KÜRENİN SONLU ALT QUANDILLARININ SINIFLANDIRILMASI

Nülifer Özdemir
Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Aralık – 2002

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Nülifer Özdemir'in "Kürenin Sonlu Alt Quandıllarının Sınıflandırılması" başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki, DOKTORA tezi 20.12.2002 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Doç.Dr. Hüseyin AZCAN	
Üye	:	Prof.Dr. Orhan ÖZER	
Üye	:	Prof.Dr. Şahin KOÇAK	
Üye	:	Doç..Dr. Zekeriya ARVASİ	
Üye	:	Doç.Dr. Mahmut KOÇAK	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 25.12.2002 tarih ve ...42/1..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Orhan ÖZER
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

KÜRENİN SONLU ALT QUANDILLARININ SINIFLANDIRILMASI

NÜLİFER ÖZDEMİR

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Hüseyin AZCAN
2002, 76 Sayfa

Bu tezde, kürenin sonlu alt quandılları $O(3)$ ortagonal grubunun sonlu alt grupları kullanılarak incelenmiştir. Kürenin bir Q alt quandılana

$$\sigma_y : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ , \quad \sigma_y(x) = x - 2\langle x, y\rangle y$$

olmak üzere $O(3)$ ortagonal grubunun $G_Q = \langle \sigma_y : y \in Q \rangle$ alt grubu karşılık getirilmiştir. Q sonsuz bir alt quandıl iken G_Q alt grubunun sonsuz, Q sonlu bir alt quandıl olduğunda ise G_Q grubunun $O(3)$ ortagonal grubunun sonlu bir alt grubu olduğu gösterilmiştir. $SO(3)$ grubunun sonlu alt gruplarının küre üzerindeki etkisinden oluşan yörüngelerden kürenin sonlu alt quandılları elde edilip bu alt quandıllardaki elemanların küre üzerine nasıl yerleştikleri belirlenmiştir. Kürenin Q_1 ve Q_2 sonlu alt quandıllarının izomorf olması için gerek ve yeter koşulun $G_{Q_1} \cong G_{Q_2}$ olduğu gösterilerek kürenin sonlu alt quandılları sınıflandırılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Quandıl, Ortagonal grup

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen danışmanım Doç.Dr. Hüseyin AZCAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER iv
ŞEKİLLER DİZİNİ v
SİMGELER DİZİNİ vii

GİRİŞ **1**

1 QUANDIL KATEGORİSİ **2**

1.1 Tanım ve Örnekler 2
1.2 Bir Düğümün Temel Quandılı 10

2 SO(3) GRUBUNUN SONLU ALT GRUPLARI **14**

2.1 Genel Bilgiler 14
2.2 SO(3) Grubunun Sonlu Alt Grupları 17
2.3 O(3) Grubunun Sonlu Alt Grupları 29

3 KÜRENİN SONLU ALT QUANDILLARI **31**

3.1 Çemberin Sonlu Alt Quandılları 31
3.2 Kürenin Sonlu Alt Quandılları 33
3.3 Kürenin Sonlu Alt Quandıllarının Listelenmesi 59
3.4 Kürenin Sonlu Alt Quandıllarından Elde Edilen O(3) Grubunun Sonlu Alt Grupları 63

KAYNAKLAR **76**

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.1 Küredeki ikili işlemin geometrisi 3

1.2 Düğümün temel quandılında bir eleman 12

2.1 (2,2,2) durumunda yörünge noktalarının yerleştirilmesi 21

2.2 $r_1 = r_1 = r_1 = 2$ durumunda yörünge noktaları 22

2.3 (2,2,m) durumunda yörünge noktalarının yerleştirilmesi 23

2.4 $r_2 = r_3 = 2$ ve $r_1 = 6$ durumunda yörünge noktaları 24

2.5 $r_3 = 2$ ve $r_2 = r_1 = 3$ durumunda yörünge noktaları 26

2.6 x_2 noktasının yörünge noktalarının yerleştirilmesi 27

2.7 $r_3 = 2$, $r_2 = 3$ ve $r_1 = 4$ durumunda yörünge noktaları 28

2.8 $r_3 = 2$, $r_2 = 3$ ve $r_1 = 5$ durumunda yörünge noktaları 29

3.1 Quandılı üreten a ve b noktaları 31

3.2 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ olan küresel üçgen 44

3.3 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ olan küresel üçgen 44

3.4 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ olan küresel üçgen 45

3.5 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ olan küresel üçgen 46

3.6 Köşe noktaları y_1, y_2,y_3 ve kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ olan üçgen 46

3.7 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ olan küresel üçgen 47

3.8 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$ olan küresel üçgen 48

3.9 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ olan küresel üçgen 49

3.10 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$ olan küresel üçgen 49

3.11 Köşe noktaları y_1, y_2,y_3 ve kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ olan üçgen 50

3.12 Köşe noktaları x_1, x_2, x_3 ve kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right)$ olan üçgen 51

3.13 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right)$ olan küresel üçgen 51

3.14 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{5}\right)$ olan küresel üçgen 52

3.15 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}\right)$ olan küresel üçgen 53

3.16 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right)$ olan küresel üçgen 53

3.17 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right)$ olan küresel üçgen 54

3.18 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{5}\right)$ olan küresel üçgen 54

3.19 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}\right)$ olan küresel üçgen 55
3.20 Köşe noktaları y_1, y_2 ve y_3, kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right)$ olan üçgen 55
3.21 Köşe noktaları y_1, y_2 ve y_3, kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}\right)$ olan üçgen 57
3.22 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olan üçgen 60
3.23 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ olan üçgen 61
3.24 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ olan üçgen 62
3.25 Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right)$ olan üçgen 63

SİMGELER DİZİNİ

$\vert G\vert$	:	G grubunun eleman sayısı
$O(x)$	:	x noktasının yörüngesi
G_x	:	x noktasının stabilizeri
G_Q	:	Kürenin Q alt quandılından elde edilen grup
S^n	:	n-boyutlu küre
$F(X)$	:	X kümesi tarafından üretilmiş serbest grup
$\Pi_1(X, x_0)$	:	X uzayının x_0 noktasındaki temel grubu
D_{2n}	:	$2n$ elemanlı dihedral grup
$SO(3)$	:	3×3 tipinde kendisiyle transpozunun çarpımı birim matris ve determinantı 1 olan matris

GİRİŞ

Bu tezde quandıl adı verilen cebirsel bir nesne incelenmiştir. Daha özel olarak yansıma ile bir quandıl yapısına sahip olan kürenin sonlu alt quandılları sınıflandırılmıştır. Tarihi olarak quandıl parça parça Matreev, Brieskorn ve Dehornoy'un çalışmalarında değişik isimlerde görülmesine karşın (bunlar tarafından tanımlanan cebirsel objeler tam olarak quandıl olmamakla beraber quandıla oldukça yakın objelerdir.) quandılın öneminin artışı Joyce tarafından bu nesnenin düğümleri sınıflayan bir invaryantı olduğunun gösterilmesiyle başlamıştır. Tam olarak Joyce'nin teoremi şu şekildedir: k_1 ve k_2, S^3 de iki düğüm, $Q(k_1)$ ve $Q(k_2)$ de bunlara karşılık gelen quandıllar olsunlar. Bu durumda $Q(k_1)$ quandılının $Q(k_2)$ quandılına izomorf olması için gerek ve yeter koşul k_1 düğümünün ya k_2 düğümünün kendisine ya da k_2 düğümünün ayna görüntüsüne denk olmasıdır. Diğer invaryantlarda olduğu gibi güçlü bir invaryantın hesap edilmesi oldukça zordur. Bu nedenle quandılda hesabı oldukça zor bir invaryanttır. Doğal olarak bu konudaki çalışmaların çoğu quandıl temsili teorisidir. Küre bu anlamda en temel temsil uzaylarından biridir. Bu tezde yapılan sınıflama hem temsil açısından önemli hem de $n \leq 3$ için $O(n)$ ortogonal grubunun sonlu alt gruplarının sınıflandırılmasına oldukça benzer olmasından dolayı önemlidir. Ve bu çalışma tamamen orjinal niteliktedir.

Tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm quandıllar hakkında genel bilgilere ve bugüne değin bu konuda yapılan çalışmaların bir kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde amaç quandıllar hakkında genel bilgi vermektir. İkinci bölümde tarihsel önemi ve konuyla ilgisi açısından $n \leq 3$ için $O(n)$ ortogonal grubunun sonlu alt grupları sınıflandırılmıştır. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar ispatlanmıştır.

1 QUANDIL KATEGORİSİ

1.1 Tanım ve Örnekler

Tanım 1.1 *Boştan farklı bir X kümesi üzerinde*

$$\begin{array}{rccc} *: & X \times X & \longrightarrow & X \\ & (x,y) & \longmapsto & x * y \end{array}$$

ikili işlemi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $(X,*)$ ikilisine bir ***rak*** *denir.*

- *Her $y, z \in X$ için $x * y = z$ olacak şekilde bir tek $x \in X$ vardır.*
- *Her $x, y, z \in X$ için $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$*

Tanım 1.2 *$(X,*)$ ikilisi bir rak olmak üzere her $x \in X$ için $x * x = x$ koşulu sağlanıyorsa $(X,*)$ ikilisine bir* ***quandıl*** *denir.*

Örnek 1.1.1 *Herhangi bir $(G,\cdot)$ grubu verildiğinde G üzerinde her $x, y \in G$ için*

$$x * y = y \cdot x \cdot y^{-1}$$

şeklinde tanımlanan işlem ile $(G,*)$ ikilisi bir quandıldır.

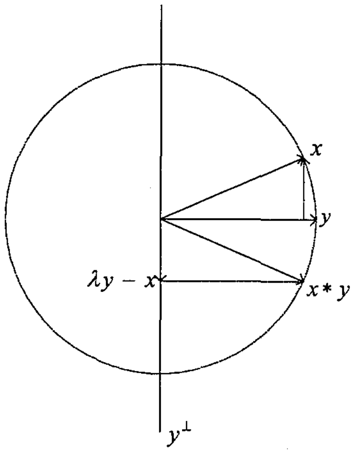
Örnek 1.1.2

$$S^n = \left\{ (x_1, x_2, ...x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1 \right\}$$

olmak üzere S^n üzerinde her $x, y \in S^n$ için

$$x * y = 2 \langle x, y \rangle y - x$$

ikili işlemi tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan ikili işlem ile $(S^n,*)$ ikilisi bir quandıldır.



Şekil 1.1: Küredeki ikili işlemin geometrisi

Her $x, y \in S^n$ *için*

$$\begin{aligned} \|x * y\|^2 &= \langle x * y, x * y \rangle \\ &= \langle 2\langle x,y\rangle y - x, 2\langle x,y\rangle y - x\rangle \\ &= 4\langle x,y\rangle^2 \underbrace{\langle y,y\rangle}_{=1} - 2\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle - 2\langle x,y\rangle\langle x,y\rangle + \underbrace{\langle x,x\rangle}_{=1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan $x * y \in S^n$ *dir.*

Her $y, z \in S^n$ *için* $x * y = z$ *olacak şekilde bir tek* $x \in S^n$ *elemanı vardır.* $x = z * y$ *olarak alındığında*

$$\begin{aligned} x * y &= (z * y) * y \\ &= 2\langle z * y, y\rangle y - z * y = 2\langle 2\langle z,y\rangle y - z, y\rangle y - 2\langle z,y\rangle y + z = z \end{aligned}$$

eşitliği sağlandığından böyle bir elemanın varlığı gösterilmiş olur. Teklik için böyle iki eleman olduğu varsayılsın.

$$x_1 * y = x_2 * y = z$$

olsun.

$$\begin{aligned} z + x_1 &= 2\langle x_1, y\rangle y \\ z + x_2 &= 2\langle x_2, y\rangle y \end{aligned}$$

eşitliklerinden $x_1 - x_2 = 2\langle x_1 - x_2, y\rangle y$ *olur.* $x = x_1 - x_2$ *ve* $\langle x, y\rangle = \lambda$ *olsun.* $2\lambda y = x = 2\langle 2\lambda y, y\rangle y = 4\lambda y$ *olduğundan* $\lambda = 0$ *ve buradan* $x = 0$ *bulunur.* $x = 0$ *eşitliğinden* $x_1 = x_2$ *olur.*

Herhangi $x, y, z \in S^n$ *elemanları için*

$$\begin{aligned}(x*y)*z &= 2\langle x*y, z\rangle z - x*y \\ &= 2\langle 2\langle x,y\rangle y - x, z\rangle z - 2\langle x,y\rangle y + x \\ &= 4\langle x,y\rangle\langle y,z\rangle z - 2\langle x,z\rangle z - 2\langle x,y\rangle y + x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x*z)*(y*z) &= 2\langle x*z, y*z\rangle (y*z) - x*z \\ &= 2\langle 2\langle x,z\rangle z - x, 2\langle y,z\rangle z - y\rangle (2\langle y,z\rangle z - y) \\ &\quad -2\langle x,z\rangle z + x \\ &= \underbrace{2(4\langle x,z\rangle\langle y,z\rangle - 2\langle x,z\rangle\langle z,y\rangle - 2\langle x,z\rangle\langle z,y\rangle + \langle x,y\rangle)}_{=\langle x,y\rangle} \\ &\quad (2\langle y,z\rangle z - y) - 2\langle x,z\rangle z + x \\ &= 4\langle z,y\rangle\langle x,y\rangle z - 2\langle x,y\rangle y - 2\langle x,z\rangle z + x\end{aligned}$$

eşitliklerinden tanımdaki $(x*y)*z = (x*z)*(y*z)$ *eşitliği elde edilir.*

Her $x \in X$ *için* $x*x = 2\langle x,x\rangle x - x = 2x - x = x$ *olduğundan quandle tanımındaki eşitlik de sağlanmış olur.*

Tanım 1.3 *$(X,*)$ bir rak, S de X kümesinin bir alt kümesi olsun. Eğer S kümesi X deki $*$ ikili işlemine göre bir rak oluyorsa S ye X in bir* ***alt rakı*** *denir. Benzer tanım quandıl için de yapılabilir.*

$(X,*)$ herhangi bir rak, $\{S_i\}_{i\in I}$ kümeleri de X rakının alt raklarının bir ailesi olsun. Alt rakların kesişimi olan $\bigcap_{i\in I} S_i$ kümesi de X rakının bir alt rakıdır. Herhangi $y, z \in \bigcap_{i\in I} S_i$ elemanları her $i \in I$ için $y, z \in S_i$ olacağından $x*y = z$ olacak şekilde bir tek $x \in X$ vardır. Her $i \in I$ için S_i bir alt rak olduğundan $x \in S_i$ olur. Böylece $x \in \bigcap_{i\in I} S_i$ olacağından rak tanımındaki ilk koşul sağlanır. Keyfi $x, y, z \in \bigcap_{i\in I} S_i$ elemanları için her $i \in I$ için $x, y, z \in S_i$ ve S_i ler birer alt rak olduklarından $(x*y)*z = (x*z)*(y*z)$ eşitliği sağlanır. Bu eşitlik her S_i alt rakında sağlandığından $\bigcap\limits_{i\in I} S_i$ kümesinde de sağlanır. $\bigcap\limits_{i\in I} S_i$ kümesi koşulları sağladığından bir alt rak olur. Eğer $(X,*)$ herhangi bir quandıl, $\{S_i\}_{i\in I}$ kümeleri de X quandılının alt quandıllarının bir ailesi ise; herhangi bir $x \in \bigcap\limits_{i\in I} S_i$ alındığında her $i \in I$ için $x \in S_i$ elemanı $x * x = x$ özelliğini sağladığından kesişimdeki her eleman için de sağlanmış olur. Bu nedenle bir quandılın alt quandıllarının kesişimi de bir alt quandıldır.

Tanım 1.4 $(Q,*)$ *bir rak, S de Q rakının bir alt kümesi olsun. Q rakının S alt kümesini içeren tüm alt raklarının kesişimine S* ***kümesinin ürettiği alt rak*** *denir. Benzer tanım quandıl için de verilebilir.*

Tanım 1.5 *G bir grup ve X herhangi bir küme olmak üzere*

$$\begin{aligned} \cdot : \ X \times G &\longrightarrow X \\ (g,x) &\longmapsto x \cdot g \end{aligned}$$

fonksiyonu

- *e grubun birim elemanı olmak üzere $x \cdot e = x$*
- *Her $g,h \in G$ ve $x \in X$ için $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$*

koşullarını sağlıyorsa G grubu X kümesi üzerine ***sağdan etki eder*** *denir. Benzer şekilde G grubunun X kümesi üzerine soldan etkisi de tanımlanabilir.*

Örnek 1.1.3 *G bir grup, X de boştan farklı bir küme olmak üzere, G grubunun X kümesi üzerinde*

$$\begin{aligned} X \times G &\longrightarrow X \\ (a,g) &\longmapsto a \cdot g \end{aligned}$$

şeklinde sağdan bir etkisi olsun. ∂ dönüşümü

$$\begin{aligned} \partial : X &\longrightarrow G \\ \partial(a \cdot g) &= g^{-1}\partial(a)\, g \end{aligned}$$

koşulunu sağlasın. G grubunun X kümesi üzerindeki sağdan etkisi ve ∂ dönüşümü kullanılarak X kümesi üzerinde bir rak yapısı kurulabilir. X kümesi üzerindeki ikili işlem

$$\begin{array}{rcl} \star : X \times X & \longrightarrow & X \\ (a,b) & \longmapsto & a * b := a \cdot \partial(b) \end{array}$$

olarak tanımlanırsa $(X, *)$ ikilisi bir rak olur.

Her $y, z \in X$ için $x * y = z$ olacak şekilde bir tek $x \in X$ vardır. $x = z \cdot \partial(y)^{-1}$ olarak alındığında

$$x * y = x \cdot \partial(y) = \left(z \cdot \partial(y)^{-1}\right) \partial(y) = z \cdot \left(\partial(y)^{-1} \partial(y)\right) = z \cdot e = z$$

olduğundan $x * y = z$ koşulu sağlanır. Teklik için x_1 ve x_2 bu denklemini sağlayan iki eleman olsunlar. $x_1 * y = x_2 * y = z$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned} x_1 \cdot \partial(y) &= x_2 \cdot \partial(y) \\ (x_1 \cdot \partial(y)) \cdot \partial(y)^{-1} &= (x_2 \cdot \partial(y)) \cdot \partial(y)^{-1} \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

denklemi sağlayan eleman var ve tek olduğundan rak tanımındaki ilk koşul sağlanır.

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x \cdot \partial(y)) \cdot \partial(z) \\ &= x \cdot (\partial(y) \partial(z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x * z) * (y * z) &= (x \cdot \partial(z)) * (y \cdot \partial(z)) \\ &= (x \cdot \partial(z)) \cdot \partial(y \cdot \partial(z)) \\ &= (x \cdot \partial(z)) \partial(z)^{-1} \partial(y) \partial(z) \\ &= x \cdot (\partial(y) \partial(z)) \end{aligned}$$

eşitliklerinden dolayı $x * y = x \cdot \partial(y)$ şeklinde tanımlanan ikili işlem rak tanımındaki $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ koşulunu da sağladığından X kümesi bu ikili işlem ile bir rak olur.

Tanım 1.6 *$(X_1, *_1)$ ve $(X_2, *_2)$ iki rak olsunlar. $f : X_1 \longrightarrow X_2$ dönüşümü her $x, y \in X_1$ için*

$$f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y)$$

oluyorsa f dönüşümüne bir ***rak homomorfizmi*** *denir.*

$(X, *)$ ikilisi bir rak olmak üzere bir $y \in X$ elemanı için

$$\begin{array}{rcl} f_y : X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & f_y(x) = x * y \end{array}$$

şeklinde bir f_y dönüşümü tanımlanacak olursa rak olmanın ilk koşulundan dolayı her $z \in X$ için $f_y(x) = x * y = z$ olacak biçimde bir tek $x \in X$ olduğundan f_y dönüşümüm bire-bir ve örtendir. Rak tanımındaki ikinci koşuldan dolayı ise her $x, z \in X$ için

$$f_y(x * z) = (x * z) * y = (x * y) * (z * y) = f_y(x) * f_y(z)$$

eşitliği sağlandığından f_y bir rak homomorfizmidir. Böylece her $y \in X$ için f_y dönüşümü bir rak otomorfizmidir. Bu nedenle rak yerine otomorfik küme adlandırması da kullanılabilmektedir (Daha geniş bilgi için [1-4]).

Operatör Grubu

$(X, *)$ bir rak olmak üzere $F(X)$, X kümesi üzerindeki serbest grubu göstersin. $w = w(a, b, ...)$ de $F(X)$ grubunda bir kelime olsun. $F(X)$ grubunda alınan örneğin abc gibi bir kelimenin bir $x \in X$ elemanına etkisi $x \cdot (abc) := ((x * a) * b) * c$ şeklinde tanımlansın. Bu şekilde $F(X)$ serbest grubunun X rakı üzerindeki etkisi

$$\begin{array}{rcl} X \times F(X) & \longrightarrow & X \\ (x, w) & \longmapsto & x \cdot w \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $x \in X$ olmak üzere $x \cdot w$ şeklindeki bir ifade ile kelimenin x üzerindeki etkisi yukarıda açıklandığı şekildedir. $F(X)$ serbest grubunun X kümesi üzerinde yukarıda belirtilen etkisi kullanılarak $F(X)$ grubu üzerinde $w, z \in F(X)$ olmak üzere

$$w \sim z \Longleftrightarrow \text{her } x \in X \text{ için } x \cdot w = x \cdot z$$

bağıntısı tanımlansın. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. $F(X)$ serbest grubunun

$$N = \{w \in F(X) \mid w \sim 1\}$$

şeklinde tanımlanan alt kümesi $F(X)$ grubunun normal alt grubudur: Her $w_1, w_2 \in N$ iken her $a \in X$ için $a \cdot w_1 = a$ ve $a \cdot w_2 = a$ dır. $a \cdot w_2 = a$ olduğundan $a = (a \cdot w_2) \cdot w_2^{-1} = a \cdot w_2^{-1}$ dir. Her $a \in X$ için

$$a \cdot \left(w_1 w_2^{-1}\right) = (a \cdot w_1) \cdot w_2^{-1} = a \cdot w_1 = a$$

olduğundan $w_1 w_2^{-1} \in N$ olur. Yani N kümesi $F(X)$ serbest grubunun bir alt grubudur. Herhangi bir $z \in F(X)$ elemanı ve $w \in N$ için

$$a \cdot \left(z^{-1} w z\right) = \left(\left(a \cdot z^{-1}\right) \cdot w\right) \cdot z = \left(a \cdot z^{-1}\right) \cdot z = a$$

eşitliği sağlandığından N alt grubu $F(X)$ serbest grubunun normal alt grubudur. $F(X)/N$ bölüm grubuna X rakının operatör grubu denir ve $Op(X)$ ile gösterilir.

