliyiz. Bunun için de önce

$$\lim_{h^* \rightarrow 0} \left(\inf_{0 < h < h^*} |v| \right) = \infty \text{ ve } \lim_{h^* \rightarrow 0} \left(\inf_{0 < h < h^*} |w| \right) = \infty \quad (4.3.7)$$

olduğunu göstermeliyiz.

Genel durumu bozmadan varsayalım $\lim_{h^* \rightarrow 0} (\inf_{0 < h < h^*} |v|) < \infty$ olsun. Bu durumda (4.3.1) den

$$\lim_{h^* \rightarrow 0} (\inf_{0 < h < h^*} |v - w|) \leq |1 - 2\theta| \lim_{h^* \rightarrow 0} (\inf_{0 < h < h^*} h |g(v)|) = 0$$

olur. Süreklilikten

$$\lim_{h^* \rightarrow 0} (\inf_{0 < h < h^*} |g(v) - g(w)|) = 0$$

ve bu durumda (4.3.2) den

$$\lim_{h^* \rightarrow 0} (\inf_{0 < h < h^*} |g(v)|) = 0$$

olur. Bu durum mümkün olmadığından varsayımımız yanlıştır.

Sonuç olarak küçük h değerleri için v ve w nin monoton olarak sonsuza gittiğini göstermeliyiz. Yine genel durumu kaybetmeden varsayalım $h \rightarrow 0$ için $v \rightarrow \infty$ ve $w \rightarrow -\infty$ olsun. Farzedelim v monotonluğunu h^* küçük adım aralıklarında kaybetsin. O zaman eğer herhangi bir adım aralığı için $\hat{h} < h^*$ olursa $v(\hat{h}) = v(h^*)$ olur ki buradan (4.3.1) i kullanırsak $w(\hat{h}) > w(h^*)$ elde ederiz. Benzer olarak herhangi bir adım aralığı için $\hat{h} < h^*$, $w(\hat{h}) = w(h^*)$ olur ise (4.3.1) den $v(\hat{h}) < v(h^*)$ olur. Bu ifadeler (4.3.7) ile çelişir. ■

Teorem 4.3 *Yardımcı Teorem (4.1) deki koşullar sağlansın ve $g \in C^1$ olsun. Bu durumda*

1. Küçük h değerleri için $\theta < \frac{1}{2}$ ise 2 periyodlu çözüm kararsızdır.
2. Küçük h değerleri için $\theta > \frac{1}{2}$ ise 2 periyodlu çözüm karardır.

Kanıt.

1. Genelliği bozmaksızın varsayalım $v \rightarrow \infty$ olsun. Bu durumda Yardımcı Teorem (4.1) den

$$v \rightarrow \infty, g(v) \rightarrow -\infty, w \rightarrow -\infty, g(w) \rightarrow \infty$$

elde edilir. Şimdi v ve w ye uygun olarak küçük ve sabitlenmiş $h > 0$ sayısını düşünelim. $\delta t > 0$ olmak üzere $h \rightarrow h - \delta t > 0$ küçük perturbationunu ele alalım. Buradan yine Yardımcı Teorem (4.1) e dayanarak

$\delta v > 0, \delta w < 0$ olur. (4.3.1) den

$$\frac{g(v)}{v-w} = \frac{-1}{h(1-2\theta)} \quad (4.3.8)$$

dır. Eşitliğin sol tarafı negatiftir ve $h \rightarrow 0$ için bu negatif sayı daha da küçülecektir. Aslında burada h sabit ama $h - \delta t$ perturbasyonu ile 0 a yaklaşmaktayız. Şu halde

$$\frac{g(v)}{v-w} > \frac{g(v+\delta v)}{v+\delta v - (w+\delta w)}$$

olur. Bu yüzden uygun küçüklükteki perturbasyonlar için (Ortalama Değer Teoremini de kullanarak, yani

$$g(v+\delta v) - g(v) = (v+\delta v - v)g'(\zeta), \quad \zeta \in (v, v+\delta v)$$

eşitliğini kullanarak)

$$\begin{aligned} g(v+\delta v)(v-w) &= (g(v) + \delta v g'(v))(v-w) \\ &< g(v)(v-w + \delta v - \delta w) \end{aligned}$$

ve buradan da ($v \rightarrow \infty$ için $g(v) \rightarrow -\infty$ olduğundan $g'(v) < 0$ olduğunu göz önüne alırsak)

$$\begin{aligned} \delta v g'(v)(v-w) &< g(v)(\delta v - \delta w) \\ &= (v-w) \frac{-1}{h(1-2\theta)} (\delta v - \delta w) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$g'(v) < \frac{-1}{h(1-2\theta)} \left(1 - \frac{\delta w}{\delta v}\right) \quad (4.3.9)$$

ve benzer olarak

$$g'(w) < \frac{-1}{h(1-2\theta)} \left(1 - \frac{\delta v}{\delta w}\right) \quad (4.3.10)$$

elde edilir. Buradan

$$R(Z_v)R(Z_w) - 1 = \frac{hg'(v) + hg'(w) + h(1-2\theta)g'(v)hg'(w)}{(1-\theta hg'(v))(1-\theta hg'(w))}$$

olur. (4.3.9) ve (4.3.10) dan paydanın ve payın pozitif olduğu açıktır. Şu halde $R(Z_v)R(Z_w) - 1 > 0$ yani $|R(Z_v)R(Z_w)| > 1$ dir. Bu da istenilen kararsızlık durumunu verir.

