SIP VEYA SSP' YE SAHİP MATRİS HALKALARI

Fatih KARABACAK

Doktara Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

NİSAN-2002

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Fatih KARABACAK' ın "SIP veya SSP' ye Sahip Matris Halkaları" başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki, Doktora tezi 13.03.2002 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Dnş.)	:Doç. Dr. Adnan TERCAN	
Üye	:Prof. Dr. Şahin KOÇAK	
Üye	:Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK	
Üye	:Doç. Dr. Ali ERDOĞAN	
Üye	:Yrd.Doç. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun 25.04.2002 tarih ve ...13/4.. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Orhan OZER
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktara Tezi

SIP VEYA SSP' YE SAHİP
MATRİS HALKALARI

FATİH KARABACAK

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Adnan Tercan
2002, 46 sayfa

Bu çalışmada; bir R halkası üzerindeki modülün, dik toplananlarının, kesişim veya toplamının yine dik toplanan olması özellikleri incelenmiştir. Bu iki özellik arasındaki ilişkilere ve endomorfizma halkaları üzerindeki karakterizasyona yer verilmiştir. Son olarak parçalı aşikar genişlemenin (yani, genelleştirilmiş üst üçgensel matris halkalarının) SIP (SSP)' ye sahip olmasının gerek ve yeter koşulu verilmiştir ve bu özelliklerin Morita değişmez olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: SIP, SSP, Matris Halkaları, Parçalı Aşikar Genişleme, Morita Değişmez

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

MATRIX RINGS WHICH HAVE
SIP OR SSP

FATİH KARABACAK

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Adnan TERCAN
2002, 46 pages

In this study, the properties that the intersection or sum of direct summands is again a direct summand for a module over a ring R was examined. In addition to this relationships between these two properties, the characterization of endomorphism rings are given. Finally, necessary and sufficient conditions for the split null extension (i.e. the generalized upper triangular matrix rings) to have SIP (SSP) are given and it is shown that these properties are Morita invariant properties.

Keywords: SIP, SSP, Matrix Rings, Split Null Extension, Morita Invariant

TEŞEKKÜR

Başlangıç aşamasından bitiş aşamasına kadar bu tezin hazırlanmasında verdiği destek ve bana ayırdığı değerli zamanı için Doç. Dr. Adnan Tercan' a en içten teşekkürlerimi sunarım. Eylül ayında aramızdan ayrılan, başta eğitim olmak üzere her türlü konuda desteğini esirgemeyen sevgili annem Hurinaz KARABACAK' a ve tüm aileme; özellikle bana karşı göstermiş olduğu sabır için eşim Aslıhan KARABACAK' a ayrıca üzerimde emeği olan bütün eğitim camiası üyelerine sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\cap$	: kesişim
$=$	: eşit
$\neq$	: eşit değil
$N \leq M$	: N alt modül M
$N \leq_e M$	: N esential alt modül M
$N \leq_c M$	: N complement alt modül M
$N \leq_d M$	: N dik toplanan M
$N \leq_s M$	: N küçük alt modül M
$\in$	: eleman
$\notin$	: eleman değil
$A \oplus B$	: A dik toplam B
$ker f$	: f' nin çekirdeği
$im f$	: f' nin görüntüsü
$f \mid_A$	: f' nin A' ya kısıtlanışı
fog	: f bileşke g
M_R	: M sağ $R-$modül
$_RM$	: M sol $R-$modül
$\cong$	: izomorfizma
$\subseteq$	: alt küme
$l(x)$	: x' in sol sıfırlayıcısı
$r(x)$	: x' in sağ sıfırlayıcısı
$Z(M)$	: M' nin singüler alt modülü

1. Önbilgiler

Bu bölümde ileriki bölümlerde kullanılacak bazı kavramlar ve bunlarla ilgili bazı temel özellikler verilecektir.

R, bir halka; M, değişmeli bir grup olsun.

$$f : M \times R \to M$$
$$(m, r) \to m.r$$

fonksiyonu ve $m, l \in M$; $r, s \in R$ için

1) $(m + l) .r = m.r + l.r$

2) $m. (r + s) = m.r + m.s$

3) $(m.r) .s = m. (r.s)$

şartları sağlanıyorsa M' ye sağ $R-$modül denildiğini hatırlayalım.

Aksi belirtilmedikçe halka, değişmeli olması gerekmeyen birimli halka ve modüllerde birimsel sağ $R-$modül olarak alınacaktır. R birimli halka ve M' de bir sağ $R-$modül olsun. $r \in R$ ve $m \in M$ için, $l_M (r) = \{m \in M : mr = 0\}$ ve $r_R (m) = \{r \in R : mr = 0\}$ sağ ideali için kullanılacaktır.

1.1 Essential Alt Modüller

Tanım 1 *M, bir $R-$modül ve N, M' nin alt modülü olsun. Sıfırdan farklı M' nin her K alt modülü için $N \cap K \neq 0$ ise N' ye M'de essential veya M' ye N' nin essential genişlemesi denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir.*

Önerme 2 *M, bir $R-$modül ve $K, N \leq M$ olsun. $m \in M$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.*

(i) $N \leq_e M \Leftrightarrow 0 \neq m \in M$ *için* $N \cap mR \neq 0$

(ii) $K \leq N$ *için* $K \leq_e M$ *dir.* $\Leftrightarrow K \leq_e N \leq_e M$

(iii) $A \leq_e B \leq M$ *ve* $A' \leq_e B' \leq M \Rightarrow A \cap A' \leq_e B \cap B' \leq M$

(v) $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ *ve her* $i \in I$ *için* $N_i \leq M_i \Rightarrow \bigoplus_{i \in I} N_i \leq_e M$

(*bakınız* [1]) .

Tanım 3 *M bir $R-$modül olsun.*

$$Z(M) = \{m \in M : mI = 0 \text{ olacak şekilde } I \leq_e R \text{ vardır}\}$$

kümesi M' nin bir alt modülüdür. Buna M' nin singüler alt modülü denir. $Z(M) = \{m \in M : r(m) \leq_e R\}$ olduğu kolayca görülebilir. $Z(M) = M$ ise M' ye singüler, $Z(M) = 0$ ise M' ye nonsingüler modül denir.

Tanım 4 *M, bir $R-$modül ve N, M' nin alt modülü olsun. Herhangi bir $K \leq M$ için $N + K = M$ iken $N = M$ oluyorsa N' ye küçük (small, superfluous) alt modül denir ve $N \leq_s M$ ile gösterilir.*

Önerme 5 *M bir $R-$modül, $K \leq N \leq M$ ve $H \leq M$ olsun. Bu durumda;*

(i) $N \leq_s M$ *dir ancak ve ancak* $K \leq_s M$ *ve* $N/K \leq_s M/K$ *dir.*

(ii) $H + K \leq_s M$ *dir ancak ve ancak* $H \leq_s M$ *ve* $K \leq_s M$ *dir.*

(*bakınız* [2]) .

1.2 Yarı Basit (Semisimple) ve Ayrıştırılamaz (Indecomposable) Modüller

Tanım 6 *M, bir $R-$modül olsun. $N \leq M$ alalım. Eğer $\exists\, N' \leq M$ için $N \cap N' = 0$ ve $M = N + N'$ ise M' ye N ile N'' nün dik toplamı denir ve $M = N \oplus N'$ ile gösterilir. Bu durumda N ile N'' ne de M' nin dik toplananı denir. $N \leq_d M$ ile gösterilir. Özel olarak $M = R$ halkası için, $I = eR$ olacak biçimde $e^2 = e \in R$ idempotent elemanı varsa I, R' de dik toplanandır.*

Tanım 7 *Bir M, $R-$modülünün sıfırdan ve kendisinden başka dik toplananı yoksa M' ye ayrıştırılamaz modül denir.*

Tanım 8 *Bir M, $R-$modülünün sıfırdan ve kendisinden başka alt modülü yoksa M' ye basit modül, M' nin her alt modülü M' nin bir dik toplananı ise M' ye yarı basit modül denir.*

Teorem 9 *M, $R-$modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) M, yarı basittir.

(ii) M' nin her alt modülü basit alt modüllerin toplamıdır.

(iii) M, basit alt modüllerin toplamıdır.

(iv) M, basit alt modüllerin bir dik toplamıdır.

(v) M' nin öz essential alt modülü yoktur.

(bakınız [3]*).*

Tanım 10 *$\sum \{N \leq M : N,\ M$' de basit alt modül olsun$\} = \cap \{K \leq M : K \leq_e M\}$ kümesine M' nin Socle' ı denir ve $SocM$ ile gösterilir. Eğer M modülünde basit alt modül yoksa $SocM = 0$ olarak tanımlanır. Özel olarak $M = R$ için $SocR_R = \sum \{I : I,\ R$' de minimal sağ ideal$\}$ dir.*

Lemma 11 *R birimli bir halka olsun. Bu durumda; $SocR_R$, R'nin idealidir.*

Kanıt. $SocR_R$, R'nin sağ ideali olduğundan $SocR_R$' nin R'de sol ideal olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $a \in R$ alalım. O halde; aR, R' de sağ idealdir. $\varphi : I \to aI$, R homomorfizmasını $\varphi(r) = ar$ olarak tanımlayalım. Buradan; φ bir epimorfizmadır. Böylece; $aI = Im\varphi \cong I/ker\varphi$ olup aI basit veya sıfırdır. Öyleyse aI sıfır veya minimal sağ idealdir. Buradan; $aI \subseteq SocR_R$ dir. Böylece; $a(SocR_R) = \sum \{aI : I, \text{minimal sağ ideal}\} \subseteq SocR_R$ dir. Dolayısıyla her $a \in R$ için $a(SocR_R) \subseteq SocR_R$ dir. Yani; $SocR_R$' nin R'de sol idealdir. ■

1.3 Komplement Alt Modüller

Tanım 12 *i) $A \leq M$ olsun. $A \cap B = 0$ özelliğine göre maksimal olan bir B alt modülüne A' nın M' deki komplementi denir. Zorn Lemma' nın bir uygulaması olarak her alt modülün bir komplementi vardır.*

ii) $A \leq M$ olsun. Eğer A, M' deki bir alt modülün komplementi ise A' ya komplement alt modül denir ve $A \leq_c M$ ile gösterilir. Örneğin her dik toplanan bir komplement alt modüldür.

iii) Bir M modülünde her komplement alt modül bir dik toplanan ise M' ye $CS-$modül denir.

Bir M modülünün CS olması için gerek ve yeter koşul M' nin her alt modülünün bir dik toplanan içinde essential olarak kapsanmasıdır. CS-modüller ile ilgili kavramlar için [1] ve [4] önerilir.

Önerme 13 *A, B' nin M' deki komplementi ise $B \leq_e C \leq M$ olacak biçimde A' nın bir C komplementi vardır.* (*bakınız* [2]).

Önerme 14 *$A \leq M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) $A \leq_c M$ dir.

(ii) $A \leq B \leq_e M$ ise $B/A \leq_e M/A$ dır.

(bakınız [2]).

Önerme 15 *$C \leq_c N \leq_c M$ ise $C \leq_c M$ dir.*

Kanıt. S; C' nin N' deki komplementi ve T; N' nin M' deki komplementi olsun. İddamız; $S \oplus T$; C' nin M' deki komplementidir. $C \lneqq D \leq M$ olacak şekilde D alt modülünü alalım. $D \cap (S \oplus T) \neq 0$ olduğunu göstermeliyiz. $D \cap N = C$ dir. Aksi taktirde $D \cap N \cap S \neq 0$ olur. Buradan; $d \in D/N$ vardır öyleki $(N + dR) \cap T \neq 0$ bulunur. Yani;

$$n + dr = t \neq 0; \quad n \in N,\ r \in R,\ t \in T \tag{1}$$

dir. Eğer, $n \in C$ ise $n + dr \in D$ olur ve ispat biter. $n \notin C$ ise

$$c + nr' = s \neq 0; \quad c \in C,\ r' \in R,\ s \in S \tag{2}$$

dir. (2)' den r' (1)'i çıkartırsak

$$c - drr' = s - tr' \in (D \cap (S \oplus T)) / \{0\}$$

dir. ∎

1.4 Düzgün (Uniform) Modüller ve Düzgün Boyut

Tanım 16 *M, sıfırdan farklı $R-$modül olsun. Her $0 \neq X, Y \leq M$ için $X \cap Y \neq 0$ ise M' ye düzgün modül denir. Denk olarak M' nin sıfırdan farklı her alt modülü M' de essential alt modüldür.*

Önerme 17 *U, M' nin düzgün alt modülü olsun. $U \leq_c M$ dir ancak ve ancak U, M' nin maksimal düzgün alt modülüdür.* (*bakınız* [1]).

