KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SÜREKLİLİĞİ

Mehmet Ali AKINLAR

Yüksek Lisans Tezi

Temmuz - 2002

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Mehmet Ali AKINLAR'ın Küme Değerli Dönüşümlerin Sürekliliği başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans tezi 29.07.2002 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı - Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	Prof.Dr. Yalçın KÜÇÜK	
Üye	Prof.Dr. Orhan ÖZER	
Üye	Doç.Dr. Vakıf CAFEROV	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 31.07.2002 tarih ve 26/8 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Orhan ÖZER
Fen Bilimleri Enstitüsü
Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SÜREKLİLİKLERİ

MEHMET ALİ AKINLAR

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Yalçın Küçük

2002, 54 Sayfa

Dört bölümden oluşan bu çalışmada küme dizilerinin yakınsamaları ve bunların bazı özellikleri, hiper uzaylar üzerinde tanımlanan Hausdorff ve Vietoris topolojiler ve bunların karşılaştırılışı ve bu topolojilere göre küme değerli dönüşümlerin süreklilikleri konuları üzerinde durulmuştur. Çalışmanın ilk bölümünde topolojik uzay ve metrik kavramları tanıtılmış, diğer bölümlerde kullanılacak çeşitli bilgiler kanıtlarıyla verilmiş ve Hausdorff metrik tanıtılmıştır. İkinci bölümde topolojik uzaylar ve metrik uzaylarda küme dizilerinin Kuratowski ve Hausdorff yakınsamaları ve özellikleri detaylı olarak incelenmiştir. Üçüncü bölüm hiper uzaylar üzerinde tanımlanan, Hausdorff topoloji ve Vietoris topolojiler tanıtılmış ve hangi koşullar altında birbirleriyle uyumlu oldukları verilmiştir. Dördüncü ve son bölümde küme değerli dönüşümlerin Vietoris ve Hausdorff süreklilikleri tanıtılmış, çeşitli karakterizasyonları verilip özellikleri incelenmiştir. Ayrıca küme değerli dönüşümlerin grafiklerinin kapalı olması ile bu süreklilikler arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Son olarak bu iki süreklilik tipi birbirleriyle karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Küme değerli dönüşüm, Alttan-üstten yarı süreklilik.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

CONTINUITY OF SET VALUED MAPS

MEHMET ALİ AKINLAR

Anadolu Universty

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Prof.Dr.Yalçın KÜÇÜK

2002, 54 pages

In this work, which consist of four chapters, some properties of converges sequences of sets, Hausdorff and Vietories topologies defined on hyperspaces and Hausdorff and Vietories continuties of set valued maps have been studied. In the first chapter, some important definitions, theorems with proofs and metrics are given. The second chapter deals with Kuratowski and Hausdorff convergences of sequences of sets. The definitions and some properties of this type convergences sequences have been given. The third chapter concerns with Hausdorff and Vietories topologies defined on hyperspaces. Some properties and relationships between these topologies have been investigated. In the last section, Hausdorff and Vietories continuties of set valued maps and various characterizations of these types continuities have been studied. Also, relationship between closednes of graphs of set valued maps and these continuities have been given. As a result, these two continuity types have been compared with each other.

Keywords: Set valued maps, Lower-Upper semi continuous.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen Prof.Dr. Yalçın Küçük'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

İçindekiler

ÖZET i

ABSTRACT ii

TEŞEKKÜR iii

İÇİNDEKİLER iv

1 ÖNBİLGİLER

TEMEL TANIM VE TEOREMLER **1**

2 KÜME DİZİLERİNİN YAKINSAMASI **11**

3 KÜMELER AİLESİ ÜZERİNDE HAUSDORFF VE VİETORİS TOPOLOJİLERİ **19**

3.1 Hausdorff Topoloji 19

3.2 Vietoris Topoloji 21

3.3 Hausdorff Ve Vietoris Topolojilerinin Karşılaştırılışı 24

4 KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SÜREKLİLİKLERİ **26**

4.1 Küme Değerli Dönüşümlerle İlgili Temel Tanımlar Ve Özellikler 26

4.2 Küme Değerli Dönüşümlerin Vietoris Sürekliliği 30

4.3 Küme Değerli Dönüşümlerin Hausdorff Sürekliliği 47

4.4 Hausdorff Ve Vietoris Sürekliliğin Karşılaştırılışı 49

KAYNAKLAR **53**

1 ÖNBİLGİLER

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1 *X herhangi bir küme 2^X, X in kuvvet kümesi olmak üzere $\tau \subseteq 2^X$ ailesi verilsin.τ ailesi aşağıdaki özelliklere sahipse τ ya X üzerinde bir topoloji denir.*
$T_1 : \emptyset, X \in \tau$
$T_2 : \{U_i : i \in I\} \subset \tau$ *için* $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \tau$
$T_3 : \{U_i : i = 1, 2, ., n\} \subset \tau$ *için* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau$
Kısaca 2^X in $\emptyset$ ve X i bulunduran sonlu arakesit ve herhangi bir birleşime kapalı olan bir alt kümesine X üzerinde bir topoloji denir.τ, X üzerinde herhangi bir topoloji ise (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir.

Örnek 1.1 *$X \neq \emptyset$ herhangi bir küme olmak üzere $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$, $\tau_2 = 2^X$, $\tau_3 = \{A \subset X : X \backslash A$ sonlu $\} \cup \{\emptyset\}$ aileleri X üzerinde birer topolojidirler.*
Bunlara sırasıyla ayrık olmayan ,ayrık ve sonlu tümleyenler topolojisi denir.

Tanım 1.2 *X herhangi bir küme olsun.$d : X \times X \to [0, \infty)$, $(x, y) \to d(x, y)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, d ye X üzerinde bir metriktir denir.*
M_1 *:Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$*
M_2 *:Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$*
M_3 *:Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$*
M_4 *:Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$*
d, X üzerinde bir metrik ise (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir.
$X \times X$ üzerindeki d fonksiyonu M_3 koşulu hariç diğer koşulları sağlıyorsa d ye X üzerinde bir pseudo metrik denir.
d fonksiyonu M_2 koşulu hariç diğer koşulları sağlıyorsa d ye X üzerinde bir quasi metrik denir.

Örnek 1.2 *$X = \mathbb{R}$ üzerinde,* $d(x, y) = \begin{cases} 0 & ; \ x \leq y \text{ ise} \\ \min\{|x - y|, 1\} & ; \ x > y \text{ ise} \end{cases}$

bir pseudo quasi metriktir.

Tanım 1.3 *(X,d) bir metrik uzay $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.*
$B_d(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}, B_d[x,\varepsilon] = \{y \in X : d(x,y) \leq \varepsilon\}$,
$S_d(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) = \varepsilon\}$ *kümelerine sırasıyla x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar,kapalı yuvar ve yuvar yüzeyi denir.*
İki nokta arasındaki uzaklık tanımını kullanarak bir noktanın bir kümeye olan uzaklığını tanımlayabiliriz.

Tanım 1.4 *(X,d) bir metrik uzay $x \in X$ ve A, X in boş olmayan herhangi bir alt kümesi olsun.Bu durumda $d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$ sayısına x in A kümesine uzaklığı denir.Ayrıca $d(x,\emptyset) = +\infty$ olarak tanımlanır.*
$x \in A$ ise $d(x,A) = 0$ olduğu açıktır.$x \notin A$ olsa bile $d(x,A) = 0$ olabilir.
$d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\} = \inf\{d(a,x) : a \in A\} = d(A,x)$ olduğu açıktır.

Örnek 1.3 *$X = \mathbb{R}$ üzerindeki, $d(x,y) = |x-y|$ metriğini ve $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ kümesini göz önüne alalım.*
$0 \notin A$ dır fakat $d(0,A) = 0$ dır.

Şimdide iki küme arasındaki Hausdorff uzaklık tanımını verelim.

Hausdorff uzaklığı ilk olarak Hausdorff [6] tarafından tanıtıldı.Hausdorff uzaklığı ile ilgili gösterimler ve bu uzaklığın bir çok özelliği Aubin[1], Berge [2], Kuratowski [11], Castaing-Valadier [4], Kelley[8], Klein-Thompson [9] ve Ksielewicz [10] de bulunabilir.

(X,d) bir metrik uzay $A, C \subset X$ herhangi iki küme olsun.
$h^*(A,C) = \sup\{d(a,C) : a \in A\}$ ve $h^*(C,A) = \sup\{d(c,A) : c \in C\}$ olmak üzere $h(A,C) = \max\{h^*(A,C), h^*(C,A)\}$ olarak tanımlayalım. $h : 2^X \times 2^X \to [0,\infty]$ fonksiyonu iki kümeyi, bu iki kümenin Hausdorff uzaklığı diye bilinen bir sayıya taşır.

h, 2^X ailesi üzerinde bir metrik değildir.Çünkü $A \neq C$ olsa bile $h(A,C) = 0$ olabilir. Ayrıca $h(A,C) = +\infty$ olabilir.

Örnek 1.4 $(X,d) = (\mathbb{R}, d_{st})$ *metrik uzayında* $A = (0,1), C = [0,1)$ *alınırsa* $h(A,C) = 0$ *dır.*$A = \{0\}$, $C = [0,\infty)$ *alınırsa* $h(A,C) = +\infty$ *dur.*

Önerme 1.1 (X,d) *bir metrik uzay,*$A, C \subset X$ *herhangi iki küme olsun.* $h : 2^X \backslash \{\emptyset\} \times 2^X \backslash \{\emptyset\} \to [0,\infty]$, $h(A,C) = \max\{h^*(A,C), h^*(C,A)\}$ *fonksiyonu olarak tanımlanan h fonksiyonu* 2^X *üzerinde genişletilmiş bir pseudo metriktir.*

Kanıt. h nin $A, B, C \in 2^X$ olmak üzere

$a)h(A,A) = 0$

$b)h(A,C) = h(C,A)$

$c)h(A,C) \leq h(A,B) + h(B,C)$ özelliklerine sahip olduğunu göstereceğiz.

$a)$ ve $b)$ nin kanıtları açıktır.$c)$ yi kanıtlayalım

$A, B, C \in 2^X$ için

$$h(A,B) \leq h(A,C) + h(C,B)$$

olduğunu göstermeliyiz.

Önce $h^*(A,B) \leq h^*(A,C) + h^*(C,B)$ olduğunu gösterelim.

Herhangi bir $a \in A$ ve her $c \in C$ için

$$\begin{aligned} d(a,B) &= \inf\{d(a,b) : b \in B\} \\ &\leq \inf\{d(a,c) + d(c,b) : b \in B\} \\ &= d(a,c) + \inf\{d(c,b) : b \in B\} \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned} d(a,B) &\leq \inf\{d(a,c) : c \in C\} + \sup\{\inf\{d(c,b) : b \in B\} : c \in C\} \\ &= d(a,C) + h^*(C,B) \end{aligned}$$

olur ki buradan da

$$h^*(A,B) \leq h^*(A,C) + h^*(C,B)$$

yazabiliriz. Benzer olarak

$$h^*(B,A) \leq h^*(B,C) + h^*(C,A)$$

yazabiliriz.O halde

$$\begin{aligned} h(A,B) &= \max\{h^*(A,B), h^*(B,A)\} \\ &\leq \max\{h^*(B,C), h^*(C,B)\} + \max\{h^*(A,C), h^*(C,A)\} \\ &= h(B,C) + h(A,C) \end{aligned}$$

olur. ■

Önerme 1.2 *(X,d) bir metrik uzay ve $A, B \subset X$ herhangi iki küme olsun.Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir.*
a) $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow d(x,A) = 0$ dır.
b)Her $x \in X$ için $d(x,A) = d(x,B)$ dir.$\Longleftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$ dır.

Kanıt. *a)* $z \in \{x \in X : d(x,A) = 0\}$ olsun.Bu durumda $d(z,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\} = 0$ dır.$\varepsilon > 0$ için inf tanımı gereği $\exists y_\varepsilon \in A$ vardır $\ni d(z, y_\varepsilon) < \varepsilon$ olur.Buradan $y_\varepsilon \in B_d(z,\varepsilon)$ olur.Böylece $y_\varepsilon \in A \cap B_d(z,\varepsilon)$ olur.Bu her $\varepsilon > 0$ için doğru olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $A \cap B_d(z,\varepsilon) \neq \emptyset$ olur.$z \in \overline{A}$ dır.Böylece

$$\{x \in X : d(x,A) = 0\} \subset \overline{A} \tag{1}$$

olur.
Tersine $z \notin \{x \in X : d(x,A) = 0\}$ alalım.Buradan $d(A,z) = \varepsilon > 0$ olan bir $\varepsilon > 0$ vardır.Diğer taraftan $A \cap B_d(z, \frac{\epsilon}{2}) = \emptyset$ olur ki $z \notin \overline{A}$ demekdir.

Böylece

$$\overline{A} \subset \{x \in X : d(x, A) = 0\} \tag{2}$$

bulunur.

(1) ve (2) den $\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$ olur.

$b)(\Longrightarrow) x \in \overline{A}$ alalım.$a)$ şıkkından dolayı $d(x, A) = 0$ dır.$d(x, A) = d(x, B)$ olduğundan $d(x, B) = 0$ dır.$x \in \overline{B}$ dır.Buradan $\overline{A} \subset \overline{B}$ dır.

Benzer olarak $\overline{A} \supset \overline{B}$ olduğuda gösterilebilir.Bu ikisinden $\overline{A} \equiv \overline{B}$ olur.

$(\Longleftarrow)\overline{A} = \overline{B}$ olsun.Her $x \in X$ için $d(x, A) = d(x, B)$ olduğunu göstermeliyiz.$A \subset \overline{A}$ olduğundan infimum tanımı gereği

$$d(x, \overline{A}) \leq d(x, A) \tag{1}$$

olur. $d(x, \overline{A}) < d(x, A)$ olamayacağını gösterelim. Kabul edelim ki $d(x, \overline{A}) = \inf\{d(x, a) : a \in \overline{A}\} = \alpha_1$ ve $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\} = \alpha_2$ olmak üzere $\alpha_1 < \alpha_2$ olsun. Bu durumda $\varepsilon = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{4}$ dersek inf tanımı gereği en az bir $a_* \in \overline{A}$ vardır öyle ki $d(x, a_*) < \alpha_1 + \varepsilon = \alpha_1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{4}$ olur.

Diğer taraftan $a_* \in \overline{A}$ olduğundan bu $\varepsilon > 0$ için en az bir $a_0 \in A$ vardır öyle ki $d(a_0, a_*) < \varepsilon$ dur. Buradan $d(x, a_0) \leq d(x, a_*) + d(a_*, a_0) < \alpha_{1+}\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{4} < \alpha_2$ dir. $a_0 \in A$ olduğundan $\alpha_2 = d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\} < \alpha_2$ olur ki buda bir çelişkidir. Bu çelişkiye $\alpha_2 < \alpha_1$ almakla düştük. O halde

$$d(x, \overline{A}) \geq d(x, A) \tag{2}$$

olur. Böylece (1) ve (2) den $d(x, A) = d(x, \overline{A})$ olur. ∎

Tanım 1.5 *(X, d) bir metrik uzay $A, C \subset X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.*
Bu durumda $B_d(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\} = A_\varepsilon$ kümesine A nın açık ε komşuluğu ve $B_d[A, \varepsilon] = \{x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon\}$ kümesine A nın kapalı ε komşuluğu denir.

Önerme 1.3 *$\varepsilon > 0$ ve herhangi bir $A \subset X$ verilsin.Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

a)$B_d(A,\varepsilon) = A_\varepsilon$ açık bir kümedir.

b)$B_d[A,\varepsilon]$ kümesi kapalı bir kümedir.

Kanıt. *a)*$x \in B_d(A,\varepsilon)$ olsun.$d(x,A) < \varepsilon$ olur. $0 < \delta < \varepsilon - d(x,A)$ seçersek $B_d(x,\delta) \subseteq B_d(A,\varepsilon)$ olur.Gerçekten $y \in B_d(x,\delta)$ için $d(x,y) < \delta$ dır.Diğer taraftan $d(y,A) = d(A,y) \leq d(A,x) + d(x,y) \leq d(A,x) + \delta < d(A,x) + \varepsilon - d(A,x) = \varepsilon$ dur. Buradan $d(A,y) < \varepsilon$ olur ki $y \in B_d(A,\varepsilon)$ demektir.Böylece $B_d(x,\delta) \subset B_d(A,\varepsilon)$ bulunur.O halde $B_d(A,\varepsilon)$ açıktır.

b)$B_d[A,\varepsilon]$ nun kapalı küme olduğunu gösterebilmek için tümleyeninin açık olduğunu gösterelim.

$x \in X \backslash B_d[A,\varepsilon]$ alalım.$d(A,x) > \varepsilon$ dur.$0 < \eta < d(A,x) - \varepsilon$ alınırsa $B_d(x,\eta) \subset X \backslash B_d[A,\varepsilon]$ olur.Gerçekten $y \in B_d(x,\eta)$ ise $d(x,y) < \eta$ olur.

$$\begin{aligned} d(A,x) &\leq d(A,y) + d(y,x) \\ &< d(A,y) + \eta \\ &< d(A,y) + d(x,A) - \varepsilon \end{aligned}$$

Buradan $d(A,y) > \varepsilon$ olur ki bu $y \notin B_d[A,\varepsilon]$ yani y$\in X \backslash B_d[A,\varepsilon]$ demektir.Böylece $B_d(x,\eta) \subset X \backslash B_d[A,\varepsilon]$ olur.O halde $X \backslash B_d[A,\varepsilon]$ açık bir küme dolayısıyla $B_d[A,\varepsilon]$ kapalı kümedir. ■

Önerme 1.4 *(X,d) bir metrik uzay $A \subset X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.Bu durumda*

a)$\overline{B_d(A,\varepsilon)} \subset B_d[A,\varepsilon]$ dur.

b)$B_d(A,\varepsilon) \subset (B_d[A,\varepsilon])^\circ$ dir.

c)$(\partial B_d(A,\varepsilon) \cup \partial B_d[A,\varepsilon]) \subset S_d(A,\varepsilon)$ dir.

d)$\varepsilon < \delta$ ise $B_d[A,\varepsilon] \subset B_d(A,\delta)$ dur.

Kanıt. $a) B_d(A,\varepsilon) \subset B_d[A,\varepsilon]$ olduğundan $\overline{B_d(A,\varepsilon)} \subset \overline{B_d[A,\varepsilon]}$olur.$B_d[A,\varepsilon]$ kapalı küme olduğundan $\overline{B_d[A,\varepsilon]} = B_d[A,\varepsilon]$ olur ki bu da istenileni verir.Yani $\overline{B_d(A,\varepsilon)} \subset B_d[A,\varepsilon]$ dur.

$b)$ $(B_d(A,\varepsilon))^\circ \subset (B_d[A,\varepsilon])^\circ$ ve $B_d(A,\varepsilon)$ açık bir küme olduğundan $B_d(A,\varepsilon) \subset (B_d[A,\varepsilon])^\circ$ dir.