Tanım 1.7 *$F(S)$, S kümesi üzerinde serbest grup olsun.*

$$FR(S) = \{(a, w) \mid a \in S \ , \ w \in F(S)\}$$

kümesi üzerinde

$$(a, w) * (b, z) = \left(a, w z^{-1} b z\right)$$

şeklinde ikili işlem tanımlansın. Herhangi $(b, z), (c, t) \in FR(S)$ elemanları için $(a, w) * (b, z) = (c, t)$ olacak şekilde bir tek $(a, w) \in F(S)$ vardır.

$$(a, w) * (b, z) = \left(a, w z^{-1} b z\right) = (c, t)$$

olduğundan aranan eleman $(a,w) = (c, tz^{-1}b^{-1}z)$ *dir. Böylece rak tanımındaki ilk koşul sağlanmış olur. Aşağıdaki eşitliklerden dolayı*

$$\begin{aligned}((a,w)*(b,z))*(c,t) &= (a, wz^{-1}bz)*(c,t) \\ &= (a, wz^{-1}bzt^{-1}ct)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((a,w)*(c,t))*((b,z)*(c,t)) &= (a, wt^{-1}ct)*(b, zt^{-1}ct) \\ &= \left(a, wt^{-1}ct\,(zt^{-1}ct)^{-1}\,bzt^{-1}ct\right) \\ &= (a, wz^{-1}bzt^{-1}ct)\end{aligned}$$

rak tanımındaki ikinci koşul da sağlandığından $FR(S)$ *kümesi yukarıda tanımlanan ikili işlem ile bir rak olur. Bu raka* S ***kümesi üzerindeki serbest rak*** *denir.*

Kongurens

Bir $(X,*)$ rakı üzerinde bir $\sim$ denklik bağıntısı her $a,b,c,d \in X$ için

$$a \sim b, c \sim d \Longrightarrow a*c \sim b*d$$

koşulunu sağlıyorsa $\sim$ denklik bağıntısına bir **kongurens** denir.

$\sim$ bağıntısı $(X,*)$ rakı üzerinde bir kongurens olsun. Herhangi bir $a \in X$ elemanı için $[a]$, a elemanının denklik sınıfını belirtmek üzere; denklik sınıfları üzerinde aşağıdaki şekilde bir ikili işlem tanımlansın.

$$[a] *_{\sim} [b] := [a*b]$$

Bu ikili işlem $\sim$ denklik bağıntısı bir kongürens olduğundan iyi tanımlıdır. Denklik sınıflarının kümesi bu şekilde tanımlanan ikili işlem ile bir rak olur ve bu yeni oluşturulan rak $X/\sim$ ile gösterilir.

$f : (X_1, *_1) \longrightarrow (X_2, *_2)$ bir rak homomorfizmi olsun. Bu durumda $f(X_1) \subset X_2$ bir alt raktır. X_1 rakı üzerinde f homomorfizmi kullanılarak bir $\sim$ kongurensi $a,b \in X_1$ için

$$a \sim b \Longleftrightarrow f(a) = f(b)$$

şeklinde tanımlansın. Bu kongurens ile oluşturulan $X_1/\sim$ rakı $f(X_1)$ alt rakına izomorftur.

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & X_1/\sim & \longrightarrow & f(X_1) \\ & [a] & \longmapsto & f(a) \end{array}$$

ve keyfi bir $y \in f(X_1)$ elemanı için $y = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in X_1$ elemanı olacağından

$$\begin{array}{rccc} \psi: & f(X_1) & \longrightarrow & X_1/\sim \\ & y = f(x) & \longmapsto & [x] \end{array}$$

dönüşümleri tanımlanabilir. φ ve ψ dönüşümleri rak homomorfizmidirler. $\varphi \circ \psi = 1_{f(X_1)}$ ve $\psi \circ \varphi = 1_{X_1/\sim}$ olduğundan $X_1/\sim$ rakı $f(X_1)$ alt rakına izomorftur.

Tanım 1.8 $(X,*)$ *ikilisi bir rak olsun.* $\sim$ *bağıntısı* X *üzerinde her* $a \in X$ *için*

$$a * a \sim a$$

koşulunu sağlayan en küçük kongurens olsun. Bu kongurensin denklik sınıflarının kümesi olan $X/\sim$ *ya* ***asossiye quandıl*** *denir ve* X_q *şeklinde gösterilir.*

1.2 Bir Düğümün Temel Quandılı

Bir Düğümün Temel Quandlının Tanımı

k, S^3 de bir düğüm, $N(k)$ da S^3 de k nın tüp komşuluğu olsun. Sabit bir $p \in \overline{S^3 \backslash N(k)}$ noktası seçilsin. Başlangıç noktaları $\partial(N(k))$ da bitiş noktaları sabit p noktası olan yolların kümesi

$$\Omega = \left\{ \alpha \;\middle|\; \alpha : [0,1] \longrightarrow \overline{S^3 \backslash N(k)}, \alpha(1) = p, \alpha(0) \in \partial(N(k)) \right\}$$

göz önüne alınsın. $\alpha, \beta \in \Omega$ elemanları için Ω üzerinde "$\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow \alpha$ eğrisi β eğrisine homotop$(rel\,\{p\})$" homotopik olma bağıntısı tanımlansın. $\Gamma = \Omega/\sim$ yolların denklik sınıflarının kümesini göstersin.

$\overline{S^3\backslash N(k)}$ nın temel grubu $\Pi_1\left(\overline{S^3\backslash N(k)}, p\right)$ göz önüne alınsın. $\Pi_1\left(\overline{S^3\backslash N(k)}, p\right)$ grubu Γ kümesi üzerinde aşağıda verilen şekilde sağdan etki eder.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times \Pi_1\left(\overline{S^3\backslash N(k)}, p\right) & \longrightarrow & \Gamma \\ (a, g) & \longmapsto & a \cdot g \end{array}$$

$(a \cdot g)(t) = \begin{cases} a(2t) & , \ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & , \ \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$ şeklinde iki yolun çarpımı olarak tanımlanır.

$q \in \partial(N(k))$, $a(0) = q$, $a(1) = p$ olmak üzere $a \in [\alpha]$ yolu alınsın. $\partial(N(k))$ da q noktasından geçen bir tek m_q meridyeni vardır. m_q q da başlayıp q da biten $N(k)$ da disk sınırlayan kapalı bir yoldur. a ve m_q yolları ile

$$\partial(a) = \overline{a} \cdot m_q \cdot a = \begin{cases} \overline{a}(4t) & , \quad 0 \le t \le 1/4 \\ m_q(4t-1) & , \quad 1/4 \le t \le 1/2 \\ a(2t-1) & , \quad 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\overline{a}(t) = a(1-t)$$

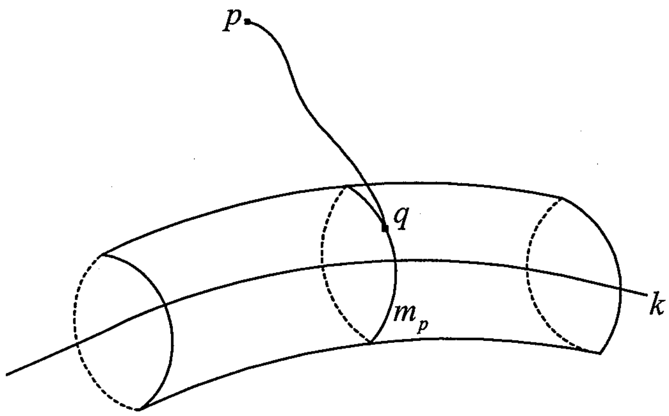
dir. $\partial(a)$ p de başlayıp yine p de biten $\overline{S^3\backslash N(k)}$ da kapalı bir yol olduğundan $\partial(a) \in \Pi_1\left(\overline{S^3\backslash N(k)}, p\right)$ dir. Böylece

$$\begin{array}{ccc} \partial : \Gamma & \longrightarrow & \Pi_1\left(\overline{S^3\backslash N(k)}, p\right) \\ [\alpha] & \longmapsto & \partial([\alpha]) \end{array}$$

dönüşümü elde edilir.

∂ dönüşümü ve $\Pi_1\left(\overline{S^3\backslash N(k)}\right)$ grubunun Γ kümesi üzerindeki etkisi kullanılarak Γ kümesi üzerinde bir quandıl inşaa edilebilir. Γ kümesini quandle yapacak ikili işlem şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{array}{ccc} \star : \Gamma \times \Gamma & \longrightarrow & \Gamma \\ ([\alpha], [\beta]) & \longmapsto & [\alpha] \star [\beta] \end{array}$$



Şekil 1.2: Düğümün temel quandılında bir eleman

Burada $a \in [\alpha]$, $b \in [\beta]$ olmak üzere $[\alpha] \star [\beta] = [a \cdot \partial(b)]$ dir.

Γ kümesi üzerinde $\star$ işlemi quandle koşullarını sağlar:

Her $[\beta]$, $[\gamma] \in \Gamma$ için $[\alpha] * [\beta] = [\gamma]$ olacak şekilde bir tek $[\alpha] \in \Gamma$ elemanı vardır. Denklik sınıflarından $b \in [\beta]$, $c \in [\gamma]$ elemanları alınsın. Bunu göstermek için $a * b = c$ koşulunu sağlayan $[a] \in \Gamma$ elemanı bulunmalıdır.

$$a = c \cdot \partial(b)^{-1}$$

alınırsa $a * b = \left(c \cdot \partial(b)^{-1}\right) * b = c \cdot \left(\partial(b)^{-1} \partial(b)\right) = c$ olduğundan aranan eleman $[a] = [\alpha] = \left[c \cdot \partial(b)^{-1}\right]$ dir.

İkinci koşul için ise her $[\alpha], [\beta], [\gamma] \in \Gamma$ için

$$([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = ([\alpha] * [\gamma]) * ([\beta] * [\gamma])$$

olduğu gösterilmelidir. $a \in [\alpha]$, $b \in [\beta]$, $c \in [\gamma]$ olsun.

$$(a * b) * c = (a * b) \cdot \partial(c) = a \cdot \partial(b) \cdot \partial(c)$$

ve

$$\begin{aligned} \partial(b * c) &= \partial(b \cdot \partial(c)) \\ &= c^{-1} \cdot m_c^{-1} \cdot c \cdot b^{-1} \cdot m_b \cdot b \cdot c^{-1} \cdot m_c \cdot c = \partial(c)^{-1} \cdot \partial(b) \cdot \partial(c) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}(a*c)*(b*c) &= (a*c)\cdot\partial(b*c)\\ &= (a\cdot\partial(c))\cdot\partial(b\cdot\partial(c))\\ &= a\cdot\partial(c)\cdot\partial(c)^{-1}\cdot\partial(b)\cdot\partial(c)\\ &= a\cdot\partial(b)\cdot\partial(c)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $([\alpha]*[\beta])*[\gamma]=([\alpha]*[\gamma])*([\beta]*[\gamma])$ eşitliği sağlanmış olur. Ayrıca $[\alpha]\in\Gamma$ için $a\in[\alpha]$ olmak üzere

$$a*a=a\cdot\partial(a)=a\cdot\overline{a}\cdot m_{a(0)}\cdot a=m_{a(0)}a\sim a,\ rel\,(p)$$

olduğundan quandıl olma koşulu da sağlanmış olur. Bu şekilde elde edilen Γ kümesine k düğümünün temel quandılı denir. Bu quandılın gösterimi için bakınız [5].

2 SO(3) GRUBUNUN SONLU ALT GRUPLARI

2.1 Genel Bilgiler

Bir G grubu boştan farklı bir X kümesi üzerine soldan etki etsin. Bundan sonra G grubunun X kümesi üzerine soldan etkisi $g \cdot x = gx$ şeklinde gösterilecektir. Herhangi bir $x \in X$ noktasının yörüngesi

$$O(x) = \{gx : g \in G\}$$

kümesidir. X kümesi üzerinde

$$x \sim y \Longleftrightarrow \text{“}y = gx \text{ olacak şekilde en az bir } g \in G \text{ vardır”}$$

şeklinde bir bağıntı tanımlansın.

Her $x \in X$ noktası için G grubunun X kümesi üzerindeki etkisinin tanımından dolayı grubun birim elemanı e için $ex = x$ olduğundan $x \sim x$ dir. Eğer $x \sim y$ ise $y = gx$ olacak şekilde en az bir $g \in G$ vardır.

$$g^{-1}y = g^{-1}(gx) = \left(g^{-1}g\right)x = ex = x$$

olduğundan $y \sim x$ dir. $x \sim y$, $y \sim z$ ise $y = gx$ ve $z = g^{'}y$ olacak şekilde $g, g^{'} \in G$ elemanları vardır. Buradan

$$z = g^{'}y = g^{'}(gx) = \left(g^{'}g\right)x$$

olduğundan $x \sim z$ dir. X kümesi üzerindeki bu bağıntı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığından bir denklik bağıntısıdır. Bu nedenle “ $\sim$ ” bağıntısı X kümesinin bir parçalanışını verir.

Herhangi bir $x \in X$ noktasının stabilizeri şu şekilde tanımlanır:

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}$$

x'in stabilizeri G_x kümesinin G grubunun bir alt grubu olduğu kolayca görülebilir.

Önerme 2.1.1 *Aynı yörüngeye ait noktalar eşlenik stabilizerlere sahiptirler.*

Kanıt. x ve y aynı yörüngeye ait noktalar olsunlar. x ve y aynı yörüngeye ait olduklarından $gx = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ elemanı vardır. $gx = y$ koşulunu sağlayan $g \in G$ elemanı için $h \in G_x$ olmak üzere

$$\left(ghg^{-1}\right)(y) = \left(ghg^{-1}\right)(gx) = (gh)\,x = g\,(hx) = gx = y$$

olduğundan $gG_xg^{-1} \subseteq G_y$ dir ve her $f \in G_y$ için

$$\left(g^{-1}fg\right)(x) = \left(g^{-1}f\right)(gx) = \left(g^{-1}f\right)y = g^{-1}\,(fy) = g^{-1}y = x$$

eşitliğinden $g^{-1}G_yg \subseteq G_x$ dir. $gG_xg^{-1} \subseteq G_y$ ve $g^{-1}G_yg \subseteq G_x$ olduğundan $gG_xg^{-1} = G_y$ olur. Böylece G_x ve G_y eşlenik alt gruplar olurlar ∎

Teorem 2.1.2 *G grubunda G_x alt grubunun sol denklik sınıflarının kümesi G/G_x ile gösterilsin.*

$$\begin{array}{ccc} O\,(x) & \longrightarrow & G/G_x \\ gx & \longmapsto & gG_x \end{array}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bire-bir ve örtendir.

Kanıt. $gG_x \in G/G_x$ elemanı alınsın. $gx \in O(x)$ elemanı dönüşüm altında gG_x elemanına resmedildiğinden dönüşüm örtendir. $gG_x = g'G_x$ ise $g = g'h$ olacak şekilde bir $h \in G_x$ vardır.

$$gx = \left(g'h\right)x = g'\,(hx) = g'x$$

olduğundan dönüşüm bire-birdir.

Özel olarak G sonlu bir grup ise $|O(x)| = |G/G_x| = |G| / |G_x|$ olduğundan $|O(x)|\,|G_x| = |G|$ olur. ∎

Teorem 2.1.3 *Sonlu bir G grubu X kümesi üzerine soldan etki etsin. Bu etki yardımıyla*

$$X^g = \{x \in X \,:\, gx = x\}$$

şeklinde tanımlanmak üzere X kümesindeki farklı yörüngelerin sayısı

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$$

dir.

Kanıt. Burada amaç $G \times X$ kümesinin $gx = x$ koşulunu sağlayan (g, x) ikililerinin sayısının belirlenmesidir. Bu ikililerin sayısı

$$\sum_{g\in G}|X^g|$$

dir. Sayma işlemi $x \in X$ elemanları üzerinden yapılırsa

$$\sum_{g\in G}|X^g| = \sum_{x\in X}|G_x|$$

olur. X kümesindeki farklı yörüngeler $X_1, X_2, ..., X_k$ olsunlar. Bu yörüngeler göz önüne alınırsa aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\sum_{g\in G}|X^g| = \sum_{x\in X}|G_x| = \sum_{i=1}^{k}\sum_{x\in X_i}|G_x|$$

Aynı yörüngeye ait noktalar eşlenik stabilizerlere sahip olduklarından, $\overline{x} \in X_i$ yörüngesinden seçilmiş bir nokta olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in X_i}|G_x| &= |X_i|\,|G_{\overline{x}}| \\
&= |O(\overline{x})|\,|G_{\overline{x}}| \\
&= |G|
\end{aligned}$$

olduğundan farklı yörüngelerin sayısı

$$k = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$$

olur. ■

Teorem 2.1.4

$$O(2) = \left\{A \in GL(2,\mathbb{R}) \,:\, A^tA = I\right\}$$

olmak üzere $O(2)$ grubunun sonlu alt grubu ya dihedral grup ya da devirli gruptur.

Kanıt. $O(2)$ grubunun sonlu bir alt grubu A ile gösterilsin. Eğer $A \subset SO(2)$ ise A nın herbir elemanı düzlemde bir dönmedir. A_θ ile orjine göre saat istikametinin tersi yönünde θ radyanlık $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ dönme gösterilsin. $A_\varphi \in A$ elemanı ile de A alt grubundaki en küçük radyanlık dönme gösterilsin. Keyfi bir $A_\theta \in A$ elemanı alınsın.

$$\theta = k\varphi + \psi \ , \ k \in \mathbb{Z} \text{ ve } 0 \leq \psi < \varphi$$

olduğundan

$$A_\theta = A_{k\varphi+\psi} = (A_\varphi)^k A_\psi$$

elde edilir. Bu eşitlikten dolayı $A_\psi = (A_\varphi)^{-k} A_\theta$ dir. A_φ, $A_\theta \in A$ olduğundan $A_\psi = (A_\varphi)^{-k} A_\theta \in A$ dır. Burada $\psi = 0$ olmalıdır. Aksi takdirde bu φ'nin en küçük olmasıyla çelişir. Dolayısıyla

$$A_\theta = (A_\varphi)^k$$

eşitliğinden A grubu A_φ tarafından üretilen devirli bir grup olur.

A tamamen $SO(2)$ grubunun içinde kalmayan bir alt grup olsun. $H = A \cap SO(2)$ alt grubu göz önüne alınsın. H alt grubu A nın bir alt grubudur. H grubunun A grubu içindeki indeksi 2 dir. H grubu $SO(2)$grubunun bir alt grubu olduğundan H devirlidir. $H = \langle C \rangle$, $B \in A - H$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} A &= \{I, C, C^2, ..., C^{n-1}, B, CB, C^2B, ..., C^{n-1}B\} \\ C^n &= I, \quad B^2 = I, \qquad BC = C^{-1}B \end{aligned}$$

dihedral grubu elde edilir. ■

2.2 SO(3) Grubunun Sonlu Alt Grupları

G grubu $SO(3)$ grubunun sonlu bir alt grubu olsun. G grubunun birimden farklı her elemanı ekseni $\mathbb{R}^3$ de orjinden geçen bir doğru olan bir dönmedir. Dönmenin ekseni olan doğrunun S^2 yi kestiği noktalar dönme altında sabit kalırlar. Böylece G grubunun herbir elemanı S^2 de iki nokta belirlemiş olur. Dikkat edilecek olursa G nin birim elemanı S^2 nin tüm noktalarını sabit bırakır.

G grubunun birimden farklı tüm elemanlarının S^2 üzerinde sabit bıraktığı noktaların kümesi X ile gösterilsin.

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

etkisi göz önüne alınsın. $x \in X$ noktası bir $h \in G$ dönmesinin sabit noktası olsun.

$$\left(ghg^{-1}\right)(gx) = (gh)\,x = g(hx) = gx$$

olduğundan gx noktasıda bir dönmenin sabit noktasıdır. X kümesi üzerinde G grubunun bu etkisi göz önüne alınsın. X kümesinde N tane farklı yörünge olduğu varsayılsın. Herbiri farklı yörüngelerden olmak üzere birbirinden farklı

$$x_1, x_2, ..., x_N$$

şeklinde N tane nokta seçilsin. Teorem 2.1.3 den

$$\begin{aligned} N &= \tfrac{1}{|G|}\{2(|G|-1)+|X|\} \\ &= \tfrac{1}{|G|}\left\{2(|G|-1)+\sum_{i=1}^{N}|O(x_i)|\right\} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} 2\left(1-\tfrac{1}{|G|}\right) &= N-\sum_{i=1}^{N}\tfrac{|O(x_i)|}{|G|} \\ &= N-\sum_{i=1}^{N}\tfrac{1}{|G_{x_i}|} \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikten ise

$$2\left(1-\frac{1}{|G|}\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(1-\frac{1}{|G_{x_i}|}\right)$$

denklemi bulunur. Burada dikkat edilecek olursa $1 \leq 2\left(1-\frac{1}{|G|}\right) < 2$ dir. Ayrıca her i için $|G_{x_i}| \geq 2$ olduğundan $\frac{1}{2} \leq 1-\frac{1}{|G_{x_i}|} < 1$ eşitsizliği geçerlidir.

$2\left(1-\frac{1}{|G|}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(1-\frac{1}{|G_{x_i}|}\right)$ eşitliği dikkate alındığında en fazla üç yörünge olduğu görülür.

$$\underbrace{2-\frac{2}{|G|}}_{\geq 1} = \underbrace{1-\frac{1}{|G_{x_1}|}}_{<1}$$

olduğundan bir tek yörünge olamaz.

İki yörünge varsa: $2\left(1-\frac{1}{|G|}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(1-\frac{1}{|G_{x_i}|}\right)$ eşitliği

$$\frac{2}{|G|} = \frac{1}{|G_{x_1}|} + \frac{1}{|G_{x_2}|}$$

şekline dönüşür. G_{x_1} ve G_{x_2} grupları G grubunun alt grupları olduklarından $|G_{x_1}|$ ve $|G_{x_2}|$ $|G|$ yi böler. $|G_{x_1}| = r_1$, $|G_{x_2}| = r_2$ ve $|G| = n$ olsun. Buradan $n = k_1r_1$ ve $n = k_2r_2$ olacak şekilde k_1 ve k_2 sayıları vardır. Eşitlikte yerine yazılacak olursa

$$\frac{2}{n} = \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n}$$

eşitliğinden $2 = k_1 + k_2$ bulunur. Yani $k_1 = k_2 = 1$ dir. Buradan $G_{x_1} = G_{x_2} = G$ elde edilir. Grubun her elemanı x_1 ve x_2 noktalarını sabit bıraktıklarından bu noktalar antipodal noktalardır. Dolayısıyla G devirlidir.

