YARI SÜREKLİ FONKSİYONLARIN PROXİMAL SUBGRADİENTLERİ

Gonca YILDIRIMER

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Şubat-2002

"Bu tez çalışması Anadolu Üniversitesi Araştırma Fonunca desteklenmiştir. Proje No: 001039"

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Gonca YILDIRIMER'in Yarı Sürekli Fonksiyonların Proximal Subgradientleri başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans tezi..28.2.2002....tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye(Tez Danışmanı)	**: Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK**	
Üye	**: Doç. Dr. Halig HÜSEYİNOV**	
Üye	**: Prof. Dr. Rafail N. GASIMOV**	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 06.03.2002
Tarih ve ....8/2**.......sayılı kararıyla onaylanmıştır.**

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Orhan ÖZER

ÖNSÖZ

Bazı problemlerin incelenmesinde ortaya çıkan fonksiyonlar diferansiyellenebilir olmayabilir. Bu durumlarda klasik analizin yöntemleri yetersiz olur ve diferansiyellenemeyen fonksiyonların özelliklerinin geliştirilmesi gerekir. Klasik anlamda diferansiyellenebilir olmayan fonksiyonların özellikleri düzgün olmayan analiz kapsamında araştırılmaktadır. Günümüzde, klasik anlamda diferansiyellenebilir olmayan fonksiyonlar için, çeşitli formlarda diferansiyel kavramı tanımlanmaktadır.

Açıktır ki konveks fonksiyonlar birçok temel özelliklere sahip oldukları halde genel olarak diferansiyellenebilir fonksiyonlar değildirler. İlk olarak 60' lı yıllarda Rockafellar tarafından konveks fonksiyonlar için subdiferansiyel kavramı verilmiş (bkz. [1]) ve bu kavramdan yararlanarak optimizasyon teorisinde birçok önemli sonuçlar elde edilmiştir (bkz. [2], [3], [4], [5], [6]). 70' li yıllarda Clarke tarafından başka bir subdiferansiyel kavramı verilmiş (bkz. [7]) ve bu subdiferansiyel kontrol teoride çok büyük uygulamalar bulmuştur (bkz. [8], [9], [10], [11]).

Alttan yarı sürekli fonksiyonlar için başka bir subdiferansiyel kavramı [12]' de verilmiştir. Bu kavram diferansiyel oyun teorisinde değer fonksiyonunun ve Hamilton-Jacobi denkleminin viscosity çözümlerinin incelenmesinde önemli yer almaktadır. (bkz. [13], [14], [15], [16], [17]). Son yıllarda kullanılan subdiferansiyel kavramlarından biri de alttan yarı sürekli fonksiyonlar için tanımlanan proximal subdiferansiyel kavramıdır (bkz. [18]). Proximal subdiferansiyel kavramı kontrol teoride, optimizasyon teorisinde, viability teorisinde geniş bir uygulama alanı bulmaktadır (bkz. [12],[19], [7], [20], [21]).

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YARI SÜREKLİ FONKSİYONLARIN PROXİMAL SUBGRADİENTLERİ

GONCA YILDIRIMER

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman. Prof. Dr. YALÇIN KÜÇÜK

2002, 79 sayfa

Bu çalışmada, kontrol teoride, optimizasyon teorisinde ve viability teorisinde geniş uygulama alanları bulmuş olan proximal subdiferansiyelin özellikleri incelenmiştir. Proximal subdiferansiyel, alttan yarı sürekli fonksiyonlar için tanımlanır. Bu kavram, alttan yarı sürekli fonksiyonun epigrafının proximal normal konisi kavramından yararlanılarak verilir. Hilbert uzayındaki kümeler için proximal normal koni tanımı verilmiştir ve bu koninin özellikleri incelenmiştir. Proximal subdiferansiyelin klasik diferansiyele benzer başka bir tanımı verilip fonksiyonun konveks olduğu durumda proximal subdiferansiyel ile Rockafellar subdiferansiyelinin ilişkisi araştırılmıştır. Fonksiyon Gâteaux veya Fréchet diferansiyellenebilir olduğunda Gâteaux veya Fréchet diferansiyelin proximal subdiferansiyel ile ilişkisi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Proximal normal koni, proximal subdiferansiyel, alttan yarı sürekli fonksiyon, Fréchet diferansiyel.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

PROXIMAL SUBGRADIENTS OF SEMICONTINUOUS FUNCTIONS

GONCA YILDIRIMER

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Prof. Dr. YALÇIN KÜÇÜK

2002, 79 pages

In this study, properties of proximal subdifferential which found wide application areas in control theory, optimization theory, viability theory have been examined. Proximal subdifferential is described for lower semicontinuous functions. Proximal normal cone definition have been put forward for the sets in Hilbert space and properties of proximal normal cone have been examined. Another definition of proximal subdifferential to similar classical differantial is put forward and when the function is convex , relation of proximal subdifferential with Rockafellar subdifferential is investigated. When the function is Gâteaux or Fréchet differentiable, relation with Proximal subdifferential of Gâteaux and Fréchet differential is examined.

Keywords: Proximal normal cone, Proximal subdifferential, Lower semicontinuous function, Fréchet differential.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında danışmanım olarak verdiği tüm destek ve zamanı için Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK' e ve Doç. Dr. Halik HÜSEYİNOV' a ve aynı zamanda Prof. Dr. Mahide KÜÇÜK' e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bana yardımcı olan sevgili arkadaşım Öğr.Gör. Fatih KARABACAK' a ve tüm arkadaşlarıma teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$B(x,\varepsilon)$	:	x noktasının $\varepsilon-$ komşuluğu
$\overline{B}(x,\varepsilon)$	:	x noktasının $\varepsilon-$ kapalı yuvarı
$d_S(x)$	:	x noktasının S kümesine olan uzaklığı
$epi f$	:	f fonksiyonunun epigrafı
$f'(x)$	:	f fonksiyonunun x noktasındaki Fréchet türevi
$f'_G(x)$	:	f fonksiyonunun x noktasındaki Gâteaux türevi
$\partial_P f(x_0)$	:	f fonksiyonunun x_0' daki proximal subdiferansiyeli
$\liminf\limits_{x\to x_0} f(x)$	:	f fonksiyonunun $x \to x_0$ iken alt limiti
$\limsup\limits_{x\to x_0} f(x)$	:	f fonksiyonunun $x \to x_0$ iken üst limiti
$N_S^P(s)$	:	S kümesinin s noktasındaki proximal normal konisi
$proj_S(x)$	:	S kümesindeki en yakın noktaların kümesi
$I_S(x)$	:	S kümesinin indikatör fonksiyonu
$N_{epif}^P(x,f(x))$	:	$epif$ kümesinin $(x,f(x))$ 'daki proximal normal konisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde gerekli olacak tanımlar ve teoremler verilecektir.

TANIM 1.1: $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme olsun. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

$MI)$ $d(x,y) = d(y,x)$

$M2)$ $d(x,y) \geq 0$

$M3)$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$M4)$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlıyorsa d' ye X üzerinde bir metrik denir; (X,d) ikilisine de metrik uzay denir.

TANIM 1.2: $a)$ (X,d) bir metrik uzay ve herhangi bir $x \in X$ noktası alalım ve $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$B(x;\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\} \subset X$$

kümesine x' in ε-komşuluğu veya x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar denir.

$b)$ (X,d) bir metrik uzay ve herhangi bir $x \in X$ alalım ve $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\overline{B}(x;\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) \leq \varepsilon\}$$

kümesine x noktasının ε-kapalı yuvarı denir.

$c)$ (X,d) bir metrik uzay ve $S \subset X$ olsun.

$$int(S) = \{s \in S : \exists \varepsilon > 0 \ni B(s;\varepsilon) \subset S\}$$

kümesine S' nin içi denir.

$d)$ (X,d) bir metrik uzay ve $S \subset X$ olsun.

$$\overline{S} = \{s \in X : \forall \varepsilon > 0 \ni B(s;\varepsilon) \cap S \neq \emptyset\}$$

kümesine S' nin kapanışı denir.

$e)$ (X,d) bir metrik uzay ve $S \subset X$ olsun.

$$\partial S = \{s \in X : \forall \varepsilon > 0 \text{ için } B(s;\varepsilon) \cap S \neq \emptyset \text{ ve } B(s;\varepsilon) \cap \mathbb{R}^n \setminus S \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye S' nin sınırı denir.

$f)$ (X,d) bir metrik uzay $A \subset X$ olsun ve bir $x \in X$ noktası alalım. Eğer x noktasını bulunduran her açık $B(x;\varepsilon)$ açık yuvarı A kümesinin x' den farklı bir noktasını bulunduruyorsa x noktasına A kümesinin bir yığılma noktasıdır denir. Yani

$$x \ A\text{' nın yığılma noktasıdır} \Leftrightarrow B(x;\varepsilon) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset.$$

$g)$ (X,d) bir metrik uzay, $A \subset B \subseteq X$ olsun. $B \subset \overline{A}$ oluyorsa A kümesi B içinde yoğundur denir. Özel olarak $\overline{A} = X$ ise A kümesi X uzayının yoğun bir alt kümesidir denir.

TANIM 1.3: $X \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\varphi : X \times X \to \mathbb{R};\ \varphi(x,y) = \langle x,y \rangle$$

fonksiyonu her $x,y,z \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$I1)$ $\langle x,x \rangle \geq 0$ ve $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$I2)$ $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$

$I3)$ $\langle \alpha x,y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$

$I4)$ $\langle x,y+z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$

koşullarını sağlıyorsa bu $\varphi(.,.) = \langle .,. \rangle$ fonksiyonuna bir iç çarpım $(X, \langle .,. \rangle)$ ikilisine de bir iç çarpım uzayı denir.

TANIM 1.4: X bir vektör uzayı olsun.

$$\|.\| : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$N1)$ $\|x\| \geq 0$

$N2)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$N3)$ $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

$N4)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

koşullarını sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm $(X, \|.\|)$' ye de normlu uzay denir.

TANIM 1.5: $(X, \langle ., . \rangle)$ bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer bu iç çarpım uzayı

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

şeklinde tanımlanan norma göre tam ise bu $(X, \langle ., . \rangle)$ iç çarpım uzayına bir Hilbert uzay denir.

TANIM 1.6: $S \subset X$ olsun. Eğer $\forall x, y \in S$ ve $\forall \alpha \in (0, 1)$ için

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in S$$

oluyorsa S ye konveks küme denir.

ÖNERME 1.7: X normlu uzay ve $S, S' \subseteq X$ boş olmayan iki küme ve $x \in X$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_S &: X \to \mathbb{R} \\ d_S(x) &= \inf \{\|x - s\| : s \in S\} \end{aligned}$$

uzaklık fonksiyonu için aşağıdakiler doğrudur.

$a)$ $x \in \overline{S} \Leftrightarrow d_S(x) = 0$

$b)$ $d_S = d_{S'} \Leftrightarrow \overline{S} = \overline{S'}$

$c)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için $|d_S(x) - d_S(y)| \leq \|x - y\|$

KANIT: $a)\,(\Leftarrow)$ $d_S(x) = 0$ olsun. $x \in \overline{S}$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için bir $\varepsilon > 0$ alalım. İnf tanımından

$$\|x - s_*\| < d_S(x) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $s_* \in S$ vardır. $d_S(x) = \inf\{\|x - s\| : s \in S\} = 0$ olduğundan

$$\|x - s_*\| < \varepsilon.$$

Böylece $s_* \in B(x;\varepsilon) \cap S \neq \emptyset$ olur ki buradan da $x \in \overline{S}$ elde edilir.

$(\Rightarrow)$ $x \in \overline{S}$ olsun. O halde kapanış tanımı gereği herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $s_\varepsilon \in B(x;\varepsilon) \cap S$ olacak şekilde en az bir s_ε bulunur. Bu s_ε için

$$\begin{aligned} d_S(x) &= \inf\{\|x - s\| : s \in S\} \\ &\leq \|x - s_\varepsilon\| < \varepsilon \end{aligned}$$

olur.

Böylece

$$0 \leq d_S(x) < \varepsilon$$

olur. ε keyfi olduğundan $d_S(x) = 0$ olur.

$(b)\,(\Rightarrow)$ $d_S = d_{S'}$ olsun. $x \in \overline{S}$ alalım. (a) şıkkından dolayı $d_S(x) = 0$ dır. $d_S = d_{S'}$ olduğundan $d_{S'}(x) = 0$ dır.O halde $x \in \overline{S'}$. Buradan

$$\overline{S} \subset \overline{S'} \tag{1.7.1}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $x \in \overline{S'}$ alınırsa (a) şıkkından dolayı $d_{S'}(x) = 0$ ve dolayısıyla $d_S(x) = 0$ dır. O halde $x \in \overline{S}$ dır. Buradan

$$\overline{S'} \subset \overline{S} \tag{1.7.2}$$

elde edilir.1.7.1 ve 1.7.2 den $\overline{S} = \overline{S'}$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $\overline{S} = \overline{S'}$ olsun. $d_S(x) = d_{S'}(x)$ olduğunu göstermeliyiz.

$S \subseteq \overline{S}$ olduğundan infimum tanımı gereği

$$d_{\overline{S}}(x) \leq d_S(x) \tag{1.7.3}$$

olur

Şimdi $d_{\overline{S}}(x) < d_S(x)$ olamayacağını gösterelim. Kabul edelim ki $d_{\overline{S}}(x) = \inf\left\{\|x-s\| : s \in \overline{S}\right\} = \alpha_1$ ve $d_S(x) = \inf\{\|x-s\| : s \in S\} = \alpha_2$ olmak üzere $\alpha_1 < \alpha_2$ olsun. Bu durumda

$\varepsilon = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{4}$ dersek $\alpha_1 = \inf\left\{\|x-s\| : s \in \overline{S}\right\}$ olduğundan infimum tanımı geregi $\exists s_\star \in \overline{S} \ni$

$$\|x - s_\star\| < \alpha_1 + \varepsilon = \alpha_1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{4} \tag{1.7.4}$$

Diğer taraftan $s_\star \in \overline{S}$ olduğundan bu $\varepsilon > 0$ için $\exists s_0 \in S$ vardır öyle ki

$$\|s_0 - s_\star\| < \varepsilon = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{4} \tag{1.7.5}$$

olur. 1.7.4 ve 1.7.5' den

$$\begin{aligned} \|x - s_0\| &\leq \|x - s_\star\| + \|s_\star - s_0\| \\ &< \alpha_1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{4} < \alpha_2 \end{aligned}$$

dir. $s_0 \in S$ olduğundan

$$\alpha_2 = d_S(x) = \inf\{\|x-s\| : s \in S\} < \alpha_2$$

yani $\alpha_2 < \alpha_2$ olur ki bu çelişkidir; bu çelişkiye $\alpha_1 < \alpha_2$ almakla düştük.

O halde

$$d_{\overline{S}}(x) \geq d_S(x) \tag{1.7.6}$$

Böylece 1.7.3 ve 1.7.6 eşitsizliklerinden

$$d_{\overline{S}}(x) = d_S(x)$$

elde edilir.

(c) Üçgen eşitsizliğinden

$$\|x-s\| \leq \|x-y\| + \|y-s\|$$

olur. Buradan

$$d_S(x) = \inf_{s\in S} \|x-s\| \leq \inf_{s\in S} \|x-y\| + \inf_{s\in S} \|y-s\|$$

$$\Rightarrow d_S(x) \leq \|x-y\| + d_S(y)$$

elde edilir. Bu

$$d_S(x) - d_S(y) \leq \|x-y\| \tag{1.7.7}$$

demektir. Benzer şekilde üçgen eşitsizliğinden

$$\|y-s\| \leq \|y-x\| + \|x-s\|$$

olur. Aynı işlemleri tekrarlarsak

$$d_S(y) = \inf_{s\in S} \|y-s\| \leq \inf_{s\in S} \|y-x\| + \inf_{s\in S} \|x-s\| = \|y-x\| + d_S(x)$$

olup

$$d_S(y) \leq \|x-y\| + d_S(x)$$

buradan da

$$-\|x-y\| \leq d_S(x) - d_S(y) \tag{1.7.8}$$

elde edilir. 1.7.7 ve 1.7.8 eşitsizliklerinden

$$|d_S(x) - d_S(y)| \leq \|x-y\|$$

bulunur.

2. PROXİMAL NORMALLER

Bu bölümde bir kümenin bir noktasındaki proximal normal vektörünü ve proximal normal konisini tanımlayıp birtakım özelliklerini inceleyeceğiz. Bu incelemeye öncelikle tanımlar için gerekli olan bir kümeye en yakın nokta tanımını vererek başlayalım.

TANIM 2.1: X bir Hilbert uzay ve S X' in boş olmayan bir alt kümesi ve $x \notin S$ olsun. S içinde x' e uzaklığı en yakın olan en az bir s noktası var ise bu $s \in S$' ye x' in S içindeki en yakın noktası veya x' in S' ye bir izdüşümü denir. Bu özellikteki tüm noktaların kümesi $proj_S(x)$ ile gösterilir; yani

$$proj_S(x) = \{s \in S : d(x;S) = \|x - s\|\}$$

dir.

$$s \in proj_S(x) \Leftrightarrow \{s\} \subset S \cap \bar{B}(x; \|x - s\|) \text{ ve } S \cap B(x; \|x - s\|) = \emptyset$$

olduğu açıktır.

TANIM 2.2: X bir Hilbert uzay olsun. Boş olmayan bir $S \subset X$ kümesi verilsin.

a) Herhangi bir $x \notin S$ verilsin ve $s \in proj_S(x)$ olsun. $x - s$ vektörüne S' nin s deki proximal normal vektörü denir.

b) $x - s$ vektörünün negatif olmayan bir katına proximal normal (veya kısaca P-normal) doğrultu denir. Yani herhangi $t \geq 0$ için $\zeta = t(x - s)$ vektörüne S' nin s' deki proximal normal doğrultusu denir.

c) S kümesinin s' deki P-normal doğrultularının kümesinin oluşturduğu koniye ya da s' yi izdüşüm kabul eden x' lerin kümesine S' nin s' deki proximal normal konisi denir. Bu koni $N_S^P(s)$ ile gösterilir. $s \notin S$ ise $N_S^P(s)$ tanımsızdır.

S kümesi dışındaki herhangi bir x noktasının S' de bir s en yakın noktasına sahip olması gerekmez.

Sonlu boyutlu durumda izdüşümlerin varlığı konusunda pek zorluk yoktur. S kümesi kapalı ise S dışındaki her noktanın S' de izdüşümü olan bir s noktası vardır.

Sonsuz boyutlu uzaylarda; S kümesi kapalı olsa bile S kümesi dışındaki bir noktanın S içinde bir izdüşümü olmayabilir.

ÖRNEK 2.3: Bir X Hilbert uzayının bir sayılabilir birim dikey tabanı $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ olsun. $S := \left\{\frac{i+1}{i}e_i : i \geq 1\right\}$ diyelim. S kümesi kapalıdır fakat S' nin hiçbir noktası 0' ın izdüşümü değildir. Yani $proj_S(0) = \emptyset$ dır.

Çözüm: $S = \left\{2e_1, \frac{3}{2}e_2, \frac{4}{3}e_3, \frac{5}{4}e_4, \frac{6}{5}e_5, ...\right\}$' nin herhangi iki öğesi arasındaki uzaklık $\sqrt{2}$' den daha büyüktür. Gerçekten;
$i \neq j$ için $s_i = \frac{1+i}{i}e_i, s_j = \frac{1+j}{j}e_j \in S$ alalım.

$$\begin{aligned}
\|s_i - s_j\|^2 &= \left\|\frac{1+i}{i}e_i - \frac{1+j}{j}e_j\right\|^2 \\
&= \left\langle \frac{1+i}{i}e_i - \frac{1+j}{j}e_j, \frac{1+i}{i}e_i - \frac{1+j}{j}e_j \right\rangle \\
&= \left(\frac{1+i}{i}\right)^2 \langle e_i, e_i\rangle + \left(\frac{1+j}{j}\right)^2 \langle e_j, e_j\rangle - 2\frac{1+i}{i}\frac{1+j}{j}\langle e_i, e_j\rangle \\
&= \left(\frac{1+i}{i}\right)^2 + \left(\frac{1+j}{j}\right)^2 > 1+1 = 2
\end{aligned}$$

Böylece $i \neq j$ için $\|s_i - s_j\| > \sqrt{2}$ dir. Bundan dolayı S ' nin hiçbir yığılma noktası yoktur. S' nin her noktası kapanış noktasıdır ve S' nin bu noktaları dışında başka bir kapanış noktası yoktur. O halde $S = \overline{S}$ dir. Bu nedenle S kapalıdır.