Tanım 18 *M modülü, sıfırdan farklı alt modüllerin sonsuz bir dik toplamını kapsamıyorsa M' ye sonlu (Goldie) boyutlu denir. Bir M modülünün sonlu Goldie boyutuna sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul öyle bir pozitif n tamsayısı ve U_i $(1 \leq i \leq n)$ düzgün alt modüller vardır öyleki $\bigoplus_{i=1}^{n} U_i$ alt modülleri M' de essentialdır. Bu durumda, n sayısı M modülü için değişmezdir ki buda M' nin Goldie boyutu olarak adlandırılır. Özel olarak bir M modülünün Goldie boyutu sıfırdır ancak ve ancak $M = 0$ dır. Yine Goldie boyutu bir olan bütün modüller düzgündür.*

1.5 Projektif ve İnjektif Modüller

Tanım 19 *R bir halka ve P bir $R-$modül olsun. Eğer her $\beta : M \to N$ epimorfizması ve her $\varphi : P \to N$ homomorfizması için $\beta\varphi' = \varphi$ olacak biçimde $\varphi' : P \to M$ homomorfizması varsa, yani;*

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \varphi' \swarrow & \downarrow \varphi \\ & M & \xrightarrow{\beta} N \to 0 \text{ ....(tam)} \end{array}$$

diagramı değişmeli ise P' ye projektif modül denir.

Tanım 20 *i) M bir modül ve $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ M' nin elemanlarının bir kümesi olsun. I' nın her sonlu ve farklı elemanlarından oluşan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ dizisi ve her $r_1, r_2, ..., r_n \in R$ için*

$$r_1 x_{\alpha_1} + r_2 x_{\alpha_2} + ... + r_n x_{\alpha_n} = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = ... = r_n = 0$$

oluyorsa $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ kümesine doğrusal bağımsızdır denir.

ii) Bir M modülünü üreten doğrusal bağımsız bir küme varsa M' ye bir serbest (free) $R-$modül denir.

Tanım 21 *R bir halka ve Q bir R−modül olsun. Eğer her $\beta : W \to V$ monomorfizması ve her $\alpha : W \to Q$ homomorfizması için $\gamma\beta = \alpha$ olacak biçimde $\gamma : V \to Q$ homomorfizması varsa, yani;*

$$\begin{array}{ccc} 0 \to W & \xrightarrow{\beta} & V \;.......(tam) \\ \alpha \downarrow & \swarrow \gamma & \\ Q & & \end{array}$$

diagramı değişmeli ise Q' ye injektif modül denir.

Tanım 22 *A bir R−modül olsun. Her $X \leq A$ için herhangi $\varphi : X \to N$ homomorfizması, $\gamma : A \to N$ homomorfizmasına genişliyorsa N' ye A−injektif modül denir. Eğer; A modülü A−injektif ise A' ya yarı injektif modül denir.*

Tanım 23 *A bir R−modül olsun. Her $X \leq A$ için herhangi $\varphi : N \to A/X$ homomorfizması, $\varpi : N \to A$ homomorfizmasına genişliyorsa N' ye A−projektif modül denir. Eğer; A modülü A−projektif ise A' ya yarı projektif modül denir.*

Önerme 24 *M bir R−modül ve A bir indis kümesi olmak üzere $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ R−modül olsun.*

1) $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, *M−projektiftir ancak ve ancak her $\alpha \in A$ için U_α, M−projektiftir.*
2) $\prod\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, *M−injektiftir ancak ve ancak her $\alpha \in A$ için U_α, M−injektiftir.*
(*bakınız* [5]).

1.6 Tam ve Split Dizi

Tanım 25 *M bir R−modül olsun. M' nin her $M_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} M_i \xrightarrow{\alpha_i} M_{i+1}$ alt dizisi için;*

(*i*) $im(\alpha_{i-1}) = ker(\alpha_i)$ *oluyorsa; M' ye tam dizi denir.*

(*ii*) $im(\alpha_{i-1}) = ker(\alpha_i) \leq_d M_i$ *oluyorsa; M, tam dizisine split tam dizi denir.*

Önerme 26 *U bir $R-$modül olsun.*

1) $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *dizisi tam ve U, $M-$injektif ise U, hem $M'-$injektif hemde $M''-$injektiftir.*

2) A bir indis kümesi olmak üzere her $\alpha \in A$ için U, $M_\alpha-$imjektif ise U, $\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha-$injektiftir.

(*bakınız* [5]).

1.7 Özel Tipteki Matris Halkaları

S ve T birimli, değişmeli olması gerekmeyen halkalar olmak üzere M, sol $S-$, sağ $T-$bimodül olsun. Bu durumda;

Tanım 27 $R = \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & T \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} s & m \\ 0 & t \end{bmatrix} : s \in S,\ m \in M,\ t \in T \right\}$ *kümesi bilinen matris işlemleri ile birimli, değişmeli olması gerekmeyen bir halkadır. R' ye parçalı aşikar genişleme denir.*

Tanım 28 *S birimli, değişmeli olması gerekmeyen halka olmak üzere M, sol $S-$, sağ $S-$bimodül olsun. Bu durumda;*

$$R = \begin{bmatrix} S & M \\ 0 & S \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} s & m \\ 0 & s \end{bmatrix} : s \in S,\ m \in M \right\}$$

kümesi bilinen matris işlemleri ile birimli, değişmeli olması gerekmeyen bir halkadır. R' ye S' nin M ile aşikar genişlemesi denir ve $R = S \propto M$ ile gösterilir.

2. SIP' ye Sahip Modüller

Bu bölümde çalışmanın temelini oluşturan dik toplanan kesişim özelliğini, yani SIP' yi sağlayan modüller ve temel özellikleri verilecektir. Bu özelliğe sahip değişmeli gruplar ($Z-$modüller) hakkında ayrıntılı bilgi için [6] önerilir.

Irving Kaplansky bir temel ideal bölgesi üzerinde tanımlı serbest modülde herhangi iki dik toplananın kesişiminde bir dik toplanan olduğunu gösterdi [7]. Bundan bir yıl sonra Laszlo Fuchs "Infinite Abelian Groups" adlı kitabında, gruplarda herhangi iki dik toplananın kesişiminin dik toplanan olması karakterizasyonunu sordu [8, problem 9]. Yani, SIP' ye sahip abel grupların ($Z-$modüllerin) karakterizasyonunu sordu. Bu soru, George V. Wilson tarafından farklı halkalar üzerinde tanımlı modüller için yanıtlandı [6]. Wilson' ın bu çalışmasından sonra SIP' ye ilişkin çeşitli çalışmalar yapıldı ([9], [10], [11], [12]).

SIP' nin modüller için tanımını vererek başlayalım.

Tanım 29 *M bir $R-$modül olsun. M' nin herhangi iki dik toplananının kesişimi, dik toplanan ise M' ye SIP (Summand Intersection Property)' ye sahiptir denir. Eğer M' nin herhangi bir sayıdaki dik toplananının kesişimi dik toplanan ise M' ye SSIP (Strong Summand Intersection Property)' ye sahiptir denir.*

R bir halka olsun. R, $R-$modül olarak SIP' ye sahip ise R halkasına *SIP' ye sahip halka* denir. Yani, R' nin idempotent tarafından üretilen herhangi iki sağ ideali için bunların kesişimi yine bir idempotent tarafından üretiliyorsa R, SIP' ye sahiptir denir.

Yarı basit, ayrıştırılamaz modüller ve temel ideal bölgesi üzerindeki serbest modüller SIP' ye sahip modüllere ve Z' de SIP' ye sahip halkalara örnek teşkil ederler.

Herhangi bir $R-$modülün SSIP' ye sahip iken SIP' ye sahip olduğu aşikardır. Bunun tersi ise doğru değildir. Örneğin; $M_Z = (\bigoplus_{i=1}^{\infty} Z)_Z$ için M, SIP' ye sahip fakat SSIP' ye sahip değildir.

Bir modül özelliği verildiğinde bunun hangi alt modüller için aktarılacağını bilmek çalışmalarda önemli bir yer teşkil eder. Aşağıdaki lemma ile SIP ve SSIP' nin dik toplananlarına taşındığı verilmiştir.

Lemma 30 *M bir $R-$modül olsun. Eğer M, SIP (SSIP)' ye sahip ise M' nin her dik toplananıda SIP (SSIP)' ye sahiptir.*

Kanıt. M, $R-$modülü SIP' ye sahip ve $X \leq_d M$ olsun. X' de K ve L gibi iki dik toplanan alalım. Açıkça K ve L; M' nin dik toplananları olup M, SIP' ye sahip olduğundan $K \cap L$, M' nin dik toplananıdır. Öyleyse $M = (K \cap L) \oplus D$ olacak şekilde M' nin bir D alt modülü vardır. Buradan,

$$X = X \cap M = X \cap ((K \cap L) \oplus D) = (K \cap L) \oplus (X \cap D)$$

olup $K \cap L \leq_d X$ dir. Yani; X, SIP' ye sahiptir. SSIP içinde benzer yol izlenir. ∎

Aşağıdaki teoremle SIP' ye sahip olmanın denk koşulları verilecektir. Bunlar dönüşümler cinsinden karakterizasyondur.

Teorem 31 *M bir $R-$modül olsun.*

(i) M, SIP' ye sahiptir ancak ve ancak her $S, T \leq_d M$ ve $\pi : M \longrightarrow S$ projektif dönüşümü için $\ker(\pi\mid_T) \leq_d M$ dir.

(ii) M, SIP' ye sahiptir ancak ve ancak her $S \oplus T \leq_d M$ ve $\alpha : S \longrightarrow T$ dönüşümü için $\ker\alpha \leq_d S$ dir.

Kanıt. (i) $(\Rightarrow)$ M, SIP' ye sahip $R-$modül olsun. $S,T \leq_d M$ ve $\pi : M \to S$ projektif dönüşümü alalım. $M = S \oplus S'$ olacak şekilde $S' \leq M$ vardır ve $ker\pi = S'$ dür. Gerçekten; $ker\pi \cap S = 0$ olduğundan, $ker\pi \leq S'$ dür ve $x = s + s' \in M$, $s \in S$, $s' \in S'$ için $\pi(x) \in S$ dir. Öyleyse, $\pi(\pi(x)) = \pi(x)$ dir. Buradan, $\pi(\pi(x) - x) = 0$ olup $\pi(x) - x \in ker\pi$ ve $x \in ker\pi + S$ dir. $x = s + s'$ olduğundan, $s' \in ker\pi$ dir. Yani, $ker\pi = S'$ dür. Açıkça $ker(\pi|_T) = S' \cap T$ dir. $S', T \leq_d M$ ve M, SIP' ye sahip olduğundan $S' \cap T \leq_d M$ dir. Yani $ker(\pi|_T) \leq_d M$ dir.

$(\Leftarrow)$ Tersini kabul edelim ve $S,T \leq_d M$ olsun. Öyleyse, $M = S \oplus S'$ olacak şekilde $S' \leq M$ vardır. $\alpha : M \to S'$ projektif dönüşüm olsun. Kabulden, $ker(\pi|_T) \leq_d M$ dir. Açıkça, $ker(\pi|_T) = S \cap T$ dir. Yani; M, SIP' ye sahiptir.