2. Bu durumda da ilk kısımda yapılan ispata benzer ispat yapılır. Genelliği bozmaksızın varsayalım $v \rightarrow \infty$ olsun. Bu durumda

$$v \rightarrow \infty, g(v) \rightarrow \infty, w \rightarrow -\infty, g(w) \rightarrow -\infty$$

elde edilir. Benzer yollar ile

$$g'(v) > \frac{-1}{h(1-2\theta)} \left(1 - \frac{\delta w}{\delta v}\right) \quad (4.3.11)$$

$$g'(w) > \frac{-1}{h(1-2\theta)} \left(1 - \frac{\delta v}{\delta w}\right) \quad (4.3.12)$$

elde edilir. Ve $|R(Z_v)R(Z_w)| < 1$ olduğu kolayca görülür.

■

Şimdi de 2 periyodlu çözümlerinin varlığına değinelim. Bu nedenle önce aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 4.1

- $g \in C^1$ ve $|u| \rightarrow \infty$ için $g'(u) \rightarrow +\infty$ oluyorsa g ye pozitif süperlineer fonksiyon denir.
- $g \in C^1$ ve $|u| \rightarrow \infty$ için $g'(u) \rightarrow -\infty$ oluyorsa g ye negatif süperlineer fonksiyon denir.
- $g \in C^1$ ve her u için $0 < g'(u) < D$ olacak şekilde bir D sabiti varsa g ye pozitif sublineer fonksiyon denir.
- $g \in C^1$ ve her u için $-D < g'(u) < 0$ olacak şekilde bir D sabiti varsa ve $g(u^*) = 0$ olacak şekilde $u^* \in \mathbb{R}$ varsa g ye negatif sublineer fonksiyon denir. Bu durumda u^* tektir ve kolaylık olsun diye biz $u^* = 0$ alacağız.

Teorem 4.4 g pozitif süperlineer olmak üzere (4.1.2) fark denklemini düşünelim.

1. Uygun küçüklükteki h değerleri için $g(v)$ ile $g(w)$, 0 dan uzakta sınırlı olmak üzere sürekli olarak h ye bağlı olan (v, w) 2 periyodlu çözümün var olması için gerekli ve yeterli koşul $\theta > \frac{1}{2}$ olmasıdır.

2. $\theta \neq 0$ için $j \rightarrow \infty$ iken $|u_j| \rightarrow \infty$ ve $\{u_j\}_{j=0}^{\infty}$ monoton olacak şekilde bir nümerik çözüm bulunamaz.

Kanıt.

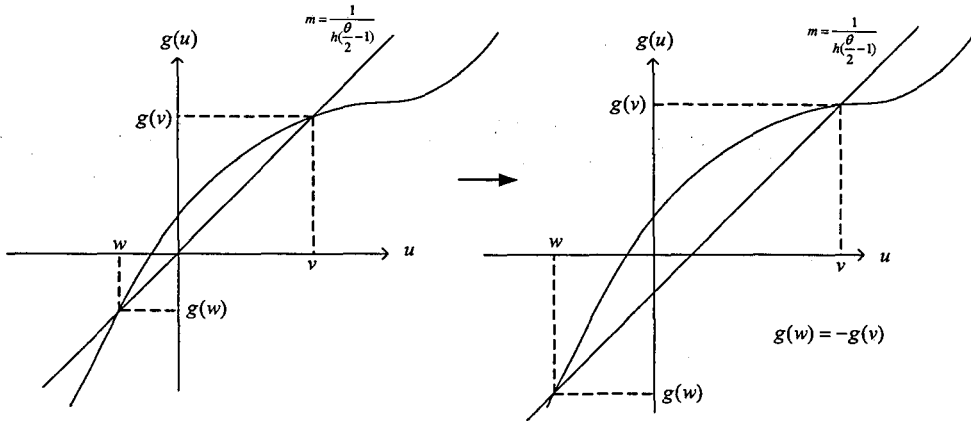
1. $\implies \theta > \frac{1}{2}$ olsun. g süperlineer olduğundan $g(u)$ yeterince büyük $|u|$ lar için, mesela $|u| \geq L$ için monoton olsun. İspatın doğruluğunu etkilemeksizin $|u| < L$ için $g(u)$ yu tekrar her u için monoton olacak şekilde tanımlayabiliriz.

(4.3.1) ve (4.3.2) den eğer (v, w) bir 2 periyodlu çözüm ise

$$\frac{g(v) - g(w)}{v - w} = \frac{1}{h(\frac{\theta}{2} - 1)} \quad (4.3.13)$$

$$g(v) = -g(w) \quad (4.3.14)$$

şeklindedir. Şimdi orijinden geçen ve eğimi $\left| \frac{1}{h(\frac{\theta}{2} - 1)} \right|$ olan doğruyu düşünelim. g süperlineer olduğundan küçük h değerleri için bu doğruyla $v > 0$ ve $w < 0$ gibi noktalarda kesişecektir öyle ki (4.3.13) sağlanacaktır. g monoton olduğundan doğruya sabitler ekleyerek (4.3.14) sağlanıncaya kadar kesişim noktalarını değiştirebiliriz (Doğruyu eğimini değiştirmeden aşağı yukarı oynatarak söz konusu duruma ulaşabiliriz.). Bu da her küçük h için 2 periyodlu çözümün varlığını söyler ve açıktır ki çözüm h ye göre süreklidir.



