FRECHET TÜREVLENEBİLME

Necip ERDOĞAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

HAZİRAN-2002

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Necip ERDOĞAN'ın **Frechet Türevlenebilme** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki,Yüksek Lisans tezi **12/06/2002** tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**: Prof.Dr.Orhan ÖZER**	
Üye	**: Prof.Dr.Yalçın KÜÇÜK**	
Üye	**: Doç.Dr.Halik HÜSEYİNOV**	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 12.06.2002 **tarih ve** ..20/4...... **sayılı kararıyla onaylanmıştır.**

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Orhan ÖZER
Fen Bilimleri Enstitüsü
Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FRECHET TÜREVLENEBİLİRLİK

Necip ERDOĞAN

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Orhan ÖZER
2002, 93 Sayfa

Bu tezde normlu bir vektör uzayından diğer normlu bir vektör uzayına olan dönüşümlerin türevlenebilirlik özellikleri incelenmektedir. Frechet türevlenebilirlik kavramından yararlanarak, sonlu boyutlu uzaylarda diferansiyel hesabının bilinen bazı sonuçlarının, sonsuz boyutlu uzaylara genelleştirilmesi konusu ele alınmıştır. Bu çalışmada, klasik analizin ortalama değer teoremi, kapalı fonksiyon teoremi, ters fonksiyon teoreminin sonsuz boyutlu uzaylara genelleştirilmesi araştırılmış, yüksek mertebeden Frechet türevlerinin ve tanım kümesi bir çarpım uzayı olan bir dönüşümün Frechet kısmı türevlerinin özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Frechet Türevi, Normlu Uzay, Doğrusal Dönüşüm, Sürekli Fonksiyon, Ortalama Değer Teoremi

ABSTRACT

Master of Science Thesis

THE FRECHET DIFFERENTIABILITY

Necip ERDOĞAN

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Prof.Dr. Orhan ÖZER

2002, 93 Pages

In this thesis, the differentiability properties of the functions defined in a normed vector space and with values in a normed vector space, are investigated. Using the Frechet differentiability concept, some known finite dimension differential calculus results are generalized for infinite dimension case. In this work, mean value theorem, closed function theorem, inverse function theorem of the classical analysis are generalized for infinite dimension case. The properties of higher Frechet differentials and of partial Frechet differentials of a function with domain in a product space are studied.

Keywords: Frechet Derivative, Normed Space, Linear Function, Continuous Function, Mean Value Theorem

ÖNSÖZ

Türev bu gün mühendislik, elektrik, elektronik, fizik, kimya gibi bilim ve teknoloji kollarının vazgeçilmezidir. Bu sayede her yıl teknikte hızla ilerlenmekte bilim adamları türev sayesinde yeni bulgu ve varsayımlara farklı çözümler bulmaktadırlar.

Sonlu boyutlu uzaylada tanımlanan klasik türev ve diferansiyel kavramı, günümüzde bilim ve teknolojinin bir çok alanlarında ortaya çıkan problemlerin çözumlerinde yeterli bulunmuyor. Bu problemlerin bir kısmında, incelenmesi gereken fonksiyonlar tek değerli olmayabilir veya klasik anlamda türevlenebilir olmayabilir. Parametrik optimizasyon teorisi, kontrol teoride, diferansiyel oyun teorisinde incelenmesi önemli olan değer fonksiyonları, genelde klasik anlamda diferansiyellenebilir değil (bkz. [1], [2], [3], [4], [5]). Son yıllarda, klasik anlamda diferansiyellenebilir olmayan fonksiyonlar, örneğin alttan ve ya üstten yarısürekli fonksiyonlarin özellikleri, düzgün olmayan analiz kapsamında incelenmektedir (bkz. [2], [6]). Düzgün olmayan analizde, alttan yari sürekli, üstten yari sürekli, sürekli, konveks, Lipschitz sürekli fonksiyonlar için farklı subdiferansiyel ve superdiferansiyel kavramlari verilmektedir (bkz. [2], [6], [7]).

Tek değerli olmayan fonksiyonlar, çağdaş matematiğin bir kolu olan küme değerli analiz kapsamında araştırılmaktadır (bkz. [8], [9]). Küme değerli analizde, incelenen problemlere uygun olarak, küme değerli dönüşümler için çeşitli formlarda türev ve diferansiyel kavramları uygulanmaktadır (bkz. [1], [2], [3], [4], [6]).

Frechet türevi ise sadece sonlu boyutlu uzaylarda değil, üzerinde norm tanımlı tüm uzaylarda çalışmaya olanak sağlamıştır (bkz. [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16]). Ayrıca bu çalışmada yüksek mertebeden türevler yardımıyla Taylor teoremi açıklanarak, ters ve kapalı fonksiyon teoremleri incelenip örnekler verilmektedir.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında benden desteğini esirgemeyen ve her konuda yardımcı olan değerli hocalarım Prof.Dr. Orhan ÖZER'e, Doç.Dr. Halik HÜSEYİNOV'a, yazımında yardımcı olan sevgili arkadaşım Zerrin ÖZÇELİK'e teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\Re^n$	:	n boyutlu Euclidean uzayı
$\| x \|$	:	x vektörünün normu
$< x, y >$	:	x ve y vektörlerinin iç çarpımı
$f(\cdot) : X \to Y$	:	X'de tanımlı, değerleri Y'de olan dönüşüm
$f^{-1}(\cdot)$	:	$f(\cdot)$ fonksiyonunun tersi
$g \circ f$	:	f ve g fonksiyonlarının bileşkesi
$f'(x_0)(\cdot)$	:	f fonksiyonunun x_0 noktasında Frechet türevi
$df(x_0)(\cdot)$	:	f fonksiyonunun x_0 noktasında Frechet türevi
$d^r f(x_0)(\cdot)$	:	f fonksiyonunun x_0 noktasında r. mertebeden Frechet türevi
$L(X, Y)$	:	sınırlı doğrusal $T(\cdot) : X \to Y$ dönüşümler uzayı
$LH(X, Y)$	:	doğrusal $f(\cdot) : X \to Y$ homomorfizmalar uzayı
$X_1 \times X_2$	:	X_1 ve X_2 uzaylarının kartezian çarpımı

GİRİŞ

Analiz derslerinden gerçel değerli, gerçel değişkenli bir fonksiyonun bir noktasındaki türevin tanımını anımsayalım.

$f(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer bir m sayısı ve verilen her $\varepsilon > 0$ için $0 < ||x - x_0|| < \delta$ iken

$$||\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m|| \leq \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $f(\cdot)$ fonksiyonuna x_0 noktasında türevlenebilirdir denir ve $m\epsilon\Re$ sayısına da $f(\cdot)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi denir. Açıktır ki bu eşitsizliğe denk olarak $||x - x_0|| < \delta$ olduğunda

$$||f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)|| \leq \varepsilon||x - x_0||$$

eşitsizliği de yazılabilir.

Gerçel değişkenli gerçel değerli fonksiyonlar için ifade edilmiş olan türevlenebilme kavramını tüm normlu uzaylara genelleştirme işini Maurice Frechet adındaki Fransız matematikçi yapmıştır. Bu sebeple normlu uzaylarda türevlenebilme Frechet türevlenebilme ya da kısaca F - Türevlenebilme şeklinde ifade edilmektedir. Bu kavram doğrusal olmayan bir dönüşümün bir doğrusal yaklaşımını ifade edebilmeyi sağlar.

Esas olarak Frechet türevlenebilme kavramının en önemli yanı, diferansiyel hesabın sonsuz boyutlu uzaylara genelleştirilebilmesidir. Bu çalışmada klasik analizin Ortalama değer teoremi, Taylor teoremi, Kapalı fonksiyon teoremi, Ters fonksiyon teoreminin, Frechet diferansiyeli kavramından yararlanarak, normlu uzaylara genelleştirilmesi üzerinde duracağız. Tanım kümesi bir çarpım uzayı olan bir fonksiyonun Frechet kismi türevlenebilmesinden söz edeceğiz. Yüksek mertebeden Frechet türevlenebilmeye değineceğiz.

1 BİR DÖNÜŞÜMÜN FRECHET TÜREVİ

Bundan böyle X ve Y aynı cisim üzerinde normlu doğrusal uzaylar, A kümesi X uzayının boş olmayan açık bir alt kümesi olarak düşünülecektir. $L(X,Y)$ ile $T(\cdot):X\to Y$ olacak biçimdeki tüm sınırlı doğrusal dönüşümler uzayını gösterelim. Her $T(\cdot)\in L(X,Y)$ doğrusal donüşümü sürekli ve tersine, her sürekli $T(\cdot):X\to Y$ doğrusal dönüşümü için $T(\cdot)\in L(X,Y)$ olur. $f(\cdot):A\subseteq X\to Y$ dönüşümünü kısa biçimde $f:A\subseteq X\to Y$ olarak da göstereceğiz.

Tanım 1.1 *Bir $f(\cdot):A\subseteq X\to Y$ dönüşümü, $x_0\in A$ noktası ve $T(\cdot):X\to Y$ doğrusal dönüşümü verilsin. $\forall\varepsilon>0$ için $x\in A$ ve $||x-x_0||<\delta$ iken*

$$||f(x)-f(x_0)-T(x-x_0)||\leq\varepsilon||x-x_0|| \tag{1}$$

olacak biçimde $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı varsa, $f(\cdot)$ dönüşümüne x_0 noktasında Frechet türevlenebilir denir. Eğer $f(\cdot)$ dönüşümü A kümesinin her noktasında Frechet türevlenebilir ise, $f(\cdot)$ dönüşümüne A üzerinde Frechet türevlenebilir denir.

Bu tanıma eşdeğer olarak aşağıdaki önermeninin ifade edilebileceği açıktır.

Önerme 1.2 *Bir $f(\cdot):A\subseteq X\to Y$ dönüşümü,. $x_0\in A$ noktası verilsin. $f(\cdot)$ dönüşümünün x_0 noktasında Frechet türevlenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{||f(x)-f(x_0)-T(x-x_0)||}{||x-x_0||}=0 \tag{2}$$

olacak şekilde bir $T(\cdot):X\to Y$ doğrusal dönüşümünün var olmasıdır.

Eğer $\lim\limits_{x\to x_0}F(x-x_0)/||x-x_0||=0$ ise, $F(x-x_0)=o(||x-x_0||)$ olarak yazılabilir. O halde, önceki önermeye denk olarak aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç 1.3 *$f(\cdot):A\subseteq X\to Y$ dönüşümünün $x_0\in A$ noktasında Frechet türevlenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul A içinde $x\to x_0$ iken*

$$f(x)=f(x_0)+T(x-x_0)+o(||x-x_0||) \tag{3}$$

olacak şekilde bir $T(\cdot):X\to Y$ doğrusal dönüşümünün var olmasıdır.

Bu sonuç, $f(\cdot)$ dönüşümü x_0 noktasında Frechet türevlenebiliyor olduğu durumda, $T(\cdot) : X \to Y$ bir doğrusal dönüşüm olmak üzere, $f(\cdot)$ dönüşümünü x_0 noktasının bir komşuluğunda yaklaşık olarak $f(x) = f(x_0) + T(x - x_0)$ biçiminde yazılabilirliğini göstermektedir. Şimdi, verilen bir $f(\cdot)$ dönüşümü bir x_0 noktasında Frechet türevlenebiliyorsa, (1) eşitsizliğini (veya (2), (3) eşitliklerini) sağlayan $T(\cdot)$ doğrusal dönüşümünün tek olarak var olduğunu kanıtlayalım.

Önerme 1.4 *$f(\cdot) : A \subseteq X \to Y$ dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında Frechet türevlenebilir olsun. Bu durumda (1) eşitsizliğini sağlayan tek bir $T(\cdot)$ doğrusal dönüşümünü vardır.*

Kanıt. (1) eşitsizliğini sağlayan iki doğrusal dönüşümün olduğunu varsayalım. Bu dönüşümleri sıra ile $T_1(\cdot)$ ve $T_2(\cdot)$ ile gösterelim. Bu takdirde, $T_1(\cdot) : X \to Y$ ve $T_2(\cdot) : X \to Y$ doğrusal dönüşümleri iyi tanımlıdır. $\varepsilon > 0$ için $||x - x_0|| < \delta_1$ iken

$$||f(x) - f(x_0) - T_1(x - x_0)|| \leq \varepsilon ||x - x_0||$$

ve $||x - x_0|| < \delta_2$ iken

$$||f(x) - f(x_0) - T_2(x - x_0)|| \leq \varepsilon ||x - x_0||$$

olacak biçimde $\delta_1 > 0$ ve $\delta_2 > 0$ sayıları vardır. Şimdi $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ diyelim. Bu durumda $||x - x_0|| < \delta$ için

$$\begin{aligned} ||(T_1 - T_2)(x - x_0)|| &= ||T_1(x - x_0) - T_2(x - x_0)|| \leq \\ &\leq ||T_1(x - x_0) - f(x) + f(x_0)|| + ||f(x) - f(x_0) - T_2(x - x_0)|| \leq \\ &\leq \varepsilon ||x - x_0|| + \varepsilon ||x - x_0|| \leq 2\varepsilon ||x - x_0|| \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi X uzayında sıfırdan farklı bir x öğesi alalım. Bu durumda

$$\left\| \left(\frac{1}{2}\delta \frac{x}{||x||} + x_0 \right) - x_0 \right\| < \delta$$

olduğundan,

$$\left\| (T_1 - T_2) \left(\frac{1}{2}\delta \frac{x}{||x||} \right) \right\| \leq 2\varepsilon \left\| \delta \frac{1}{2\,||x||} x \right\| = \varepsilon\delta$$

olur. Buradan $x \neq 0$ iken $||(T_1 - T_2)(x)|| \leq 2\varepsilon||x||$ eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlik $x = 0$ için de doğru olduğundan, $(T_1 - T_2)(\cdot)$ sınırlı doğrusal dönüşüm olup sınırı 2ε sayısıdır. ε sayısı keyfi olduğundan $||T_1 - T_2|| = 0 \Leftrightarrow T_1 = T_2$ bulunur. ■