Üç yörünge varsa: $|G_{x_1}| = r_1$, $|G_{x_2}| = r_2$ ve $|G_{x_3}| = r_3$ olmak üzere denklem

$$1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

şeklini alır. $r_3 \leq r_2 \leq r_1$ olsun. Her i için $r_i \geq 3$ ise $1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$ eşitliği sıfırdan farklı hiçbir n doğal sayısı için sağlanmaz.

$r_3 = 2$ olsun.

$$1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{n} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

olur. Benzer şekilde bu denklemde de $r_1, r_2 \geq 4$ olamaz. $r_2 \leq r_1$ olduğundan $r_2 = 2$ ya da $r_2 = 3$ olabilir.

$r_3 = 2$ ve $r_2 = 2$ ise;

$$1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

eşitliğinden $n = 2r_1$ elde edilir.

$r_3 = 2$ ve $r_2 = 3$ ise;

$$1 + \tfrac{2}{n} = \tfrac{1}{r_1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}$$
$$\tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{n} = \tfrac{1}{r_1}$$

eşitliklerinden $\frac{12r_1}{6-r_1} = n \in \mathbb{N}$ olduğundan $3 \leq r_1 < 6$ olur. Buradan

$$r_1 = 3 \implies n = 12$$
$$r_1 = 4 \implies n = 24$$
$$r_1 = 5 \implies n = 60$$

bulunur. Üç yörünge olması durumunda sonuçlar özetlenecek olursa

- $r_1 = m,\ r_2 = 2,\ r_3 = 2$ ise $n = |G| = 2m$
- $r_1 = 3,\ r_2 = 3,\ r_3 = 2$ ise $|G| = 12$
- $r_1 = 4,\ r_2 = 3,\ r_3 = 2$ ise $|G| = 24$
- $r_1 = 5,\ r_2 = 3,\ r_3 = 2$ ise $|G| = 60$

şeklindedir.

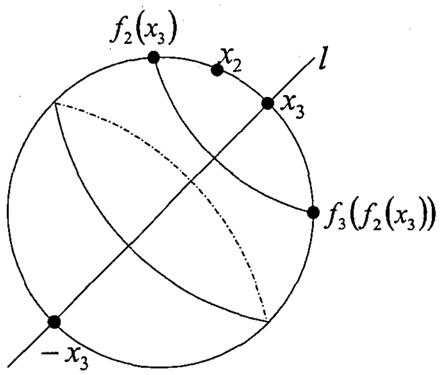
Bundan sonra her durumda yörünge noktalarının küre üzerinde nasıl yerleştiği belirlenecektir.

$r_1 = r_2 = r_3 = 2$ ise:

$|G_{x_1}| = |G_{x_2}| = |G_{x_3}| = 2$ dir. $1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ eşitliğinden G dört elemanlı bir gruptur.

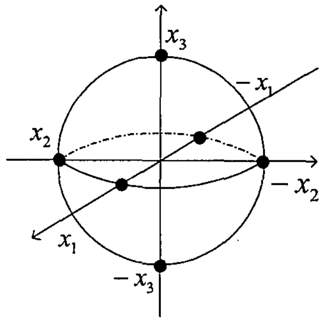
$$G_{x_1} = \{f_1, e\}, \qquad f_1^2 = e$$
$$G_{x_2} = \{f_2, e\}, \qquad f_2^2 = e$$
$$G_{x_3} = \{f_3, e\}, \qquad f_3^2 = e$$

olsun. $|O(x_1)| = |O(x_2)| = |O(x_3)| = 2$ olduğundan $SO(3)$ grubunun dört elemanlı sonlu G alt grubunun elemanları S^2 üzerinde toplam altı noktayı sabit bırakırlar. Bu altı sabit noktanın S^2 üzerinde nasıl yerleşeceği aşağıdaki gibi belirlenir. Öncelikle S^2 üzerinde keyfi bir x_3 noktası seçilsin. x_2 noktasının yeri x_3 noktasına göre belirlenecektir. x_3 noktasından ve orjinden geçen l doğrusu göz önüne alınsın. Eğer x_2 noktası l doğrusuna dik olan ekvatorda seçilmezse; x_3 noktasına $f_2 \in G_{x_2}$ dönmesi uygulanırsa x_3 noktasının yörüngesinde x_3



Şekil 2.1: (2,2,2) durumunda yörünge noktalarının yerleştirilmesi

noktasından farklı yeni bir $f_2(x_3)$ noktası elde edilir. $f_2(x_3)$ noktasına $f_3 \in G_{x_3}$ dönmesi uygulanırsa $f_2(x_3)$ noktasından farklı $f_3(f_2(x_3))$ noktası elde edilir. Böylece x_3 noktasının yörüngesinde ikiden fazla eleman olur. Fakat $O(x_3)$ iki elemanlı bir kümedir. Bundan dolayı x_2 noktası l doğrusuna dik ekvator üzerinde olmak zorundadır. $f_2^2 = e$ ve f_2 uzaklık koruyan bir dönüşüm olduğundan $f_2(x_3) = -x_3$ olur. Buradan $O(x_3) = \{\pm x_3\}$ olur. $f_3 \in G_{x_3}$ dönmesi x_2 noktasına uygulanırsa $f_3^2 = e$ ve f_3 dönüşümünün uzaklık koruyan bir dönüşüm olmasından dolayı $f_3(x_2) = -x_2$ elde edilir. x_1 noktasının yeride benzer şekilde belirlenir. x_1 noktası da l doğrusuna dik ekvator üzerinde bulunur. Böylece x_1 ve x_2 noktaları aynı büyük çember üzerindedirler. x_1 noktası x_2 ve $-x_2$ noktalarının orta noktasıdır. x_1 orta nokta olmazsa x_1 noktasının yörüngesinde ikiden fazla eleman olurdu. Benzer şekilde $f_2 \in G_{x_2}$ dönmesi x_1 noktasına uygulanırsa $f_2(x_1) = -x_1$ elde edilir. Bu durumda yörünge noktaları $O(x_1) = \{\pm x_1\}$, $O(x_2) = \{\pm x_2\}$, $O(x_3) = \{\pm x_3\}$ olur. Buradan $SO(3)$'ün sonlu alt grubu $G = \{e, f_1, f_2, f_3\}$



Şekil 2.2: $r_1 = r_1 = r_1 = 2$ durumunda yörünge noktaları

olur. G grubu K_4 grubuna izomorftur.

$r_2 = r_3 = 2$ ve $r_1 = m$ *ise:*

$|G_{x_2}| = |G_{x_3}| = 2$ ve $|G_{x_1}| = m$, $m \geq 3$ olduğundan $|G| = n = 2m$ olur.

$$\begin{aligned} G_{x_1} &= \langle f_1 \rangle, & f_1^m &= e \\ G_{x_2} &= \{f_2, e\}, & f_2^2 &= e \\ G_{x_3} &= \{f_3, e\}, & f_3^2 &= e \end{aligned}$$

olsun. Burada G_{x_1} m. mertebeden devirli bir gruptur. S^2 üzerinde keyfi bir x_1 noktası seçilsin. x_1 noktası ve orjinden geçen doğru l ile gösterilsin. $|G| = 2m$ ve $|G_{x_1}| = m$ olduğundan x_1 noktasının yörüngesindeki eleman sayısı $|O(x_1)| = \frac{|G|}{|G_{x_1}|} = 2$ dir. x_2 noktasının yörüngesindeki eleman sayısı da $|O(x_2)| = \frac{|G|}{|G_{x_2}|} = m$ olur. x_2 noktası l doğrusuna dik ekvator üzerindedir. Çünkü x_2 noktası l doğrusuna dik ekvator üzerinde olmasaydı x_1 noktasının yörüngesindeki eleman sayısı ikiden fazla olurdu. Benzer şekilde x_3 noktası da l doğrusuna dik ekvator üzerinde bulunur. $f_2 \in G_{x_2}$ dönüşümü x_1 noktasına uygulandığında $f_2^2 = e$ ve f_2 uzaklık koruyan bir dönüşüm olduğundan $f_2(x_1) = -x_1$ olur. Buradan $O(x_1) = \{\pm x_1\}$ bulunur. x_2 noktasına G_{x_1} grubunun üreteci olan f_1 dönüşümü uygulanırsa l doğrusuna dik ekvator üzerinde

$$\{x_2, f_1(x_2), f_1^2(x_2), ..., f_1^{m-1}(x_2)\}$$

m tane nokta elde edilir.

$$\|x_2 - f_1(x_2)\| = \left\|f_1(x_2) - f_1^2(x_2)\right\| = ... = \left\|f_1^{m-1}(x_2) - x_2\right\|$$

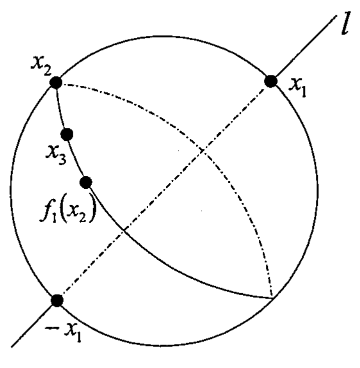
olduğundan bu noktalar l doğrusuna dik ekvator üzerinde eşit uzaklıklarda bulunurlar.

$$O(x_2) = \left\{x_2, f_1(x_2), f_1^2(x_2), ..., f_1^{m-1}(x_2)\right\}$$

olur. $O(x_2)$ kümesindeki noktalar l doğrusuna dik olan düzlemde ekvator içine yerleştirilmiş bir düzgün m-genin köşeleri olarak düşünülebilir. x_3 ve x_2 noktaları aynı büyük çember üzerinde idi. x_3 noktasının x_2 ve $f_1(x_2)$ noktaları arasında olduğu varsayılsın. $f_3 \in G_{x_3}$, $f_3^2 = e$ dönüşümü x_2 noktasına uygulansın.

$$f_3(x_2) \in \left\{x_2, f_1(x_2), f_1^2(x_2), ..., f_1^{m-1}(x_2)\right\}$$

dir. $f_3^2 = e$ olduğundan $f_3(x_2) = f_1(x_2)$ olur.Bu nedenle x_3 noktası x_2 ve $f_1(x_2)$
noktalarının orta noktasıdır. Böylece $O(x_2)$ kümesindeki noktaları birleştiren yay parçasının orta noktaları $O(x_3)$ kümesini verir.



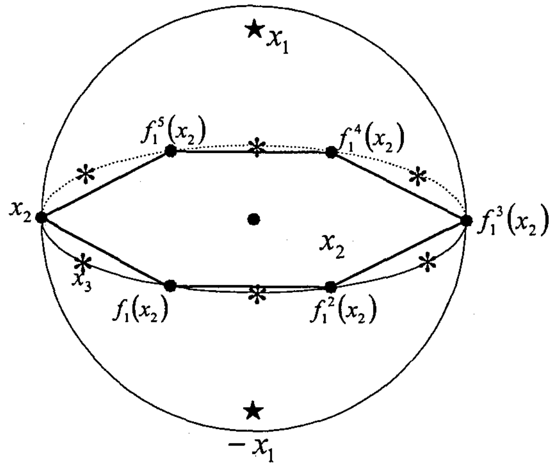
Şekil 2.3: (2,2,m) durumunda yörünge noktalarının yerleştirilmesi

Buradan $SO(3)$ grubunun sonlu alt grubu

$$G = \left\{I, f_1, f_1^2, ..., f_1^{m-1}, f_2, f_1 f_2, f_1^2 f_2, ..., f_1^{m-1} f_2\right\}$$

$f_1^m = I$, $f_2^2 = I$, $f_1 f_2 = f_3$ ve $f_2 f_1 = f_1^{-1} f_2$ olduğundan G grubu $2m$ elemanlı dihedral grup olur.

Örneğin $m = 6$ alındığında yörüngeler aşağıdaki gibi olur:



Şekil 2.4: $r_2 = r_3 = 2$ ve $r_1 = 6$ durumunda yörünge noktaları

$r_3 = 2$ ve $r_2 = r_1 = 3$ *ise:*

$|G_{x_3}| = 2$, ve $|G_{x_2}| = |G_{x_1}| = 3$ olduğundan $|G| = 12$ olur.

$$G_{x_1} = \langle f_1 \rangle \quad , \quad f_1^3 = e$$
$$G_{x_2} = \langle f_2 \rangle \quad , \quad f_2^3 = e$$
$$G_{x_3} = \{f_3, e\} \quad , \quad f_3^2 = e$$

olsun. Keyfi bir $x_1 \in S^2$ noktası seçilsin. x_1 noktasının yörüngesindeki eleman sayısı $|O(x_1)| = \frac{|G|}{|G_{x_1}|} = 4$ olur. x_1 noktasından ve orjinden geçen doğru l ile gösterilsin. $O(x_1)$ kümesinden x_1 ve $-x_1$ noktalarından farklı bir u noktası alınsın. f_1 dönüşümü u noktasına uygulanırsa $f_1(u), f_1^2(u) \in O(x_1)$ olur. $O(x_1)$ kümesi dört elemanlı olduğundan $O(x_1) = \{x_1, u, f_1(u), f_1^2(u)\}$ olarak belirlenmiş olur. f_1 uzaklık koruyan bir dönüşüm olduğundan

$$\|x_1 - u\| = \|x_1 - f_1(u)\| = \left\|x_1 - f_1^2(u)\right\|$$

dir. Yani x_1 noktasının yörüngesindeki diğer noktalara uzaklığı eşittir. $u \in O(x_1)$ noktası dikkate alınacak olursa G grubunun G_u ve G_{x_1} alt grupları eşleniktir. Dolayısıyla $|G_u| = |G_{x_1}|$ dir. $G_u = \langle h \rangle$ olsun. $h^3 = e$ ve $h(u) = u$ dur. $h(x_1) \in O(x_1)$ olur. $h(x_1) = x_1$ olamaz. Çünkü $h(x_1) = x_1$ olsaydı $h \in G_{x_1}$ olurdu. Buradan $h(x_1) = f_1(u)$ yada $h(x_1) = f_1^2(u)$ elde edilir. $h(x_1) = f_1(u)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $h^2(x_1) = f_1^2(u)$ olur. h uzaklık koruyan bir dönüşüm olduğundan

$$\|x_1 - u\| = \|f_1(u) - u\| = \left\|f_1^2(u) - u\right\|$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden $O(x_1)$ kümesinin bir tetrahedronun köşe noktaları olduğu görülür. x_2 noktasının yörüngesindeki eleman sayısı $|O(x_2)| = \frac{|G|}{|G_{x_2}|} = 4$ dür. x_2 noktası öyle bir yerde seçilmeli ki $G_{x_2} = \langle f_2 \rangle$, f_2 dönüşümü $O(x_1)$ kümesine uygulandığında yine $O(x_1)$ kümesinin elemanları elde edilsin. $x_2 = -x_1$ alınırsa bu sağlanmış olur. f_2 $\frac{2\pi}{3}$ derecelik bir dönme olduğundan $\{u, f_1(u), f_1^2(u)\}$ noktaları kendi aralarında permüte eder. Bu yolla x_2 noktasının yörüngesi

$$\left\{-x_1, -u, -f_1(u), -f_1^2(u)\right\}$$

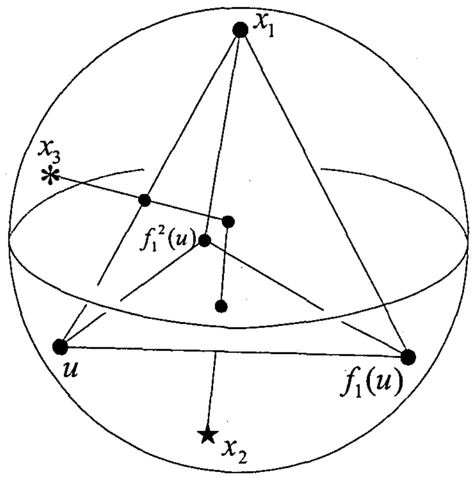
olur. $O(x_2)$ nin noktaları da bir düzgün dörtyüzlünün köşelerini verir. x_3 noktasının yörüngesindeki eleman sayısı ise $|O(x_3)| = \frac{|G|}{|G_{x_3}|} = 6$ dır. x_3 noktası S^2 üzerinde öyle bir konumda bulunmalı ki f_3 dönüşümü $O(x_1)$ kümesine uygulandığında yine $O(x_1)$ kümesinde elemanlar elde edilsin. x_3 noktası x_1 ve u noktalarını birleştiren yay parçasının orta noktası olarak alınırsa istenen sağlanmış olur. Bu durumda $f_3(x_1) = u$, $f_3(u) = x_1$, $f_3(f_1(u)) = f_1^2(u)$ ve $f_3(f_1^2(u)) = f_1(u)$ eşitlikleri elde edilir.

G grubu ise A_4 grubuna izomorftur [6].

$r_3 = 2, r_2 = 3$ ve $r_1 = 4$ *ise:*

$|G_{x_3}| = 2$, $|G_{x_2}| = 3$ ve $|G_{x_1}| = 4$ olduğundan $|G| = 24$ olur.

$$\begin{aligned} G_{x_1} &= \langle f_1 \rangle \quad , \quad f_1^4 = e \\ G_{x_2} &= \langle f_2 \rangle \quad , \quad f_2^3 = e \\ G_{x_3} &= \{f_3, e\} \quad , \quad f_3^2 = e \end{aligned}$$



Şekil 2.5: $r_3 = 2$ ve $r_2 = r_1 = 3$ durumunda yörünge noktaları

olsun. Keyfi bir $x_1 \in S^2$ noktası seçilsin. x_1 noktasının yörüngesindeki eleman sayısı $|O(x_1)| = \frac{|G|}{|G_{x_1}|} = 6$ dır. x_1 noktasından ve orjinden geçen doğru l ile gösterilsin. $O(x_1)$ kümesinden x_1 ve $-x_1$ noktalarından farklı bir u noktası alınsın. f_1 dönüşümü u noktasına uygulanırsa $f_1(u), f_1^2(u), f_1^3(u) \in O(x_1)$ olur. f_1 uzaklık koruyan bir dönüşüm olduğundan

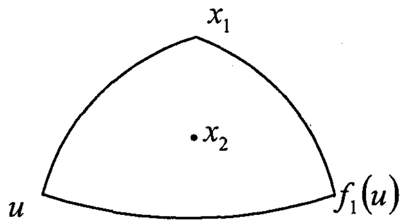
$$\|x_1 - u\| = \|x_1 - f_1(u)\| = \left\|x_1 - f_1^2(u)\right\| = \left\|x_1 - f_1^3(u)\right\|$$

eşitlikleri sağlanır. Bundan dolayı x_1 noktasının $u, f_1(u), f_1^2(u)$ ve $f_1^3(u)$ noktalarına olan uzaklığı aynıdır. Ayrıca

$$\|u - f_1(u)\| = \left\|f_1(u) - f_1^2(u)\right\| = \left\|f_1^2(u) - f_1^3(u)\right\| = \left\|f_1^3(u) - u\right\|$$

dir. x_1 noktasının yörüngesindeki altıncı nokta $-x_1$ noktası olmalıdır. Aksi takdirde x_1 noktasının yörüngesinde altıdan fazla eleman olurdu. $-x_1$ noktası da f_1 dönüşümü altında sabit kaldığından $-x_1$ noktasının $u, f_1(u), f_1^2(u)$ ve $f_1^3(u)$ noktalarına olan uzaklıkları eşittir. Dolayısıyla $\{u, f_1(u), f_1^2(u), f_1^3(u)\}$ noktaları l doğrusuna dik ekvator üzerinde bulunurlar. Dikkat edilecek olursa $O(x_1)$ kümesine ait altı nokta bir octahedronun köşe noktalarıdır.

x_2 noktasının yörüngesindeki eleman sayısı $|O(x_2)| = \frac{|G|}{|G_{x_2}|} = 8$ dir. x_2 noktası S^2 üzerinde öyle bir nokta olmalıdır ki $O(x_1)$ deki noktalar f_2 dönüşümü altında yine $O(x_1)$ kümesine resmedilsin. Bu durumda x_2 noktası S^2 üzerinde octahedronun bir yüzünün orta noktası ve orjini birleştiren doğrunun küreyi kestiği nokta olarak alındığında istenen sağlanmış olur. Örneğin x_2 noktası S^2 üzerinde küresel üşgenini orta noktası olarak seçilsin. Bu durumda $f_2(x_2) = x_2$



Şekil 2.6: x_2 noktasının yörünge noktalarının yerleştirilmesi

dir. $f_2(x_1) = x_1$ olamayacağından $f_2(x_1) = u$ yada $f_2(x_1) = f_1(u)$ olabilir. Eğer $f_2(x_1) = u$ olarak alınırsa $f_2\left(f_1^3(u)\right) = -x_1$ ve $f_2(-x_1) = f_1^2(u)$ olur. Böylece S^2 üzerinde octahedronun herbir yüzünden gelen küresel üçgenlerin orta noktaları x_2 noktasının yörüngesindeki noktaları verirler. Sekiz noktalı bu yörünge ise bir kübün köşeleridir.

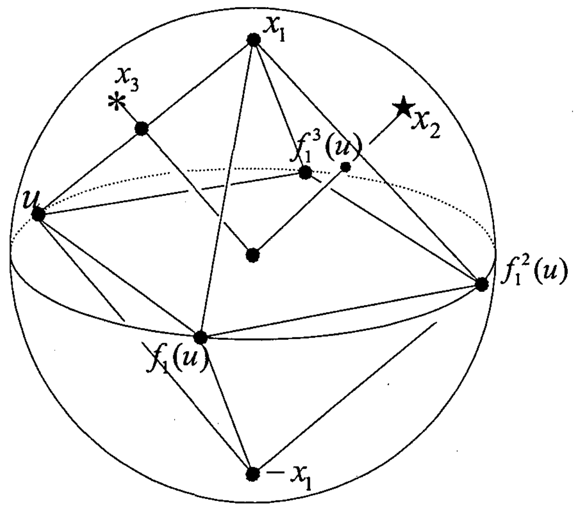
x_3 noktasının yörüngesindeki eleman sayısı ise $|O(x_3)| = \frac{|G|}{|G_{x_3}|} = 12$ olur. x_3 noktası olarak x_1 ve u noktalarını birleştiren yay parçasının orta noktası alınırsa istenen özellikler sağlanmış olur. f_3 dönüşümü altında $O(x_1)$ ve $O(x_2)$ kümeleri kendi üzerlerine resmedilirler. Octahedronun tüm kenarlarının S^2 üzerindeki orta noktaları $O(x_3)$ kümesinin 12 noktasını verir. G grubu köşe noktaları x_1, $-x_1$, u, $f_1(u)$, $f_1^2(u)$, $f_1^3(u)$ olan bir oktahedronun rotasyonel simetri grubu olur. Bu grup ise S_4 simetri grubuna izomorftur [6].