Şekil 4.7: (4.1.2) için (v, w) 2 periyodlu çözümün varlığı

$\Leftarrow \theta < \frac{1}{2}$ olsun. Yeterince büyük $|u|$ lar için, mesela $|u| \geq M$ için $\text{sgn}(g(u)) = \text{sgn}(u)$ olsun. İspatın geçerliliğini bozmadan $|u| < M$ için $g(u)$ yu tekrar tanımlayabiliriz Varsayalım her $u \neq 0$ için

$$\text{sgn}(g(u)) = \text{sgn}(u)$$

olsun. Yardımcı Teorem (4.1) den eğer (v, w) 2 periyodlu çözüm ise $vw < 0$ olur. O halde

$$\frac{g(v) - g(w)}{v - w} > 0$$

olur ki bu da (4.3.13) ile çelişir. O halde $\theta < \frac{1}{2}$ olamaz, $\theta > \frac{1}{2}$ olmalıdır.

2. $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(u) = u - \theta hg(u)$ olsun. Theta metodu bu fonksiyon için

$$p(u_j) - p(u_{j-1}) = hg(u_{j-1})$$

biçiminde yazılır. Ortalama Değer Teoreminden

$$p'(z_j)(u_j - u_{j-1}) = hg(u_{j-1}), z_j \in (u_{j-1}, u_j)$$

olur. Buradan da

$$(1 - \theta hg'(z_j))(u_j - u_{j-1}) = hg(u_{j-1}) \quad (4.3.15)$$

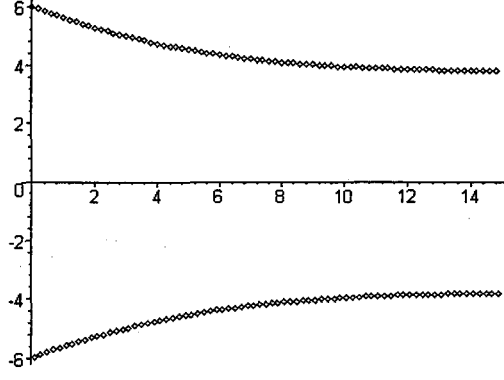
olur. Eğer $|u_{j-1}|$ ve $|u_j|$ yeterince büyük olursa ve aynı işaretli olursa $(1 - \theta hg'(z_j)) < 0$ olur ki istenilen buradan elde edilmiş olur.

■

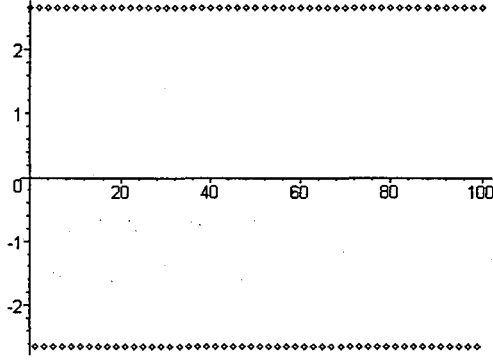
Örnek 4.4 $g(u) = u^5$ fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyon pozitif süperli-
neer bir fonksiyondur 2 periyodlu çözümler

$$\left(\sqrt[4]{\frac{-2}{h(1-2\theta)}}, -\sqrt[4]{\frac{-2}{h(1-2\theta)}} \right)$$

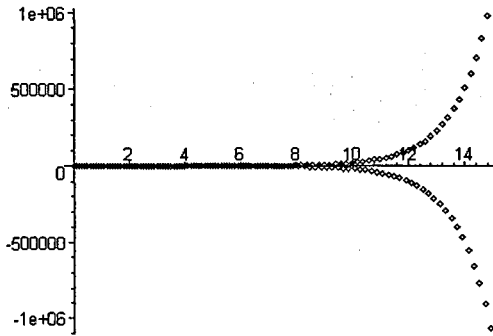
biçimindedir. Aşağıdaki grafiklerde bazı h ve θ değerleri için yörüngeleri görmekte-
tesiniz. Görüldüğü gibi $\theta > \frac{1}{2}$ için (4.1.2) fark denkleminiz 2 periyodlu çözüm
üretmekte, diğer durumda çözümler bir noktaya yakınsamamakta ve her iki
durumda da iterasyonlar monoton bir dizi oluşturmamaktadır.