Uyarı 1.5 *Eğer x_0 noktası A kümesinin iç noktası değilse (1) eşitsizliğini sağlayan $T(\cdot)$ doğrusal dönüşümü tek olmayabilir.*

Tanım 1.6 *$f(\cdot) : A \subseteq X \to Y$ dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında Frechet türevlenebilir olsun. Bu durumda, (1) eşitsizliğini sağlayan $T(\cdot) : X \to Y$ doğrusal dönüşümüne $f(\cdot)$ dönüşümünün x_0 noktasında türevi denir ve $f'(x_0)$ veya $df(x_0)$ ile gösterilir.*

Önerme 1.7 *$f(\cdot) : A \subseteq X \to Y$ dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında Frechet türevlenebilir olsun. $f'(x_0) : X \to Y$ doğrusal dönüşümünün sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $f(\cdot)$ dönüşümünün x_0 noktasında sürekli olmasıdır.*

Kanıt. $f(\cdot)$ dönüşümü x_0 noktasında sürekli olsun. O zaman $||x - x_0|| < \delta_1$ iken

$$||f(x) - f(x_0)|| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

ve $||x - x_0|| < \delta_2$ için

$$||f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)|| \leq \frac{1}{2}.\varepsilon \ ||x - x_0||$$

olacak biçimde $\delta_1 > 0$ ve $\delta_2 > 0$ sayıları vardır. Şimdi $\delta = min\{1, \delta_1, \delta_2\}$diyelim. Bu durumda $||x - x_0|| < \delta$ olduğunda

$$\begin{aligned} ||f'(x_0)(x) - f'(x_0)(x_0)|| &= ||f'(x_0)(x - x_0)|| \leq \\ \leq ||f'(x_0)(x - x_0) - f(x) + f(x_0)|| &+ ||f(x) - f(x_0)|| \leq \\ \leq \frac{1}{2}\varepsilon||x - x_0|| + \frac{1}{2}\varepsilon &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon \leq \varepsilon \end{aligned}$$

olur. O halde, $f'(x_0)$ doğrusal dönüşümü x_0 noktasında süreklidir, dolayısıyla sınırlıdır.Yani $f'(x_0) \in L(X, Y)$ 'dır.

Tersine olarak, $f'(x_0)$ doğrusal dönüşümünün X 'den Y'ye sürekli olduğunu kabul edip $f(\cdot)$ fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ alırsak, (1)'den, $||x - x_0|| < \delta_1$ iken

$$||f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)|| \leq \varepsilon ||x - x_0||$$

olacak biçimde $\delta_1 > 0$ sayısı vardır. Şimdi $\delta = min\{ \delta_1, \frac{\varepsilon}{\varepsilon + ||f'(x_0)||} \}$ dersek, $||x - x_0|| < \delta$ iken

$$\begin{aligned} ||f(x) - f(x_0)|| &\leq ||f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)|| + ||f'(x_0)(x - x_0)|| \leq \\ &\leq \varepsilon||x - x_0|| + ||f'(x_0)||.||(x - x_0)|| < ||x - x_0||(\varepsilon + ||f'(x_0)||) \leq \\ &\leq \delta(\varepsilon + ||f'(x_0)||) \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon + || f'(x_0)||}(\varepsilon + ||f'(x_0)||) = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Bu ise $f(\cdot)$ dönüşümünün x_0 noktasında sürekli olması demektir. ∎

Sonuç 1.8 *X sonlu boyutlu normlu uzay ve $f(\cdot)$ dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında Frechet türevlenebiliyorsa, $f(\cdot)$ dönüşümü x_0 noktasında süreklidir.*

Kanıt. $f(\cdot)$ dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında türevlenebilir olsun. Sonlu boyutlu normlu uzay üzerinde tanımlı tüm doğrusal dönüşümler sürekli olduğundan, $f(\cdot)$'in x_0 noktasındaki $f'(x_0)$ türevi süreklidir. O halde önerme 1.4'ten dolayı, $f(\cdot)$ fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. ∎

Tanım 1.9 *$f(\cdot) : A \subseteq X \rightarrow Y$ dönüşümü A kümesi üzerinde sürekli ve F-türevlenebilir olsun. Eğer $\frac{df(x)}{dx} : A \rightarrow L(X,Y)$ (veya $x \rightarrow f'(x)$, $x \in A$) dönüşümü sürekli ise, $f\ (\cdot)$ dönüşümüne A kümesi üzerinde sürekli Frechet türevlenebilir denir.*

Örnek 1.10 *$y \in Y$ ve $f(\cdot) : A \subseteq X \rightarrow Y$, için $f(x) = y$ sabit fonksiyonu verilsin. A kümesi üzerinde $f(\cdot)$ fonksiyonu sürekli Frechet türevlenebilirdir ve $\forall x_0 \in A$ için $f'(x_0) = 0$ 'dır.*

Gerçekten, $f(\cdot) : A \subseteq X \rightarrow Y$ fonksiyonu $\forall x \in A$ için $f(x) = y$ şeklinde tanımlı olduğundan, $\forall x, x_0 \in A$ için $f(x) - f(x_0) = 0$'dır. Tanım 1.1'de

$$||f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)|| \leq \varepsilon\ ||x - x_0||$$

eşitsizliği $T(\cdot) : A \subseteq X \to Y,\ T(\cdot) = 0$ *sürekli doğrusal dönüşümü için sağlanır. O halde* $f'(x_0) = T(\cdot) = 0$ *ve* $f(x) = y,\ (\forall x \in A)$ *dönüşümü sürekli Frechet türevlenebilir.*

Örnek 1.11 $T(\cdot) : X \to Y$ *doğrusal dönüşüm olsun. Bu durumda* $T(\cdot)$ *dönüşümü* X *üzerinde Frechet türevlenebilir ve* $\forall x \in X$ *için* $T'(x) = T$ *'dir. Eğer* $T(\cdot)$ *sınırlı ise* $T(\cdot)$ *dönüşümü* X *üzerinde sürekli Frechet türevlenebilirdir. Keyfi* $x_0 \in X$ *alalım ve sabitleyelim.* $T(\cdot)$ *doğrusal dönüşüm olduğundan, keyfi* $x \in X$ *için* $T(x) - T(x_0) - T(x - x_0) = 0$ *eşitliği geçerlidir. Bu nedenle tanım 1.1'deki (1) eşitsizliği* $\forall \varepsilon > 0$*, ve* $\delta > 0$ *için sağlanır.Bu durumda* $T'(x_0) = T(\cdot)$ *dir. Açıktır ki,* $T(\cdot)$ *sınırlı ise, sürekli olur. O halde keyfi* $x \in X$ *için* $T'(x) = T(\cdot)$ *olduğundan,* $\frac{dT(x)}{dx} : X \to L(X,Y)$ *olur ve* $x \to \frac{dT(x)}{dx}$, $x \in X$, *dönüşümü süreklidir.*

Tanım 1.12 $f(\cdot) : A \subseteq \Re \to Y$ *bir fonksiyon,* t_0 *noktası* A *kümesinin bir iç noktası olsun. Eğer* A *kümesi içinde* t *öğesi* t_0 *öğesine yakınsarken* $[f(t) - f(t_0)]/(t - t_0)$ *ifadesinin limiti* Y *uzayı içinde varsa bu limitin değeri olan vektöre* $f(\cdot)$ *dönüşümünün* t_0 *noktasındaki türevi denir ve* $\frac{Df(t_0)}{dt}$ *ile gösterilir.*

Açıktır ki $f(\cdot)$ fonksiyonu t_0 noktasında türevlenebilir ve türevinin Y uzayında bir y öğesine eşit olması için gerekli ve yeterli koşul, verilen keyfi $\varepsilon > 0$ için $|t - t_0| < \delta$ iken

$$||[(f(t) - f(t_0))/(t - t_0)] - y|| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının varlığıdır.

Örnek 1.13 $X = Y = \Re,\ f(\cdot) : A \subseteq \Re \to \Re$ *fonksiyonu verilsin.* $f(\cdot)$ *fonksiyonunun* $x_0 \in A$ *noktasında Frechet türevlenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul* x_0 *noktasında klasik anlamda türevlenebilir olmasıdır. Ayrıca,*

$$x \in A \text{ için } f'(x_0)(x) = x \cdot \frac{Df(x_0)}{dx}$$

olur.

$f(\cdot) : A \subseteq \Re \to \Re$ fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında Frechet türevlenebilir olsun ve $f'(x_0)(\cdot) = T(\cdot)$ olarak gösterelim. $T(\cdot) : \Re \to \Re$ doğrusal dönüşümü için $T(1) = y$ diyelim. O halde verilen keyfi $\varepsilon > 0$ için $||x - x_0|| < \delta$ iken

$$||f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)|| \leq \varepsilon ||x - x_0|| \tag{4}$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Şimdi,

$$T(x - x_0) = T(1 \cdot (x - x_0)) = (x - x_0)T(1) = (x - x_0)y$$

ifadesini (4)'te yazarsak, $0 < ||x - x_0|| < \delta$ için

$$\left\| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - y \right\| \leq \varepsilon \tag{5}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu sonuç bize $f(\cdot)$ fonksiyonunun x_0 noktasında tanım 1.11 anlamında türevlenebilir olduğunu ve $\frac{Df(x_0)}{dx} = y$ olduğunu gösterir.Bu nedenle, $\forall x \in \Re$ için

$$f'(x_0)(x) = T(x) = T(1 \cdot x) = x \cdot T(1) = xy = x \cdot \frac{Df(x_0)}{dx}$$

olur.

Tersine $f(\cdot)$ fonksiyonu tanım 1.11 anlamında x_0 noktasında türevlenebilir olsun. Bu durumda $f(\cdot)$ fonksiyonunun x_0 'da türevini $\frac{Df(x_0)}{dx} = y$ ile gösterelim. O zaman verilen keyfi $\varepsilon > 0$ için $||x - x_0|| < \delta$ iken $\left\| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - y \right\| \leq \varepsilon$ olacak biçimde $\delta > 0$ vardır. Şimdi her x reel sayısı için $T(\cdot) : \Re \to \Re$ doğrusal dönüşümünü $T(x) = xy$ olarak tanımlayalım. $T(x - x_0) = (x - x_0)y$ olduğundan, buradan verilen keyfi $\varepsilon > 0$ için $||x - x_0|| < \delta$ iken

$$||f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)|| \leq \varepsilon ||x - x_0||$$

olacak biçimde $\delta > 0$ vardır. Buradan (4) eşitsizliğinin sağlandığını yani $f(\cdot)$ fonksiyonunun x_0 noktasında Frechet türevlenebilir olduğu görülür.

Örnek 1.14 *$f(\cdot) : \Re^n \to \Re^m$ fonksiyonu bir $x \in \Re^n$ noktasında Frechet türevlenebilir ve bu noktadaki türev $f'(x)$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun koordinat dönüşümleri*

$f_1, f_2, ..., f_m$ *ve* $\Re^n$ *' nin iyi bilinen tabanı* $e_1, e_2, ...e_n$ $(e_i = (0, ..., 1, ..., 0),\ i = 1, 2, ..., n)$ *olsun. O zaman* $f'(x)(\cdot) : X \to Y$ *doğrusal dönüşüm olduğundan,* $u = \sum_{i=1}^{n} (u_i e_i) \in \Re^n$ *için*

$$f'(x)(u) = f'(x)(\sum_{i=1}^{n} u_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i f'(x)(e_i)$$

yazılabilir. Şimdi e_i *noktası için,*

$$f'(x)(e_i) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + t, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\frac{f_1(x_1, ..., x_i + t, ..., x_n) \ - \ f_1(x_1, ..., x_i, ...x_n)}{t}, ..., \right.$$

$$\left. \frac{f_m(x_1, ..., x_i + t, ...x_n) \ - \ f_m(x_1, ..., x_i, ...x_n)}{t} \right) = \left(\frac{\partial\ f_1}{\partial\ x_i}, ..., \frac{\partial\ f_m}{\partial\ x_i} \right)$$

olur. O halde,

$$\begin{aligned} f'(x)(u) &= \sum_{i=1}^{n} u_i f'(x)(e_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i \left(\frac{\partial\ f_1}{\partial\ x_i}, ..., \frac{\partial\ f_m}{\partial\ x_i} \right) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial\ f_1}{\partial\ x_i}, ..., \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial\ f_m}{\partial\ x_i} \right) \end{aligned}$$

eşitliği gerçeklenir. Bu eşitlik

$$f'(x)(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\ f_1}{\partial\ x_1} & \frac{\partial\ f_1}{\partial\ x_2} & \cdots & \frac{\partial\ f_1}{\partial\ x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\ f_m}{\partial\ x_1} & \frac{\partial\ f_m}{\partial\ x_2} & \cdots & \frac{\partial\ f_m}{\partial\ x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece f *dönüşümünün* x *noktasındaki türevi* $f'(x)(\cdot) : \Re^n \to \Re^m$ *doğrusal dönüşümünün matris gösteriminin Jacobian matris olduğu görülür. Eğer* $m = 1$ *ise, yani* f *' nin* n *- değişkenli gerçel değerli fonkiyon olması durumunda,* $u \in \Re^n$ *için*

$$f'(x)(u) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

olur.