$c) \partial B_d(A,\varepsilon) \cup \partial B_d[A,\varepsilon] = [\overline{B_d(A,\varepsilon)} \backslash B_d(A,\varepsilon)] \cup [B_d[A,\varepsilon] \backslash ([B_d[A,\varepsilon])^\circ]$

$\subseteq [B_d[A,\varepsilon] \backslash B_d(A,\varepsilon)] \cup [B_d[A,\varepsilon] \backslash ([B_d(A,\varepsilon)]^\circ = B_d[A,\varepsilon] \backslash B_d(A,\varepsilon) = S_d(A,d)$ olur.

$d)$ $\varepsilon < \delta$ olsun.$x \in B_d[A,\varepsilon]$ alalım.$\Rightarrow d(A,x) \leq \varepsilon < \delta \Rightarrow d(A,x) < \delta \Rightarrow x \in B_d(A,\delta)$ bulunur ki bu $B_d[A,\varepsilon] \subset B_d(A,\delta)$ demektir. ■

Önerme 1.5 *(X,d) bir metrik uzay, $A \subset X$, azalan ve $\varepsilon_n \to 0$ olan pozitif sayıların bir $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için*
$\overline{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_d(A,\varepsilon_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_d[A,\varepsilon_n]$ *dır.*

Kanıt. $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ için $A \cap B_d(x,\varepsilon) \neq \emptyset$

$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ için $\{x\} \cap B_d(A,\varepsilon) \neq \emptyset \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ için $x \in B_d(A,\varepsilon) \subset B_d[A,\varepsilon]$

$\forall\varepsilon > 0$ için $0 \leq d(x,A) \leq \varepsilon$ olur.

$\varepsilon = \varepsilon_n$ alırsak,

$\varepsilon_n \to 0$ olmak üzere $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_d(A,\varepsilon_n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_d[A,\varepsilon_n]$ olur.Böylece

$$\overline{A} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} B_d(A,\varepsilon_n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_d[A,\varepsilon_n] \tag{1}$$

bulunur.

$x \notin \overline{A}$ olsun.Önerme 1.2 ye göre $\exists\varepsilon_0 > 0$ için $A \cap B_d(x,\varepsilon_0) = \emptyset \Longleftrightarrow \{x\} \cap B_d(A,\varepsilon_0) = \emptyset$

$\Longleftrightarrow x \notin B_d(A,\varepsilon_0)$ dır.Buradan $\varepsilon_n < \varepsilon_0$ olan bir ε_n dizisi için $x \notin B_d[A,\varepsilon_n]$ olduğu açıktır.

Çünkü $B_d[A,\varepsilon_n] \subset B_d(A,\varepsilon_0)$ dır.$\varepsilon_n < \varepsilon_0$ ve $\varepsilon_n \to 0$ olan azalan bir $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için
$x \notin \bigcap\limits_{\varepsilon_n<\varepsilon_0}^{\infty} B_d[A,\varepsilon_n]$ olur.Buradan

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_d(A,\varepsilon_n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_d[A,\varepsilon_n] \subset \overline{A} \tag{2}$$

olur
Böylece (1) ve (2) den $\overline{A} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_d(A,\varepsilon_n) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_d[A,\varepsilon_n]$ elde edilir. ■

Önerme 1.6 (X,d) *bir metrik uzay* $A \subset X$ *olsun.Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.*
a)$B_d(B_d[A,\varepsilon],\delta) \subset B_d(A,\varepsilon+\delta)$
b)$E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_d^{(n)}(A,\varepsilon)$ *hem açık hem de kapalıdır.(Burada* $B_d^{(n)}(A,\varepsilon) = B_d(B_d^{(n-1)}(A,\varepsilon),\varepsilon)$ *dur.)*

Kanıt. *a)*$x \in B_d(B_d[A,\varepsilon],\delta)$ ise $d(B_d[A,\varepsilon],x) < \delta$ dır.$B_d[A,\varepsilon]$ kapalı küme olduğundan $\exists y_\delta \in B_d[A,\varepsilon]$ vardır öyle ki
$d(B_d[A,\varepsilon],x) = \inf\limits_{y\in B_d[A,\varepsilon]} d(x,y) \leq d(x,y_\delta) < \delta$ olurBöylece $d(x,A) \leq d(x,y_\delta) + d(y_\delta,A) < \delta + d(y_\delta,A) < \delta+\varepsilon$ olacağından $x \in B_d(A,\varepsilon+\delta)$ olur.$B_d(B_d[A,\varepsilon],\delta) \subset B_d(A,\varepsilon+\delta)$ elde edilir.
b)$E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_d^{(n)}(A,\varepsilon)$ kümesinde birleşime giren $B_d^{(n)}(A,\varepsilon)$ kümeleri açıktır.Açık kümelerin herhangi bir birleşimide açık olduğundan E kümesi açıktır.
Şimdi E nin kapalı olduğunu görelim.$E \cap B_d(X\backslash E,\varepsilon) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [B_d^{(n)}(A,\varepsilon) \cap B_d(X\backslash E,\varepsilon)] \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [B_d^{(n)}(A,\varepsilon) \cap B_d(X\backslash B_d^{(n+1)}(A,\varepsilon),\varepsilon)] = \emptyset$ dir.Çünkü $\forall n \in \mathbb{N}$ için $B_d^{(n+1)}(A,\varepsilon) \subset E$ ve $X\backslash E \subset X\backslash B_d^{(n+1)}(A,\varepsilon)$ olur.Buradan $B_d(X\backslash E,\varepsilon) \subset B_d(X\backslash B_d^{(n+1)}(A,\varepsilon),\varepsilon)$ olur.
$E \cap X\backslash E \subset B_d(E,\varepsilon) \cap (X\backslash E) = \emptyset$ dir.$\overline{E} \subset E$ dir ve $E = \overline{E}$ olduğundan E kapalıdır.

■

Önerme 1.7 *(X,d) bir metrik uzay $A, C \subset X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.Bu durumda $h^*(A,C) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset C_\varepsilon\}, h^*(C,A) = \inf\{\varepsilon > 0 : C \subset A_\varepsilon\}, h(A,C) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset C_\varepsilon, C \subset A_\varepsilon\}$ dir.*

Kanıt. Tanımlar kullanılarak hemen elde edilir. ∎

Önerme 1.8 *(X,d) bir metrik uzay olmak üzere h fonksiyonu X in kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi olan $\mathcal{P}_{bf}(X)$ üzerinde bir metriktir.*

Kanıt. Önerme 1.1 den açıktır. ∎

Özel olarak bu önerme $\mathcal{P}_f(X)$ yerine X in kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi olan $\mathcal{P}_{bf}(X)$ veya X in kompakt alt kümelerinin ailesi olan $\mathcal{P}_k(X)$ alındığında d metriği ne alınırsa alınsın doğrudur.

Önerme 1.9 *(X,d) bir metrik uzay A, C, X in boştan farklı alt kümeleri ise $h(A,C) = \sup[|d(x,A) - d(x,C)| : x \in X]$ dir.*

Kanıt. $\forall c \in C$ ve $\forall x \in X$ için $d(x,A) \leq d(x,c) + d(c,A)$ dır ve bu yüzden $d(x,A) \leq d(x,C) + h(C,A)$ dır.Benzer şekilde $d(x,C) \leq d(x,A) + h(C,A)$ olduğunu da elde edebiliriz.

Böylece

$$\sup[|d(x,A) - d(x,C)| : x \in X] \leq h(A,C) \tag{1}$$

dir.

Diğer taraftan, $\sup\{d(c,A) : c \in C\} = \sup\{d(c,A) - d(c,C) : c \in C\} \leq \sup[|d(x,A) - d(x,C)|$

$x \in X]$ ve $\sup\{d(a,C) : a \in A\} \leq \sup[|d(x,A) - d(x,C)| : x \in X]$ olur.

$$h(A,C) \leq \sup[|d(x,A) - d(x,C)| : x \in X] \tag{2}$$

(1) ve (2) den $h(A,C) = \sup[|d(x,A) - d(x,C)| : x \in X]$ dir. ■

Uyarı 1.1 *Yukarıdaki teoremden* $h^*(A,C) = \sup[d(x,C) - d(x,A) : x \in X]$ *olduğunu görebiliriz.*

2 KÜME DİZİLERİNİN YAKINSAMASI

Bu bölüm küme dizilerinin çeşitli yakınsama tanımlarına ve bunların karşılaştırılışına ayrılmıştır.

Küme dizilerinin alt ve üst limitleri ilk olarak 1909 da Painleve[14] tarafından tanımlanmış fakat bu kavramlar Kuratowski'nin kitabında yayınlandıktan sonra üne kavuşmuştur.

İleride detaylarına ineceğimiz bu kavramlar kısaca şöyle ifade edilebilir.$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kümeler dizisi olsun.$\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A_n$ alarak oluşturulan tüm $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizilerinin (varsa) limitlerinin kümesine dizinin alt limiti,yığılma noktaları kümesinede dizinin üst limiti denir.Bu kümeler sırasıyla liminfA_n,limsupA_n,yada $\underline{\lim}A_n, \overline{\lim}A_n$ ile gösterilir.

Tanım 2.1 (X,τ) *birHausdorff topolojik uzay ve* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^X\backslash\{\emptyset\}$ *bir küme dizisi olsun.*

a)$\tau - \liminf A_n = \tau{-}\underline{\lim}A_n = \{x \in X : x = \tau - \lim x_n, x_n \in A_n, n \geq 1\}$ *(Yani, terimleri* A_n *lerden seçilen bütün dizilerin limitlerinin kümesi) ile tanımlanan kümeye* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nin* $\tau-$*Kuratowski alt limiti denir.*

b)$\tau - \limsup A_n = \tau - \overline{\lim}A_n = \{x \in X : x = \tau - \liminf x_n, x_n \in A_n, n \geq 1\}$
$= \{x \in X : x = \tau - \lim x_{n_k}, x_{n_k} \in A_{n_k}, n_1 < n_2 < ... < n_k < ..\}$ *(Yani,terimleri* A_n *lerden seçilen dizilerin yığılma noktalarının kümesi) kümesine* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisinin* $\tau-$*Kuratowski üst limiti denir.*

c)$\tau{-}\liminf A_n = \tau{-}\limsup A_n = A$ *ise* A *kümesine* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisinin* $\tau-$*Kuratowski limiti denir ve* $\tau - \lim A_n = A$ *veya* $A_n \overset{\tau-K}{\rightarrow} A$ *ile gösterilir.*

Uyarı 2.1 1)τ *ayrık topoloji ise* $\tau-$*Kuratowski yakınsama küme dizilerinin kümesel anlamda yakınsaması ile çakışır.Bu durumda*

$\tau-\limsup A_n = \bigcap\limits_{k\geq 1}\bigcup\limits_{n\geq k} A_n$ *ve* $\tau-\liminf A_n = \bigcup\limits_{k\geq 1}\bigcap\limits_{n\geq k} A_n$

olur.

2)$\tau-\underline{\lim}A_n \subset \tau-\overline{\lim}A_n$ *olduğu tanımdan açıktır.*

3)X *üzerindeki topolojinin kapalı kümeleri dizisel kapalı kümelerden oluşuyorsa yukarıdaki tanımlar şu şekildede verilebilir.*

a)$\tau-\underline{\lim}A_n = \{x\in X : \forall U\in\mathcal{U}(x)$ *için* $\exists n_0\in\mathbb{N}$ *vardır* $\ni n\geq n_0$ *için* $A_n\cap U\neq\emptyset\}$

b)$\tau-\overline{lim}A_n = \{x\in X : \forall U\in\mathcal{U}(x)$ *ve* $\forall k\in\mathbb{N}$ *için* $\exists n\geq k$ *vardır* $\ni n\geq k$ *için* $A_n\cap U\neq\emptyset\}$

4)X *uzayı 1.sayılabilir ise yukarıdaki (3) deki ifadeler daha önceki tanımlarla çakışır.*

Önerme 2.1 (X,d)*bir metrik uzay ve* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{P}_f(X)$ *ise*

a)$\tau-\underline{\lim}A_n = \{x\in X : \lim\limits_{n\to\infty} d(x,A_n)=0\}$

b)$\tau-\overline{\lim}A_n = \{x\in X : \liminf\limits_{n\to\infty} d(x,A_n)=0\}$

olur.

Kanıt. *a)*$x\in\liminf A_n$ olsun.Bu durumda $\forall n\in\mathbb{N}$ için $x_n\in A_n$ olan bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır ve $x_n\to x$ olur.

$\forall n\in\mathbb{N}$ için $d(x,x_n)\geq 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} d(x,x_n)=0$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} d(x,A_n)=0$ olur.Buradan,

$$\tau-\underline{\lim}A_n \subset \{x\in X : \lim_{n\to\infty} d(x,A_n)=0\} \tag{1}$$

olur.

Tersine $x\in\{x\in X : \lim\limits_{n\to\infty} d(x,A_n)=0\}$ olsun.Bu durumda $\varepsilon>0$ için $\exists n_0\in\mathbb{N}$ vardır $\ni\forall n\geq n_0$ için $d(x,A_n)<\varepsilon$ olur.Buradan $\exists x_\varepsilon\in A_n$ için $d(x,x_\varepsilon)<\varepsilon$ olur.$\varepsilon=\frac{1}{n}$ ve $x_n=x_\varepsilon$ seçilirse $n\geq n_0$ iken $d(x,x_n)<\frac{1}{n}$olur.O halde $x_n\to x$ dir.Yani $x\in\underline{\lim}A_n$ dir.Buradan,

$$\{x\in X : \lim_{n\to\infty} d(x,A_n)=0\} \subset \tau-\underline{\lim}A_n \tag{2}$$

olur.

(1) ve (2) den istenilen çıkar.

b) nin kanıtıda a) ya benzer biçimde yapılır. ∎

(X,d) bir metrik uzay olduğunda alt ve üst Kuratowski limitleri aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$\underline{\lim} A_n = \{x \in X : x = \lim x_n$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A_n\} = \{x \in X : \forall r > 0$ için $\exists n_0(r) \in \mathbb{N}$ vardır $\ni \forall n \geq n_0(r)$ için $B(x,r) \cap A_n \neq \emptyset\}$ dir.

$\overline{\lim} A_n = \{x \in X : x = \lim x_{n_k}, x_{n_k} \in A_{n_k}; n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_k \leq ...\} = \{x \in X : \forall r > 0$ ve $\forall k \geq 1$ için $\exists n_k \in \mathbb{N}$ vardır $\ni n_k \geq k$ ve $B(x,r) \cap A_{n_k} \neq \emptyset\}$ dir.

Önerme 2.2 (X,d) *bir metrik uzay,* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^X \backslash \{\emptyset\}$ *ise*

a) $\underline{\lim} A_n$ *ve* $\overline{\lim} A_n$ *kapalıdırlar.*

b) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^X \backslash \{\emptyset\}$ *azalan ise* $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = \bigcap\limits_{n\geq 1} \overline{A_n}$ *dir.*

c) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^X \backslash \{\emptyset\}$ *artan ise* $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = \overline{\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n}$ *dir.*

Kanıt. *a)* $\overline{\overline{\lim} A_n} = \overline{\lim} A_n$ olduğunu gösterelim.

$x \in \overline{\overline{\lim} A_n}$ alalım.Kapanış tanımı gereği $\exists (x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır öyleki $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \overline{\lim} A_n$ ve $x_m \to x$ dir.$x \in \overline{\lim} A_n$ olduğunu göstereceğiz.

$\forall m \in \mathbb{N}$ için $d(x, A_n) \leq d(x, x_m) + d(x_m, A_n)$dir.$0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf d(x, A_n) \leq d(x, x_m) + \lim\limits_{n\to\infty} \inf d(x_m, A_n)$ olur.

$\lim\limits_{n\to\infty} \inf d(x_m, A_n) = 0$ olduğundan önerme 2.1 den $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf d(x, A_n) \leq d(x, x_m)$ yazabiliriz.

$0 \leq \lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} \inf d(x, A_n)) \leq \lim\limits_{m\to\infty} d(x, x_m)$ dir ve buradan $\lim\limits_{n\to\infty}\inf d(x, A_n) = 0$ olur.Böylece $x \in \overline{\lim} A_n$ olur.Bu da istenendir.

$\underline{\lim} A_n$ nin kapalılığı benzer biçimde gösterilir.

b) $x_n \in A_n$ olarak seçilen $\forall (x_n)$ dizisinin hiç bir yakınsak alt dizisi yoksa bu limit boş olabilir.Boş olmadığını kabul ederek kanıtı yapalım.

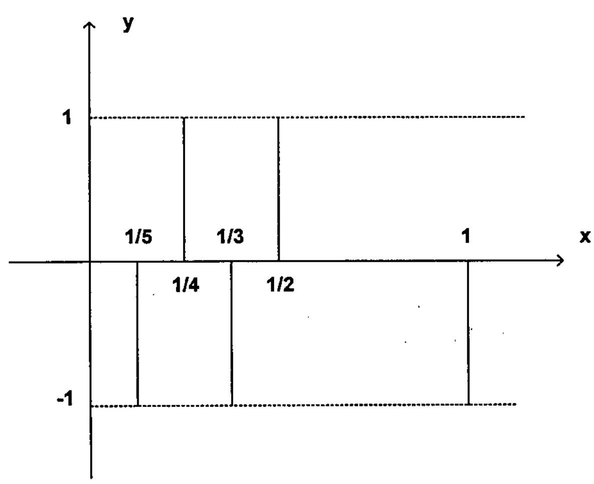
$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $d(x, A_n) = 0$ olması demektir. $\lim_{n\to\infty} d(x, A_n) = 0$ olacağından önerme 2.1 den $x \in \underline{\lim} A_n$ olur.Böylece $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n \subset \underline{\lim} A_n$ olur.Diğer taraftan $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$ ise $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni x \notin \overline{A}_{n_0}$ olur.Böylece önerme 2.1 den $d(x, A_{n_0}) \neq 0$ dır.Dizi azalan olduğundan $\forall n \geq n_0$ için $d(x, A_n) \neq 0$ dır.Böylece $\lim_{n\to\infty} \inf d(x, A_n) \neq 0$ olur.Bu $x \notin \overline{\lim} A_n$ demektir.$\overline{\lim} A_n \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$ olur.Bu bize $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n \subseteq \underline{\lim} A_n \subseteq \overline{\lim} A_n \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$ kapsamlarını vereceğinden $\lim A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$ olur.

c) nin kanıtı b) nin kanıtına benzer biçimde yapılır. ■

Örnek 2.1 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_f(\mathbb{R}^2)$ *dizisi* $A_n = \begin{cases} \{\frac{1}{n}\} \times [0,1] & ; \ n \text{ çift} \\ \{\frac{1}{n}\} \times [-1,0] & ; \ n \text{ tek} \end{cases}$ *olarak tanımlansın.*

$\underline{\lim} A_n$, $\overline{\lim} A_n$ *limitlerini belirleyiniz.*

Çözüm 2.1 $\underline{\lim} A_n = \{0\}$ *ve* $\overline{\lim} A_n = [-1,1]$ *dir ve* $\underline{\lim} A_n \neq \overline{\lim} A_n$ *olduğundan* $\lim A_n$ *yoktur.*



Önerme 2.3 *(X, d) bir metrik uzay ve $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_f(X)$ bir dizi olsun.*

a)$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcap_{k>0} \bigcup_{n\geq k} B(A_n, \varepsilon)$

$b)\underline{\lim}A_n = \bigcap\limits_{\epsilon>0}\bigcup\limits_{k>0}\bigcap\limits_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$

olur.