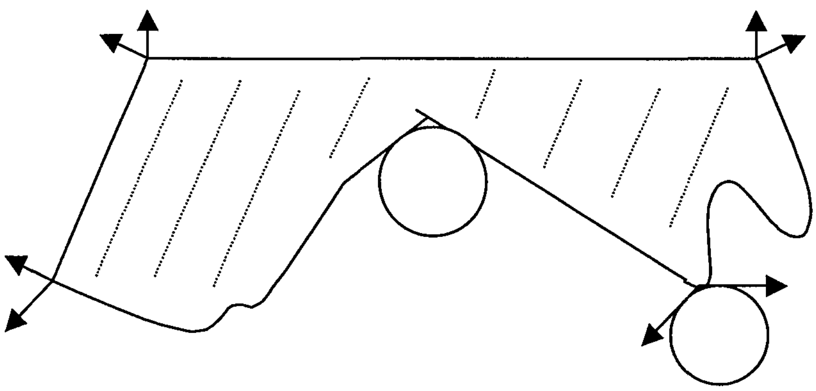
$$\begin{aligned}
d_S(0) &= \inf\{\|0-s\| : s \in S\} \\
&= \inf\{\|-s\| : s \in S\} \\
&= \inf\{\|s\| : s \in S\} \\
&= \inf\left\{\left\|\frac{i+1}{i}e_i\right\| : i \geq 1\right\} \\
&= \inf\left\{\|e_i\| \left\|\frac{i+1}{i}\right\| : i \geq 1\right\} \\
&= \inf\left\{\left\|\frac{i+1}{i}\right\| : i \geq 1\right\} \\
&= 1
\end{aligned}$$

olur. $\forall s \in S$ için $\|s\| > 1$ olduğundan 0' ın izdüşümü olan hiçbir $s \in S$ noktası yoktur. Yani $proj_S(0) = \emptyset$ dur.

ÖRNEK 2.4: Şekil 2.1' de verilen S kümesinin s_1, s_2, .., s_8 noktalarındaki proximal normal konilerini bulunuz.

Çözüm:

Şekle göre s_3, $s_5 \in S$ noktaları ve



Şekil 2.1: Bir S kümesi ve onun bazı sınır noktaları

$\forall s \in int(S)$ noktaları S dışındaki hiçbir x noktasının izdüşümü olamaz. Bu nedenle

$$N_S^P(s_3) = \{0\} = N_S^P(s_5)$$

dir. s_1, s_2, s_7 ve s_8 noktalarının P-normal konileri en az iki doğrusal bağımsız vektör bulundurur. s_3 ve s_5 noktaları dışında tüm sınır noktaları sıfırdan farklı bir vektörle üretilen proximal normal konilere sahiptirler.

ÖNERME 2.5: X bir Hilbert uzay ve $S \subset X$ boş olmayan bir alt küme; $x \in X$ ve $s \in S$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

a) $s \in proj_S(x)$;

b) $\forall t \in [0,1]$ için $s \in proj_S(s + t(x - s))$;

c) $\forall t \in [0,1]$ için $d_S(s + t(x - s)) = t\|x - s\|$;

d) $\forall s' \in S$ için $\langle x - s, s' - s\rangle \leq \frac{1}{2}\|s' - s\|^2$.

Kanıt:

$(a \Leftrightarrow d)$ $s \in proj_S(x)$ olsun. Bu ifade her $s' \in S$ için

$$\|x - s\| \leq \|x - s'\|$$

ifadesine denktir.Her iki yanın karesini alırsak bu ifade $\forall s' \in S$ için

$$\|x - s\|^2 \leq \|x - s'\|^2$$

eşitsizliğine denk olur. Buradan her $s' \in S$ için

$$\begin{aligned}
\|x - s + s - s'\|^2 &\geq \|x - s\|^2 \\
&\Leftrightarrow \langle x - s + s - s', x - s + s - s'\rangle \geq \|x - s\|^2 \\
&\Leftrightarrow \langle x - s, x - s\rangle + \langle s - s', s - s'\rangle + 2\langle x - s, s - s'\rangle \\
&\geq \|x - s\|^2 \\
&\Leftrightarrow \|x - s\|^2 + \|s - s'\|^2 - 2\langle x - s, s' - s\rangle \geq \|x - s\|^2 \\
&\Leftrightarrow \langle x - s, s' - s\rangle \leq \frac{1}{2}\|s' - s\|^2
\end{aligned}$$

$(a \Leftrightarrow b)$ $s \in proj_S(x)$ olsun. Bu ifade

$$\langle x - s, s' - s\rangle \leq \frac{1}{2}\|s' - s\|^2 \forall s' \in S$$

ifadesine denktir.

Buradan $\forall s' \in S$ için

$$\begin{aligned}
\langle x-s, s'-s\rangle &\leq \frac{1}{2}\|s'-s\|^2 \\
&\Leftrightarrow \forall s' \in S \text{ ve } \forall t \in [0,1] \text{ için } \langle t(x-s), s'-s\rangle \leq \frac{1}{2}\|s'-s\|^2 \\
&\Leftrightarrow \forall s' \in S \text{ ve } \forall t \in [0,1] \text{ için } \langle s+t(x-s)-s, s'-s\rangle \\
&\leq \frac{1}{2}\|s'-s\|^2 \\
&\Leftrightarrow \forall t \in [0,1] \text{ için } s \in proj_S(s+t(x-s))
\end{aligned}$$

olur.

$(b \Leftrightarrow c)$ $\forall t \in [0,1]$ için $s \in proj_S(s+t(x-s)) \Leftrightarrow$

$$\forall t \in [0,1] \text{ için } d_S(s+t(x-s)) = \|s+t(x-s)-s\| = t\|x-s\|$$

dir.

SONUÇ 2.6: X bir Hilbert uzay ve $S \subset X$ boş olmayan bir küme olsun. $s \in S$ ise

$$N_S^P(s) = \{\zeta : \exists t > 0 \ni d_S(s+t\zeta) = t\|\zeta\|\}$$

olur.

Kanıt: $u \in N_S^P(s)$ alalım. $\exists t \geq 0$ için $x \notin S$ ve $s \in proj_S(x)$ olmak üzere $u = t(x-s)$ dir. O zaman

$$s \in proj_S(x) \Leftrightarrow d_S(x) = \|x-s\|$$

dir. Diğer taraftan $\forall t \in [0,1]$ için $s \in proj_S(s+t(x-s))$ olur.

Önerme 2.6' dan

$$s \in proj_S(s+t(x-s)) \Leftrightarrow d_S(s+t(x-s)) = \|s+t(x-s)-s\| = t\|x-s\|.$$

$\zeta = x - s$ alınırsa $s \in proj_S(x)$ ise

$$d_S(s + t\zeta) = t\,\|\zeta\|$$

olur. Tersine $d_S(s + t(x-s)) = t\,\|x - s\|$ olsun. O halde Önerme 2.5' den $s \in proj_S(s + t(x-s))$ olur. Buradan

$$s + t(x-s) - s = t(x-s) \in N_S^P(s)$$

olur.

ÖNERME 2.7: $S \subseteq R^n$ boş olmayan bir kapalı kümesi olsun.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus S$ için $proj_S(x) \neq \emptyset$ dir.

(b) $\{s \in proj_S(x) : x \in R^n \setminus S\}$ kümesi S 'nin sınır kümesi içinde yoğundur.

Kanıt: (a) S kapalı ve $x \notin S$ olsun. $d_S(x) = \|x - s_0\|$ olan en az bir bir $s_0 \in S$' nin varlığını göstereceğiz. Bir $y \in S$ alalım. $\|x - y\| = R$ diyelim.

$S_0 = S \cap \overline{B}(x; R)$ olsun. Açıktır ki $S_0 \neq \emptyset$ ve $S_0 \subset S$ olur. Bu durumda

$$d_S(x) \leq d_{S_0}(x) \tag{2.7.1}$$

dir. Şimdi $d_S(x) < d_{S_0}(x)$ olamayacağını göstereceğiz .

$\alpha_1 = d_{S_0}(x) = \inf\{\|x - s\| : s \in S_0\}$ ve $\alpha_2 = d_S(x) = \inf\{\|x - s\| : s \in S\}$ olmak üzere kabul edelim ki $\alpha_2 < \alpha_1$ olsun. S kapalı ve $\overline{B}(x; R)$ kompakt küme olduğundan $S_0 = S \cap \overline{B}(x; R)$ kompakt kümedir. $\|.\|$ fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\alpha_1 = d_{S_0}(x) = \inf\{\|x - s\| : s \in S_0\} = \|x - s_0\|$$

olacak şekilde $s_0 \in S_0$ vardır. $S_0 = S \cap \overline{B}(x; R)$ olduğundan $s_0 \in S_0$ ve $s_0 \in \overline{B}(x; R)$, dolayısıyla

$$\|x - s_0\| \leq R$$

olur. Yani

$$\alpha_1 = d_{S_0}(x) = \|x - s_0\| \leq R \tag{2.7.2}$$

olur. Diğer taraftan $\alpha_2 = d_S(x) = \inf\{\|x-s\| : s \in S\}$ olduğundan $\varepsilon = \frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} > 0$ için

$$\begin{aligned} \|x - s_\star\| &< \alpha_2 + \varepsilon = \alpha_2 + \frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} \\ &< \frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} \\ &< \alpha_1 = d_{S_0}(x) \end{aligned}$$

olan $\exists s_\star \in S$ vardır. Yani $\|x-s_\star\| < d_{S_0}(x) = \alpha_1$ olan $\exists s_\star \in S$ vardır. $\alpha_1 \leq R$ olduğundan $s_\star \in \overline{B}(x;R)$ olur. Böylece $s_\star \in S \cap \overline{B}(x;R) = S_0$ olur. Buradan

$$\alpha_1 = d_{S_0}(x) = \inf\{\|x-s\| : s \in S_0\} < \|x - s_\star\| < \alpha_1$$

olur. Bu ise

$$\alpha_1 < \alpha_1$$

demektir. Bu çelişkiden

$$\alpha_2 < \alpha_1$$

kabulümüz yanlıştır. Yani

$$\alpha_2 = d_S(x) < d_{S_0}(x) = \alpha_1$$

olamaz. O zaman 2.7.1' den $d_S(x) = d_{S_0}(x)$ olduğu bulunur. $s_0 \in S$ olmak üzere $d_{S_0}(x) = \|x - s_0\|$ olduğundan $d_S(x) = \|x-s_0\|$ olur.

O halde

$$d_S(x) = \inf\{\|x-s\| : s \in S\} = \|x - s_0\|$$

olan $s_0 \in proj_S(x) \neq \emptyset$ olduğu bulunur. Bu ise $proj_S(x) \neq \emptyset$ demektir.

b) Şimdi $x \notin S$ için $proj_S(x)$' in ∂S içinde yoğun olduğunu görelim. Önce $proj_S(x) \subset \partial S$ olduğunu görelim. Bunun için $s_0 \in proj_S(x)$ alalım. Bu durumda

$$d_S(x) = \inf\{\|x-s\| : s \in S\} = \|x - s_0\|$$

olur.

Kabul edelim ki $s_0 \notin \partial S$ olsun. O halde $s_0 \in int(S)$ olacaktır. Buradan $\overline{B}(s_0;\varepsilon_0) \subset S$ olacak biçimde bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır.

$$s_\star = s_0 + \varepsilon_0 \frac{x - s_0}{\|x - s_0\|}$$

olsun.

Bu durumda

$$\|s_\star - s_0\| = \varepsilon_0 \left\| \frac{x - s_0}{\|x - s_0\|} \right\| = \varepsilon_0$$

yani; $s_\star \in \overline{B}(s_0;\varepsilon_0)$ olur. $\overline{B}(s_0;\varepsilon_0) \subset S$ olduğundan $s_\star \in S$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \|x - s_\star\| &= \left\| x - s_0 - \varepsilon_0 \frac{x - s_0}{\|x - s_0\|} \right\| \\ &= \left\| \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\|x - s_0\|}\right)(x - s_0) \right\| \\ &= \left| 1 - \frac{\varepsilon_0}{\|x - s_0\|} \right| \|x - s_0\| \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

olur. $x \notin S$ ve $\overline{B}(s_0;\varepsilon_0) \subset S$ olduğundan $x \notin \overline{B}(s_0;\varepsilon_0)$ dolayısıyla da $\|x - s_0\| > \varepsilon_0$ bulunur. Böylece $1 - \frac{\varepsilon_0}{\|x - s_0\|} > 0$ elde edilir. O halde 2.7.3' den

$$\|x - s_\star\| = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\|x - s_0\|}\right) \|x - s_0\| = \|x - s_0\| - \varepsilon_0$$

elde edilir.

Böylece

$$d_S(x) = \inf\{\|x - s\| : s \in S\} \leq \|x - s_\star\| = \|x - s_0\| - \varepsilon_0 = d_S(x) - \varepsilon_0$$

olur; buradan da $\varepsilon_0 < 0$ bulunur ki bu çelişkidir. Bu çelişkiye $s_0 \in int(S)$ olsun demekle düştük; kabulümüz doğru değilidir.$s_0 \in \partial S$ olur. $s_0 \in proj_S(x)$ keyfi olduğundan

$$proj_S(x) \subset \partial S$$

bulunur.

Şimdi $\{s \in proj_S(x) : x \in \mathbb{R}^n \setminus S\}$ kümesinin ∂S içinde yoğun olduğunu görelim Bunun için

$$\partial S = \overline{\{s \in proj_S(x) : x \in \mathbb{R}^n \setminus S\}}$$

olduğunu göstermeliyiz. Keyfi bir $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$ için $proj_S(x) \subset \partial S$ olduğundan

$$\{s \in proj_S(x) : x \in \mathbb{R}^n \setminus S\} \subset \partial S$$

olur. ∂S kapalı küme olduğundan

$$\overline{\{s \in proj_S(x) : x \in \mathbb{R}^n \setminus S\}} \subseteq \partial S \tag{2.7.4}$$

elde edilir.

Şimdi $\partial S \subset \overline{\{s \in proj_S(x) : x \in \mathbb{R}^n \setminus S\}}$ olduğunu kanıtlayalım. Bir $s_\star \in \partial S$ alalım ve sabitleyelim. Bu durumda bir $(x_i)_{i \in IN} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S$ dizisini $x_i \longrightarrow s_\star$ olacak şekilde alalım.

Herbir $i \in IN$ için $proj_S(x_i) \neq \emptyset$ olduğundan herbir $i \in IN$ için $s_i \in proj_S(x_i)$ olacak şekilde bir $(s_i)_{i \in IN}$ dizisi oluşturalım. $(s_i)_{i \in IN} \subset \partial S$ olduğu açıktır. $s_\star \in S, s_i \in proj_S(x_i)$ olduğundan herbir $i \in IN$ için

$$\|x_i - s_i\| = d_S(x_i) \leq \|x_i - s_\star\|$$

olur. $i \longrightarrow \infty$ iken $\|x_i - s_\star\| \longrightarrow 0$ olduğundan $i \longrightarrow \infty$ iken $\|x_i - s_i\| \longrightarrow 0$ olur. $\varepsilon > 0$ için $\exists i_0 \in IN \ni \forall i > i_0$ iken

$$\|x_i - s_\star\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \|x_i - s_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Buradan $\forall i > i_0$ için

$$\|s_i - s_\star\| \leq \|s_i - x_i + x_i - s_\star\| \leq \|x_i - s_i\| + \|x_i - s_\star\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Bu ise $i \longrightarrow \infty$ iken $s_i \longrightarrow s_\star$ olması demektir. Buradan $s_\star \in \partial S$ için $s_i \in \partial S$ olmak üzere $i \longrightarrow \infty$ iken $s_i \longrightarrow s_\star$ olacak biçimde $(s_i)_{i \in IN}$ dizisinin olduğunu bulduk. Bu ise

$$s_\star \in \overline{\{s \in proj_S(x) : x \in \mathbb{R}^n \setminus S\}}$$

olması demektir. Buradan

$$\partial S \subset \overline{\{s \in proj_S(x) : x \in \mathbb{R}^n \setminus S\}} \tag{2.7.5}$$

olur. Böylece 2.7.4 ve 2.7.5 'den

$$\partial S = \overline{\{s \in proj_S(x) : x \in \mathbb{R}^n \setminus S\}} \tag{2.7.6}$$

elde edilir.

SONUÇ 2.8: X bir Hilbert uzay $S \subset X$, $x \notin S$, $s \in S$ noktası x noktasına S' de en yakın nokta, yani $d_S(x) = \|x - s\|$ olsun. O zaman $\forall t \in (0,1)$ için $s + t(x - s)$ noktaları bir tek en yakın noktaya sahiptir. Yani $\forall t \in (0,1)$ için $proj_S(s + t(x - s)) = \{s\}$.

Kanıt: $s \in proj_S(x) = \{s \in S : d_S(x) = \|x - s\|\}$ olsun. $\forall t \in [0,1]$ için

$$s \in proj_S(s + t(x - s))$$

olduğunu biliyoruz. Buradan $\forall t \in (0,1)$ için

$$d_S(s + t(x - s)) = t\|x - s\|$$

elde edilir. Şimdi $s_\star \neq s$ olan bir $s_\star \in S$ için $s_\star \in proj_S(s + t(x - s))$ olduğunu varsayalım; bu durumda

$$d_S(s_\star) = t\|x - s\|$$

olacaktır. Diğer taraftan

$$d_S(x, s + t(x - s)) = \|x - s - t(x - s)\| = (1 - t)\|x - s\|$$

ve $x, s_\star, s + t(x - s)$ doğruları aynı bir doğru üzerinde olmadığından

$$\begin{aligned} d(x, s_\star) &< d_S(x, s + t(x - s)) + d_S(s + t(x - s), s_\star) \\ &\leq (\|x - s\| - t\|x - s\|) + t\|x - s\| = \|x - s\| \\ &\leq \|x - s\| \end{aligned}$$

olur ki bu mümkün değildir. Çünkü $d_S(x) = \|x - s\|$ olduğundan $s_\star$' ın x' e uzaklığı $\|x - s\|$ den daha küçük olamaz. O halde

$$s_\star \notin proj_S(s + t(x - s))$$

Böylece

$$proj_S(s + t(x - s)) = \{s\}.$$

Aşağıdaki önermenin ilk kısmı proximal normal eşitsizlik diye adlandırılan eşitsizliği verecek; ikinci kısım ise proximal normal koni kavramının yerel özellik olduğunu ifade eder.

ÖNERME 2.9: *a)* $\zeta \in N_S^P(s) \Leftrightarrow \exists \sigma = \sigma(\zeta, s) \geq 0 \ni$

$$\langle \zeta, s' - s \rangle \leq \sigma \|s' - s\|^2 \forall s' \in S$$

b) Ayrıca verilen herhangi bir $\delta > 0$ için

$$\zeta \in N_S^P(s) \Leftrightarrow \exists \sigma = \sigma(\zeta, s) \geq 0 \ni \langle \zeta, s' - s \rangle \leq \sigma \|s' - s\|^2 \ \forall s' \in S \cap B(s, \delta)$$

Kanıt: *a)* : $\zeta \in N_S^P(s)$ olsun. O zaman Sonuç 2.6' dan

$$\zeta \in N_S^P(s) \Leftrightarrow \exists t > 0 \ni d_S(s + t\zeta) = t\|\zeta\|$$

dir. Bu durumda Önerme 2.5' den

$$\Leftrightarrow \ \forall s' \in S \text{ için } \langle \zeta, s' - s \rangle \leq \frac{1}{2}\|s' - s\|^2$$
$$\Leftrightarrow \ \sigma = \frac{1}{2} \text{ seçilirse } \langle \zeta, s' - s \rangle \leq \sigma \|s' - s\|^2 \forall s' \in S$$

b) $(\Rightarrow)$ a) şıkkından açıktır.

$(\Leftarrow)$ $x \notin S$, $s \in proj_S(x)$, $S^\star = S \cap \overline{B}(s, \delta)$ olsun. $S^\star \subset S$ olduğundan

$$d_S(x) \leq d_{S^\star}(x) \tag{2.9.1}$$

olduğu açıktır. $s \in proj_S(x)$ olduğundan $d_S(x) = \|x - s\|$. O halde

$$d_{S^\star}(x) = \inf_{s_\star \in S^\star} \|x - s_\star\| \leq \|x - s\| = d_S(x)$$

olup; buradan

$$d_{S^\star}(x) \leq d_S(x) \tag{2.9.2}$$

elde edilir. 2.9.1 ve 2.9.2' den

$$d_{S^\star}(x) = d_S(x) \tag{2.9.3}$$

elde edilir. Şimdi $S \cap \overline{B}(s, \delta) = S^\star$ olmak üzere $\forall s' \in S^\star$ ve $\exists \sigma = \sigma(\zeta, s) \geq 0$ için

$$\langle \zeta, s' - s \rangle \leq \sigma \|s' - s\|^2$$

olsun. Buradan $\forall s' \in S^\star$ için

$$\left\langle \frac{\zeta}{2\sigma}, s' - s \right\rangle \leq \frac{1}{2} \|s' - s\|^2$$

olur. Önerme 2.5 ($c \Leftrightarrow d$) gereğince $\forall t \in [0, 1]$ için

$$d_{S^\star}\left(s + t\frac{\zeta}{2\sigma}\right) = \frac{t}{2\sigma} \|\zeta\|$$

elde edilir.

$$d_{S^\star}\left(s + t\frac{\zeta}{2\sigma}\right) = d_S\left(s + t\frac{\zeta}{2\sigma}\right) \forall t \in [0, 1]$$

olduğunu kanıtladık. Böylece $\forall t \in [0, 1]$ için

$$d_S\left(s + t\frac{\zeta}{2\sigma}\right) = \frac{t}{2\sigma} \|\zeta\|$$

olur ki buradan Sonuç 2.6' yı kullanarak

$$\frac{t}{2\sigma}\zeta \in N_S^P(s)$$

elde edilir. Bu

$$\zeta \in N_S^P(s)$$

demektir.