Uyarı 1.15 X_1, X_2, $X_3,...,X_n$ *normlu uzaylar;* $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ *olsun. Bu uzay bir çok şekilde birbirine eşdeğer biçimde normlandırılabilir. Açık olarak belirtilmeyen durumlarda çarpım uzayda bir* x *vektörünün normu,*

$$||x|| = (||x_1||^2 + ||x_2||^2 + ... + ||x_n||^2)^{1/2}$$

şeklinde tanımlı Euclidean normu olarak alınacaktır. Y *başka bir vektör uzayı olmak üzere,* X *kartezyen çarpım uzaydan* Y *uzayına tanımlı bir çokdoğrusal (multilineer)* f *dönüşümünün sınırlı olması, keyfi* $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in X$ *noktası için,*

$$||x_1|| \leq 1, \quad ||x_2|| \leq 1, ..., ||x_n|| \leq 1$$

iken $||f(x_1, x_2, ..., x_n)|| \leq M$ *olacak şekilde bir* $M > 0$ *sayısının var olması olarak tanımlanabilir. Bu durum* $f \in L(X_1 \times X_2 \times ... \times X_n, Y)$ *şeklinde gösterilir ve* f *dönüşümünün normu,*

$$||f|| = sup\{||f(x_1, x_2, ...x_n) : ||x_i|| \leq 1, (i = 1, 2...n)\}$$

olarak tanımlanır. Bu normla $L(X_1 \times X_2 \times ... \times X_n, Y)$ *uzayı bir normlu uzaydır.*

Önerme 1.16 X_1, X_2 *normlu uzaylar,* $X = X_1 \times X_2$ *ve* $F \in L(X, Y)$ *olsun. Gösterelim ki herhangi bir* $x = (x_1, x_2) \in X$ *için* F *dönüşümü* x *noktasında Frechet türevlenebilir ise,* F *dönüşümünün* $x = (x_1, x_2)$ *noktasındaki türevi keyfi* $(h_1, h_2) \in X$ *için*

$$T(h_1, h_2) = F(h_1, x_2) + F(x_1, h_2) \tag{6}$$

şeklinde olacak bir $T \in L(X, Y)$ *doğrusal dönüşümdür. Ayrıca* $T(\cdot) = F'(\cdot) : X \to L(X, Y)$ *sürekli doğrusal dönüşümdür.*

Kanıt. Önce (6) eşitliği ile tanımlanan T dönüşümünün $X = X_1 \times X_2$ 'den Y 'ye doğrusal dönüşüm olduğunu gösterelim. Bunun için $h = (h_1, h_2) \in X$,

$h' = (h_1', h_2') \in X$ ve α skaleri alalım. O zaman

$$T(h+h') = T(h_1+h_1', h_2+h_2') = F(h_1+h_1', x_2) + F(x_1, h_2+h_2') =$$
$$= F(h_1, x_2) + F(h_1', x_2) + F(x_1, h_2) + F(x_1, h_2') =$$
$$= F(h_1, x_2) + F(x_1, h_2) + F(h_1', x_2) + F(x_1, h_2') =$$
$$= T(h_1, h_2) + T(h_1', h_2') = T(h) + T(h')$$

olduğu görülür. $\alpha \in \Re$, $h = (h_1, h_2)$ için ise,

$$T(\alpha h) = T(\alpha h_1, \alpha h_2) = F(\alpha h_1, x_2) + F(x_1, \alpha h_2)$$
$$= \alpha F(h_1, x_2) + \alpha F(x_1, h_2) = \alpha T(h)$$

olduğu bulunur. Bundan dolayı, $T : X_1 \times X_2 \to Y$ doğrusal dönüşümdür. F sürekli olduğundan T 'de süreklidir. Dolayısıyla sınırlıdır. Yani $T \in L(X,Y)$'dir. Ayrıca F 'nin çokdoğrusal olmasından dolayı,

$$F(x+h) - F(x) - T(x)(h) =$$
$$= F(x_1+h_1, x_2+h_2) - F(x_1, x_2) - F(x_1, h_2) - F(h_1, x_2) =$$
$$= F(x_1, x_2+h_2) + F(h_1, x_2+h_2) - F(x_1, x_2) - F(h_1, x_2) - F(x_1, h_2) =$$
$$= F(x_1, x_2) + F(x_1, h_2) + F(h_1, x_2) + F(h_1, h_2) - F(x_1, x_2) -$$
$$-F(h_1, x_2) - F(x_1, h_2) = F(h_1, h_2)$$

bulunur. Buradan,

$$||h_1||.||h_2|| \leq (1/2)(||h_1||^2 + ||h_2||^2)$$

olduğundan,

$$||F(x+h) - F(x) - T(x)(h)|| = ||F(h_1, h_2)|| \leq ||F||.||h_1||.||h_2|| \leq$$
$$\leq (1/2).||F||(||h_1||^2 + ||h_2||^2) \leq (1/2)(||F||).||h||^2$$

olduğu bulunur.Böylece,

$$||F(x+h) - F(x) - T(x)(h)|| \leq (1/2)||F||.||h||^2$$

eşitsizliği geçerlidir. Bundan dolayı F fonksiyonu $x = (x_1, x_2)$ noktasında F - Türevlenebilir ve türevi $F'(x)(\cdot) = T(x)(\cdot)$'dir. Şimdi $F'(x)$ 'in doğrusallığını görelim $.x = (x_1, x_2) \in X$, $x' = (x_1' , x_2') \in X$, $h = (h_1, h_2) \in X$, ve α skaleri için,

$$F'(x+x')(h) = F'(x+x')(h_1, h_2) = F(h_1, x_2 + x_2') + F(x_1 + x_1', h_2) =$$
$$= F(h_1, x_2) + F(h_1, x_2') + F(x_1, h_2) + F(x_1', h_2) =$$
$$= F'(x)(h_1, h_2) + F'(x')(h_1, h_2) = F'(x)(h) + F'(x')h$$

olduğu bulunur .Böylece $T = F'(x)$ dönüşümünün toplamayı koruduğu görülür.Şimdi de $T = F'(x)$ dönüşümünün skalerle çarpmayı koruduğunu görelim.

$$F'(\alpha x)(h) = F'(\alpha x)(h_1, h_2) = F(h_1, \alpha x_2) + F(h_2, \alpha x_1) =$$
$$= \alpha F(h_1, x_2) + \alpha F(h_2, x_1) = \alpha F'(x)h$$

bulunur. Son olarak $F'(x)$ doğrusal dönüşümünün sınırlı olduğunu görelim. Açıktır ki, keyfi $x = (x_1, x_2) \in X$, $h = (h_1, h_2) \in X$ için,

$$0 \leq (||x_1||.||h_1|| - ||x_2||.||h_2||)^2 =$$
$$= ||x_1||^2||h_1||^2 + ||x_2||^2||h_2||^2 - 2||x_1||.||h_1||.||x_2||.||h_2||$$

olduğundan dolayı,

$$2||x_1||.||h_1||.||x_2||.||h_2|| \leq ||x_1||^2||h_1||^2 + ||x_2||^2||h_2||^2$$

olur. Bu eşitsizlikten,

$$2||x_1||.||h_1||.||x_2||.||h_2|| + ||x_1||^2||h_2||^2 + ||x_2||^2||h_1||^2 \leq$$
$$\leq ||x_1||^2||h_1||^2 + ||x_2||^2||h_2||^2 + ||x_1||^2||h_2||^2 + ||x_2||^2||h_1||^2$$

ve buradan ise

$$(||x_1||.||h_2|| + ||x_2||.||h_1||)^2 \leq (||x_1||^2 + ||x_2||^2)(||h_1||^2 + ||h_2||^2)$$

olduğu elde edilir. Bu eşitsizlikte her iki tarafın pozitif karekökünü alırsak,

$$(||x_1||.||h_2|| + ||x_2||.||h_1||) \leq (||x_1||^2 + ||x_2||^2)^{1/2}(||h_1||^2 + ||h_2||^2)^{1/2} = ||x|| \cdot ||h||$$

olduğu bulunur. Son eşitsizlikten dolayı,

$$||F'(x)(h)|| = ||F(h_1, x_2) + F(x_1, h_2)|| \leq ||F(h_1, x_2)|| + ||F(x_1, h_2)|| \leq$$
$$\leq ||F||.||h_1||.||x_2|| + ||F||.||x_1||.||h_2|| \leq ||F||(||h_1||||x_2|| + ||x_1||.||h_2||) \leq$$
$$\leq ||F||(||x_1||^2 + ||x_2||^2)^{1/2}(||h_1||^2 + ||h_2||^2)^{1/2} \leq ||F||.||x||.||h||$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradan ise $||F'(x)|| \leq ||F||.||x||$ olup, $||F'|| \leq ||F||$ olduğu görülür. Önerme ispatlandı. ∎

Yukardaki önerme aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir.X_1, X_2, $X_3, ..., X_n$ normlu uzaylar ve $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ olsun. $F \in L(X_1 \times X_2 \times ... \times X_n, Y)$ olmak üzere F dönüşümü her bir $x = (x_1, x_2, ...x_n)$ noktasında Frechet türevlenebilirdir ve bu dönüşümün $F'(x) = T(x)$ türevi

$$T(x)(h_1, h_2, ..., h_n) =$$
$$= F(h_1, x_2, x_3...x_n) + F(x_1, h_2, x_3...x_n) + ... + F(x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, h_n)$$

olarak verilen $T \in L(X, Y)$ doğrusal dönüşümüdür.

Önerme 1.17 *$f : A \subset X \to Y$ olsun. Aşağıdaki koşullar birbirine denktir.*

(i) f fonksiyonu x_0 noktasında Frechet türevlenebilir ve $f'(x_0) = T$'dir, yani $h \to 0$ iken $R(h)/\,||h|| \to 0$ olur. Burada $R(h) = ||f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h)||$.

(ii) Her sınırlı $E \subset X$ kümesi için $\Re$ içinde $t \to +0$ iken, $\forall h \in E$ için $R(th)/t \to 0$ 'dır.

(iii) $(t_n)_{n \in N} \subset \Re/\{0\}$ sıfıra yakınsayan bir dizi olmak üzere X içinde her sınırlı $(h_n)_{n \in N}$ dizisi için, $n \to \infty$ iken $R(t_n h_n)/t_n \to 0$ 'dır. Buna ilaveten X uzayı sonlu boyutlu ise $(i) - (iii)$ koşullarının her biri aşağıdaki (iv)'e denktir.

(iv) X içinde her kompakt E kümesi için $\Re$ 'de $t \to +0$ iken $\forall h \in E$ için $R(th)/t \to 0$ 'dır.

Kanıt. $(i) \Longrightarrow (ii)$. (i)'nin doğru olduğunu varsayalım. E kümesi X içinde sınırlı bir küme olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $E \subset \{x \in X : ||x|| \leq M\}$ olacak biçimde $M \in \Re^+$ alalım. f dönüşümü x_0 noktasında Frechet türevlenebilir olduğundan,

(i)'den, $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ için $||h|| < \delta$ iken $||R(h)|| \leq (\varepsilon/M)||h||$ olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı vardır. Diğer yandan $t \to +0$ olduğundan, $0 < t < \delta/M$ alırsak, keyfi $h \in E$ için $||th|| \leq (\delta/M).M \leq \delta$ olur. O zaman, keyfi $h \in E$ için

$$||R(th)|| \leq (\varepsilon/M)||th|| \leq (\varepsilon/M)t \cdot ||h|| \leq (\varepsilon/M)t \cdot M \leq t\varepsilon$$

eşitsizliğine ulaşırız.Buradan, keyfi $h \in E$ için $t \to 0$ iken $R(th)/t \to 0$ olduğu görülür.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. $(h_n)_{n\in N} \subset X$ sınırlı dizi ise (ii)'de tanımlanan sınırlı E kümesini $(h_n)_{n\in N}$ dizisinin elemanları kümesi olarak alabiliriz. Böylece (iii) doğrulanır.

$(iii) \Rightarrow (i)$. (i)'nin doğru oladığını varsayalım. Bu durumda, $h \to 0$ iken $R(h)/||h||$ sıfıra yakınsamaz. O zaman $X/\{0\}$ içinde öyle bir (k_n) dizisi bulabiliriz ki, $n \to \infty$ iken $k_n \to 0$ olduğu halde, $R(k_n)/||k_n||$ sıfıra gitmez. Şimdi $t_n = ||k_n||$ ve $h_n = k_n/||k_n||$ dersek, (h_n) sınırlı dizi ve $n \to \infty$ iken $t_n \to 0$ olur. $R(k_n)/||k_n|| = R(t_n h_n)/t_n$ olduğundan, $n \to \infty$ iken $R(t_n h_n)/t_n$ sıfıra gitmez olur. Böylece (iii) sağlanmaz, yani varsayımımız doğru değil.

$(ii) \Longleftrightarrow (iv)$. Kompakt küme sınırlı olduğundan dolayı, $(ii) \Rightarrow (iv)$'ü gerektirdiği açıktır. Şimdi tersini, yani $(iv) \Rightarrow (ii)$ olduğunu gösterelim. X sonlu boyutlu uzay, $E \subset X$ sınırlı bir alt küme olsun. E kümesinden bir h öğesini alalım. $t \to 0$ olsun. $R(th)/t \to 0$ mı? $cl(E)$ kümesi, E kümesinin kapanışı olsun. O zaman $cl(E)$ kümesi X uzayı içinde kapalı, sınırlı ve X sonlu boyutlu olduğundan, $cl(E)$ kümesi kompakt kümedir. h öğesi $cl(E)$ kümesine ait ve $t \to 0$ olduğundan (iv)'e göre $R(th)/t \to 0$ yakınsaması geçerlidir. ■

Şimdi Frechet türevlenebilmeye ilişkin birkaç özellik verelim.