Kanıt. $a) x \in \overline{\lim}A_n$ fakat $x \notin \bigcap\limits_{\epsilon>0}\bigcap\limits_{k>0}\bigcup\limits_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$ olduğunu kabul edelim.Bu durumda $x, \forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A_n$olmak üzere bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yığılma noktasıdır.Dizilerin yığılma noktası tanımı gereği $\varepsilon > 0$ ve $k \in \mathbb{N}$ verildiğinde $n \geq k$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B(x,\varepsilon)$ dur.Böylece $x \in B(x_n,\varepsilon)$ olur.Diğer taraftan $x \notin \bigcap\limits_{\epsilon>0}\bigcap\limits_{k>0}\bigcup\limits_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$ kabul etmiştik.Buradan $\exists\varepsilon_0 > 0$ ve $\exists k_0 > 0$ için $x \notin \bigcup\limits_{n\geq k_0} B(A_n,\varepsilon_0)$ olur.Oysa x, $x_n \in A_n$ olmak üzere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yığılma noktası olduğundan bu $\varepsilon_0 > 0$ ve bu $k_0 > 0$ için $\exists n \in \mathbb{N}$ vardır $\ni n \geq k_0$ ve $x \in B(A_n,\varepsilon_0)$ olur ki bu bir çelişkidir.Buradan $x \in \bigcap\limits_{\epsilon>0}\bigcap\limits_{k>0}\bigcup\limits_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$ olur.$\overline{\lim}A_n \subseteq \bigcap\limits_{\epsilon>0}\bigcap\limits_{k>0}\bigcup\limits_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$ bulunur.
Tersine $x \in \bigcap\limits_{\epsilon>0}\bigcap\limits_{k>0}\bigcup\limits_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$ olsun.$\forall\varepsilon > 0$ için $x \in \bigcap\limits_{k>0}\bigcup\limits_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$ dur .$\forall\varepsilon > 0$ ve $\forall k > 0$ için $x \in \bigcup\limits_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$ olur.Eğer $\varepsilon = \frac{1}{k}$ seçilir ve $k = 1$ alınırsa $\exists n_1 > 1$ vardır $\ni x \in B(A_{n_1},1)$ olur.Buradan $\exists x_{n_1} \in A_{n_1}$ vardır $\ni d(x_{n_1},x) < 1$ olur.$k = 2$ alınırsa $\exists n_2 > n_1 > 1$ vardır $\ni x \in B(A_{n_2},\frac{1}{2})$ olur.Böyle devam edilirse $\exists x_{n_k}$ dizisi $x_{n_k} \in A_{n_k}$ ve $x_{n_k} \to x$ olacak biçimde vardır ve böylece $x \in \overline{\lim}A_n$ olur.
Buradan $\overline{\lim}A_n = \bigcap\limits_{\epsilon>0}\bigcap\limits_{k>0}\bigcup\limits_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$ olur.

$b)\underline{\lim}A_n = \bigcap\limits_{\epsilon>0}\bigcup\limits_{k>0}\bigcap\limits_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$ olduğunu gösterelim.$x \in \underline{\lim}A_n$ olduğu halde $x \notin \bigcap\limits_{\epsilon>0}\bigcup\limits_{k>0}\bigcap\limits_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$ olduğunu kabul edelim.Bu durumda öyle bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$dizisi vardır ki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A_n$ ve $x_n \to x$ olur.Verilen her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır $\ni \forall n \geq n_0$ için $x_n \in B(x,\varepsilon)$ dur.Dolayısıyla $\forall n \geq n_0$ için $x \in B(x_n,\varepsilon) \subset B(A_n,\varepsilon)$ dur.
Diğer taraftan $x \notin \bigcap\limits_{\epsilon>0}\bigcup\limits_{k>0}\bigcap\limits_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$ olduğundan öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki $x \notin \bigcup\limits_{k>0}\bigcap\limits_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon_0)$ dır.Buradanda bu $\varepsilon_0 > 0$ ve her $k > 0$ için $x \notin \bigcap\limits_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon_0)$ olur.Sonuç olarak bu $\varepsilon_0 > 0$ ve her $k > 0$ için $n \geq k$ olacak şekilde en az bir $n \in \mathbb{N}$ vardır ve $x \notin B(A_n,\varepsilon)$ olur ki bu bir çelişki yaratır.Bu çelişkiye $x \in \underline{\lim}A_n$ olduğu

halde $x \notin \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{k>0} \bigcap_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$ olduğunu kabul ettiğimiz için düştük.O halde kabulumüz yanlıştır yani $x \in \underline{\lim} A_n$ ise $x \in \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{k>0} \bigcap_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$ ifadesi doğrudur.Bu ise birinci yönün doğruluğunu yani $\underline{\lim} A_n \subseteq \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{k>0} \bigcap_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$ kapsamını verir.

Tersine $x \in \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{k>0} \bigcap_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$ alalım.$\forall\varepsilon > 0$ için $x \in \bigcup_{k>0} \bigcap_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$ olur.Böylece $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists k > 0$ vardır öyleki $x \in \bigcap_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$ olur.Buradan $\varepsilon > 0$ için $\exists k > 0$ vardır öyleki $n \geq k$ iken $x \in B(A_n,\varepsilon)$ olur.$\varepsilon = \frac{1}{n}$ seçilerek $d(x, A_n) < \varepsilon$ eşitsizliğini kullanarak her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A_n$ ve $x_n \to x$ olan bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi seçebiliriz.Buradan $x \in \underline{\lim} A_n$ olur.

Böylece $\bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{k>0} \bigcap_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon) \subseteq \underline{\lim} A_n$ bulunur.

Sonuç olarak $\underline{\lim} A_n = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{k>0} \bigcap_{n\geq k} B(A_n,\varepsilon)$ elde edilir. ■

Önerme 2.4 *(X,d) bir metrik uzay ve $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_f(X)$ bir dizi ve A aşağıdaki özelliğe sahip olan bir küme olsun.*
A nın her U komşuluğu için öyle bir $n_U \in \mathbb{N}$ indisi vardır ki dizinin bu indisli terimden sonraki terimleri U kümesinin içine girerler.Yani $n \geq n_U$ için $A_n \subset U$ olur.Bu durumda $\limsup A_n = \overline{\lim} A_n \subset \overline{A}$ *dır.*

Kanıt. $x \in \limsup A_n$ ve $x \notin \overline{A}$ olsun.$x \in \overline{\lim} A_n$ olduğundan öyle bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır ki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A_n$ ve x bu dizinin bir yığılma noktasıdır.
Diğer taraftan $x \notin \overline{A}$ kabul edildiğinden $\exists\varepsilon > 0$ vardır $\ni B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$ olur.$0 < \delta < \varepsilon$ olan bir $\delta > 0$ vardır öyleki $\overline{B(x,\delta)} \cap A = \emptyset$ olur.$A \subset X \backslash \overline{B(x,\delta)} \subset X \backslash B(x,\delta) = U_x$ olduğundan U_x,A nın bir komşuluğudur.Hipotez gereği öyle bir $n_{U_x} \in \mathbb{N}$ indisi vardır ki $n \geq n_{U_x}$ iken $A_n \subset U_x$ olur.$n \geq n_{U_x}$ olan her n için $x_n \in A_n$ olduğundan $x_n \in U_x = X \backslash B(x,\delta)$ olur.
Böylece $x_n \notin B(x,\delta)$ bulunur.Bu x'in $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir yığılma noktası olamayacağını verir ki bu ise bir çelişkidir.Bu çelişkiye $x \in \limsup A_n$ fakat $x \notin \overline{A}$ olsun

demekle düştük.

O halde kabulümüz yanlıştır ve $\overline{\lim} A_n \subset \overline{A}$ kapsamı doğrudur. ■

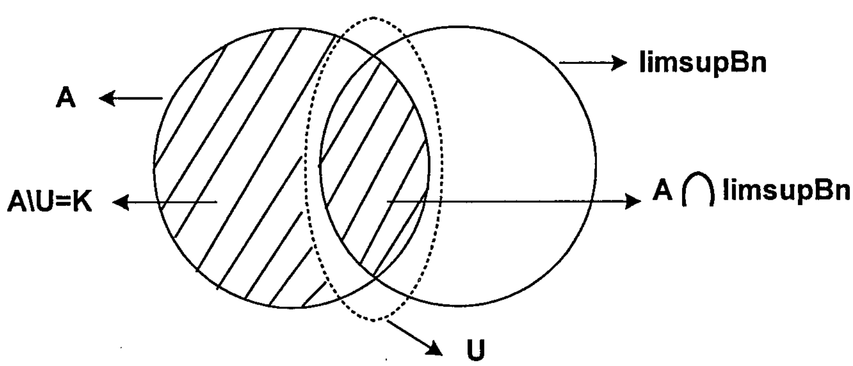
Önerme 2.5 (X,d) *bir metrik uzay ve* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_f(X)$ *iki dizi ve* A *kompakt kümesi aşağıdaki özelliklere sahip olsun.*A *nın her* W *komşuluğu için öyle bir* $n_W \in \mathbb{N}$ *indisi var olsun öyleki* $n \geq n_W$ *için* $A_n \subset W$ *olsun.Bu durumda* $A \cap \limsup B_n$ *nin her* U *komşuluğu için öyle bir* $n_U \in \mathbb{N}$ *indisi vardır öyle ki her* $n \geq n_U$ *için* $(A_n \cap B_n) \subset U$ *olur.*

Kanıt. $U; A \cap \limsup B_n$ nin bir komşuluğu olsun.

1.durum: $A \subset U$ ise kabulden dolayı $\exists n_U \in \mathbb{N}$ indisi vardır öyle ki $n \geq n_U$ için $A_n \subset U$ olur.

Böylece $n \geq n_U$ iken $(A_n \cap B_n) \subset A_n \subset U$ olur.

2.durum: $A \nsubseteq U$ olsun.$K = A \backslash U$ diyelim.K kompakt bir kümeden açık bir kümeyi atmakla elde edilen bir küme olduğundan kompakttır ve ayrıca $A \cap \limsup B_n \subset U$ olduğundan $K \cap \limsup B_n = \emptyset$ olur.



$y \in K$ ise $y \notin \limsup B_n = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcap_{k>0} \bigcup_{n\geq k} B(A_n, \varepsilon)$ olur.Buradan $\exists \varepsilon_y > 0$ ve $\exists k_y > 0$ için $n \geq k_y$ iken $y \notin B(B_n, \varepsilon_y)$ olur.Bu $\varepsilon_y > 0$ ve $k_y \in \mathbb{N}^+$ sayıları için $K \subset \cup\{B(y, \varepsilon_y) : y \in K\}$ olur.K kompakt olduğundan $\exists p \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $K \subset \cup\{B(y_i, \varepsilon_{y_i}) : i = 1, 2, ..n, y_i \in K\} = V$ olur.$n \geq k = \max\{k_{y_i} : i = 1, 2..n\}$ için $B_n \cap V = \emptyset$ olur.$W = U \cap V$ dersek W, A nın bir komşuluğu olur.Hipotezden

$\exists n_W \in \mathbb{N}$ vardır $\ni n \geq n_W$ iken $A_n \subset W = U \cup V$ olur.$n \geq \max\{n_W, k\}$ iken $A_n \cap B_n \subset W$ olur.$B_n \cap V = \emptyset$ olduğundan $n \geq \max\{n_W, k\}$ iken $A_n \cap B_n \subset U$ olur.

■

Bu önermede A yı kapalı ve $A \cap \limsup B_n$ nin U komşuluğunu A içinde tümleyeni kompakt olacak şekilde alırsak önerme yine doğru olur.

Sonuç 2.1 *(X, d) bir kompakt metrik uzay ve $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_f(X)$ bir küme dizisi olsun.Eğer* $\limsup A_n$ *nin her U komşuluğu için $n \geq n_U$ iken $A_n \subset U$ olacak şekilde bir $n_U \in \mathbb{N}^+$ var ise $n \geq n_U$ iken $A_n \subset$* $\limsup A_n$ *olur.Üstelik* $\limsup A_n$ *bu özelliği sağlayan en küçük kümedir.*

Kanıt. Bir önceki önermede $\forall n \in \mathbb{N}$ için $B_n = X = A$ alınırsa istenen gerçekleşir. ■

3 KÜMELER AİLESİ ÜZERİNDE HAUSDORFF VE VİETORİS TOPOLOJİLERİ

Bu bölümde, kümeler ailesi üzerindeki Hausdorff ve Vietoris topolojiler tanımlanıp bazı özellikleri verilecektir.

3.1 Hausdorff Topoloji

Önerme 3.1 *(X,d) bir metrik uzay olsun.$\tau_d = \{G \subset X$:her $x \in G$ için $\exists \varepsilon_x > 0$ vardır $\ni B_d(x,\varepsilon) \subset G\} \cup \{\emptyset\}$ kümesi X üzerinde bir topolojidir.*

Kanıt. Açıktır. ■

(X,d) sınırlı metrik uzayında X üzerindeki τ_d topolojisine metriğin ürettiği topoloji ya da kısaca metrik topoloji denir.

$\mathcal{P}_f(X)$ üzerindeki $h : \mathcal{P}_f(X) \times \mathcal{P}_f(X) \to [0,\infty)$, $A, C \in \mathcal{P}_f(X)$, $h(A,C) = \max\{h^*(A,C), h^*(C,A)\}$ ile tanımlı h metriğinin ürettiği topolojiye Hausdorff topoloji denir ve τ_H ile gösterilir.

Hausdorff topoloji en eski ve muhtemelen hiper uzayları çalışan uzmanların dışındakiler tarafından da en çok kullanılan bir topolojidir.Bu topoloji metrik uzaylar üzerinde tanımlanır ve esas olarak iki küme arasındaki uzaklığa dayanır.

Önerme 3.2 *$\{A_n, A\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_{bf}(X)$ ve $A_n \xrightarrow{h} A$ ise $A = \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m} = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon$ dir.*

Kanıt. $\varepsilon > 0$ verilsin.$A_n \xrightarrow{h} A$ hipoteziyle $\lim_{n\to\infty} h(A_n, A) = \inf\{\varepsilon > 0 : A_n \subseteq A_\varepsilon$, $A \subseteq (A_n)_\varepsilon\} \to 0$ olduğundan $n_0(\varepsilon) \geq 1$ bulabiliriz öyleki $m \geq n_0(\varepsilon)$ için $A \subseteq (A_m)_\varepsilon$

ve $A_m \subseteq A_\varepsilon$ dur.O halde

$$A \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon \tag{1}$$

ve

$$\bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m} \subset A \tag{2}$$

diyebiliriz.

Son olarak $x \in \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon$ olsun.O halde her $\varepsilon > 0$ için $n_0(\varepsilon) \geq 1$ bulabiliriz öyleki $m \geq n_0(\varepsilon)$ için $x \in (A_m)_\varepsilon$ olur.$n \geq 1$ verilsin.Bu durumda $m \geq \max\{n, n_0(\varepsilon)\}$ vardır öyleki $x \in (A_m)_\varepsilon \subset (\bigcup_{m\geq n} A_m\ )_\varepsilon)$ dur.$\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $x \in \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m}$ diyebiliriz öyleki $x \in \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m}$ dır.Böylece

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon \subset \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m} \tag{3}$$

olduğunu göstermiş oluruz.

(1),(2) ve (3) den $A = \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m} = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon$ olur. ∎

Önerme 3.3 *(X, d) bir metrik uzay,$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_f(X)$, $A_n \xrightarrow{h} A$ ve $A_n \supseteq A_{n+1}$ (veya tersine $A_n \subseteq A_{n+1}$) $n \geq 1$ ise $A = \bigcap_{n\geq 1} A_n$ (veya $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$) dır.*

Kanıt. $n \geq 1$ için $A_n \supseteq A_{n+1}$ olduğunu varsayalım (Artan durumu da benzer şekilde kanıtlanır.)

$A_n \xrightarrow{h} A$ olduğu için $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \geq 1$ vardır öyleki $A_n \subset A_\varepsilon$ dur.Böylece $\bigcap_{n\geq 1} A_n \subset A_\varepsilon$ olur.$\varepsilon \downarrow 0$ iken $\bigcap_{n\geq 1} A_n \subset \overline{A} = A$ olur.

Diğer taraftan $A_n \xrightarrow{h} A$ olduğu hipoteziyle, verilen $\varepsilon > 0$ için $n_0 \geq 1$ vardır öyleki her $n \geq n_0$ için $A \subset (A_n)_\varepsilon$ olur.Böylece $A \subset \bigcap_{n\geq 1} (A_n)_\varepsilon$ olur.$\varepsilon \downarrow 0$ iken $A \subset \bigcap_{n\geq 1} A_n$ dir.
Böylece $A = \bigcap_{n\geq 1} A_n$ dir deriz. ∎

Örnek 3.1 *Kümelerin monoton artan veya monoton azalan bir dizisinin bir h−limitinin olması gerekmez.*

$X = \mathbb{R}$ *ve* $A_n = [n, \infty)$ *olsun.* $\bigcap\limits_{n\geq 1} A_n = \emptyset$ *olduğundan* $\{A_n\}_{n\geq 1}$ *kümeler dizisi* $\bigcap\limits_{n\geq 1} A_n = \emptyset$ *ye h−yakınsamaz.*

Önerme 3.4 *(X, d) tam bir metrik uzay ise $(\mathcal{P}_f(X), h)$ aileside bir tam metrik uzaydır.*

Önerme 3.5 *(X, d) tam bir metrik uzay ise $(\mathcal{P}_k(X), h)$ ailesi $(\mathcal{P}_f(X), h)$ ailesinin kapalı bir alt uzayıdır.Bundan dolayı $(\mathcal{P}_k(X), h)$ tam bir metrik uzaydır.*

Kanıt. $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{P}_k(X)$ ve $A_n \xrightarrow{h} A$ olduğunu varsayalım.Verilen $\varepsilon > 0$ için $n_0(\varepsilon) \geq 1$ bulabiliriz öyle ki her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için $h(A_n, A) < \varepsilon$ ve bu yüzden $A \subset (A_n)_\varepsilon$ olur.A_n ler kompakt olduğundan tamamen sınırlıdır.Böylece sonlu bir $F \subset X$ bulabiliriz öyleki $A_n \subset F_\varepsilon$ olur ve buradan $(A_n)_\varepsilon \subset F_{2\varepsilon}$ olur.Bu yüzden $A \subset F_{2\varepsilon}$, A nın tamamen sınırlı ve kapalı olduğunu gösterir ve buradan $A \in \mathcal{P}_k(X)$ olur. ■

Önerme 3.6 *$\mathcal{P}_{bf}(X)$, $(\mathcal{P}_f(X), h)$ ın kapalı bir alt kümesidir.Bu yüzden (X, d) tam bir metrik uzay ise $(\mathcal{P}_{bf}(X), h)$ da tamdır.*

Kanıt. Önerme 3.5 e benzer olarak kanıtlanır. ■

3.2 Vietoris Topoloji

τ_H Hausdorff metrik topoloji bir çok güzel özelliklere sahip olmasına rağmen bir çok amaç için uygun bir topoloji değildir.Özellikle sınırsız kümelerle uğraşıyorken bu topolojiyi kullanamayız.