Proximal normal koni $N_S^P(s)$ konveks bir kümedir; açık yada kapalı olmak zorunda değildir. S kapalı ve $s \in \partial S$ olsa bile açık $N_S^P(s)$ aşikar koni olabilir.

ÖRNEK 2.10: $S \subset \mathbb{R}^n$ kapalı kümesi ve $s \in \partial S$ olsun.

$$S := \{(x,y) \in R^2 : y \geq -|x|\}$$

kümesini düşünelim. Bu durumda $N_S^P((0,0)) = \{(0,0)\}$ dır.

Çözüm:

Herhangi bir $A(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ alalım. $d_S((x_0, y_0)) = |AB| < |OA|$ olacaktır. $|OA| = \|(x_0, y_0)\|$ olduğundan

$$d_S((x_0, y_0)) < \|(x_0, y_0)\| = d((x_0, y_0), (0,0))$$

Buradan $(0,0) \notin proj_S((x_0, y_0))$ olur. $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ keyfi bir nokta olduğundan $(0,0) \in proj_S(x_0, y_0)$ olacak şekilde hiçbir $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ noktası bulunamaz. O zaman

$$N_S^P((0,0)) = \{(0,0)\}$$

olur.

TANIM 2.11: Herbir $i = 1, 2, 3, .., k$ için $h_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu C^1 sınıfından bir olmak üzere

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n : h_i(x) = 0; i = 1, 2, ..., k\}$$

kümesini tanımlayalım. $\forall s \in S$ için $\{\nabla h_i(s) : i = 1, 2, .., k\}$ vektörler kümesi doğrusal bağımsız ise o zaman S kümesi boyutu $n - k$ olan bir C^1 manifolddur.

ÖNERME 2.12: S kümesi yukarıda tanımlanan $n-k$ boyutlu bir C^1 manifold olsun. O zaman;

$a)$ $N_S^P(s) \subset span\{\nabla h_i(s) : i = 1,2,...,k\}$

$b)$ Her $i = 1,2,...,k$ için h_i 'ler C^2 sınıfından iseler $N_S^P(s) = span\{\nabla h_i(s)\}$

Kanıt:$a)$ $\zeta \in N_S^P(s)$ olsun. Bu durumda Önerme 2.9 a) şıkkına göre $\exists\sigma > 0 \ni \forall s' \in S$ *için*

$$\langle \zeta, s' - s\rangle \leq \sigma \|s' - s\|^2$$

olur. Bu s noktasının

$$\begin{array}{ccc} f & : & S \to \mathbb{R} \\ s' & \longrightarrow & \langle -\zeta, s'\rangle + \sigma\|s' - s\|^2 \end{array}$$

olarak tanımlanan f fonksiyonunun minimumu olduğunu söylemeye denk bir koşuldur. Gerçekten; $\forall s' \in S$ için

$$f\left(s'\right) = \langle -\zeta, s'\rangle + \sigma\|s' - s\|^2$$

olmak üzere

$$f(s) = \langle -\zeta, s\rangle + \sigma\|s - s\|^2 \leq f\left(s'\right)$$

olduğunu verir. Bu $i = 1,2,....,k$ için $h_i(s') = 0$ koşulları altında $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun minimuma sahip olması demektir ki Lagrange çarpanları kuralına göre $\zeta \in N_S^P(s)$' nin $\zeta = \sum_i \mu_i \nabla h_i(s)$ olan $\{\mu_i : i = 1,2,...,k\} \subseteq \mathbb{R}$ olmasını gerektirir. Böylece

$$N_S^P(s) \subset span\{\nabla h_i(s) : i = 1,2,..,k\} \tag{2.12.1}$$

olur.

$b)$ $a)$ şıkkından $N_S^P(s) \subset span\{\nabla h_i(s)\}$ olduğunu biliyoruz.

Şimdi $\forall i = 1,2,...,k$ için h_i fonksiyonları C^2 sınıfından olduğunda $span\{\nabla h_i(s) : i = 1,2,..,k\} \subset N_S^P(s)$ olduğunu görelim.

$\zeta \in span\{\nabla h_i(s) : i = 1, 2, .., k\}$ vektörü alalım. $\zeta = \sum\limits_i \mu_i \nabla h_i(s)$ biçimindedir. $\sum\limits_i \mu_i \nabla^2 h_i(s) + 2\sigma I > 0$ olmak üzere $\sigma > 0$ için C^2 sınıfından olan

$$g(x) = \langle -\zeta, x\rangle + \sum_i \mu_i h_i(x) + \sigma \|x - s\|^2$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada I matrisi $(n \times n)$ boyutlu birim matristir.

$$\begin{aligned}
\nabla g(x) &= \nabla\left(\langle -\zeta, x\rangle + \sum_{i=1}^{k} \mu_i h_i(x) + \sigma \|x - s\|^2\right) \\
&= \nabla(\langle -\zeta, x\rangle) + \nabla\left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i h_i(x)\right) + \nabla\left(\sigma \|x - s\|^2\right) \\
&= -\zeta + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \nabla h_i(x) + 2\sigma(x - s)
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\nabla g(s) &= -\sum_i \mu_i \nabla h_i(s) + \sum_i \mu_i \nabla h_i(s) + 2\sigma(s - s) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla^2 g(x) &= \nabla(\nabla g(x)) \\
&= \nabla\left(-\zeta + \sum_i \mu_i \nabla h_i(x) + 2\sigma(x - s)\right) \\
&= \sum_i \mu_i \nabla^2 h_i(x) + 2\sigma I \\
\nabla^2 g(s) &= \sum_i \mu_i \nabla^2 h_i(s) + 2\sigma I > 0
\end{aligned}$$

olduğundan s noktası g' yi yerel minimum yapan noktadır. Sonuç olarak s' nin komşuluğunda olan ve herbir i için $h_i(s') = 0$ olan s'' ler için

$$g(s') = \langle -\zeta, s'\rangle + \sigma \|s' - s\|^2 \geq g(s) = \langle -\zeta, s\rangle$$

ve böylece $\forall s' \in S \cap B(s, r)$ için

$$\langle \zeta, s' - s\rangle \leq \sigma \|s' - s\|^2$$

olur. Buradan

$$\zeta \in N_S^P(s)$$

elde edilir. Böylece

$$span\{\nabla h_i(s) : i = 1, 2, .., k\} \subset N_S^P(s) \tag{2.12.2}$$

olur. Dolayısıyla 2.12.1 ve 2.12.2 kapsamlarından

$$N_S^P(s) = span\{\nabla h_i(s)\}$$

elde edilir.

Önerme 2.12' de proximal normal kavramının diferansiyel geometride tanımlanan bir C^2 manifoldun bir normal yönünü genelleştirdiğini görmüş olduk.

Şimdi de proximal normal kavramının konveks analiz içinde geçen normal vektörü genelleştirdiğini görelim.

ÖNERME 2.13: X bir Hilbert uzay, $S \subset X$ kapalı ve konveks bir küme olsun. Bu durumda

$a)$ $\zeta \in N_S^P(s) \Leftrightarrow \langle \zeta, s' - s \rangle \leq 0 \; \forall s' \in S$

$b)$ X sonlu boyutlu ve $s \in \partial(S)$ ise o zaman $N_S^P(s) \neq \{0\}$

İspat: $a)$ $(\Leftarrow)$ $\forall s' \in S$ için

$$\langle \zeta, s' - s \rangle \leq 0$$

olsun. $\sigma > 0$ ne olursa olsun $\sigma \|s' - s\|^2 > 0$ olacaktır. Böylece $\forall s' \in S$ ve $\sigma > 0$ için

$$\langle \zeta, s' - s \rangle \leq \sigma \|s' - s\|^2$$

eşitsizliği geçerli olur. Önerme 2.9'dan $\zeta \in N_S^P(s)$ olur.

$(\Rightarrow)$ $\zeta \in N_S^P(s)$ olsun ve herhangi bir $s' \in S$ için S konveks olduğundan her $t \in (0, 1)$ için

$$\widetilde{s} = s + t(s' - s) = ts' + (1 - t)s \in S \tag{2.13.1}$$

olur. Bu $\widetilde{s}$' ya proximal normal eşitsizliği uygularsak $\exists\sigma > 0$ ve $\forall\widetilde{s} \in S$ için

$$\left\langle \zeta, \widetilde{s} \right\rangle \leq \sigma \left\| \widetilde{s} - s \right\|^2$$

olur. Buradan aynı $\sigma > 0$ ve $\forall s' \in S$ için

$$\langle \zeta, t\,(s' - s) \rangle \leq \sigma \left\| t\,(s' - s) \right\|^2$$

olur. Her iki yandan t' ler kısaltılıp eşitsizliğin sağ yanındaki t 0' a yaklaştırılırsa $\forall s' \in S$ için

$$\langle \zeta, s' - s \rangle \leq 0$$

olur. Bu da istenendir.

(b) X sonlu boyutlu olsun ve $s \in \partial S$ alalım. Herbir i için $N_S^P(s_i) \neq \{0\}$ olan $s_i \in S$' lerden oluşan ve s' ye yakınsak olan bir $\{s_i\}$ bir dizisi alalım. $\forall i$ için $N_S^P(s_i) \neq \{0\}$ olduğundan $\exists\zeta_i \in N_S^P(s_i) \ni \|\zeta_i\| = 1$ (gerekirse alt diziye geçerek) $\zeta_i \longrightarrow \zeta$ olduğunu varsayalım. $\|\zeta\| = 1$ olacaktır. $a)$ şıkkından $\forall s' \in S$ için

$$\langle \zeta_i, s' - s \rangle \leq 0$$

olur.Buradan $i \longrightarrow \infty$ iken $\forall s' \in S$ için

$$\langle \zeta, s' - s \rangle \leq 0$$

elde edilir. O halde $\zeta \in N_S^P(s)$ dir.

TANIM 2.14: $a)$ X bir Hibert uzay ve $0 \neq \zeta \in X$ ve $r \in \mathbb{R}$ olsun.

$$H = \{x \in X : \langle \zeta, x \rangle = r\}$$

kümesine normal vektörü ζ olan bir hiperdüzlem ve

$$\{x \in X : \langle \zeta, x \rangle \leq r\}$$

kümesine H hiperdüzlemine karşılık gelen bir yarı uzay denir.

Önerme 2.13.b) sonlu boyutlu bir uzay içindeki konveks kümenin herbir sınır noktasında bir hiperdüzlemin var olduğunu ve bu kümenin sınır noktalarındaki hiperdüzlemlerin belirlediği yarı uzay içinde kaldığını verir. Bu bir ayırma teoremidir.

3. PROXİMAL SUBGRADİENTLER VE DİFERANSİYELLER

Proximal subgradientlere geçmeden önce İntegrasyon ve Optimizasyon teorilerinde sıklıkla kullanılan $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ fonksiyonu ile ilgili kullanacağımız bazı tanımları ve bu tür fonksiyonların özelliklerini veren önermeler verelim.

TANIM 3.1: X bir Hilbert uzay olmak üzere $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ fonksiyonu verilsin.

$$dom f := \{x \in X : f(x) < \infty\}$$

kümesine f' in tanım kümesi denir.

$$graph f := \{(x, f(x)) : x \in dom f\}$$

kümesine f' in grafiği denir.

$$epi f := \{(x, r) \in dom f \times R : r \geq f(x)\}$$

kümesine f' in epigrafı denir.

TANIM 3.2: $a)$ X bir Hilbert uzay ve $x_0 \in X$ olsun.

$a)$ $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ noktası verilsin.

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{\delta > 0} \inf_{x \in B(x_0; \delta)} f(x)$$

sayısına $x \to x_0$ iken f fonsiyonunun alt limiti denir.

$b)$ Benzer şekilde $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ noktası verilsin.

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \inf_{\delta > 0} \sup_{x \in B(x_0; \delta)} f(x)$$

sayısına $x \to x_0$ iken f fonsiyonunun üst limiti denir.

$c)$ $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ noktası verilsin. Eğer f fonksiyonu

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

koşulunu sağlıyorsa $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ fonksiyonuna $x_0 \in X$ noktasında alttan yarı süreklidir denir.

$d)$ $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ noktası verilsin. Eğer f fonksiyonu

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

koşulunu sağlıyorsa x_0 da üstten yarı sürekli olarak adlandırılır.

$e)$ $U \subset X$ olsun. $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ $(f : X \to [-\infty, +\infty))$ ve $dom f \cap U \neq \emptyset$ olmak üzere f U 'nun herbir noktasında alttan yarı sürekli (üstten yarı sürekli) ise f 'ye U üzerinde alttan yarı süreklidir (üstten yarı süreklidir) denir.

$f)$ $U \subset X$ üzerindeki alttan yarı sürekli fonksiyonların ailesini $\mathcal{F}(U)$ ile göstereceğiz. Özel olarak $U = X$ ise bu aileyi $\mathcal{F}(X)$ ya da kısaca $\mathcal{F}$ ile göstereceğiz.

ÖNERME 3.3: X bir Hilbert uzay ve $x_0 \in X$ olsun.

$a)$ $f : X \to [-\infty, +\infty)$ fonksiyonu $x_0 \in X$ de üstten yarı süreklidir.$\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0$ için

$$x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

gerektirmesini sağlayan ε' a ve x_0' a bağlı bir $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

$b)$ $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ fonksiyonu $x_0 \in X$ 'de alttan yarı süreklidir.

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 \ni \forall x \in B(x; \delta) \text{ için } f(x) > f(x_0) - \varepsilon$$

olur.

Kanıt: $a)$ $(\Rightarrow)$ f x_0 noktasında üstten yarı sürekli olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Üstten yarı sürekli fonksiyon tanımı gereği

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

olur. limsup tanımı gereği de

$$\inf_{\delta > 0} \sup_{x \in B(x_0; \delta)} f(x) \leq f(x_0)$$

yazabiliriz. Verilen $\varepsilon > 0$ için infimum tanımı gereği bir δ_ε sayısı

$$\sup_{x\in B(x_0;\delta_\varepsilon)} f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

olacak şekilde vardır. Buradan verilen $\varepsilon > 0$ için

$$x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

gerektirmesini sağlayan $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı bulunmuş olur.

($\Leftarrow$) Tersine verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

koşulunu sağlayacak şekilde ε' a bağlı bir $\delta > 0$ var olsun. Bu durumda

$$\sup_{x\in B(x_0;\delta)} f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

yazılabilir. Her iki taraftan δ' lar üzerinden infimum alınırsa üst sınır sabit olduğundan eşitsizlik korunur.

$$\inf_{\delta>0} \sup_{x\in B(x_0;\delta)} f(y) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan limsup tanımı kullanılırsa

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

elde edilir.

b) ($\Rightarrow$) f $x_0 \in X$ noktasında alttan yarı sürekli olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Alttan yarı sürekli fonksiyon tanımı gereğince

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

olur. liminf tanımı gereği de $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_{\delta>0} \inf_{x\in B(x_0;\delta)} f(x) \geq f(x_0)$$

olacak biçimde $\delta > 0$ vardır. Verilen $\varepsilon > 0$ için *sup* tanımından bir $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı

$$\inf_{x \in B(x_0;\delta_\varepsilon)} f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

olacak şekilde vardır. Buradan verilen $\varepsilon > 0$ için

$$x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon$$

gerektirmesini sağlayan $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı bulunmuş olur.

($\Leftarrow$) Benzer şekilde yapılır.

ÖNERME 3.4: X bir Hilbert uzay olsun. $f(.) : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $x \in X$ de alttan yarı süreklidir $\Leftrightarrow$ $-f(.) : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ $x \in X$ de üstten yarı süreklidir.

Kanıt: $x_0 \in X$ noktası alalım. $f(.) : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $x_0 \in X$ de alttan yarı sürekli olsun.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0) \\
&\Leftrightarrow \sup_{\delta > 0} \inf_{x \in B(x_0;\delta)} f(x) \geq f(x_0) \\
&\Leftrightarrow -\sup_{\delta > 0} \inf_{x \in B(x_0;\delta)} f(x) \leq -f(x_0) \\
&\Leftrightarrow \inf_{\delta > 0} \sup_{x \in B(x_0;\delta)} (-f(x)) \leq -f(x_0) \\
&\Leftrightarrow \limsup_{x \to x_0} -f(x) \leq -f(x_0) \\
&\Leftrightarrow -f(.) : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \ x_0 \in X \text{ de üstten yarı süreklidir.}
\end{aligned}$$

Bu durum her $x_0 \in X$ için sağlanacağından istenen elde edilmiş olur.

TANIM 3.5: X bir Hilbert uzay; $x_0 \in X$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$x \in B(x_0; \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gerektirmesini sağlayan ε' a bağlı bir $\delta > 0$ sayısı varsa f' ye x_0 noktasında süreklidir denir.

ÖNERME 3.6: X bir Hilbert uzay; $x_0 \in X$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$f \ x_0 \text{ noktasında süreklidir} \Leftrightarrow f \ x_0 \text{ noktasında hem alttan hem de üstten yarı süreklidir.}$$

Kanıt: $(\Rightarrow)$ f x_0 da sürekli olsun. O zaman $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ öyle ki

$$x \in B(x_0;\delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} -\varepsilon &< f(x) - f(x_0) < \varepsilon \\ f(x_0) - \varepsilon &< f(x) < f(x_0) + \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizliği bu $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon \tag{3.6.1}$$

ve

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \tag{3.6.2}$$

şeklinde yazabiliriz.

Buradan 3.6.1' den f' in x_0 noktasında alttan yarı sürekli; 3.6.2' den x_0 noktasında üstten yarı sürekli olduğu sonucunu çıkarırız.

$(\Leftarrow)$ f x_0 da hem alttan hem de üstten yarı sürekli olsun. O halde $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta_1 > 0 \ni \forall x \in B(x_0;\delta_1)$ için

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon \tag{3.6.3}$$

ve yine $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta_2 > 0 \ni \forall x \in B(x_0;\delta_2)$ için

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \tag{3.6.4}$$

olur. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ seçersek ve 3.6.3 ve 3.6.4' ü kullanırsak

$$\begin{aligned} f(x_0) - \varepsilon &< f(x) < f(x_0) + \varepsilon \\ -\varepsilon &< f(x) - f(x_0) < \varepsilon \\ |f(x) - f(x_0)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde f x_0 da süreklidir.

TANIM 3.7: X bir Hilbert uzay, $S \subset X$ olsun.

$$I_S : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\,; I_S(x) := \begin{cases} 0; & x \in S \\ +\infty; & \textit{diğer} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $I_S(.)$ veya $I(., S)$ fonksiyonuna S' nin indikatör fonksiyonu denir.

TANIM 3.8: X bir küme ve $U \subset X$ konveks küme olsun. $\forall x, y \in U$ ve $\forall t \in (0,1)$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

koşulunu sağlayan $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ fonksiyonuna U üzerinde konveks fonksiyon denir. Özel olarak $U = X$ ise f' ye kısaca konveks fonksiyon denir.

Yukarıdaki tanıma göre bir konveks fonksiyonun tanım kümesinin konveks olması gerekir.

Şimdi alttan yarı sürekli ve konveks fonksiyonların bazı özelliklerini verelim. Aşağıdaki ilk iki önerme alttan yarı sürekli fonksiyonlar için grafik yerine epigraf' larının analizde neden daha önemli yere sahip olduğunu verecektir.

ÖNERME 3.9: X bir Hilbert uzay ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

$a)$ f fonksiyonu X üzerinde alttan yarı süreklidir.

$b)$ $epif$ kümesi $X \times \mathbb{R}$ içinde kapalıdır.

$c)$ $\forall r \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((-\infty, r]) = \{x : f(x) \leq r\}$ $r-$seviye kümesi kapalıdır.

Kanıt: $a) \Rightarrow b)$ f x' de alttan yarı sürekli olsun . $epif$' in kapalı olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\forall (x_k, r_k) \in epif$ için $(x_k, r_k) \longrightarrow (x_0, r_0)$ iken $(x_0, r_0) \in epif$ olduğunu göstermeliyiz.

$(x_k, r_k) \in epif$ olsun. $epif$' in tanımından

$$f(x_k) \leq r_k$$

olur. $a)$ gereği f fonksiyonu X' de alttan yarı sürekli olduğundan özel olarak $x_0 \in X$' de alttan yarı süreklidir. Buradan

$$\begin{aligned} f(x_0) &\leq \liminf_{x \to x_0} f(x) \\ &\leq \liminf_{k \to \infty} f(x_k) \\ &\leq \liminf_{k \to \infty} r_k \\ &= \lim_{k \to \infty} r_k = r_0 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece

$$f(x_0) \leq r_0$$

elde edilir. Bu $(x_0, r_0) \in epif$ demektir. $epif \subset X \times \mathbb{R}$ kapalıdır.