Şekil 4.8: (4.1.2) nin $g(u) = u^5$ olmak üzere $h = 0.5, \theta = 0.51$ ve $u_0 = 6$ için ilk 150 adımı

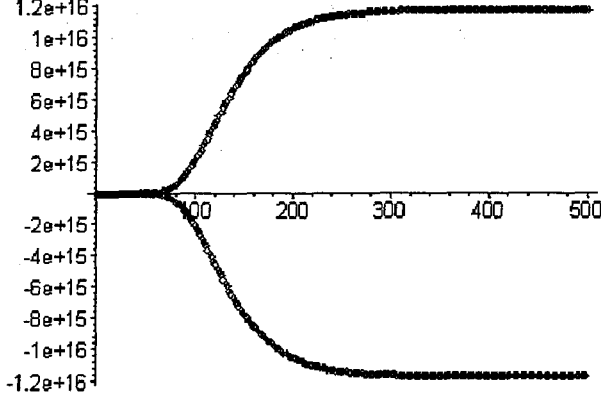


Şekil 4.9: (4.1.2) nin $g(u) = u^5$ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 0.7$ ve $u_0 \approx 2.659147$ için ilk 150 adımı

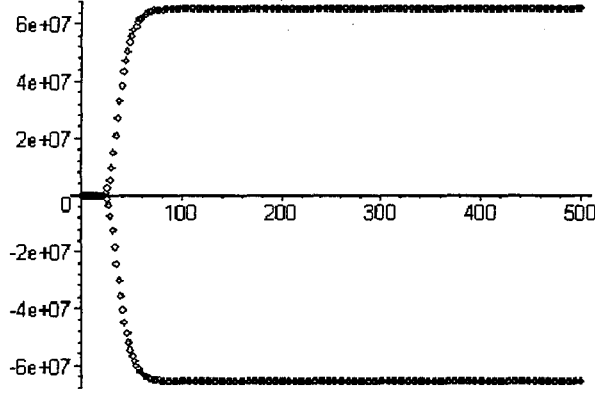


Şekil 4.10: (4.1.2) nin $g(u) = u^5$ olmak üzere $h = 0.5, \theta = 0.4$ ve $u_0 = 6$ için ilk 150 adımı

Örnek 4.5 $g(u) = u \ln(1+|u|)$ fonksiyonu da pozitif süperlineer bir fonksiyondur ve $\theta > \frac{1}{2}$ için (4.1.2) fark denklemi 2 periyodlu çözümlere sahiptir. Aşağıdaki grafiklerde $u_0 = 1$ başlangıç noktası için yörüngeler verilmektedir.



Şekil 4.11: (4.1.2) nin $g(u) = u \ln(1 + |u|)$ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 0.75$ ve $u_0 = 1$ için ilk 150 adımı

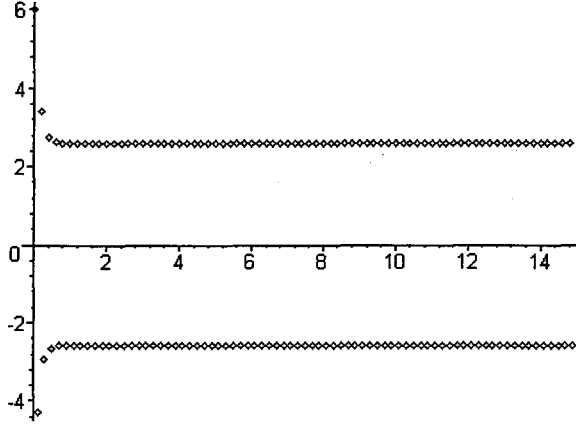


Şekil 4.12: (4.1.2) nin $g(u) = u \ln(1 + |u|)$ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 1$ ve $u_0 = 1$ için ilk 500 adımı

Örnek 4.6 Başka bir pozitif süperlineer fonksiyon $g(u) = u^3$ için (4.1.2) fark denkleminin bir çözümü aşağıdaki gibidir. Bu fonksiyon için kararlı olan 2 periyodlu çözümler

$$\left(\sqrt{\frac{-2}{h(1-2\theta)}}, -\sqrt{\frac{-2}{h(1-2\theta)}} \right)$$

biçimindedir.



Şekil 4.13: (4.1.2) nin $g(u) = u^3$ olmak üzere $h = 0.5, \theta = 0.8$ ve $u_0 = 6$ için ilk 150 adımı

Aşağıdaki teorem de g negatif süperlineer olduğunda 2 periyodlu çözümün var olması için gerek ve yeter şartın $\theta < \frac{1}{2}$ olduğunu söylüyor.

Teorem 4.5 g negatif süperlineer olmak üzere (4.1.2) fark denklemini düşünelim.

1. Uygun küçüklükteki h değerleri için $g(v)$ ile $g(w)$ 0 dan uzakta sınırlı olmak üzere sürekli olarak h ye bağlı olan (v, w) 2 periyodlu çözümün var olması için gerekli ve yeterli koşul $\theta < \frac{1}{2}$ olmasıdır.
2. $\theta < \frac{1}{2}$ ise metodumuz dissipative değildir yani, öyle bir $K = K(h, \theta)$ vardır ki her $\hat{K} > K$ için (4.1.2) yi sağlayan u_0, u_1 çifti vardır ve $|u_1| > |u_0| = \hat{K}$ olur.

Kanıt.