(ii) $(\Rightarrow)$ M, SIP' ye sahip $R-$modül; $S \oplus T \leq_d M$ ve $\alpha : S \to T$ dönüşüm olsun. $s \in S$ ve $t \in T$ için $S \oplus T$' de $S_1 = \{(s, \alpha(s))\}$, $U = \{(0,t)\}$ ve $S_2 = \{(s,0)\}$ alt modüllerini göz önüne alalım. Açıkça S_1 ile S_2; $S \oplus T$' nin dik toplananları olup U' nun komplementidir. Ek olarak $S_1 \cap S_2 = \{(s,0) : s \in ker\alpha\}$ dır ve $S \oplus T$, M' nin dik toplananı olduğundan Lemma 30 gereği $S \oplus T$' de SIP' ye sahiptir. Bu durumda $S_1 \cap S_2 \leq_d S \oplus T$ dir. Yani, $ker\alpha \leq_d S$ dir.

$(\Leftarrow)$ Tersi doğru olsun ve $S,T \leq_d M$ alalım. Bu durumda, $M = S \oplus S' = T \oplus T'$ olacak şekilde $S', T' \leq M$ vardır. $\sigma : M \to S$, $\tau : M \to T$ kanonik projeksiyonlarını göz önüne alalım. $\varepsilon = ((\sigma - 1)\circ\tau)|_S : S \to S'$ olarak tanımlayalım. Kabulden $ker\varepsilon \leq_d S$ olup $ker\varepsilon = (S \cap T) \oplus (S \cap T')$ olduğundan $S \cap T \leq_d M$' dir. Yani M, SIP' ye sahiptir. ■

Lemma 30 ile bir M, $R-$modülün SIP' ye sahip iken her dik toplananınında bu özelliğe sahip olduğunu belirtmiştik. SIP' ye sahip modüllerin bir ailesinin dik toplamının SIP' ye sahip olması gerekmez. Şimdi vereceğimiz örnek bu duruma ilişkin olacaktır. Bu örneğin genel durumu [13]' te verilmiştir.

Örnek 32 *$M_Z = (Z \oplus 0)_Z \oplus (0 \oplus (Z/2Z))_Z = (Z \oplus (Z/2Z))_Z$ olsun. Burada, $(Z \oplus 0)_Z$ ve $(0 \oplus (Z/2Z))_Z$ modülleri SIP' ye sahip birer modüldür. Ancak; M_Z, SIP' ye sahip değildir.*

Kanıt. M' nin,

$$A = \left(1, \overline{0}\right) Z = \left(Z \oplus 0\right)_Z$$

ve

$$B = \left(1, \overline{1}\right) Z = \{(x, \overline{x}) : x \in Z\}$$

alt modüllerini göz önüne alalım. A' nın dik toplanan olduğu aşikardır. B için ise $X = \left(0, \overline{1}\right) Z$ modülünü ele aldığımızda $X \cap B = 0$ ve $(m, \overline{n}) \in M$ için

$$(m, \overline{n}) = m\left(1, \overline{1}\right) + (n - m)\left(0, \overline{1}\right)$$

olup $M = X + B$ dir. Yani; $M = X \oplus B$ dir. Şimdi $A \cap B$ alt modülünü bulalım. $A \cap B = C$ olsun. $(x, \overline{y}) \in C$ için $\left(b, \overline{b}\right) = (x, \overline{y}) = \left(a, \overline{0}\right)$ olup $b = x = a$ ve $\overline{b} = \overline{y} = \overline{0}$ dan $C = \left(2, \overline{0}\right) Z$ elde edilir. $C \leq_e A$ olduğundan C, M' de komplement değildir. Yani C, M' nin dik toplananı değildir. Öyleyse M, SIP' ye sahip değildir. ■

SIP veya SSIP' ye sahip modüllerin dik toplamlarının hangi koşul altında bu özelliklere sahip olduğu verilecektir. Ancak bunun için gerekli olan *fully invariant* alt modül tanımını verelim.

Tanım 33 *Her $f \in End_R(M)$ için $f(B) \leq B$ ise B' ye M' nin fully invariant alt modülü denir. Açıkça iki fully invariant alt modülün kesişimi ve toplamıda fully invariant alt modüldür.*

Teorem 34 *M, $R-$modülü; $i \in I$ olmak üzere M_i fully invariant alt modüllerinin dik toplamı, yani $M = \left(\bigoplus\limits_{i \in I} M_i\right)$ olsun. Bu durumda; M, SIP (SSIP)' ye sahiptir ancak ve ancak her $i \in I$ için M_i, SIP (SSIP)' ye sahiptir.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ Her $i \in I$ için $M_i \leq_d M$ olduğundan Lemma 30 gereği doğrudur.

$(\Leftarrow)$ M' de bir S dik toplananı alalım. Her fully invariant M_i alt modülü ve $\pi : M \to S$ kanonik dönüşümü için $\pi(M_i) \subseteq S \cap M_i$ dir. Her $s \in S$ için $m_i \in M_i$

olmak üzere $s = \sum m_i$ olarak yazalım. Buradan $s = \pi(s) = \sum \pi_s(m_i)$ dir. Öyleyse, $S \subseteq \oplus\pi(M_i) \subseteq \oplus(S \cap M_i) \subseteq S$ dir. Yani, $S = \oplus(S \cap M_i)$ dir. M' nin S ve T gibi iki dik toplananını alalım. Bu durumda,

$$S \cap T = [\oplus(S \cap M_i)] \cap [\oplus(T \cap M_i)] = \oplus[(S \cap M_i) \cap (T \cap M_i)]$$

dir. Her $i \in I$ için M_i, SIP' ye sahip olduğundan $S \cap T \leq_d M$ dir. Yani; M, SIP' ye sahiptir. SSIP içinde benzer yol izlenir. ■

Tanım 35 *R bir halka olsun. R' nin her ideali (sonlu üretilmiş ideali)projektif ise R' ye hereditary (yarı hereditary)halka denir.*

Önerme 36 *a) Bütün projektif $R-$modüller SIP' ye sahiptir ancak ve ancak R hereditarydir.*

b) R halkası için aşağıdaki koşullar denktir.

(i) R, yarı basittir.

(ii) Bütün $R-$modüller SSIP' ye sahiptir.

(iii) Bütün $R-$modüller SIP' ye sahiptir.

(iv) Bütün injektif $R-$modüller SIP' ye sahiptir.

Kanıt. a) Varsayalımki; R hereditary halka, P projektif $R-$modül ve P_1 ve P_2, P' nin dik toplananları olsun. Herhangi bir $\sigma : P_1 \to P_2$ dönüşümü için $im\sigma$ projektiftir. Dolayısıyla σ splittir. Buradan; $ker\sigma$, P_1' in dik toplananıdır ve Teorem 31 gereği P, SIP' ye sahiptir. Tersine bütün projektif $R-$modüller SIP' ye sahip olsun. P, herhangi bir projektif $R-$modül ve N' de P' nin alt modülü alalım. F, serbest modülünü $\sigma : F \to N$ epimorfizma olacak şekilde seçelim. $F \oplus P$ projektif olup kabul gereği SIP' ye sahiptir ve Teorem 31 gereği $ker\sigma \leq_d F$ dir. $N = im\sigma$, $ker\sigma$' nın komplementine izomorfik ve dolayısıyla projektiftir. Yani; R, hereditary halkadır.

b) $(i) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$ ve $(iii) \Rightarrow (iv)$ ifadelerinin ispatları açıktır. Bütün injektif $R-$modüller SIP' ye sahip olsun. Herhangi bir M, $R-$modülü ve E_1 injektif $R-$modülü için $\sigma_1 : M \to E_1$ monomorfizma olsun. Benzer şekilde; E_2 injektif $R-$modülü için $\sigma_2 : E_1 / im\sigma_1 \to E_2$ monomorfizma olsun. $E_1 \oplus E_2$ injektif $R-$modül olup kabul gereği SIP' ye sahip olduğundan $M \cong ker\sigma_2 \leq_d E_1$ dir. Böylece M injektiftir. Dolayısıyla R, yarı basittir. ∎

Yukarıdaki önerme ile Kaplansky' nin gözlemini hemen elde ederiz. Bu önermede SIP' nin bazı özel halkalar üzerindeki karakterizasyonu yapılmıştır. [6], [9] ve [10]' da SIP' nin değişik halkalar üzerindeki karakterizasyonu incelenmişitir. X' den reel sayılar kümesine tanımlı olan sürekli fonksiyonların kümesi olan $C(X)$; bilinen fonksiyon işlemleri altında bir birimli halkadır. Bu $C(X)$ halkasının SIP' ye hangi koşullar altında sahip olduğu ayrıntılı bir şekilde Azarpanah tarafından [12]' de incelenmişitr.

CS modül ile SIP' ye sahip modül aileleri arasında direkt gerektirme yoktur. Örnek 70' te verilecek olan halka CS modüldür ama SIP' ye sahip değildir. Diğer yandan;

Örnek 37 *F bir cisim, V' de F üzerinde bir vektör uzayı ve $dimV_F = n \geq 2$ olsun.*

$$R = \begin{bmatrix} F & V \\ 0 & F \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & v \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in F,\ v \in V \right\}$$

F' nin V ile aşikar genişlemesi olsun. R, $R-$modül olarak ayrıştırılamaz dolayısıyla SIP' ye sahip ama $dimV_F = 1$ iken CS diğer durumlarda CS değildir.

Lemma 38 *(i) M bir modül, X; M' nin CS alt modülü ve D, M' nin dik toplananı olsun. Eğer $D + X$ nonsingüler ise $D \cap X$; X' in dik toplananıdır.*

(ii) M nonsingüler ve X $CS-$modül ise X ile M' nin herhangi bir dik toplananının kesişimi X' in dik toplananıdır.

Kanıt. (i) D, M' nin dik toplananı ve $Y = D \cap X$ olsun. X; CS olduğundan, $Y \leq_e C \leq_d X$ olacak şekilde X' de C alt modülü vardır. Varsayalım ki $Y \neq C$ olsun. Buradan; $D \neq D + C$ olur. Yani; $d \in D$ ve $c \in C$ için $d + c \notin D$ dir. R' de bir L essential sağ ideali vardır öyleki $0 \neq cL \subseteq Y$ dir. D nonsingüler olduğundan $0 \neq (d + c)\, L \subseteq D$ dir. Buradan; D, $D + C$' de essential olup kabul ile çelişir. Yani; $Y = C \leq_d X$ dir.

(ii) İspatının ilk kısmından açıkça görülür. ■

Yukarıdaki Lemma 38' in (ii) şıkkından aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 39 *Her nonsingüler CS−modül SIP' ye sahiptir.*

3. SSP' ye Sahip Modüller

Bu bölümde SIP' ye sahip modüllere dual olarak tanımlanan dik toplananların toplamı özelliğine yani SSP' ye sahip modüller verilecektir. Bu bölüm SSP' ye sahip modüllerin tanım ve temel özellikleri yanında SSP ile SIP arasındaki gerektirmeleri içermektedir. SSP' ye sahip modüller hakkında daha ayrıntılı bilgi için [14] ve [15] tavsiye edilir.

Şimdi, Garcia tarafından [14]' te verilen SSP' yi tanımlayacağız.

Tanım 40 *M bir $R-$modül olsun. M' nin herhangi iki dik toplananının toplamı, dik toplanan ise M' ye SSP (Summand Sum Property)' ye sahiptir denir.*

R bir halka olsun. R, $R-$modül olarak SSP' ye sahip ise R halkasına SSP' ye sahip halka denir. Yani, R' nin idempotent tarafından üretilen iki sağ ideali için bunların toplamı yine bir idempotent tarafından üretiliyorsa R, SSP' ye sahiptir denir.

Örnek 32' den $M = (Z \oplus (Z/2Z))_Z$ nin SIP' ye sahip olmadığı bilinmektedir. Fakat, tanımdan M' nin SSP' ye sahip olduğu görülür.

Aşağıdaki önerme ile SIP' de olduğu gibi SSP' nin de dik toplananlarına taşındığını vereceğiz.