$b) \Rightarrow c)$ $epif$ kapalı olsun. $\forall r \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((-\infty, r]) = \{x : f(x) \leq r\}$ kümesinin kapalı olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\forall r \in \mathbb{R}$ için $x_k \in \{x : f(x) \leq r\}$ olmak üzere $x_k \longrightarrow x_0$ olan bir $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi alalım. $x_0 \in \{x : f(x) \leq r\}$ olduğunu göstermeliyiz. $x_k \in \{x : f(x) \leq r\}$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için

$$f(x_k) \leq r$$

olur. $Epif$' in tanımından $\forall k$ için $(x_k, r) \in epif$ dir. Böylece $epif$ içinde $k \to \infty$ $(x_k, r) \to (x_0, r)$ olan bir $\{(x_k, r)\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi bulunmuş olur. Hipotez gereği $epif$

kapalı olduğundan $(x_0, r) \in epif$ dir. Diğer bir deyişle

$$f(x_0) \leq r$$

dir. Böylece $x_0 \in f^{-1}((-\infty, r])$ olur. $f^{-1}((-\infty, r]) = \{x : f(x) \leq r\}$ r-seviye kümesi kapalı kümedir.

$c) \Rightarrow a)$ Herhangi bir $x_0 \in X$ ve $f(x_0) > r$ olmak üzere $r \in \mathbb{R}$ alalım. O zaman $x_0 \notin f^{-1}((-\infty, r]) = \{x : f(x) \leq r\}$ dir. $f^{-1}((-\infty, r])$ kapalı olduğundan en az bir $\delta > 0$ için

$$B(x_0; \delta) \cap f^{-1}((-\infty, r]) = \emptyset$$

olur. Buradan her $x \in B(x_0; \delta)$ için

$$x \notin f^{-1}((-\infty, r]) = \{x : f(x) \leq r\}$$

olur ki bu $x \in B(x_0; \delta)$ iken $f(x) > r$ olması demektir. Bu f' nin x_0' da alttan yarı sürekli olmasını verecektir. Gerçekten; $\varepsilon > 0$ için $r = f(x_0) - \varepsilon$ alırsak

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x_0)$$

dır. $r_\varepsilon = f(x_0) - \varepsilon$ dersek bu r_ε' a bağlı bir $\delta_{r_\varepsilon} > 0$ vardır dolayısıyla ε' a bağlı bir $\delta_{r_\varepsilon} > 0$ vardır öyle ki

$$x \in B(x_0; \delta_{r_\varepsilon}) \text{ iken } f(x) > r_\varepsilon = f(x_0) - \varepsilon$$

olur.

ÖRNEK 3.10:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = \begin{cases} 1 & ; x < 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$$

fonksiyonu alttan yarı süreklidir; ancak grafiği kapalı değildir.

Çözüm: Gerçekten;

$\liminf\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ olduğundan f fonksiyonu 0 noktasında alttan yarı süreklidir. Diğer noktalarda hem alttan hem de üstten yarı süreklidir.

Ancak $\left\{\left(\frac{1}{n}, 2\right)\right\}_{n \in \mathbb{N}} \subset graph(f)$ dir. Çünkü $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f\left(\frac{1}{n}\right) = 2$ dir; fakat $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n}, 2\right) = (0, 2) \notin graph(f)$ dir. f' in grafiği kapalı değildir.

ÖNERME 3.11: X bir Hilbert uzay ve $f : X \to (-\infty, +\infty]$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda

f fonksiyonu X üzerinde konvekstir $\Leftrightarrow$ $epif$ kümesi $X \times \mathbb{R}$' nin konveks alt kümesidir

Kanıt: $(\Rightarrow)$ f X üzerinde konveks fonksiyon olsun. $epif$ 'in $X \times \mathbb{R}$ de konveks olduğunu göstereceğiz. Bunun için

$(x, r_1) \in epif$, $(y, r_2) \in epif$ iken $\forall t \in [0,1]$ için

$$t(x, r_1) + (1-t)(y, r_2) = (tx + (1-t)y, tr_1 + (1-t)r_2) \in epif$$

olduğunu göstermeliyiz. $(x, r_1), (y, r_2) \in epif$ olsun.O halde epif tanımından

$$f(x) \leq r_1 \text{ ve } f(y) \leq r_2$$

dir. $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$tf(x) \leq tr_1 \text{ ve } (1-t)f(y) \leq (1-t)r_2$$

olur. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$tf(x) + (1-t)f(y) \leq tr_1 + (1-t) \tag{3.11.1}$$

bulunur. Diğer taraftan f konveks olduğundan $t \in [0,1]$ ve $x, y \in X$ için

$$f(tx + (1-ty)) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{3.11.2}$$

dir. Böylece 3.11.1 ve 3.11.2 eşitsizliklerinden

$$f(tx + (1-t)y) \leq tr_1 + (1-t)r_2$$

elde edilir. Bu $\forall t \in [0,1]$ ve $(x, r_1), (y, r_2) \in epif$ için

$$t(x, r_1) + (1-t)(y, r_2) = (tx + (1-t)y, tr_1 + (1-t)r_2) \in epif$$

olması demektir. O halde epif konvekstir.

($\Leftarrow$) $epif$ konveks olsun f' in konveks olduğunu göstereceğiz. $t \in [0,1]$ ve $x, y \in X$ alalım. $(x, f(x)), (y, f(y)) \in grf \subset epif$ dir. $epif$ konveks olduğundan

$$t(x, f(x)) + (1-t)(y, f(y)) \in epif$$

dir. O halde

$$(tx + (1-t)y, tf(x) + (1-t)f(y)) \in epif$$

olur. Buradan her $t \in [0,1]$ ve her $x, y \in X$ için

$$f(tx + (1-ty)) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

olur ki bu f' in konveks olması demektir.

ÖNERME 3.12: X bir Hilbert uzay, $S \subset X$ ve I_S indikatör fonksiyonu olsun.

$a)$ I_S indikatör fonksiyonu alttan yarı süreklidir $\Leftrightarrow$ S boştan farklı ve kapalıdır.

$b)$ I_S indikatör fonksiyonu konvekstir $\Leftrightarrow$ S konvekstir.

Kanıt: $a)$ ($\Rightarrow$) I_S alttan yarı sürekli olsun. Bu durumda $\forall r \in \mathbb{R}$ için

$$I_S^{-1}((-\infty, r]) = \{x : f(x) \leq r\}$$

kapalıdır. Özel olarak $r = 0$ alınırsa

$$I_S^{-1}((-\infty, 0]) = \{x : f(x) \leq 0\} = S$$

kümesi kapalıdır.

($\Leftarrow$) $S \neq \emptyset$ ve kapalı olsun. $\forall r \in \mathbb{R}$ için

$$\{x : f(x) \leq r\} = \begin{cases} S & ; r \geq 0 \\ \emptyset & ; r < 0 \end{cases}$$

S ve $\emptyset$ kapalı kümeler olduğundan I_S alttan yarı süreklidir.

$b)$ ($\Rightarrow$) I_S konveks olsun. S' nin konveks olduğunu göstereceğiz. Bunun için $x, y \in S$ ve $t \in [0,1]$ alalım. I_S konveks olduğundan

$$0 \leq I_S(tx + (1-t)y) \leq tI_S(x) + (1-t)I_S(y) = 0$$

O halde $I_S(tx + (1-t)y) = 0$ ve dolayısıyla $tx + (1-t)y \in S$ olur.

$(\Leftarrow)$ Tersine S konveks olsun. $x, y \in X$ ve $t \in [0,1]$ olsun. $x, y \in S$ ise $tx+(1-t)y \in S$ dir. I_S' nin tanımı gereği

$$0 = I_S(tx + (1-t)y) \leq tI_S(x) + (1-t)I_S(y)$$

olur. x ya da y S' ye ait değilse

$$tI_S(x) + (1-t)I_S(y) = +\infty$$

olacağından

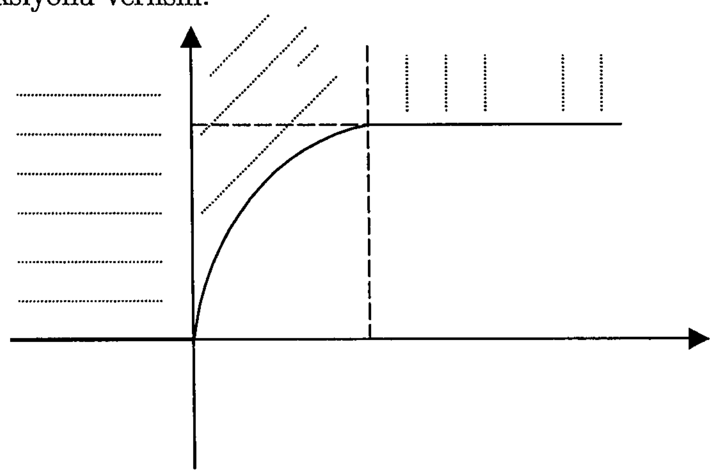
$$I_S(tx + (1-t)y) \leq tI_S(x) + (1-t)I_S(y)$$

eşitsizliği her zaman doğrudur. I_S konveks fonksiyondur.

ÖRNEK 3.13: X bir Hilbert uzay. ve $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & ; x \geq 2 \\ \sqrt{4-(x-2)^2} & ; x \in [0,2) \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonu verilsin.



Şekil 3.1: f fonksiyonunun grafiği

f fonksiyonu süreklidir.

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,r) \in (-\infty,0) \times \mathbb{R} : f(x) = 0 \leq r\} \\ S_2 &= \left\{(x,r) \in [0,2) \times \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{4-(x-2)^2} \leq r\right\} \\ S_3 &= \{(x,r) \in [2,+\infty] \times \mathbb{R} : f(x) = 2 \leq r\} \end{aligned}$$

olmak üzere $epif = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ dür. Bu durumda

$$d_{epif}((1,0)) = \min\{d_{S_i}((1,0)) : i = 1,2,3\}$$

dir.

$$\begin{aligned} d((1,0),S_1) &= \inf_{(x,r)\in S_1} \|(1,0)-(x,r)\| \\ &= \inf_{(x,r)\in(-\infty,0)\times[0,\infty)} \sqrt{(x-1)^2+r^2} \\ &= \sqrt{(0-1)^2+0^2} = 1 = d((1,0),(0,0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d((1,0),S_2) &= \inf_{(x,r)\in S_2} \|(1,0)-(x,r)\| \\ &= \inf_{(x,r)\in[0,2)\in\times\mathbb{R}:\sqrt{4-(x-2)^2}\leq r} \sqrt{(x-1)^2+r^2} \\ &= \inf_{x\in[0,2)} \sqrt{(x-1)^2+4-(x-2)^2} \\ &= \inf_{x\in[0,2)} \sqrt{2x+1} = 1 = d((1,0),(0,0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d((1,0),S_3) &= \inf_{(x,r)\in S_3} \|(1,0)-(x,r)\| \\ &= \inf_{(x,r)\in(2,\infty]\times[2,\infty)} \sqrt{(x-1)^2+r^2} \\ &= \inf_{(x,r)\in(2,\infty]\times[2,\infty)} \sqrt{(x-1)^2+r^2} = \sqrt{5} = d((1,0),(2,2)) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$d((1,0),epif) = \min\left\{1,1,\sqrt{5}\right\} = 1 = d((1,0),(0,0))$$

olduğundan $(1,0) \in N^P_{epif}((0,0))$ olur.

ÖNERME 3.14: X bir Hilbert uzay; $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $S = epif$ olsun. Bu durumda

$$d_S : X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; d_S(x, r) = \inf_{(y,\alpha) \in epif} \|(x, r) - (y, \alpha)\|$$

seçildikten sonra sabitlenen herbir $x \in X$ için artmayan bir fonksiyondur.

Kanıt: $x \in \mathbb{R}^n$ alalım ve sabitleyelim.

$$\begin{aligned} d_S((x,.)) &: X \to \mathbb{R}^+ \\ r &\to d_S((x,r)) \end{aligned}$$

fonksiyonunun artmayan olduğunu göstereceğiz.

$\forall \lambda > 0$ için $d_S(x,r) \geq d_S(x, r+\lambda)$ olduğunu kanıtlayalım.

$$d_S((x,r)) = \inf_{(y,\alpha)\in epif} \|(x,r)-(y,\alpha)\|$$

olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için infimum tanımı gereği

$$\|(x,r)-(y_n,\alpha_n)\| < d_S((x,r)) + \frac{1}{n}$$

olacak şekilde en az bir $(y_n, \alpha_n) \in epif$ vardır. $epif$ tanımı gereği

$$f(y_n) \leq \alpha_n.$$

olur. $\forall \lambda > 0$ alalım ve sabitleyelim. O zaman

$$f(y_n) < \alpha_n + \lambda$$

olur. Buradan $(y_n, \alpha_n + \lambda) \in epif$ elde edilir.

$$\begin{aligned} d_S(x, r+\lambda) &= \inf_{(y,\alpha)\in epif} \|(x,r+\lambda)-(y,\alpha)\| \\ &\leq \|(x,r+\lambda)-(y_n,\alpha_n+\lambda)\| \\ &= \sqrt{\|x-y_n\|^2 + (r+\lambda-(\alpha_n+\lambda))^2} \\ &= \sqrt{\|x-y_n\|^2 + (r-\alpha_n)^2} \\ &= \|(x,r)-(y_n,\alpha_n)\| \\ &\leq d_S(x,r) + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ için bu doğru olduğundan

$$d_S((x,r+\lambda)) \leq d_S((x,r)) \tag{3.14.1}$$

olur. $d_S((x,.))$ fonksiyonu r' ye göre artmayandır. Bunu daha açık olarak şöyle ifade edebiliriz:

$r_1 < r_2$ olduğunda $d_S((x,r_2)) \leq d_S((x,r_1))$ olduğunu görmek istiyoruz. Her $r \in \mathbb{R}$ ve $\lambda > 0$ için

$$d_S((x,r+\lambda)) \leq d_S((x,r))$$

olduğunu kanıtladık. Özel olarak $r = r_1$ ve $\lambda = r_2 - r_1$ alırsak

$$r_1 < r_1 + \lambda = r_1 + r_2 - r_1 = r_2 \text{ iken } d_S(x,r_2) \leq d_S(x,r_1)$$

olduğundan.

$$d_S(x,r_2) = d_S(x,r_1+\lambda) \leq d_S(x,r_1)$$

olur.

TANIM 3.15: X bir Hilbert uzay.f:$X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu $x \in dom f$ 'de alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun.

$$(\zeta,-1) \in N^P_{epif}(x,f(x))$$

koşulunu sağlayan $\zeta \in X$ vektörüne f fonksiyonunun $x \in dom f$ noktasındaki proximal subgradienti veya P-subgradienti denir. Bu özellikteki tüm ζ vektörlerinin kümesine f fonksiyonunun $x \in dom f$ noktasındaki proximal subdiferansiyeli veya P-subdiferansiyeli denir ve bu küme $\partial_P f(x)$ ile gösterilir.

Tanım ve $N^P_{epif}(x,f(x))$' in koni olduğunu düşünerek

$$\forall\lambda > 0 \text{ için } (\zeta,-\lambda) \in N^P_{epif}(x,f(x)) \text{ ise } \frac{\zeta}{\lambda} \in \partial_P f(x)$$

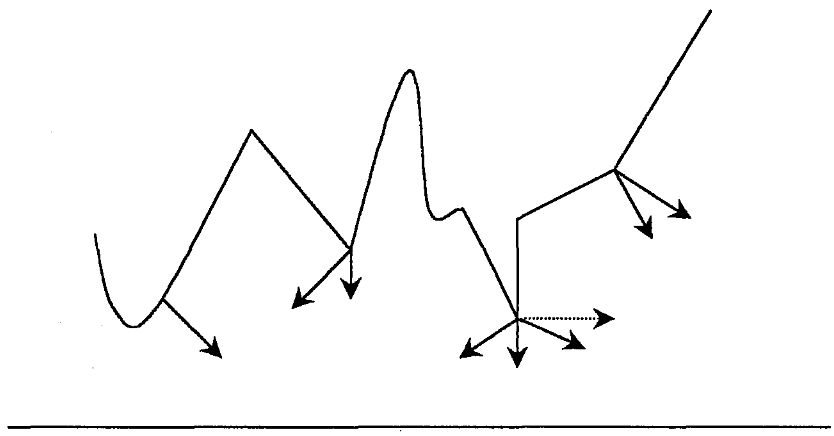
olacağını söyleyebiliriz.

Bir f fonksiyonunun herhangi bir noktada proximal subgradienti olmayabilir.

ÖRNEK 3.16: $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -|x|$ olsun.

$S = epif = \{(x,y) : y \geq -|x|\}$ olmak üzere $N^P_S((0,0)) = \{(0,0)\}$ idi. $(\zeta,-1) \in N^P_S((0,0))$ olan bir ζ yoktur. Bu nedenle $\partial_P f(0) = \emptyset$ olur.

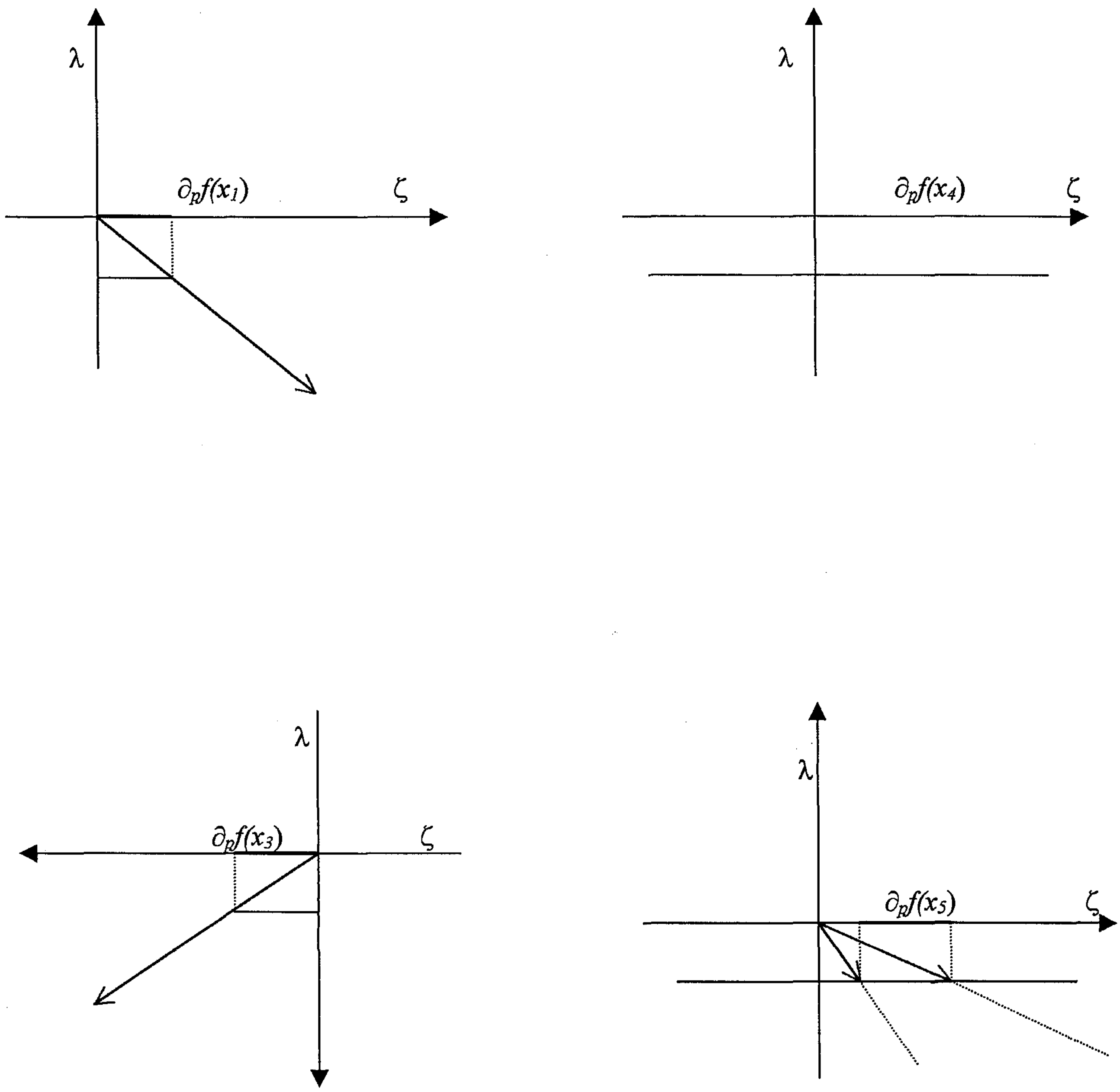
ÖRNEK 3.17: Bir f fonksiyonunun epigrafı aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 3.2: Bir f fonksiyonun epigrafı

Bir f fonksiyonunun epigrafı aşağıdaki şekilde verilmiştir. Verilen noktalardaki proximal subdiferansiyelleri belirleyiniz.

Çözüm: x_1 noktasında tek bir subgradient mevcuttur. Bu, şekilde $(\zeta, -1)$ formunda verilmiş olan ζ vektörüdür. x_2 noktasında hiçbir proximal subgradient yoktur. Çünkü $N_S^P((x_2, f(x_2))) = \{(x_2, f(x_2))\}$ tek nokta kümesidir. Verilen diğer noktalarda ise birden fazla proximal subdiferansiyel vardır. x_4 noktasında proximal subdiferansiyel sınırsız bir kümedir. Yatay nokta nokta çizilen ok epif' in proximal normali ile ifade edilse bile P-subdiferansiyel ile ilgili değildir. Şekil 3.3' de bu noktalardaki proximal subgradientler gösterilmiştir.