Önerme 1.18 *Eğer $A \subset X$ ve $f(\cdot) : A \subset X \to Y$ dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında Frechet türevlenebilir ise, $\forall \alpha \in K$ skaleri için $\alpha f(\cdot)$ dönüşümü de $x_0 \in X$ noktasında Frechet türevlenebilirdir ve bu noktada Frechet türevi $(a\ f(\cdot))'(x_0) = \alpha f'(x_0)$ olur.*

Eğer $A, B \subset X$ ve $f(\cdot) : A \subset X \to Y$, $g(\cdot) : B \subset X \to Y$ dönüşümleri x_0 noktasında Frechet türevlenebilir ise $(f + g)(\cdot)$ dönüşümü de x_0 noktasında Frechet türevlenebilirdir ve $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ olur.

Kanıt. $f(\cdot) : A \subset X \to Y$, dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında Frechet türevlenebilir, $\alpha \in K$ olsun. O halde, Frechet türevlenebilirliğin tanımından

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{||x - x_0||} = 0$$

olur. Bu eşitlikde, α ile her iki tarafı çarparsak,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha f(x) - \alpha f(x_0) - \alpha f'(x_0)(x - x_0)}{||x - x_0||} = 0$$

eşitliğine ulaşırız. Bu ise $(\alpha\, f(\cdot))'(x_0) = \alpha f'(x_0)$ olması demektir.

Şimdi $f(\cdot) : A \subset X \to Y$, $g(\cdot) : B \subset X \to Y$ dönüşümleri x_0 noktasında Frechet türevlenebilir olsun. O zaman, Frechet türevlenebilirliğin tanımından

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{||x - x_0||} = 0 \text{ ve } \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)}{||x - x_0||} = 0$$

olur. O halde buradan

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0) - [f'(x_0) + g'(x_0)](x - x_0)}{||x - x_0||} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{||x - x_0||} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)}{||x - x_0||} = 0$$

olduğu bulunur. Bu ise $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ olması demektir. ■

Örnek 1.19 *$T \in L(X, Y)$ ve $c \in Y$ verilsin. $F(\cdot) : X \to Y$ dönüşümü, $F(x) = T(x) + c$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda F dönüşümü, T doğrusal dönüşümü ile sabit bir dönüşümün toplamıdır.Bu nedenle F dönüşümü X uzayından alınan her x için Frechet türevlenebilirdir ve $F'(x) = (T+c)'(x) = T'(x) + c' = T + 0 = T$ 'dir.*

Önerme 1.20 *(Zincir Kuralı) $A \subset X$, $B \subset Y$ açık kümeler, $f : A \subset X \to B \subset Y$, $g : B \subset Y \to Z$ sürekli dönüşümleri verilsin ve f dönüşümü $x_0 \in A$, g dönüşümü $y_0 = f(x_0)$ noktasında Frechet türevlenebilir olsun. Bu durumda $(g \circ f)(\cdot) : A \subset X \to Z$ bileşke fonksiyonu da $x_0 \in X$ noktasında Frechet türevlenebilir ve Frechet türevi*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0)$$

olur.

Kanıt. $x_0 \in A$ alalım. O halde $y_0 = f(x_0) \in B$ olur. Bu durumda x_0 noktası $(g \circ f)(\cdot)$ bileşke fonksiyonunun tanım kümesinin de iç noktasıdır. $T = f'(x_0)$, $U = g'(y_0)$, $(h_n)_{n\in N}$ dizisi X *içinde* sınırlı dizi, $(t_n)_{n\in N} \subset \Re/\{0\}$ ve $n \to \infty$ iken $(t_n) \to 0$ olmak üzere

$$m_n = g(f(x_0 + t_n h_n)) - g(f(x_0)) - U(T(t_n h_n))$$

olarak tanımlayalım. $n \to \infty$ iken $(t_n h_n)$ dizisi sıfıra yakınsadığından, yeterince büyük n'ler için m_n tanımlıdır. Bundan dolayı bileşke fonksiyonun türevlenebilir olduğunu görmek için $n \to \infty$ iken $(m_n/t_n) \to 0$ olduğunu görmek yeterlidir. Şimdi $(x_0 + h) \in A$, $(y_0 + k) \in B$ için

$$R(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h), \quad S(k) = g(y_0 + k) - g(y_0) - U(k)$$

olsun.

$$k_n = [f(x_0 + t_n h_n) - f((x_0)]/t_n$$

olarak tanımlayalım. O zaman $t_n k_n = f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)$ olur. Bu durumda

$$R(t_n h_n) = f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0) - T(t_n h_n) = t_n k_n - T(t_n h_n)$$

olur. Buradan ise $R(t_n h_n) + T(t_n h_n) = t_n k_n$ ve $[\ R(t_n h_n)/t_n] + T(h_n) = k_n$ olduğu bulunur. Bu eşitliği

$$k_n - T(h_n) = R(t_n h_n)/t_n$$

olarak yazabiliriz. $R(t_n h_n)$ ve k_n 'lerin tanımından dolayı, $n \to \infty$ iken $R(t_n h_n)/t_n \to 0$ ve (k_n) dizisi sınırlıdır. $S(\cdot)$ dönüşümünün tanımından,

$$S(t_n k_n) = g(y_0 + t_n k_n) - g(y_0) - U(t_n k_n)$$

olur. Şimdi,

$$t_n k_n + y_0 = t_n k_n + f(x_0) = f(x_0 + t_n h_n)$$

olduğundan, $g(y_0+t_nk_n) = \ g(f(x_0+t_nh_n))$ olur. Buradan,

$$m_n = g(y_0+t_nk_n) - g(y_0) - U(T(t_nh_n))$$

ve

$$m_n/t_n = [g(y_0+t_nk_n) - g(y_0) - U(T(t_nh_n))]/t_n =$$

$$= [g(y_0+t_nk_n) - g(y_0)]/t_n - U(T(h_n)) = [S(t_nk_n) + U(t_nk_n)]/t_n - U(T(h_n)) =$$

$$= [S(t_nk_n)]/t_n + [U(t_nk_n)]/t_n - U(T(h_n)) = [S(t_nk_n)]/t_n + U(k_n) - U(T(h_n)) =$$

$$= [S(t_nk_n)]/t_n + U(k_n - T(h_n)) = [S(t_nk_n)]/t_n + U[R(t_nh_n)/t_n]$$

olur. g ve f türevlenebilir olduğundan, $n \to \infty$ iken $S(t_nk_n)/(t_n) \to 0$ ve $R(t_nh_n)/(t_n) \to 0$'dır. $f : A \subset X \to B \subset Y$, $g : B \subset Y \to Z$ sürekli dönüşümler olduklarından, $T = f'(x_0) : X \to Y$, $U = g'(y_0) : Y \to Z$ sürekli doğrusal dönüşümlerdir. O halde $n \to \infty$ iken $U(R(t_nh_n)/t_n) \to 0$ 'dır.Böylece $(m_n)/(t_n) \to 0$ olduğu görülür. $(h_n)_{n\in N}$ sınırlı dizisi ve $n \to \infty$ iken $(t_n) \to 0$, $(t_n)_{n\in N} \subset \Re/\{0\}$ olmak üzereve (t_n) dizisi keyfi seçilmiş olduklarından, buradan ve Önerme 1.17*iiii*)'den

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) - U(T(h))}{||h||} = 0$$

olduğu bulunur. Bu ise $(g \circ f)'(x_0) = (U \circ T)(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0)$ olması demektir.

■

Sonuç 1.21 *(i) $f : A \subset X \to Y$ dönüşümü $x_0 \in X$ noktasında Frechet türevlenebilir ve $g \in L(Y,Z)$ olsun. O zaman $(g \circ f)(\cdot)$ dönüşümü de x_0 noktasında Frechet türevlenebilirdir ve $(g \circ f)'(x_0) = g \circ f'(x_0)$ 'dır.*

(ii) $f \in L(X,Y)$, $x_0 \in X$, $B \subset Y$ ve $g : B \subset Y \to Z$ bir fonksiyon ve $y_0 = f(x_0)$ noktasında Frechet türevlenebilir olsun. Bu durumda $(g \circ f)(\cdot)$ bileşke dönüşümü de x_0 noktasında Frechet türevlenebilirdir ve $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \circ f$ 'dir.

(iii) $f : A \subset X \to Y$ dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında Frechet türevlenebilir bir dönüşüm, $F(\cdot) : \Re \to X$ fonksiyonu ise $t_0 \in \Re$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı ve $F(t_0) = x_0$ olup F fonksiyonu t_0 noktasında türeve sahip olsun. Bu

durumda $y(\cdot) = (f \circ F)(\cdot)$ fonksiyonu da t_0 noktasında türevlenebilirdir ve $y'(t_0) = f'(x_0) \circ F'(t_0)$ olur.

Kanıt. (i) $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0)$ eşitliğinin doğru olduğunu biliyoruz $g \in L(Y, Z)$ olduğundan $g'(y_0) = g$ 'dir. O halde, buradan

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0) = g \circ f'(x_0)$$

olur.

(ii) Yukardakine benzer şekilde yapılır.

(iii) $f : A \subset X \to Y$ dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında Frechet türevlenebilir bir dönüşüm, $F(\cdot) : \Re \to X$ fonksiyonu ise $F(t_0) = x_0$ olacak şekilde bir $t_0 \in \Re$ noktasında türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $y(\cdot) = (f \circ F)(\cdot)$ bileşke fonksiyonu t_0 noktasında türevlenebilirdir ve $y'(t_0) = f'(x_0) \circ F'(t_0)$ ' dır. Gerçekten Örneme 1.13'e göre F fonksiyonu t_0 noktasında Frechet türevlenebilirdir ve her h gerçel sayısı için

$$y'(t_0)(h) = f'(x_0)(F'(t_0)(h)) = (f'(x_0) \circ F'(t_0))(h)$$

eşitliği bulunur. ∎

Örnek 1.22 *$Y_1, Y_2, Y_3, .., Y_m$ normlu uzaylar, $Y = Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \times ... \times Y_m$ ve $f_i(\cdot) : A \subseteq X \to Y_i$ dönüşümü f fonksiyonunn i. 'inci koordinat dönüşümü olup, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$ olarak tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonunun $x_0 \in A$ noktasında Frechet türevlenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul $f_1, f_2, f_3, ..., f_m$ koordinat dönüşümlerinin de x_0 noktasında Frechet türevlenebilir olmasıdır. Ayrıca, $f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), ..., f_m'(x_0))$ eşitliği geçerlidir.*

$f(\cdot) : X \to Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \times ... \times Y_m$ dönüşümünün $x_0 \in A$ noktasında Frechet türevlenebilir olduğunu varsayalım. İlk olarak $i-$inci izdüşümü P_i ile gösterelim, yani. $P_i : Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \times ... \times Y_m \to Y_i$ dönüşümü $P_i(y_1, y_2, ..., y_i, ..., y_m) = y_i$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda $P_i \in L(Y, Y_i)$'dir. $\Psi(\cdot) : A \subseteq X \to Y_i$ dönüşümünü

$$\Psi(x) = (P_i \circ f)(x) = P_i(f(x)) =$$
$$= P_i(f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) = f_i(x) \in Y_i$$

olarak tanımlayalım.

$$(P_i \circ f)(x) = P_i(f(x)) = P_i(f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) = f_i(x),$$

$P_i : Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \times ... \times Y_m \to Y_i$ *doğrusal dönüşüm,* $f(\cdot) : X \to Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \times ... \times Y_m$ *dönüşümü* $x_0 \in A$ *noktasında Frechet türevlenebilir olduğundan, keyfi* $i = 1, 2, ..., m$ *için* $(P_i \circ f)(\cdot) : X \to Y_i$ *dönüşümü de* $x_0 \in A$ *noktasında Frechet türevlenebilirdir ve zincir kuralından dolayı,* $f_i'(x_0) = P_i \circ f'(x_0)$ *olur. Şimdi, keyfi* $i = 1, 2, ..., m$ *için* $f_i(\cdot) : A \subseteq X \to Y_i$ *dönüşümlerinin,* $x_0 \in A$ *noktasında Frechet türevlenebilir olduğunu varsayalım.* $I_i(y_i) = (0, 0, ..., 0, y_i, 0, ..., 0)$ *olmak üzere* $I_i(\cdot) : Y_i \to Y$ *dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda* $I_i \in L(Y_i, Y)$*'dır. O halde,*

$$\sum_{i=1}^{m} I_i(f_i(x)) = I_1(f_1(x)) + I_2(f_2(x)) + ... + I_m(f_m(x)) =$$
$$= (f_1(x), 0, ..., 0) + (0, f_2(x), 0, ..., 0) + (0, ..., 0, f_m(x)) =$$
$$= (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) = f(x)$$

olur. Böylece, $f(x) = \sum_{i=1}^{m} I_i(\ f_i(x))$ *eşitliği geçerlidir. Keyfi* $i = 1, 2, ..., m$ *için* $I_i(\cdot) : Y_i \to Y$ *doğrusal dönüşüm,*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} I_i(f_i(x)) = \sum_{i=1}^{m} (I_i \circ f_i)(x),$$

$f_i(\cdot) : A \subseteq X \to Y_i$ *dönüşümleri* $x_0 \in A$ *noktasında Frechet türevlenebilir olduğundan, zincir kuralından dolayı,* $f(\cdot) : X \to Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \times ... \times Y_m$ *dönüşümü* $x_0 \in A$ *noktasında Frechet türevlenebilir* $f'(x_0) = \sum_{i=1}^{m} I_i \circ f_i'(x_0)$ *olur. Sonunda, buradan ve* $I_i(\cdot) : Y_i \to Y$ *dönüşümlerinin tanımından* $f'(x_0) = (f_1'(x), f_2'(x), ..., f_m'(x))$ *olduğu bulunur.*

Örnek 1.23 $Y_1, Y_2, Y_3, .., Y_m$ *normlu uzaylar,* $Y = Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \times ... \times Y_m$ *ve* $G \in L(Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \times ... \times Y_m; Z)$, *ve* $f : A \subset X \to Y$ *dönüşümü* $x_0 \in A$ *noktasında Frechet türevlenebilir,* $(G \circ f)(\cdot)$ *bileşke fonksiyonu da* x_0 *noktasında Frechet türevlenebilir olsun. Ek olarak* f *'nin koordinat fonksiyonları* $f_1, f_2, ..., f_m$

ve $T_i = f_i'(x_0)$ *ise, türevin zincir kuralı ve örnekten*

$$(G \circ f)'(x_0)(h) = G(T_1(h), f_2(x_0), ..., f_m(x_0)) +$$
$$+G(f_1(x_0), T_2(h), f_3(x_0), ..., f_m(x_0)) +$$
$$+... + G(f_1(x_0), f_2(x_0), ..., f_{m-1}(x_0), T_m(h))$$

olduğu görülür.