$r_3 = 2$, $r_2 = 3$ ve $r_1 = 5$ *ise:*

$|G_{x_3}| = 2$, $|G_{x_2}| = 3$ ve $|G_{x_1}| = 5$ olduğundan $|G| = 60$ olur.

$$\begin{aligned} G_{x_1} &= \langle f_1 \rangle \quad , \quad f_1^5 = e \\ G_{x_2} &= \langle f_2 \rangle \quad , \quad f_2^3 = e \\ G_{x_3} &= \{f_3, e\} \quad , \quad f_3^2 = e \end{aligned}$$

olsun. Keyfi bir $x_1 \in S^2$ noktası seçilsin. x_1 noktasının yörüngesindeki eleman



Şekil 2.7: $r_3 = 2$, $r_2 = 3$ ve $r_1 = 4$ durumunda yörünge noktaları

sayısı $|O(x_1)| = \frac{|G|}{|G_{x_1}|} = 12$ dir. x_1 noktasından ve orjinden geçen doğru l ile gösterilsin. $O(x_1)$ kümesinden x_1 ve $-x_1$ noktalarından farklı ve

$$0 < \|x_1 - u\| < \|x_1 - v\| < 2$$

olacak şekilde u ve v noktaları alınsın. f_1 dönüşümü u noktasına uygulanırsa $f_1(u), f_1^2(u),, f_1^3(u), f_1^4(u) \in O(x_1)$ olur. f_1 uzaklık koruyan bir dönüşüm olduğundan bu beş noktanın x_1 noktasına olan uzaklıkları eşittir.Benzer şekilde

$$f_1(v), f_1^2(v),, f_1^3(v), f_1^4(v) \in O(x_1)$$

noktalarının da x_1 noktasına olan uzaklıkları eşittir.

$$u, f_1(u), f_1^2(u),, f_1^3(u), f_1^4(u)$$

noktaları düzgün bir beşgenin köşe noktaları olurlar. Benzer şekilde

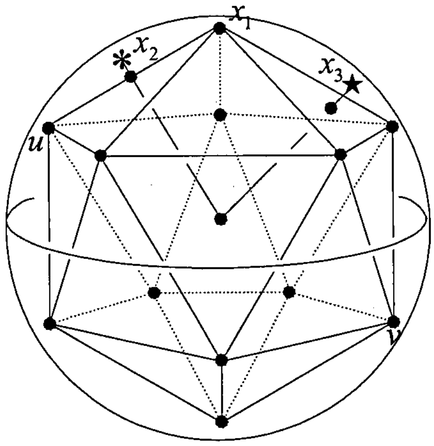
$$v, f_1(v), f_1^2(v),, f_1^3(v), f_1^4(v)$$

noktaları da düzgün bir beşgenin köşeleridir. $O(x_1)$ kümesinin onikinci noktası için tek olasılık $-x_1$ noktasıdır. u ve x_1 noktaları aynı yörüngeye ait olduklarından G_u ve G_{x_1} grupları G grubunun konjuge alt gruplarıdır.

Bu nedenle $|G_u| = 5$ dir. $G_u = \langle h \rangle$, $h^5 = e$ olsun. $h(x_1) = f_1(u)$ yada $h(z) = f_1^4(u)$ olmalıdır. Aksi takdirde x_1 noktasının yörüngesinde daha fazla nokta bulunacaktır. Ayrıca buradan $-u \in O(u) = O(x_1)$ olduğu görülür. $-u$ noktası u noktasından iki birim uzakta olduğundan $-u$ noktası $v, f_1(v), f_1^2(v),, f_1^3(v), f_1^4(v)$ noktalarından biri olmalıdır. $-u = v$ olarak alınırsa $-f_1^r(u) = f_1^r(v)$ olur. u noktasından bakıldığında onbir noktanın beş tanesi u ya diğer noktalardan daha yakın ve eşit uzaklıkta olurlar. Bu noktalar $x_1, f_1(u),, f_1^3(v), f_1^2(v)$ ve $f_1^4(v)$ noktalarıdır. Böylece

$$\|u - x_1\| = \|u - f_1(u)\| = \left\|u - f_1^2(v)\right\|$$

olur. $O(x_1)$ de bulunan oniki nokta bir isocahedronun köşe noktaları olurlar. Diğer yörüngeler aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.8: $r_3 = 2$, $r_2 = 3$ ve $r_1 = 5$ durumunda yörünge noktaları

$SO(3)$ grubunun G alt grubu ise A_5 grubuna izomorftur [6].

2.3 O(3) Grubunun Sonlu Alt Grupları

G grubu $O(3)$ ortagonal grubunun sonlu bir alt grubu olsun. G grubu $SO(3)$ grubunun bir alt grubu ise bir önceki bölümden G alt grubu $\mathbb{Z}_n$, D_{2n}, A_4, S_4, A_5 gruplarından birine izomorf olur. G alt grubu tamamen $SO(3)$ grubunun içinde kalmıyorsa

$$H = G \cap SO(3)$$

olsun. H alt grubu $SO(3)$ grubunun sonlu bir alt grubu olacağından H alt grubu $\mathbb{Z}_n$, D_{2n}, A_4, S_4, A_5 gruplarından birine izomorftur. $-I \in G$ ise G grubu $H \times \mathbb{Z}_2$ grubuna izomorftur. $h \in H$ ve $-I \in G$ olduğundan $-h \in G$ dir. $\det(-h) = -1$ eşitliğinden $-h \in G \backslash H$ olur. $g \in G \backslash H$ olsun. $g = -I.h$ olacak şekilde $h = -g \in H$ elemanı olduğundan $g \in -H$ olur. Buradan $G \backslash H = -H$ olduğundan $G \cong H \times \mathbb{Z}_2$ dir.

$-I \notin G$ ise

$$\begin{aligned} \Psi : \ G &\longrightarrow \Psi(G) \leq SO(3) \\ A &\longmapsto \Psi(A) = (\det A)\, A \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan Ψ dönüşümü bir grup izomorfizmidir.

$$\Psi(AB) = \det(AB)\, AB = (\det A)\, A\, (\det B)\, B = \Psi(A)\, \Psi(B)$$

eşitliğinden Ψ dönüşümü bir grup homomorfizmidir. $\Psi(A) = I$ olsun. $(\det A)\, A = I$ eşitliğinden $A = \pm I$ olur. $-I \notin G$ olduğundan $A = I$ dir. Bu nedenle Ψ dönüşümünün çekirdeği sadece I elemanını içerir. Böylece Ψ dönüşümü bir grup izomorfizmi olur. Böylece $O(3)$ ortagonal grubunun sonlu bir G alt grubu

$$\mathbb{Z}_n, D_{2n}, A_4, S_4, A_5, \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2, D_{2n} \times \mathbb{Z}_2, A_4 \times \mathbb{Z}_2, S_4 \times \mathbb{Z}_2, A_5 \times \mathbb{Z}_2$$

gruplarından birine izomorftur.

3 KÜRENİN SONLU ALT QUANDILLARI

3.1 Çemberin Sonlu Alt Quandılları

Q çemberin n elemanlı sonlu bir alt quandılı olsun.

$$x * y = 2\langle x, y\rangle y - x$$

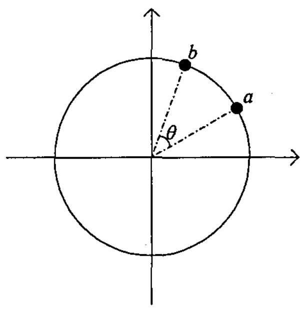
quandıl ikili işlemi dikkate alındığında quandıldaki noktalar çember üzerinde eşit aralıklarla yerleşir. Yani quandılın noktaları çember içine yerleştirilmiş bir düzgün $n-$genin köşe noktaları olurlar.

Çemberin n elemanlı sonlu alt quandılının noktaları $\theta = \frac{2\pi}{n}$ olmak üzere

$$Q = \{q_i = (\cos i\theta, \sin i\theta)\,,\ 0 \leq i \leq n-1\}$$

şeklinde seçilsin. Dikkat edilecek olursa sonlu Q alt quandılı $\{q_i, q_{i+1}\}$ elemanları tarafından üretilebilir.

Çemberin herhangi a, b noktaları verildiğinde 2π a ve b noktaları arasındaki açının rasyonel bir katı ise bu noktalardan üretilmiş alt quandıl sonlu olur. 2π



Şekil 3.1: Quandılı üreten a ve b noktaları

bu iki nokta arasındaki açının rasyonel bir katı değilse bu iki noktanın ürettiği alt quandıl sonsuz elemanlıdır. Q_1 a_1 ve a_2, Q_2 de b_1 ve b_2 noktaları tarafından üretilen sonlu alt quandıllar olsunlar. a_1 ve a_2 noktaları arasındaki açı θ, b_1 ve b_2 noktaları arasındaki açı ise φ olsun. Q_1 ve Q_2 çemberin sonlu alt quandılları ise $p_1 < q_1, p_2 < q_2$ ve $(p_1, q_1) = 1$, $(p_2, q_2) = 1$ olmak üzere $\theta = 2\pi\frac{p_1}{q_1}$, $\varphi = 2\pi\frac{p_2}{q_2}$ olacak şekilde $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayıları vardır. Bu noktalar

$$\begin{aligned} a_1 &= (1,0)\,,\ a_2 = (\cos\theta, \sin\theta) \\ b_1 &= (1,0)\,,\ b_2 = (\cos\varphi, \sin\varphi) \end{aligned}$$

olarak alındığında bu sonlu quandılların elemanları

$$\begin{aligned} Q_1 &= \langle a_1, a_2 \rangle = \{0, \theta, 2\theta, ..., q_1\theta\} \pmod{2\pi} \\ Q_2 &= \langle b_1, b_2 \rangle = \{0, \varphi, 2\varphi, ..., q_2\varphi\} \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilebilir. Sonlu iki küme arasında bire-bir ve örten bir eşleme kurmak için eleman sayılarının eşit olması gerekir. Bu nedenle Q_1 ve Q_2 quandıllarının eşit sayıda eleman içermeleri için $q_1 = q_2$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} T &: Q_1 \longrightarrow Q_2 \\ T(x) &= \frac{\varphi}{\theta}x \end{aligned}$$

dönüşümü bir quandle homomorfizmidir. $q_1 = q_2$ iken $T(i\theta) = T(j\theta)$ ise $i\varphi = j\varphi + k2\pi$ olur. $\varphi = 2\pi\frac{p_2}{q_2}$ olduğundan $\frac{p_2}{q_2}(i-j) = k$ bulunur. p_2 ve q_2 aralarında asal olduğundan $i - j = l.q_2$ olacak şekilde bir $l \in \mathbb{Z}$ tamsayısı vardır. Bu durumda

$$i\theta = (j + lq_2)\,\theta = q_2 l 2\pi\frac{p_1}{q_1} + j2\pi\frac{p_1}{q_1} = j\theta$$

olduğundan T dönüşümü bire-bir olur. Q_1 ve Q_2 iki eleman tarafından üretilmiş sonsuz iki alt quandıl ise $T : Q_1 \longrightarrow Q_2$, $T(x) = \frac{\varphi}{\theta}x$ dönüşümü bir quandıl homomorfizmidir. $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $T(n\theta) = T(m\theta)$ olsun. T dönüşümünün tanımından $n\varphi = m\varphi + k.2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ olur. $\varphi(n-m) = k.2\pi$ eşitliğinden 2π φ açısının rasyonel bir katı olmadığından $k = 0$ olmalıdır. Buradan $n\theta = m\theta$ olduğundan dönüşüm bire-birdir. Bundan dolayı çemberin iki eleman tarafından üretilen sonsuz alt quandılları izomorfturlar.

Çember üzerinde $\{x_1, x_2, ...x_n\}$ elemanları göz önüne alınsın.

$$x_1 \text{ ve } x_2 \text{ noktaları arasındaki açı } \theta_1,$$
$$x_1 \text{ ve } x_3 \text{ noktaları arasındaki açı } \theta_2,$$
$$\vdots$$
$$x_1 \text{ ve } x_n \text{ noktaları arasındaki açı } \theta_{n-1}$$

olsun. Eğer her i için $\theta_i = 2\pi\frac{p_i}{q_i}$, $(p_i, q_i) = 1$, $p_i \leq q_i$, olacak şekilde $\frac{p_i}{q_i} \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı varsa bu noktaların ürettiği sonlu alt quandıldaki eleman sayısı $okek\,(q_1, q_2, ..., q_n)$ olur ve bu quandle aralarındaki açı $\frac{2\pi}{okek(q_1,q_2,...,q_n)}$ olan iki noktanın ürettiği quandıla izomorftur.

3.2 Kürenin Sonlu Alt Quandılları

Q kürenin bir alt quandılı olsun. Her $y \in Q$ için

$$\begin{aligned} \sigma_y : \ & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & x \longmapsto \sigma_y(x) = x - 2\langle x, y\rangle y \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlansın. Her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$ için

$$\langle \sigma_y(x_1), \sigma_y(x_2)\rangle = \langle x_1 - 2\langle x_1, y\rangle y, x_2 - 2\langle x_2, y\rangle y\rangle = \langle x_1, x_2\rangle$$

olduğundan σ_y dönüşümü $O(3)$ ortagonal grubunun bir elemanıdır. σ_y dönüşümünün matrisi determinantı -1 olan

$$\begin{pmatrix} 1-2y_1^2 & -2y_1y_2 & -2y_1y_3 \\ -2y_1y_2 & 1-2y_2^2 & -2y_2y_3 \\ -2y_1y_3 & -2y_2y_3 & 1-2y_3^2 \end{pmatrix}$$

matrisidir. Dikkat edilecek olursa $\sigma_y(y) = -y$ dir. Her $x \in \mathbb{R}^3$ için $\sigma_{-y}(x) = x - 2\langle x, -y\rangle(-y) = \sigma_y(x)$ olur.

Q quandılındaki her $y \in Q$ noktası için tanımlanan σ_y yansımalarının ürettiği $O(3)$ ortagonal grubunun alt grubu

$$G_Q = \langle \sigma_y : y \in Q\rangle$$

şeklinde gösterilsin. Eğer $Q = \{y\}$ tek elemanlı bir quandıl ise $G_Q = \{\sigma_y, I\}$ olacağından $G_Q \cong \mathbb{Z}_2$ dir. $Q = \{y_1,y_2\}$ kürenin iki elemanlı bir alt quandılı ise y_1 ve y_2 noktaları antipodal noktalar olacaklarından $\sigma_{y_1} = \sigma_{y_2}$ olduğundan $G_Q \cong \mathbb{Z}_2$ bulunur.

y_1 ve y_2 kürenin Q alt quandılının antipodal olmayan farklı iki noktası ise $\sigma_{y_1} \neq \sigma_{y_2}$ dir. Çünkü her $x \in \mathbb{R}^3$ için $\sigma_{y_1}(x) = \sigma_{y_2}(x)$ ise

$$x - 2\langle x, y_1\rangle y_1 = x - 2\langle x, y_2\rangle y_2$$

eşitliği her x elemanı için sağlandığından özel olarak $x = y_1, y_2$ noktaları alınırsa

$$y_1 = \langle y_1, y_2\rangle y_2 \text{ ve } y_2 = \langle y_1, y_2\rangle y_1$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden $y_1 = \langle y_1, y_2\rangle^2 y_1$ olacağından $y_1 = \pm y_2$ bulunur. Bu nedenle eğer quandıl sonsuz ise quandıldan elde edilen G_Q grubu da sonsuzdur.

Önerme 3.2.1 *Kürenin Q alt quandılı sonlu ise quandıldan elde edilen $O(3)$ orta gonal grubunun G_Q alt grubu da sonludur.*

Kanıt. $n > 2$ olmak üzere $Q = \{y_1, y_2, ...y_n\}$ kürenin sonlu bir alt quandılı olsun. Q sonlu alt quandılının her $y_i \in Q$ elemanına

$$\begin{array}{rccl} \sigma'_{y_i} : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & x & \longmapsto & \sigma'_{y_i}(x) = -\sigma_{y_i}(x) \end{array}$$

dönüşümü karşılık getirilsin. Bu dönüşümlerin ürettiği grup $G'_Q = \langle \sigma'_{y_i} : y_i \in Q\rangle$ olsun.

Küredeki quandıl ikili işlemi

$$x * y = 2\langle x, y\rangle y - x$$

olduğundan σ'_{y_i} dönüşümü $x \in S^2$ elemanına uygulanırsa

$$\sigma'_{y_i}(x) = x * y_i$$

olur. σ'_{y_i} dönüşümü $Q \subset S^2$ alt quandılına kısıtlanırsa

$$\sigma'_{y_i}|_Q : Q \longrightarrow Q$$

dönüşümü quandıl tanımından her $x' \in Q$ elemanı için $x * y_i = x'$ olacak şekilde bir tek $x \in Q$ elemanı olduğundan bire-bir ve örtendir. Bu nedenle $\sigma'_{y_i}|_Q$ dönüşümü n elemanlı bir kümeden kendisine giden bire-bir ve örten bir dönüşüm olduğundan S_n simetri grubunun bir elemanı olarak düşünülebilir. Böylece bu dönüşümlerin ürettiği $G = \langle \sigma'_{y_i}|_Q \ : y_i \in Q \rangle$ grubu S_n simetri grubunun bir alt grubu olur. S_n sonlu bir grup olduğundan G grubuda sonlu bir gruptur.

$$\begin{aligned} \Psi : \ G'_Q &\longrightarrow G \\ \sigma'_{y_i} &\longmapsto \sigma'_{y_i}|_Q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlana dönüşüm bir grup izomorfizmidir. Dolayısıyla G'_Q grubu G grubuna izomorf olduğundan G'_Q grubu da sonludur.

Eğer $-I \in G_Q$ ise $G_Q \cong G'_Q \times \mathbb{Z}_2$ dir. G'_Q grubu sonlu olduğundan G_Q sonludur. $-I \notin G_Q$ ise

$$\begin{aligned} \varphi : \ G_Q &\longrightarrow G'_Q \\ \sigma_{y_i} &\longmapsto \det(\sigma_{y_i})\, \sigma_{y_i} \end{aligned}$$

dönüşümü bir grup izomorfizmi olduğundan $G_Q \cong G'_Q$ olur. Bundan dolayı G_Q grubu $O(3)$ ortagonal grubunun sonlu bir alt grubudur. ∎

2. Bölümde $O(3)$ grubunun bir alt grubunun

$$\mathbb{Z}_n, D_{2n}, A_4, S_4, A_5, \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2, D_{2n} \times \mathbb{Z}_2, A_4 \times \mathbb{Z}_2, S_4 \times \mathbb{Z}_2, A_5 \times \mathbb{Z}_2$$

gruplarından birine izomorf olduğu gösterilmişti. Bu nedenle Q alt quandılı sonlu iken quandıldan elde edilen G_Q grubu $O(3)$ ortagonal grubunun sonlu bir alt grubu olduğundan G_Q grubu

$$\mathbb{Z}_n, D_{2n}, A_4, S_4, A_5, \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2, D_{2n} \times \mathbb{Z}_2, A_4 \times \mathbb{Z}_2, S_4 \times \mathbb{Z}_2, A_5 \times \mathbb{Z}_2$$

gruplarından birine izomorftur. Fakat $n > 2$ olmak üzere $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$, A_4, A_5, ve $A_4 \times \mathbb{Z}_2$ grupları kürenin sonlu bir alt quandılından elde edilemezler. Bunu görmek için aşağıdaki önermeye ihtiyaç vardır.

Önerme 3.2.2 *G grubu $O(3)$ grubunun A_4 yada A_5 grubuna izomorf bir alt grubu ise G grubu $SO(3)$ grubunun bir alt grubudur.*

Kanıt. A_4 ve A_5 alterne grupları bağıntıları aşağıdaki şekilde verilen iki üreteçli gruplara izomorfturlar [7,8].

$$\begin{aligned} A_4 &\cong \left\langle a, b : a^3 = b^3 = 1,\ (ab)^2 = 1 \right\rangle \\ A_5 &\cong \left\langle a, b : a^5 = b^2 = 1,\ (ab)^3 = 1 \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi : \ A_4 &\longrightarrow G \leq O(3) \\ a &\longmapsto \varphi(a) = A \\ b &\longmapsto \varphi(b) = B \end{aligned}$$

dönüşümü bir grup izomorfizmi olsun. $A, B \in O(3)$ olduğundan $\det A = \det B = \pm 1$ olur. φ bir izomorfizm olduğundan $\varphi(a^3) = A^3$ dir. $a^3 = 1$ bağıntısından $A^3 = I$ eşitliği vardır. Buradan $(\det A)^3 = 1$ olacağından $\det A = 1$ olur. Benzer şekilde $\det B = 1$ elde edilir. Bundan dolayı $O(3)$ grubunun A_4 grubuna izomorf alt grubu $SO(3)$ grubunun alt grubudur.

$$\begin{aligned} \varphi : \ A_5 &\longrightarrow G \leq O(3) \\ a &\longmapsto \varphi(a) = A \\ b &\longmapsto \varphi(b) = B \end{aligned}$$

dönüşümü bir grup izomorfizmi olsun. $A, B \in O(3)$ olduğundan $AA^t = BB^t = I$ dir. Buradan $\det A = \det B = \pm 1$ olur. φ bir izomorfizm olduğundan $\varphi(a^5) = A^5$ dir. $a^5 = 1$ bağıntısından $A^5 = I$ eşitliği vardır. Buradan $(\det A)^5 = 1$ olacağından $\det A = 1$ olur. Benzer şekilde $\det B = 1$ elde edilir. Bundan dolayı $O(3)$ grubunun A_5 grubuna izomorf alt grubu $SO(3)$ grubunun bir alt grubudur. ■

Önerme 3.2.3 *$O(3)$ ortagonal grubunun*

$$A_4, A_5, A_4 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$$

gruplarına izomorf alt grupları bir quandıl grubu olarak ortaya çıkmazlar.

Kanıt. $O(3)$ grubunun A_4 ve A_5 gruplarına izomorf olan alt grupları $SO(3)$ içinde kaldığından determinantı -1 olan ikinci dereceden eleman içermezler. Bu nedenle A_4 ve A_5 grupları bir Q alt quandılından elde edilen G_Q grubu olarak ortaya çıkmazlar.

$O(3)$ ortagonal grubunun $A_4 \times \mathbb{Z}_2$ grubuna izomorf alt grubunun bir quandıl grubu olarak elde edilemeyeceği şu şekilde görülebilir: $SO(3)$ grubu içinde A_4 alterne grubuna izomorf elemanları

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_9 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$G = \{I, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}\}$$

grubu alınsın. G grubunda $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \alpha_9 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve

$\alpha_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ elemanları ikinci derecedendir. $O(3)$ grubunun $A_4 \times \mathbb{Z}_2$

grubuna izomorf alt grubunun elemanları

$$\left\{ \begin{array}{c} I, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \\ -I, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, -\alpha_4, -\alpha_5, -\alpha_6, -\alpha_7, -\alpha_8, -\alpha_9, -\alpha_{10}, -\alpha_{11} \end{array} \right\}$$

şeklinde seçilsin. Bu grupta -$\alpha_3, -\alpha_8$ ve $-\alpha_9$ elemanları determinantı -1 olan ikinci dereceden elemanlardır. Bu üç elemanın ürettiği grup

$$\langle -\alpha_3, -\alpha_8, -\alpha_9 \rangle \cong K_4 \times \mathbb{Z}_2$$

olur. Bu nedenle $A_4 \times \mathbb{Z}_2$ grubu bir quandıldan elde edilemez.