Şekil 3.3: Bir f fonksiyonunun proximal subgradientleri

Kümelerle fonksiyonlar arasında geçişi sağlayan yollardan biri indikatör fonksiyondur. Optimizasyonda bu geçiş kullanışlıdır. Örneğin f' in bir $S \subset X$ kümesi üzerinde minimizasyonunu incelemekle $f + I_S$' nin tüm X üzerinde minimizasyonunu aramak aynı şeydir. Bu nedenle aşağıdaki önermeyi vereceğiz.

ÖNERME 3.18: X bir Hilbert uzay, $S \subset X$ kapalı bir küme olmak üzere

$$I_S(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in S \\ +\infty & ; x \notin S \end{cases}$$

olsun. Bu durumda her $x \in S$ için $\partial_P I_S(x) = N_S^P(x)$ olur.

Kanıt: $x \in S$ alalım ve sabitleyelim. $\zeta \in N_S^P(x)$ olsun. Bu durumda her $y \in S$ için

$$\langle \zeta, y - x \rangle \leq \sigma \|y - x\|^2 \tag{3.18.1}$$

olacak biçimde bir $\sigma > 0$ vardır. $x \in S$ olduğundan $I_S(x) = 0$ dır. Diğer taraftan her $y \in X$ için $I_S(y) = 0$ veya $I_S(y) = +\infty$ olacağından 3.18.1 eşitsizliği her $y \in X$ için

$$\langle \zeta, y - x \rangle - I_S(y) + I_S(x) \leq \sigma \left[\|y - x\|^2 + (I_S(y) - I_S(x))^2\right] \tag{3.18.2}$$

biçiminde yazılabilir. Her $y \in X$ ve $\forall r \geq I_S(y)$ için 3.18.2 eşitsizliği

$$\langle \zeta, y - x \rangle - r + I_S(x) \leq \sigma \left[\|y - x\|^2 + (r - I_S(x))^2\right] \tag{3.18.3}$$

olur. Bu eşitsizlikte

$$\|y - x\|^2 + (r - I_S(x))^2 = \|(y, r) - (x, I_S(x))\|^2$$

olduğundan 3.18.3 eşitsizliği her $y \in X$ ve $r \geq I_S(y)$ için yani her $(y, r) \in epiI_S$ için

$$\langle \zeta, y - x \rangle - r + I_S(x) \leq \sigma \|(y, r) - (x, I_S(x))\|^2 \tag{3.18.4}$$

olur. Bu 3.18.4 eşitsizliğinin sol yanı

$$\langle \zeta, y - x \rangle - r + I_S(x) = \langle (\zeta, -1), ((y, r) - (x, I_S(x))) \rangle$$

yazılabileceğinden 3.18.4. eşitsizliği her $(y,r) \in epiI_S$ için

$$\langle (\zeta,-1),((y,r)-(x,I_S(x)))\rangle \leq \sigma \left\|(y,r)-(x,I_S(x))\right\|^2$$

olur ki bu $(\zeta,-1) \in N^P_{epiI_S}(x,I_S(x))$ olması demektir. Buradan $\zeta \in \partial_P I_S(x)$ olur. ζ keyfi seçildiğinden

$$N_S^P(x) \subset \partial_P I_S(x) \tag{3.18.5}$$

bulunur.

Şimdi de ters kapsamı görelim. Herhangi bir $\zeta \in \partial_P I_S(x)$ alalım ve sabitleyelim. Bu durumda $(\zeta,-1) \in N^P_{epiI_S}(x,I_S(x))$ olur. Proximal koni tanımından her $(y,r) \in epiI_S$ için

$$\langle (\zeta,-1),((y,r)-(x,I_S(x)))\rangle \leq \sigma \left\|(y,r)-(x,I_S(x))\right\|^2 \tag{3.18.6}$$

olan bir $\sigma > 0$ sayısı vardır.

$x \in S$ olduğundan $I_S(x) = 0$ olur ve 3.18.6 eşitsizliğinin sağ yanı

$$\left\|(y,r)-(x,I_S(x))\right\|^2 = \left\|y-x\right\|^2 + r^2$$

sol yanı

$$\begin{aligned}\langle (\zeta,-1),((y,r)-(x,I_S(x)))\rangle &= \langle \zeta, y-x\rangle - r + I_S(x)\\ &= \langle \zeta, y-x\rangle - r\end{aligned}$$

olur. O halde 3.18.6 eşitsizliğinden

$$\langle \zeta, y-x\rangle - r \leq \sigma\left[\left\|y-x\right\|^2 + r^2\right] \tag{3.18.7}$$

olur. Her $y \in S$ için $(y,0) \in epiI_S$ olduğundan 3.18.7' den her $y \in S$ için

$$\langle \zeta, y-x\rangle \leq \sigma \left\|y-x\right\|^2$$

bulunur ki bu $\zeta \in N_S^P(x)$ demektir. $\zeta \in \partial_P I_S(x)$ keyfi seçildiğinden

$$\partial_P I_S(x) \subset N_S^P(x) \tag{3.18.8}$$

kapsamı gerçeklenir. 3.18.5 ve 3.18.8' den

$$N_S^P(x) = \partial_P I_S(x)$$

olur.

ÖNERME 3.19: X bir Hilbert uzay, $f{:}X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu ve $x \in dom f$ noktası verilsin. $\partial_P f(x)$ konveks bir kümedir.

Kanıt: $\partial_P f(x)$' in konveks olduğunu göstermek için $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial_P f(x)$ iken $t\zeta_1 + (1-t)\zeta_2 \in \partial_P f(x)$ olduğunu göstermeliyiz. $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial_P f(x)$ ise proximal subdiferansiyel tanımı gereği

$$(\zeta_1, -1), (\zeta_2, -1) \in N_{epif}^P(x, f(x))$$

dir. $N_{epif}^P(x, f(x))$ konveks olduğundan

$$t(\zeta_1, -1) + (1-t)(\zeta_2, -1) \in N_{epif}^P(x, f(x))$$

dir. Buradan

$$(t\zeta_1 + (1-t)\zeta_2, -1) \in N_{epif}^P(x, f(x))$$

dir. Proximal subdiferansiyel tanımından

$$t\zeta_1 + (1-t)\zeta_2 \in \partial_P f(x)$$

elde edilir. O halde $\partial_P f(x)$ konvekstir.

TANIM 3.20: $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu ve $x \in S \cap dom f$ noktası verilsin. Eğer f fonksiyonu

$$f(x) \leq f(y) \ \forall y \in S$$

koşulunu sağlıyorsa x noktasına f fonksiyonunun bir minimumu denir.

Eğer x noktası $x \in U \subset X$ açık komşuluğu üzerinde bir minimum ise x noktasına f fonksiyonunun yerel minimumu denir. $U = X$ ise x noktasına f fonsiyonunun global minimumu denir.

ÖNERME 3.21: X bir Hilbert uzay; $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alttan yarı sürekli olsun.

a) $x_0 \in X$ noktası f fonksiyonunun bir yerel minimum noktası olsun. O zaman $0 \in \partial_P f(x_0)$.

b) $S \subset X$ kompakt küme ve $S \cap dom f \neq \emptyset$ olsun. O zaman f fonksiyonu S kümesinde alttan sınırlıdır ve S üzerinde minimumunu alır.

Kanıt: *a)* $x_0 \in X$ noktası f fonksiyonunun yerel minimum noktası olduğundan $\forall x \in B(x_0, \delta)$ için

$$f(x) \geq f(x_0) \tag{3.21.1}$$

olacak biçimde x_0 noktasının $B(x_0, \delta)$ komşuluğu vardır. $\forall x \in B(x_0, \delta)$ olmak üzere keyfi $(x, \alpha) \in epi f$ için

$$\alpha \geq f(x_0). \tag{3.21.2}$$

O zaman 3.21.2' den $x \in B(x_0, \delta)$ iken $\forall (x, \alpha) \in epi f$ için

$$\langle (0,-1), (x, \alpha) \rangle \leq \langle (0,-1), (x_0, f(x_0)) \rangle$$

ve

$$\langle (0,-1), ((x, \alpha) - (x_0, f(x_0))) \rangle \leq 0 \tag{3.21.3}$$

olur. $S_\star = B((x_0, f(x_0)), \delta) \cap epi f$ olsun. Burada

$$B((x_0, f(x_0)), \delta) = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : \|(x, \alpha) - (x_0, f(x_0))\| < \delta\}$$

dir.

Keyfi $(x, \alpha) \in S_\star$ alalım. O zaman $(x, \alpha) \in epi f$ ve $(x, \alpha) \in B((x_0, f(x_0)), \delta)$ olur. Bu durumda

$$\|(x, \alpha) - (x_0, f(x_0))\| = \sqrt{\|x - x_0\|^2 + (\alpha - f(x_0))^2} < \delta \tag{3.21.4}$$

olduğunu elde ederiz. O halde $\|x - x_0\| < \delta$ yani $x \in B(x_0, \delta)$ olduğu bulunur. Böylece $\forall (x, \alpha) \in S_\star$ için $x \in B(x_0, \delta)$ olur. Bu durumda 3.21.3' den keyfi

$(x, \alpha) \in S_\star = B((x_0, f(x_0)), \delta) \cap epif$ için

$$\langle (0, -1), ((x, \alpha) - (x_0, f(x_0))) \rangle \leq 0$$

olduğu elde edilir. Bu ise $(0, -1) \in N^P_{epif}(x_0, f(x_0))$ olması demektir. Buradan proximal subgradientin tanımından

$$0 \in \partial_P f(x_0)$$

olur.

b) Önce $domf$ kümesinin kapalı olduğunu gösterelim. $\forall i = 1, 2, ...$ için $x_i \in domf$ olmak üzere $i \longrightarrow \infty$ iken $x_i \longrightarrow x_\star$ olsun. O zaman f $x_\star$ noktasında alttan yarı sürekli olduğundan $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için $\forall x \in B(x_\star, \delta_\star)$ iken

$$f(x_\star) - \frac{1}{2} < f(x)$$

olacak biçimde $\delta_\star > 0$ vardır. $i \longrightarrow \infty$ iken $x_i \longrightarrow x_\star$ olduğundan $\delta_\star > 0$ için $i \geq N_\star$ iken $x_i \in B(x_\star, \delta_\star)$ olacak biçimde $N_\star > 0$ vardır.

O zaman $\forall i \geq N_\star$ için

$$f(x_\star) - \frac{1}{2} < f(x_i) \tag{3.21.5}$$

olur. $\forall i$ için $x_i \in domf$ olduğundan $f(x_i) < +\infty$.

O zaman 3.21.5' den $i = N_\star + 1$ için

$$f(x_\star) - \frac{1}{2} < f(x_{N_\star + 1}) < +\infty$$

yani $x_\star \in domf$ olur. Böylece $domf$ kümesinin kapalı olduğunu gördük.

$S \subset X$ kompakt, domf kapalı olduğundan $S \cap domf$ kompakt küme olur.

$S_\star = S \cap domf$ olsun. O zaman $S_\star$ kompakt küme ve $f : S_\star \longrightarrow \mathbb{R}$ olur. Açıktır ki;

$$\inf_{x \in S} f(x) = \inf_{x \in S_\star} f(x).$$

$\inf\limits_{x \in S_\star} f(x) = \alpha$ olsun. $\alpha = -\infty$ olmadığını gösterelim. Aksini varsayalım; yani $\inf\limits_{x \in S_\star} f(x) = -\infty$ olsun. O zaman infimum tanımından $\forall n = 1, 2, ..$ için

$$f(x_n) < -n$$

olacak biçimde $x_n \in S_\star$ vardır. $\forall n = 1, 2, ..$ için $x_n \in S_\star$, $S_\star \subset X$ kompakt olduğundan genelliği bozmadan $n \to \infty$ iken $x_n \to x_\star$ olacak biçimde $x_\star \in S_\star$ olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda f fonksiyonunu X' de alttan yarı sürekli olduğundan

$$f(x_\star) \le \liminf_{x \to x_0} f(x_n) \le \liminf_{x_n \to x_0} f(x_n) \le \lim_{n \to \infty} -n = -\infty$$

olur. Yani $f(x_\star) = -\infty$ olur. $f : S_\star \to \mathbb{R}$ olduğundan bu olamaz. Bu ise $\inf_{x \in S_\star} f(x) = -\infty$ olmadığını kanıtlar.

$S_\star \neq \emptyset$, $f : S_\star \to \mathbb{R}$ olduğundan, $\inf_{x \in S_\star} f(x) = \alpha < +\infty$ olduğunu yani f' in alttan sınırlı olduğunu gördük. Şimdi $\inf_{x \in S_\star} f(x) = \alpha$, $-\infty < \alpha < +\infty$ olduğundan infimum tanımından, $\forall n = 1, 2, ...$ için

$$f(x_n) < \alpha + \frac{1}{n} \tag{3.21.6}$$

olacak biçimde $x_n \in S_\star$ vardır. $S_\star \subset X$ kompakt, $\forall n = 1, 2, ...$ için $x_n \in S_\star$ olduğundan, genelliği bozmadan, $n \to \infty$ iken $x_n \to x_\star$ olacak biçimde $x_\star \in S_\star$ olduğunu varsayabiliriz. O zaman f fonksiyonu $x_\star$ noktasında alttan yarı sürekli olduğundan 3.21.6' dan

$$f(x_\star) \le \liminf_{x \to x_0} f(x) \le \liminf_{n \to \infty} f(x_n) \le \lim_{n \to \infty} \left(\alpha + \frac{1}{n} \right) = \alpha \tag{3.21.7}$$

olur. Öte yandan $\inf_{x \in S_\star} f(x) = \alpha$, $x_\star \in S_\star$ olduğundan $f(x_\star) \ge \alpha$. Bu durumda; bu son eşitsizlikten ve 3.21.7' den $x_\star \in S_\star$ olmak üzere $f(x_\star) = \alpha$ olduğunu elde ederiz, yani $x_\star \in S$ için

$$f(x_\star) = \alpha = \inf_{x \in S_\star} f(x)$$

olduğu bulunur.

4. KLASİK TÜREVLER

TANIM 4.1: $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $x \in domf$ ve $v \in X$ olmak üzere

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \tag{4.1.1}$$

limiti varsa; bu limit değerine f fonksiyonun $x \in domf$ noktasında $v \in X$ yönündeki yönlü türevi denir ve $f'(x; v)$ ile gösterilir. Eğer yukarıdaki limit her $v \in X$ için var ve

$$f'(x; v) = \langle f'_G(x), v \rangle \; \forall v \in X \tag{4.1.2}$$

olacak biçimde $f'_G(x) \in X$ varsa, f fonksiyonu Gâteaux diferansiyellenebilirdir denir ve $f'_G(x) \in X$' e f' in Gâteaux türevi denir.

$f(x) = \|x\|$ fonksiyonu için $x = 0$ da

$$\begin{aligned} f'(0; v) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(0 + tv) - f(0)}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{|t| \|v\| - 0}{t} = \|v\| \end{aligned}$$

örneğindeki gibi bir fonksiyon her yönde yöne göre türeve sahip olabilir fakat Gâteaux türevi olmayabilir.

Bir alttan yarı sürekli fonksiyon bir x noktasında Gâteaux türeve sahip olabilir; fakat o noktada sürekli olmayabilir.

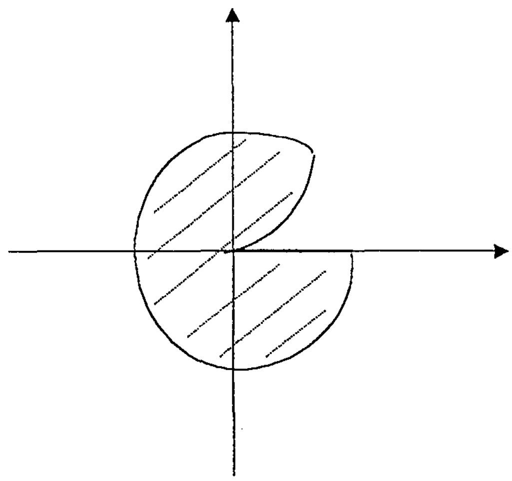
ÖRNEK 4.2:

$A = B((0,0), 1) \setminus \{(x, y) \in B((0,0), 1) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^4\}$

olmak üzere

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \; f(x, y) = \begin{cases} 0 & ; (x, y) \in A \\ 1 & ; (x, y) \notin A \end{cases}$$

fonksiyonu verilsin. f fonksiyonu ∂A üzerinde alttan yarı süreklidir.



Şekil 4.1: Bir A kümesinin şekli

$$f'((0,0),v) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f((0,0)+tv) - f((0,0))}{t} = 0$$

.

$$0 = f'((0,0),v) = \langle (0,0), v\rangle \Rightarrow f'((0,0)) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$$

dir. Fakat f $(0,0)$' da sürekli değildir. Bu nedenle f Fréchet türevlenemez.

TANIM 4.3: $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $x \in domf$ ve $v \in X$ olmak üzere 4.1.2 eşitliğini sağlayan bir $f'_G(x) \in X$ var olsun; yani f fonksiyonu bir x noktasında Gâteaux diferansiyellenebilir olsun; ayrıca 4.1.1' deki yakınsaklık X' in sınırlı alt kümelerinde v' ye göre düzgün olsun. O zaman f fonksiyonu x noktasında Fréchet diferansiyellenebilirdir denir ve bu durumda $f'_G(x)$ yerine $f'(x)$ yazılır ve $f'(x) \in X$' e Fréchet türev denir.

Bu tanım;

her $r > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için $\delta(\varepsilon, r) > 0$ vardır öyle ki her $|t| < \delta(\varepsilon, r)$ ve $\|v\| \leq r$ için

$$\left| \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - < f'(x), v > \right| < \varepsilon$$

koşuluna denktir.

Sonlu boyutlu durumda bile diferansiyellebilmenin iki notasyonu denk değildir.

f fonksiyonu bir x noktasında Frécehet diferansiyellebilirse x de süreklidir; fakat bu Gâteaux diferansiyellebilme için geçerli değildir.

$f,\ g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $x \in X$ noktasında Fréchet difreransiyellenebilir olsunlar. O zaman $f+g$, fg ve $\frac{f}{g}$ $(g(x) \neq 0$ $ile)$ fonksiyonları da klasik durumdaki gibi x noktasında Fréchet diferansiyellenebilirdir.

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(x) &= f'(x) \pm g'(x) \\ (fg)'(x) &= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(\frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}\right)\end{aligned}$$

Şimdi Ortalama Değer Teoremini ifade edelim ve ispatlayalım.

TEOREM 4.5: $f \in \mathcal{F}(X)$ fonksiyonu $x,\ y \in X$ olmak üzere $[x,y] = \{tx + (1-t)\,y : 0 \leq t \leq 1\}$ doğru parçasını içine alan açık bir U komşuluğu üzerinde Gâteaux diferansiyellenebilir olsun. O zaman $t_0 \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(y) - f(x) = \langle f'_G(z)\,, y - x\rangle$$

olacak biçimde $z = t_0 x + (1-t_0)\,y$ vardır.

Kanıt: Ortalama Değer Teoreminin kanıtını $g(t) = f(x + t(y-x))$ ile tanımlanan $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna klasik bir boyutlu ortalama değer teoremini uygulayarak verilebiliriz. f fonksiyonu $[x,y]$' yi içeren U açık komşuluğu üzerinde Gâteaux diferansiyellenebilir olduğundan g fonksiyonu her $t \in (0,1)$ için diferansiyellebilirdir.

$$\begin{aligned}g(1) &= f(y) \qquad (4.5.1)\\ g(0) &= f(x)\end{aligned}$$

olur. Zincir kuralını kullanarak $g(t)$' nin t' ye göre türevini alırsak

$$g'(t) = f'_G(x + t(y - x))(y - x) \tag{4.5.2}$$

elde ederiz. Bir boyutlu ortalama değer teoremi gereğince $\exists t_0 \in (0,1) \ni$

$$g(1) - g(0) = g'(t_0)(1 - 0) \tag{4.5.3}$$

yazabiliriz. Buradan 4.5.1, 4.5.2 ve 4.5.3 eşitsizliklerini kullanarak

$$f(y) - f(x) = f'_G(x + t_0(y - x))(y - x)$$

elde edilir. $z = x + t_0(y - x)$ dersek

$$f(y) - f(x) = f'_G(z)(y - x)$$

elde edilir.

Şimdi zincir kuralını açıklayalım.Bunu ifade etmek için diferansiyellebilmeyi iki Hilbert uzayı arasındaki dönüşümlere genişletelim.

TANIM 4.6: X_1 ve X_2 sırasıyla $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normları ile verilen iki Hilbert uzayı olsunlar ve $F : X_1 \longrightarrow X_2$ bu uzaylar arasındaki bir dönüşüm olsun. X_1' den X_2' ye sınırlı lineer dönüşümlerin uzayını $L(X_1, X_2)$ ile gösterelim. $x \in X_1$ olsun. F' nin x' de Gâtaeux türevi; her $v \in X_1$ için

$$\lim_{t \downarrow 0} \left\| \frac{F(x + tv) - F(x)}{t} - F'_G(x)(v) \right\|_2 = 0$$

sağlayan bir $F'_G(x) \in L(X_1, X_2)$ elemanıdır. Ayrıca üstteki limit X_1' in sınırlı kümelerinde v' ye göre düzgün ise, o zaman F Fréchet diferansiyellenebilirdir ve $F'_G(x)$ yerine $F'(x)$ yazılır.