Örneğin;$L_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : y = \frac{1}{n}x\}$ küme dizisini ve $L = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ kümesini göz önüne alalım.Bu sınırsız kümelerden oluşan dizi Kuratowski anlamında $L_n \to L$ olmasına rağmen Hausdorff anlamında yakınsama gerçekleşmez.
Ama bu kümeleri sınırlayarak elde ettiğimiz $L^r_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : y = \frac{1}{n}x, x \in (0,r)\}$ dizisini ve $L^r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : 0 \leq x \leq r, y = 0\}$ sınırlı kümesini düşünürsek $L^r_n \xrightarrow{h} L^r$ olur.
Bu ve benzeri durumlarda ,örneğin sınırsız kümelerin ailesiyle uğraşıyorken Vietoris topoloji olarak bilinen diğer bir hiper uzay topolojisi daha kullanışlı olmaktadır. Vietoris topoloji ilk olarak Vieotoris [15] tarafından tanıtıldı.Aslında Vietoris topoloji Frink [5] in komşuluklar topolojisine denktir.
(X,τ) bir Hausdorff topolojik uzay ve $A \in 2^X \backslash \{\varnothing\}$ olsun.

$$\begin{aligned} A^- &= \{C \in 2^X \backslash \{\varnothing\} : A \cap C \neq \varnothing\} \\ A^+ &= \{C \in 2^X \backslash \{\varnothing\} : C \subseteq A\} \end{aligned}$$

kümelerini tanımlayalım.
a) 2^X üzerinde $\tau_{V^+} = \{U^+ : U \in \tau\}$ ailesini taban kabul eden topolojiye üst Vietoris topoloji denir.
b) 2^X üzerinde $\tau_{V^-} = \{U^- : U \in \tau\}$ ailesini alt taban kabul eden topolojiye alt Vietoris topoloji denir.
c) 2^X üzerinde $\tau_{V^+} \cup \tau_{V^-}$ ailesini alt taban kabul eden topolojiye Vietoris topoloji denir ve τ_V ile gösterilir.
$U, V_1, ..., V_n \in \tau$ olmak üzere τ_V Vietoris topolojisi için bir taban elemanı

$$B(U, V_1, V_2, ..., V_n) = \{A \in 2^X \backslash \{\varnothing\} : A \subseteq U, A \cap V_k \neq \varnothing, k = 1, 2, ..., n\}$$

biçimindedir.
Michael[13] Vietoris topolojiye sonlu topoloji demiş ve bu topolojinin bir çok ayırma özelliğini incelemiştir.Kuratowski [11],Vietoris topolojiyi üstel topoloji olarak isimlendirmiştir.Ayrıca ,Kuratowski [11]üst Vietoris topolojiyi k-topoloji ,alt Vietoris

topolojiyi de λ topoloji olarak adlandırmıştır.Biz burada Michael' ın gösterimlerini kullanıyoruz.

Önerme 3.7 *$i : X \to 2^X \setminus \{\varnothing\}, i(x) = \{x\}$ ile tanımlı dönüşüm ise $2^X \setminus \{\varnothing\}$ ailesi τ_V topolojisi ile donatıldığı zaman $i(\cdot)$ süreklidir.*

Kanıt. $U \in \tau$ olsun.$i^{-1}(U^+) = \{x \in X : \{x\} \subset U\} = U \in \tau$ dur.Benzer şekilde, Eğer $V_1, V_2, ...V_n \in \tau$ ise $i^{-1}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} V_k^-\right) = \{x \in X : \{x\} \cap V_k \neq \emptyset, k = 1..n\} = \bigcap\limits_{k=1}^{n} V_k \in \tau$ dur.Bundan dolayı $2^X \setminus \{\varnothing\}$ ailesi τ_V topolojisi ile donatıldığı zaman $i(\cdot)$ süreklidir. ■

τ_V Vietoris topolojisi $i(\cdot)$ gömme dönüşümünü sürekli kılan $2^X \setminus \{\varnothing\}$ üzerindeki en ince topoloji değildir.
Bunu bir örnekle açıklayalım.

Örnek 3.2 *X sonlu tümleyenler topolojisiyle donatılmış olsun.X in kapalı alt kümeleri $\emptyset, X$ ve X in sonlu alt kümeleridir.Γ, X in boş olmayan sonlu alt kümelerinin bir ailesini göstersin.Bu durumda $(2^X \setminus \{\varnothing\},\tau_V)$ uzayındaki her açık küme sonsuz kümeler içerir.Bu yüzden $\Gamma \notin \tau_V$ dir ve böylece $2^X \setminus \{\varnothing\}$ üzerinde τ_V nin orjinal alt tabanına Γ yi ekleyerek elde ettiğimiz daha kuvvetli (ince) topolojiyi düşündüğümüzde $i(\cdot)$ yine sürekli kalır.Çünkü $i^{-1}(\Gamma)$ bu topolojiye göre açıktır.*

Önerme 3.8 *(X, τ) bir Hausdorff topolojik uzay ise (X, τ) kompakttır ancak ve ancak $(\mathcal{P}_k(X), \tau_V)$ kompakttır.*

Kanıt. $\Longrightarrow$: $\{U_\alpha^+\}_{\alpha \in J_1} \cup \{U_\beta^-\}_{\beta \in J_2}$, $(\mathcal{P}_k(X), \tau_V)$ için bir açık örtü olsun.$(U_\alpha, U_\beta \in \tau)$.$U_2 = \bigcup\limits_{\beta \in J_2} U_\beta \in \tau$ ve $C_2 = U_2^c$ olsun.$C_2 \neq \emptyset$ ise $\forall \beta \in J_2$ için $C_2 \cap U_\beta = \emptyset$ olduğundan bazı $\alpha_0 \in J_1$ ler için $C_2 \in U_{\alpha_0}^+$ olur.$\{U_{\alpha_0}, U_\beta\}_{\beta \in J_2}$, X in açık bir örtüsüdür.X kompakt olduğundan $\{U_{\alpha_0}, U_{\beta_1}, ..U_{\beta_n}\}$ sonlu alt örtüsünü bulabiliriz.
Şimdi, $C \in \mathcal{P}_k(X)$ olsun.O halde bazı $k \in \{1, 2, \ , n\}$ için ya $C \subset U_{\alpha_0}$ ya da $C \cap U_{\beta_k} \neq$

$\emptyset$ dir.Böylece $\{U^+_{\alpha_0}, U^-_{\beta_k}\}_{k=1}^n$, $\mathcal{P}_k(X)$ in açık bir örtüsüdür.O halde Aleksender lemma ya göre $(\mathcal{P}_k(X), \tau_V)$ kompakttır.

$\Longleftarrow$: $\{\{U_\alpha\}\}_{\alpha\in J}$, X in açık bir örtüsü olsun.Açıktır ki $\{U^-_\alpha\}_{\alpha\in J}$, $(\mathcal{P}_k(X), \tau_V)$ nin açık bir örtüsüdür.Bu yüzden $\{U^-_{\alpha_k}\}_{k=1}^n$ gibi bir sonlu alt örtüye sahiptir.$\forall x \in X$ için $\{x\} \in \mathcal{P}_k(X)$ dir ve bu yüzden bazı $k \in \{1, 2, \ \ , n\}$ için$\{x\} \in U^-_{\alpha_k}$ dır.O halde $x \in U_{\alpha_k}$ dır ve bu da $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^n$, nin X için bir örtü olduğunu gösterir.

Bu yüzden (X, τ) kompakt bir uzaydır. ∎

3.3 Hausdorff Ve Vietoris Topolojilerinin Karşılaştırılışı

X herhangi bir küme olduğunda 2^X üzerinde Vietoris topoloji tanımlı olduğu halde Hausdorff topoloji tanımlı olamaz.Bu nedenle bu iki topolojinin karşılaştırılmaları her zaman söz konusu olamaz.

Ancak (X, d) bir metrik uzay olduğunda $\mathcal{P}_k(X)$ üzerinde aşağıdaki denklik söz konusudur.

Önerme 3.9 *(X, d) bir metrik uzay ise $\mathcal{P}_k(X)$ üzerinde τ_H Hausdorff metrik topoloji ile τ_V Vietoris topoloji çakışıktır.*

Kanıt. İlk olarak $\tau_V \subset \tau_H$ olduğunu gösterelim.$\forall U \in \tau$ için U^+ ve U^- nin τ_H a ait olduğunu göstermeliyiz.

$C \in U^+$ olsun.$C \in \mathcal{P}_k(X)$ olduğundan $\varepsilon > 0$ bulabiliriz öyleki $0 < \varepsilon < \inf[d(x, y) : x \in C, y \in U^c]$ olur.$\mathcal{B}_H(C, \varepsilon) = \{C' \in \mathcal{P}_k(X) : h(C', C) < \varepsilon\}$ olsun.$C' \in \mathcal{B}_H(C, \varepsilon)$ ise $C' \subset C_\varepsilon \subset U$ olur ve bu yüzden $C' \in U^+$ dır.Bundan dolayı $\mathcal{B}_H(C, \varepsilon) \subset U^+$ olur ve buda $U^+ \in \tau_H$ olmasını gerektirir.

Şimdi $C \in U^-$ olsun.$x \in C \cap U$ ve $\varepsilon > 0$ bulabiliriz öyleki $\mathcal{B}(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\} \subset U$ olur.$\mathcal{B}_H(C,\varepsilon)$ yukarıda tanımladığımız gibi olsun.O halde $C' \in \mathcal{B}_H(C,\varepsilon)$, ve $C' \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$ dir ve bu yüzden $C' \cap U \neq \emptyset$ olur ki bu da $C' \in U^-$ olmasını gerektirir.Böylece $\mathcal{B}_H(C,\varepsilon) \subset U^-$ ve $U^- \in \tau_H$ olur.

Böylece $\tau_V \subset \tau_H$ olduğunu göstermiş oluruz.

Şimdi karşı kapsamanın da doğru olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0, C \in \mathcal{P}_k(X)$ ve $\mathcal{B}_H(C,\varepsilon) = \{C' \in \mathcal{P}_k(X) : h(C',C) < \varepsilon\}$ olsun.$U = C_\varepsilon$ ve $V_1, V_2,$ V_n ler C yi içeren $\frac{\varepsilon}{2}$ yarıçaplı açık yuvarlar olsun.$C' \in U^+$ ise $h^*(C',C) < \varepsilon$ olur ve $C' \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} V_k^-$ ise $h^*(C,C') < \varepsilon$ olur.

Sonuç olarak $\{C' \in \mathcal{P}_k(X) : C' \subset U, C' \cap V_1 \neq \emptyset,..C' \cap V_k \neq \emptyset\} \subset \mathcal{B}_H(C,\varepsilon)$ olur ki bu da $\tau_H \subset \tau_V$ olmasını gerektirir.

O halde $\tau_H = \tau_V$ dir. ■

4 KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SÜREKLİLİKLERİ

Küme değerli fonksiyonlarla ilgilenen tüm araştırmacılar, küme değerli fonksiyon tanımını hep aynı şekilde vermelerine karşın denk süreklilik tanımlarını farklı farklı isimlendirmişlerdir.Hemen hemen bütün araştırmacılar tek değerli fonksiyonların denk süreklilik tanımlarından bir yada ikisini genelleştirip birleştirerek küme değerli fonksiyonlar için yeni süreklilik tanımları vermişlerdir.

Bu bölüm küme değerli dönüşümlerin temel tanımları ve Hausdorff ve Vietoris süreklilikleri ile ilgili olacaktır.

4.1 Küme Değerli Dönüşümlerle İlgili Temel Tanımlar Ve Özellikler

Tanım 4.1 *X ve Y herhangi iki küme olsunlar.X in her bir x noktasındaki değeri Y nin bir $F(x)$ alt kümesi olan bir fonksiyona küme değerli dönüşüm denir ve $F : X \rightsquigarrow Y$ ile gösterilir.*

Tanım 4.2 *$F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm olsun.*
F nin grafiği $X \times Y$ nin $G_r(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$ alt kümesi olarak tanımlanır.
X in F altında görüntüsü boş olmayan noktalarının kümesine F nin tanım kümesi denir ve $DomF = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$ ile gösterilir.
Her bir $x \in X$ için $F(x)$ lerin birleşim kümesine F nin görüntü kümesi denir ve $\dot{I}m(F) = F(X) = \bigcup\limits_{x \in X} F(x)$ ile gösterilir.
$K \subset X$ herhangi bir küme olmak üzere F nin K üzerine indirgenmişi
$$F|_K(x) = \begin{cases} F(x) & ; \ x \in K \\ \emptyset & ; \ x \notin K \end{cases}$$ *olarak tanımlanır.*

Tanım 4.3 *X ve Y iki küme $F : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ bir küme değerli dönüşüm ve $A \subseteq Y$ ise*

a)$F(\cdot)$ altında A' nın alt ters görüntüsü;

$$F^-(A) = \{x \in X : F(x) \cap A \neq \varnothing\}$$

b)$F(\cdot)$ altında A' nın üst ters görüntüsü;

$$F^+(A) = \{x \in X : F(x) \subseteq A\}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 4.4 *$F, G : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ küme değerli dönüşümler olsun.$x \in X$ olmak üzere bu küme değerli dönüşümlerin birleşimleri, kesişimleri ve kartezyen çarpımları*

a)$(F \cup G)(x) = F(x) \cup G(x)$

b)$(F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x)$

c)$(F \times G)(x) = F(x) \times G(x)$ *biçiminde tanımlanırlar.*

Tanım 4.5 *$F : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ ve $G : Y \to 2^Z \setminus \{\varnothing\}$ iki küme değerli dönüşüm olsunlar.$x \in X$ olmak üzere bu küme değerli dönmüşümlerin iki ayrı bileşkeleri*

a)$(G \circ F)(x) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y)$

b)$(G \square F)(x) = \bigcap_{y \in F(x)} G(y)$ *biçiminde tanımlanırlar.*

Önerme 4.1 *a)$F, G : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ ve $A \subseteq Y$ ise aşağıdakiler doğrudur.*

$$(F \cup G)^-(A) = F^-(A) \cup G^-(A),$$

$$(F \cup G)^+(A) = F^+(A) \cup G^+(A),$$

$$(F \cap G)^-(A) \subseteq F^-(A) \cap G^-(A),$$

$$(F \cap G)^+(A) = F^+(A) \cap G^+(A),$$

dır.

b) $F : X \to 2^{Y}\backslash\{\varnothing\}$, $G : Y \to 2^{Z}\backslash\{\varnothing\}$ *ve* $A \subseteq Z$ *ise aşağıdakiler doğrudur.*

$$\begin{aligned}(G \circ F)^{-}(A) &= F^{-}(G^{-}(A)) \\ (G \circ F)^{+}(A) &= F^{+}(G^{+}(A)) \text{ dır.} \\ (G\Box F)^{-}(A) &= F^{+}(G^{-}(A))\end{aligned}$$

c) $F : X \to 2^{Y}\backslash\{\varnothing\}$ *ve* $A_i, A \subseteq Y$, $i \in I$ *ise aşağıdakiler doğrudur.*

$$X\backslash F^{+}(A) = F^{-}(Y\backslash A),$$

$$X\backslash F^{-}(A) = F^{+}(Y\backslash A),$$

$$F^{-}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} F^{-}(A_i),$$

$$\bigcup_{i\in I} F^{+}(A_i) \subseteq F^{+}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right),$$

$$F^{-}\left(\cap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} F^{-}(A_i),$$

$$\bigcap_{i\in I} F^{+}(A_i) \subseteq F^{+}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$$

d) $F : X \to 2^{Y}\backslash\{\varnothing\}$, $G : X \to 2^{Z}\backslash\{\varnothing\}$, $A \subseteq Y$ *ve* $C \subseteq Z$ *ise*

$$(F \times G)^{+}(A \times C) = F^{+}(A) \cap G^{+}(C),$$

$$(F \times G)^{-}(A \times C) = F^{-}(A) \cap G^{-}(C)$$

dir ve bu durum ayrıca keyfi çarpım içinde doğrudur.

Kanıt. Tanımlar kullanılarak hemen elde edilir. ∎

Önerme 4.2 $F : X \to 2^{X}\backslash\{\emptyset\}$ *küme değerli bir dönüşüm,* $K_1, K_2 \subset X$ *olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.*

a) $F(K_1 \cup K_2) = F(K_1) \cup F(K_2)$

b) $F(K_1 \cap K_2) \subset F(K_1) \cap F(K_2)$

c) $F(X\backslash K_1) \supset F(X)\backslash F(K_1)$

d) $K_1 \subset K_2$ *ise* $F(K_1) \subset F(K_2)$ *dir.*

Kanıt. Tanımlar kullanılarak hemen elde edilir. ■

Önerme 4.3 *$G: X \rightsquigarrow Y$ ve $H: Y \rightsquigarrow Z$ iki küme değerli dönüşüm ve 1 birim dönüşümü göstermek üzere aşağıdakiler doğrudur.*

a)$G_r(H \circ G) = (G \times 1)^-(G_r(H)) = (1 \times H)(G_r(G))$

b)$G_r(H \square G) = (G \times 1)^+(G_r(H))$

Kanıt. *a)*$G_r(H \circ G) = \{(x,z) \in X \times Z : x \in X,\ z \in (H \circ G)(x)\}$

$= \{(x,z) \in X \times Z : x \in X,\ \exists y \in G(x), z \in H(y)\}$

$= \{(x,z) \in X \times Z : x \in X,\ \exists y \in G(x)$ için $(y,z) \in G_r(H)\}$

$= \{(x,z) \in X \times Z : x \in X,\ (y,z) \in G(x) \times \{z\}$ ve $(y,z) \in G_r(H)\}$

$= \{(x,z) \in X \times Z : x \in X,\ (y,z) \in (G(x) \times \{z\}) \cap G_r(H)\}$

$(G(x) \times \{z\} = (G \times 1)(x,z)$ olduğundan)

$= \{(x,z) \in X \times Z : x \in X$ için $(y,z) \in (G \times 1)(x,z) \cap G_r(H) \neq \emptyset\}$

$= (G \times 1)^{-1}(G_r(H))$ olur.

Böylece $G_r(H \circ G) = (G \times 1)^{-1}(G_r(H))$ olur.