$n > 2$ olmak üzere $O(3)$ ortagonal grubunun $\mathbb{Z}_n$ ve $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ gruplarına izomorf alt gruplarının kürenin bir alt quandılından elde edilemeyeceği ise şu şekilde gösterilebilir: G grubu $O(3)$ ortagonal grubunun $\mathbb{Z}_n$ grubuna izomorf bir alt grubu ve $A \in O(3)$ elemanı grubun üreteci olsun.

n tek ise $A^n = I$ olduğundan $(\det A)^n = 1$ olur. $\det A = \pm 1$ olduğundan $(\det A)^n = 1$ eşitliğinden $\det A = 1$ olur. Bundan dolayı $A \in SO(3)$ dür. G grubu A elemanı tarafından üretildiğinden G grubu $SO(3)$ grubunun bir alt grubu olur. Bu nedenle n tek iken G bir quandıldan elde edilemez. $O(3)$ ortagonal grubunun $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ grubuna izomorf alt grubu

$$\{I, A, A^2, ..., A^{n-1}, -I, -A, -A^2, ..., -A^{n-1}\}$$

olarak alındığında bu grupta 2. dereceden ve determinantı -1 olan eleman sadece $-I$ dır. $-I$ elemanının ürettiği grup $\{I, -I\} \cong \mathbb{Z}_2$ olduğundan $O(3)$ grubunun $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ grubuna izomorf alt grubu bir quandıl grubu olarak elde edilemez.

n çift ise: $\det A = 1$ ise G grubu $SO(3)$ grubunun bir alt grubu olacağından G bir quandıl grubu olamaz.

$\det A = -1$ ise $\frac{n}{2} = m$ olmak üzere G grubunda 2. dereceden bir tek A^m elemanı vardır. $\det A^m = 1$ ise bu grup 2. dereceden determinantı -1 olan bir eleman içermediğinden quandıl grubu olarak elde edilemez. Eğer $\det A^m = -1$ ise $\langle A^m \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ olacağından $n > 2$ için $\mathbb{Z}_n$ grubuna izomorf bir alt grup quandıldan elde edilemez.

$O(3)$ grubunun $\mathbb{Z}_n$ grubuna izomorf alt grubu $\{I, A, A^2, ..., A^{n-1}\}$ olmak üzere $B \in O(3)$, $B^2 = I$ ve $B \notin \langle A \rangle$ elemanı seçilsin. $\langle B \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ olduğundan

$$\left\{(I,I), (I,A), ..., \left(I, A^{n-1}\right), (B,I), (B,A), ..., \left(B, A^{n-1}\right)\right\}$$

grubu $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ grubuna izomorftur. Bu gruptaki ikinci dereceden elemanlar

$$(I, A^m), (B, I), (B, A^m)$$

dir. Bu üç elemanın ürettiği grup $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ grubuna izomorftur. Bu nedenle $n > 2$ için n çift durumunda da $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ grubuna izomorf bir grup bir quandıl grubu olarak elde edilemez. ∎

Önerme 3.2.4 *Her $a, b \in S^2$ için*

$$a * b = 2\langle a, b\rangle b - a$$

olmak üzere

$$\sigma_{a*b} = \sigma_b \sigma_a \sigma_b$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. $a, b \in S^2$ olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^3$ için

$$\begin{aligned}
\sigma_{a*b}(x) &= x - 2\langle a * b, x\rangle a * b \\
&= x - 2\langle 2\langle a, b\rangle b - a, x\rangle (2\langle a, b\rangle b - a) \\
&= x - 8\langle a, b\rangle^2 \langle x, b\rangle b + 4\langle a, b\rangle \langle x, b\rangle a + 4\langle a, b\rangle \langle a, x\rangle b - 2\langle a, x\rangle a
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sigma_b \sigma_a \sigma_b(x) &= \sigma_b(\sigma_a(\sigma_b(x))) \\
&= \sigma_b(\sigma_a(x - 2\langle b, x\rangle b)) \\
&= \sigma_b(x - 2\langle b, x\rangle b - 2\langle x - 2\langle b, x\rangle b, a\rangle a) \\
&= x - 8\langle a, b\rangle^2 \langle x, b\rangle b + 4\langle a, b\rangle \langle x, b\rangle a + 4\langle a, b\rangle \langle a, x\rangle b - 2\langle a, x\rangle a
\end{aligned}$$

olduğundan $\sigma_{a*b} = \sigma_b \sigma_a \sigma_b$ dir. ∎

Önerme 3.2.5 *Q kürenin sonlu bir alt quandılı olsun. $a \in Q$ noktası için $-a \in Q$ ise herhangi bir $b \in Q$ noktasının antipodal noktasıda quandılın elemanıdır.*

Kanıt. $a, -a$ ve b noktalarından geçen büyük çember göz önüne alınsın. a ve b noktaları arasındaki açı θ olsun. 2π a ve b noktaları arasındaki θ açısının rasyonel bir katıdır. Aksi takdirde Q quandılı sonsuz olurdu. $(p, q) = 1$ ve $p \leq q$ olmak üzere $\theta = 2\pi\frac{p}{q}$ olsun. Bu durumda b ve $-a$ noktaları arasındaki açı $\pi - 2\pi\frac{p}{q}$ olur. $a, -a$ ve b noktalarının ürettiği elemanlar Q alt quandılının elemanları olacaklarından bu üç noktanın ürettiği elemanlar arasındaki açı $\frac{\pi}{q}$ olur. $-a$ ve $-b$ noktaları arasındaki $2\pi\frac{p}{q}$ açısı $\frac{\pi}{q}$ açısının $2p$ katı olduğundan $-b$ noktası quandılın elemanı olur. ■

Kürenin Q alt quandılından elde edilen

$$G_Q = \langle \sigma_y : y \in Q \rangle$$

grubu $y_1, y_2 \in Q$ olmak üzere

$$\sigma_{y_1} * \sigma_{y_2} = \sigma_{y_2}\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}^{-1}$$

işlemi ile bir quandıl olur. Herhangi bir σ_y elemanı için $\sigma_y^{-1} = \sigma_y$ olduğundan $\sigma_{y_1} * \sigma_{y_2} = \sigma_{y_2}\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}$ dir.

$$\begin{aligned} \Psi : \; Q &\longrightarrow G_Q \\ x &\longmapsto \Psi(x) = \sigma_x \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm göz önüne alındığında

$$\Psi(x_1 * x_2) = \sigma_{x_1 * x_2} = \sigma_{x_2}\sigma_{x_1}\sigma_{x_2} = \sigma_{x_1} * \sigma_{x_2} = \Psi(x_1) * \Psi(x_2)$$

olduğundan Ψ dönüşümü bir quandıl homomorfizmidir.

G_{Q_1} ve G_{Q_2} sonlu iki quandıl grubu olmak üzere $\varphi : G_{Q_1} \to G_{Q_2}$ dönüşümü bir grup izomorfizmi ise

$$\varphi(\sigma_{x_1} * \sigma_{x_2}) = \varphi(\sigma_{x_2}\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}) = \varphi(\sigma_{x_1})\varphi(\sigma_{x_1})\varphi(\sigma_{x_2}) = \varphi(\sigma_{x_1}) * \varphi(\sigma_{x_2})$$

olduğundan bir quandıl izomorfizmidir.

Tersine φ bir quandıl izomorfizmi ise yine

$$\varphi(\sigma_{x_1} * \sigma_{x_2}) = \varphi(\sigma_{x_2}\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}) = \varphi(\sigma_{x_1})\varphi(\sigma_{x_1})\varphi(\sigma_{x_2}) = \varphi(\sigma_{x_1}) * \varphi(\sigma_{x_2})$$

eşitliğinden φ dönüşümü bir grup izomorfizmi olur.

Önerme 3.2.6 *Q_1 ve Q_2 kürenin izomorf sonlu iki alt quandılı ise bu quandıllardan elde edilen G_{Q_1} ve G_{Q_2} grupları izomorftur.*

Kanıt. $f : Q_1 \to Q_2$ bir quandıl izomorfizmi olsun.

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & \xrightarrow{f} & Q_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_{Q_1} & \xrightarrow{\Psi} & G_{Q_2} \end{array}$$

$\sigma_x \in G_{Q_1}$ olmak üzere

$$\Psi(\sigma_x) = \sigma_{f(x)}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir grup izomorfizmidir.

$\Psi(\sigma_x) = \Psi(\sigma_y)$ ise $\sigma_{f(x)} = \sigma_{f(y)}$ olduğundan $f(x) = \pm f(y)$ olur. $f(x) = f(y)$ ise f bire-bir olduğundan $x = y$ ve buradan $\sigma_x = \sigma_y$ olur. $f(x) = -f(y)$ ise f bir quandıl izomorfizmi olduğundan $x = -y$ ve $\sigma_x = \sigma_{-y} = \sigma_y$ bulunur. Q_1 ve Q_2 sonlu olduklarından G_{Q_1} ve G_{Q_2} grupları sonludur. Ψ dönüşümü G_{Q_1} den G_{Q_2} ye bire–bir olduğundan örtendir.

$$\begin{aligned} \Psi(\sigma_x * \sigma_y) &= \Psi(\sigma_y\sigma_x\sigma_y) = \Psi(\sigma_{x*y}) = \sigma_{f(x*y)} \\ &= \sigma_{f(x)*f(y)} = \sigma_{f(y)}\sigma_{f(x)}\sigma_{f(y)} = \sigma_{f(x)} * \sigma_{f(y)} \\ &= \Psi(\sigma_x) * \Psi(\sigma_y) \end{aligned}$$

eşitliğinden Ψ dönüşümü bir quandıl izomorfizmi dolayısıyla bir grup izomorfizmidir. ∎

Bu önermenin tersi tüm noktaları aynı büyük çember üzerinde bulunmayan alt quandıllar için doğrudur. Tüm noktaları aynı büyük çember üzerinde bulunan bir quandılın eleman sayısı çift ise quandılın noktaları ikişer ikişer antipodal olur. Bu nedenle quandıl elemanlarından elde edilen yansımaların sayısı $\frac{n}{2}$ olacağından quandıldan elde edilen grup $D_{\frac{n}{2}2}$ dihedral grubuna izomorf olur. Hiçbir antipodal nokta içermeyen bir quandılın noktaları aynı büyük çember üzerinde bulunur. Tüm noktaları aynı büyük çember üzerinde bulunmayan alt quandıllar ise Önerme 3.2.7 de gösterileceği gibi $S_4, D_{2n} \times \mathbb{Z}_2, S_4 \times \mathbb{Z}_2, A_5 \times \mathbb{Z}_2$ gruplarının yapılarından dolayı tüm noktaların antipodal noktalarını içerirler.

Tüm noktaları aynı büyük çember üzerinde bulunan ve antipodal nokta içermeyen iki alt quandıldan elde edilen gruplar izomorf olduğunda quandılların da izomorf olduğu şu şekilde de görülebilir: Q_1 ve Q_2 antipodal nokta içermeyen iki sonlu alt quandıl ise Q_1 ve Q_2 antipodal nokta içermediklerinden

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & \longrightarrow & Q_2 \\ \downarrow_{\Psi_{Q_1}} & & \downarrow_{\Psi_{Q_2}} \\ G_{Q_1} & \xrightarrow{\varphi} & G_{Q_2} \end{array}$$

$\Psi_{Q_1} : Q_1 \longrightarrow G_{Q_1}$, $\Psi_{Q_1}(x) = \sigma_x$ ve $\Psi_{Q_2} : Q_2 \longrightarrow G_{Q_2}$, $\Psi_{Q_2}(y) = \sigma_y$ dönüşümleri bire-birdir.

$$\begin{array}{rcll} f: & Q_1 & \longrightarrow & Q_2 \\ & x & \longmapsto & f(x) = \left(\Psi_{Q_2}^{-1}\varphi\Psi_{Q_1}\right)(x) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir quandıl izomorfizmidir. Herhangi $x, y \in Q_1$ elemanları için

$$\begin{aligned} f(x * y) &= \left(\Psi_{Q_2}^{-1}\varphi\Psi_{Q_1}\right)(x * y) = \Psi_{Q_2}^{-1}\left(\varphi\left(\sigma_{x*y}\right)\right) \\ &= \Psi_{Q_2}^{-1}\left(\varphi\left(\sigma_y\sigma_x\sigma_y\right)\right) = \Psi_{Q_2}^{-1}\left(\varphi\left(\sigma_y\right)\varphi\left(\sigma_x\right)\varphi\left(\sigma_y\right)\right) \\ &= \Psi_{Q_2}^{-1}\left(\varphi\left(\sigma_x\right) * \varphi\left(\sigma_y\right)\right) = \Psi_{Q_2}^{-1}\left(\varphi\left(\sigma_x\right)\right) * \Psi_{Q_2}^{-1}\left(\varphi\left(\sigma_y\right)\right) \end{aligned}$$

olduğundan f dönüşümü homomorfizm koşulunu sağlar. $x, y \in Q_1$ olmak üzere $f(x) = f(y)$ ise $\Psi_{Q_2}^{-1}(\varphi(\sigma_x)) = \Psi_{Q_2}^{-1}(\varphi(\sigma_y))$ olur. Ψ_{Q_2} dönüşümü bire-bir olduğundan $\varphi(\sigma_x) = \varphi(\sigma_y)$ dir. φ bire-bir olduğundan $\sigma_x = \sigma_y$ ve Q_1 alt quandılı antipodal nokta içermediğinden $x = y$ bulunur.

Önerme 3.2.7 *Q_1 ve Q_2 tüm noktaları aynı büyük çember üzerinde bulunmayan iki sonlu alt quandıl olsun. G_{Q_1} ve G_{Q_2} de bu quandıllardan elde edilmiş gruplar olsunlar. G_{Q_1} grubu G_{Q_2} grubuna izomorf ise Q_1 alt quandılı Q_2 alt quandılına izomorftur.*

Kanıt. Q_1 ve Q_2 tüm noktaları aynı büyük çember üzerinde bulunmayan iki sonlu alt quandıl olduğundan bu quandıllardan elde edilen gruplar $S_4, D_{2n}\times \mathbb{Z}_2, S_4 \times \mathbb{Z}_2, A_5 \times \mathbb{Z}_2$ gruplarından birine izomorftur.

$O(3)$ ortagonal grubunun $A_5 \times \mathbb{Z}_2$, S_4, $S_4 \times \mathbb{Z}_2$ ve $D_{2n} \times \mathbb{Z}_2$ gruplarına izomorf alt grupları uygun seçilmiş üç yansıma tarafından üretilebilir (Bakınız Bölüm 3.4).

$G_{Q_1} \cong G_{Q_2} \cong S_4$ ise: $\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}$ ve σ_{x_3} yansımalarından üretilen S_4 simetri grubuna izomorf grup

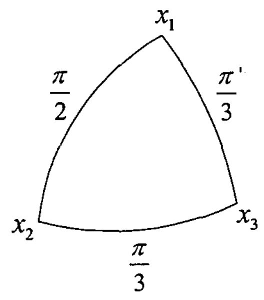
$$S_4 \cong G_{Q_1} = \left\langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_3} \mid (\sigma_{x_1}\sigma_{x_2})^2 = I,\ (\sigma_{x_1}\sigma_{x_3})^3 = I,\ (\sigma_{x_2}\sigma_{x_3})^3 = I \right\rangle$$

olsun. Bu durumda Q_1 alt quandılı aynı büyük çember üzerinde bulunmayan x_1, x_2 ve x_3 noktaları tarafından üretilir. Eğer bu noktalar aynı büyük çember üzerinde bulunsalardı quandılın noktalarının tümü aynı büyük çember üzerinde olurdu. Kürenin bütün noktaları aynı büyük çember üzerinde bulunan alt quandılından elde edilen grup D_{2n} olduğundan bu grubun S_4 grubuna izomorf olmasıyla çelişir. Eğer Q_1 alt quandılı bu noktalar tarafından üretilmeseydi G_{Q_1} grubunda üreteçlerden elde edilemeyen bir eleman olurdu.

$(\sigma_{x_1}\sigma_{x_2})^2 = I$ olduğından $\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}$ dönüşümü π lik bir dönmedir. Bu nedenle x_1 ve x_2 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{2}$ olur. x_1 noktası x_2 noktasına göre ve x_2 noktası da x_1 noktasına göre yansıtılırsa -x_1 ve -x_2 noktaları da quandılın elemanları olurlar. $(\sigma_{x_1}\sigma_{x_3})^3 = I$ olduğundan $\sigma_{x_1}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{3}$ ya da $\frac{4\pi}{3}$ lük dönmedir.

- $\sigma_{x_1}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{3}$ lük bir dönme ise x_1 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{3}$ olur. $(\sigma_{x_2}\sigma_{x_3})^3 = I$ olduğundan $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{3}$ ya da $\frac{4\pi}{3}$ lük dönmedir.

– $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{3}$ lük bir dönme ise x_2 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{3}$ olur. Buradan kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ olan aşağıdaki şekilde gösterilen üçgen elde edilir. Bu üçgenin köşeleri yansıtılarak 12 noktalı bir quandıl elde edilir (Bölüm 3.4).

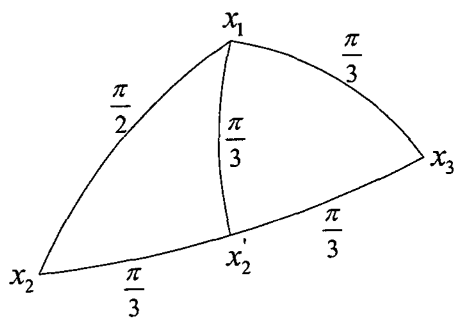


Şekil 3.2: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ olan küresel üçgen

– $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{4\pi}{3}$ lük bir dönme ise x_2 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{2\pi}{3}$ olur. x_2 noktasının antipodal noktası quandılda olduğundan aşağıdaki şekilde gösterilen x_2' noktası da quandılın elemanı olur. $x_2 * x_2' = x_3$ olduğundan $\sigma_{x_2 * x_2'} = \sigma_{x_3}$ dir. x_2 ve x_2' noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{3}$ olduğundan

$$\begin{aligned} S_4 \cong G_{Q_1} &= \Big\langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_2'} \mid (\sigma_{x_1}\sigma_{x_2})^2 = I, \\ &\quad (\sigma_{x_1}\sigma_{x_2'})^3 = I, \ (\sigma_{x_2}\sigma_{x_2'})^3 = I \Big\rangle \end{aligned}$$

olur.



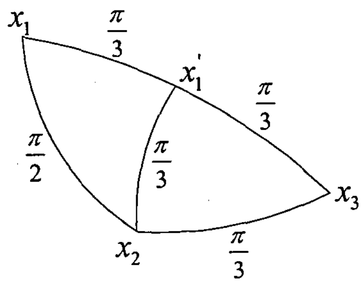
Şekil 3.3: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ olan küresel üçgen

- $\sigma_{x_1}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{4\pi}{3}$ lük bir dönme ise x_1 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{2\pi}{3}$ olur. $(\sigma_{x_2}\sigma_{x_3})^3 = I$ olduğundan $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{3}$ ya da $\frac{4\pi}{3}$ lük dönmedir.

  - $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{3}$ lük bir dönme ise x_2 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{3}$ olur. Q_1 quandılı $-x_1$ noktasını içerdiğinden Şekil 3.4 de gösterilen $x_1' \in Q_1$ dir. x_2 ve x_1' noktaları arasındaki uzaklık ise $\frac{\pi}{3}$ olur. $x_1 * x_1' = x_3$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
S_4 \cong G_{Q_1} &= \Big\langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_1'}, \sigma_{x_2} \mid (\sigma_{x_1}\sigma_{x_2})^2 = I, \\
&\qquad (\sigma_{x_1'}\sigma_{x_2})^3 = I,\ (\sigma_{x_1}\sigma_{x_1'})^3 = I \Big\rangle
\end{aligned}
$$

  olur. Kenar uznlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ olan üçgeninin köşeleri yansıtılarak 12 noktalı bir quandıl elde edilir.

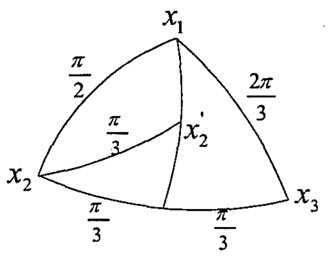


Şekil 3.4: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ olan küresel üçgen

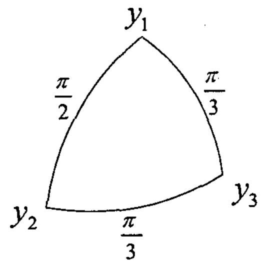
  - $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{4\pi}{3}$ lük bir dönme ise x_2 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{2\pi}{3}$ olur. x_2 noktasının antipodal noktası quandılda olduğundan Şekil 3.5 de gösterilen x_2' noktası da quandılın elemanı olur. x_2 ve x_2' noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{3}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
S_4 \cong G_{Q_1} &= \Big\langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_2'} \mid (\sigma_{x_1}\sigma_{x_2})^2 = I, \\
&\qquad (\sigma_{x_1}\sigma_{x_2'})^3 = I,\ (\sigma_{x_2}\sigma_{x_2'})^3 = I \Big\rangle
\end{aligned}
$$

  olur.



Şekil 3.5: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ olan küresel üçgen



Şekil 3.6: Köşe noktaları y_1, y_2, y_3 ve kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ olan üçgen

y_1, y_2 ve y_3 noktaları Şekil 3.6'da gösterildiği gibi olmak üzere

$$S_4 \cong G_{Q_2} = \left\langle \sigma_{y_1}, \sigma_{y_2}, \sigma_{y_3} \mid \left(\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}\right)^2 = I,\ \left(\sigma_{y_1}\sigma_{y_3}\right)^3 = I,\ \left(\sigma_{y_2}\sigma_{y_3}\right)^3 = I \right\rangle$$

olsun. Kenar uzunlukları $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$, köşe noktaları y_1, y_2, ve y_3 olan bu üçgenin köşe noktaları yansıtılarak 12 noktalı bir alt quandıl elde edilir. $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, ve $f(x_3) = y_3$ olacak şekilde bir $f \in O(3)$ elemanı vardır. f en fazla üç yansımanın bileşkesi olarak yazlabileceğinden $f = \sigma_a$, $f = \sigma_a\sigma_b$ ya da $f = \sigma_a\sigma_b\sigma_c$ olabilir [9]. $i = 1, 2, 3$ olmak üzere $\sigma_a(x_i * x_j) = -((x_i * x_j) * a) = (-x_i * a) * (-x_i * a) = \sigma_a(x_i) * \sigma_a(x_j) = y_i * y_j$ olduğundan σ_a dönüşümü bir quandıl homomorfizmidir. Benzer şekilde $f = \sigma_a\sigma_b$, $f = \sigma_a\sigma_b\sigma_c$ dönüşümleri de quandıl homomorfizmidirler. Bu nedenle f bir quandıl izomorfizmidir.