Skaler durumdaki gibi X_1' den X_2' ye iki dönüşümün toplamının türevi türevlerin toplamına eşittir.

Şimdi zincir kuralını düşünelim. X_1, X_2 ve X_3 Hilbert uzayları ve $F : X_1 \longrightarrow X_2$, $G : X_2 \longrightarrow X_3$ olsun.

Varsayalım ki F $x \in X_1$' de; G $F(x) \in X_2$' de Fréchet diferansiyellenebilir olsun. O zaman $G \circ F : X_1 \longrightarrow X_3$ bileşkesi $x \in X_1$' de Fréchet diferansiyellenebilirdir ve $G'(F(x))\, F'(x) \in L(X_1, X_3)$, olmak üzere

$$(G \circ F)'(x) = G'(F(x))\, F'(x)$$

dir.

TANIM 4.7: X bir Hilbert uzay; $U \subset X$ açık bir küme ve $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun.

i) f U' nun herbir noktasında Fréchet diferansiyellenebilir ve $f'(.) : U \longrightarrow X$ fonksiyonu U üzerinde sürekli ise o zaman f U üzerinde C^1' dir denir ve $f \in C^1(U)$ yazılır.

ii) $f'(.) : U \longrightarrow X$ fonksiyonu U açık kümesinin herbir noktasında Fréchet diferansiyellenebilirse bunun $x \in U$' daki türevi $f''(x) \in \mathcal{L}(X, X)$ ile gösterilir. $f''(.) : X \to \mathcal{L}(X, X)$ U üzerinde sürekli ise f' ye U üzerinde iki kez sürekli diferansiyellenebilirdir denir ve $f \in C^2(U)$ yazarız. Özel olarak $U = X$ ise $f \in C^2$ yazılır.

$f(.) : U \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in U$ noktasında ikinci mertebeden $f''(x) \in \mathcal{L}(X, X)$ Fréchet diferansiyeline sahipse f ikinci mertebeden kalanlı Taylor açılımına sahiptir. Bu durumda; x' in öyle bir $B(x; \eta)$ komşuluğu vardır ki bu komşuluktaki her y için;

$$f(y) = f(x) + \langle f'(x), y - x \rangle + \frac{1}{2} \langle f''(z)(y - x), y - x \rangle$$

yazılabilir. Burada z x ile y' yi birleştiren doğru parçası üzerindedir.

Eğer $f''(y)$' nin normu $y \in B(x; \eta)$ üzerinde $2\sigma > 0$ sabiti ile sınırlı ise; her $y \in B(x; \eta)$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle f'(x), y - x \rangle - \sigma \|y - x\|^2 \tag{4.7.1}$$

ÖNERME 4.8: $a)$ X bir Hilbert uzay ve $x \in X$ olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(y) = \|y-x\|^2$ ile tanımlansın. O zaman $f \in C^2$ dir ve $\forall y \in X$ için $f'(y) = 2(y-x)$ dir ve $I \in L(X,X)$ birim dönüşüm olmak üzere $f''(y) = 2I$ dir.

$b)$ $c > 0$ sabit $x,\ \zeta \in X$ olmak üzere $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g(y) = \left[c^2 + 2c\langle \zeta, y-x\rangle - \|y-x\|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlansın. O zaman x' in bir U komşuluğu için $g \in C^2(U)$ ve $g'(x) = \zeta$ dir.

$c)$ $f(x) = \|x\|$ olsun. Bu durumda $x \neq 0$ için f' vardır ve $f'(x) = \frac{x}{\|x\|}$ dir.

Çözüm: $a)$ $x \in X$ ve $f(y) = \|y-x\|^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\frac{f(y+tv)-f(y)}{t} &= \frac{\|y+tv-x\|^2 - \|y-x\|^2}{t} \\
&= \frac{\langle y-x+tv, y-x+tv\rangle - \|y-x\|^2}{t} \\
&= \frac{\langle y-x, y-x\rangle + 2\langle y-x, tv\rangle + t^2\langle v,v\rangle - \|y-x\|^2}{t} \\
&= \frac{\|y-x\|^2 + 2\langle y-x, tv\rangle + t^2\langle v,v\rangle - \|y-x\|^2}{t} \\
&= 2\langle y-x, v\rangle + t\|v\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$f'(y)(v) = 2\langle y-x, v\rangle$$

dir. Burada Fréchet diferansiyellenebilme tanımını kullanırsak

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\downarrow 0}\left\|\frac{f(y+tv)-f(y)}{t} - \langle 2(y-x), v\rangle\right\| \\
&= \lim_{t\downarrow 0}\left\|2\langle y-x, v\rangle + t\|v\|^2 - \langle 2(y-x), v\rangle\right\| \\
&= \lim_{t\downarrow 0} t\|v\|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerçekten;

$E \subset X$ sınırlı ise $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall 0 < t < \delta(\varepsilon), \forall v \in E$ için

$$t\|v\|^2 < \varepsilon$$

olur. Yani $\forall E \subset X$ sınırlı alt kümesi için $t \downarrow 0$ iken

$$\lim_{t\downarrow 0}\left\|\frac{f(y+tv)-f(y)}{t}-\langle 2(y-x),v\rangle\right\|$$

E kümesinde dügün olarak 0' a yakınsar.

$\varphi(y) = 2(y-x)$; $E \subset X$ sınırlı, $v \in E$ olsun. O zaman $\varphi'(y) = 2I$ dır. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\downarrow 0}\left\|\frac{\varphi(y+tv)-\varphi(y)}{t}-2Iv\right\| \\
&= \lim_{t\downarrow 0}\left\|\frac{2(y+tv-x)-2(y-x)}{t}-2Iv\right\| \\
&= \lim_{t\downarrow 0}\left\|\frac{2tv}{t}-2v\right\| \\
&= \lim_{t\downarrow 0} 0 = 0
\end{aligned}$$

dır. O halde $f \in C^2$ ve $f''(y) = 2I$ dır.

b) $g(y) = \left[c^2+2c\langle\zeta,y-x\rangle-\|y-x\|^2\right]^{\frac{1}{2}}$ olsun. $c^2 > 0$ olduğundan açıktır ki; $\forall y \in B(x;\eta)$ için

$$c^2+2c\langle\zeta,y-x\rangle-\|y-x\|^2 > 0$$

olacak biçimde $\eta > 0$ sayısı vardır. $U = B(x;\eta)$ olarak alalım. x noktasının bir komşuluğu olmak üzere $g(y)$' nin gradientini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\nabla g(y) &= \nabla\left(\left[c^2+2c\langle\zeta,y-x\rangle-\|y-x\|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{0+2c\zeta+-2(y-x)}{2\left[c^2+2c\langle\zeta,y-x\rangle-\|y-x\|^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{c\zeta-(y-x)}{\left[c^2+2c\langle\zeta,y-x\rangle-\|y-x\|^2\right]^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
\nabla g(x) &= \frac{c\zeta-0}{\left[c^2+2c\langle\zeta,x-x\rangle-\|x-x\|^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{c\zeta}{c} \\
&= \zeta
\end{aligned}$$

olduğundan $g'(x) = \zeta$ dır.

$\phi(y) = \nabla g(y) = \frac{c\zeta - (y-x)}{\left[c^2 + 2c\langle\zeta, y-x\rangle - \|y-x\|^2\right]^{\frac{1}{2}}}$ olmak üzere $p(y) = c\zeta - (y-x)$, $q(y) = \left[c^2 + 2c\langle\zeta, x-x\rangle - \|x-x\|^2\right]^{\frac{1}{2}}$ olsun. O zaman $\phi(y) = \frac{p(y)}{q(y)}$ olur. $\forall y \in U$ için $p(y)$ ve $q(y)$ Fréchet diferansiyellenbilirdir; $q(y) \neq 0$ olduğundan $\phi(y)$ U' da Fréchet diferansiyellenbilirdir. $\phi(y) = \nabla g(y)$ olduğundan buradan $g \in C^2(U)$ olduğu bulunur.

c) $E \subset X$ sınırlı küme olsun. O zaman $\forall v \in E$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{t\downarrow 0}\frac{\|x+tv\| - \|x\|}{t} &= \lim_{t\downarrow 0}\frac{\|x+tv\|^2 - \|x\|^2}{t\left(\|x+tv\| + \|x\|\right)} \\
&= \lim_{t\downarrow 0}\frac{\|x\|^2 + 2t\langle x, v\rangle + t^2\|v\|^2 - \|x\|^2}{t\left(\|x+tv\| + \|x\|\right)} \\
&= \lim_{t\downarrow 0}\frac{2\langle x, v\rangle + t\|v\|^2}{\|x+tv\| + \|x\|} \\
&= \frac{2\langle x, v\rangle}{2\|x\|} \\
&= \left\langle \frac{x}{\|x\|}, v\right\rangle.
\end{aligned}$$

Ayrıca sınırlı E kümesinde düzgün olarak

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{2\langle x, v\rangle + t\|v\|^2}{\|x+tv\| + \|x\|} = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, v\right\rangle$$

olduğunu gösterebiliriz. O zaman $x \neq 0$ iken $f(x) = \|x\|$ için $f'(x) = \frac{x}{\|x\|}$ olur.

Aşağıda vereceğimiz karakterizasyon proximal sugradient tanımında çok geniş bir şekilde kullanılır ve buna proximal subgradient eşitsizliği denir.

TEOREM 4.9: $f \in \mathcal{F}$ ve $x \in domf$ olsun. O zaman $\forall y \in B(x;\eta)$için

$$\begin{aligned}
\zeta &\in \partial_P f(x) \Leftrightarrow \qquad (4.9.1) \\
\exists\sigma, \eta &> 0 \ni \forall y \in B(x;\eta)\, için f(y) \geq f(x) + \langle\zeta, y-x\rangle - \sigma\|y-x\|^2
\end{aligned}$$

Kanıt: $(\Leftarrow)$ $f \in \mathcal{F}$ ve $x \in domf$ ve $\forall y \in B(x;\eta)$ için

$$\exists\sigma, \eta > 0 \ni f(y) \geq f(x) + \langle\zeta, y-x\rangle - \sigma\|y-x\|^2$$

olsun. Buradan her $y \in B(x;\eta)$ ve her $\alpha \geq f(y)$ için

$$\alpha - f(x) + \sigma \left[\|y-x\|^2 + (\alpha - f(x))^2\right] \geq \langle \zeta, y - x \rangle$$

elde edilir. O halde $(x, f(x))$' in komşuluğundaki her $(y,\alpha) \in epif$ için

$$\langle (\zeta,-1), [(y,\alpha) - (x, f(x))] \rangle \leq \sigma \|(y,\alpha) - (x, f(x))\|^2$$

elde edilir . Önerme 2.10 gereğince $(\zeta,-1) \in N^P_{epif}(x, f(x))$ ve dolayısıyla $\zeta \in \partial_P f(x)$.dir.

($\Rightarrow$) $\zeta \in \partial_P f(x)$ olsun. O zaman $(\zeta,-1) \in N^P_{epif}(x, f(x))$ olur. Keyfi $y \in B(x;\eta)$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle - \sigma \|y - x\|^2$$

olacak biçimde $\eta > 0$ $\sigma > 0$ olduğunu göstereceğiz. O zaman Önerme 2.6 ile $\exists \delta > 0 \ni$

$$(x, f(x)) \in proj_{epif}((x, f(x)) + \delta(\zeta, -1))$$

dir. Bu açıkça her $(y,\alpha) \in epif$ için

$$\|\delta(\zeta,-1)\|^2 \leq \|[(x, f(x)) + \delta(\zeta,-1)] - (y,\alpha)\|^2$$

olmasını gerektirir. $\alpha = f(y)$ alarak

$$\Rightarrow \quad \delta^2\|\zeta\|^2 + \delta^2 \leq \|x - y + \delta\zeta\|^2 + (f(x) - f(y) - \delta)^2 \tag{4.9.2}$$

$$\Rightarrow \quad \delta^2\|\zeta\|^2 + \delta^2 \leq \langle x - y + \delta\zeta, x - y + \delta\zeta \rangle + (f(x) - f(y) - \delta)^2$$

$$\Rightarrow \quad \delta^2\|\zeta\|^2 + \delta^2 \leq \|x - y\|^2 - 2\delta\langle \zeta, y - x \rangle + \delta\|\zeta\|^2 + (f(x) - f(y) + \delta)^2$$

$$\Rightarrow \quad (f(x) - f(y) + \delta)^2 \geq \delta^2 + 2\delta\langle \zeta, y - x \rangle - \|x - y\|^2$$

elde edilir. $\forall y \in B(x;\eta)$ için bu son eşitsizliğin sağ tarafının pozitif olduğu açıktır. Gerekirse $\eta > 0$' ı küçülterek f' nin alttan yarı sürekliliği kullanılırsa $y \in B(x;\eta)$ için

$$f(y) - f(x) + \delta > 0$$

elde edilir. Böylece 4.9.2 eşitsizliğinin karekökünü alarak $\forall y \in B(x;\eta)$ için

$$f(y) \geq g(y) = f(x) - \delta + \left\{\delta^2 + 2\delta\langle\zeta, y-x\rangle - \|x-y\|^2\right\}^{1/2} \tag{4.9.3}$$

elde edilir. Önerme 4.8 gereğince $g'(x) = \zeta$ ve g'' ve $2\sigma > 0$ sabiti ile sınırlıdır. O halde η' yı tekrar küçültürsek 4.8.1 eşitsizliği gereğince $\forall y \in B(x;\eta)$ için

$$g(y) \geq g(x) + \langle\zeta, y-x\rangle - \sigma\|y-x\|^2$$

elde edilir.

Fakat $f(y) \geq g(y) = f(x) - \delta + \left\{\delta^2 + 2\delta\langle\zeta, y-x\rangle - \|x-y\|^2\right\}^{1/2}$ve

$$f(x) = g(x)$$

olduğundan $\forall y \in B(x,\eta)$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle\zeta, y-x\rangle - \sigma\|y-x\|^2$$

elde ederiz .

Proximal subgradientlerin tanımı epigraph' a proximal normaller yoluyla bir geometrik yaklaşımdır ve Teorem 4.9' daki karakterizasyon geometrik olarak da yorumlanabilir.

Her $y \in B(x;\eta)$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle\zeta, y-x\rangle - \sigma\|y-x\|^2$$

biçiminde ifade edilen proximal subgradient eşitsizliği f fonksiyonunun x' in bir komşuluğunda

$$h(y) := f(x) + \langle\zeta, y-x\rangle - \sigma\|y-x\|^2$$

olmak üzere $y = x$ alınırsa $h(x) = f(x)$ olacağından $h(x)$ quadratik fonksiyonunu majorize ettiğini iddia eder.

Yani proximal eşitsizlik $y \longrightarrow f(y) - h(y)$' nin yerel minimumunun 0 olduğunu söylemektedir.

Teorem 4.9' u; $(x, f(x))$ noktasında f fonksiyonunun $epif$' ne ; aynı noktada teğet olan $X \times \mathbb{R}$' deki bir yuvarın varlığına denk olan bir h parabolünün varlığını verir. Teoremdeki proximal subgradient tanımı, alttan yarı sürekli fonksiyonların analizinde yararlı oluşundan daha çok tanımın direkt kullanımının mümkün oluşundan önemlidir.

Aşağıdaki sonuç klasik diferansiyellenebilme ile $\partial_P f$' in arasındaki ilişkiyi açıklayacaktır. Ayrıca daha konveks kümeler için verilen proximal normal eşitsizliğin bir benzerinin konveks fonksiyonlar için $\forall y \in X$

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle$$

biçiminde ifade edilebileceğini verecektir.

SONUÇ 4.10: $f \in \mathcal{F}$ ve $U \subset X$ açık olsun.

a) f $x \in U$' da Gâteaux diferansiyellenebilir olsun. O zaman

$$\partial_P f(x) \subseteq \{f'_G(x)\}.$$

b) $f \in C^2(U)$ ise o zaman her $x \in U$ için $\partial_P f(x) = \{f'(x)\}$.

c) f konveks ise o zaman her $y \in X$ için

$$\zeta \in \partial_P f(x) \Leftrightarrow f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle$$

olur.

Kanıt: *a)* f fonksiyonu x de Gâteaux türeve sahip ve $\zeta \in \partial_P f(x)$ olsun. O halde proximal normal eşitsizlik 4.9.1 gereğince $\exists \sigma, \eta > 0 \ni \forall y \in B(x; \eta)$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle - \sigma \|y - x\|^2$$

yazabiliriz. Herhangi bir $v \in X$ için $y = x + tv$ yazarsak; $\exists \sigma > 0$ vardır $\ni$ yeterince küçük pozitif t için

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \langle \zeta, v \rangle \geq -t\sigma \|v\|^2$$

dir. Burada f Gâteaux diferansiyellenebilir olduğundan $t \downarrow 0$ alarak

$$\langle f'_G(x) - \zeta, v \rangle \geq 0$$

elde ederiz. $v \in X$ keyfi olduğundan $\zeta = f'_G(x)$ sonucunu elde ederiz. Yani $\partial_P f(x) \subseteq \{f'_G(x)\}$ dir.

$b)$ $f \in C^2(U)$ ve $x \in U$ ise 4.7.1 eşitsizliği gereğince $\forall y \in B(x;\eta)$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle f'(x), y - x \rangle - \sigma \|y - x\|^2$$

olacak biçimde $\eta > 0$ ve $\sigma > 0$ vardır. $\zeta = f'(x)$ ise her $y \in B(x;\eta)$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle - \sigma \|y - x\|^2$$

olur. Böylece Teorem 4.9 ile $f'(x) \in \partial_P f(x)$ elde ederiz. $f \in C^2(U)$ olduğundan $\forall x \in U$ için $f'(x) = f'_G(x)$. O halde $a)$ şıkkını da kullanarak

$$\partial_P f(x) = \{f'(x)\}$$

sonucuna ulaşılır.

$c)$ $(\Leftarrow)$ f konveks ve $\forall y \in X$ için $f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle$ olsun $\zeta \in \partial_P f(x)$ olduğunu göstermeliyiz. Proximal normal eşitsizlikte $\sigma = 1$ ve herhangi $\eta > 0$ alırsak her $y \in B(x;\eta)$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle - \|y - x\|^2$$

olur. Buradan Teorem 4.9 ile $\zeta \in \partial_P f(x)$ olur.

$(\Rightarrow)$ Şimdi $\zeta \in \partial_P f(x)$ olsun her $y \in X$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle$$

olduğunu göstermeliyiz. σ ve η pozitif sayılarını seçelim. $y \in B(x;\eta)$ olsun. O zaman herhangi bir $t \in (0,1)$ için $B(x;\eta)$ açık komşuluğu konveks olduğu için

$$(1-t)\,x + ty \in B(x;\eta)$$

dir. y' yi $(1-t)\,x + ty$ alır ve f' nin konveksliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}(1-t)\,f(x) + tf(y) &\geq f((1-t)\,x + ty)\\ &\geq f(x) + t\langle \zeta, y-x\rangle - t^2\sigma\,\|y-x\|^2\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}f(x) - tf(x) + tf(y) &\geq f(x) + t\langle \zeta, y-x\rangle - t^2\sigma\,\|y-x\|^2\\ tf(y) &\geq tf(x) + t\langle \zeta, y-x\rangle - t^2\sigma\,\|y-x\|^2\end{aligned}$$

elde ederiz. Her iki tarafı t ile bölerek

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, y-x\rangle - t\sigma\,\|y-x\|$$

ve burada da $t \downarrow 0$ iken

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, y-x\rangle$$

sonucuna ulaşırız.

f sürekli diferansiyellenebilir olsa bile f' nin proximal subdiferansiyeli boş olabilir

Örnek: $f(x) = -|x|^{3/2}$ C^1 fonksiyonunun $x=0$ da proximal subgradienti boş kümedir. Yani $\partial_P f(0) = \emptyset$ dir.

ÖNERME 4.11: $f \in \mathcal{F}$ olsun.

a) f fonksiyonu x noktasında yerel minimuma sahip ise; o zaman $0 \in \partial_P f(x)$.

b) f konveks ve $0 \in \partial_P f(x)$ ise, o zaman x noktası f' nin bir global minimumudur.

Kanıt: $a)$ f x de bir yerel minimuma sahip ise tanım gereğince $\eta > 0$ vardır öyle ki her $y \in B(x;\eta)$ için

$$f(y) \geq f(x)$$

dir. Bu eşitsizliği

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x) + \langle 0, y - x\rangle - 0\|y - x\|^2 \\ &\geq f(x) + \langle 0, y - x\rangle - \|y - x\|^2 \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitsizlik $\zeta = 0$ ve $\sigma = 1$ olan proximal subgradient eşitsizliğidir. Böylece Teorem 4.9' dan

$$0 \in \partial_P f(x)$$

elde edilir.

$b)$ f konveks ve $0 \in \partial_P f(x)$ olsun .O halde Sonuç 4.10' den her $y \in X$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle 0, y - x\rangle$$

dir. Buradan her $y \in X$ için

$$f(y) \geq f(x)$$

elde edilir .Bu da x noktasının f 'nin global minimumu olduğunu gösterir.