Önerme 41 *M bir $R-$modül olsun. Eğer M, SSP' ye sahip ise M' nin her dik toplananı da SSP' ye sahiptir.*

Kanıt. M, $R-$modülü SSP' ye sahip ve $L \leq_d M$ olsun. $U, V \leq_d L$ alalım. Açıkça $U, V \leq_d M$ dir. Kabul gereği $U + V \leq_d M$ dir. Öyleyse $M = (U + V) \oplus X$ olacak şekilde $X \leq M$ vardır.

$$L = L \cap M = L \cap ((U + V) \oplus X) = (U + V) \oplus (L \cap X)$$

dir. Buradan, $U + V \leq_d L$ dir. Yani; L, SSP' ye sahiptir. ∎

Aşağıdaki önerme ile SIP' ye sahip modüllerinkine benzer şekilde, SSP içinde dönüşümler cinsinden karakterizasyon verilecektir.

Önerme 42 *M bir $R-$modül olsun. M, SSP' ye sahiptir ancak ve ancak her $L, N \leq_d M$ için $\alpha : M \to N$ kanonik projeksiyonunun L' ye kısıtlanmış görüntüsü N' nin dik toplananıdır.*

Kanıt. $(\Rightarrow)$ M, SSP' ye sahip $R-$modül; $L, N \leq_d M$ ve $\alpha : M \to N$ kanonik projeksiyon olsun. $M = N \oplus N'$ olacak şekilde M' nin N'alt modülü vardır. $im\,(\alpha\,|_L) = \alpha\,(L) = (L + N') \cap N$ olduğunu görelim. $\alpha\,(L) \leq N$ ve $\alpha\,(L) \leq L + N'$ olduğundan $\alpha\,(L) \leq (L + N') \cap N$ dir. Diğer taraftan; $y \in (L + N') \cap N$ için, $y \in N$ ve $y = n' + l$ olacak şekilde $n' \in N'$ ve $l \in L$ vardır. Öyleyse;

$$y = \alpha\,(y) = \alpha\,(n' + l) = \alpha\,(n') + \alpha\,(l) = \alpha\,(l) \in \alpha\,(L)$$

dir. Buradan; $(L + N') \cap N \leq \alpha\,(L)$ olup, $(L + N') \cap N = \alpha\,(L)$ bulunur. Şimdi de $\alpha\,(L) \oplus N' = L + N'$ olduğunu görelim.

$$\alpha\,(L) + N' = ((L + N') \cap N) + N' = ((L + N') + N') \cap (N + N') = L + N'$$

ve $\alpha\,(L) \cap N' \leq N \cap N' = 0$ olduğundan, $\alpha\,(L) \oplus N' = L + N'$ dür. M, SSP' ye sahip olduğundan $L + N' \leq_d M$ dir. Buradan, $\alpha\,(L) \leq_d M$ olup $M = \alpha\,(L) \oplus X$ olacak şekilde $X \leq M$ vardır.

$$N = N \cap M = N \cap (\alpha\,(L) \oplus X) = \alpha\,(L) \oplus (N \cap X)$$

dir. Böylece $\alpha(L) \leq_d N$ dir.

($\Leftarrow$) Tersi doğru olsun. $L, N \leq_d M$ alalım. $M = N \oplus N'$ olacak şekilde M' nin N' alt modülü vardır. $\pi : M \longrightarrow N'$ kanonik projeksiyonunu göz önüne alalım. Kabulden, $im(\pi|_L) = \pi(L) \leq_d N'$' dür. Buradan; $\pi(L) = (L+N) \cap N'$ olup, $\pi(L) \oplus N \leq_d N \oplus N' = M$ ve $\pi(L) \oplus N = L + N$ dir. Böylece, $L + N \leq_d M$ dir. Yani M, SSP' ye sahiptir. ∎

Önerme 43 *$L \oplus N$; SSP' ye sahip ve $f : L \longrightarrow N$ homomorfizma ise $imf \leq_d N$ dir.*

Kanıt. Teorem 31-(*ii*)' nin ispatında kesişim yerine alt modüllerin toplamı alınarak istenilen sonuç elde edilir. ∎

Bir sonraki örnek , SSP ve SIP' ye sahip modül ailelerinin farklı iki modül ailesi olduğunu gösterecektir.

Örnek 44 *$M = Z \oplus Z$, $Z-$modül olarak alalım. O halde, M_Z SIP' ye sahip ama SSP' ye sahip değildir.*

Kanıt. Z, temel ideal bölgesi ve M serbest $Z-$modül olduğundan M_Z SIP' ye sahiptir. Diğer yandan $\alpha : Z \longrightarrow Z$' yi $0, 1 \neq n \in Z$ için $\alpha(x) = nx$ olarak tanımlayalım. $im\alpha = nZ$ dir. $M_Z = nZ \oplus K$ kabul edelim. Buradan, $K = mZ$ olacak şekilde $m \in Z$ vardır. Oysa, $nm \in nZ, mZ$ olup $nm \in nZ \cap mZ = 0$ dan $m = 0$ ve böylece $n = 1$ dir. Buda, kabul ile çelişir. Yani; nZ, Z' nin dik toplananı değildir. Önerme 43' den SSP' ye sahip değildir. ∎

SSP' ye sahip modüller SIP' ye sahip modüllerin duali olarak tanımlandığından benzer sonuçlar elde edilmektedir. Bu yüzden; şimdi bazı ek koşullar altında SIP ile SSP arasındaki gerektirmeleri inceleyelim.

Önerme 45 *M, yarı injektif (yarı projektif) sol $R-$modül olsun. M, SIP (SSP)' ye sahip ise M, SSP (SIP)' ye sahiptir.*

Kanıt. M, SIP' ye sahip yarı injektif $R-$modül olsun. L, $N \leq_d M$ ve $\pi : M \to N$ kanonik projeksiyon alalım. Kabulden $ker\pi \cap L \leq_d M$ dir. Fakat,

$$0 \to ker\pi \cap L \to L \to im\,(\pi\,|_L) \to 0$$

tam dizisi splittir. Öyleyse $im\,(\pi\,|_L)$, L' nin dik toplananına izomorfiktir. Buradan; $im\,(\pi\,|_L)$, $M-$injektif ve $N-$injektiftir (bakınız Önerme 24, Önerme 26). Buradan da $im\,(\pi\,|_L) \leq_d N$ dir. Dolayısıyla, Önerme 42' den M, SSP' ye sahiptir. Parantez içindeki kısmda benzer şekilde gösterilir. ■

Açıkça yarı basit ve ayrıştırılamaz modüller SIP ve SSP' ye sahiptir. Bu iki modülün dışında hiç bir modül hem SIP' ye hem de SSP' ye sahip olamaz. Bu sonuç, Önerme 36' dan ve şimdi vereceğimiz önermeden elde edilir.

Önerme 46 *Her projektif (injektif) sol $R-$modül SSP' ye sahiptir ancak ve ancak R yarı basittir (hereditarydir).*

Kanıt. Önerme 36' nın ispatındaki yol izlenerek kolayca elde edilir. ■

SIP ile SSP arasındaki gerektirmeler [16]' da da incelenmiş olup aşağıdaki bazı sonuçlar [16]' da ispatlanmıştır.

Lemma 47 *M, $R-$modül ve $S = End\,(M_R)$ olsun. Bir $m \in M$ için aşağıdaki ifadeler denktir.*

1) *$mR \to M$ olan her $R-$dönüşümü M' nin bir endomorfizmasına genişler.*

2) *$l_M r_R\,(m) = Sm$ dir.*

3) *$n \in M$ için $r_R\,(m) \subseteq r_R\,(n)$ ise $Sn \subset Sm$ dir.*

4) *$\alpha, \beta : mR \to M$; $R-$homomorfizması ve β, $1-1$ ise $\gamma : M \to M$ vardır öyleki $\gamma o \beta = \alpha$ dir. Yani;*

$$\begin{array}{ccc} 0 \to mR & \xrightarrow{\beta} & M \\ \alpha \downarrow & \swarrow \gamma & \\ M & & \end{array}$$

diagramı tamdır. Bu koşul altında; $n \in l_M r_R(m)$ ve her $r \in R$ için $\lambda_n(mr) = nr$ iken

$$\begin{array}{rcl} \phi : l_M r_R(m) & \longrightarrow & hom_R(mR, M) \\ n & \longrightarrow & \lambda_n \end{array}$$

dönüşümü $S-$izomorfizmadır.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) $Smr_R(m) = 0$ olduğundan $Sm \subseteq l_M r_R(m)$ dir. Tersine $n \in l_M r_R(m)$ alalım. $\gamma : mR \to M$ fonksiyonu $\gamma(mr) = nr$ ile tanımlansın. $\bar{\gamma}$; γ' nın S' deki genişlemesi olsun. Buradan, $n = \gamma(m) = \bar{\gamma}(m) \in Sm$ olup (2) sağlanır.

(2) $\Rightarrow$ (3) $r_R(m) \subseteq r_R(n)$ ise $n \in l_M r_R(m)$ dir. Böylece (2)' den $n \in Sm$ dir.

(3) $\Rightarrow$ (4) β, birebir olduğundan $r_R(\beta m) \subseteq r_R(\alpha m)$ elde ederiz. Bu yüzden $\alpha m \in S\beta m$ dir. $\gamma \in S$ için $\alpha m = \gamma\beta m$ olduğunu söyleriz. Buradan, $\gamma o \beta = \alpha$ elde edilir.

(4) $\Rightarrow$ (1) açık. ■

M, $R-$modülünde; M' nin her m elemanı için yukarıdaki önermenin koşullarından herhangi biri sağlanıyorsa M' ye *principally quasi-injektif* veya kısaca *$PQ-$injektif* denir. Bir sonraki önerme [16, Önerme 1.6] dır.

Önerme 48 *M_R; $PQ-$injektif modül, $S = End(M_R)$ ve $A, B_1, B_2, ..., B_n$; M_R' nin fully invariant alt modülleri olsun. $B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_n$ için,*

$$A \cap (B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_n) = (A \cap B_1) \oplus (A \cap B_2) \oplus ... \oplus (A \cap B_n)$$

dir.

M, $R-$modülünün her alt modülü fully invariant ise M' ye *duo modül* denir. Buradan; R sağ duo halkadır ancak ve ancak R_R, duo modüldür.

Önerme 49 *M; duo ve $PQ-$injektif $R-$modül ise M, SIP' ye sahiptir.*

Kanıt. $N, K \leq_d M$ olsun. Öyleyse; $M = N \oplus N_1 = K \oplus K_1$ olacak şekilde $N_1, K_1 \leq M$ vardır. Önerme 48' den;

$$N = N \cap (K \oplus K_1) = (N \cap K) \oplus (N \cap K_1)$$

dir. Öyleyse;

$$M = N \oplus N_1 = (N \cap K) \oplus (N \cap K_1) \oplus N_1$$

dir. Yani; M, SIP' ye sahiptir. ■

M, $R-$modül olsun. M' nin bir alt modülü M' nin bir dik toplananına izomorf iken M' nin dik toplananı ise M' ye $C2-$koşulunu sağlar denir. Diğer yandan; $N, K \leq_d M$ ve $N \cap K = 0$ iken $N \oplus K \leq_d M$ ise M' ye $C3-$koşulunu sağlar denir.

Önerme 50 *M; $C2-$koşulunu sağlıyorsa $C3-$koşulunu sağlar.*

Kanıt. $K, L \leq_d M$ ve $K \cap L = 0$ olsun. O halde; $M = K \oplus K'$ olacak biçimde $K' \leq M$ vardır. $\pi : M \to K'$ kanonik projeksiyon dönüşümü olsun. $K \cap L = 0$ olduğundan $\pi(L) \cong L$ ve $(C2)'$ den $\pi(L) \leq_d M$ dir. Böylece $M = \pi(L) \oplus L'$ olacak biçimde $L' \leq M$ vardır. O halde;

$$K' = \pi(L) \oplus (K' \cap L')$$

ve

$$M = K \oplus \pi(L) \oplus (K' \cap L')$$

dür. Yani; $K \oplus \pi(L)$, M' nin bir dik toplananıdır. Ancak; $K \oplus L = K \oplus \pi(L)$ olduğundan M, $(C3)$' ü sağlar. ■

$(C3)$' ün $(C2)$' yi gerektirmeyeceği aşikardır. Örneğin; $M_Z = Z_Z$ açıkça $(C3)$' ü sağlar ama $(C2)$' yi sağlamaz.