Benzer şekilde $G_r(H \circ G) = \{(x,z) \in X \times Z : x \in X,\ z \in \bigcup_{y \in G(x)} H(y)\}$

$= \{(x,z) \in X \times Z : x \in X,\ \exists y \in G(x) \ni z \in H(y)\}$

$= \{(x,z) \in X \times Z : x \in X, \exists (x,y) \in G_r(G), (x,z) \in \{x\} \times H(y)\}$

$= \{(x,z) \in X \times Z : x \in X, \exists (x,y) \in G_r(G)$ için $(x,z) \in (1 \times H)(x,y)\}$

$= (1 \times H)(G_r(G))$ olur.

b)$G_r(H \square G) = \{(x,z) \in X \times Z : x \in X,\ z \in \bigcap_{y \in G(x)} H(y)\}$

$= \{(x,z) \in X \times Z : x \in X,$ *her* $y \in G(x)$ için $z \in H(y)\}$

$= \{(x,z) \in X \times Z : x \in X,$ *her* $y \in G(x)$ için $(y,z) \in G_r H\}$

$= \{(x,z) \in X \times Z : x \in X,$ *her* $(y,z) \in G(x) \times \{x\},\ (y,z) \in G_r H\}$

$= \{(x,z) \in X \times Z : x \in X,\ (G \times 1)(x,z) \subset G_r(H)\}$

$= (G \times 1)^+(G_r(H))$

olur. ■

4.2 KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN VİETORİS SÜREKLİLİĞİ

Bu kesimde Vietoris süreklilik üzerinde durulacak ve bu sürekliliğe denk koşullar verilecektir.

Tanım 4.6 *X, Y topolojik uzaylar, $F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun.*

a)$F(x_0) \subset G$ olan her $G \subset Y$ açık kümesi için $x \in U_{x_0}$ iken $F(x) \subset G$ olacak şekilde G ye bağlı x_0 ın bir U_{x_0} komşuluğu varsa F ye x_0 da Vietoris üstten yarı sürekli denir ve $V - ü.y.s$ ile gösterilir.

b)$F(x_0) \cap G \neq \emptyset$ olan her $G \subset Y$ açık kümesi için $z \in U_{x_0}$ iken $F(z) \cap G \neq \emptyset$ olan G ye bağlı x_0 ın bir U_{x_0} komşuluğu varsa F ye x_0 da Vietoris alttan yarı sürekli denir ve $V - a.y.s$ ile gösterilir.

c)F, x_0 da $V - ü.y.s$ ve $V - a.y.s$ ise F ye x_0 da Vietoris sürekli denir ve bu durum $V-$sürekli biçiminde gösterilir.

d) $(a), (b), (c)$ şıklarındaki süreklilikler X in her x_0 noktası için gerçekleşiyorsa F ye X üzerinde $V - ü.y.s$ ($V - a.y.s, V-$süreklidir) denir.

Yarı süreklilik kavramları G.Bouligand[3] ve Kuratowski[11] tarafından başlatılmıştır. (X, d_1) ve (Y, d_2) metrik uzaylar olduğunda bir $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümünün $x_0 \in X$ deki $V - a.y.s$ ve $V - ü.y.s$ tanımları aşağıdaki gibi verilebilir.

$a)F$, $x_0 \in X$ de $V - ü.y.s$ dir ancak ve ancak $F(x_0)$ ın her G d_2 açık komşuluğu için $\exists\delta > 0$ vardır $\ni \forall x \in B_{d_1}(x_0, \delta)$ için $F(x) \subset G$ dir.

$b)F$, $x_0 \in X$ de $V - a.y.s$ dir ancak ve ancak $F(x_0) \cap G \neq \emptyset$ olan her G d_2 açık komşuluğu için $\exists\delta > 0$ vardır $\ni \forall x \in B_{d_1}(x_0, \delta)$ için $F(x) \cap G \neq \emptyset$ dir.

Önerme 4.4 *$F : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ bir küme değerli dönüşüm ise aşağıdakiler denktir.*

a) $F(\cdot)$ $V - ü.y.s$ dir.

b)$\forall V \subseteq Y$ *açık kümesi için* $F^{+}(V) \subset X$ *açıktır.*

c)$\forall C \subseteq Y$ *kapalı kümesi için* $F^{-}(C) \subset X$ *kapalıdır.*

d)Y *nin her* B *alt kümesi için* $\overline{F^{-}(B)} \subset F^{-}(\overline{B})$ *dır.*

e)$F : X \to (2^{Y}\backslash\{\emptyset\}, \tau_{V^{+}})$ *dönüşümü süreklidir.*

f)$(x_{\alpha})_{\alpha \in J}$, $x \in X$ *e yakınsayan bir ağ ve* $V \subseteq Y$, $F(x) \subseteq V$ *olan bir açık küme ise* $\exists \alpha_{o} \in J$ *vardır öyleki her* $\alpha \in J$ *için* $\alpha \geqslant \alpha_{o}$ *iken* $F(x_{\alpha}) \subseteq V$ *olur.*

Kanıt. $(a) \Longrightarrow (b)$ $V \subset Y$ açık ve $x \in F^{+}(V)$ alalım.$F(x) \subset V$ dir.(a) dan $\exists U_{x} \subset X$ açık kümesi vardır öyleki $x \in U_{x}$ iken $F(x) \subset V$ olur.$x \in F^{+}(V)$ dir.Böylece $x \in U_{x} \subset F^{+}(V)$ olur.$F^{+}(V)$, X içinde açıktır.

$(b) \Longrightarrow (c)$ $C \subset Y$ kapalı olsun.$Y\backslash C$ açıktır.(b) den $F^{+}(Y\backslash C) = X\backslash F^{-}(C)$, X içinde açıktır.Buradan $F^{-}(C)$ kapalıdır.

$(c) \Longrightarrow (d)B \subset Y$ alalım.$\overline{B} \subset Y$ kapalıdır.(c) den $F^{-}(\overline{B})$ kapalıdır.Diğer taraftan $B \subset \overline{B}$ olduğundan $F^{-}(B) \subset F^{-}(\overline{B})$ olur.Her iki taraftan kapanış alırsak istenen $\overline{F^{-}(B)} \subset F^{-}(\overline{B})$ kapsamı çıkar.

$(d) \Longrightarrow (a)x \in X$ ve $F(x) \subset V$ açık kümesini alalım.$Y\backslash V$ kümesi kapalıdır.(d) den $\overline{F^{-}(Y\backslash V)} \subset F^{-}(\overline{Y\backslash V}) = F^{-}(Y\backslash V)$ olur.$F^{-}(Y\backslash V)$ kapalıdır ve $F(x) \subset V$ olduğundan $F(x) \cap (X\backslash V) = \emptyset$ olur.$U_{x} = X\backslash F^{-}(Y\backslash V)$ alınırsa $z \in U_{x}$ ise $F(z) \notin F^{-}(Y\backslash V)$ ve dolayısıyla $F(z) \cap (Y\backslash V) = \emptyset$ olur.Bu $z \in U_{x}$ iken $F(z) \subset V$ olması demektir.O halde F, $V - \ddot{u}.y.s.$ dir.

$(a) \Longrightarrow (e)$ $x \in X$ ve $F(x) \in G \in \tau_{V^{+}}$ olsun.$\tau_{V^{+}}$ topolojisinde tanım gereği $F(x) \in T^{+} \subset G$ olan bir $T \subset Y$ açık kümesi vardır.Buradan $F(x) \subset T$ dir.(a) dan $\exists U_{x} \subset X$ açık vardır $\ni z \in U_{x}$ iken $F(z) \subset T$ olur.Dolayısıyla $F(z) \in T^{+} \subset G$ olur.Böylece $F(U_{x}) \subset G$ olur.$F : X \to (2^{Y}\backslash\{\emptyset\}, \tau_{V^{+}})$ dönüşümü x de süreklidir.$x \in X$ keyfi olduğundan istenen çıkar.

$(e) \Longrightarrow (a)F : X \to (2^{Y}\backslash\{\emptyset\}, \tau_{V^{+}})$ dönüşümü sürekli olsun.$x \in X$ ve $F(x) \subset T$ olan bir T açık kümesi alalım.Bu durumda $F(x) \in T^{+} \in \tau_{V^{+}}$ olur.$F : X \to (2^{Y}\backslash\{\emptyset\}, \tau_{V^{+}})$

dönüşümü x de sürekli olduğundan $x \in X$ olan öyle bir U_x açık kümesi vardır ki $F(U_x) \subset T^+$ olur.Buradan $\forall z \in U_x$ için $F(z) \in T^+$ yani $F(z) \subset T$ bulunur.F, x de $V-$ *ü.y.s.* dir.

$(a) \Longrightarrow (f)$ $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \subset X$ içinde bir ağ, $x_\alpha \to x$ ve $F(x) \subset V$ bir açık küme olsun.(a) dan x i bulunduran bir $U_x \subset X$ açık kümesi $z \in U_x$ iken $F(z) \subset V$ olacak şekilde vardır.$x_\alpha \to x$ olduğundan $x \in U_x$için $\exists \alpha_0 \in I$ vardır $\ni \alpha \geq \alpha_0 \Longrightarrow x_\alpha \in U_x$ olur.Buradan da $F(x_\alpha) \subset V$ olur.Buradan V ye bağlı bir U_x ve U_x e bağlı bir $\alpha_0 \in I$ bulunmuş olur.V ye bağlı bir $\alpha_0 \in I$ vardır öyleki $\alpha \geq \alpha_0$ iken $F(x_\alpha) \subset V$ olur.

$(f) \Longrightarrow (a)$ (f) doğru olsun ve bir $x \in X$ ve $F(x) \subset V$ olan bir $V \subset Y$ açık kümesi için x i bulunduran ve görüntüsü V nin içine giren bir U_x bulunmasın.Bu durum da x i bulunduran her $U \subset X$ açık kümesi için $\exists x_u \in U$ vardır öyleki $F(x_u) \nsubseteq V$ dir.$U(x) = \{U : x \in U \subset X \text{ açık}\}$ olmak üzere $I = \{(x_u, U) : U \in U_x, F(x_u) \nsubseteq V\}$ diyelim ve I kümesini şöyle yönlendirelim.

$(x_u, U) \leq (x_{U'}, U') \Longleftrightarrow U' \subset U$ yönlendirmesiyle I kümesi yönlü bir kümedir.

$\phi : I \to X$, $(x_u, U) \to \phi(x_u, U) = x_U$ olarak tanımlansın.$(x_U)_{U\in\mathcal{U}(x)}$ ağı x e yakınsaktır ancak hiç bir $U \in \mathcal{U}(x)$ için $F(x_U) \subset V$ olmaz.Bu bir çelişkidir.Bu çelişkiye (f) gerçekleşsin fakat (a) gerçekleşmesin kabuluyle düştük.

Kabulümüz yanlıştır.Yani $(f) \Longrightarrow (a)$ doğrudur. ∎

Önerme 4.5 *X, Y topolojik uzaylar ve $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli bir dönüşüm olsun.Bu durumda aşağıdakiler denktirler.*

a)F, *$V-a.y.s$ dir.*

b)$F : X \to (2^Y, \tau_{V^-})$ *süreklidir.*

c)$\forall V \subset Y$ *açık kümesi için* $F^-(V) \subset X$ *açıktır.*

d)$\forall B \subset Y$ *için* $F^-(B^\circ) \subset [F^-(B)]^\circ$ *dir.*

e)$\forall A \subset X$ *için* $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$ *dır.*

f)$\forall A \subset X$ *için* $F(\partial A) \subset \overline{F(A)}$ *dır.*

g)$\forall C \subset Y$ *kapalı kümesi için* $F^+(C) \subset X$ *kapalıdır.*

Kanıt. $(a) \Longrightarrow (b)$ $x \in X$, $F(x) \in T^- \in \tau_{V^-}$ alalım.Bu durumda $F(x) \cap T \neq \emptyset$ olur.(a) dan x i bulunduran ve $z \in U$ iken $F(z) \cap T \neq \emptyset$ olan bir U açık kümesi vardır.Buradan $z \in U$ iken $F(z) \in T^-$ olur ki bu $F(U) \subset T^-$ olması demektir.O halde $F : X \to (2^Y \backslash \{\emptyset\}, \tau_{V^-})$ dır.

$(b) \Longrightarrow (a)$ $x \in X$ ve $F(x) \cap T \neq \emptyset$ olan bir T açık kümesi alalım.Bu durumda $F(x) \in T^- \in \tau_{V^-}$ olur. $F : X \to (2^Y \backslash \{\emptyset\}, \tau_{V^-})$, x de sürekli olduğundan, x i bulunduran ve görüntüsü T^- nin alt kümesi olan bir $U \subset X$ açık kümesi vardır.Yani $\exists U \subset X$ açık $\ni x \in U$ ve $F(U) \subset T^-$ dir.Buradan $z \in U$ ise $F(z) \in T^-$ yada $F(z) \cap T \neq \emptyset$ çıkar.Bu F nin x de $V - a.y.s$ olması demektir.

$(b) \Longrightarrow (c)$ $V \subset Y$ açık kümesi verilsin.$x \in F^-(V)$ alalım.$F(x) \cap V \neq \emptyset$ dir.$F(x) \in V^- \in \tau_{V^-}$ olur. $F : X \to (2^Y \backslash \{\emptyset\}, \tau_{V^-})$ x de sürekli olduğundan, x i bulunduran öyle bir bir $U \subset X$ açık kümesi vardırki $F(x) \in F(U) \subset V^-$ olur.Buradan $\forall z \in U$ için ya $F(z) \in V^-$ dir yada $F(z) \cap V \neq \emptyset$ dir.Buradan $z \in F^-(V)$ olur.Bu $x \in U \subset F^-(V)$ olması demektir.O halde $F^-(V)$ açıktır.

$(c) \Longrightarrow (d)$ $B \subset Y$ herhangi bir küme olsun.B° açık ve $B^\circ \subset B$ dir.Buradan $F^-(B^\circ) \subset F^-(B)$ dir.(c) den $F^-(B^\circ) \subset X$ açıktır.Bunu kullanarak $F^-(B^\circ) = [F^-(B^\circ)]^\circ \subset [F^-(B)]^\circ$ diyebiliriz.Böylece her $B \subset Y$ için $F^-(B^\circ) \subset [F^-(B)]^\circ$ olur.

$(d) \Longrightarrow (c)$ $V \subset Y$ açık kümesi verilsin.$V^\circ = V$ ve (d) den $F^-(V^\circ) \subset [F^-(V)]^\circ$ dir.Buradan $F^-(V) = F^-(V^\circ) \subset [F(V)]^\circ$ yada $F^-(V) \subset [F^-(V)]^\circ$ bulunur.Bir küme içi tarafından kapsanıyorsa açık olacağından $F^-(V) \subset X$ açıktır.

$(c) \Longrightarrow (e)$ (c) doğru olsun.Bir $A \subset X$ için $F(\overline{A}) \not\subset \overline{F(A)}$ olduğunu kabul edelim.Bu durumda öyle bir $y \in Y$ vardır ki $y \in F(\overline{A})$ olduğu halde $y \notin \overline{F(A)}$ olur.Buradan $y \in Y \backslash \overline{F(A)}$ olur.$Y \backslash \overline{F(A)}$ açık küme olduğundan $F^-(Y \backslash \overline{F(A)})$ açıktır.Diğer taraftan $Y \backslash \overline{F(A)} \cap F(A) = \emptyset$ ve $A \subset F^+(F(A))$ dır.Bu durumda $F^-(Y \backslash \overline{F(A)}) \cap F^+(F(A)) = \emptyset$ olacağından $F^-(Y \backslash \overline{F(A)}) \cap A = \emptyset$ bulunur.$F^-(y) \in F^-(Y \backslash \overline{F(A)})$ olduğundan $F^-(y) \cap \overline{A} = \emptyset$ olur.Gerçekten $x \in F^-(y) \cap \overline{A}$ olsa $x \in F^-(y)$, $x \in \overline{A}$ ve $x \in F^-(y) \subset F^-(Y \backslash \overline{F(A)})$ olacağından kapanış tanımı gereği $F^-(Y \backslash F(A)) \cap A \neq \emptyset$ olur.Bu ise $F^-(Y \backslash \overline{F(A)}) \cap A = \emptyset$ oluşu ile çelişir.Bu çelişkiye $A \subset X$ için $F(\overline{A}) \not\subset \overline{F(A)}$ olsun demekle düştük .O halde kabulümüz yanlıştır.Yani $\forall A \subset X$ için $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$ dır.

$(e) \Longrightarrow (f)$ Bir $A \subset X$ kümesi için $\partial A \subset \overline{A}$ olacağından $F(\partial A) \subset F(\overline{A})$ olur.(e) den $F(\partial A) \subset F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$ olacağından $F(\partial A) \subset \overline{F(A)}$ dır.

$(f) \Longrightarrow (e)$ Bir $A \subset X$ kümesi için $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$ dır.Buradan $F(\overline{A}) = F(A^\circ \cup \partial A) = F(A^\circ) \cup F(\partial A)$ yazılabilir.(f) den $F(\partial A) \subset \overline{F(A)}$ dır.Ayrıca $F(A^\circ) \subset \overline{F(A)}$ olacağından eşitliğin sağ yanı $\overline{F(A)}$ içindedir.Buradan $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$ olur.

$(e) \Longrightarrow (g)$Bir $C \subset Y$ kapalı kümesi alalım.$F(F^+(C)) \subset C$ olduğunu biliyoruz.Her iki yandan kapanış alınırsa $\overline{F(F^+(C))} \subset \overline{C} = C$ olur.(e) den $F(\overline{F^+(C)}) \subset \overline{F(F^+(C))}$ olduğundan $F(\overline{F^+(C)}) \subset C$ bulunur.Her iki yana F^+ uygulanır ve $\overline{F^+(C)} \subset F^+(F(\overline{F^+(C)}))$ olduğu göz önüne alınırsa $\overline{F^+(C)} \subset F^+(C)$ bulunur.Bir küme kapanışını kapsıyorsa kapalı olacağından $F^+(C)$ kapalıdır.

$(g) \Longrightarrow (a)$ Bir $x \in X$ ve $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olan bir $V \subset Y$ açık kümesi alalım.$Y \backslash V$ kapalıdır.(g) den $F^+(Y \backslash V)$, X içinde kapalıdır.$F^+(Y \backslash V) = Y \backslash F^-(V)$ eşitliğinden $F^-(V)$ açıktır.$x \in F^-(V)$ olduğu açıktır.$U = F^-(V)$ dersek $z \in U$ ise $F(z) \cap V \neq \emptyset$ olur.F, x de $V - a.y.s$ dir.Bu her $x \in X$ için doğru olacağından F, X üzerinde $V - a.y.s.$ dir. ■

Önerme 4.6 *X, Y topolojik uzaylar ve $F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm olsun.Bu durumda aşağıdakiler denktirler.*

a)F, $V - a.y.s.$ dir.

b)$x \in X$, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$, x e yakınsak bir ağ ve V, $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olan bir açık küme ise V ye bağlı öyle bir $\alpha_0 \in I$ indisi vardır ki $\alpha \geq \alpha_0$ iken $F(x_\alpha) \cap V \neq \emptyset$ olur.

c)$x \in X$, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$, x e yakınsak bir ağ ve $y \in F(x)$ ise y ye yakınsak, elemanları $y_\alpha \in F(x_\alpha)$ biçiminde seçilmiş bir $(y_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı vardır.