TANIM 4.12: $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ üstten yarı sürekli olsun. f fonksiyonunun x noktasındaki proximal superdiferansiyeli

$$\partial^P f(x) = -\partial_P(-f)(x)$$

şeklinde tanımlanır.

ÖNERME 4.13: $a)$ $-f \in \mathcal{F}$ ve $x \in dom(-f)$ olsun.
O zaman

$$\begin{aligned} \zeta &\in \partial^P f(x) \Leftrightarrow \\ \exists \sigma, \eta &> 0 \ni \forall y \in B(x;\eta) \text{ için } f(y) - \langle \zeta, y - x\rangle - \sigma\|y - x\|^2 \leq f(x) \end{aligned}$$

b) $U \subset X$ açık, $x \in U$, $f : U \longrightarrow R$ fonksiyonu U üzerinde sürekli ve $\partial_P f(x) \neq \emptyset$ ve $\partial^P f(x) \neq \emptyset$ olsun. O zaman f x noktasında Fréchet diferansiyellenebilirdir ve $\partial_P f(x) = \{f'(x)\} = \partial^P f(x)$ dir.

c) X sonlu boyutlu $f \in F$ konveks ve $x \in intdomf$' de sürekli olsun. O zaman $\partial_P f(x) \neq \emptyset$ dır. Ayrıca $\partial^P f(x) \neq \emptyset$ ise f fonksiyonu x noktasında Fréchet diferansiyellenebilirdir.

Kanıt: a) $\zeta \in \partial^P f(x)$ olsun. O halde $\partial^P f(x)$' in tanımından $\zeta \in -\partial_P(-f)(x)$ dir. O halde $-\zeta \in \partial_P(-f)(x)$ dir. Buradan Teorem 3.23 gereğince $\forall y \in B(x;\eta)$ için

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \exists \sigma, \eta > 0 \ni -f(y) \geq -f(x) + \langle -\zeta, y - x \rangle - \sigma \|y - x\|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad f(y) \leq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle + \sigma \|y - x\|^2 \forall y \in B(x;\eta) \\
&\Leftrightarrow \quad f(y) - \langle \zeta, y - x \rangle - \sigma \|y - x\|^2 \leq f(x) \forall y \in B(x;\eta)
\end{aligned}$$

elde edilir.

b) $\partial_P f(x) \neq \emptyset$ ve $\partial^P f(x) \neq \emptyset$ olduğundan $\zeta \in \partial_P f(x)$ ve $p \in \partial^P f(x)$ alalım. O zaman $B(x;\eta_1) \subset U$ olmak üzere $\forall y \in B(x;\eta_1)$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle - \sigma_1 \|y - x\|^2 \tag{4.13.1}$$

olacak biçimde $\eta_1 > 0$ ve $\sigma_1 \geq 0$ ve $B(x;\eta_2) \subset U$ olmak üzere $\forall y \in B(x;\eta_2)$ için

$$f(x) \geq f(y) - \langle p, y - x \rangle - \sigma_2 \|y - x\|^2 \tag{4.13.2}$$

olacak biçimde $\eta_2 > 0$ ve $\sigma_2 \geq 0$ vardır.

$\eta_\star = \min\{\eta_1, \eta_2\}$, $\sigma_\star = \sigma_1 + \sigma_2$ olsun. O zaman 4.13.1 ve 4.13.2' den $\forall y \in B(x;\eta_\star) \subset U$ için

$$\langle \zeta - p, y - x \rangle - \sigma_\star \|y - x\|^2 \leq 0 \tag{4.13.3}$$

olur.

$\zeta = p$ olduğunu kanıtlayalım. Aksini varsayalım. $\zeta \neq p$ olsun. O zaman $\zeta - p \neq 0$ olur.

$$\alpha < \min\left\{\frac{\|\zeta - p\|}{2\sigma_\star}, \eta_\star\right\}, \; y_\star = x + \frac{\zeta - p}{\|\zeta - p\|}\alpha \tag{4.13.4}$$

olsun. O zaman $y_\star - x = \frac{\zeta - p}{\|\zeta - p\|}\alpha$, $\|y_\star - x\| = \alpha$ olur. $\alpha < \eta_\star$ olduğundan $y_\star \in B(x;\eta_\star)$ olduğu bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \langle \zeta - p, y_\star - x\rangle - \sigma_\star \|y_\star - x\|^2 &= \left\langle \zeta - p, \frac{\zeta - p}{\|\zeta - p\|}\alpha \right\rangle - \sigma_\star \alpha^2 \\ &= \alpha \|\zeta - p\| - \sigma_\star \alpha^2 \\ &= \alpha \left[\|\zeta - p\| - \sigma_\star \alpha\right] \end{aligned} \tag{4.13.5}$$

.$y_\star \in B(x;\eta_\star)$ olduğundan 4.13.3 ve 4.13.5' den

$$\|\zeta - p\| - \sigma_\star \alpha \leq 0 \tag{4.13.6}$$

olur.

Öte yandan 4.13.4' den $\alpha < \frac{\|\zeta - p\|}{2\sigma_\star}$ olduğundan $\|\zeta - p\| - 2\sigma_\star > 0$ ve buradan ise

$$\|\zeta - p\| - \sigma_\star \alpha > 0 \tag{4.13.7}$$

olduğu bulunur. 4.13.6 ve 4.13.7 çelişdiğinden varsayımımız doğru değildir. Yani $\zeta = p$.

Böylece $\forall \zeta \in \partial_P f(x)$ ve $\forall p \in \partial^P f(x)$ için $\zeta = p$ olduğunu kanıtladık. O zaman buradan

$$\partial_P f(x) = \partial^P f(x) = \{\zeta\} \tag{4.13.8}$$

olur. Yani $\partial_P f(x)$ ve $\partial^P f(x)$ tek elemanlı olmak üzere eşit kümelerdir. $\partial_P f(x) = \{\zeta\}$ olduğundan $\forall y \in B(x;\eta_1^\star) \subset U$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, y - x\rangle - \sigma_1^\star \|y - x\|^2 \tag{4.13.9}$$

olacak biçimde $\sigma_1^\star > 0$ ve $\eta_1^\star > 0$ vardır.

Keyfi sınırlı $E \subset X$ kümesi alalım ve

$$K = \sup\{\|v\| : v \in E\} + 1, \ \tau_1^\star = \frac{\eta_1^\star}{K} \tag{4.13.10}$$

olsun. O zaman $\forall t \in [0, \tau_1^\star]$ ve $\forall v \in E$ için

$$y = x + tv \in B(x;\eta_1^\star) \tag{4.13.11}$$

olur. Bu durumda 4.13.9 ve 4.13.11' den $\forall t \in [0, \tau_1^\star]$ ve $\forall v \in E$ için

$$f(x+tv) - f(x) - \langle \zeta, tv \rangle \geq -\sigma_1^\star t^2 \|v\|^2$$

olur. O zaman buradan ve 4.13.10' dan $\forall v \in E$ ve $\forall t \in (0, \tau_1^\star)$ için

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \langle \zeta, v \rangle \geq -\sigma_1^\star K^2 t \tag{4.13.12}$$

olduğu bulunur.

Şimdi $\partial^P f(x) = \{\zeta\}$ olduğundan $\forall y \in B(x; \eta_2^\star)$ için

$$f(y) \leq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle + \sigma_2^\star \|y - x\|^2 \tag{4.13.13}$$

olacak biçimde $\eta_2^\star > 0$ ve $\sigma_2^\star > 0$ vardır.

$$\tau_2^\star = \frac{\eta_2^\star}{K}$$

olsun. O zaman $\forall v \in E$ ve $\forall t \in [0, \tau_2^\star]$ için

$$y = x + tv \in B(x; \eta_2^\star) \tag{4.13.14}$$

olur. 4.13.13 ve 4.13.14' den $\forall v \in E$ ve $\forall t \in [0, \tau_2^\star]$ için

$$f(x+tv) - f(x) - \langle \zeta, tv \rangle \leq -\sigma_2^\star t^2 \|v\|^2$$

olur. Buradan ve 4.13.10' dan $\forall v \in E$ ve $\forall t \in [0, \tau_2^\star]$ için

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \langle \zeta, v \rangle \leq -\sigma_2^\star K^2 t \tag{4.13.15}$$

olduğu bulunur.

$\sigma_\star = \max\{\sigma_1^\star, \sigma_2^\star\}$, $\tau_\star = \min\{\tau_1^\star, \tau_2^\star\}$ olsun. O zaman 4.13.12 ve 4.13.15' den $\forall v \in E$ ve $\forall t \in [0, \tau_\star]$ için

$$-\sigma_\star K^2 t \leq \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \langle \zeta, v \rangle \leq -\sigma_\star K^2 t \tag{4.13.16}$$

olur.

Keyfi $\varepsilon > 0$ alalım. $\tau_0 = \min\left\{\tau_*, \frac{\varepsilon}{\sigma_* K^2}\right\}$ olsun. O zaman 4.13.16' dan $\forall v \in E$ ve $\forall t \in [0, \tau_0]$ için

$$\left|\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \langle \zeta, v\rangle\right| \leq \varepsilon$$

olduğu bulunur. Bu ise $E \subset X$ kümesinde düzgün olarak

$$\lim_{t \to +0}\left[\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \langle \zeta, v\rangle\right] = 0 \qquad (4.13.17)$$

olması demektir. $E \subset X$ keyfi sınırlı küme olduğundan 4.13.17' den $\zeta = f'(x)$ olduğu bulunur. O halde

$$\partial_P f(x) = \partial^P f(x) = \left\{f'(x)\right\}$$

olur.

c) $(x, f(x)) \in \partial epi f$ olduğunu gösterelim. $\forall k = 1, 2, ...$ için $\alpha_k > f(x)$, $\beta_k < f(x)$, $k \to \infty$ iken $\alpha_k \to f(x) - 0$, $\beta_k \to f(x) - 0$ olmak üzere $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ ve $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizileri alalım.

Açıktır ki $\forall k = 1, 2, ...$ için $(x, \alpha_k) \in epi f$ ve $(x, \beta_k) \in epi f$ ve $k \to \infty$ iken $(x, \alpha_k) \to (x, f(x))$, $(x, \beta_k) \to (x, f(x))$. Bu durumda $(x, f(x)) \in \partial epi f$ olduğunu elde ederiz.

f konveks ve alttan yarı sürekli fonksiyon olduğundan $epi f$ konveks ve kapalı kümedir. $(x, f(x)) \in \partial epi f$, f fonksiyonu konveks ve $x \in int dom f$ noktasında sürekli olduğundan f fonksiyonu $int dom f$' de yerel Lipshitz olduğundan, ayırma teoremine göre, (bkz (Rudin 1973)) $\forall (y, \alpha) \in epi f$ için $\|(p_*, -b)\| = 1$ olmak üzere

$$\langle (p_*, -b), (y, \alpha)\rangle \leq \langle (p_*, -b), (x, f(x))\rangle \qquad (4.13.18)$$

olacak biçimde $(p_*, -b) \in X \times \mathbb{R}$ vardır.

O zaman 4.13.18' den $\forall (y, \alpha) \in epi f$ için

$$\langle p_*, y\rangle - b\alpha \leq \langle p_*, x\rangle - bf(x) \qquad (4.13.19)$$

olduğu bulunur. $b > 0$ olduğunu kanıtlayalım. 4.13.19' da $y = x$ alırsak, $\forall \alpha \geq f(x)$ için $(x, \alpha) \in epif$ olduğundan dolayı, $\forall \alpha \geq f(x)$ için

$$\langle p_\star, x \rangle - b\alpha \leq \langle p_\star, x \rangle - bf(x)$$

ve

$$b(\alpha - f(x)) \geq 0 \tag{4.13.20}$$

olduğu bulunur. $\alpha \geq f(x)$ olduğundan 4.13.20' den $b \geq 0$ olduğu bulunur.

Şimdi $b = 0$ olduğunu varsayalım. O zaman 4.13.19' dan $\forall (y, \alpha) \in epif$ için

$$\langle p_\star, y \rangle \leq \langle p_\star, x \rangle$$

yani

$$\langle p_\star, y - x \rangle \leq 0 \tag{4.13.21}$$

olduğu bulunur. $(y, \alpha) \in epif$ keyfi olduğundan 4.13.21' den $\forall y \in X$ için $\langle p_\star, y - x \rangle \leq 0$ olduğunu elde ederiz. O zaman buradan $p_\star = 0$ bulunur.
O halde $(p_\star, -b) = 0$ ve $\|(p_\star, -b)\| = 0$ olur. Bu ise $\|(p_\star, -b)\| = 1$ olduğu ile çelişir.

Böylece $b > 0$ olduğunu kanıtladık. O zaman 4.13.19 eşitsizliğini $-b$' ye bölersek, $\forall (y, \alpha) \in epif$ için

$$\begin{aligned} \alpha &\geq \left\langle \frac{p_\star}{b}, y \right\rangle - \left\langle \frac{p_\star}{b}, x \right\rangle + f(x) \\ \alpha &\geq f(x) + \left\langle \frac{p_\star}{b}, y - x \right\rangle \end{aligned} \tag{4.13.22}$$

olduğu bulunur. $\forall y \in X$ için $(y, f(y)) \in epif$ olduğundan 4.13.22' de $\alpha = f(y)$ alırsak $\forall y \in X$ için

$$f(y) \geq f(x) + \left\langle \frac{p_\star}{b}, y - x \right\rangle$$

olduğunu elde ederiz. Bu ise; $\frac{p_\star}{b} \in \partial_P f(x)$ olması demektir. O halde $\partial_P f(x) \neq \emptyset$ olduğunu elde ederiz.

Şimdi $\partial^P f(x) \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\partial^P f(x) = \partial_P f(x)$ ve $\partial^P f(x)$ ve $\partial_P f(x)$ kümelerinin tek elemanlı olduklarını kanıtlayalım.

$\forall \zeta_1 \in \partial_P f(x)$ ve $\zeta_2 \in \partial^P f(x)$ alalım ve $\zeta_1 \neq \zeta_2$ olduğunu varsayalım. O zaman Önerme 4.11.(c)' den $\forall y \in X$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta_1, y - x \rangle \tag{4.13.23}$$

ve $\forall y \in B(x;\eta)$ için

$$f(y) \leq f(x) + \langle \zeta_2, y - x \rangle + \sigma \|y - x\|^2 \tag{4.13.24}$$

olacak biçimde $\eta > 0$ ve $\sigma > 0$ vardır. Bu durumda 4.13.23 ve 4.13.24' den $\forall y \in B(x;\eta)$ için

$$\langle \zeta_2 - \zeta_1, y - x \rangle + \sigma \|y - x\|^2 \geq 0$$

olur. Buradan $\forall y \in B(x;\eta)$ ve $y \neq x$ için

$$\left\langle \zeta_2 - \zeta_1, \frac{y - x}{\|y - x\|} \right\rangle + \sigma \|y - x\| \geq 0 \tag{4.13.25}$$

olduğu elde edilir.

$\|\zeta_2 - \zeta_1\| = \gamma > 0$ olsun. $\varepsilon_\star = \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{\gamma}{\sigma}, \eta \right\}$ ve $y_\star = x - \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\|\zeta_2 - \zeta_1\|} \varepsilon_\star$ alalım. Açıktır ki; $\|y_\star - x\| = \varepsilon_\star < \eta$ yani $y_\star \in B(x;\eta)$ ve

$$\frac{y_\star - x}{\|y_\star - x\|} = -\frac{1}{\varepsilon_\star} \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\|\zeta_2 - \zeta_1\|} \varepsilon_\star = -\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\gamma}$$

O zaman 4.14.15' den $y_\star \in B(x;\eta)$ için

$$\begin{aligned} \left\langle \zeta_2 - \zeta_1, -\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\gamma} \right\rangle + \sigma \varepsilon_\star &\geq 0 \\ -\frac{1}{\gamma} \langle \zeta_2 - \zeta_1, \zeta_2 - \zeta_1 \rangle + \sigma \varepsilon_\star &\geq 0 \\ -\frac{\gamma^2}{\gamma} + \sigma \varepsilon_\star &\geq 0 \\ \varepsilon_\star &\geq \frac{\gamma}{\sigma} \end{aligned}$$

olur. Bu ise $\varepsilon_\star \leq \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\sigma}$ olduğu ile çelişir. O zaman varsayımımız doğru değil ve $\zeta_1 = \zeta_2$. Böylece $\forall \zeta_1 \in \partial_P f(x)$ ve $\forall \zeta_2 \in \partial^P f(x)$ için $\zeta_1 = \zeta_2$ olduğunu gördük. Bu ise $\partial_P f(x)$, $\partial^P f(x)$ kümelerinin eşit ve tek elemanlı olması demektir.

$\partial_P f(x) = \partial^P f(x) = \{\zeta_0\}$ olsun. O zaman f konveks olduğundan, keyfi $y \in X$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta_0, y - x \rangle \tag{4.13.26}$$

ve $\forall y \in B(x; \eta)$

$$f(y) \leq f(x) + \langle \zeta_0, y - x \rangle + \sigma \|y - x\|^2 \tag{4.13.27}$$

olacak biçimde $\eta > 0$, $\sigma > 0$ vardır. 4.13.26 ve 4.13.27' den $\forall y \in B(x; \eta)$ için

$$0 \leq f(y) - f(x) - \langle \zeta_0, y - x \rangle \leq \sigma \|y - x\|^2$$

yani

$$|f(y) - f(x) - \langle \zeta_0, y - x \rangle| \leq \sigma \|y - x\|^2 \tag{4.13.28}$$

olur. Sınırlı keyfi $D \subset X$ kümesi alalım. $r_\star = \sup\limits_{\alpha \in D} \|\alpha\| + 1$ olsun. D sınırlı olduğundan $r_\star \in [1, +\infty)$. Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı alalım. O zaman keyfi $t \in [0, \delta_\star]$ için $x + tD \subset B(x; \varepsilon)$ olacak biçimde pozitif $\delta_\star = \delta(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{\sigma r_\star^2}$ sayısı vardır.
O zaman $\forall v \in D$, $\forall t \in [0, \delta_\star]$ için $x + tv \in B(x; \varepsilon)$ olur ve bu durumda 4.13.28' den $\forall v \in D$, $\forall t \in [0, \delta_\star]$ için

$$\begin{aligned}
|f(x+tv) - f(x) - \langle \zeta_0, tv \rangle| &\leq \sigma \|tv\|^2 \\
\left| \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \langle \zeta_0, v \rangle \right| &\leq t\sigma \|v\|^2 \\
&\leq \delta_\star \sigma r_\star^2 \\
&< \frac{\varepsilon}{\sigma r_\star^2} \sigma r_\star^2 = \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta \in [0, \delta_\star]$ iken $\forall v \in D$ için

$$\left| \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \langle \zeta_0, v \rangle \right| < \varepsilon \tag{4.13.29}$$

olacak biçimde $\delta_\star = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısının olduğunu kanıtladık. $D \subset X$ keyfi sınırlı küme olduğundan $f'(x) = \zeta_0$ olduğunu elde ederiz. Yani f fonksiyonu x noktasında Fréchet diferansiyellenebilirdir.

Şimdi

$$\partial_P f(x) + \partial_P g(x) = \partial_P (f+g)(x)$$

toplam kuralının doğru olup olmayacağını inceleceğiz.

ÖNERME 4.14: *a)* $\partial_P f(x) + \partial_P g(x) \subset \partial_P (f+g)(x)$ dir.

b) Her $c > 0$ için $\partial_P (cf)(x) = c\partial_P f(x)$ dir.

Kanıt: *a)* Eğer $\partial_P f(x) = \emptyset$ veya $\partial_P g(x) = \emptyset$ ise, o zaman

$$\partial_P f(x) + \partial_P g(x) = \emptyset$$

olur ve $\partial_P f(x) + \partial_P g(x) \subset \partial_P (f+g)(x)$ olduğu açıktır.

$\partial_P f(x) \neq \emptyset$ ve $\partial_P g(x) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda

$$\partial_P f(x) + \partial_P g(x) \subset \partial_P (f+g)(x)$$

olduğunu gösterelim. Keyfi $\zeta_1 \in \partial_P f(x)$ ve $\zeta_2 \in \partial_P g(x)$ alalım. O zaman keyfi $y \in y \in B(x;\eta_1)$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta_1, y-x \rangle - \sigma_1 \|y-x\|^2 \qquad (4.14.1)$$

olacak şekilde $\sigma_1 > 0$ ve $\eta_1 > 0$; keyfi $y \in B(x;\eta_2)$ için

$$g(y) \geq g(x) + \langle \zeta_2, y-x \rangle - \sigma_2 \|y-x\|^2 \qquad (4.14.2)$$

olacak şekilde $\sigma_2 > 0$ ve $\eta_2 > 0$ vardır.