Lemma 51 *M_R; $C3-$koşulunu sağlar ve SIP' ye sahip ise M, SSP' ye sahiptir.*

Kanıt. $N, K \leq_d M$ olsun. M, SIP' ye sahip olduğundan $M = (N \cap K) \oplus X$ olacak şekilde $X \leq M$ vardır. Öyleyse,

$$K = K \cap [(N \cap K) \oplus X] = (N \cap K) \oplus (K \cap X)$$

dir. Buradan,

$$N + K = N + [(N \cap K) \oplus (K \cap X)] = N + (K \cap X) = N \oplus (K \cap X)$$

dir. N, $(K \cap X) \leq_d M$ olduğundan $C3-$koşulu gereği $N + K \leq_d M$ dir. Yani; M, SSP' ye sahiptir. ■

Önerme 52 *M_R; duo, principal ve $PQ-$injektif modül olsun. Öyleyse M, hem SIP' ye hem de SSP' ye sahiptir.*

Kanıt. Önerme 49' dan M' nin SIP' ye sahip olduğunu söyleriz. Diğer taraftan her principal, $PQ-$injektif modül $C2-$koşulunu sağlar. [16, Önerme 2.3]. Öyleyse; M, $C3-$koşulunu sağlar. Lemma 51' den M, SSP' ye sahiptir. ■

$C(X)$ halkası üzerindeki SIP ile SSP arasındaki gerektirmeler [12]' de incelenmiştir. Bu çalışmamızdaki amacımıza $C(X)$ halkasının topolojik yapısından çok cebirsel yapısı daha yakın olduğundan şimdi söz edilen gerektirmelerden amacımıza uygun olan kimi sonuçları kanıtlamaksızın belirticeğiz. Bu sonuçların kanıtları ve $C(X)$' in SSP içinde karakterizasyonu [12]' de detaylı bir şekilde verilmiş olup bu çalışmaya ön hazırlık anlamında [17], [18], ve [19] tavsiye edilir.

Sonuç 53 *$C(X)$; SSP' ye sahip ise SIP' ye sahiptir.*

Sonuç 54 *X kompakt olsun. $C(X)$; SSP' ye sahiptir ancak ve ancak SIP' ye sahiptir.*

Tanım 55 *M bir $R-$modül ve $N \leq M$ olsun. $M = A \oplus B$, $A \subseteq N$ ve $N/A \leq_s M/A$ olacak biçimde M' nin bir ayrışımı varsa N' ye M' nin bir dik toplananında lie overdır denir.*

Lemma 56 *M bir $R-$modül öyleki M' nin her alt modülü M' nin bir dik toplananında lie over olsun. Bu durumda M SSP' ye sahiptir ancak ve ancak M' nin her alt modülü tek bir dik toplananda lie overdır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) M, SSP' ye sahip ve $N \leq M$ olsun. N, M' nin Q_1 ve Q_2 dik toplananlarında lie over olduğunu varsayalım. $Q = Q_1 + Q_2$ için $Q \leq_d M$ ve $Q \subseteq N$ dir. $N/Q_1 \leq_s M/Q_1$ olduğundan $Q/Q_1 \leq_s M/Q_1$ olur. Fakat Q ve Q_1, M' nin dik toplananları olduğundan $Q/Q_1 = 0$ ve buradan $Q_1 = Q_2$ elde edilir.

($\Leftarrow$) L_1, $L_2 \leq_d M$ ve $L_1 + L_2 = N$ olsun. M/L_1, M' nin dik toplananına izomorf olduğundan bunun tüm alt modülleri bir dik toplananda lieoverdır. Buyüzden; N/L_1, Q_1/L_1 dik toplananında lie overdır öyleki Q_1, M' nin bir dik toplananı ve $N/Q_1 \leq_s M/Q_1$ dır. Benzer şekilde N/L_2, Q_2/L_2 dik toplananında lie overdır öyleki Q_2, M' nin bir dik toplananı ve $N/Q_2 \leq_s M/Q_2$ dir. Kabulden; $Q_1 = Q_2$ dir. Fakat; L_1, $L_2 \subseteq Q_1 = Q_2$ olduğundan $N = Q_1 = Q_2 \leq_d M$ dir. ■

Sonuç 57 *M, CS olsun. M, SIP' ye sahiptir ancak ve ancak M' nin her alt modülü essential olarak tek bir dik toplananda kapsanır.*

4. SIP veya SSP' ye sahip Endomorfizma Halkalarının Karakterizasyonu

SIP ve SSP; dönüşümler cinsinden karakterize edildiğinden dolayı endomorfizma halkaları anlamında incelenmesine olanak sağlar. Bu tür yaklaşım; SIP için [10]' da, SSP için ise [14]' te verilmiştir. Bu bölümde özellikle bir modülün endomorfizma halkasının SSP' ye sahip olması için gerek ve yeter koşul verilecektir.

Önerme 58 *$S = End_R M$ olmak üzere S' nin π_1, π_2 ve π idempotent elemanları için $\pi_1(M) \cap \pi_2(M) = \pi(M)$ oluyorsa $\pi_1 S \cap \pi_2 S = \pi S$ dir.*

Kanıt. $u \in \pi S$ alalım. Öyleyse, $u = \pi f$ olacak şekilde $f \in S$ vardır. Her $x \in M$ için

$$(\pi f)(x) = \pi(f(x)) \in \pi(M) = \pi_1(M) \cap \pi_2(M)$$

dir. Yani, $u(x) \in \pi_1(M), \pi_2(M)$ dir. Buradan, $u(x) \in (\pi_1\pi_1)(M), (\pi_2\pi_2)(M)$ dir. Dolayısıyla; $u(M) = (\pi_1\pi_1)(M)$ ve $u(M) = (\pi_2\pi_2)(M)$ dir. Öyleyse; $u \in \pi_1 S$, $\pi_2 S$ dir. Yani $u \in \pi_1 S \cap \pi_2 S$ dir. Diğer bir deyişle; $\pi S \subseteq \pi_1 S \cap \pi_2 S$ dir. Ters kapsamada benzer şekilde gösterilir. ■

Teorem 59 *M sağ $R-$modülü SIP' ye sahiptir ancak ve ancak*

(i) sağ $S-$modüller SIP' ye sahiptir.

(ii) S' nin her π_1, π_2 idempotent elemanları için;

$$\pi_1(M) \cap \pi_2(M) = (\pi_1 S \cap \pi_2 S)(M)$$

dir.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ M, SIP' ye sahip olsun. π, S' nin idempotent elemanı olduğunda $\pi(S) \leq_d S_S$ dir ve böylece $\pi(M) \leq_d M$ dir. S' de iki tane dik toplanan alalım. Yani; S' de π_1, π_2 idempotent elemanları için, $\pi_1(S), \pi_2(S) \leq_d S$ alalım. Kabulden, $\pi_1(M) \cap \pi_2(M) = \pi(M)$ olacak şekilde S' de π idempotenti vardır. Önerme 58' den $\pi_1(S) \cap \pi_2(S) = \pi(S)$ dir. Yani, $\pi_1(S) \cap \pi_2(S) \leq_d S_S$ dir ve

$$\pi_1(M) \cap \pi_2(M) = (\pi_1(S) \cap \pi_2(S))(M)$$

dir.

$(\Leftarrow)$ Tersi doğru olsun. M' de A_1 ve A_2 dik toplananları alalım. $i = 1, 2$ için $\pi_i : M \to A_i$ projeksiyon olsun. Bunlar idempotent eleman olduğundan kabul gereği $\pi_1(S) \cap \pi_2(S) = \pi(S)$ olacak şekilde $\pi = \pi^2 \in S$ vardır. Buradan, $\pi(M) \leq_d M$ ve

$$\pi(M) = (\pi(S))(M) = (\pi_1(S) \cap \pi_2(S))(M) = \pi_1(M) \cap \pi_2(M)$$

olur. $\pi_1(M) = A_1$ ve $\pi_2(M) = A_2$ olduğundan; M, SIP' ye sahiptir. ■

Lemma 60 *M, sol $R-$modül ve $S = End_R M$ olsun. M, SSP (SIP)' ye sahiptir ancak ve ancak S' nin her e, f idempotent elemanı için $Mef \leq_d M$ $(keref \leq_d M)$ dir.*

Kanıt. L, $N \leq_d M$ olsun. Buradan, $M = L \oplus L_1 = N \oplus N_1$ olacak şekilde L_1, $N_1 \leq M$ vardır. Sırasıyla e ve f, M' den L ve N' ye kanonik projeksiyon olsun. Buradan; $imef = im(f|_L)$ dir. Diğer taraftan, $imef = Mef$ olup Önerme 42' den M, SSP' ye sahiptir ancak ve ancak S' nin her e, f idempotent elemanı için $Mef \leq_d M$ dir.

L, $N \leq_d M$ olsun. Buradan, $M = L \oplus L_1 = N \oplus N_1$ olacak şekilde L_1, $N_1 \leq M$ vardır. Sırasıyla e ve f, M' den L ve N' ye kanonik projeksiyon olsun. Buradan; $keref = ker(f|_L)$ dir. Teorem 31' den M, SIP' ye sahiptir ancak ve ancak S' nin her e, f idempotent elemanı için $keref \leq_d M$ dir. ■

Lemma 60' ın özel bir durumu olarak R halkası olarak sol SSP (SIP)' ye sahip halkadır ancak ve ancak R' nin her e ve f idempotent elemanları için $Ref\ (l\,(ef))$, R' nin dik toplananıdır.

Önerme 61 *${}_RR$ SSP' ye sahiptir ancak ve ancak R_R SSP' ye sahiptir.*

Kanıt. e ve f R' nin idempotent elemanları olsun. Eğer; ${}_RR$, SSP' ye sahip ise R' nin farklı bir g idempotent elemanı için $Ref = Rg$ dir. Buradan; $ef = efg$ ve $g = aef\ (a \in R)$ elde edilir. Böylece, $(efa)^2 = efaefa = efga = efa$ dır. Yani, efa idempotenttir. $efR = efgR = efaefR \subseteq efaR$ olduğundan, $efR = (efa)\,R \leq_d R$ ve Lemma 60' dan R_R SSP' ye sahiptir. ■

Teorem 62 *M, sol $R-$modül ve $S = End\,({}_RM)$ olsun. M, hem SIP hem de SSP' ye sahiptir ancak ve ancak S, SSP' ye sahiptir.*

Kanıt. $(\Leftarrow)$ S, SSP' ye sahip ve e, f; S' nin idempotent elemanları olsun. Lemma 60' dan $Sef = Sg$ olacak biçimde S' nin g idempotent elemanı vardır öyleki; $Mef = MSef = MSg = Mg$, M' nin dik toplananıdır. Diğer taraftan S' nin h idempotenti için Lemma 60' dan $efS = hS$ dir. Buradan, S' nin Z alt kümesi için $l_M\,(Z) = \{x \in M : xy = 0, \forall y \in Z\}$ ise $keref = l_M\,(efS) = l_M\,(hS) = kerh \leq_d M$ dir. Lemma 60' dan M, hem SIP hem de SSP' ye sahiptir.