Kanıt. $(a) \Longrightarrow (b)$$x \in X$ ve F, x de $V - a.y.s.$ olsun.x e yakınsak bir $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı ve $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olan bir $V \subset Y$ açık kümesi alalım.Bu durumda (a) dan x i bulunduran bir $U \subset X$ kümesi vardır ki $z \in U$ iken $F(z) \cap V \neq \emptyset$ olur.Diğer taraftan

$x_\alpha \to x \in U$ olduğundan U ya bağlı öyle bir $\alpha_0 \in I$ indisi vardır ki $\alpha \geq \alpha_0$ iken $x_\alpha \in U$ dolayısıyla $F(x_\alpha) \cap V \neq \emptyset$ olur.Böylece V için $\alpha \geq \alpha_0$ iken $F(x_\alpha) \cap V \neq \emptyset$ gerektirmesini sağlayan bir $\alpha_0 \in I$ indisi vardır.

$(b) \Longrightarrow (c) x \in X$ e yakınsak bir $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı ve $y \in F(x)$, $y \in V$ olan bir V açık kümesi alalım.Bu durumda $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olur.(b) den $\exists \alpha_0 \in I$ vardır öyle ki $\alpha \geq \alpha_0$ iken $F(x_\alpha) \cap V \neq \emptyset$ dir.$I_V = \{\alpha \in I : \forall \beta \geq \alpha$ için $F(x_\beta) \cap V \neq \emptyset\}$ kümesini ve $\mathcal{V}(y), y$ yi bulunduran Y nin açık kümelerinin ailesi olmak üzere

$J = \bigcup_{V \in \mathcal{V}(y)} I_V \times \{V\}$ kümesini tanımlayalım.J yi şöyle yönlendirelim.

$(\alpha, V) \leq (\beta, V') \Longleftrightarrow \alpha \leq \beta$ ve $V' \subset V$

$\phi : J \to Y$, $(\alpha, V) \to \phi(\alpha, V) = y_\alpha$ diyelim.$y_\alpha \in F(x_\alpha) \cap V \neq \emptyset$ ve $y_\alpha \to y$ olur.

$(c) \Longrightarrow (a)$ (c) sağlansın.F in bir $x \in X$ de $V - a.y.s.$ olmadığını kabul edelim.Bu durumda öyle bir $V \subset Y$ açık kümesi vardır ki $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olduğu halde x i bulunduran her $U \in \mathcal{U}(x)$ açık kümesi için en az bir $x_U \in U$ vardır öyleki $F(x_U) \cap V = \emptyset$ olur.

$I_V = \{(x_U, U) : x_U \in U \in \mathcal{U}(x), F(x_U) \cap V = \emptyset\}$ kümesini

$(x_U, U) \leq (x_{U'}, U') \Longleftrightarrow U' \subset U$ olacak şekilde yönlendirelim.

$\phi : I_V \to X$, $(x_U, U) \to \phi((x_U, U)) = x_U$ dersek $x_U \to x$ olur.$y \in F(x) \cap V \neq \emptyset$ elemanını alalım.$y \in F(x)$ olduğundan (c) den elemanları $y_U \in F(x_U)$, $U \in \mathcal{U}(x)$ olarak seçilmiş öyle bir $(y_U)_{U \in \mathcal{U}(x)}$ ağı vardır ki $y_U \to y$ olur.$y \in V$ olduğundan $\exists U_0 \in \mathcal{U}(x)$ vardır $\ni U \subset U_0$ olan her $U \in \mathcal{U}(x)$ için $y_U \in V$ olur.$y_U \in F(x_U)$ olduğundan $y_U \in F(x_U) \cap V \neq \emptyset$ olur ki bu $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(x)}$ ağının oluşturuluşu ile çelişir.Bu çelişkiye F, x de $V - a.y.s.$ olmasın demekle düştük.Kabulümüz yanlıştır.Yani F, x de $V - a.y.s.$ dir. ■

Yukarıdaki iki önerme birleştirilirse aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 4.7 $F : X \to 2^Y \backslash \{\emptyset\}$ *küme değerli dönüşümü için aşağıdakiler denktir.*

a)$F(\cdot)$, *V-süreklidir.*

b)$\forall V \subset Y$ *açık kümesi için,* $F^+(V), F^-(V)$ *kümeleri* X *içinde açıktır.*

c)$\forall C \subset Y$ *kapalı kümesi için,* $F^+(C), F^-(C)$ *kümeleri* X *içinde kapalıdır.*

d)$\{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$, x *e yakınsayan bir ağ ve* $V \subset Y$ *açık küme öyle ki* $F(x) \subset V$ *veya* $F(x) \cap V \neq \emptyset$ *ise* $\exists \alpha_0 \in J$ *vardır öyleki* $\forall \alpha \geq \alpha_0$ *için* $F(x_\alpha) \subset V$ *veya* $F(x_\alpha) \cap V \neq \emptyset$ *dir.*

Genel olarak $V - ü.y.s.$ ve $V - a.y.s$ kavramları farklı kavramlardır.

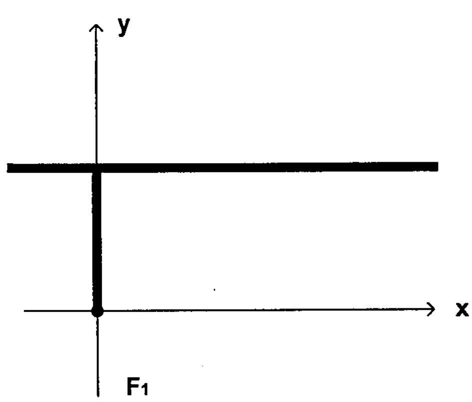
Örnek 4.1 $X = Y = \mathbb{R}$ *ve* $F_1, F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *küme değerli dönüşümler,*
$F_1(x) = \begin{cases} [0,1] & x = 0 \text{ ise} \\ \{1\} & x \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$ *ve* $F_2(x) = \begin{cases} \{0\} & x = 0 \text{ ise} \\ [0,1] & x \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$ *küme değerli dönüşümlerinden ilki* $V - ü.y.s.$ *olduğu halde* $V - a.y.s$ *değildir.*

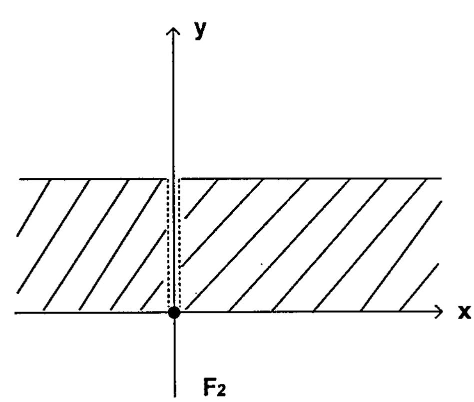
İkincisi ise $V - a.y.s.$ *olduğu halde* $V - ü.y.s.$ *değildir.*

Çözüm 4.6 $x \neq 0$ *için* F_1 *tek değerli ve sürekli olduğundan* $V - ü.y.s.$ *dir.*

$x = 0$ *için* $F_1(0) = [0,1] \subset V$ *olan hangi* V *açık kümesini alırsak alalım* $F_1^+(V) = \mathbb{R}$ *olur ve* $F_1^+(V)$ *açıktır.*

F_1, $x = 0$ *da* $V - ü.y.s.$ *dir.*





$F_1(0) \cap (0,1) \neq \emptyset$ *olduğu halde* $F_1^-((0,1)) = \{0\}$ *olduğundan* $F^-((0,1))$ *açık değildir.*$F_1, x = 0$ *da* $V - a.y.s.$ *değildir.*

Şimdi F_2 *yi inceliyelim.*$V = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ *açık ve* $F_2(0) = \{0\} \subset (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}) = V$ *olduğu* *halde* $F_2^+(V) = \{0\}$ *açık küme değildir.Ancak* $F_2(0) \cap V \neq \emptyset$ *olan* V *açık kümesi ne olursa olsun* $F_2^-(V) = \mathbb{R}$ *açık olup* F_2, $x = 0$ *da* $V - a.y.s.$ *dir.*

Tanım 4.7 X, Y *topolojik uzaylar* $x_0 \in X$ *herhangi bir nokta* $\mathcal{U}(x_0)$, x_0 *ın* X *üzerindeki topolojiye göre komşuluklar ailesi ve* $F : X \rightsquigarrow Y$ *bir küme değerli dönüşüm olsun.*

a)$U^{\#}(x_0) = \{V \subset X : \forall U \in \mathcal{U}(x_0)$ *için* $U \cap V \neq \emptyset\}$ *ailesine* $\mathcal{U}(x_0)$ *ın grill i (ızgarası) denir.*

b)$(F(x))_{x \in X}$ *ailesi ve* $I = X$ *indeks kümesi üzerindeki* $U(x_0)$ *süzgeçini düşünelim.Bu durumda* F *nin* x_0 *daki üst ve alt limitleri;*

$$\limsup_{x \to x_0} F(x) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}(x_0)} \overline{\bigcup_{x \in U} F(x)} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}(x_0)} \overline{F(U)},$$

$$\liminf_{x \to x_0} F(x) = \bigcap_{U \in U^{\#}(x_0)} \overline{\bigcup_{x \in U} F(x)} = \bigcap_{U \in U^{\#}(x_0)} \overline{F(U)} \text{ dır.[12]}$$

Önerme 4.8 X, Y *topolojik uzaylar* $F : X \rightsquigarrow Y$ *bir küme değerli dönüşüm ve* $x_0 \in X$ *olsun.Bu durumda* F *nin* x_0 *da* $V - a.y.s.$ *olması için gerekli ve yeterli koşul* $F(x_0) \subset \liminf_{x \to x_0} F(x)$ *olmasıdır.*

Kanıt. $\Longrightarrow$:F, x_0 da $V - a.y.s.$ olsun ve $F(x_0) \nsubseteq \liminf_{x \to x_0} F(x)$ olduğunu kabul edelim.Bu durum da öyle bir $y \in V$ vardır ki $y \in F(x_0)$ fakat $y \notin \liminf_{x \to x_0} F(x)$ olur.Buradan $\exists U \in U^{\#}(x_0)$ komşuluğu vardır öyleki $y \notin \overline{F(U)}$ olur.Kapanış tanımı gereği y nin öyle bir komşuluğu $V \cap F(U) = \emptyset$ olacak şekilde vardır.

Diğer taraftan $y \in V$ ve $y \in F(x_0)$ olduğundan $V \cap F(x_0) \neq \emptyset$ dir.F, x_0 da $V - a.y.s.$ olduğundan x_0 ın öyle bir $U_1 \in \mathcal{U}(x_0)$ komşuluğu vardır ki $U_1 \subset F^-(V)$ olur.$U_1 \cap U \neq \emptyset$ olduğundan $F(U_1) \cap F(U) \neq \emptyset$ olur ve buradan $F(U) \cap V \neq \emptyset$ çıkarki bu bir çelişkidir.Bu çelişkiye kabulümüzle düştük.O halde her $U \in U^{\#}(x_0)$

için $F(x_0) \subset \overline{F(U)}$ olur.$F(x_0) \subset \liminf\limits_{x \to x_0} F(x)$ olur.

$\Longleftarrow$:Tersine $F(x_0) \subset \liminf\limits_{x \to x_0} F(x)$ olsun.F, x_0 da $V - a.y.s.$ olmasın.Bu durumda $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ olan öyle bir $V \subset Y$ açık kümesi vardır ki x_0 ı bulunduran her $U \in \mathcal{U}(x_0)$ açık kümesi içinden en az bir $x_U \in U$ elemanı için $F(x_U) \cap V = \emptyset$ olur.$A = \{x_U : U \in \mathcal{U}(x_0), : F(x_U) \cap V = \emptyset\}$ kümesi $\mathcal{U}(x_0)$ ın her bir kümesi ile kesiştiğinden $A \in U^{\#}(x_0)$ dır.$F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ idi.Bir $y \in F(x_0) \cap V$ alınırsa $y \in F(x_0)$ olur dolayısıyla $y \in \liminf\limits_{x \to x_0} F(x) = \bigcap\limits_{U \in U^{\#}(x_0)} \overline{F(U)}$ olur yani her $U \in U^{\#}(x_0)$ için $y \in \overline{F(U)}$ olacaktır.Özel olarak $y \in \overline{F(A)} = F(\{x_U : U \in \mathcal{U}(x_0), F(x_U) \cap V = \emptyset\}$ dir.$y \in V$ olduğundan ya $V \cap F(A) \neq \emptyset$ dir yada $V \cap \bigcup\limits_{x_U \in A} F(x_U) \neq \emptyset$ dir.$\exists x_U \in A$ için $F(x_U) \cap V \neq \emptyset$ olur ki bu A kümesinin kuruluşu ile çelişir.Bu çelişkiye kabulümüzle düştük.Kabulümüz yanlıştır.

O halde F, x_0 da $V - a.y.s.$ dir. ■

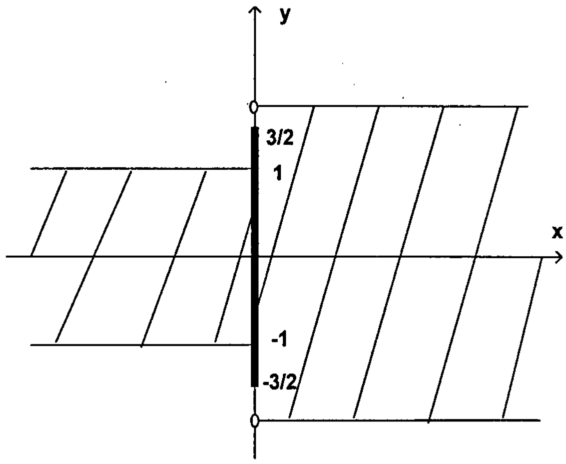
$(X, d_1), (Y, d_2)$ iki metrik uzay, $F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm ve $x_0 \in X$ olmak üzere alt ve üst limit tanımları $\liminf\limits_{x \to x_0} F(x) = \{y \in Y : \lim\limits_{x \to x_0} d(y, F(x)) = 0\} = \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} \bigcap\limits_{\eta > 0} \bigcup\limits_{x \in B_{d_1}(x_0, \eta)} B(F(x), \varepsilon) = \bigcap\limits_{\eta > 0} \overline{\bigcup\limits_{x \in B_{d_1}(x_0, \eta)} F(x)} = \bigcap\limits_{\eta > 0} \overline{F(B_{d_1}(x_0, \eta))}$ *ve*

$\limsup\limits_{x \to x_0} F(x) = \{y \in Y : \liminf\limits_{x \to x_0} d(y, F(x)) = 0\} = \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} \bigcup\limits_{\eta > 0} \bigcap\limits_{x \in B_{d_1}(x_0, \eta)} B(F(x), \varepsilon)$

olur.

Örnek 4.2 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} [-1, 1] & ; \ x < 0 \\ [\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}] & ; \ x = 0 \\ [-2, 2] & ; \ x > 0 \end{cases}$ *olmak üzere* $\limsup\limits_{x \to 0} F(x)$ *ve* $\liminf\limits_{x \to 0} F(x)$ *kümelerini bulunuz.*

Çözüm 4.7



$\liminf\limits_{x \to 0} F(x) = [-1, 1]$, $\limsup\limits_{x \to 0} F(x) = [-2, 2]$ *olur.*

Önerme 4.9 *X, Y iki metrik uzay, $F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun.F in x_0 da $V - a.y.s.$ olması için gerekli ve yeterli koşul $F(x_0) \subset \liminf\limits_{x \to x_0} F(x)$ olmasıdır.*

Kanıt. $\Longrightarrow$: F x_0 da $V - a.y.s.$ ve $y \in F(x_0)$ olsun.F, x_0 da $V - a.y.s.$ olduğundan x_0 a yakınsak $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için elemanları $y_n \in F(x_n)$ olacak şekilde bir $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır ve $y_n \to y$ dir.Böylece $y \in \liminf\limits_{x \to x_0} F(x)$ dir.
$\Longleftarrow$: $F(x_0) \subset \liminf\limits_{x \to x_0} F(x)$ olsun.$y \in F(x_0)$ alalım.Hipotezden $y \in \liminf\limits_{x \to x_0} F(x)$ olur.$x_n \to x_0$ olan öyle bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi ve $y_n \in F(x_n)$ olan öyle bir $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır ve $y_n \to y$ dir.Buradan, F, x_0 da $V - a.y.s.$ dir. ∎

X ve Y topolojik uzaylar olsunlar.Bir $F : X \rightsquigarrow Y$ küme değerli dönüşümünün grafiğini $G_r F = \{(x, y) : y \in F(x)\} \subset X \times Y$ biçiminde tanımlamış ve grafiği kapalı olan küme değerli dönüşüme de kapalı dönüşüm demiştik.
Ağları kullanarak F nin x_0 daki kapalılığını şöyle ifade edebiliriz.Elemanları grafik içinden seçilen ve $X \times Y$ nin (x_0, y_0) noktasına yakınsak olan $\forall ((x_\alpha, y_\alpha))_{\alpha \in I} \in G_r F$

ağı için $y_0 \in F(x_0)$ yada $(x_0, y_0) \in G_rF$ olur.

Bu durum her $x_0 \in X$ için gerçekleşirse G_rF, $X \times Y$ içinde kapalı olur.

Eğer kapalılık özelliği terimleri sadece grafik içinden seçilen dizilerle gerçekleşiyorsa F ye dizisel kapalıdır denir.

Şimdi bir küme değerli dönüşümün kapalılığı ve dizisel kapalılığıyla ilgili karakterizasyonları ve özellikleri verelim.

Önerme 4.10 *X ve Y metrik uzaylar ve $F : X \rightsquigarrow Y$ bir küme değerli dönüşüm olsun.*

Bu durumda F nin kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall x_0 \in X$ için $\limsup\limits_{x \to x_0} F(x) \subset F(x_0)$ olmasıdır.

Kanıt. $\Longrightarrow$: F, $x_0 \in X$ de kapalı olsun.Bu G_rF nin $X \times Y$ içinde kapalı olması demektir.$y \notin F(x_0)$ alalım.Buradan $(x_0, y) \notin G_rF = \overline{G_rF}$ olur.Bu durumda $\exists\delta > 0$ ve $\exists\varepsilon > 0$ vardır öyle ki $(x_0, y) \in B(x_0, \delta) \times B(y, \varepsilon)$ ve $[B(x_0, \delta) \times B(y, \varepsilon)] \cap G_rF = \emptyset$ olur.Bu ise $\forall z \in B(x_0, \delta)$ iken $F(z) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ oluşunu verir.Bu $F(B(x_0, \delta)) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ olması demektir.Dolayısıyla $y \notin \overline{F(B(x_0, \delta))}$ olur.O halde $y \notin \bigcap\limits_{\delta>0} \overline{F(B(x_0, \delta))} = \limsup\limits_{x \to x_0} F(x)$ dir.Böylece $\limsup\limits_{x \to x_0} F(x) \subset F(x_0)$ elde edilir.