$G_{Q_1} \cong G_{Q_2} \cong S_4 \times \mathbb{Z}_2$ ise: $\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}$ ve σ_{x_3} yansımalarından üretilen $S_4 \times \mathbb{Z}_2$ grubuna izomorf grup

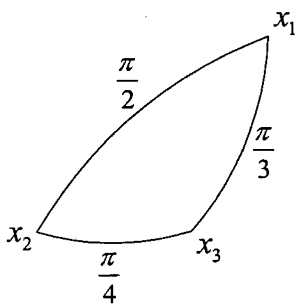
$$S_4 \times \mathbb{Z}_2 \cong G_{Q_1} = \left\langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_3} \mid \left(\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\right)^2 = I,\ \left(\sigma_{x_1}\sigma_{x_3}\right)^3 = I,\ \left(\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}\right)^4 = I \right\rangle$$

olsun. Bu durumda Q_1 alt quandılı aynı büyük çember üzerinde bulunmayan x_1, x_2 ve x_3 noktaları tarafından üretilir. Eğer bu noktalar aynı büyük çember üzerinde bulunsalardı quandılın noktalarının tümü aynı büyük çember üzerinde olurdu. Kürenin bütün noktaları aynı büyük çember üzerinde bulunan alt quandılından elde edilen grup D_{2n} olduğundan bu grubun $S_4 \times \mathbb{Z}_2$ grubuna izomorf olmasıyla çelişir. Eğer Q_1 alt quandılı bu noktalar tarafından üretilmeseydi G_{Q_1} grubunda üreteçlerden elde edilemeyen bir eleman olurdu.

$(\sigma_{x_1}\sigma_{x_2})^2 = I$ olduğından $\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}$ dönüşümü π lik bir dönmedir. Bu nedenle x_1 ve x_2 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{2}$ olur. x_1 noktası x_2 noktasına göre ve x_2 noktası da x_1 noktasına göre yansıtılırsa -x_1 ve -x_2 noktaları da quandılın elemanları olurlar. $(\sigma_{x_1}\sigma_{x_3})^3 = I$ olduğundan $\sigma_{x_1}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{3}$ ya da $\frac{4\pi}{3}$ lük dönmedir.

- $\sigma_{x_1}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{3}$ lük bir dönme ise x_1 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{3}$ olur. $(\sigma_{x_2}\sigma_{x_3})^3 = I$ olduğundan $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{3}$ ya da $\frac{4\pi}{3}$ lük dönmedir.

  – $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{4}$ lük bir dönme ise x_2 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{4}$ olur. Buradan kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ olan aşağıdaki şekilde gösterilen üçgen elde edilir. Bu üçgenin köşeleri yansıtılarak 18 noktalı bir quandıl elde edilir (Bölüm 3.4).

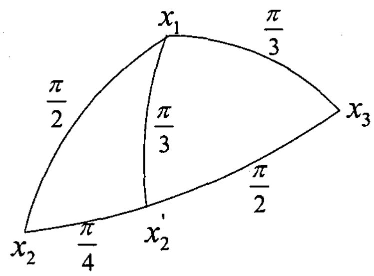


Şekil 3.7: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ olan küresel üçgen

– $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{3\pi}{2}$ lik bir dönme ise x_2 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{3\pi}{4}$ olur. Bu durumda Şekil 3.8 de gösterilen x_2' noktası da quandılın elemanı olur. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} G_{Q_1} &= \Big\langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_2'} \mid (\sigma_{x_1}\sigma_{x_2})^2 = I, \\ &\qquad \left(\sigma_{x_1}\sigma_{x_2'}\right)^3 = I,\ \left(\sigma_{x_2}\sigma_{x_2'}\right)^4 = I \Big\rangle \end{aligned}$$

elde edilir.



Şekil 3.8: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$ olan küresel üçgen

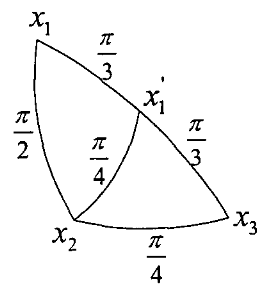
- $\sigma_{x_1}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{4\pi}{3}$ lük bir dönme ise x_1 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{2\pi}{3}$ olur. $(\sigma_{x_2}\sigma_{x_3})^4 = I$ olduğundan $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{4}$ ya da $\frac{3\pi}{2}$ lik dönmedir.

  – $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{4}$ lik bir dönme ise x_2 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{4}$ olur. $-x_1$ noktası quandılın elemanı olduğundan Şekil 3.9 da gösterilen x_1' noktası da quandılın elemanı olur. x_2 ve x_1' noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{4}$ olur. Bundan dolayı

$$G_{Q_1} = \Big\langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_1'} \mid (\sigma_{x_1}\sigma_{x_2})^2 = I, \left(\sigma_{x_1}\sigma_{x_1'}\right)^3 = I, \left(\sigma_{x_2}\sigma_{x_1'}\right)^4 = I \Big\rangle$$

  olur.

  – $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{3\pi}{2}$ lik bir dönme ise x_2 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{3\pi}{4}$ olur. $-x_1$ ve $-x_2$ noktaları quandılın elemanları olduklarından Şekil 3.10 da gösterilen x_1' noktası da

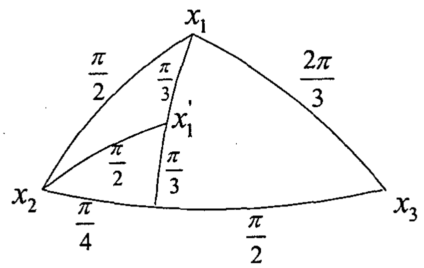


Şekil 3.9: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ olan küresel üçgen

quandılın elemanı olur. x_2 ve x_1' noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{4}$ olduğundan

$$\begin{aligned} G_{Q_1} &= \left\langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_1'} \mid \left(\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\right)^2 = I, \right. \\ &\quad \left. \left(\sigma_{x_1}\sigma_{x_1'}\right)^3 = I, \ \left(\sigma_{x_2}\sigma_{x_1'}\right)^4 = I \right\rangle \end{aligned}$$

olur.

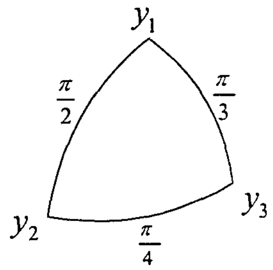


Şekil 3.10: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$ olan küresel üçgen

y_1, y_2 ve y_3 noktaları aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi olmak üzere

$$S_4 \times \mathbb{Z}_2 \cong G_{Q_2} = \left\langle \sigma_{y_1}, \sigma_{y_2}, \sigma_{y_3} \mid \left(\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}\right)^2 = I, \ \left(\sigma_{y_1}\sigma_{y_3}\right)^3 = I, \ \left(\sigma_{y_2}\sigma_{y_3}\right)^4 = I \right\rangle$$

olsun. Kenar uzunlukları $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$, köşe noktaları y_1, y_2, ve y_3 olan bu üçgenin köşe noktaları yansıtılarak 18 noktalı bir alt quandıl elde edilir. $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, ve $f(x_3) = y_3$ olacak şekilde bir $f \in O(3)$ elemanı vardır. f en fazla üç yansımanın bileşkesi olarak yazlabileceğinden $f = \sigma_a$, $f = \sigma_a\sigma_b$ ya da $f = \sigma_a\sigma_b\sigma_c$ olabilir [9]. $i = 1, 2, 3$ olmak üzere $\sigma_a(x_i * x_j) = -((x_i * x_j) * a) =$



Şekil 3.11: Köşe noktaları y_1, y_2, y_3 ve kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ olan üçgen

$(-x_i * a) * (-x_i * a) = \sigma_a (x_i) * \sigma_a (x_j) = y_i * y_j$ olduğundan σ_a dönüşümü bir quandıl homomorfizmidir. Benzer şekilde $f = \sigma_a \sigma_b$, $f = \sigma_a \sigma_b \sigma_c$ dönüşümleri de quandıl homomorfizmidirler. Bu nedenle f bir quandıl izomorfizmidir.

$G_{Q_1} \cong G_{Q_2} \cong A_5 \times \mathbb{Z}_2$ ise: $\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}$ ve σ_{x_3} yansımalarından üretilen $A_5 \times \mathbb{Z}_2$ grubuna izomorf grup

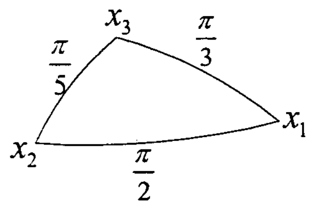
$$\begin{aligned} A_5 \times \mathbb{Z}_2 \cong G_{Q_1} &= \Big\langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_3} \mid (\sigma_{x_1}\sigma_{x_2})^2 = I, \\ &\quad (\sigma_{x_1}\sigma_{x_3})^3 = I,\ (\sigma_{x_2}\sigma_{x_3})^5 = I \Big\rangle \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda Q_1 alt quandılı aynı büyük çember üzerinde bulunmayan x_1, x_2 ve x_3 noktaları tarafından üretilir. Eğer bu noktalar aynı büyük çember üzerinde bulunsalardı quandılın noktalarının tümü aynı büyük çember üzerinde olurdu. Kürenin bütün noktaları aynı büyük çember üzerinde bulunan alt quandılından elde edilen grup D_{2n} olduğundan bu grubun $A_5 \times \mathbb{Z}_2$ grubuna izomorf olmasıyla çelişir. Eğer Q_1 alt quandılı bu noktalar tarafından üretilmeseydi G_{Q_1} grubunda üreteçlerden elde edilemeyen bir eleman olurdu.

$(\sigma_{x_1}\sigma_{x_2})^2 = I$ olduğından $\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}$ dönüşümü π lik bir dönmedir. Bu nedenle x_1 ve x_2 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{2}$ olur. x_1 noktası x_2 noktasına göre ve x_2 noktası da x_1 noktasına göre yansıtılırsa -x_1 ve -x_2 noktaları da quandılın elemanları olurlar. $(\sigma_{x_1}\sigma_{x_3})^3 = I$ olduğundan $\sigma_{x_1}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{3}$ ya da $\frac{4\pi}{3}$ lük dönmedir.

- $\sigma_{x_1}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{3}$ lük bir dönme ise x_1 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{3}$ olur. $(\sigma_{x_2}\sigma_{x_3})^5 = I$ olduğundan $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}$ ya da $\frac{8\pi}{5}$ lik bir dönmedir.

- $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{5}$ lik bir dönme ise x_2 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{5}$ olur. Buradan kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right)$ olan aşağıdaki şekilde gösterilen üçgen elde edilir. Bu üçgenin köşeleri yansıtılarak 30 noktalı bir quandıl elde edilir (Bölüm 3.4).

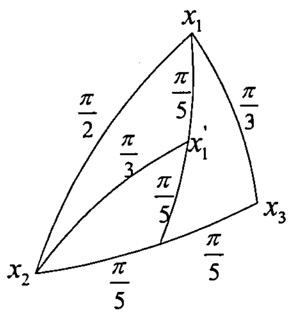


Şekil 3.12: Köşe noktaları x_1, x_2, x_3 ve kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right)$ olan üçgen

- $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{4\pi}{5}$ lik bir dönme ise x_2 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{2\pi}{5}$ olur. Bu durumda aşağıdaki şekilde gösterilen x_1' noktası da quandılın elemanı olur. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} G_{Q_1} \;=\; & \Big\langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_2'} \;\Big|\; \left(\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\right)^2 = I, \\ & \left(\sigma_{x_2}\sigma_{x_1'}\right)^3 = I, \;\; \left(\sigma_{x_1}\sigma_{x_1'}\right)^5 = I \Big\rangle \end{aligned}$$

elde edilir.

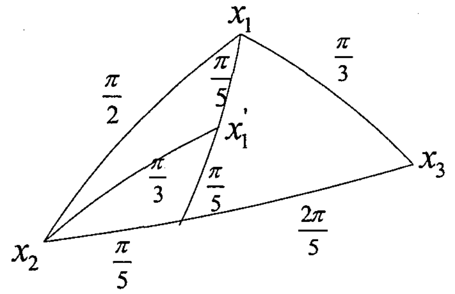


Şekil 3.13: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right)$ olan küresel üçgen

– $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{6\pi}{5}$ lik bir dönme ise x_2 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{3\pi}{5}$ olur. Bu durumda Şekil 3.14 de gösterilen x_1' noktası da quandılın elemanı olur. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} G_{Q_1} &= \Big\langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_1'} \mid (\sigma_{x_1}\sigma_{x_2})^2 = I, \\ &\quad (\sigma_{x_2}\sigma_{x_1'})^3 = I,\ (\sigma_{x_1}\sigma_{x_1'})^5 = I \Big\rangle \end{aligned}$$

elde edilir.



Şekil 3.14: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{5}\right)$ olan küresel üçgen

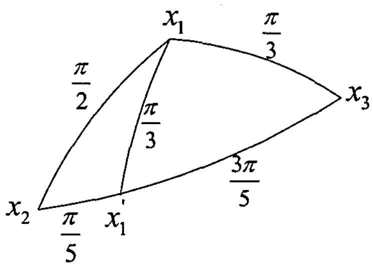
– $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{8\pi}{5}$ lik bir dönme ise x_2 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{4\pi}{5}$ olur. $-x_1$ ve $-x_2$ noktaları quandılın elemanı olduğundan Şekil 3.15 de gösterilen x_1' noktasıda quandılın elemanı olur. x_1 ve x_1' noktaları arasındaki uzaklık ise $\frac{\pi}{3}$ olur. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} G_{Q_1} &= \Big\langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_1'} \mid (\sigma_{x_1}\sigma_{x_2})^2 = I, \\ &\quad (\sigma_{x_2}\sigma_{x_1'})^5 = I,\ (\sigma_{x_1}\sigma_{x_1'})^3 = I \Big\rangle \end{aligned}$$

olur.

- $\sigma_{x_1}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{4\pi}{3}$ lük bir dönme ise x_1 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{2\pi}{3}$ olur. $(\sigma_{x_2}\sigma_{x_3})^5 = I$ olduğundan $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}$ ya da $\frac{8\pi}{5}$ lik bir dönmedir.

  – $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{5}$ lik bir dönme ise x_2 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{5}$ olur. $-x_1$ noktası quandılın elemanı olduğundan Şekil

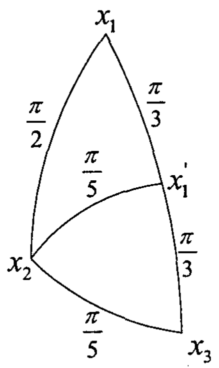


Şekil 3.15: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}\right)$ olan küresel üçgen

3.16 de gösterilen x_1' noktası da quandılın elemanı olur. x_2 ve x_1' noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{5}$ dir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} G_{Q_1} &= \Big\langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_1'} \mid (\sigma_{x_1}\sigma_{x_2})^2 = I, \\ &\quad (\sigma_{x_1}\sigma_{x_1'})^3 = I, \ (\sigma_{x_2}\sigma_{x_1'})^5 = I \Big\rangle \end{aligned}$$

olur.

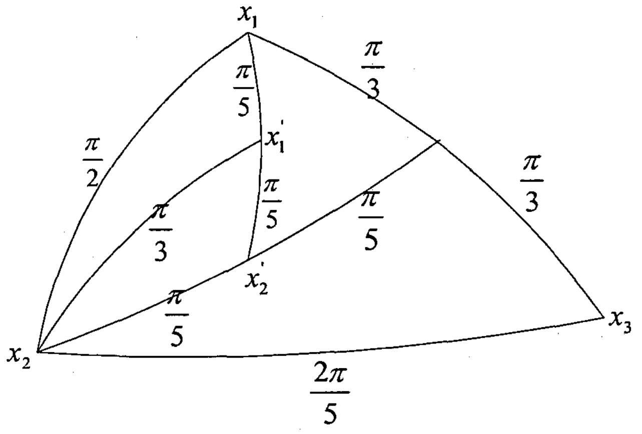


Şekil 3.16: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right)$ olan küresel üçgen

– $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{4\pi}{5}$ lik bir dönme ise x_2 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{2\pi}{5}$ olur. $-x_1$ ve $-x_2$ noktaları quandılın elemanları olduklarından Şekil 3.17 de gösterilen x_1' ve x_2' noktaları da quandılın elemanlarıdır. x_2 ve x_1' noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{3}$ olduğundan

$$\begin{aligned} G_{Q_1} &= \Big\langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_1'} \mid (\sigma_{x_1}\sigma_{x_2})^2 = I, \\ &\quad (\sigma_{x_1}\sigma_{x_1'})^5 = I, \ (\sigma_{x_2}\sigma_{x_1'})^3 = I \Big\rangle \end{aligned}$$

olur.

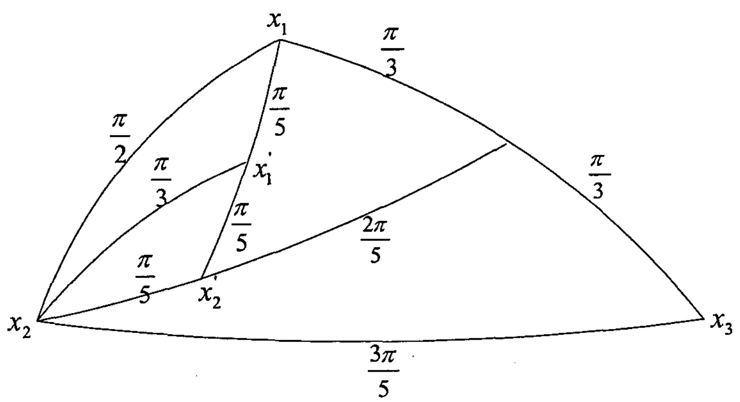


Şekil 3.17: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right)$ olan küresel üçgen

– $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{6\pi}{5}$ lik bir dönme ise x_2 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{3\pi}{5}$ olur. $-x_1$ ve $-x_2$ noktaları quandılın elemanları olduklarından Şekil 3.18 de gösterilen x_1' ve x_2' noktaları da quandılın elemanlarıdır. x_2 ve x_1' noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{3}$ olduğundan

$$\begin{aligned} G_{Q_1} &= \Big\langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_1'} \mid (\sigma_{x_1}\sigma_{x_2})^2 = I, \\ &\quad (\sigma_{x_1}\sigma_{x_1'})^5 = I,\ (\sigma_{x_2}\sigma_{x_1'})^3 = I \Big\rangle \end{aligned}$$

olur.

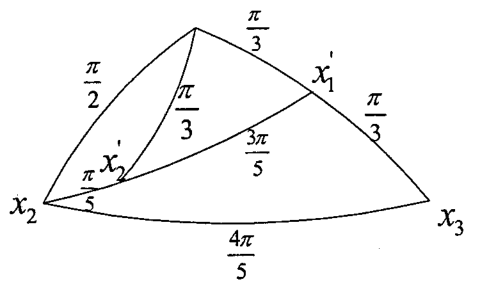


Şekil 3.18: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{5}\right)$ olan küresel üçgen

– $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{8\pi}{5}$ lik bir dönme ise x_2 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{4\pi}{5}$ olur. Şekil 3.19 de gösterilen x'_1 ve x'_2 noktaları da quandılın elemanlarıdır. x_2 ve x'_2 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{5}$, x_1 ve x'_2 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{3}$ olduğundan

$$\begin{aligned} G_{Q_1} &= \Big\langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x'_1} \mid (\sigma_{x_1}\sigma_{x_2})^2 = I, \\ &\qquad (\sigma_{x_1}\sigma_{x'_2})^3 = I,\ (\sigma_{x_2}\sigma_{x'_2})^5 = I \Big\rangle \end{aligned}$$

olur.

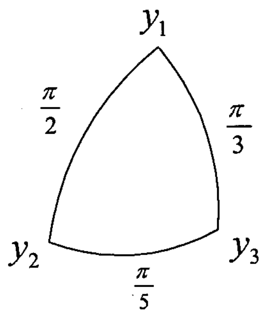


Şekil 3.19: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}\right)$ olan küresel üçgen

y_1, y_2 ve y_3 noktaları aşağıdaki Şekil 3.20 de gösterildiği gibi olmak üzere

$$A_5 \times \mathbb{Z}_2 \cong G_{Q_2} = \left\langle \sigma_{y_1}, \sigma_{y_2}, \sigma_{y_3} \mid (\sigma_{y_1}\sigma_{y_2})^2 = I,\ (\sigma_{y_1}\sigma_{y_3})^3 = I,\ (\sigma_{y_2}\sigma_{y_3})^5 = I \right\rangle$$

olsun. Kenar uzunlukları $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$ ve köşe noktaları y_1, y_2, ve y_3 noktaları olan



Şekil 3.20: Köşe noktaları y_1, y_2 ve y_3, kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right)$ olan üçgen

bu üçgenin köşe noktaları yansıtılarak 30 noktalı bir alt quandıl elde edilir. $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, ve $f(x_3) = y_3$ olacak şekilde bir $f \in O(3)$ elemanı vardır. f en fazla üç yansımanın bileşkesi olarak yazlabileceğinden $f = \sigma_a$, $f = \sigma_a\sigma_b$ ya da $f = \sigma_a\sigma_b\sigma_c$ olabilir. $i = 1, 2, 3$ olmak üzere $\sigma_a(x_i * x_j) = -((x_i * x_j) * a) = (-x_i * a) * (-x_i * a) = \sigma_a(x_i) * \sigma_a(x_j) = y_i * y_j$ olduğundan σ_a dönüşümü bir quandıl homomorfizmidir. Benzer şekilde $f = \sigma_a\sigma_b$, $f = \sigma_a\sigma_b\sigma_c$ dönüşümleri de quandıl homomorfizmidirler. Bu nedenle f bir quandıl izomorfizmidir.