$(\Rightarrow)$ e ve f; S' nin idempotent elemanları, M; SSP ve SIP' ye sahip ve de $L = ime$, $N = imf$ olsun. Aşağıdaki değişmeli diagram ile,

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "e_1"'] & & M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e_2"] & & M \\
& L \arrow[ur, "j_1"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & N \arrow[ur, "j_2"'] & \\
& & X \arrow[ur, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

$j_1 \circ e_1$, $j_2 \circ e_2$ ve $\beta \circ \alpha$ sırasıyla e, f ve $e_2 \circ j_1$ homomorfizmalarının kanonik çarpımlarının ayrımıdır. Önerme 42' den $X \leq_d N$ elde edilir. $h \circ j_2 \circ \beta = 1$ olacak şekilde $h : M \to X$ vardır. $g = j_2 \circ \beta \circ h \in S$ alalım. Buradan;

$$g^2 = j_2 \circ \beta \circ h \circ j_2 \circ \beta \circ h = j_2 \circ \beta \circ h = g$$

dir. Yani; g, S' nin idempotent elemanıdır. Şimdi,

$$g \circ f \circ e = j_2 \circ \beta \circ h \circ j_2 \circ \beta \circ \alpha \circ e_1 = j_2 \circ \beta \circ \alpha \circ e_1 = f \circ e = ef$$

dir öyleki $ef \in Sg$ dir. Diğer taraftan M; SIP' ye sahip olduğundan, Teorem 31' den $ker(\beta \circ \alpha) = ker\alpha \leq_d M$ dir. Buradan, $l : X \to M$ homomorfizması vardır öyleki $\alpha \circ e_1 \circ l = 1$ dir. Eğer $k = f \circ e \circ l \circ h$ ise $k = (l \circ h)ef \in S$ dir ve $k \in Sef$ dir. Fakat, $k = j_2 \circ \beta \circ \alpha \circ e_1 \circ l \circ h = j_2 \circ \beta \circ h = g$ ve dolayısıyla $Sg = Sef \leq_d S$ dir. Lemma 60' dan S, SSP' ye sahiptir. ■

Sonuç 63 *M sol $R-$modül ve $S = End({}_RM)$ olsun. Öyleyse;*

(i) Eğer M yarı projektif ise M, SSP' ye sahiptir ancak ve ancak S, SSP' ye sahiptir.

(ii) Eğer M yarı injektif ise M, SIP' ye sahiptir ancak ve ancak S, SSP' ye sahiptir.

Önerme 64 *M sol $R-$modül ve $S = End({}_RM)$ olsun. Buradan;*

(i) Eğer M, SSP' ye sahip ise S_R SIP' ye sahiptir. Tersine olarak, S_R SIP' ye sahip ise M' nin her sıfırdan farklı N böleni için $Hom_R(N, M) \neq 0$ oluyorsa M, SSP' ye sahiptir.

(ii) Eğer M, SIP' ye sahip ise ${}_RS$ SIP' ye sahiptir. Tersine olarak, ${}_RS$ SIP' ye sahip ise M' nin sıfırdan farklı her N alt modülü için $Hom_R(M, N) \neq 0$ oluyorsa M, SIP' ye sahiptir.

Kanıt. (i) M, SSP' ye sahip modül ve e, $e^{\prime}$; S' nin idempotent elemanları olsun. Buradan,

$$eS = \{f \in S : kere \subseteq kerf\} \quad \text{ve} \quad e^{\prime}S = \{f \in S : kere^{\prime} \subseteq kerf\}$$

olup

$$eS \cap e^{\prime}S = \{f \in S : kere + kere^{\prime} \subseteq kerf\}$$

dir. M, SSP' ye sahip olduğundan $kere + kere^{\prime} = N \leq_d M$ ve S' nin bir h idempotenti için $N = kerh$ dır. Fakat, $eS \cap e^{\prime}S = hS$ ve S_R SIP' ye sahiptir. Tersine koşullar sağlansın ve $L, L^{\prime} \leq_d M$ olsun. $kere = L$, $kere^{\prime} = L^{\prime}$ olacak şekilde $e, e^{\prime} \in S$ idempotentleri vardır. Daha önceden $eS \cap e^{\prime}S = \{f \in S : L + L^{\prime} \subseteq kerf\}$ olduğunu biliyoruz. Hipotezden, $eS \cap e^{\prime}S = gS$ olacak biçimde $g \in S$ idempotenti vardır. Eğer; $N = kerg$ ise $\{f \in S : L + L^{\prime} \subseteq kerf\} = gS = \{f \in S : N \subseteq kerf\}$. Buradan, $L + L^{\prime} \subset N$ olduğunda $Hom_R(N/(L + L^{\prime}), M) = 0$ sonucu çıkar ve madem ki $N/(L + L^{\prime})$, M' nin bölümüne izomorfik hipotezden dolayı $N = L + L^{\prime} \leq_d M$ dir ve buda M' nin SSP' ye sahip olduğunu verir.

(ii) e ve $e^{\prime}$, S' nin idempotent elemanları olsun.

$$Se = \{f \in S : imf \subseteq ime\}, Se^{\prime} = \{f \in S : imf \subseteq ime^{\prime}\}$$

dür. Böylece, $Se \cap Se^{\prime} = \{f \in S : imf \subseteq ime \cap ime^{\prime}\}$ dür. M, SIP' ye sahip olduğundan $g \in S$ idempotenti için $L = img$ olacak şekilde $ime \cap ime^{\prime} = L \leq_d M$ dir. Fakat, $Sg = Se \cap Se^{\prime} \leq_d S$ ve ${}_RS$, SIP' ye sahiptir. Tersine; ${}_RS$, SIP' ye sahip ve $0 \neq N \leq M$ için $Hom_R(M, N) \neq 0$ ve $L, L^{\prime} \leq_d M$ olsun. S' nin e ve $e^{\prime}$ idempotentleri için $ime = L$ ve $ime^{\prime} = L^{\prime}$ olsun. Hipotezden, S' nin bir h idempotenti için $Se \cap Se^{\prime} = Sh$ dır. Böylece, $Sh = \{f \in S : imf \subseteq L \cap L^{\prime}\}$ dir. Eğer $N = imh$ ise $\{f \in S : imf \subseteq L \cap L^{\prime}\} = \{f \in S : imf \subseteq N\}$ olduğunu biliyoruz. $N \subseteq L \cap L^{\prime}$ olduğundan $Hom_R(M, (L \cap L^{\prime})/N) = 0$ dır. Hipotezden dolayı $N = L \cap L^{\prime}$ olur. $(L \cap L^{\prime})/N$, M' nin alt modülüne izomorfik olduğunda $L \cap L^{\prime} \leq_d M$ dir ve M, SIP' ye sahiptir. ■

Önerme 64' ün (i) ve (ii)' deki tersleri için M üzerinde konulan koşullar gereklidir. Bu duruma ilişkin örneği verelim.

Örnek 65 *K bir cisim olmak üzere* $R = \begin{bmatrix} K & K \\ 0 & K \end{bmatrix}$ *olsun.* $N = \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{bmatrix}$ *ve* $L = \begin{bmatrix} K & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *sol $R-$modüldür.* $M = R/L$, $U = N \oplus M$, $S_1 = End_R(N)$ *ve* $S_2 = End_R(M)$ *olsun. Buradan;* H, $S_1 - S_2$ *bimodül* $Hom_R(N, M)$ *olmak üzere* $S = End_R(U) \cong \begin{bmatrix} S_1 & H \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$ *dir. Şimdi;* $e = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *ve* $e' = \begin{bmatrix} 0 & \alpha' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(\alpha, \alpha' \in H)$ *olarak alıp Lemma 60' ı uygularsak S' nin SIP' ye sahip olduğu görülür. Fakat;* U, *SSP' ye sahip ve Teorem 62' den SIP' ye sahip değildir. Tabiki,* $0 \neq X \leq U$ *için* $Hom_R(U, X) = 0$ *dır.*

5. SIP veya SSP' ye sahip Matris Halkalarının Karakterizasyonu

Bu bölümde SIP ve SSP' nin genelleştirilmiş üst üçgensel matris halkaları üzerindeki karakterizasyonu verilecektir. Bu anlamda SSP için [14]' te incelenmiş olup SIP için ise [13]' de ele alınmıştır. Ayrıca [13]' de yer alan, SIP ve SSP' nin *Morita değişmez* olduğu gösterilecektir.

R bir halka, M bir sol R, sağ $R-$bimodül ve

$$A = \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & R \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & r \end{bmatrix} : \quad r \in R, \quad m \in M \right\}$$

olsun. Burada, kısaca $A = R \propto M$ ile gösterildiğini hatırlayalım. Aşağıdaki önerme A' nın SSP' ye sahip olmasının koşullarını içermektedir. Bu önerme [14, Önerme 4.5]' de verilmiştir. Yalnız, önermenin ifadesi doğru ama ispatında hata mevcuttur. Aşağıdaki kanıt ise Garcia' nın tarafımıza göndermiş olduğu hatasız halidir. Bu önerme ile SSP' ye sahip halka örneklerini çoğaltabilme imkanına kavuşuruz.

Önerme 66 *R bir halka, M bir $R-$modül ve $A = R \propto M$ olsun. A, sol SSP' ye sahiptir ancak ve ancak*

(*i*) *R; sol SSP' ye sahiptir.*

(*ii*) *R' nin her e idempotenti için $eM(1-e) = 0$ dır.*

Kanıt. ($\Rightarrow$) A, SSP' ye sahip olsun.

(*i*) e ve e'; R' nin idempotent elemanları olsun. Açıkça,

$$\begin{bmatrix} Re & Me \\ 0 & Re \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Re' & Me' \\ 0 & Re' \end{bmatrix} \leq_d \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & R \end{bmatrix} = A$$

dır. Dolayısıyla;

$$\begin{bmatrix} Re+Re^{\prime} & Me+Me^{\prime} \\ 0 & Re+Re^{\prime} \end{bmatrix} \leq_d A$$

dır. Öyleyse; $Re+Re^{\prime} \leq_d R$ olup R, SSP' ye sahiptir.

(ii) R' nin her e idempotenti ve $x \in M$ için $ex\,(1-e) \neq 0$ olsun. O halde, $y = ex\,(1-e)$ için

$$ey = e\,(ex\,(1-e)) = ex\,(1-e) = y$$

ve

$$ye = (ex\,(1-e))\,e = exe - exe^2 = 0$$

dır. Dolayısıyla;

$$\begin{bmatrix} e & y \\ 0 & e \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} e^2 & ey+ye \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & y \\ 0 & e \end{bmatrix}$$

dir ve $I = A \begin{bmatrix} e & y \\ 0 & e \end{bmatrix} \leq_d A$ ve $J = A \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \leq_d A$ alalım.

$$I+J = \begin{bmatrix} Re & Ry+Me \\ 0 & Re \end{bmatrix}$$

ve $I+J \leq_d A$ dır. Dolayısıyla; $A \begin{bmatrix} f & z \\ 0 & f \end{bmatrix} = I+J$ olacak şekilde $\begin{bmatrix} f & z \\ 0 & f \end{bmatrix}$ idempotent elemanı vardır. Buradan; $Re = Rf$ dir. Diğer taraftan; $fz + zf = z$ ve $z \in Ry + Me$ dir. Böylece $z = ry + me$ olacak şekilde $r \in R$, $m \in M$ vardır.

$$\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & y \\ 0 & e \end{bmatrix} \in I+J = A \begin{bmatrix} f & z \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan;

$$\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & m \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & z \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} e & y \\ 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & m' \\ 0 & a' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & z \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

olacak şekilde $a, a' \in R$; $m, m' \in M$ vardır. Dolayısıyla; $e = af$, $e = a'f$, $az \in Mf$ ve $y - a'z \in Mf$ dir. Son iki ifadeden $y - (a' - a)\, z \in Mf$ dir ve ilk ikisinden $(a' - a)\, f = 0$ elde edilir. $z = fz + zf$ olduğundan

$$\begin{aligned} y - \left(a' - a\right) z &= y - \left(a' - a\right)(fz + zf) \\ &= y - \left(a' - a\right) fz - \left(a' - a\right) zf \\ &= y - \left(a' - a\right) zf \in Mf \end{aligned}$$

dir. Yani $y \in Mf$ dir. $Mf = MRf = MRe = Me$ olduğundan $y = ye = 0$ elde edilir.