Örnek 1.24 *X uzayı gerçel bir çarpım uzayı olsun ve $\forall x \in X$ için $F(x) =< x, x >$ olarak tanımlansın. Bu durumda $F(\cdot)$ fonksiyonu Frechet türevlenebilir ve X uzayından alınan her x için $F'(x)(h) = 2 < x, h >$'dır.*

Kanıt. Keyfi $x_0 \in X$ alalım ve sabitleyelim. $F(\cdot) : X \to \Re$, $F(x) =< x, x >$ dönüşümü gerçel değerli bir dönüşümdür. X uzayı gerçel sayılar cisminde tanımlı ve gerçel sayılar cismi üzerinde bir iç çarpım uzayıdır. F dönüşümünün x_0 noktasında Frechet türevlenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul $h \in X$ için

$$R(h) = F(x_0 + h) - F(x_0) - T(h)$$

şeklinde tanımlı olmak üzere, ve $h \to 0$ iken, $(R(h))/||h|| \to 0$ olacak biçimde bir doğrusal $T(\cdot) : X \to \Re$ dönüşümünün olmasıdır. Şimdi $x_0 \in X$ için $T(\cdot) : X \to \Re$ dönüşümü, $T(h) = 2 < x_0, h >$ şeklinde tanımlayalım. İç çarpımın doğrusallığından $T(\cdot)$ dönüşümünün doğrusallığı görülür.Bu $T(\cdot)$ doğrusal dönüşümü için,

$$\frac{R(h)}{||h||} = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0) - T(h)}{||h||} =$$
$$= \frac{< x_0 + h, x_0 + h > - < x_0, x_0 > -2 < x_0, h >}{||h||} =$$
$$= \frac{< x_0, x_0 > + < x_0, h > + < h, x_0 > + < h, h > - < x_0, x_0 > -2 < x_0, h >}{||h||} =$$
$$= \frac{< h, h >}{||h||} =< h, h >^{1/2}= ||h||$$

olduğundan, $h \to 0$ iken $\frac{R(h)}{||h||} \to 0$ olur. O halde $F'(x)(h) = 2 < x, h >$ olur. ■

Örnek 1.25 *$(H, < \cdot, \cdot >)$ bir gerçel iç çarpım uzayı olsun. H kümesinden alınan her x için, $F(x) = ||x|| =< x\ ,\ x >^{1/2}$şeklinde tanımlı norm fonksiyonun $H \backslash \{0\}$ kümesinde Frechet türevinin $F'(x)(h) = \frac{<x,h>}{||x||}$ olduğunu görelim*

$\Re^+ = \{t \in \Re : t \geq 0\}$ *kümesinde tanımlı* $f(t) = \sqrt{t} : \Re^+ \to \Re$ *ve* $g(x) =< x, x >: H \to \Re$ *fonksiyonlarını göz önününe alalım. Bu durumda* H *kümesinden alınan her* x *için*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{< x, x >} =< x, x >^{1/2} = ||x||$$

olduğundan dolayı, $||x|| = (f \circ g)(x)$ *eşitliğinde* $x \neq 0$ *iken, türevin zincir kuralını uygularsak, Örnek 1.24'ten*

$$F'(x)(h) = (||x||)'(h) = (f \circ g)'(x)(h) = ((f(g(x))' \circ g'(x))(h) =$$
$$= ((\sqrt{< x, x >})' \circ (< x, x >)')(h) = \frac{1}{2\sqrt{< x, x >}} \cdot (2 < x, \cdot >)(h) = \frac{< x, h >}{||x||}$$

olur.

Önerme 1.26 $f : A \subseteq X \to Y$ *dönüşümü* $A \subseteq X$ *kümesinde tanımlı birebir dönüşüm olsun ve* x_0 *noktası* A *kümesinin iç noktası olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlansın.*

1. f *fonksiyonu* x_0 *noktasında Frechet türevlenebilirdir.*
2. $T = f'(x_0) \in LH(X, Y)$
3. $y_0 = f(x_0)$ *noktası* $f(A)$ *kümesinin iç noktasıdır.*
4. $f^{-1}(\cdot) : Y \to A$ *ters fonksiyonu* $y_0 = f(x_0)$ *noktasında süreklidir.*

Bu durumda $f^{-1}(\cdot)$ *fonksiyonu* $y_0 = f(x_0)$ *noktasında Frechet türevlenebilir ve* $(f^{-1})'(y_0) = T^{-1}$ *'dir.*

Burada $LH(X, Y)$, $G : X \to Y$ *olacak biçimde doğrusal homomorfizmler uzayıdır.*

Kanıt. $(k_n)_{n\in N}$, Y içinde sınırlı bir dizi olsun. $\Re \setminus \{0\}$ içinde $(t_n)_{n\in N}$ ve $n \to \infty$ iken $(t_n) \to 0$ olacak şekilde bir $(t_n)_{n\in N}$ alalım. Bu durumda $y_0 + t_n k_n$ öğesi yeterince büyük n için $f(A)$ kümesine aittir. n yeteri kadar büyük seçilmek üzere, X uzayı içinde $(h_n)_{n\in N}$ dizisi

$$h_n = \frac{f^{-1}(y_0 + t_n k_n) - f^{-1}(y_0)}{t_n}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda $x_0 + t_n h_n = f^{-1}(y_0 + t_n k_n)$ ve f birebir olduğundan, $f(x_0 + t_n h_n) = y_0 + t_n k_n$ olur. $f(x_0 + t_n h_n) - y_0 = t_n k_n$ ve $y_0 = f(x_0)$ olduğundan $f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0) = t_n k_n$olduğu bulunur. O halde

$$\frac{f^{-1}(y_0 + t_n k_n) - f^{-1}(y_0) - T^{-1}(t_n k_n)}{t_n} = \frac{t_n h_n - T^{-1}[f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)]}{t_n} =$$

$$= \frac{T^{-1}(T(t_n h_n)) - T^{-1}[f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)]}{t_n} =$$

$$= \frac{T^{-1}(T(t_n h_n) - [f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)])}{t_n} =$$

$$= -T^{-1}\left(\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0) - T(t_n h_n)}{t_n}\right) =$$

$$= -T^{-1}\left(\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - T(h_n)\right)$$

yazılabilir. $T \in LH(X,Y)$ ve olduğundan dolayı, $T^{-1} \in LH(Y,X)$ olur. Önerme 1.17(ii) 'den kanıtı tamamlamak için, $(h_n)_{n \in N}$ dizisinin X içinde sınırlı olduğunu görmek yeterlidir. $\forall y \in Y$ için T^{-1} sürekli, dolayısıyla sınırlı olduğundan, $||T^{-1}y|| \leq ||T^{-1}||.||y||$ olur. O zaman, $\forall x \in X$ için $||x|| \leq ||T^{-1}|| \cdot ||T(x)||$ olduğu bulunur. T^{-1} birebir olduğundan, $||T^{-1}|| > 0$ olur. $c = \frac{1}{||T^{-1}||}$ dersek, $\forall x \in X$ için $c.||x|| \leq ||T(x)||$ yazabiliriz. O halde keyfi n için

$$||T(t_n h_n)|| \geq c||(t_n h_n)||$$

olur. f^{-1}dönüşümü y_0 noktasında sürekli, $t_n h_n = f^{-1}(y_0 + t_n k_n) - f^{-1}(y_0)$ olduğundan, $n \to \infty$ iken $t_n h_n \to 0$ yakınsaması geçerlidir. f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında Frechet türevlenebilir olduğundan, keyfi $n \geq N$ için

$$||f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0) - T(t_n h_n)|| \leq \frac{1}{2}c.||t_n h_n||$$

olacak biçimde $N > 0$ sayısı vardır. O zaman buradan, keyfi $n \geq N$ için

$$|||f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)|| - ||T(t_n h_n)||| \leq$$

$$\leq ||f(x + t_n h_n) - f(x_0) - T(t_n h_n)|| \leq \frac{1}{2}c||t_n h_n||$$

ve

$$-||f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)|| + ||T(t_n h_n)|| \leq \frac{1}{2}c||t_n h_n||$$

olduğu bulunur. Son eşitsizliğin her iki tarafını (-1) ile çarparsak

$$||f(x_0+t_nh_n)-f(x_0)||-||T(t_nh_n)||\geq \frac{1}{2}c.||(t_nh_n)||$$

eşitsizliğine ulaşırız. Buradan

$$\begin{aligned}
||f(x_0+t_nh_n)-f(x_0)|| &\geq ||T(t_nh_n)||-\frac{1}{2}c.||t_nh_n||,\\
||t_nk_n|| &\geq ||T(t_nh_n)||-\frac{1}{2}c.||t_nh_n||,\\
||t_nk_n|| &\geq \frac{1}{2}c.||t_nh_n||,\\
||t_n||.||k_n|| &\geq \frac{1}{2}.c.||t_n||.||h_n||,\\
||k_n|| &\geq \frac{1}{2}.c.||h_n||,\\
||h_n||.\frac{1}{2}c &\leq ||k_n||,\\
||h_n|| &\leq \frac{1}{2}c||k_n||
\end{aligned}$$

olduğu bulunur. $(k_n)_{n\in N}$ dizisi Y içinde sınırlı olduğundan,$\forall n\in N$ için $||k_n||\leq M$ olacak şekilde bir $M>0$ vardır. Bundan dolayı .$||h_n||\leq \frac{1}{2}cM$ olup, $(h_n)_{n\in N}$ dizisinin sınırlı olduğu görülür. (h_n) dizisi sınırlı, $n\to\infty$ iken $(t_n)\to 0$, $f'(x_0)=T$ olduğundan dolayı,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+t_nh_n)-f(x_0)}{t_n}-T(h_n)=0$$

olduğu bulunur. O halde, T^{-1} dönüşümü doğrusal olduğundan,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{f^{-1}(y_0+t_nk_n)-f^{-1}(y_0)-T^{-1}(t_nk_n)}{t_n}=\\
&=\lim_{n\to\infty}-T^{-1}\left(\frac{f(x_0+t_nh_n)-f(x_0)}{t_n}-T(h_n)\right)=0
\end{aligned}$$

olduğu bulunur. $(k_n)_{n\in N}$, Y içinde keyfi sınırlı dizi, $(t_n)_{n\in N}$ dizisi $n\to\infty$ iken $(t_n)\to 0$ olacak biçimde keyfi dizi olduğundan, son eşitlikten $(f^{-1})'(y_0)=T^{-1}$ olduğu elde edilir. ■

Örnek 1.27 *$A\neq\emptyset$, $A\subseteq X$ kümesi X uzayında açık, $B\neq\emptyset$, $B\subseteq Y$ kümesi de Y uzayında açık kümeler olsunlar.$f:A\subseteq X\to B\subseteq Y$ bir homeomorfizma ve A kümesi üzerinde Frechet türevlenebilir olsun. Bu durumda $\forall x\in A$ için*

$f'(x) \in LH(X,Y)$ ise f^{-1} dönüşümünün de B kümesi üzerinde Frechet türevlenebilir olduğunu kanıtlayınız.

Kanıt. $f : A \subseteq X \to B \subseteq Y$ homemorfizma, $\forall x \in A$ için $f(\cdot)$ dönüşümünün Frechet türevlenebilir ve $T = f'(x) \in LH(X,Y)$ olsun. f bir homeomorfizma olduğundan birebir ve örtendir. A kümesi açık olduğundan $\forall x \in A$ noktası bir iç noktadır. Aynı şekilde $y = f(x)$ noktası da B kümesi kümesi açık olduğundan bir iç noktadır. f dönüşümü A kümesinden B kümesine bir homeomorfizma olduğundan, $x \in A$ noktasında sürekli olup f^{-1} dönüşümü de $y = f(x)$ noktasında süreklidir. Böylece Önerme1.26'nın koşulları sağlanmış olur. $y = f(x)$ noktasında f $^{-1}$ dönüşümü türevlenebilir olup, $y \in B$ noktası keyfi olduğundan f $^{-1}$ dönüşümü B kümesi üzerinde Frechet türevlenebilirdir. ■

Örnek 1.28 *$x(\cdot) \in C([a,b];R)$ için $f(x(\cdot)) = \int_a^b x(t)dt$ olsun. O halde*

$$f'(x(\cdot))(h(t)) = \int_a^b h(t)dt$$

olur. Burada $C([a,b];R)$ $x(\cdot) : [a,b] \to R$ olacak biçimde sürekli fonksiyonlar uzayıdır ve $\|x(\cdot)\| = \max\limits_{t\in[a,b]} \|x(t)\|$.