1. Teorem (4.4) ün ispatına benzer olarak ispatlanır.
2. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\theta = \frac{1}{2} - \varepsilon$ olsun. Verilen bir u_0 için

$$H_0(u) := u - \frac{h}{2}(g(u) + g(u)) + \varepsilon h(g(u) - g(u_0)) - u_0$$

olarak tanımlansın. Açık ki $u \rightarrow \infty$ iken $H_0(u) \rightarrow \infty$ ve $u \rightarrow -\infty$ iken $H_0(u) \rightarrow -\infty$ şeklindedir.

g negatif süperlineer olduğundan öyle bir $K = K(h, \theta)$ vardır ki $g, |u| > K$ için monotondur ve

$$|u| > K \Rightarrow g'(u) < 0, ug(u) < 0, |g(u)| > \frac{|u|}{\varepsilon h} \quad (4.3.16)$$

dir. Şimdi $\hat{u} > K$ yı düşünelim. Eğer $|g(\hat{u})| \geq |g(-\hat{u})|$ ise (4.3.16) dan, $u_0 = \hat{u}$ alarak,

$$H_0(-\hat{u}) := -2\hat{u} - \frac{h}{2}(g(-\hat{u}) + g(\hat{u})) + \varepsilon h(g(-\hat{u}) - g(\hat{u})) > 0$$

olur. Bu yüzden $(-\infty, -\hat{u})$ aralığında H_0 in bir kökü vardır. Diğer taraftan $|g(\hat{u})| < |g(-\hat{u})|$ ise (4.3.16) dan, $u_0 = -\hat{u}$ alarak,

$$H_0(\hat{u}) := 2\hat{u} - \frac{h}{2}(g(\hat{u}) + g(-\hat{u})) + \varepsilon h(g(\hat{u}) - g(-\hat{u})) < 0$$

olur. Bu durumda da (\hat{u}, ∞) aralığında H_0 in bir kökü vardır.

Gösterdik ki her $\hat{K} > K$ için (4.1.2) sağlayan öyle u_0, u_1 çifti vardır ki $|u_1| > |u_0| = \hat{K}$ dir.

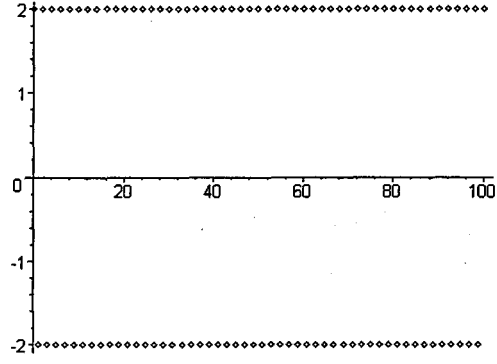
■

Teorem (4.5) in ilk kısmında bahsedilen 2 periyodlu çözüm Teorem (4.3) ten kararsız olmak zorundadır.

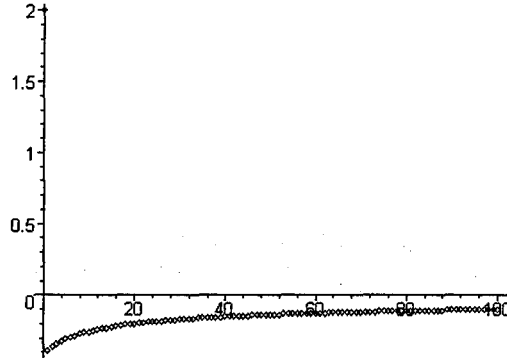
Örnek 4.7 $g(u) = -u^3$ fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyon negatif süperlineer bir fonksiyondur ve uygun h ve θ değeri için (4.1.2) fark denklemi 2 periyodlu çözüme sahiptir. Bu 2 periyodlu çözümler h ve θ ya bağlı olarak

$$\left(\frac{\sqrt{2h - 4h\theta}}{-h + 2h\theta}, \frac{\sqrt{2h - 4h\theta}}{-h + 2h\theta} \right)$$

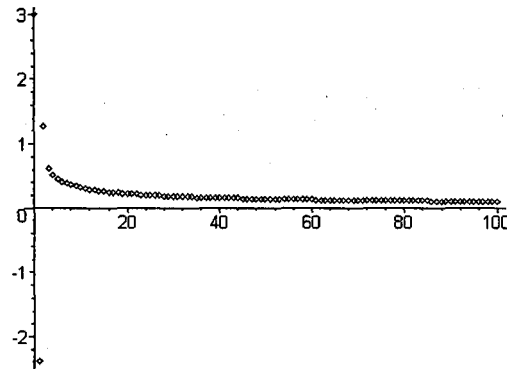
biçimindedir. Fakat bu çözümler itici olduklarından, örneğin $\theta = 0$ için sadece $\sqrt{2/h}$ den başlayan çözümler 2 periyodlu çözüm oluşturur, yakınında başlayan çözümler 0 a gider. 0 kararlı sabit noktadır. Aşağıdaki grafiklerde bazı h ve θ değerleri için yörüngeleri görmekteyiz. Görüldüğü gibi iterasyonlar monoton bir dizi oluşturmamaktadır.