$\eta_\star = \min\{\eta_1, \eta_2\}$, $\sigma_\star = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ olsun. Açıktır ki $\eta_\star > 0$ ve $\sigma_\star > 0$ dır. 4.14.1 ve 4.14.2' den $\forall y \in B(x;\eta_\star)$ için

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta_1, y-x \rangle - \sigma_\star \|y-x\|^2 \qquad (4.14.3)$$

ve

$$g(y) \geq g(x) + \langle \zeta_2, y-x \rangle - \sigma_\star \|y-x\|^2 \qquad (4.14.4)$$

olur. 4.14.3 ve 4.14.4' den $\forall y \in B(x;\eta_\star)$ için

$$f(y)+g(y) \geq f(x)+g(x)+\langle \zeta_1+\zeta_2, y-x\rangle - 2\sigma_\star \|y-x\|^2 \tag{4.14.5}$$

olduğu elde edilir. $\sigma_0 = 2\sigma_\star$ dersek $\sigma_0 > 0$ olur. 4.14.5' den keyfi $y \in B(x;\eta_\star)$ için

$$f(y)+g(y) \geq f(x)+g(x)+\langle \zeta_1+\zeta_2, y-x\rangle - \sigma_0 \|y-x\|^2$$

olduğu bulunur. Bu ise $\zeta_1+\zeta_2 \in \partial_P(f+g)(x)$ demektir. Böylece keyfi $\zeta_1 \in \partial_P f(x)$ ve $\zeta_2 \in \partial_P g(x)$ için $\zeta_1+\zeta_2 \in \partial_P(f+g)(x)$ olduğunu gördük. Bu ise

$$\partial_P f(x) + \partial_P g(x) \subset \partial_P(f+g)(x)$$

demektir.

b) $\zeta \in \partial_P(cf)(x)$ olsun. O zaman $\forall y \in B(x;\eta)$ için

$$cf(y) \geq cf(x) + \langle \zeta, y-x\rangle - \sigma \|y-x\|^2$$

olacak biçimde $\sigma \geq 0$ ve $\eta > 0$ vardır.$c > 0$ olduğundan buradan $\forall y \in B(x;\eta)$ için

$$f(y) \geq f(x) + \left\langle \frac{\zeta}{c}, y-x \right\rangle - \frac{\sigma}{c}\|y-x\|^2 \tag{4.14.6}$$

olur. $\sigma_\star = \frac{\sigma}{c}$ dersek $\sigma_\star \geq 0$ ve 4.14.6' dan $\forall y \in B(x;\eta)$ için

$$f(y) \geq f(x) + \left\langle \frac{\zeta}{c}, y-x \right\rangle - \sigma_\star \|y-x\|^2$$

olur. Bu ise $\frac{\zeta}{c} \in \partial_P f(x)$ yani $\zeta \in c\partial_P f(x)$ olması demektir.

Böylece $\forall \zeta \in \partial_P(cf)(x)$ için $\zeta \in c\partial_P f(x)$ olduğunu gördük. O zaman

$$\partial_P(cf)(x) \subset c\partial_P f(x) \tag{4.14.7}$$

olur.

Şimdi

$$c\partial_P f(x) \subset \partial_P(cf)(x) \tag{4.14.8}$$

olduğunu kanıtlayalım.

$\zeta \in c\partial_P f(x)$ alalım. O zaman $\frac{\zeta}{c} \in \partial_P f(x)$ olur. Bu durumda $\forall y \in B(x;\eta)$ için

$$f(y) \geq f(x) + \left\langle \frac{\zeta}{c}, y - x \right\rangle - \sigma \|y - x\|^2$$

olacak biçimde $\eta > 0$ ve $\sigma > 0$ vardır. $c > 0$ olduğundan $\forall y \in B(x;\eta)$ için

$$cf(y) \geq cf(x) + \langle \zeta, y - x \rangle - \sigma c \|y - x\|^2 \tag{4.14.9}$$

olur. $\sigma_\star = \sigma c$ dersek; $\sigma_\star > 0$ ve 4.14.9' dan $\forall y \in B(x;\eta)$ için

$$cf(y) \geq cf(x) + \langle \zeta, y - x \rangle - \sigma_\star \|y - x\|^2$$

olur. Bu ise $\zeta \in \partial_P(cf)(x)$ olması demektir. Böylece $\forall \zeta \in c\partial_P f(x)$ için $\zeta \in \partial_P(cf)(x)$ olduğunu gördük. O zaman 4.14.8 doğrudur. 4.14.7 ve 4.14.8' den

$$\partial_P(cf)(x) = c\partial_P f(x)$$

olduğunu elde ederiz.

ÖRNEK 4.15: $\partial_P(f+g)$ 'nin boş olmadığına fakat $\partial_P f(x)$ veya $\partial_P g(x)$ 'lerden birinin boş olduğuna dair bir örnek veriniz.

Çözüm: $f(x) = |x|$, $g(x) = -|x|$ olsun. Bu durumda $(f+g)(x) = |x| - |x| = 0$ olur.

Açıktır ki $x = 0$ iken $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ veya başka deyişle $(0,0) \in epif$ ve $(0,0) \in epig$ dir.

Açıktır ki

$$\begin{aligned} epif &= \{(x,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x| \leq \alpha\} \\ N^P_{epif}((0,0)) &= \{(\zeta,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -|\zeta| \geq \beta\} \\ \partial_P f(x) &= \left\{\zeta \in X : (\zeta,-1) \in N^P_{epif}(x, f(x))\right\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \partial_P f(0) &= \left\{\zeta \in \mathbb{R} : (\zeta,-1) \in N^P_{epif}(0, f(0))\right\} \\ &= \{\zeta \in \mathbb{R} : -|\zeta| \geq -1\} \\ &= \{\zeta \in \mathbb{R} : |\zeta| \leq 1\} = [-1,1] \end{aligned}$$

olur. Yani $f(x) = |x|$ için $\partial_P f(0) = [-1, 1] \neq \emptyset$ dir.

$g(x) = -|x|$ için

$$\begin{aligned} epig &= \{(x, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -|x| \leq \alpha\} \\ N_{epig}^P(0,0) &= \{(0,0)\}. \end{aligned}$$

O zaman

$$\begin{aligned} \partial_P g(0) &= \{\zeta \in \mathbb{R} : (\zeta, -1) \in N_{epig}^P(0,0)\} \\ &= \{\zeta \in \mathbb{R} : (\zeta, -1) = (0,0)\} = \emptyset \end{aligned}$$

olur. Keyfi $x \in \mathbb{R}$ için $(f+g)(x) = 0$ olduğundan $(0,0) \in epi(f+g)$ olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} epi(f+g) &= \{(x, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq \alpha\} \\ N_{epi(f+g)}^P(0,0) &= \{(\zeta, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \zeta = 0, \beta \leq 0\} \end{aligned}$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned} \partial_P(f+g)(0) &= \{\zeta \in \mathbb{R} : (\zeta, -1) \in N_{epi(f+g)}^P(0,0)\} \\ &= \{\zeta \in \mathbb{R} : (\zeta, -1) \in \{(\zeta, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \zeta = 0, \beta \leq 0\}\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Yani

$$\partial_P(f+g)(0) = \{0\} \neq \emptyset$$

olur. Böylece $f(x) = |x|$, $g(x) = -|x|$ için $\partial_P f(0) = [-1, 1] \neq \emptyset$, $\partial_P g(0) = \emptyset, \partial_P(f+g)(0) = \{0\} \neq \emptyset$ olduğunu gördük.

Aşağıdaki önerme proximal toplam kuralıdır ve temelde fonksiyonlardan biri C^2 iken toplam kuralı geçeli olur.

ÖNERME 4.16: $f \in \mathcal{F}$, $x \in X$ ve g x noktasının bir komşuluğunda C^2 olsun. O zaman

$$\zeta \in \partial_P(f+g)(x) \Rightarrow \zeta - g'(x) \in \partial_P f(x)$$

dir..

Kanıt: $\zeta \in \partial_P(f+g)(x)$ olmak üzere $\zeta - g'(x) \in \partial_P f(x)$ olduğunu göstereceğiz. $g \in C^2$ olduğundan $-g \in C^2$ olur. O zaman keyfi $y \in B(x;\eta_1)$ için

$$-g(y) \geq -g(x) + \langle -g'(x), y-x \rangle - \sigma_1 \|y-x\|^2$$

olacak biçimde $\sigma_1 > 0$ ve $\eta_1 > 0$ vardır.

Bu eşitsizlik

$$g(y) \leq g(x) + \langle g'(x), y-x \rangle + \sigma_1 \|y-x\|^2$$

eşitsizliğine denktir. Buradan da $\forall y \in B(x;\eta_1)$ için

$$-g(y) + g(x) + \sigma_1 \|y-x\|^2 \geq \langle -g'(x), y-x \rangle \tag{4.16.1}$$

elde ederiz. $\zeta \in \partial_P(f+g)(x)$ ise Teorem 3.23 gereği $\forall y \in B(x;\eta_2)$ için

$$f(y) + g(y) - f(x) - g(x) + \sigma_2 \|y-x\|^2 \geq \langle \zeta, y-x \rangle$$

olacak şekilde $\sigma_2 > 0$ ve $\eta_2 > 0$ vardır. Buradan da $\forall y \in B(x;\eta_2)$ için

$$f(y) + g(y) - f(x) - g(x) + \sigma_2 \|y-x\|^2 \geq \langle \zeta, y-x \rangle . \tag{4.16.2}$$

$\sigma_\star = \sigma_1 + \sigma_2$, $\eta_\star = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ olsun. Şimdi 4.16.1 ve 4.16.2 eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak $\forall y \in B(x;\eta_\star)$ için

$$f(y) - f(x) + \sigma_\star \|y-x\|^2 \geq \langle \zeta - g'(x), y-x \rangle$$

sonucuna ulaşırız. Bu da $\zeta - g'(x) \in \partial_P f(x)$ olduğunu söyler.

ÖNERME 4.17: $f \in C^2$, $S \subset X$ kapalı küme,

$$\min_{y\in X} f(y) = \min_{y\in S} f(y) = f(x)$$

olsun. O zaman

$$-f'(x) \in N_S^P(x)$$

dir.

Kanıt:

$$I_S(y) = \begin{cases} 0 & ; y \in S \\ +\infty & ; y \notin S \end{cases}$$

olsun. S kapalı küme olduğundan, $I_S(y)$ fonksiyonu X' de alttan yarı süreklidir. O halde

$$f(y) + I_S(y) = \begin{cases} f(y) & ; y \in S \\ +\infty & ; y \notin S \end{cases} \tag{4.17.1}$$

olur. $\min_{y\in X} f(y) = \min_{y\in S} f(y) = f(x)$ olduğundan 4.17.1' den

$$\min_{y\in X} [f(y) + I_S(y)] = \min_{y\in S} [f(y) + I_S(y)] = \min_{y\in S} f(y) = f(x)$$

olur. Yani $x \in S$ noktası $y \longrightarrow f(y) + I_S(y)$ fonksiyonunun minimum noktasıdır. O zaman Önerme 3.21.(a)' dan

$$0 \in \partial_P (f(x) + I_S(x)) \tag{4.17.2}$$

olur. $f \in C^2$, I_S alttan yarı sürekli olduğundan 4.17.2' den ve Önerme 4.16' dan

$$0 - f'(x) \in \partial_P I_S(x)$$

dir; yani

$$-f'(x) \in \partial_P I_S(x) \tag{4.17.3}$$

olur. $x \in S$ olduğundan, Önerme 3.18' den $\partial_P I_S(x) = N_S^P(x)$ olur. Böylece 4.17.3' den

$$-f'(x) \in N_S^P(x)$$

olduğu bulunur.

TANIM 4.18: $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ fonksiyonu verilsin ve $S \subset X$ olsun f S kümesi üzerinde sonlu ve $\forall x, y \in S$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq K \|x - y\|$$

olacak biçimde $K > 0$ varsa f fonksiyonu S' de Lipshitz koşulunu sağlar denir. Eğer f fonksiyonu x noktasının bir komşuluğu üzerinde Lipschitz koşulunu sağlıyorsa f fonksiyonu x noktasının komşuluğunda Lipschitzdir denir. Eğer f fonksiyonu her $x \in S$ için x noktasının bir komşuluğunda Lipschitz ise f ye S üzerinde Lipschitzdir denir.

ÖNERME 4 19: f fonksiyonu x_0 noktasının bir komşuluğu üzerinde Lipshitz koşulunu sağlasın. Herhangi $\zeta \in \partial_P f(x_0)$ için $\|\zeta\| \leq K$ 'dır.

Kanıt: $\eta > 0$, $\overline{S} = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, $x_\star \in X$, $\overline{S}(x_\star, \eta) = \{x \in X : \|x - x_\star\| = \eta\}$ olsun.

$$\overline{S} = \left\{ \frac{y - x_\star}{\|y - x_\star\|} : y \in \overline{S}(x_\star, \eta) \right\} \tag{4.19.1}$$

olduğunu gösterelim.

$p \in \left\{ \frac{y - x_\star}{\|y - x_\star\|} : y \in \overline{S}(x_\star, \eta) \right\}$ olsun. O zaman $p = \frac{y_\star - x_\star}{\|y_\star - x_\star\|}$ olacak biçimde $y_\star \in \overline{S}(x_\star, \eta)$ vardır. Bu durumda, $\|p\| = \left\| \frac{y_\star - x_\star}{\|y_\star - x_\star\|} \right\| = 1$ olduğundan $p \in \overline{S}$ olur. O halde

$$\left\{ \frac{y - x_\star}{\|y - x_\star\|} : y \in \overline{S}(x_\star, \eta) \right\} \subset \overline{S} \tag{4.19.2}$$

olur. Keyfi $p \in \overline{S}$ alalım. $y_\star = x_\star + \eta p$ olsun. O halde $\|y_\star - x_\star\| = \eta \|p\| = \eta$; yani $y_\star \in \overline{S}(x_\star, \eta)$ olur. Buradan

$$p = \frac{y_\star - x_\star}{\|y_\star - x_\star\|} \in \left\{ \frac{y - x_\star}{\|y - x_\star\|} : y \in \overline{S}(x_\star, \eta) \right\}$$

olur. $p \in \overline{S}$ keyfi olduğundan

$$\overline{S} \subset \left\{ \frac{y - x_\star}{\|y - x_\star\|} : y \in \overline{S}\,(x_\star, \eta) \right\} \tag{4.19.3}$$

olduğunu elde ederiz. 4.19.2 ve 4.19.3' den 4.19.1' in doğruluğu bulunur.

f fonksiyonu x_0 noktasının bir komşuluğunda K sabiti ile Lipschitz koşulunu sağladığından $\forall y \in B\,(x_0; \eta_0)$ için

$$|f\,(y) - f\,(x_0)| \leq K\,\|y - x_0\| \tag{4.19.4}$$

olacak biçimde $K > 0$ ve $\eta_0 > 0$ vardır.

Keyfi $\zeta \in \partial_P f\,(x_0)$ alalım. O zaman $\forall x \in B\,(x_0; \eta_1)$ için

$$f\,(y) \geq f\,(x_0) + \langle \zeta, y - x_0 \rangle - \sigma\,\|y - x_0\|^2 \tag{4.19.5}$$

olacak biçimde $\eta_1 > 0$ ve $\sigma > 0$ vardır. $\eta_\star = \frac{1}{2}\min\{\eta_0, \eta_1\}$ dersek $\forall y \in \overline{B}\,(x_0, \eta_\star)$ için 4.19.4 ve 4.19.5 sağlanır.

4.19.5' den $\forall y \in \overline{B}\,(x_0, \eta_\star)$ için

$$\langle \zeta, y - x_0 \rangle \leq f\,(y) - f\,(x_0) - \sigma\,\|y - x_0\|^2 \tag{4.19.6}$$

olur. O zaman 4.19.4 ve 4.19.6' dan $\forall y \in \overline{B}\,(x_0, \eta_\star)$ için

$$\langle \zeta, y - x_0 \rangle \leq K\,\|y - x_0\| - \sigma\,\|y - x_0\|^2 \leq K\,\|y - x_0\| \tag{4.19.7}$$

olduğu bulunur. $\overline{S}\,(x_0, \eta_\star) \subset \overline{B}\,(x_0, \eta_\star)$ olduğundan 4.19.7' den $\forall y \in \overline{S}\,(x_0, \eta_\star)$ için

$$\langle \zeta, y - x_0 \rangle \leq K\,\|y - x_0\|$$

ve

$$\left\langle \zeta, \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right\rangle \leq K \tag{4.19.8}$$

olduğu elde edilir. 4.19.8 eşitsizliği keyfi $y \in \overline{S}\,(x_0, \eta_\star)$ için sağlandığından 4.19.8 ve 4.19.1' den $\forall p \in \overline{S}$ için

$$\langle \zeta, p \rangle \leq K \tag{4.19.9}$$

olur. Eğer $\zeta = 0$ ise o zaman $K > 0$ olduğundan $\|\zeta\| = 0 \leq K$ olur.

Şimdi $\zeta \neq 0$ olsun. O zaman $1 = \frac{\zeta}{\|\zeta\|} \in \overline{S}$ olduğundan 4.19.9' dan $p = \frac{\zeta}{\|\zeta\|}$ için

$$\begin{aligned} \left\langle \zeta, \frac{\zeta}{\|\zeta\|} \right\rangle &\leq K \\ \frac{1}{\|\zeta\|} \langle \zeta, \zeta \rangle &\leq K \\ \frac{\|\zeta\|^2}{\|\zeta\|} &\leq K \\ \|\zeta\| &\leq K \end{aligned}$$

olduğu bulunur.

KAYNAKLAR

1. ROCKAFELLAR, R. T., *Convex Analysis,* Princeton Mathematical Series, **28**, Princeton University Press, NJ, (1970).
2. HIRIART-URRUTY, J.B. ve LEMARÉCHAL, C., *Convex Analysis and Minimization Algorithms. I. Fundemantals,* Spring-Verlag, Berlin, (1993).
3. PENOT; J.P. and QUANG, P.H., *Generalized Convexity of Functions and Generalized Monotonicity of Set Valued Maps,* J. Optim. Theory Appl. 92, p. 343-356, (1997)
4. ROCKAFELLAR, R.T., *The Theory of Subgradients and Its Applications to Problems of Optimizasyon: Convex and Nonconvex Functions,* Helderman Verlag, Berlin, (1981).
5. ROCKAFELLAR, R.T., *Lagrange Multipliers and Optimality,* SIAM Rev. 25, 183-238, (1993).
6. TIKHOMIROV, V.M. ; *Convex Analysis and Approximation Theory, Analysis II,* Encyclopadia of Mathematical Sciences (Edi: R. V. Gamkrelidze), **14**, Spring-Verlag, New York, (1990).
7. CLARKE, F.H., LADYAEV, Yu., SONTAG, E.D. ve SUBBOTIN, A.I., *Asymptotic Controbility Implies Feedback Stabilization,* IEEE Trans. Automat. Control, in press, **42**, 1394-1407, (1997).

8. CLARKE, F.H., *The Maximum Principle Under Minimal Hypotheses,* SIAM J. Control Optimizasyon **14**, 1078-1092, (1976).

9. CLARKE, F.H., *Optimization and Nonsmooth Analysis,* Wiley Interscience, New York, 1983; reprinted as vol. 5 of Classic inApplied Mathematics, SIAM, Philadelphia, PA, 1990; Russian Trans. Nauka, Moskow, (1988).

10. CLARKE, F.H. ve VINTER, R.B., *Local Optimality Conditions and Lipschizian Solutions to the the Hamilton- Jacobi Equations,* SIAM J. Control Optimization **21**, 856-870, (1983).

11. FRANKOWSKA, H., *Lower Semicontinuous of Hamilton-Jacobi Equation,* SIAM J. Control Optimizasyon **31**, 257-272, (1993).

12. SUBBOTIN, A.I., *Minimax and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations,* M. Nauka, (1991).

13. CLARKE, F.H., LADYAEV, Yu., ve STERN, R.J., *Fixed Points and Equilibra in Nonconvex Sets*, Nonlinear Anal., **25**, 145-161, (1995).

14. CRANDALL, M.G. ve LIONS, P.L., *Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations,* Trans.Amer. Math. Soc., **277**, 1-42, (1985).

15. GUSEİNOV, Kh.G., ve USHAKOV, V.N., *Strongly and Weakly Invariant Sets with Respect to a Differential Inclusions*, Soviet Math. Dokl., **38**, 603-605, (1989).

16. SOUQANIDIS, P.E., *Max-min Representations and Produce Formulas for the Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations with Applications to Differential Games*, Nonlinear Anal. Theory, Math. ve Appl., **9**, 217-257, (1985).

17. SUBBOTIN, A.I. and TARASYEV, A.M., *Stability Properties of the Value Functions of a Differential Game and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations,* Probl. Contr. and Inform. Theory., **15**, 451-463, (1986).

18. CLARKE, F.H., LADYAEV, Yu., STERN, R.J. ve WOLENSKI, P.R., *Nonsmooth Analysis and Control Theory,* Springer Verlag, (1998).

19. CLARKE, F.H., LADYAEV, Yu., ve STERN, R.J., *Asymptotic Stability and Smooth Lyapounov Functions,* preprint, (1997).

20. CLARKE, F.H., LADYAEV, Yu., ve WOLENSKI, P.R., *Proximal Analysis and Minimizations Principals,* J. Math. Anal. Appl., **196**, 722-735, (1995).

21. VINTER K.B. and ZHENG, H., *Necessary Conditions for Optimal Control Problems with State Constraints,* Trans. Amer. Math. Soc., **350**, 1181-1204, (1998).