Gerçekten,

$$\|f(x+h) - f(x) - f'(x)(h)\| = \left\| \int_a^b (x(t) + h(t)dt - \int_a^b x(t)dt - \int_a^b h(t)dt \right\| = 0$$

olduğundan, $f'(x(\cdot))(h(t)) = \int_a^b h(t)dt$ olduğu görülür.

2 FRECHET TÜREVLENEBİLİR FONKSİYONLAR İÇİN ORTALAMA DEĞER TEOREMİ

Önerme 2.1 *a ve b X uzayı içinde birbirinden farklı noktalar olsunlar. S kümesi X içinde uç noktaları a ve b olan kapalı doğru parçası, $S \subset A \subset X$, $f(\cdot) : A \to Y$ olsun. $f(\cdot)$ dönüşümü S üzerinde s ürekli ve S kümesinin hemen her noktasında Frechet türevlenebilir olsun. Bu durumda sayılamaz çoklukta $c \in S$ için*

$$||f(b) - f(a)|| \leq ||f'(c)(b-a)|| \tag{1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt. Açıktır ki, $S = \{(1-\lambda)a + \lambda b : \lambda \in [0,1]\}$. Şimdi $\forall t \in [0,1]$ için $F(t) = (1-t)a + tb$ olmak üzere $F(\cdot) : [0,1] \to S$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda $\forall t \in [0,1]$ için $F(t) = (1-t)a + tb \in S$ olur. $\forall t_1, t_2 \in [0,1]$ ve $t_1 \neq t_2$ için $(1-t_1)a + t_1 b \neq (1-t_2)a + t_2 b$ olduğundan, $F(\cdot)$ birebirdir.

Şimdi $F(\cdot)$ fonksiyonunun örtenliğini inceleyelim. $\forall y \in S$ için $y = F(t) = (1-t)a+tb$ olacak biçimde $t \in [0,1]$ var mıdır? $y \in S$ olduğundan, $y = (1-\lambda).a+\lambda.b$ olacak biçimde $\lambda \in [0,1]$ vardır ve o halde $y = F(\lambda)$ olur. Böylece, $F(\cdot) : [0,1] \to S$ fonksiyonu örtendir.

Sonuç olarak, F fonksiyonu birebir ve örten olduğundan tersi vardır. Bu ters fonksiyonu F^{-1} ile gösterelim. Şimdi $F(\cdot) : [0,1] \to S$ fonksiyonunun tersini bulalım. $F(t) = y$ olsun. O halde $t \in [0,1]$ olmak üzere, $y = (1-t)a+tb$, $y = a-ta+tb$ ve $y-a = t(b-a)$ olur. Bu eşitliğin her iki tarafının norm fonksiyonu altında görüntüsünü alırsak, $||y-a|| = ||t.(b-a)||$ ve buradan ise

$$||y-a|| = t||b-a||, \quad \frac{||y-a||}{||b-a||} = t$$

eşitliğine ulaşırız. Böylece, $F^{-1} : S \to [0,1]$ ters dönüşümünü $F^{-1}(y) = \frac{||y-a||}{||b-a||}$ olarak tanımlayabiliriz. Ayrıca, $F'(t) = b-a$.

Şimdi, $F(t) = (1-t)a + tb$ fonksiyonunun sürekliliğini inceleyelim. Bunun için, $\forall\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, $|t-t_0| < \delta(\varepsilon)$ iken $||F(t) - F(t_0)|| \leq \varepsilon$ olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısının varlığını gösterelim.

$$||F(t) - F(t_0)|| = ||[(1-t)a + tb] - [(1-t_0)a + t_0 b]|| =$$
$$= ||(a - ta + tb) - (a - at_0 + t_0 b)|| = ||a - ta + tb - a + t_0 a - t_0 b|| =$$
$$= ||(t-t_0).a + (t-t_0)b|| \leq \; ||(t-t_0).(b-a)|| =$$
$$\leq |t-t_0|.||b-a|| \leq \; |t-t_0|(||a|| + ||b||)$$

olduğndan, $M = ||a|| + ||b||$, $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/M$ dersek, $|t-t_0| < \delta$ iken $||F(t) - F(t_0)|| \leq \varepsilon$ olduğu bulunur. Böylece, $F(\cdot)$ fonksiyonunun sürekli bir fonksiyon olduğu görülür. Şimdi de $F^{-1}(\cdot) : S \to [0,1]$, $F^{-1}(y) = ||y-a|| \,/\, ||b-a||$ dönüşümünün sürekli olduğunu görelim. Bunun için verilen $\forall\, \varepsilon > 0$ için $||y - y_0|| < \delta(\varepsilon)$ iken $||F^{-1}(y) - F^{-1}(y_0)|| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulacağız.

$$||F^{-1}(y) - F^{-1}(y_0)|| = |||y-a|| \,/\, ||b-a|| - ||y_0 - a|| \,/\, ||b-a||| \leq$$
$$\leq |||y-a|| - ||y_0 - a||| \,/\, ||b-a|| \leq ||y - a - y_0 + a|| \,/\, ||b-a|| \leq$$
$$= ||y - y_0|| \,/\, ||b-a||$$

olduğundan, $\delta(\varepsilon) = \varepsilon\, ||b-a||$ olarak seçersek, $||y - y_0|| < \delta(\varepsilon)$ iken $||F^{-1}(y) - F^{-1}(y_0)|| < \varepsilon$ olur. Böylece $F^{-1}(\cdot)$ dönüşümünün sürekli olduğu görülür. Şimdi, $y(t) = (f \circ F)(t) = f((1-t)a + tb))$ şeklinde tanımlı bileşke $y(\cdot) : [0,1] \to Y$ fonksiyonu için, f ve F ' nin sürekliliğinden bileşke fonksiyonun sürekliliği görülür. Ayrıca bileşen fonksiyonlar Frechet türevlenebilen fonksiyonlar olduğundan bileşke fonksiyon da Frechet türevlenebilir ve $y'\,(t) = f'(x) \circ F'\,(t) = f'(x)(b-a)$ 'dır. Buna ilaveten, $y(0) = f(F(0)) = f(a)$, $y(1) = f(F(1)) = f(b)$ olduğundan, y fonksiyonuna ortalama değer eşitsizliğini uygularsak, $||y(1) - y(0)|| \leq ||(1-0)y'\,(c)||$ eşitsizliğini sağlayan sayılamaz çoklukta $c \in (0,1)$ vardır.Buradan,

$$||y(1) - y(0)|| \leq ||y'(c)||$$

eşitsizliğinden,

$$||f(b) - f(a)|| \leq \; ||f'(c).(b-a)||$$

eşitsizliğine ulaşırız. Böylece kanıt biter. ∎

Önerme 2.2 *C kümesi X uzayı içinde kapalı konvex küme ve $C^0 \neq \emptyset$, $f(\cdot) : C \subset X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Hemen hemen her $x \in C^0$ için $f(\cdot)$ dönüşümü Frechet türevlenebilir ve $||f'(x)|| \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı var olsun. Bu durumda $f(\cdot)$ dönüşümü C kümesi üzerinde M sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlar.*

Kanıt. $f(\cdot)$ dönüşümünün C kümesi üzerinde M sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlaması için, keyfi $a \in C, b \in C$ için

$$||f(b) - f(a)|| \leq M \cdot ||b - a|| \qquad (2)$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekir. Keyfi $a \in C$, $b \in C$ alalım. $a = b$ iken eşitsizlik doğrudur. Bu sebeple,$a \neq b$ varsayalım. Eğer $a, b \in C^0$ ise, konvex bir kümenin içi de konvex olacağından, (1) eşitsizliğinin sonucu olarak (2) eşitsizliği elde edilir. Yani, $\forall\ a, b \in C^0$ ve $a \neq b$ için

$$||f(b) - f(a)|| \leq ||df(c)(b-a)|| \leq ||f'(c)||||(b-a)|| \leq M.||(b-a)||$$

olduğu bulunur. Eğer $a, b \in C$ olursa, a ile b noktaları C^0 kümesinin kapanışına aittir. O zaman, $n \to \infty$ iken $a_n \to a$, $b_n \to b$ ve keyfi n için $a_n \in C^0$, $b_n \in C^0$ olacak biçimde (a_n) ve (b_n) dizileri vardır. O halde $\forall n \in N$ için

$$||f(b_n) - f(a_n)|| \leq M \cdot ||b_n - a_n||$$

eşitsizliğini elde ederiz. f fonksiyonu a ve b noktalarında sürekli, $n \to \infty$ iken $(a_n) \to a$ ve $(b_n) \to b$ olduğundan, $n \to \infty$ iken $f(a_n) \to f(a)$ ve $f(b_n) \to f(b)$ olur. Buradan $n \to \infty$ iken limit alırsak, $||f(b) - f(a)|| \leq M.||b - a||$ olduğu bulunur. ∎

Sonuç 2.3 *A kümesi X uzayında açık bağlantılı küme, $f(\cdot) : A \subset X \to Y$ sürekli ve $f(\cdot)$ dönüşümünün A kümesinin her x noktasında Frechet türevi sıfır olsun. Bu durumda $f(\cdot)$ dönüşümü sabit dönüşümdür.*

Kanıt. $a \in A$ alalım ve sabitleyelim. $E = \{x \in A : f(x) = f(a)\}$ kümesini tanımlayalım. Açıktır ki, $a \in E$ ve bundan dolayı, $E \neq \emptyset$. E kümesi açıktır, çünkü E kümesinden alınan her açık yuvar E içindedir. Bunu görmek için $y \in B_\delta(a)$ alalım. $a = y$ için sonuç aşikar olduğundan varsayalım ki, $a \neq y$ olsun. $B_\delta(a)$ konvex olduğundan uç noktaları a ve y olan S doğru parçasının tamamı yuvar içindedir. f fonksiyonu sürekli olduğundan S kümesi üzerinde sayılamaz çoklukta $c \in S$ vardır ki,

$$||f(y) - f(a)|| \leq ||f'(c)(y-a)|| \leq ||0(y-a)|| \leq 0$$

olur. Buradan $f(y) = f(a)$ bulunur. Son eşitlikten y noktasının E kümesine ait olduğu görülür. Dolayısıyla $B_\delta(a) \subset E$ olup, E kümesi açıktır. Şimdi E kümesinin kapalı olduğunu görelim. $\{f(a)\}, Y$ uzayında tek nokta kümesi olup kapalıdır. f fonksiyonu sürekli olduğundan ters görüntüsü yani $f^{-1}(a) = E$ kümesi kapalıdır. Bu durumda, E kümesi boş kümeden farklı ve hem açık hem de kapalı küme olur. Bir bağlantılı uzayda sadece boş küme ve uzayın kendisi hem açık hem kapalıdır. Buradan $E = A$ bulunur. Son eşitlikten f fonksiyonunun sabit olduğu görülür. ∎

3 TANIM KÜMESİ $\Re^n$ OLAN FONKSİYONLARIN KISMİ TÜREVLERİ

Tanım 3.1 *$n \geq 2$ olmak üzere $f : A \subset \Re^n \to Y$ bir fonksiyon olsun. $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, \ldots, x_{n0}) \in A$ noktasını alalım. $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ ise $\Re^n$ için standart taban olsun. $j = 1, 2 \ldots n$ için $x_j \in \Re$ olmak üzere*

$$x_j \to f(x_0 + (x_j - x_{j0})e_j)$$

fonksiyonunu tanımlayalım Bu fonksiyonun tanim kümesi olarak, $x_0 + (x_j - x_{j0})e_j \in A$ olacak biçimdeki $x_j \in \Re$ sayılarını alalım. $y(\cdot)$ fonksiyonu, j. bileşen hariç diğer tüm bileşenleri sabit tutan ve $x_j = x_{j0}$ noktasında $f(x_0)$ değerini alan fonksiyondur. Eğer bu fonksiyonun $x_j = x_{j0}$ noktasında türevi varsa, bu türeve f fonksiyonunun $j-$ inci bileşene göre kısmi türevi denir. Bu dönüşüm,

$$D_j f(x_0), \quad D_j f(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}), \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \ldots, x_n)\right]_{x_0}$$

sembollerinden biri ile gösterilir. Buna ilaveten, $D_j f(x)$ kısmı türevinin olduğu $x \in A$ noktalarında tanımlı $x \to D_j f(x)$ fonksiyonuna da f fonksiyonunun j-inci bileşene göre kısmi türevi denir ve $D_j f$ ile gösterilir.

$t = x_j - x_{j0}$ alırsak,

$$D_j f(x_0) = \left[\frac{d}{dt} f(x_0 + te_j\right]_{t=0}$$

olduğu görülür. Bu eşitlikte her iki taraftan birinin varlığı durumda şunu söyleyebiliriz: $D_j f(x_0)$ doğrusal dönüşümünün var olması ve $y \in Y$ ögesine eşit olması için gerekli ve yeterli koşul, $x_0 + te_j \in A$ özelliğini sağlayan $t \in \Re$ sayılarının kümesinde sıfır izole olmayan nokta olmak üzere, $t \to 0$ iken

$$\frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t} \to y$$

olmasıdır.