($\Leftarrow$) (i) ve (ii) sağlansın. A' nın $\begin{bmatrix} e & x \\ 0 & e \end{bmatrix}$ idempotentini alalım. Burada, $ex + xe = x$ dir. Böylece kabulden,

$$\begin{aligned} 0 &= ex\,(1 - e) \\ &= (x - xe)(1 - e) \\ &= x(1 - e) - xe(1 - e) \\ &= x(1 - e) \end{aligned}$$

ve $x = xe \in Me$ dir. O halde A' nın her bir dik toplananı; e, R' nin idempotent elemanı olmak üzere $\begin{bmatrix} Re & Me \\ 0 & Re \end{bmatrix}$ formundadır. Böylece; $Me + Me' = MRe + MRe'$ dir ve R soldan SSP' ye sahip olduğundan R' nin bir f idempotent elemanı için;

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Re & Me \\ 0 & Re \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Re' & Me' \\ 0 & Re' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Re + Re' & M\,(Re + Re') \\ 0 & Re + Re' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Rf & Mf \\ 0 & Rf \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak A, SSP' ye sahiptir. ■

Lemma 67 *[14, Lemma 3.1] I bir indis kümesi olmak üzere* $R = \prod_I R_i$ *olsun. R; SSP (sol SIP)' ye sahiptir ancak ve ancak her* $i \in I$ *için* R_i*; SSP (sol SIP)' ye sahiptir.*

Yukarıdaki lemma ve Önerme 66' dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 68 *R ve S halka M bir bimodül ve* $A = \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & S \end{bmatrix}$ *olsun. A sol SSP' ye sahiptir ancak ve ancak*

(i) R ve S, sol SSP' ye sahiptir

(ii) $M = 0$ *dır.*

Yukarıdaki sonuçta M modülünün sıfır olma koşulu gerekli olduğuna ilişkin bir örnek verelim.

Örnek 69 *F bir cisim olmak üzere* $A = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$ *parçalı aşikar genişleme halkası olsun. A SSP' ye sahip değildir.*

Kanıt. $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $f = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; A' nın idempotent elemanlarıdır. e ve f, A' nın dik toplananı olan bir sol ideali üretir. Bu dik toplananların toplamı $\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : x, y \in F \right\}$ kümesini kapsar. Ancak bu sol ideal herhangi bir idempotent tarafından üretilmez böylece dik toplanan olamaz. Çünkü, bu idealdeki herhangi bir sıfırdan farklı idempotent eleman $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ şeklindedir. Ancak bu elemanın ürettiği ideal, $F \times F$ in bir boyutlu alt uzayı $X = (1, a) F$ olmak üzere $\begin{bmatrix} X & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tipindeki matrisler olup $\begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ den farklıdır. ∎

Sonuç 68 ile SSP genelleştirilmiş üst üçgensel matris halkaları üzerindeki karakterizasyonu yapılmış oldu. SIP için bu karakterizasyonu yapmadan önce SIP' ye sahip olmayan bir matris halkası örneği verelim [20].

Örnek 70 *F bir cisim olmak üzere;*

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} a & x & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} : \quad a, b, x, y \in F \right\}$$

olsun. T SIP' ye sahip değildir.

Kanıt. T' den

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elemanlarını alalım. Açıkça $e^2 = e$ ve $c^2 = c$ olup, e ve c; T' nin idempotent elemanlarıdır. Buradan;

$$eT = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \quad b, y \in F \right\}$$

ve

$$cT = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \quad b, y \in F \right\}$$

dir. Öyleyse;

$$eT \cap cT = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \quad y \in F \right\}$$

dir. Fakat; $eT \cap cT$, T' nin bir idempotenti tarafından üretilmez. Yani dik toplanan değildir. Dolayısıyla T, SIP' ye sahip değildir. ■

Teorem 71 *R bir halka, M bir $R-$modül ve $A = R \propto M$ olsun. A, SIP' ye sahiptir ancak ve ancak*

(i) R, SIP' ye sahiptir.

(ii) R' nin her e idempotent elemanı için $(1-e)\,Me = 0$ dır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$ A, SIP' ye sahip olsun.

(i) R' den e ve c idempotent elemanlarını alalım. Buradan;

$$\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} eR & eM \\ 0 & eR \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} cR & cM \\ 0 & cR \end{bmatrix}$$

A' nın dik toplananları olup kabul gereği;

$$\begin{bmatrix} eR \cap cR & eM \cap cM \\ 0 & eR \cap cR \end{bmatrix} \leq_d A$$

dır. Öyleyse, $eR \cap cR \leq_d R$ olup; R, SIP' ye sahiptir.

(ii) R' nin bir e idempotent elemanı ve M' nin bir x elemanı için $(1-e)\,xe \neq 0$ olsun. $y = (1-e)\,xe$ dersek

$$ey = e\,((1-e)\,xe) = 0$$

ve

$$ye = ((1-e)\,xe)\,e = (1-e)\,xe = y$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{bmatrix} e & y \\ 0 & e \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} e^2 & ey+ye \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & y \\ 0 & e \end{bmatrix}$$

olur ve

$$I = \begin{bmatrix} e & y \\ 0 & e \end{bmatrix} A \leq_d A$$

dır. A' da

$$J = \begin{bmatrix} 1-e & 0 \\ 0 & 1-e \end{bmatrix} A$$

dik toplananını alırsak kabulden,

$$I \cap J = \begin{bmatrix} 0 & yR \cap (1-e)\,M \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq_d A$$

dır. Öyleyse;

$$I \cap J = \begin{bmatrix} f & z \\ 0 & f \end{bmatrix} A$$

olacak şekilde $f \in R$ ve $z \in M$ vardır. Buradan; $fR = 0$ olup $f = 0$ bulunur. $fz + zf = z$ olduğundan da $z = 0$ elde edilir. Yani, $yR \cap (1-e)\,M = 0$ dır. Dolayısıyla $y = 0$ dır.

($\Leftarrow$) (i) ve (ii) koşulları sağlansın ve A' dan $\begin{bmatrix} e & x \\ 0 & e \end{bmatrix}$ idempotent elemanı alalım. Buradan; $ex+xe = x$ olup her iki tarafı sağdan e ile çarparsak $exe = 0$ olur. Böylece;

$$(1-e)\,xe = xe - exe = xe = 0$$

elde edilir. Yani; $x = ex \in eM$ dir. Dolayısıyla, A' nın her dik toplananı; e, R' nin idempotent elemanı olmak üzere $\begin{bmatrix} eR & eM \\ 0 & eR \end{bmatrix}$ şeklindedir. R' nin e ve c idempotent elemanları için

$$eM \cap cM = eRM \cap cRM = (eR \cap cR)\,M$$

dir ve R, SIP' yi sağladığından;

$$\begin{bmatrix} eR & eM \\ 0 & eR \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} cR & cM \\ 0 & cR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eR \cap cR & (eR \cap cR)\,M \\ 0 & eR \cap cR \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} fR & fM \\ 0 & fR \end{bmatrix}$$

olacak şekilde R' nin f idempotent elemanı vardır. Yani; A, SIP' ye sahiptir. ■

Çalışmamızın bundan sonraki bölümünde $A = \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & S \end{bmatrix}$ olarak alacağız. Burada, R ve S birimli halka ve M, sol $R-$modül, sağ $S-$modüldür. Bu tür halkalar [21]' de detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Lemma 72 *$SocA$; A' nın dik toplananı ise $M = 0$ dır.*

Kanıt. $SocA$; A' nın dik toplananı olsun. Yani A' nın bir e idempotenti için $SocA = eA$ olsun. Lemma 11' den $(1-e)Ae = 0$ dır. Buradan;

$$A = \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & S \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} eRe & eR(1-e) \\ 0 & (1-e)R(1-e) \end{bmatrix}$$

dır (bakınız [2], [21]). $SocA = \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq SocA$ olduğundan $f^2 = f \in SocA$ vardır öyleki $f(SocA) = \begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir. $r \in R$ ve $m \in M$ için $f = \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. $f^2 = \begin{bmatrix} r^2 & rm \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dır. Böylece;

$$\begin{bmatrix} r & m \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rR & rM \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan $r = 0$ elde edilir. Yani; $M = 0$ dır. ■

Teorem 73 *$SocA$; A' nın dik toplananı olsun. A, SIP' ye sahiptir ancak ve ancak R ve S; SIP' ye sahiptir.*

Kanıt. Lemma 72' den $M = 0$ dır. Yani; $A = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$ dir.

($\Rightarrow$) A, SIP' ye sahip olsun.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

den

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq_d A$$

olur. Lemma 30 gereği R, SIP' ye sahiptir. Benzer şekilde;

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \leq_d A$$

olur. Dolayısıyla; S, SIP' ye sahiptir.

($\Leftarrow$) Açıkça A' nın her dik toplananı e, R' nin ve f, S' nin idempotent elemanları olmak üzere $\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} A$ şeklindedir. R ve S; SIP' ye sahip olduğunda A' nın SIP' ye sahip olduğu aşikardır. ■

Örnek 74 *F bir cisim ve*

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a,\ b,\ c \in F \right\}$$

olsun. Buradan $SocR = \begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$ *olup R_R' nin dik toplananı değildir. Ama açıkça R, SIP' ye sahiptir.*

Teorem 75 *A, SIP' ye sahiptir ancak ve ancak*

(i) R ve S SIP' ye sahiptir.

(ii) $e^2 = e \in R$ ve $f^2 = f \in S$ için e veya f den en az biri birimden farklı olmak üzere $eMf = 0$ dır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) A, SIP' ye sahip olsun. Açıkça;

$$A = \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

dir. Lemma 30' dan her iki dik toplananda SIP' ye sahiptir. Yani; S, SIP' ye sahiptir. R' de I ve J dik toplananlarını alalım. Buradan; $I = aR$ ve $J = bR$ olacak şekilde R' nin a ve b idempotent elemanları vardır.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \cap \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A &= \begin{bmatrix} aR \cap bR & aM \cap bM \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\leq_d \begin{bmatrix} R & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dır. Yani; $aR \cap bR$, R' nin dik toplananıdır.

R' nin e veya f idempotent elemanlarından en az biri birimden farklı olmak üzere $eMf \neq 0$ olsun. Buradan; $x \in M$ için $0 \neq y = exf \in eMf$ vardır. Açıkça $(1-e)\,y = 0$ ve $yf = y$ dir.

$$\alpha = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1-f \end{bmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{bmatrix} 1-e & y \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

alalım.

$$\alpha^2 = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1-f \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & (1-f)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1-f \end{bmatrix} = \alpha$$

ve

$$\beta^2 = \begin{bmatrix} 1-e & y \\ 0 & f \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} (1-e)^2 & (1-e)\,y + yf \\ 0 & f^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-e & y \\ 0 & f \end{bmatrix} = \beta$$

dır.

$$\begin{aligned} \alpha A \cap \beta A &= \begin{bmatrix} eR & eM \\ 0 & (1-f)\,S \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} (1-e)\,R & (1-e)\,M + yS \\ 0 & fS \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & eM \cap ((1-e)\,M + yS) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\leq_d A \end{aligned}$$

dır. Yani; $eM \cap (\ (1-e)\,M\ +\ yS\ ) = 0$ dır. Buradan; $y \notin eM$ olduğundan $y \in (1-e)\,M$ dir. Öyleyse; $y = (1-e)\,m$ olacak şekilde $m \in M$ vardır. Diğer taraftan; $ey = e(exf) = y$ olduğundan,

$$y = ey = e\left((1-e)\,m\right) = 0$$

olup çelişkidir. O halde, $eMf = 0$ olmalıdır.

($\Leftarrow$) (i) ve (ii) koşulları sağlansın ve A' da $\begin{bmatrix} e & x \\ 0 & f \end{bmatrix}$ idempotent eleman alalım. Burada, $ex + xf = x$ dir. Eşitliğin her iki tarafını sağdan f ile çarpdığımızda

$$exf + xff = xf$$

den $exf = 0$ elde edilir. Kabulden; $(1-e)\,xf = 0$ olup $xf = 0$ bulunur. Böylece; $x \in eM$ dir. Dolayısıyla; A' nın her dik toplananı e, R' nin ve f, S' nin idempotent elemanı olmak üzere $\begin{bmatrix} eR & eM \\ 0 & fS \end{bmatrix}$ formundadır.

$$eM \cap cM = eRM \cap cRM = (eR \cap cR)\,M$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix} eR & eM \\ 0 & fS \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} cR & cM \\ 0 & gS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} eR \cap cR & eM \cap cM \\ 0 & fS \cap gS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha R & \alpha M \\ 0 & \beta S \end{bmatrix}$$

ve $\alpha^2 = \alpha$, $\beta^2 = \beta$ dır. Yani; A, SIP' ye sahiptir. ∎

Yukarıdaki teoremle genelleştirilmiş üst üçgensel matrislerin hangi koşullar altında SIP' ye sahip olduğu verilmiştir. Buradan yola çıkarak bir R halkası üzerindeki full matris halkalarının ne zaman SIP' ye sahip olacağı ve dolayısıyla SIP' ye sahip olma özelliğinin Morita değişmez bir özellik olup olmadığını araştırma ihtiyacı ortaya çıkmıştır.