$G_{Q_1} \cong G_{Q_2} \cong D_{2n} \times \mathbb{Z}_2$ ise: $\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}$ ve σ_{x_3} yansımalarından üretilen $D_{2n} \times \mathbb{Z}_2$ grubuna izomorf grup

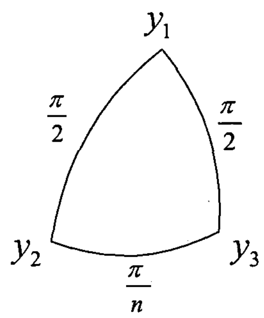
$$\begin{aligned} D_{2n} \times \mathbb{Z}_2 \cong G_{Q_1} &= \Big\langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_3} \mid (\sigma_{x_1}\sigma_{x_2})^2 = I, \\ &\quad (\sigma_{x_1}\sigma_{x_3})^2 = I, \ (\sigma_{x_2}\sigma_{x_3})^n = I \Big\rangle \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda Q_1 alt quandılı aynı büyük çember üzerinde bulunmayan x_1, x_2 ve x_3 noktaları tarafından üretilir. Eğer bu noktalar aynı büyük çember üzerinde bulunsalardı quandılın noktalarının tümü aynı büyük çember üzerinde olurdu. Kürenin bütün noktaları aynı büyük çember üzerinde bulunan alt quandılından elde edilen grup D_{2n} olduğundan bu grubun $D_{2n} \times \mathbb{Z}_2$ grubuna izomorf olmasıyla çelişir. Eğer Q_1 alt quandılı bu noktalar tarafından üretilmeseydi G_{Q_1} grubunda üreteçlerden elde edilemeyen bir eleman olurdu.

$(\sigma_{x_1}\sigma_{x_2})^2 = I$ olduğından $\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}$ dönüşümü π lik bir dönmedir. Bu nedenle x_1 ve x_2 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{2}$ olur. Bundan dolayı -x_1 ve -x_2 noktaları da quandılın elemanı olurlar. $(\sigma_{x_1}\sigma_{x_3})^2 = I$ olduğundan $\sigma_{x_1}\sigma_{x_3}$ dönüşümü π lik bir dönme olduğundan x_1 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{2}$ olacağından -x_1 ve -x_3 noktaları da quandılın elemanı olurlar.

$(\sigma_{x_2}\sigma_{x_3})^n = I$ olduğundan $\sigma_{x_2}\sigma_{x_3}$ dönüşümü $\frac{2\pi}{n}$ lik bir dönmedir. x_2 ve x_3 noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\pi}{n}$ olur. Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}\right)$, köşe noktaları x_1, x_2, x_3 olan bu üçgenin köşe noktalarının yansıtılması ile de $2n + 2$ noktalı bir alt quandıl elde edilir.

y_1, y_2 ve y_3 noktaları Şekil 3.21 de gösterildiği gibi olmak üzere



Şekil 3.21: Köşe noktaları y_1, y_2 ve y_3, kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}\right)$ olan üçgen

$$D_{2n} \times \mathbb{Z}_2 \cong G_{Q_2} = \left\langle \sigma_{y_1}, \sigma_{y_2}, \sigma_{y_3} \mid \left(\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}\right)^2 = I, \ \left(\sigma_{y_1}\sigma_{y_3}\right)^2 = I, \ \left(\sigma_{y_2}\sigma_{y_3}\right)^n = I \right\rangle$$

olsun. Kenar uzunlukları $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}$ ve köşe noktaları y_1, y_2, ve y_3 noktaları olan bu üçgenin köşe noktaları yansıtılarak $2n+2$ noktalı bir alt quandıl elde edilir. $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, ve $f(x_3) = y_3$ olacak şekilde bir $f \in O(3)$ elemanı vardır. f en fazla üç yansımanın bileşkesi olarak yazlabileceğinden $f = \sigma_a$, $f = \sigma_a\sigma_b$ ya da $f = \sigma_a\sigma_b\sigma_c$ olabilir. $i = 1, 2, 3$ olmak üzere $\sigma_a(x_i * x_j) = -((x_i * x_j) * a) = (-x_i * a) * (-x_i * a) = \sigma_a(x_i) * \sigma_a(x_j) = y_i * y_j$ olduğundan σ_a dönüşümü bir quandıl homomorfizmidir. Benzer şekilde $f = \sigma_a\sigma_b$, $f = \sigma_a\sigma_b\sigma_c$ dönüşümleri de quandıl homomorfizmidirler. Bu nedenle f bir quandıl izomorfizmidir. ∎

Önerme 3.2.8 *$SO(3)$ grubunun sonlu bir alt grubunun birimden farklı ikinci dereceden elemanlarının küre üzerinde sabit bıraktığı noktaların kümesi kürenin sonlu bir alt quandılıdır.*

Kanıt. G grubu $SO(3)$ grubunun sonlu bir alt grubu olsun.

$$X = \left\{x \in S^2 \mid I \neq g \in G, g^2 = I, g(x) = x\right\}$$

şeklinde tanımlanan kümenin bir quandıl olduğu gösterilmelidir. $x, y \in X$ elemanları alınsın. $f(x) = x$ ve $g(y) = y$, $f^2 = g^2 = I$, $f, g \neq I$ olsun. Dikkat edilecek olursa $x * y = g(x)$ dir. gfg dönüşümü

$$(gfg)(x * y) = (gfg)(g(x)) = g(f(x)) = g(x) = x * y$$

olduğundan $x * y$ noktasını sabit bırakır. $(gfg)^2 = I$ olduğundan $x * y \in X$ dir.

Küredeki her $x \in S^2$ noktası için $x * x = x$ özelliği sağlandığından X kümesindeki her eleman içinde bu özellik sağlanır.

Her $y, z \in X$ için $x * y = z$ olacak şekilde bir tek $x \in X$ elemanı vardır. $h(z) = z$ ve $g(y) = y$ olmak üzere $x = g(z)$ elemanı $x * y = z$ koşulunu sağlar.

Her $x, y, z \in X$ için

$$\begin{aligned} f(x) &= x \quad , \quad f^2 = I \\ g(y) &= y \quad , \quad g^2 = I \\ h(z) &= z \quad , \quad h^2 = I \end{aligned}$$

olacak şekilde $f, g, h \in G$ elemanları için

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= g(x) * z \\ &= h(g(x)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (x * z) * (y * z) &= h(x) * h(y) \\ &= (hgh)(h(x)) \\ &= h(g(x)) \end{aligned}$$

olduğundan X kümesi kürenin bir alt quandılıdır.

Burada küre üzerindeki bu alt quandılın noktalarının G grubunun küre üzerindeki etkisi dikkate alındığında aynı yörüngeye ait oldukları da görülür.

■

Önerme 3.2.9 *G grubu $O(3)$ grubunun sonlu bir alt grubu olsun. $g \in G$ elemanı G grubunun determinantı -1 olan ikinci dereceden bir elemanı ise bir $a \in S^2$ elemanı vardır öyleki $g(a) = -a$ olur. Kürenin bu şekildeki noktalarının kümesi bir quandıldır.*

Kanıt. $g \in G$ için $\det g = -1$ ve $g^2 = I$ ise herhangi bir $x \in \mathbb{R}^3$ elemanı için

$$g(x) = \sigma_a(x) = x - 2\langle x, a\rangle a$$

olacak şekilde bir $a \in S^2$ elemanı vardır.

$$X = \{a \in S^2 \mid I \neq g \in G, \ \det g = -1, \, g^2 = I, \ g(a) = -a\} \subset S^2$$

şeklinde tanımlanan X kümesinin bir quandıl olduğu gösterilmelidir. $a, b \in X$ olsun. Bu durumda $\sigma_a(a) = -a$ ve $\sigma_b(b) = -b$ olacak şekilde $\sigma_a, \sigma_b \in G$ yansımaları vardır. $\sigma_{a*b} = \sigma_b \sigma_a \sigma_b$ olduğundan $a * b \in X$ olur. Her $a \in S^2$ noktası için $x * x = x$ özelliği sağlandığından X kümesindeki her eleman için de bu özellik sağlanır. Her $b, c \in X$ için $a * b = c$ olacak şekilde bir tek $a \in X$ vardır. $\sigma_{a*b} = \sigma_b \sigma_a \sigma_b = \sigma_c$ eşitliğinden $\sigma_a = \sigma_b \sigma_c \sigma_b = \sigma_{c*b}$ olduğndan $a = c*b$ dir. Her $a, b, c \in X$ için

$$\sigma_{(a*c)*(b*c)} = \sigma_{(b*c)} \sigma_{(a*c)} \sigma_{(b*c)} = \sigma_c \sigma_b \sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_c \sigma_{(a*b)} \sigma_c = \sigma_{(a*b)*c}$$

eşitliğinden $(a * c) * (b * c) = (a * b) * c$ koşulu sağlanmış olur. ∎

3.3 Kürenin Sonlu Alt Quandıllarının Listelenmesi

G grubu $SO(3)$ grubunun $\mathbb{Z}_n$ grubuna izomorf bir alt grubu ise G grubundaki tüm elemanlar aynı noktaları sabit bırakırlar. Yörünge noktaları sadece sabit kalan antipodal bir nokta çiftidir. Bu antipodal nokta çifti kürenin iki noktalı bir alt quandılıdır.

Bundan sonra bahsedilecek kısımda yörüngeler için 3.Bölümdeki gösterimler kullanılacaktır. G grubu $SO(3)$ grubunun D_{2m} dihedral grubuna izomorf bir alt grubu olsun. İlk yörünge

$$O(x_1) = \{\pm x_1\}$$

dir. x_2 noktasının yörüngesi x_1 ve -x_1 noktalarından geçen doğruya dik ekvator üzerinde eşit aralıklarla dizilmiş m noktadan oluşur. x_3 noktasının yörüngesindeki noktalar ise x_2 noktasının yörüngesindeki noktaların orta noktalarıdır. Dikkat edilecek olursa her bir yörünge kürenin bir alt quandılıdır. Tüm yörüngelerin toplamı $2m + 2$ nokta da kürenin bir alt quandılıdır. Köşe noktaları uygun seçilerek küre üzerinde kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{m}\right)$ olan bir üçgenin köşe noktalarının yansıtılmaları ile de $2m+2$ noktalı bu alt quandıl elde edilebilir.

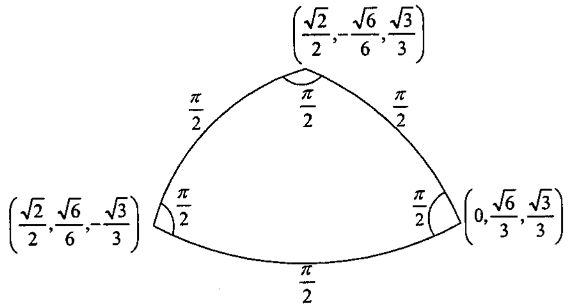
$SO(3)$ grubunun sonlu alt grubu A_4 grubuna izomorf olsun. 3. Bölümde x_1 noktasının yörüngesindeki noktaların bir tetrahedronun köşe noktaları olduğu görülmüştü.

$$O(x_1) = \left\{(0,0,1), \left(0, \frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$$

şeklinde seçilirse diğer orbitler aşağıdaki şekilde olur:

$$\begin{aligned} O(x_2) &= \left\{(0,0,-1), \left(0, -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\} \\ O(x_3) &= \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(0, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \end{array}\right\} \end{aligned}$$

$O(x_1)$ ve $O(x_2)$ yörüngelerindeki noktalar kürenin birer alt quandılı değildirler. Ancak $O(x_3)$ kürenin 6 noktalı bir alt quandılıdır. Bu quandıl kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olan Şekil 3.22 de gösterilen üçgenin köşelerinin yan-



Şekil 3.22: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olan üçgen

sıtılması ile de elde edilebilir.

$SO(3)$ grubunun sonlu alt grubu S_4 grubuna izomorf ise x_1 noktasının yörüngesi bir octahedronun köşeleri olur. Bu noktalar

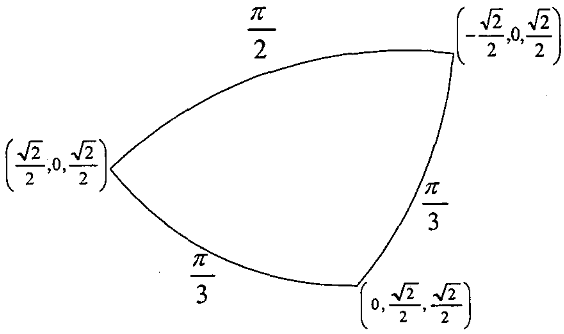
$$O(x_1) = \{\pm(1,0,0), \pm(0,1,0), \pm(0,0,1)\}$$

olarak seçildiğinde diğer yörüngeler

$$O(x_2) = \left\{ \begin{array}{c} \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \\ \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \end{array} \right\}$$

$$O(x_3) = \left\{ \begin{array}{c} \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \pm\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right), \\ \pm\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \pm\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \pm\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right) \end{array} \right\}$$

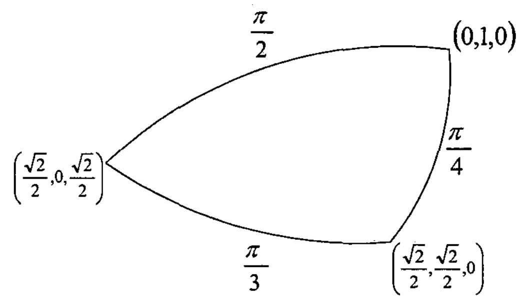
olur. $O(x_1)$ kümesi 6 noktalı bir alt quandıldır. $O(x_2)$ kümesi ise bir kübün köşe noktalarıdır ve bu köşe noktaları kürenin sonlu bir alt quandılını vermezler. $O(x_3)$ yörüngesindeki noktalar ise kürenin 12 noktalı bir alt quandılı olur. Bu quandıl kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ olan bir küresel üçgenin köşe noktalarının yansımaları ile de elde edilebilir.



Şekil 3.23: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ olan üçgen

$O(x_1)$ ve $O(x_3)$ yörüngelerindeki toplam 18 nokta da kürenin bir alt quandılını oluşturur. Bu 18 noktalı quandıl kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right)$ olan küresel üçgenin köşelerinin yansımaları ile de elde edilebilir. Örneğin kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right)$ olan ve köşe noktaları aşağıdaki gibi seçilen bir üçgenin köşe noktaları yansıtıldığında $O(x_1)$ ve $O(x_3)$ yörüngelerindeki toplam 18 nokta bulunur.

G grubu $SO(3)$ grubunun A_5 alterne grubuna izomorf bir alt grubu olsun. x_1 noktasının yörüngesindeki noktaların bir isocahedronun köşe noktaları olduğu 3. Bölümde gösterilmişti. İcosahedronun köşe noktaları $\alpha =$



Şekil 3.24: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right)$ olan üçgen

$\frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ ve $\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ olmak üzere

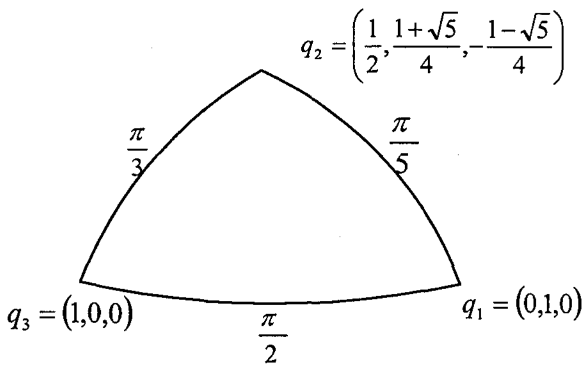
$$O(x_1)=\left\{\begin{array}{c}\pm(\alpha,0,\beta),\pm(\alpha,0,-\beta),\pm(0,\beta,\alpha),\pm(0,\beta,-\alpha),\\ \pm(\beta,\alpha,0),\pm(\beta,-\alpha,0)\end{array}\right\}$$

olarak seçildiğinde diğer yörüngeler $\gamma=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ve $\delta=\frac{1}{1+\sqrt{5}}$ iken

$$O(x_2)=\left\{\begin{array}{c}\pm(1,0,0),\pm\left(\gamma,-\delta,-\frac{1}{2}\right),\pm\left(\gamma,\delta,-\frac{1}{2}\right),\pm\left(\gamma,-\delta,\frac{1}{2}\right),\\ \pm\left(\gamma,\delta,\frac{1}{2}\right),\pm(0,1,0),\pm\left(\frac{1}{2},\gamma,\delta\right),\pm\left(\frac{1}{2},\gamma,-\delta\right),\\ \pm\left(-\frac{1}{2},\gamma,\delta\right),\pm\left(-\frac{1}{2},\gamma,-\delta\right),\pm(0,0,1),\pm\left(\delta,\frac{1}{2},\gamma\right),\\ \pm\left(-\delta,\frac{1}{2},\gamma\right),\pm\left(\delta,-\frac{1}{2},\gamma\right),\pm\left(\delta,\frac{1}{2},-\gamma\right)\end{array}\right\}$$

$$O(x_3)=\left\{\begin{array}{c}\pm\left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}\right),\pm\left(0,-\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}\right),\pm\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}},0,-\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}\right),\\ \pm\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}},0,\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}\right),\pm\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}},0\right),\pm\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}},0\right),\\ \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\\ \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\end{array}\right\}$$

bulunur. x_3 noktasının orbitindeki noktalar sonlu bir alt quandıl oluşturmazlar. Ancak $O(x_2)$ yörüngesinin elemanları kürenin 30 noktalı bir alt quandılını oluştururlar. Bu alt quandıl kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{5}\right)$ olan bir küresel üçgenin köşe noktalarının yansımaları ile de elde edilebilir (Şekil 3.25).



Şekil 3.25: Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right)$ olan üçgen

3.4 Kürenin Sonlu Alt Quandıllarından Elde Edilen O(3) Grubunun Sonlu Alt Grupları

- Q, kürenin eleman sayısı n olan ve tüm noktaları aynı büyük çember üzerinde bulunan sonlu bir alt quandılı olsun. n çift ise quandıldaki noktalar ikişer ikişer antipodal olurlar. Antipodal noktalardan elde edilen yansımalar aynı olduğundan n noktalı Q quandılından elde edilen G_Q grubunun üreteçlerinin sayısı $\frac{n}{2}$ dir. Q alt quandılının noktaları $m = \frac{n}{2}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
q_0 &= (1,0,0)\,,\ q_1 = \left(\cos\frac{2\pi}{n}, \sin\frac{2\pi}{n}, 0\right), \ldots \\
q_i &= \left(\cos i\frac{2\pi}{n}, \sin i\frac{2\pi}{n}, 0\right), \ldots, q_{n-1} = \left(\cos(n-1)\frac{2\pi}{n}, \sin(n-1)\frac{2\pi}{n}, 0\right)
\end{aligned}
$$

olarak seçilsin.

$$q_0 = -q_m,\ q_1 = -q_{m+1},\ \ldots, q_i = -q_{m+i}, \ldots, q_{m-1} = -q_{n-1}$$

olduğundan bu noktalardan elde edilen yansımalar için

$$\sigma_{q_0} = \sigma_{q_m}, \ldots, \sigma_{q_i} = \sigma_{q_{m+i}}, \ldots, \sigma_{q_{m-1}} = \sigma_{q_{n-1}}$$

olur. Bu dönüşümlerin standart tabana göre matrisleri

$$\sigma_{q_0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{q_1} = \begin{pmatrix} -\cos\frac{4\pi}{n} & -\sin\frac{4\pi}{n} & 0 \\ -\sin\frac{4\pi}{n} & \cos\frac{4\pi}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\sigma_{q_i} = \begin{pmatrix} -\cos i\frac{4\pi}{n} & -\sin i\frac{4\pi}{n} & 0 \\ -\sin i\frac{4\pi}{n} & \cos i\frac{4\pi}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\sigma_{q_{m-1}} = \begin{pmatrix} -\cos(m-1)\frac{4\pi}{n} & -\sin(m-1)\frac{4\pi}{n} & 0 \\ -\sin(m-1)\frac{4\pi}{n} & \cos(m-1)\frac{4\pi}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu yansımaların ürettiği $G = \langle \sigma_{q_0}, \sigma_{q_1}, ..., \sigma_{q_i}, ..., \sigma_{q_{m-1}} \rangle$ grubu $2m$ elemanlıdır. Bu grubun elemanları

$$G = \{I, \sigma_{q_0}, \sigma_{q_1}, ..., \sigma_{q_i}, ..., \sigma_{q_{m-1}}, \sigma_{q_0}\sigma_{q_1}, ..., \sigma_{q_0}\sigma_{q_i}, ..., \sigma_{q_0}\sigma_{q_{m-1}}\}$$

şeklindedir. Ayrıca $\sigma_{q_0}\sigma_{q_i} = \sigma_{q_{n-i}}\sigma_{q_0}$, $\sigma_{q_i}\sigma_{q_j} = \sigma_{q_0}\sigma_{q_{j-i}}$ dir.

$$\begin{aligned} D_{2.m} &= \{e, r, r^2, ...r^{m-1}, s, rs, r^2s, ..., r^{m-1}s\} \\ r^m &= s^2 = e,\ sr = r^{m-1}s \end{aligned}$$

dihedral grubu göz önüne alınacak olursa

$$\Psi : G \longrightarrow D_{2m}$$

$$\Psi\left(\sigma_{q_0}\right) = s$$
$$\Psi\left(\sigma_{q_1}\right) = rs$$
$$\Psi\left(\sigma_{q_2}\right) = r^2 s$$
$$\vdots$$
$$\Psi\left(\sigma_{q_{m-1}}\right) = r^{m-1} s$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir grup izomorfizmidir. $1 \leq i \leq m-1$ olmak üzere $\Psi\left(\sigma_{q_0}\sigma_{q_i}\right) = r^{m-i}$ olur. Böylece n çift iken $G_Q \cong D_{2.\frac{n}{2}}$ olur. Benzer işlemler yapılarak n tek iken quandılda antipodal noktalar olmayacağından $G_Q \cong D_{2.n}$ bulunur.