$\Longleftarrow$: $\forall x_0 \in X$ için $\limsup\limits_{x \to x_0} F(x) \subset F(x_0)$ olsun.Bir $(z, y) \notin G_rF$ alalım.$y \notin F(z)$ dir.Hipotez gereği $y \notin \limsup\limits_{x \to z} F(x)$ olur.Buradan $y \notin \bigcap\limits_{\delta>0} \overline{F(B(z, \delta))}$ olur.Bu $\exists\delta_0 > 0$ için $y \notin \overline{F(B(z, \delta_0))}$ oluşunu verir.Kapanış tanımı gereği $\exists\varepsilon > 0$ vardır $\ni F(B(z, \delta_0)) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ dir.Böylece $\exists\delta_0 > 0$ vardır $\ni \varepsilon > 0$ için $[B(z, \delta_0) \times B(y, \varepsilon)] \cap G_rF = \emptyset$ olur.Bu $(z, y) \notin \overline{G_rF}$ demektir.Buradan $\overline{G_rF} \subset G_rF$ olur.

Sonuç olarak G_rF kapalıdır. ∎

Önerme 4.11 $F : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ *küme değerli dönüşümü $x \in X$ de kapalıdır ancak* *ve ancak $x \in X$ e yakınsayan her $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ ağı için*

$$\bigcap_{\alpha\in J}\overline{\bigcup_{\beta\geqslant\alpha} F(x_\beta)} \subseteq F(x)$$

dır.

Kanıt. $\Longrightarrow$: $x_\alpha \to x \in X$ ve $y \in \bigcap_{\alpha\in J}\overline{\bigcup_{\beta\geqslant\alpha} F(x_\beta)}$ olsun.$R = \{[\alpha, V] \in J \times \mathcal{U}(y) : x_\alpha \in F^-(V)\}$ olsun ve R üzerine $[\alpha_2, V_2] \leq [\alpha_1, V_1]$ ancak ve ancak $\alpha_2 \leq \alpha_1$ ve $V_1 \subset V_2$ yönlendirmesini koyalım.R gerçektende yönlü bir kümedir Çünkü $[\alpha_1, V_1]$,$[\alpha_2, V_2] \in R$ olsun.J yönlü bir küme olduğundan $\alpha \in J$ vardır öyle ki $\alpha_1 \leq \alpha$ ve $\alpha_2 \leq \alpha$ dır.

$y \in \bigcap_{\alpha\in J}\overline{\bigcup_{\beta\geqslant\alpha} F(x_\beta)}$ ve $V_1 \cap V_2 = V \in \mathcal{U}(y)$ olduğundan $\alpha' \in J$,$\alpha' \geq \alpha$ bulabiliriz öyle ki $x_{\alpha'} \in F^-(V)$ olur.Buradan $[\alpha_1, V_1]$,$[\alpha_2, V_2] \leq [\alpha', V]$ dir.Bu yüzden R yönlü bir kümedir.

$\varphi : R \to J$, $\varphi(\alpha, V) = \alpha$ dönüşümünü tanımlayalım.$\varphi(R)$, J içinde cofinaldir.Herhangi bir $[\alpha, V] \in R$ için $y_{\varphi(\alpha,V)} \in F(x_\alpha) \cap V$ ve $x_{\varphi(\alpha,V)} = x_\alpha$ olsun.$\varphi(R)$, J içinde cofinal olduğu için $x_{\varphi(\alpha,V)} \to y$ dir.$y_{\varphi(\alpha,V)} \to y$ olduğunu göstereceğiz.$V' \in \mathcal{U}(y)$ olsun.O halde $\alpha' \in J$ vardır öyle ki $x_{\alpha'} \in F^-(V')$ dır.Herhangi bir $[\alpha, V] \geq [\alpha', V']$ için $y_{\varphi(\alpha,V)} \in V \subset V'$ olur ki bu da $y_{\varphi(\alpha,V)} \to y$ olmasını gerektirir.$[x_{\varphi(\alpha,V)}, y_{\varphi(\alpha,V)}] \in G_rF$ olduğundan ve $F(\cdot)$ in , x de kapalı olduğu hipotezinden $(x, y) \in G_rF$ dir deriz.

Buradan $\bigcap_{\alpha\in J}\overline{\bigcup_{\beta\geqslant\alpha} F(x_\beta)} \subset F(x)$ olur.

$\Longleftarrow$: $\{[x_\alpha, y_\alpha]\} \subset G_rF$, $[x, y] \in X \times Y$ ye yakınsayan bir ağ olsun.$\forall\alpha \in J$ için $y_\beta \in \overline{\bigcup_{\beta\geqslant\alpha} F(x_\beta)}$ ve bu yüzden $\forall\alpha \in J$ için $y \in \overline{\bigcup_{\beta\geqslant\alpha} F(x_\beta)}$ dir.

Buradan, $y \in \bigcap_{\alpha\in J}\overline{\bigcup_{\beta\geqslant\alpha} F(x_\beta)} \subset F(x)$ dir ki bu da G_rF nin $X \times Y$ içinde kapalı olduğunu gösterir. ■

Önerme 4.12 *$F : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ kapalı bir küme değerli dönüşüm ve $K \in \mathcal{P}_k(X)$ ise $F(K)$ da Y içinde kapalıdır.*

Kanıt. $y \in \overline{F(K)}$ olsun.O halde en az bir $(y_\alpha)_{\alpha\in J} \subseteq F(K)$ ağı bulabiliriz öyleki $y_\alpha \to y \in Y$ olur.
Buradan

$$y_\alpha \in F(x_\alpha), x_\alpha \in K, \alpha \in J$$

dır.
$K \subseteq X$ kompakt olduğundan $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$' nin $(x_\beta)_{\beta\in I}$ alt ağını bulabiliriz öyleki $x_\beta \to x \in K$ olur.Böylece

$$(x_\beta, y_\beta) \in G_rF \text{ ve } (x_\beta, y_\beta) \to (x,y) \in X \times Y$$

olur.
G_rF kapalı olduğundan $(x,y) \in G_rF$ dir.Bu yüzden $y \in F(K)$ dır.Dolayısıyla $F(K) \subseteq Y$ kapalıdır. ■

Önerme 4.13 $F : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ *küme değerli dönüşümü* $\mathcal{P}_k(Y)$ *değerli ve* x *noktasında V-üstten yarı süreklidir ancak ve ancak*

$$(x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha\in J} \subseteq G_rF, \; x_\alpha \to x \in X$$

şeklindeki her ağ için $(y_\alpha)_{\alpha\in J}$, $F(x)$ *de bir yığılma noktasına sahiptir.*

Kanıt. $\Rightarrow$: $(x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha\in J} \subseteq G_rF$ olsun ve $x_\alpha \to x \in X$ olduğunu varsayalım.$(y_\alpha)_{\alpha\in J}$ nın $F(x)$ de bir yığılma noktasına sahip olmadığını varsayalım.Buradan her $y \in F(x)$ için $V(y) \in \mathcal{U}(y)$ ve $\alpha_o(y) \in J$ bulabiliriz öyleki $\alpha \geqslant \alpha_o(y)$ iken $y_\alpha \notin V(y)$ olur.O halde $\{V(y) : y \in F(x)\}$ ailesi $F(x)$ kompakt kümesinin açık bir örtüsünü oluşturur.Bu yüzden $\{V(y_k)\}_{k=1}^N$ sonlu bir alt örtü vardır.$V = \bigcup\limits_{k=1}^{N} V(y_k) \supseteq F(x)$ olsun
Açıktır ki, $\alpha_1 \in J$ vardır öyleki $\alpha \geqslant \alpha_1$ iken $y_\alpha \notin V$ dır.
Diğer taraftan, $F(\cdot)$ üstten yarı sürekli olduğundan $U \in \mathcal{U}(x)$ bulabiliriz öyleki $F(U) \subseteq V$ olur.$x_\alpha \to x \in X$ olduğundan her $\alpha \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_1$ için $x_\alpha \in U$ olur ve bu

yüzden her $\alpha \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_1$ için $y_\alpha \in V$ olması bir çelişki yaratır.

Bu yüzden $(y_\alpha)_{\alpha \in J}$, $F(x)$ içinde bir yığılma noktasına sahipdir.

$\Leftarrow$:Hipotezinden dolayı $F(x) \in \mathcal{P}_k(x)$ olduğunu söyleyebiliriz.x deki üstten yarı sürekliliği kurmak için, eğer $x_\alpha \to x \in X$ ve $V \subseteq Y$ açık küme öyleki $F(x) \subseteq V$ ise $\exists \alpha_o \in J$ vardır öyleki $\alpha \geqslant \alpha_o$ iken $F(x_\alpha) \subseteq V$ olduğunu göstermemiz gerekir. Varsayalım ki bu doğru olmasın.O halde $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ nin bir $(x_\beta)_{\beta \in J}$ alt ağını bulabiliriz öyleki $F(x_\beta) \cap V^c \neq \varnothing$ olur. $y_\beta \in F(x_\beta) \cap V^c$ olsun. $x_\beta \to x \in X$ olduğundan ve hipotezden $(y_\beta)_{\beta \in I}$' nın $y \in F(x)$ gibi bir yığılma noktasına sahip olduğunu söyleyebiliriz. Bu yüzden $(y_\beta)_{\beta \in I}$' nın bir $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ alt ağı vardır öyleki $y_\lambda \to y \in F(x) \cap V^c$ olur ki bu V' nin seçimiyle bir çelişki oluşturur.Bu çelişkinin sebebi kabulümüzdür. O halde F,x noktasında üstten yarı süreklidir. ∎

Sonuç 4.1 $F : X \to \mathcal{P}_k(Y)$ *V-üstten yarı sürekli ve* $K \in \mathcal{P}_k(X)$ *ise*

$$F(K) \in \mathcal{P}_k(Y)$$

dır.

Kanıt. $(y_\alpha)_{\alpha \in J}$, $F(K)$ içinde bir ağ olsun.Bu durumda

$$y_\alpha \in F(x_\alpha), x_\alpha \in K, \alpha \in J$$

dır.K kompakt olduğundan, bir $(x_\beta)_{\beta \in I}$ alt ağı bulabiliriz öyleki $x_\alpha \to x \in K$ olur.$(y_\beta)_{\beta \in I}$' nın $y \in F(x)$ gibi bir yığılma noktasına sahip olduğunu söyleyebiliriz.Bu yüzden $(y_\beta)_{\beta \in I}$' nın bir $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ alt ağını bulabiliriz öyleki $y_\lambda \to y \in y$ olur. Bu yüzden $F(K)$ kompakttır. ∎

Örnek 4.3 *Yukarıdaki sonuçta üstten yarı süreklilik yerine alttan yarı süreklilik alırsak sonuç doğru olmaz.*

$X = Y = [0,1]$ *olsun ve* $F(x) = \begin{cases} [0,x] & , \quad x \in (0,1] \quad ise \\ 1 & , \quad x = 0 \quad ise \end{cases}$ *olsun.*

$F(\cdot)$, *V-alttan yarı süreklidir ama* $F([0,1]) = (0,1]$ *dir. Yani* $F(\cdot)$, *kompakt kümeleri kompakt kümelere taşımaz.*

Önerme 4.14 $F : X \to \mathcal{P}_k(Y)$ *üstten yarı sürekli ise* $F(\cdot)$ *kapalıdır.*

Kanıt. $(x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha \in J} \subseteq G_r F$ bir ağ olsun ve $(x_\alpha, y_\alpha) \to (x,y) \in X \times Y$ olduğunu varsayalım.Önerme 4.12 den $y \in F(x)$ olduğunu yani $F(\cdot)$ in kapalı olduğunu söyleyebiliriz. ■

$F : X \to 2^Y \backslash \{\emptyset\}$ küme değerli dönüşümü verilsin.$\overline{F}(\cdot) : X \to \mathcal{P}_f(Y)$ küme değerli dönüşümü $\forall x \in X$ için $\overline{F}(x) = \overline{F(x)}$ biçiminde tanımlanmıştı.

Bu bölümün alttan yarı sürekliliğiyle ilgili önerme aşağıda verilmiştir.

Önerme 4.15 $F : X \to 2^Y \backslash \{\emptyset\}$ *küme değerli dönüşümü alttan yarı süreklidir ancak ve ancak* $\overline{F}(\cdot)$ *da alttan yarı süreklidir.*

$\Longrightarrow$: F, $x \in X$ de $V - a.y.s.$ olsun.$\overline{F}(x) \cap V \neq \emptyset$ olan bir V açık kümesi alalım.V açık olduğundan kapanış tanımı gereği $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olur.F, $V - a.y.s.$ olduğundan x i bulunduran öylebir $U \subset X$ açık kümesi vardır ki her $z \in U$ için $\overline{F}(z) \cap V \neq \emptyset$ olur.Buradan $\overline{F}$, dönüşümü x de $V - a.y.s.$ olur.

$\Longleftarrow$: $\overline{F}$, $x \in X$ de $V - a.y.s.$ olsun.$F(x) \cap V \neq \emptyset$ olan bir V açık kümesi alalım.Bu durumda $\overline{F}(x) \cap V \neq \emptyset$ ve $\overline{F}$, x de $V - a.y.s.$ olduğundan X içinde $x \in X$ i bulunduran öyle bir U açık kümesi vardır ki her $z \in U$ için $\overline{F}(z) \cap V \neq \emptyset$ ve dolayısıyla $F(z) \cap V \neq \emptyset$ olur ki bu F nin x de $V - a.y.s.$ olması demektir.

Aynı sonuç üstten yarı sürekli küme değerli dönüşümler için doğru değildir. Bunu için bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.4 $X = Y = \mathbb{R}$ *ve* $F : X \to 2^Y \backslash \{\emptyset\}$ *küme değerli dönüşümü* $F(x) = (x-1, x+1)$ *biçiminde tanımlansın.*

$F^+((-1,1)) = \{0\}$ *dır ve bu yüzden üstten yarı sürekli değildir.*
Ama $\overline{F}(x) = [x-1, x+1]$ *dir ve üstten yarı süreklidir.*

Önerme 4.16 *Y normal topolojik uzay ve $F : X \to 2^Y \backslash \{\emptyset\}$ üstten yarı sürekli bir küme değerli dönüşüm ise $\overline{F}(\cdot)$ da üstten yarı süreklidir.*

Kanıt. $V \subset Y$ açık bir küme olsun.$\overline{F}^+(V) \subset X$ in açık olduğunu göstermeliyiz.$x \in \overline{F}^+(V)$ olsun.Bu durumda $\overline{F}(x) \subset V$ dir.Y normal bir uzay olduğundan $V_1 \subset Y$ açık kümesi bulabiliriz öyle ki $\overline{F}(x) \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset V$ olur.$F(\cdot)$ in üstten yarı sürekli olduğu hipoteziyle $U \in \mathcal{U}(x)$ bulabiliriz öyle ki $x' \in U$ için $F(x') \subset \overline{V}_1 \subset V$ ve buradan da $\overline{F}(x') \subset \overline{V}_1 \subset V$ dir.Böylece $U \subset \overline{F}^+(V)$ olur.
O halde $\overline{F}^+(V) \subset X$ açıktır. ■

Önerme 4.16 ve 4.17 yi birleştirerek aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

Sonuç 4.2 *Y normal topolojik uzay ve $F : X \to 2^Y \backslash \{\emptyset\}$ sürekli bir küme değerli dönüşüm ise $\overline{F}(\cdot)$ da süreklidir.*

$F_1, F_2 : X \to 2^Y \backslash \{\varnothing\}$ küme değerli dönüşümler ise $F_1 \cup F_2 : X \to 2^Y \backslash \{\varnothing\}$ küme değerli dönüşümü $(F_1 \cup F_2)(x) = F_1(x) \cup F_2(x)$ biçiminde tanımlanır. Alttan yarı süreklilik ve üstten yarı süreklilik kavramları bu işlem ile uyumlu davranırlar.

Önerme 4.17 *$F_1, F_2 : X \to 2^Y \backslash \{\varnothing\}$ küme değerli dönüşümler olsun*

a)$F_1(\cdot), F_2(\cdot)$ V-üstten yarı sürekli ise $F_1 \cup F_2(\cdot)$ de V-üstten yarı süreklidir.

b)$F_1(\cdot), F_2(\cdot)$ V-alttan yarı sürekli ise $F_1 \cup F_2(\cdot)$ de V-alttan yarı süreklidir.

c)$F_1(\cdot), F_2(\cdot)$ kapalı ise $F_1 \cup F_2(\cdot)$ de kapalıdır.

Kanıt. F_1, F_2 nin üstten yarı sürekli olduğunu varsayalım.
Her $V \subset Y$ açık kümesi için $(F_1 \cup F_2)^+(V) = F_1^+(V) \cup F_2^+(V)$ açıktır.
Benzer şekilde, F_1, F_2 nin alttan yarı sürekli olduğunu varsayalım.Her $V \subset Y$ açık kümesi için $(F_1 \cup F_2)^-(V) = F_1^-(V) \cup F_2^-(V)$ açıktır.
Son olarak, F_1, F_2 kapalı ise, $G_r(F_1 \cup F_2) = G_r(F_1) \cup G_r(F_2)$ de kapalıdır. ■

$F_1, F_2 : X \longrightarrow 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ küme değerli dönüşümler ise $F_1 \cap F_2 : X \longrightarrow 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ küme değerli dönüşümü $(F_1 \cap F_2)(x) = F_1(x) \cap F_2(x)$ biçiminde tanımlanmıştı.

Birleşim durumunun aksine kesişimde durum daha karışıktır.Şimdi bunun üzerinde duralım.

Önerme 4.18 *Y normal topolojijk uzay ve $F_1, F_2 : X \longrightarrow \mathcal{P}_f(Y)$ üstten yarı sürekli küme değerli dönüşümleri her $x \in X$ için $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \varnothing$ oluyorsa $x \longrightarrow (F_1 \cap F_2)(x)$ dönüşümü üstten yarı süreklidir.*

Kanıt. $V \subseteq Y$ açık kümesi verilsin.$(F_1 \cap F_2)^+(V)$ nin X içinde açık olduğunu göstermeliyiz.

$$(F_1 \cap F_2)^+(V) = \{x \in X : F_1(x) \cap F_2(x) \setminus V = \varnothing\}$$

dir.
$F_1(x)$ ve $F_2(x) \setminus V = F_2(x) \cap V^c$ kümeleri Y içinde kapalı ve bu uzay normal olduğundan $V_1, V_2 \subseteq Y$ ayrık açık kümelerini bulabiliriz öyleki $F_1(x) \subseteq V_1$ ve $F_2(x) \setminus V \subseteq V_2$ olur.$V_3 = V_2 \cup V$ olsun.O zaman $F_2(x) \subseteq V_3$ dür.
F_1, F_2 üstten yarı sürekli olduğundan $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$ bulabiliriz öyleki her $x' \in U_1$ için $F_1(x') \subseteq V_1$ ve her $x' \in U_2$ için $F_2(x') \subseteq V_3$ olur.
$U = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$ kümesini kuralım.Bu durumda $x' \in U$ için

$$(F_1 \cap F_2)(x') \subseteq V_1 \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cup V) \subseteq V$$

olur.$(F_1 \cap F_2)^+(V)$ açık bir kümedir.Bu da $(F_1 \cap F_2)(\cdot)$ nın üstten yarı sürekli olması demektir. ■

Eğer bu iki küme değerli fonksiyonun herhangi birisi kompakt değerliyse Y üzerindeki normallik koşulunu kaldırabiliriz.