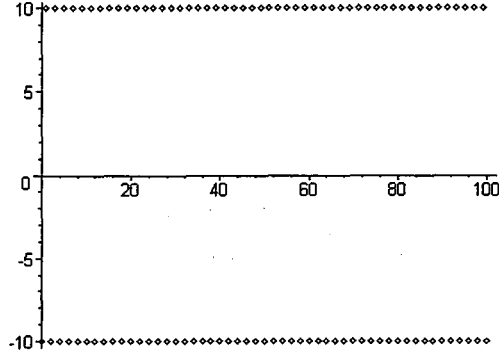
Şekil 4.14: (4.1.2) nin $g(u) = -u^3$ olmak üzere $h = 0.5, \theta = 0$ ve $u_0 = 2$ için ilk 150 adımı



Şekil 4.15: (4.1.2) nin $g(u) = -u^3$ olmak üzere $h = 0.5, \theta = 0.4$ ve $u_0 = 2$ için ilk 100 adımı



Şekil 4.16: (4.1.2) nin $g(u) = -u^3$ olmak üzere $h = 0.5, \theta = 0.4$ ve $u_0 = 3$ için ilk 100 adımı



Şekil 4.17: (4.1.2) nin $g(u) = -u^3$ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 0.4$ ve $u_0 = -10 = \frac{\sqrt{2h-4h\theta}}{-h+2h\theta}$ için ilk 100 adımı

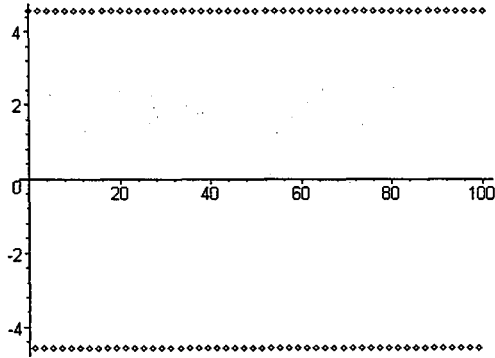
Örnek 4.8 $g(u) = -u(u-1)(u+1)$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon negatif süperlineer bir fonksiyondur ve uygun h ve θ değeri için (4.1.2) fark denklemi 2 periyodlu çözüme sahiptir. Bu 2 periyodlu çözümler h ve θ ya bağlı olarak

$$\left(\frac{\sqrt{h(2\theta-1)(-2-h+2h\theta)}}{-h+2h\theta}, -\frac{\sqrt{h(2\theta-1)(-2-h+2h\theta)}}{-h+2h\theta} \right)$$

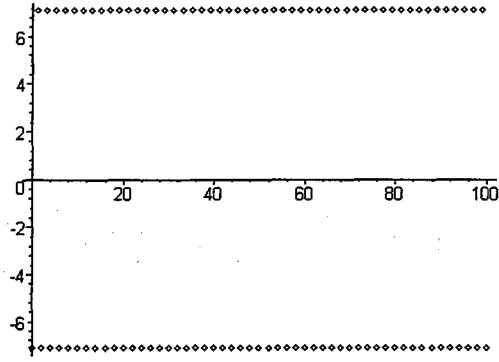
biçimindedir. Yine bu çözümler itici olduklarından, örneğin $\theta = 0$ için sadece

$$\left(\frac{\sqrt{h(2+h)}}{h}, -\frac{\sqrt{h(2+h)}}{h} \right)$$

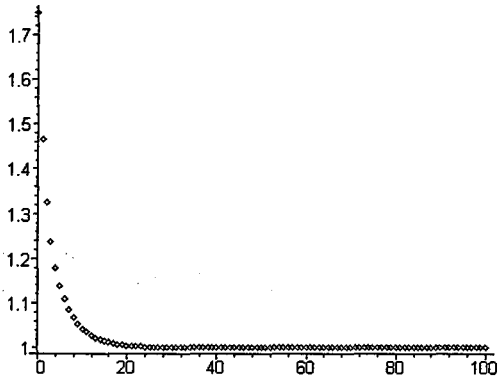
den başlayan çözümler 2 periyodlu çözüm oluşturur, yakınında başlayan çözümler 1 kararlı sabit noktasına gider



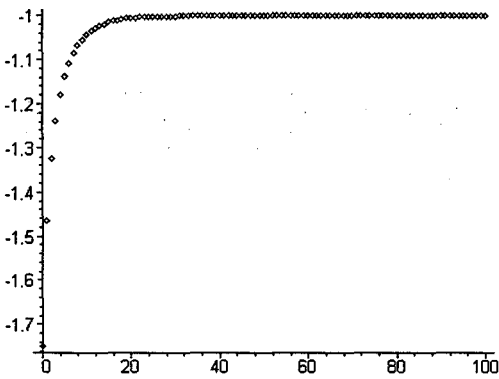
Şekil 4.18: (4.1.2) nin $g(u) = -u(u-1)(u+1)$ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 0$ ve $u_0 = \sqrt{h(2+h)}/h$ için ilk 100 adımı



Şekil 4.19: (4.1.2) nin $g(u) = -u(u - 1)(u + 1)$ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 0.3$ ve $u_0 \approx -7.141428$ için ilk 100 adımı



Şekil 4.20: (4.1.2) nin $g(u) = -u(u - 1)(u + 1)$ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 0.4$ ve $u_0 = 1.75$ için ilk 100 adımı



Şekil 4.21: (4.1.2) nin $g(u) = -u(u - 1)(u + 1)$ olmak üzere $h = 0.1, \theta = 0.4$ ve $u_0 = -1.75$ için ilk 100 adımı

Yardımcı Teorem 4.2 $g \in C^1$ tek fonksiyon ve her u için $g'(u) < 0$ olsun. Bu durumda $\theta > \frac{1}{2}$ için (4.1.2) fark denkleminin ürettiği her $\{u_j\}_{j=0}^{\infty}$ çözüm dizisi için $j \rightarrow \infty$ iken $|u_j|$ monoton olarak 0 a gider.