Önerme 3.2 *$n \geq 2$ olmak üzere $f : A \subset \Re^n \to Y$ fonksiyonu x_0 noktasında Frechet türevlenebilir olsun. Bu durumda $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ için*

$$D_j f(x_0) = f'(x_0)(e_j) \tag{1}$$

ve $\forall h = (h_1, \ldots, h_n) \in \Re^n$ için,

$$f'(x_0)(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \cdot D_j f(x_0) \tag{2}$$

olur. Ek olarak, eğer $f'(\cdot)$ dönüşümü x_0 noktasında sürekli ise, her bir $D_j f(x_0)$ kısmi türevi de x_0 noktasında süreklidir.

Kanıt. $f : A \subset \Re^n \to Y$ fonksiyonu x_0 noktasında Frechet türevlenebilir olsduğundan,

$$D_j f(x_0) = \left[\frac{d}{dt} f(x_0 + te_j\right]_{t=0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)(e_j)$$

olur. Boylece, (1) sağlanır.

Keyfi $h = (h_1, h_2, ..., h_n) \in \Re^n$ alalım. O zaman $h = \sum_{j=1}^{n} h_j e_j$.olur. O halde (1)'den.

$$f'(x_0)(h) = f'(x_0)\left(\sum_{j=1}^{n} h_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} h_j f'(x_0)(e_j) = \sum_{j=1}^{n} h_j \cdot D_j f(x_0)$$

olduğu bulunur. Böylece, (2)'nin doğruluğu ispatlandı.

Ayrıca, $f'(\cdot)$ dönüşümü x_0 noktasında sürekli ise, (1)'den her bir $D_j f(x_0)$ kısmi türevinin de x_0 noktasında sürekli olduğu bulunur. ∎

Önerme 3.3 *$n \geq 2$ bir doğal sayı olmak üzere $f(\cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot), ..., f_m(\cdot)) : A \subset \Re^n \to \Re^m$ fonksiyonu $x_0 \in \Re^n$ noktasında Frechet türevlenebilir olsun. Bu durumda $i = 1, 2, \ldots, m$ ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için $D_j f_i(x_0)$ vardır ve $[D_j f_i(x_0)]_{m \times n}$ matrisi, $df(x_0) : \Re^n \to \Re^m$ doğrusal dönüşümünün standart tabana göre matrisidir. Bundan dolayı $df(x_0)(h_1, ..., h_n) = (y_1, ..., y_m)$ ise, her $i = 1, 2, ..., m$ için $y_i = \sum_{j=1}^{n} h_j \cdot D_j f_i(x_0)$ olur. Ayrıca*

$$||df(x_0)|| \leq \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} [D_j f_i(x_0)]^2\right]^{1/2} \leq n^{1/2} \cdot ||df(x_0)||$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt. Bir önceki teoremden $i = 1, 2, \ldots, m$ ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için $D_j f_i(x_0)$ kısmı trevi vardır ve

$$D_j f(x_0) = df(x_0)(e_j) = (D_j f_1(x_0), D_j f_2(x_0), ..., D_j f_m(x_0))$$

olur. O halde , $[D_j f_i(x_0)]_{m\times n}$ matrisini oluşturabiliriz. $[D_j f_i(x_0)]_{m\times n}$ matrisine, verilen f fonksiyonunun x_0 noktasındaki Jacobian matrisi denir. $m = n$ iken matris karesel olup bu matrisin determinantına f fonksiyonunun x_0 noktasında Jacobian determinantı denir. Önceki önermeden,

$$f'(x_0)(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \cdot D_j f(x_0)$$

olduğundan, $df(x_0)(h_1, ..., h_n) = (y_1, ..., y_m)$ iken, her $i = 1, 2, ..., m$ için $y_i = \sum_{j=1}^{n} h_j \cdot D_j f_i(x_0)$ olduğu bulunur. $df(x_0)(h_1, ..., h_n) = (y_1, ..., y_m)$ ve $y_i = \sum_{j=1}^{n} h_j D_j f_i(x_0)$ eşitliklerini ve norm tanımını kullanırsak,

$$||df(x_0)|| = \left\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(D_j f_i(x_0))\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(D_j f_i(x_0))^2\right\|^{1/2} \leq n^{1/2} \cdot ||df(x_0)||$$

olduğu bulunur. ■

Önerme 3.4 *$A \subset \Re^n$, $B \subset \Re^m$ olmak üzere*

$$f : A \subset \Re^n \to B \subset \Re^m$$

fonksiyonu $x_0 \in \Re^n$ noktasında,

$$g : B \subset \Re^m \to \Re^l$$

fonksiyonu $y_0 = f(x_0) \in B$ noktasında Frechet türevlenebilir olsun. $H = g \circ f : A \subset \Re^l$ bileşke fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda $H = (H_1, H_2, \ldots, H_l)$, $g = (g_1, g_2, \ldots, g_l)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ olmak üzere f, g ve H fonksiyonlarının Jacobian matrisleri arasında

$$[D_j H_k(x_0)] = [D_i g_k(y_0)] \cdot [D_j f_i(x_0)]$$

bağıntısı vardır ve bundan dolayı

$$D_jH_k(x_0) = \sum_{i=1}^{m} D_i g_k(y_0) \cdot D_j f_i(x_0)$$

eşitliği geçerlidir. Eğer $l = m = n$ ise f, g, H fonksiyonlarının Jacobian determinantları arasında

$$det[D_jH_k(x_0)] = det[D_i g_k(y_0)] \cdot det[D_j f_i(x_0)]$$

eşitliği geçerlidir.

Önerme 3.5 *$n \geq 2$ olmak üzere $A \neq \emptyset$, $A \subset \Re^n$ ve $f : A \subset \Re^n \to Y$ fonksiyonu için $D_1 f$, $D_2 f, \ldots, D_n f$ dönüşümleri x_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı ve $x_0 \in \Re^n$ noktasında sürekli olsunlar. Bu durumda f fonksiyonu $x_0 \in \Re^n$ noktasında Frechet türevlenebilirdir.*

Kanıt. $f : A \subset \Re^n \to Y$ fonksiyonun $x_0 \in \Re^n$ noktasında Frechet türevlenebilir ise, Önerme 3.2'ye göre, bu fonksiyonun türevi

$$(h_1, h_2, \ldots, h_n) \to \sum_{j=1}^{n} D_j f(x_0) h_j$$

dönüşümüdür. $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \Re^n$ için

$$R(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \sum_{j=1}^{n} D_j f(x_0) h_j$$

olsun. $h \to 0$ iken, $R(h))/||h|| \to 0$ olduğunu kanıtlarsak,

$$f'(x_0)(h) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(x_0) h_j$$

olduğunu göstermiş oluruz, yani f fonksiyonu $x_0 \in \Re^n$ noktasında Frechet türevlenebilirdir. Keyfi $j = 1, 2, ..., n$ için$x \to D_j f(x)$ dönüşümleri $x_0 \in \Re^n$ noktasında sürekli olduğundan, keyfi $\varepsilon > 0$.için $x \in B$ iken

$$||D_j f(x) - D_j f(x_0)|| \leq \varepsilon \tag{3}$$

olacak biçimde x_0 merkezli bir $B \subset A$ açık yuvarı vardır. $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \Re^n$ ögesi için $x_0 + h \in B$ olsun. Şimdi

$$z_0 = x_0, \qquad z_j = (x_{10} + h_1, x_{20} + h_2, ..., x_{j0} + h_j, x_{j+1,0}, ..., x_{n0}), \qquad j = 1, 2, ..., n$$

olarak gösterelim. $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \Re^n$ ögesini, $j = 1, 2, ..., n$ için $z_j \in B$ olacak biçimde seçelim. z_i'lerin gösteriminden, keyfi $j = 1, 2, ..., n$ için $z_j = x_0 + \sum_{i=1}^{j} I_i(h_i)$ olarak yazabiliriz.. Burada $I_j(\cdot) : \Re \to \Re^n$ fonksiyonu,

$$I_j(h_j) = (0, 0, \ldots, 0, h_j, 0, \ldots, 0)$$

olarak tanımlanır. Açıktır ki $z_n = x_0 + h$, kejfi $j = 1, 2, ..., n$ için $z_j \in B$ ve $z_j = z_{j-1} + I_j(h_j)$. O halde,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{j=1}^{n} f(z_j) - f(z_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} [f(z_{j-1} + I_j(h_j)) - f(z_{j-1})]$$

olur. Bundan dolayı

$$R(h) = \sum_{j=1}^{n} [f(z_{j-1} + I_j(h_j)) - f(z_{j-1}) - D_j f(x_0) h_j] \tag{4}$$

eşitliği elde edilir.

$$S = \begin{cases} [0, h_j] & h_j > 0 \\ [h_j, 0] & h_j < 0 \end{cases}$$

olsun Şimdi $t \in S$ için

$$y_j(t) = f(z_{j-1} + I_j(t)) - f(z_{j-1}) - D_j f(x_0) t$$

olmak üzere $y_j(\cdot) : S \to Y$ fonksiyonunu tanımlayalım. Açıktır ki, $t \in intS$ için

$$\frac{d}{dt} y_j(t) = D_j f(z_{j-1} + I_j(t)) - D_j f(x_0)$$

olur. Burada $intS$, S kümesinin içini gösterir. $y_j(\cdot) : S \to Y$ fonksiyonuna uç noktaları 0 ve h_j noktaları olan S aralığında ortalama değer eşitsizliğini uygulayalım. O halde

$$\|y_j(h_j) - y_j(0)\| \leq \left\| \frac{d}{dt} y_j(t_*) \right\| \cdot |h_j|$$

olacak biçimde $t_* \in intS$ vardır.

$$y_j(h_j) - y_j(0) = f(z_{j-1} + I_j(h_j)) - f(z_{j-1}) - D_j f(x_0) h_j,$$

$$\frac{d}{dt} y_j(t_*) = D_j f(z_{j-1} + I_j(t_*)) - D_j f(x_0)$$

olduğundan, buradan,

$$\|f(z_{j-1} + I_j(h_j)) - f(z_{j-1}) - D_j f(x_0) h_j\| \leq \|D_j f(z_{j-1} + I_j(t_*)) - D_j f(x_0)\| \cdot |h_j| \tag{5}$$

bulunur. $t_* \in intS$ olduğundan, $z_{j-1} + I_j(t_*) \in B$ olur. O zaman (3)'den

$$\|D_j f(z_{j-1} + I_j(t_*)) - D_j f(x_0)\| \leq \varepsilon$$

olduğu elde ediler. Buradan ve (5)'ten, keyfi $j = 1, 2, ..., n$ için

$$\|f(z_{j-1} + I_j(h_j)) - f(z_{j-1}) - D_j f(x_0) h_j\| \leq \varepsilon \cdot |h_j|$$

ollduğu bulunur. Son olarak, buradan ve (4)'ten

$$\|R(h)\| \leq \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{n} |h_j| \leq \varepsilon n^{1/2} ||h||$$

olur. Buradan ise $h \to 0$ iken, $R(h)/||h|| \to 0$ olduğunu elde ederiz. ■

Önerme 3.6 *$n \geq 2$ olmak üzere $A \subset \Re^n$ açık küme olsun. $f : A \subset \Re^n \to Y$ fonksiyonunun, A kümesinde C^1 sınıfından olması için gerekli ve yeterli koşul $x \to D_1 f(x)$, $x \to D_2 f(x), \ldots, x \to D_n f(x)$ dönüşümlerinin A kümesinde sürekli olmalarıdır.*

Kanıt. Keyfi $x_0 \in A$ alalım ve sabitleyelim. Önce $f \in C^1$olduğunu varsayalım. Önerme 3.2'den

$$df(x)(h) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(x_0) h_j = \sum_{j=1}^{n} D_j f(x_0) P_j(h)$$

eşitliğinin doğru olduğunu biliyoruz. Burada $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \Re^n$ için $P_j(h) = h_j$ olarak tanımlanır, yanı $P_j(\cdot), j$. izdüşüm dönüşümüdür. $f \in C^1$ olduğundan, $x_0 \in A$ noktasında $x \to df(x)$ dönüşümü sürekli, dolayısıyla

$$x \to \sum_{j=1}^{n} D_j f(x) P_j$$

dönüşümüde süreklidir. Buradan $x \to \sum_{j=1}^{n} D_j f(x) P_j$ dönüşümünün $x_0 \in A$ noktasında sürekli olması için, $x \to D_1 f(x)$, $x \to D_2 f(x), \ldots, x \to D_n f(x)$ dönüşümlerinin de $x_0 \in A$ noktasında sürekli olmalarının gerektiği görülür.

Tersine, $x \to D_1 f(x)$, $x \to D_2 f(x), \ldots, x \to D_n f(x)$ dönüşümleri $x_0 \in A$ noktasında sürekli ise, $P_j(\cdot) : \Re^n \to \Re$, $j = 1, 2, ..., n$, izdüşüm dönüşümleri de sürekli olduğundan,

$$x \to \sum_{j=1}^{n} D_j f(x) P_j$$

dönüşümü de $x_0 \in A$ noktasında süreklidir. $df(x) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(x) P_j$ olduğundan, $x \to df(x)$ dönüşümü de $x_0 \in A$ noktasında süreklidir. $x_0 \in A$ keyfi sabitlenmiş nokta olduğundan, $x \to df(x)$ dönüşümü keyfi $x \in A$ noktasında süreklidir. Dolayısıyla $f \in C^1$ sınıfındandır. ∎

Şimdi bir örnek çözelim.