- Küre üzerinde kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}\right)$ olan üçgenin köşeleri yansıtılarak kürenin $2n+2$ noktalı sonlu bir alt quandılı elde edilir. Bu alt quandılın noktaları

$$Q = \{q_0, q_1, ...q_i, ...q_{n-1}, q_n, -q_0, -q_1, ... - q_i, ... - q_{n-1}, -q_n\}$$

şeklinde gösterilsin. Bu noktalar aşağıdaki şekilde seçilsin.

$$\begin{aligned} q_0 &= (1,0,0)\,,\ q_1 = \left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}, 0\right), ..., q_i = \left(\cos i\frac{\pi}{n}, \sin i\frac{\pi}{n}, 0\right), \\ ..., q_{n-1} &= \left(\cos(n-1)\frac{\pi}{n}, \sin(n-1)\frac{\pi}{n}, 0\right), q_n = (0,0,1) \end{aligned}$$

Bu noktalar ikişer ikişer antipodal olduklarından G_Q grubunu üretecek yansımaların sayısı $n+1$ olacaktır. Alt quandılın noktalarından elde edilen yansımaların matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$\sigma_{q_0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{q_1} = \begin{pmatrix} -\cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} & 0 \\ -\sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\sigma_{q_i} = \begin{pmatrix} -\cos i\frac{2\pi}{n} & -\sin i\frac{2\pi}{n} & 0 \\ -\sin i\frac{2\pi}{n} & \cos i\frac{2\pi}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\sigma_{q_{n-1}} = \begin{pmatrix} -\cos(n-1)\frac{2\pi}{n} & -\sin(n-1)\frac{2\pi}{n} & 0 \\ -\sin(n-1)\frac{2\pi}{n} & \cos(n-1)\frac{2\pi}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{q_n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bu yansımaların ürettiği $G := \left\langle \sigma_{q_0}, \sigma_{q_1}, \sigma_{q_2}, ..., \sigma_{q_i}, ..., \sigma_{q_{n-1}}, \sigma_{q_n} \right\rangle$ grubunun elemanları arasında $1 \leq i \leq n-1$ olmak üzere

$$\sigma_{q_0}\sigma_{q_i} = \sigma_{q_{n-i}}\sigma_{q_0},\ \sigma_{q_i}\sigma_{q_j} = \sigma_{q_0}\sigma_{q_{j-i}},\ \sigma_{q_n}\sigma_{q_i} = \sigma_{q_i}\sigma_{q_n}$$

bağıntıları vardır. G_Q grubunun eleman sayısı $4n$ dir ve grubun elemanları şunlardır:

$$G_Q = \left\{ \begin{array}{c} I, \sigma_{q_0}, \sigma_{q_1}, ..., \sigma_{q_i}, ..., \sigma_{q_{n-1}}, \sigma_{q_n}, \sigma_{q_0}\sigma_{q_1}, \\ \sigma_{q_0}\sigma_{q_2}, ..., \sigma_{q_0}\sigma_{q_i}, ..., \sigma_{q_0}\sigma_{q_{n-1}}, \sigma_{q_0}\sigma_{q_n}, \sigma_{q_1}\sigma_{q_n}, \\ \sigma_{q_2}\sigma_{q_n}, ..., \sigma_{q_{n-1}}\sigma_{q_n}, \sigma_{q_1}\sigma_{q_0}\sigma_{q_n}, \sigma_{q_2}\sigma_{q_0}\sigma_{q_n}, ..., \sigma_{q_{n-1}}\sigma_{q_0}\sigma_{q_n} \end{array} \right\}$$

$$H = \left\{ \begin{array}{c} I, \sigma_{q_0}, \sigma_{q_1}, ..., \sigma_{q_i}, ..., \sigma_{q_{n-1}}, \sigma_{q_0}\sigma_{q_1}, \\ \sigma_{q_0}\sigma_{q_2}, ..., \sigma_{q_0}\sigma_{q_i}, ..., \sigma_{q_0}\sigma_{q_{n-1}} \end{array} \right\}$$

alt kümesi G_Q grubunun bir alt grubudur ve bu alt grup $D_{2.n}$ dihedral grubuna izomorftur. $\{I, \sigma_{q_n}\}$ alt kümsei ise $\mathbb{Z}_2$ grubuna izomorf bir alt gruptur. Bu nedenle G_Q grubu $\mathbb{Z}_2 \times D_{2.n}$ grubuna izomorftur. G_Q grubunu üreten tüm yansımalar σ_{q_0}, σ_{q_1} ve σ_{q_n} yansımalarından elde edilebilirler. $\mathbb{Z}_2 \times D_{2.n}$ grubuna izomorf G_Q grubu elemanların sağladığı bağıntılarda göz önüne alındığında

$$G_Q = \left\langle \sigma_{q_0}, \sigma_{q_1}, \sigma_{q_n} \mid (\sigma_{q_0}\sigma_{q_1})^n = I, \ (\sigma_{q_1}\sigma_{q_n})^2 = I, \ (\sigma_{q_0}\sigma_{q_n})^2 = I \right\rangle$$

olur.

- Kenar uzunlukları $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ olan küresel üçgen göz önüne alınsın. Bu üçgenin köşeleri yansıtıldığında 12 noktalı bir quandıl elde edilir. Bu quandılın noktaları aşağıdaki şekilde seçilsin.

$$\begin{aligned}
q_1 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), q_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), q_3 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\
q_4 &= \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), q_5 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), q_6 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \\
q_7 &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), q_8 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), q_9 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\
q_{10} &= \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), q_{11} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), q_{12} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)
\end{aligned}$$

Bu noktalardan elde edilen yansımaların matrisleri şunlardır:

$$\sigma_{q_1} = \sigma_{q_2} = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_{q_3} = \sigma_{q_4} = \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{q_5} = \sigma_{q_6} = \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_{q_7} = \sigma_{q_8} = \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{q_9} = \sigma_{q_{10}} = \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_{q_{11}} = \sigma_{q_{12}} = \alpha_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu yansımaların ürettiği $G_Q := \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \rangle$ grubu 24 elemanlıdır. Birim eleman ve üreteçler dışındaki grup elemanlarının matrisleri şunlardır:

$$\alpha_1\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_1\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \alpha_1\alpha_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1\alpha_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2\alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2\alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3\alpha_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_4\alpha_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_4\alpha_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1\alpha_3\alpha_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_1\alpha_4\alpha_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1\alpha_5\alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Psi : G_Q \longrightarrow S_4$$

$$\begin{aligned}
\Psi(\alpha_1) &= (34) \\
\Psi(\alpha_2) &= (23) \\
\Psi(\alpha_3) &= (13) \\
\Psi(\alpha_4) &= (12) \\
\Psi(\alpha_5) &= (14) \\
\Psi(\alpha_6) &= (24)
\end{aligned}$$

şeklinde verilen dönüşüm bir grup izomorfizmdir. Bu nedenle $G_Q \cong S_4$ olur. Dikkat edilecek olursa $\alpha_3 = \alpha_2\alpha_4\alpha_2$, $\alpha_5 = \alpha_3\alpha_1\alpha_3$, ve $\alpha_6 = \alpha_2\alpha_1\alpha_2$ dir. Bu nedenle

$$S_4 \cong G_Q = \left\langle \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_4 \mid (\alpha_1\alpha_2)^3 = I,\ \ (\alpha_1\alpha_4)^2 = I,\ \ (\alpha_2\alpha_4)^3 = I \right\rangle$$

olur.

- Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ olan küresel üçgenin köşe noktaları yansıtıldığında 18 noktalı bir quandıl elde edilir. Üçgenin köşe noktaları Şekil 3.24 deki gibi seçilirse sonlu alt quandılın noktaları

$$\begin{aligned}
q_1 &= \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), & q_7 &= \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), & q_{13} &= (1,0,0) \\
q_2 &= \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), & q_8 &= \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), & q_{14} &= (-1,0,0) \\
q_3 &= \left(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), & q_9 &= \left(0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), & q_{15} &= (0,1,0) \\
q_4 &= \left(0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), & q_{10} &= \left(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), & q_{16} &= (0,-1,0) \\
q_5 &= \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), & q_{11} &= \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), & q_{17} &= (0,0,1) \\
q_6 &= \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), & q_{12} &= \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), & q_{18} &= (0,0,-1)
\end{aligned}$$

olur. Bu noktalardan elde edilen yansımaların matrisleri şunlardır:

$$\sigma_{q_1} = \sigma_{q_2} = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_{q_{11}} = \sigma_{q_{12}} = \alpha_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{q_3} = \sigma_{q_4} = \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_{q_{13}} = \sigma_{q_{14}} = \alpha_7 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{q_5} = \sigma_{q_6} = \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_{q_{15}} = \sigma_{q_{16}} = \alpha_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{q_7} = \sigma_{q_8} = \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_{q_{17}} = \sigma_{q_{18}} = \alpha_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{q_9} = \sigma_{q_{10}} = \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu dokuz elemanın ürettiği $G_Q = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9 \rangle$ grubu aşağıda verilen 48 elemandan oluşur.

$$G_Q = \left\{ \begin{array}{c} I, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_1\alpha_4, \alpha_1\alpha_5, \\ \alpha_1\alpha_6, \alpha_1\alpha_7, \alpha_1\alpha_8, \alpha_1\alpha_9, \alpha_2\alpha_5, \alpha_3\alpha_6, \alpha_1\alpha_2\alpha_5, \alpha_2\alpha_7, \alpha_3\alpha_7, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_4, \alpha_1\alpha_3\alpha_6, \alpha_5\alpha_7, \alpha_6\alpha_7, \alpha_1\alpha_5\alpha_4, \alpha_8\alpha_4, \alpha_8\alpha_2, \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \\ \alpha_1\alpha_4\alpha_5, \alpha_9\alpha_2, \alpha_9\alpha_6, \alpha_9\alpha_3, \alpha_1\alpha_2\alpha_7, \alpha_1\alpha_3\alpha_7, \alpha_2\alpha_4, \alpha_1\alpha_5\alpha_7, \\ \alpha_1\alpha_6\alpha_7, \alpha_1\alpha_8\alpha_2, \alpha_1\alpha_9\alpha_2, \alpha_1\alpha_9\alpha_6, \alpha_1\alpha_9\alpha_3, \alpha_5\alpha_4, \alpha_2\alpha_3, \\ \alpha_4\alpha_5, -I \end{array} \right\}$$

Bu elemanlardan

$$H = \left\{ \begin{array}{c} I, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_1\alpha_4, \alpha_1\alpha_5, \alpha_1\alpha_6, \\ \alpha_2\alpha_3, \alpha_2\alpha_4, \alpha_2\alpha_5, \alpha_3\alpha_6, \alpha_4\alpha_5, \alpha_5\alpha_4, \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_4, \alpha_1\alpha_2\alpha_5, \alpha_1\alpha_3\alpha_6, \alpha_1\alpha_4\alpha_5, \alpha_1\alpha_5\alpha_4 \end{array} \right\}$$

24 elemanlı H alt kümesi G_Q grubunun bir alt grubudur. Grubun diğer elemanları H alt grubundaki elemanların eksilileridir. Aşağıda verilen Ψ izomorfizmi ile

$$\Psi : G_Q \longrightarrow S_4$$

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha_1) &= (34) \\ \Psi(\alpha_2) &= (23) \\ \Psi(\alpha_3) &= (13) \\ \Psi(\alpha_4) &= (12) \\ \Psi(\alpha_5) &= (14) \\ \Psi(\alpha_6) &= (24) \end{aligned}$$

H alt grubu S_4 simetri grubuna izomorftur. Bundan dolayı G_Q grubu $\mathbb{Z}_2 \times S_4$ grubuna izomorftur. G_Q grubunu üreten yansımalar arasında $\alpha_2 = \alpha_8\alpha_5\alpha_8$, $\alpha_4 = \alpha_9\alpha_1\alpha_9$, $\alpha_5 = \alpha_1\alpha_3\alpha_1$, $\alpha_6 = \alpha_8\alpha_3\alpha_8$, $\alpha_7 = \alpha_3\alpha_8\alpha_3$, $\alpha_9 = \alpha_5\alpha_8\alpha_5$ bağıntıları vardır. Bundan dolayı $\mathbb{Z}_2 \times S_4$ grubuna izomorf G_Q grubu aralarındaki bağıntılar aşağıda verilen α_1, α_3, α_8 elemanları tarafından üretilir.

$$S_4 \times \mathbb{Z}_2 \cong G_Q = \left\langle \alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_8 \mid (\alpha_1\alpha_8)^2 = I,\ (\alpha_1\alpha_3)^3 = I,\ (\alpha_3\alpha_8)^4 = I \right\rangle$$

- Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right)$ olan üçgen göz önüne alınsın. Bu üçgenin köşeleri yansıtıldığında 30 noktalı bir quandıl elde edilir. Kenar uzunlukları $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right)$ olan üçgenin köşe noktaları Şekil 3.25 deki gibi alındığında quandılın elemanları aşağıdaki noktalar olur. $a = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ve $b = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$

olmak üzere;

$$
\begin{array}{ll}
q_1 = (1, 0, 0) & q_{16} = \left(-\tfrac{1}{2}, -a, -b\right) \\
q_2 = (-1, 0, 0) & q_{17} = \left(\tfrac{1}{2}, a, -b\right) \\
q_3 = (0, 1, 0) & q_{18} = \left(-\tfrac{1}{2}, -a, b\right) \\
q_4 = (0, -1, 0) & q_{19} = \left(-\tfrac{1}{2}, a, b\right) \\
q_5 = (0, 0, 1) & q_{20} = \left(\tfrac{1}{2}, -a, -b\right) \\
q_6 = (0, 0, -1) & q_{21} = \left(-\tfrac{1}{2}, a, -b\right) \\
q_7 = \left(a, -b, -\tfrac{1}{2}\right) & q_{22} = \left(\tfrac{1}{2}, -a, b\right) \\
q_8 = \left(-a, b, \tfrac{1}{2}\right) & q_{23} = \left(b, \tfrac{1}{2}, a\right) \\
q_9 = \left(a, b, -\tfrac{1}{2}\right) & q_{24} = \left(-b, -\tfrac{1}{2}, -a\right) \\
q_{10} = \left(-a, -b, \tfrac{1}{2}\right) & q_{25} = \left(-b, \tfrac{1}{2}, a\right) \\
q_{11} = \left(a, -b, \tfrac{1}{2}\right) & q_{26} = \left(b, -\tfrac{1}{2}, -a\right) \\
q_{12} = \left(-a, b, -\tfrac{1}{2}\right) & q_{27} = \left(b, -\tfrac{1}{2}, a\right) \\
q_{13} = \left(a, b, \tfrac{1}{2}\right) & q_{28} = \left(-b, \tfrac{1}{2}, -a\right) \\
q_{14} = \left(-a, -b, -\tfrac{1}{2}\right) & q_{29} = \left(-b, -\tfrac{1}{2}, a\right) \\
q_{15} = \left(\tfrac{1}{2}, a, b\right) & q_{30} = \left(b, \tfrac{1}{2}, -a\right)
\end{array}
$$

Quandılın noktaları ikişer ikişer antipodal olduğundan 15 yansıma elde edilir. Quandılın noktalarından elde edilen yansımaların matrisleri

$$
\sigma_{q_1} = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_{q_{17}} = \alpha_9 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -a & b \\ -a & -b & \frac{1}{2} \\ b & \frac{1}{2} & a \end{pmatrix}
$$

$$
\sigma_{q_3} = \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_{q_{19}} = \alpha_{10} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a & b \\ a & -b & -\frac{1}{2} \\ b & -\frac{1}{2} & a \end{pmatrix}
$$

$$
\sigma_{q_5} = \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_{q_{21}} = \alpha_{11} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a & -b \\ a & -b & \frac{1}{2} \\ -b & \frac{1}{2} & a \end{pmatrix}
$$

$$\sigma_{q_7} = \alpha_4 = \begin{pmatrix} -b & \frac{1}{2} & a \\ \frac{1}{2} & a & -b \\ a & -b & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \sigma_{q_{23}} = \alpha_{12} = \begin{pmatrix} a & -b & \frac{1}{2} \\ -b & \frac{1}{2} & -a \\ -\frac{1}{2} & -a & -b \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{q_9} = \alpha_5 = \begin{pmatrix} -b & -\frac{1}{2} & a \\ -\frac{1}{2} & a & b \\ a & b & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \sigma_{q_{25}} = \alpha_{13} = \begin{pmatrix} a & b & \frac{1}{2} \\ b & \frac{1}{2} & -a \\ \frac{1}{2} & -a & -b \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{q_{11}} = \alpha_6 = \begin{pmatrix} -b & \frac{1}{2} & -a \\ \frac{1}{2} & a & b \\ -a & b & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \sigma_{q_{27}} = \alpha_{14} = \begin{pmatrix} a & b & -\frac{1}{2} \\ b & \frac{1}{2} & a \\ -\frac{1}{2} & a & -b \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{q_{13}} = \alpha_7 = \begin{pmatrix} -b & -\frac{1}{2} & -a \\ -\frac{1}{2} & a & -b \\ -a & -b & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \sigma_{q_{29}} = \alpha_{15} = \begin{pmatrix} a & -b & \frac{1}{2} \\ -b & \frac{1}{2} & a \\ \frac{1}{2} & a & -b \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{q_{15}} = \alpha_8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -a & -b \\ -a & -b & -\frac{1}{2} \\ -b & -\frac{1}{2} & a \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. Bu yansımaların ürettiği

$$G_Q := \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{15} \rangle$$

grubu 120 elemanlıdır. G_Q grubunun

$$G' = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_1\alpha_4, \alpha_1\alpha_5, \alpha_1\alpha_6, \alpha_1\alpha_7, \alpha_1\alpha_8, \alpha_1\alpha_9, \\ \alpha_1\alpha_{10}, \alpha_1\alpha_{11}, \alpha_1\alpha_{12}, \alpha_1\alpha_{13}, \alpha_1\alpha_{14}, \alpha_1\alpha_{15}, \alpha_2\alpha_3, \alpha_2\alpha_4, \\ \alpha_2\alpha_5, \alpha_2\alpha_6, \alpha_2\alpha_7, \alpha_2\alpha_8, \alpha_2\alpha_9, \alpha_2\alpha_{10}, \alpha_2\alpha_{11}, \alpha_2\alpha_{12}, \\ \alpha_2\alpha_{13}, \alpha_2\alpha_{14}, \alpha_2\alpha_{15}, \alpha_3\alpha_4, \alpha_3\alpha_5, \alpha_3\alpha_6, \alpha_3\alpha_7, \alpha_3\alpha_8, \\ \alpha_3\alpha_9, \alpha_3\alpha_{10}, \alpha_3\alpha_{11}, \alpha_3\alpha_{12}, \alpha_3\alpha_{13}, \alpha_3\alpha_{14}, \alpha_3\alpha_{15}, -\alpha_4, \\ -\alpha_5, -\alpha_6, -\alpha_7, -\alpha_8, -\alpha_9, -\alpha_{10}, -\alpha_{11}, -\alpha_{12}, -\alpha_{13}, -\alpha_{14}, \\ -\alpha_{15}, \alpha_4\alpha_5, \alpha_4\alpha_{11}, \alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_{11}, \alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_{11}, \alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_{11}, \\ \alpha_4\alpha_{15}, \alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_{15}, \alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_{15}, \alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_{15}, I \end{array} \right\}$$

elemanları bir alt grup oluşturur. Grubun diğer elemanları bu elemanların eksilididir. G_Q grubunun yukarıda elemanları verilen G' alt grubu

$$\Psi : G' \longrightarrow A_5$$

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha_1\alpha_2) &= (23)(45) \\ \Psi(\alpha_1\alpha_3) &= (24)(35) \\ \Psi(\alpha_1\alpha_4) &= (12435) \\ \Psi(\alpha_3\alpha_4) &= (145) \\ \Psi(\alpha_3\alpha_9) &= (13542) \\ \Psi(\alpha_1\alpha_9) &= (152) \end{aligned}$$

izomorfizmi ile A_5 grubuna izomorftur. Bu nedenle G_Q grubu $A_5 \times \mathbb{Z}_2$ grubuna izomorftur. Ayrıca $A_5 \times \mathbb{Z}_2$ grubuna izomof olan G_Q grubu α_1, α_2, α_9 elemanları tarafından üretilir. $\alpha_3 = \alpha_{12}\alpha_8\alpha_{12}$, $\alpha_4 = \alpha_5\alpha_9\alpha_5$, $\alpha_5 = \alpha_9\alpha_2\alpha_9$, $\alpha_6 = \alpha_8\alpha_{11}\alpha_8$, $\alpha_7 = \alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{12}$, $\alpha_8 = \alpha_2\alpha_{11}\alpha_2$, $\alpha_{10} = \alpha_2\alpha_9\alpha_2$, $\alpha_{11} = \alpha_1\alpha_9\alpha_1$, $\alpha_{12} = \alpha_8\alpha_9\alpha_8$, $\alpha_{13} = \alpha_5\alpha_8\alpha_5$, $\alpha_{14} = \alpha_6\alpha_1\alpha_6$, $\alpha_{15} = \alpha_9\alpha_8\alpha_9$ olduğundan grubu üreten diğer yansımalar bu üç yansımadan elde edilebilir. $A_5 \times \mathbb{Z}_2$ grubuna izomorf G_Q grubu

$$A_5 \times \mathbb{Z}_2 \cong G_Q = \left\langle \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_9 \mid (\alpha_1\alpha_2)^2 = I,\ (\alpha_1\alpha_9)^3 = I,\ (\alpha_2\alpha_9)^5 = I \right\rangle$$

şeklinde elde edilir.

Bütün bunlardan sonra kürenin sonlu alt quandıllarının sınıflandırılması aşağıdaki teoremle ifade edilebilir:

Teorem 3.4.1 *S^2 nin alt quandılları aşağıdaki formlardan biridir:*

- *Quandılın bütün noktaları aynı büyük çember üzerinde bulunabilir. Quandılın eleman sayısı n ise quandılın noktaları çember içine yerleştirilen bir düzgün $n-$genin köşe noktaları olurlar.*
- *S^2 üzerinde kenar uzunlukları $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n})$ olan üçgenden gelen $2n+2$ noktalı quandle. Bu quandle aynı büyük çember üzerinde bulunan $2n$ tane nokta ve bu büyük çemberin iki kutbundan oluşur.*
- *Tetrahedral Quandle: S^2 üzerinde kenar uzunlukları $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ olan üçgenin köşeleri tarafından üretilen 12 noktalı quandle.*
- *Octahedral Quandle: S^2 üzerinde kenar uzunlukları $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$ olan üçgenin köşeleri tarafından üretilen 18 noktalı quandle.*
- *İcosahedral Quandle: S^2 üzerinde kenar uzunlukları $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5})$ olan üçgenin köşeleri tarafından üretilen 30 noktalı quandle.*

KAYNAKLAR

[1] BRİESKORN, E., *Automorphic Sets and Braids and Singularities*, *Contemporary Mathematics*, **78**, 45-115 (1988).

[2] MATREEV, S. V., *Distiributive Groupoids in Knot Theory*, *Math. USSR*, Sbornic, **97**, 73-83 (1984).

[3] DEHORNOY, P., *Free Distiributive Groupoids*, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **61**, 123-146 (1989).

[4] JOYCE, D., *A Classifying Invariant of Knots, the Knot Quandle*, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **23**, 37-65 (1982).

[5] ROGER, F. ve ROURKE, C., *Racks and Links in Codimension Two*, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **1**, 343-406 (1992).

[6] ARMSTRONG, M. A., *Groups and Symmetry*, Springer-Verlag (1988).

[7] JOHNSON, D. L.,*Topics in the Theory of Group Presentations*, Cambridge University Press (1980).

[8] TSUZUKU, T., *Finite Groups and Finite Geometries*, Cambridge University Press (1982).

[9] BEARDON, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag (1983).