Kanıt. Önce $u_{j-1} = 0$ ise $u_j = 0$ olduğuna dikkat çekelim. Varsayalım $u_{j-1} > 0$ olsun. Eğer $u_j > 0$ ise g tek fonksiyon ve her u için $g'(u) < 0$ olduğundan $g(0) = 0$ ve buradan $g(u_j) < 0$ ve $g(u_{j-1}) < 0$ olur. O halde (4.1.2) için

$$u_j = u_{j-1} + h(\theta g(u_j) + (1 - \theta)g(u_{j-1})) < u_{j-1}$$

olur. $u_j < 0$ olsun. Varsayalım $|u_j| > |u_{j-1}|$ olsun, bu durumda $g(u_j) > -g(u_{j-1})$ dir. Çünkü $|u_j| > |u_{j-1}|$ ise $-u_{j-1} > u_j$ dir ve $g'(u) < 0$ olduğundan g azalandır ve buradan da g tek fonksiyon olduğundan $g(-u_{j-1}) < g(u_j)$ ise $g(u_j) > -g(u_{j-1})$ dir.

Buradan

$$\theta g(u_j) > -(1 - \theta)g(u_{j-1})$$

dir ($\theta > \frac{1}{2}$ olduğundan yazılabilir). $\theta g(u_j)$ terimi yerine daha küçük olan $-(1 - \theta)g(u_{j-1})$ terimini yazarsak

$$\begin{aligned} 0 &> u_j = u_{j-1} + h(\theta g(u_j) + (1 - \theta)g(u_{j-1})) \\ &> u_{j-1} + h(-(1 - \theta)g(u_{j-1}) + (1 - \theta)g(u_{j-1})) \\ &> u_{j-1} > 0 \end{aligned}$$

olur ki $0 > 0$ çelişkisi meydana gelir. O halde biz $u_{j-1} > 0$ ise $|u_j| < |u_{j-1}|$ olduğunu gösterdik. Benzer olarak $u_{j-1} < 0$ ise $|u_j| < |u_{j-1}|$ olduğu da kolayca gösterilir. Bu yüzden $u_{j-1} \neq 0$ ise $|u_j| < |u_{j-1}|$ olur.

$\{|u_j|\}_{j=0}^{\infty}$ sınırlı olduğundan, limiti u^* olan bir alt dizisinin limitine yakınsar. (4.1.2) den $g(u^*) = 0$ ise $u^* = 0$ olur (u^* bir u_k alt dizisinin limiti ise u^* kararlı sabit nokta olur. O halde $g(u^*) = 0$ ise $u^* = 0$ olduğu açıktır).

Monotonluk da; $\{|u_j|\}_{j=0}^{\infty}$ şeklindeki tüm dizilerin aynı limit noktasına sahip olması zorunluluğundan gelmektedir. ■

Teorem 4.6 g pozitif sublineer olmak üzere (4.1.2) fark denklemini düşünelim.

1. Küçük h değerleri için 2 periyodlu çözüm yoktur.
2. Eğer $g(u_0) \neq 0$ ise yeterince küçük h değerleri için herhangi bir $\{u_j\}_{j=0}^{\infty}$ nümerik çözüm dizisi monotondur ve $j \rightarrow \infty$ iken $|u_j| \rightarrow \infty$ olur.

Kanıt.

1. (v, w) 2 periyodlu çözüm ise $\theta \neq \frac{1}{2}$ dir ve z, v ile w arasında bir nokta olmak üzere (4.3.13) e Ortalama Değer Teoremini uygularsak

$$g'(z) = \frac{1}{h(\frac{\theta}{2} - 1)} \quad (4.3.17)$$

olur. g sublineer olduğundan yeterince küçük h değerleri için bu durum sağlanmaz. Buradan (4.3.13) sağlanmadığından istenilen elde edilmiş olur.

2. Teorem (4.4) ün ispatına benzer olarak ispat yapılır. (4.3.15) eşitliğinden elde ettiğimiz ifade g pozitif sublineer olduğundan $(1 - \theta h g'(z_j)) > 0$ olarak bulunur ki bu da istenileni verir.

■

Teorem 4.7 g negatif sublineer olmak üzere (4.1.2) fark denklemini düşünelim.

1. Küçük h değerleri için 2 periyodlu çözüm yoktur.
2. Yeterince küçük h değerleri için herhangi bir $\{u_j\}_{j=0}^{\infty}$ nümerik çözüm dizisi monotondur ve $j \rightarrow \infty$ iken $|u_j| \rightarrow 0$ olur.

Kanıt.

1. (4.3.17) den bu kısım açıktır.