Önerme 4.19 *$F_1 : X \to \mathcal{P}_f(Y)$ kapalı, $F_2 : X \to \mathcal{P}_k(Y)$ üstten yarı sürekli ve her $x \in X$ için $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \varnothing$ ise $x \to (F_1 \cap F_2)(x)$ dönüşümü üstten yarı süreklidir.*

Kanıt. $V \subseteq Y$ açık küme olsun.$(F_1 \cap F_2)^+(V)$ nin X içinde açık olduğunu göstereceğiz.$x \in (F_1 \cap F_2)^+(V)$ ise $F_2(x) \backslash V$ kompakttır ve $F_1(x)$ den ayrıktır.$y \in F_2(x) \backslash V$ olsun.O halde $(x, y) \notin G_r F_1$ kapalı olduğundan $V_y \in \mathcal{U}(x)$ ve $V_y \in \mathcal{U}(y)$ bulabiliriz öyleki $(V_y \times V_y) \cap G_r F_1 \neq \varnothing$ dir. $x' \in U_y$ için $F_1(x') \cap V_y = \varnothing$ dir.$F_2(x) \backslash V$ kompakt olduğundan $\{y_1, .., y_n\} \subseteq F_2(x) \backslash V$ bulabiliriz öyleki $F_2(x) \backslash V \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k} = V_1$ olur.

$U_1 = \bigcap_{k=1}^{n} U_{y_k} \in \mathcal{U}(x)$ kümesini kuralım.$x' \in U_1$ ise $F_1(x') \subseteq Y \backslash V_1$ dir.$V_2 = V \cup V_1$ ve $U_2 \in \mathcal{U}(x)$ olsun öyleki eğer $x' \in U_2$ ise $F_2(x') \subseteq V_2$ dir.($F_2(\cdot)$' nin üstten yarı sürekli olmasından bu doğrudur.) $x' \in U_1 \cap U_2 = U \in \mathcal{U}(x)$ ise

$$(F_1 \cap F_2)(x') = F_1(x') \cap F_2(x') \subseteq (Y \backslash V_1) \cap V_2 \subseteq V$$

olur ki buda $(F_1 \cap F_2)(\cdot)$ nin üstten yarı sürekli olduğunu gösterir. ■

Önerme 4.20 *$F_1 : X \to 2^Y \backslash \{\varnothing\}$ alttan yarı sürekli, $F_2 : X \to 2^Y \backslash \{\varnothing\}$ açık bir grafiğe sahip ve her $x \in X$ için*

$$(F_1 \cap F_2)(x) = F_1(x) \cap F_2(x) \neq \varnothing$$

ise $x \to (F_1 \cap F_2)(x)$ dönüşümü alttan yarı süreklidir.

4.3 KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN HAUSDORFF SÜREKLİLİĞİ

Bu kesim boyunca X bir Hausdorff topolojik uzay ve Y de bir metrik uzay olacaktır.

Tanım 4.8 *a)*$F : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ *küme değerli dönüşümü verilsin* $x \to h^*(F(x),F(x_0))$ *dönüsümü* x_0 *da sürekli ise (yani her* $\varepsilon > 0$ *için* $U\varepsilon \in \mathcal{U}(x_0)$ *var öyleki her* $x \in U\varepsilon$ *için her* $h^*(F(x),F(x_0)) < \varepsilon$ *ise)* $F : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ *küme değerli dönüşümüne* $x_0 \in X$ *de* h *- üstten yarı sürekli dönüşüm denir.*
b)$F : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ *küme değerli dönüşümü verilsin.*$x \to h^*$ $(F(x_0),F(x))$ *dönüsümü* x_0 *da sürekli ise (yani her* $\varepsilon > 0$ *için* $U\varepsilon \in \mathcal{U}(x_0)$ *var öyleki her* $x \in U\varepsilon$ *için* $h^*(F(x_0),F(x)) < \varepsilon$ *ise)* $F : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ *küme değerli dönüşümüne* x_0*'da* h *- alttan yarı sürekli dönüşüm denir.*
c)Bir $F : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ *küme değerli dönüşümü* x_0*'da hem* h *üstten yarı sürekli hemde* h *alttan yarı sürekli ise (veya* $F : X \to (2^Y \setminus \{\varnothing\},h)$,$x_0$ *da sürekli ise)* $F : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ *küme değerli dönüşümüne* x_0*'da* h *- sürekli dönüşüm denir.*
d)(a) (veya b), veya c)) her $x_0 \in X$ *için geçerli ise* $F(\cdot)$*'de* h *- üstten yarı sürekli (veya* h *- alt yarı sürekli veya* h *- sürekli) dönüşüm denir.*

Önerme 4.21 $F_1, F_2 : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ *h - üstten yarı sürekli (veya h - alttan yarı sürekli) küme değerli dönüşümler ise* $x \to (F_1 \cup F_2)(x)$ *dönüşümüde h - üstten yarı sürekli (veya h - alttan yarı sürekli) küme değerli dönüşümdür.*

Kanıt. F_1, F_2 nin h - üstten yarı sürekli olduklarını varsayalım ve $x \in X$ alıp sabitleyelim ve $\varepsilon > 0$ olsun.O halde $U \in \mathcal{U}(x)$ bulabiliriz öyleki eğer $x' \in U$ ise $h^*(F_1(x'), F_1(x)) < \varepsilon$ ve $h^*(F_2(x'), F_2(x)) < \varepsilon$ olur.Böylece her $x' \in U$ için $F_1(x') \subseteq$

$F_1(x)_\varepsilon$ ve $F_2(x') \subseteq F_2(x)_\varepsilon$ olur.Böylece $x' \in U$ için $(F_1 \cup F_2)(x') \subseteq (F_1 \cup F_2)(x)_\varepsilon$ olur ve bu $h^*((F_1 \cup F_2)(x'), (F_1 \cup F_2)(x)) < \varepsilon$ olmasını gerektirir.Yani $(F_1 \cup F_2)(\cdot)$ h - üstten yarı süreklidir.

F_1, F_2, h - alttan yarı sürekli iken benzer olarak yapılır. ∎

İki h - üstten yarı sürekli küme değerli dönüşümün kesişimiyle ilgili sonuç aşağıdadır.

Önerme 4.22 $F_1 : X \to \mathcal{P}_f(Y)$ *ve* $F_2 : X \to \mathcal{P}_k(Y)$ h *- üstten yarı sürekli küme değerli dönüşümler öyleki her* $x \in X$ *için* $(F_1 \cap F_2)(x) \neq \varnothing$ *ise* $x \to (F_1 \cap F_2)(x)$ h *- üstten yarı süreklidir.*

Kanıt. Varsayalımki bu doğru olmasın.O halde $\varepsilon > 0$, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in j} \subseteq X$ ağını bulabiliriz öyleki $x_\alpha \to x$ ve $y_\alpha \in (F_1 \cap F_2)(x_\alpha), \alpha \in j$ öyleki $y_\alpha \notin (F_1 \cap F_2)(x)_\varepsilon$ olur.Bu yüzden her $\alpha \in j$ için $d(y_\alpha, (F_1 \cap F_2)(x)) \geqslant \varepsilon$ olur.Ama $\mathcal{P}_k$ (Y) değerli olan $(F_2)(\cdot)$ aslında yukarıdaki teoremden üstten yarı süreklidir ve bu yüzden $F(\{x_\alpha, x\}_{\alpha \in j}) \subseteq Y$ kompaktır.Bu yüzden $\{y_\alpha\}_{\alpha \in j}$ 'nin $\{y_\beta\}_{\beta \in j}$ alt ağını bulabiliriz öyleki $y_\beta \to y \in F_1(x) \cap F_2(x) = (F_1 \cap F_2)(x)$ dir.Bundan dolayı $d(y_\alpha, (F_1 \cap F_2)(x)) \to 0$ olur ki bu bir çelişkidir.

O halde önerme doğrudur. ∎

4.4 HAUSDORFF VE VİETORİS SÜREKLİLİĞİN KARŞILAŞTIRILIŞI

Önerme 4.23 $F : X \to 2^Y \backslash \{\varnothing\}$ *V−üstten yarı sürekli ise* $F(\cdot)$, h *- üstten yarı süreklidir.*

Kanıt. $F(\cdot)$, *V−üstten yarı sürekli olduğundan verilen* $\varepsilon > 0$ *ve* $x \in X$ *için* $F^+(F(x)_\varepsilon) = U \in \mathcal{U}(x)$ *dir.Buradan her* $x' \in U$ *için* $F(x') \subseteq F(x)_\varepsilon$ *olur.Böylece* *her* $x' \in U$ *için* $h^*(F(x'), F(x)) < \varepsilon$ *olur ve* $F(\cdot)$*'in h- üstten yarı sürekli olduğu ortaya çıkar.* ■

Yukarıdaki önermenin tersi genel olarak doğru değildir.

Örnek 4.5 $X = [0,1]$, $Y = \mathbb{R}$ *olsun ve* $F : X \to 2^Y \backslash \{\varnothing\}$,

$$F(x) = \begin{cases} [0,1] & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ [0,1) & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

ile tanımlansın.

$F(\cdot)$ *nin h - üstten yarı sürekli olduğu açıktır .Ama* $x = 1$*' de V-üstten yarı sürekli değildir.Gerçekten* $F^+[(-1,+1)] = \{1\}$ *açık bir küme değildir.*

Önerme 4.24 $F : X \to \mathcal{P}_f(Y)$ *h - üstten yarı sürekli ise* $F(\cdot)$ *kapalıdır.*

Kanıt. $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha \in j} \subseteq G_r F$, $(x_\alpha, y_\alpha) \to (x,y) \in X \times Y$ olan bir ağ olsun. O halde uzaklık fonksiyonunun sürekliliğinden $d(y_\alpha, F(x)) \to d(y, F(x))$ olur.Böylece $d(y, F(x)) = 0$ dır.

$F(\cdot)$, $\mathcal{P}_f(X)$ değerli olduğundan yani $y \in F(x)$ olduğundan $F(\cdot)$ kapalıdır.

■

Bu bölümün başlarında eğer $F : X \to 2^Y \backslash \{\varnothing\}$, $V-$üstten yarı sürekli ise her $v \in Y$ için $x \to d(v, F(x))$'in alttan yarı sürekli olduğunu söylemiştik.

Şimdi daha genel bir sonuca ulaşalım.

Önerme 4.25 $F : X \to 2^Y \backslash \{\varnothing\}$ *h - üstten yarı sürekli ise her* $v \in Y$ *için* $x \to \varphi_v(x) = d(v, F(x))$ *dönüsümü* $V-$*alttan yarı süreklidir.*

Kanıt. $v \in Y$ alıp sabitleyelim ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun.$L(v, \lambda) = \{x \in X : \varphi_v(x) \leqslant \lambda\}$ kümesinin kapalı olduğunu göstereceğiz.Bu yüzden $\{x_\alpha\}_{\alpha \in j} \subseteq L(v, \lambda)$ bir ağ olsun ve $x_\alpha \longrightarrow x \in X$ olduğunu varsayalım.O halde her $y_\alpha \in F(x_\alpha)$ için $\varphi_v(x) = d(v, F(x)) \leqslant d(v, y_\alpha) + d(y_\alpha, F(x))$ olur ve buradan $\varphi_v(x) \leqslant \varphi_v(x) + h^*(F(x_\alpha), F(x)) \leqslant \lambda + h^*(F(x_\alpha), F(x)), \alpha \in j$ olur.Limite geçerek ve $F(\cdot)$'in h - üstten yarı sürekli olduğunu kullanarak, $\varphi_v(x) \leqslant \lambda$ olduğunu elde ederiz ve böylece $\varphi_v(\cdot)$ alttan yarı sürekli olur.

■

Önerme 4.26 $F : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ *h - alttan yarı sürekli ise* $F(\cdot)$, $V-$*alttan yarı süreklidir.*

Kanıt. $C \subseteq Y$ kapalı ise $F^+(C)$'ninde X içinde kapalı olduğunu göstereceğiz. $\{x_\alpha\}_{\alpha \in j} \subseteq F^+(C)$ bir ağ olsun ve $x_\alpha \longrightarrow x \in X$ olduğunu varsayalım.O halde $\forall \alpha \in j$ için $F(x_\alpha) \subseteq C$ olur.Ayrıca $F(\cdot)$'in h - alttan yarı sürekli olduğu hipoteziyle, verilen her $\varepsilon > 0$ için $\alpha_o \in j$ bulabiliriz öyleki $\alpha \geqslant \alpha_0$ için $h^*(F(x), F(x_\alpha)) < \varepsilon$ olur ve böylece $F(x) \subseteq F(x_\alpha) \subseteq C_\varepsilon$ olur.$\varepsilon > 0$ keyfi olduğu için $F(x) \subseteq C$ sonucunu çıkartırız.Böylece $x \in F^+(C)$ olur ki bu da $F^+(C)$'nin kapalı olmasını gerektirir.Böylece $F(\cdot)$ $V-$alttan yarı süreklidir. ■

Yukaridaki önermenin tersi genel olarak doğru değildir.

$X = [0,1]$, $Y = \mathbb{R}^2_+$ olsun ve $F : X \rightsquigarrow Y$, $F(x) = \{(t, xt) : t \in \mathbb{R}\}$ ile tanımlansın.Bu durumda $F(\cdot)$ alttan tarı süreklidir ama h-alttan yarı sürekli değildir.

Teorem 1 $F : X \to \mathcal{P}_k(Y)$ *tanımlansın.O halde ;*

a)$F(\cdot)$ *V-üstten yarı süreklidir ancak ve ancak* $F(\cdot)$, *h - üstten yarı süreklidir*

b)$F(\cdot)$ *V-alttan yarı süreklidir ancak ve ancak* $F(\cdot)$, *h - alttan yarı süreklidir.*

Kanıt. *a)* $\Rightarrow$:Kanıtın bu yönü önerme 4.23 den açıktır.

$\Leftarrow$:Eğer $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha \in j} \subseteq G_r F$ bir ağ ve $x_\alpha \to x \in X$ ise $\{y_\alpha\}$ $\alpha \in j$'nın $F(x)$'de bir yığılma noktasına sahip olduğunu göstermek yeterlidir.Hipotezle $d(y_\alpha, F(x)) \leqslant h^*(F(x_\alpha), F(x)) \to 0$ olduğunu biliyoruz. $F(x) \in \mathcal{P}_k\ (Y)$ olduğundan $z_\alpha \in F(x)$ bulabiliriz öyleki $d(y_\alpha, F(x)) = d(y_\alpha, z_\alpha), \alpha \in J$ olur.$\{z_\beta\}_{\beta \in I}$,$\{z_\alpha\}_{\alpha \in j}$ 'nin bir alt ağı olsun öyleki $z_\beta \to z \in F(x)$ olsun.O halde $d(y_\beta, z_\beta) \to 0$ ve böylece $y_\beta \to z \in F(x)$ olur.

b)$\Rightarrow$:Varsayalımki bu doğru olmasın.O halde $\varepsilon > 0$ ve $\{x_\alpha\}_{\alpha \in j} \subseteq X$ ağını bulabiliriz öyleki $x_\alpha \to x \in X$ ve her $\alpha \in J$ için $h^*(F(x), F(x_\alpha)) \geqslant \varepsilon$ olur. $F(\cdot)$; $\mathcal{P}_k(Y)$ değerli olduğu için $y_\alpha \in F(x)$ bulabiliriz öyleki, $\alpha \in j$ için $d(y_\alpha, F(x)) = h^*(F(x), F(x_\alpha) \geqslant \varepsilon$ olur.$\{y_\beta\}_{\beta \in I}$, $\{y_\alpha\}_{\alpha \in j}$ 'nin bir alt ağı olsun öyleki $y_\beta \to y \in F(x)$ olsun.$F(\cdot)$; alttan yarı sürekli olduğu için, $\beta_o \in I$ bulabiliriz öyleki $\beta \geqslant \beta_o$ için $F(x_\beta) \cap B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \varnothing$ ve $y_\beta \in B(y, \frac{\varepsilon}{2})$ olur.$\beta \geqslant \beta_o$ için $h^*(F(x), F(x_\beta) = d(y_\beta, Fx_\beta)) \leqslant d(y_\beta, y) + d(y, Fx_\beta)) < d(y_\beta, y) + \frac{\varepsilon}{2}$ olur.Limite geçerek ;$\lim h^*(F(x), F(x_\beta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ olur ki bu da bir çelişkidir.

$\Leftarrow$: Kanıtın bu yönü önerme 4.26 den açıktır.

■

Bu teoremin önemli olan bir sonucu şudur.

Sonuç 4.3 *$F : X \to \mathcal{P}_k\ (Y)$ küme değerli dönüşümü V-süreklidir ancak ve ancak h - süreklidir.*

KAYNAKLAR

1. AUBIN, J.P. ve FRANKOWSKA, H. *Set Valued Analysis,* Birkhauser, Boston, (1990).

2. BERGE, C. *Espaces Topologiques, Fonctions Multivoques,* Dunod, Paris (1996).

3. BOULIGAND, G. *Sur les surfaces depourvues de points hyperlimites,* Ann. Polon. Math., 9, (1930).

4. CASTAING, C. ve VAALADIER, M. *Convex Analysis ve Measurable Multifunctions,* Lect. Notes Math., Vol.580, Springer-Verlag, Berlin, (1977).

5. FRINK, O. *Topology in lattices,* Trans. AMS, **51**, 569 - 582, (1942).

6. HAUSDORFF, F. Mengenlehre, Berlin, 1927, English translation: Set Theory, Chelsea, NY, (1962).

7. HU, S. ve PAPAGEORGIOU, N.S. *Handbook of Multivalued Analysis,* Vol.II. Theory. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands (2001).

8. KELLEY, J. *General Topology,* Graduate Texts in Math., Vol.27, Springer-Verlag, NY, (1961).

9. KLEIN, E. ve THOMPSON, A. *Theory of Correspondences,* Wiley Interscience, New York, (1984).

10. KSIELEWICZ, M. *Differential Inclusions ve Optimal Control,* Kluwer Academic Publ., Dodrecht, (1991).

11. KURATOWSKI, K. *Sur les espaces complets,* Fund. Math. 15 (1930). 301-309, Topology, Vol. I,II, Academic Press, NY, (1966).

12. MICHAEL, E. *Topologies on space of subsets,* Trans. AMS, **71**, 151-182, (1951).

13. PAINLEVE, P. *Cras*, Paris, 148, 11-56, (1909).

14. VIETORIS, L. *Bereiche Zweiter ordnung,* Monatsh Math. Phys., **31,** 173-204, (1921).

15. VIETORIS, L. *Kontinua Zweiter ordnung,* Monatsh Math. Phys., **33**, 49-62, (1923).