Çalışmamızın bundan sonraki kısmında; R , birimli bir halka olmak üzere R' deki bir e idempotent elemanı için $R = ReR$ ve S' de R' nin eRe alt halkası olsun. Buradan; Me, sağ $S-$ modüldür.

Lemma 76 [1, *Lemma 12. 8*] *K, $K' \leq M_R$ ve N, $N' \leq (Me)_S$ olsun. Budurumda;*

(i) $K = KeR$ ve $N = NRe$ dir.

(ii) $K \cap K' = 0$ dır ancak ve ancak $Ke \cap K'e = 0$ dır.

(iii) $N \cap N' = 0$ dır ancak ve ancak $NR \cap N'R = 0$ dır.

Kanıt. (i) $K = KR = KReR = KeR$ dir ve $N = NS = NeRe = NRe$ dir.

(ii) Eğer $K \cap K' = 0$ ise $Ke \cap K'e \leq K \cap K'$ den $Ke \cap K'e = 0$ dır. Tersine $Ke \cap K'e = 0$ olsun. $x \in K \cap K'$ alalım. Böylece $xRe \leq Ke \cap K'e = 0$ dır. Buradan; $xReR = 0$ dır. O halde, $xR = 0$ ve böylecede $x = 0$ dır. Yani, $K \cap K' = 0$ dır.

(iii) (i) ve (ii) den elde edilir. ■

Lemma 77 *K, M_R' nin alt modülü olsun. K, M_R' nin dik toplananıdır ancak ve ancak Ke, $(Me)_S$' nin dik toplananıdır.*

Kanıt. K, M_R' nin dik toplananı olsun. Öyleyse; $M = K \oplus N$ olacak şekilde M' nin N altmodülü vardır. Buradan; $Me = Ke + Ne$ ve $Ke \cap Ne \leq K \cap N = 0$ dır. Dolayısıyla; $Me = Ke \oplus Ne$ dir. Tersine; Ke, $(Me)_S$' nin dik toplananı olsun. Öyleyse; $Me = Ke \oplus L$ olacak şekilde Me' nin L alt modülü vardır. Açıkça; $K \cap LR = 0$ ve

$$M = MeR = (Ke + L)\, R = KeR + LR = K + LR$$

dir. Yani, $M_R = K \oplus LR$ dir. ■

Teorem 78 *M, sağ $R-$modül olsun. M, sağ $R-$modülü SIP (SSP)' ye sahiptir ancak ve ancak Me, sağ $S-$modülü SIP (SSP)' ye sahiptir.*

Kanıt. Lemma 77' den $K, L \leq_d M_R$ dir ancak ve ancak $Ke, Le \leq_d (Me)_S$ dir. Öyleyse; $K \cap L \leq_d M_R$ dir ancak ve ancak $Ke \cap Le \leq_d (Me)_S$ dir. Yani; M, sağ $R-$modülü SIP' ye sahiptir ancak ve ancak Me, sağ $S-$modülü SIP' ye sahiptir. SSP içinde benzer şekilde gösterilir. ■

Sonuç 79 *R halkası sağ SIP (SSP)' ye sahiptir ancak ve ancak Re, $eRe-$modülü SIP (SSP)' ye sahiptir. Bu durumda S sağ SIP (SSP)' ye sahiptir.*

Kanıt. $M = R$ alalım. O halde $Me = (Re)_R$ olur. Dolayısıyla; Teorem 78' den istenilenilen sonuç elde edilir. Diğer taraftan; $Re = eRe \oplus (1-e)\,Re$ dir. $S = eRe$ ve $eRe \leq_d Re$ olduğundan Lemma 30 (Önerme 41) gereği S, SIP' (SSP)' ye sahiptir. ■

S birimli bir halka, n pozitif tamsayı ve R; elemanları S' den olan $n \times n$ tipindeki matrisler halkası ($R = M_n(S)$) alalım.

$$e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

olarak gösterelim. Açıkça; e_{11}; R' nin idempotenet elemanıdır ve $S \cong e_{11}Re_{11}$, $R = Re_{11}R$ dir. Bu gösterimle;

Teorem 80 *$R = M_n(S)$ SIP (SSP)' ye sahiptir ancak ve ancak S^n serbest $S-$modülü SIP (SSP)' ye sahiptir.*

Sonuç 81 *S, SIP (SSP)' ye sahip ise $R = M_n(S)$ SIP (SSP)' ye sahiptir.*

Kanıt. S, SIP' ye sahip ise Lemma 67' den serbest $S-$modülü S^n' de SIP' ye sahiptir. Böylece Teorem 80' den istenilen sonuç elde edilir. SSP içinde benzer şekilde yapılır. ■

Tanım 82 *$\wp$ halka teorisinde bir özellik olsun. Eğer; R, $\wp$ özelliğini sağlar iken $n \geq 2$ için R üzerinde kurulu nxn tipindeki matrisler halkası $M_n(R)$ ve R' nin her e idempotent elemanı için $R = ReR$ iken eRe bu özelliği sağlıyorsa R' ye Morita değişmez özellik denir.*

Genellikle $R = ReR$ koşulu olmaksızın bir çok halka teori özelliği eRe' ye aktarılır. Yarı basit, sağ-Noetherian, sağ-Artinian, sağ-(yarı) hereditary olma özellikleri Morita değişmez özelliklere örnek teşkil ederler. Diğer yandan CS (her sağ ideali bir dik toplanan içinde essential) olma özelliği Morita değişmez değildir. Örneğin; $R = Z[x]$ için R, CS iken $S = \begin{bmatrix} Z[x] & Z[x] \\ Z[x] & Z[x] \end{bmatrix}$ CS değildir. Çünkü; $u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ alalım. O halde;

$$uS = \left\{ \begin{bmatrix} f & g \\ 2f & 2g \end{bmatrix} : f, g \in Z[x] \right\}$$

S' de uniform sağ idealdir. Buradan; uS, S' de essential olamaz. Eğer olsaydı uS' nin Goldie boyutu ile S' nin Goldie boyutu aynı olmalıydı. Halbuki; $dim(uS) = 1 \neq 2 = dimS$. Ancak $e = 1$, S' de $uS \leq eS$ (yani $eu = u$) olacak biçimdeki tek idempotenttir. Böylece S, sağ CS halka değildir.

Sonuç 79 ve Sonuç 81' i birleştirerek aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 83 *Halkaların sağ SIP (SSP) Morita değişmezdir.*

M bir $CS-$modül olsun. Eğer; M, $(C2)$' yi sağlıyorsa M' ye sürekli, $(C3)$' ü sağlıyorsa M' ye yarı-sürekli denir. Açıkça, M sürekli ise yarı-süreklidir. Benzer şekilde;

Tanım 84 *M, SIP (SSP)' ye sahip bir modül olsun. . Eğer; M, $(C2)$' yi sağlıyorsa M' ye $I-$sürekli $(S-$ sürekli$)$ ve eğer; M, $(C3)$' ü sağlıyorsa M' ye $I-$yarı-sürekli $(S-$ yarı-sürekli$)$ diyelim.*

$I-$sürekli $(S-$ sürekli$)$ ve $I-$yarı-sürekli $(S-$ yarı-sürekli$)$ modüller yeni bir modül sınıfı olarak incelenebilinir. Bu sınıfa ait modüller aşağıdaki bazı özellikleri sürekli ve yarı sürekli modüllere paralel davranış gösterir.

Sonuç 85 *(i) $I-$ (yarı) sürekli modüllerin dik toplananlarıda $I-$ (yarı) süreklidir.*
(ii) $S-$ (yarı) sürekli modüllerin dik toplananlarıda $S-$ (yarı) süreklidir.

Kanıt. (*i*) [4, Önerme 2.7] ve Lemma 30' dan açıktır.
(*ii*) [4, Önerme 2.7] ve Önerme 41' den açıktır. ■

Teorem 78' deki gösterimleri kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 86 *(i) M sağ $I-$ (yarı) süreklidir ancak ve ancak Me sağ $S-$modülü $I-$ (yarı) süreklidir.*

(ii) M sağ $S-$ (yarı) süreklidir ancak ve ancak Me sağ $S-$modülü $S-$ (yarı) süreklidir.

Kanıt. Teorem 78 ve [22, Teorem 12]' den elde edilir. ■

Sonuç 87 *Halkaların sağ $I-$ (yarı) sürekli ve sağ $S-$ (yarı) sürekli olma özellikleri Morita değişmezdir.*

Kanıt. Sonuç 83 ve [22, Teorem 12]' den elde edilir. ■

Lemma 51' de $(C3)$' ü sağlayan SIP' ye sahip modüllerin SSP' yi sahip oldukları gösterildi. $(C2)$' yi sağlayan modüllerin $(C3)$' ü sağladığı göz önüne alırsak;

Sonuç 88 *M; $I-$sürekli ise $S-$ (yarı) süreklidir.*

Sonuç 89 *M; $I-$yarı-sürekli ise $S-$yarı-süreklidir.*

KAYNAKLAR

[1]. DUNG, N.V., HUYNH, D.V., SMITH, P.F. ve WISBAUER, R., Extending Modules, Longmann, (1990).

[2]. GOODEARL, K.R., Ring Theory, Marker Dekker, (1976).

[3]. KASCH, F., Modules and Rings, Academic Press, (1982).

[4]. MOHAMED, S.H. ve MULLER, B.J., Continuous and Discrete Modules, Cambridge University Press, (1990).

[5]. ANDERSON, F.W. ve FULLER, K.R., Rings and Categories of Modules, Springer-Verlag, (1974).

[6]. WILSON,G.V., Modules with the Summand Intersection Property, Communications in Algebra, **14**, 21-38 (1986).

[7]. KAPLANSKY, I., Infinite Abelian Groups, University of Michegan Press, (1969).

[8]. FUCHS, L., Infinite Abelian Groups, Academic Press, (1970).

[9]. HAUSEN, J., Modules with the Summand Intersection Property, Communications in Algebra, **17**, 135-148 (1989).

[10]. ARNOLD, D.V ve HAUSEN, J., Characterization of Modules, Communications in Algebra, **18**, 519-528 (1990).

[11]. ULRICH, A. ve HAUSEN, J., Modules with the Quasi-Summand Intersection Property, Bull. Aust. Math. Soc., **44**, 189-201 (1991).

[12]. AZARPANAH, F., Sum and Intersection of Summand ideals in $C(X)$, Communications in Algebra, **27**, 5549-5560 (1999).

[13]. KARABACAK, F. ve TERCAN, A., Matrix Rings with the Summand Intersection Property, Czechoslovak Mathematical Journal, basımda.

[14]. GARCIA, J.L., Properties of Direct Summands of Modules, Communications in Algebra, **17**, 73-92 (1989).

[15]. OSOFSKY, B.L., Rings Whose Idempotent Generated Ideals Form a Lattice with ACC, Pitmann, 118-124 (1989).

[16]. NICHOLSON, W.K., PARK, J.K. ve YOUSIF, M.F., Principally Quasi-Injective Modules, Communications in Algebra, **27**, 1683-1693 (1999).

[17]. GILMAN, L. ve JERISON, M., Rings of Continuous Functions, The University Series in Higher Mathematics, (1960).

[18]. AZARPANAH, F., Essential Ideals in $C(X)$, Period Math. Hung., **35**, 105-112 (1995).

[19]. AZARPANAH, F., Intersection of Essential Ideals in $C(X)$, Proc. Am. Math. Soc., **125** , 2149-2154 (1997).

[20]. BIRKENMEIER, G.F., KIM, J.Y. ve PARK, J.K., When is the CS Condition Hereditary?, Communications in Algebra, **27**, 3875-3885 (1999).

[21]. SMITH, P.F., On the Structure of Certain pp-rings, Math. Z., **166**, 147-157 (1979).

[22]. TERCAN, A., Eventually Weak (C_{11}) –Modules and Matrix (C_{11}) – Rings, Southeast Asian Bull. Math., basımda.