2. $u_{j-1} \neq 0$ nontrivial durumunu düşünelim. g sublineer olduğundan ve $g(0) = 0$ olduğundan $\forall u$ için

$$|g(u)| \leq D |u| \quad (4.3.18)$$

olur.

$$h \leq \frac{1}{2D} \quad (4.3.19)$$

seçelim. (4.3.15), (4.3.18) ve (4.3.19) dan

$$\begin{aligned} |u_j - u_{j-1}| &= \left| \frac{hg(u_{j-1})}{1 - \theta hg'(z_j)} \right| \\ &\leq h |g(u_{j-1})| \\ &\leq \frac{1}{2D} D |u_{j-1}| = \frac{|u_{j-1}|}{2} \end{aligned}$$

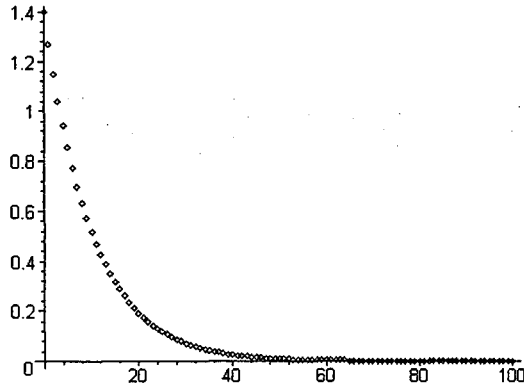
olur. Buradan u_j ve u_{j-1} nin her zaman aynı işaretli olması gerektiği kolayca görülebilir. (4.3.15) den

$$\text{sgn}(u_j - u_{j-1}) = \text{sgn}(g(u_{j-1})) = -\text{sgn}(u_{j-1})$$

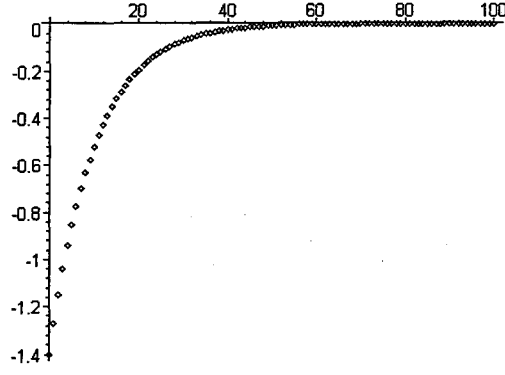
dir. Buradan $|u_j| < |u_{j-1}|$ olur ve istenilen sonuç elde edilir.

■

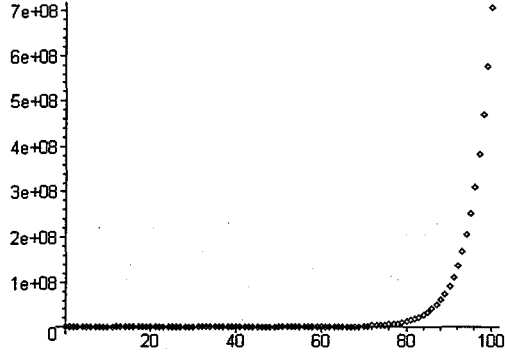
Örnek 4.9 $g(u) = -u$ fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyon negatif sublineer bir fonksiyondur. Pozitif sublineer bir fonksiyona bir örnek de $g(u) = 2u - \frac{u}{|u|}$ fonksiyonudur. Aşağıdaki grafiklerde farklı başlangıç noktaları ve her bir fonksiyon için (4.1.2) fark denkleminin yörüngeleri verilmiştir.



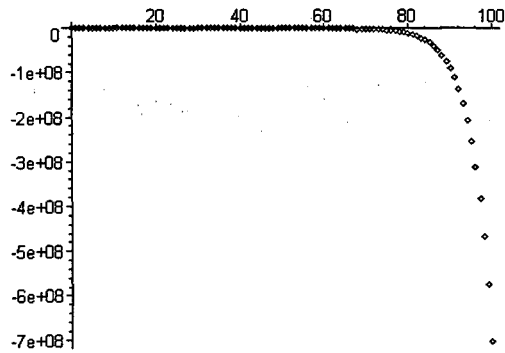
Şekil 4.22: (4.1.2) nin $g(u) = -u$ olmak üzere $u_0 = 1.4, \theta = 0.6, h = 0.1$ için ilk 100 adımı



Şekil 4.23: (4.1.2) nin $g(u) = -u$ olmak üzere $u_0 = -1.4, \theta = 0.6, h = 0.1$ için ilk 100 adımı



Şekil 4.24: (4.1.2) nin $g(u) = 2u - \frac{u}{|u|}$ olmak üzere $u_0 = 1.4, \theta = 0.6, h = 0.1$ için ilk 100 adımı



Şekil 4.25: (4.1.2) nin $g(u) = 2u - \frac{u}{|u|}$ olmak üzere $u_0 = -1.4, \theta = 0.6, h = 0.1$ için ilk 100 adımı

KAYNAKLAR

1. HALE, J. ve KOÇAK, H., *Dynamics and Bifurcations*, New York: Springer-Verlag, (1991).
2. DEMİR, B., *Dinamik Sistemler ve Nöron Siklusları*, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, Türkiye (1999).
3. VERHULST, F., *Nonlinear Differential Equation and Dynamical Systems*, Berlin: Springer-Verlag, (1990).
4. BRAUN, M. ve HERSHENOW, J. , *Periodic Solutions of Finite Difference Equations*, Quarterly of Applied Mathematics, **35**, 139-147 (1977).
5. BEYN, W.J., *On Invariant Closed Curves for One-Step Methods*, Numer. Math., **51**, 103-122 (1987).
6. HALE, J., *Ordinary Differential Equations*, New York: John Wiley, (1969).
7. BARCLAY, G.J., GRIFFITHS, D.F. ve HIGHAM, D.J., *Theta Methods Dynamics*, J. Comput. Math., **3**, 27-43 (2000).