Örnek 3.7 *$n \geq 2$ bir doğal sayı olmak üzere $X_1, X_2, \ldots, X_n$ normlu uzaylar ve $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ olsun. A kümesi X içinde açık konvex küme ve $f : A \subset X \to Y$ fonksiyonu için*

$$d_1 f,\ d_2 f, \ldots, d_n f$$

kısmi türevleri A kümesinde sınırlı olsun. f fonksiyonunun A kümesinde Lipschitz olduğunu kanıtlayın.

Çözüm 3.8 *$d_1 f$, $d_2 f, \ldots, d_n f$ kısmi türevleri tanımlı ve bu türevler A kümesi üzerinde sınırlı ise, $d_1 f$, $d_2 f, \ldots, d_n f$ kısmi türevleri süreklidirler. O halde, $f : A \subset$*

$X \to Y$ *fonksiyonunun kısmi türevleri tanımlı ve sürekli olduğundan,* f *fonksiyonu* A *kümesi üzerinde Frechet türevlenebilirdir.* $d_1 f,\ d_2 f, \ldots, d_n f$ *kısmi türevleri* A *kümesi üzerinde sınırlı olduğundan, keyfi* $x \in A$ *için*

$$||D_1 f(x)|| \le M_1,\ ||D_2 f(x)|| \le M_2, ..., ||D_n f(x)|| \le M_n$$

olacak biçimde $M_1 \ge 0,\quad M_2 \ge 0, ..., M_n \ge 0$ *sayıları vardır.* $M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n$ *olsun. Şimdi,* $a \ne b$ *olmak üzere, keyfi* $a, b \in A$ *noktaları alalım ve sabitleyelim.* a *ile* b *noktalarını birleştiren doğru parçasına* S *diyelim.* A *kümesi* X *uzayı içinde açık ve konvex,* $a, b \in A$ *olduğundan,* $S \subset A$ *olur. O halde ortalama değer eşitsizliğine göre*

$$||f(b) - f(a)|| \le ||df(c)(b-a)||$$

olacak biçimde $c \in S$ *vardır.* $d_1 f,\ d_2 f, \ldots, d_n f$ *kısmi türevleri sürekli olduğundan,* $df(c) = \sum\limits_{j=1}^{n} D_j f(c)$ *olduğunu biliyoruz. O zaman buradan,*

$$\begin{aligned}
||f(b) - f(a)|| &\le ||df(c)(b-a)|| \le \\
&\le ||D_1 f(c_1) + D_2 f(c_2) + \ldots + D_n f(c_n)|| \cdot ||(b-a)|| \le \\
&\le [||D_1 f(c_1)|| + ||D_2 f(c_2)|| + \ldots + ||D_n f(c_n)||] \cdot ||(b-a)|| \le \\
&\le (M_1 + M_2 + \ldots + M_n) \cdot ||(b-a)|| \le\ M \cdot ||(b-a)||
\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Yani, keyfi $a, b \in A$ *noktaları için* $||f(b) - f(a)|| \le M \cdot ||(b-a)||$ *olur. Bu ise* f *fonksiyonunun* A *kümesinde Lipschitz olması demektir.*

Örnek 3.9 $(x, y) \in \Re^2$ *için,*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} &, \quad (x,y) \ne (0,0) \\ 0 &, \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

olmak üzere, parçalı tanımlı $f : \Re^2 \to \Re$ *fonksiyonunun* $(0,0)$ *noktasında türevlenebilirliğini inceleyiniz.*

Çözüm 3.10 f *fonksiyonu eksenler üzerinde sıfır değerini alır. Çünkü*

$$f(0,y) = \frac{2 \cdot 0 \cdot y}{0^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

ve

$$f(x,0) = \frac{2 \cdot x \cdot 0}{0^2 + x^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

eşitlikleri geçerlidir. Bundan dolayı birinci ve ikinci bileşene göre kısmi türevler orjinde vardır ve sıfır dönüşümüdür. Fakat sıfırdan farklı her t gerçel sayısı için

$$f(t,t) = \frac{2.t.t}{t^2 + t^2} = \frac{2t^2}{2t^2} = 1$$

olduğundan, $\lim_{t \to 0} f(t,t) = 1$ *olur. Böylece, f fonksiyonu orjinde süreksizdir. Bundan dolayı, f fonksiyonu orjinde Frechet türevlenebilir değil. Böylece kısmi türevlerin varlığının, fonksiyonunun Frechet türevlenebilir olması için yeterli olmadığını gördük.*

Örnek 3.11 ***(Sonlu Boyutlu Uzaylarda Tanımlı Homojen Fonksiyonlar İçin Euler Teoremi)*** $F : \Re^n \to \Re^n$ *olsun. Eger* λ *parametresinin sıfırdan farklı tüm değerleri için m bir gerçel sayı olmak üzere*

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^m F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

eşitliği sağlanıyorsa, F dönüşümüne $m-$*inci mertebeden homojen fonksiyondur denir. Eğer F dönüşümü homojen ve Frechet türevlenebilir ise*

$$x_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \cdot \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + x_n \cdot \frac{\partial F}{\partial x_n} = m \cdot F(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitliğe, Euler formülü denir.

Gerçekten, F dönüşümü homojen olduğundan

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^m F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

olur. Burada $\lambda x_1 = u_1$, $\lambda x_2 = u_2, \ldots, \lambda x_m = u_m$ *olarak alalım.. Bu eşitlikte türev alırsak,*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \frac{\partial F}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial \lambda} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u_n} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial \lambda} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial u_1} \cdot x_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2} \cdot x_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u_n} \cdot x_n \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Öte yandan

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = m \cdot \lambda^{m-1} F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

olduğundan

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} \cdot x_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2} \cdot x_2 + \ldots. + \frac{\partial F}{\partial u_n} \cdot x_n = m\lambda^{m-1} F(x_1, \ldots, x_n)$$

olur. Bu eşitlikte $\lambda = 1$ *alırsak,*

$$x_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \cdot \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + x_n \cdot \frac{\partial F}{\partial x_n} = m \cdot F(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

Euler formülü bulunur.

Örnek 3.12 $t \in \Re$ *için* $f(t) = (e^t \cos t,\ e^t \sin t,\ t^2)$ *olarak tanımlanan* $f : \Re \to \Re^3$ *fonksiyonunun türevini bulunuz.*

Çözüm 3.13 *Önerme 3.2'den*

$$\begin{aligned} df(t) &= (e^t \cdot \cos t - e^t \cdot \sin t,\ e^t \cdot \sin t + e^t \cdot \cos t,\ 2t) \\ &= (e^t(\cos t - \sin t),\ e^t(\cos t + \sin t),\ 2t) \end{aligned}$$

olduğu bulunur bulunur.

Örnek 3.14 $t \in \Re$ *için* $r(t) = (at^2,\ bt^2,\ ct^2)$ *olarak tanımlanan* $r : \Re \to \Re^3$ *dönüşümü verilsin. Burada,* $a, b, c \in \Re$. *Bu dönüşümü kullanarak, üç boyutlu uzayda sabit kinetik enerji ile hareket eden bir parçacığın hareketini ifade edebilecek* a, b, c *gerçel sayılarını bulunuz.*

Çözüm 3.15 *Çözüme başlamadan önce bazı tanımları yapalım.* $\Re^3$*'de hareket eden bir parçacığın kütlesi* m, *belirli bir* t *anında kinetik enerjisi* $E(t)$ *olsun.* $\Re^3$ *üzerinde klasik iç çarpım dönüşümünü*

$$< \cdot, \cdot >: \Re^3 \to \Re$$

alalım. $i = 1, 2, 3$ *için* $x_i : \Re \to \Re$, *olmak üzere*

$$r : \Re \to \Re^3, \qquad r(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

şeklinde tanımlansın. r dönüşümü uzayda bir eğri belirtir. Varsayalım ki bu eğri türevlenebilir olsun. Şimdi m kütleli bir parçacığın t anındaki kinetik enerjisi E(t) olsun. O zaman

$$E(t) = \frac{1}{2} m < r'(t), r'(t) >=$$

$$= \frac{1}{2} m < (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t)), (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t)) >=$$

$$= \frac{1}{2} m \cdot [x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + x_3'(t)^2]$$

olur. $r : \Re \longrightarrow \Re^3$ *fonksiyonu* C^1 *sınıfından olduğundan,* $E(\cdot) : \Re \longrightarrow \Re$ *sürekli fonksiyon olur. Şimdi* $r' : \Re \longrightarrow \Re^3$ *fonksiyonunu türevlenebilir kabul edelim. Bu durumda*

$$r'' : \Re \longrightarrow \Re^3, \qquad r''(t) = (x_1''(t), x_2''(t), x_3''(t))$$

eşitliği her t gerçel sayısı için geçerlidir. $F(r) = \frac{1}{2} m < r, r >$ *olmak üzere,* $E(t) = (F \circ r')(t)$ *olduğundan,*

$$E(t) = (F \circ r')(t) = F((r'(t)) = F(x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t)) =$$

$$= \frac{1}{2} m < (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t)), (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t)) >=$$

$$= \frac{1}{2} m \ [x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + x_3'(t)^2]$$

olduğu bulunur. Şimdi, E bileşke fonksiyonunun türevini bulalım. Zincir kuralından ve örnek 1.9'dan

$$\frac{dE(t)}{dt} = dE_t(1) = \frac{1}{2} m \ (dF_{r'(t)} \cdot dr_t')(1) =$$

$$= \frac{1}{2} m \ [2 < r'(t), r'(t) >] = m < r'(t), r''(t) >$$

eşitliğine ulaşırız. Uzayda hareket eden parçacığın sabit kinetik enerji ile hareket etmesi, $E(t)$ *fonksiyonunun sabit fonkksiyon olması demektir. O halde, uzayda hareket eden parçacığın sabit kinetik enerji ile hareket etmesi gerekli ve yeterli koşul* $\frac{dE(t)}{dt} = 0$ *olur. Buradan ve son eşitlikten, uzayda hareket eden parçacığın sabit kinetik enerji ile hareket etmesi gerekli ve yeterli koşulun, keyfi t için*

$$< r'(t), r''(t) >= 0 \quad \text{veya} \quad r'(t) \perp r''(t)$$

olması gerektiği görülür. Bu durumda belirli bir t anında, parçacığa etki eden kuvvet $F(t)$ olmak üzere, Newton 'un hareket kanunu olan $F = m \cdot r''$ eşitliğinden, enerjinin sabit olması için gerekli ve yeterli koşulun parçacığa etki eden kuvvetin hareket yönüne dik olması gerektiği görülür. Şimdi çözüme başlayalım.

$$r : \Re \to \Re^3, \qquad r(t) = (at^2, bt^2, ct^2)$$

eğrisi için, r dönüşümünün sabit enerjili bir parçacığın hareketini ifade edebilmesi için gerekli ve yeterli koşulun keyfi t için

$$< r'(t) \, , r''(t) >= 0$$

olması gerektiğini gördük. $t \in \Re$ *için* $r(t) = (at^2, bt^2, ct^2)$ *olduğundan,*

$$r'(t) = (2at, 2bt, 2ct), \qquad r''(t) = (2a, 2b, 2c)$$

olur. O zaman

$$< r'(t) \, , r''(t) > \; =< (2at, 2bt, 2ct), (2a, 2b, 2c) >= 4a^2t + 4b^2t + 4c^2t$$

olduğu bulunur. Bu durumda

$$< r'(t) \, , r''(t) >= 4t(a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

olması için gerekli ve yeterli koşulun $a = b = c = 0$ *olduğu görülür.*

4 ÇARPIM UZAYINDA TANIMLI BİR FONKSİYONUN KISMİ FRECHET TÜREVLERİ

$n \geq 2$ olmak üzere $X_1, X_2, \ldots, X_n$ normlu uzaylar ve $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ olsun. $x_j \in X_j \quad (j = 1, 2, 3 \ldots n)$ için

$$I_j(x_j) = (0, 0, \ldots, 0, x_j, 0, \ldots, 0)$$

olmak üzere $I_j : X_j \to X$ dönüşümünü tanımlayalım. I_j dönüşümü doğrusaldır. Gerçekten, $a, b \in K$ ve $x_j, x_j' \in X_j$ için

$$I_j(ax_j + bx_j') = (0, 0, \ldots, 0, ax_j + bx_j', 0, \ldots, 0) =$$
$$= (0, 0, \ldots, 0, ax_j, 0, \ldots, 0) + (0, \ldots, 0, bx_j', 0, \ldots, 0) =$$
$$= a(0, \ldots, 0, x_j, 0, \ldots, 0) + b(0, \ldots, 0, x_j', 0, \ldots, 0) = aI_j(x_j) + bI_j\left(x_j'\right)$$

olduğu bulunur. Ayrıca $\forall\ x_j \in X_j$ için

$$||I_j(x_j)|| = ||(0, 0, \ldots, x_j, \ldots, 0)|| =$$
$$= \left[||0||^2 + \ldots + ||x_j||^2 + \ldots + ||0||^2\right]^{1/2} = \left[||x_j||^2\right]^{1/2} = ||x_j||_{X_j}$$

olduğundan $I_j \in L(X_j, X)$ olur.

Şimdi $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ çarpım uzayında,

$$x_0 = (x_{10},\ x_{20},\ x_{30}, \ldots, x_{j0}, \ldots, x_{n0})$$

öğesini göz önüne alalım. Bu durumda

$$y_j(\cdot) : X_j \to X, \qquad y(x_j) = x_0 + I_j(x_j - x_{j0})$$

şeklinde tanımlanan y fonksiyonu için

$$y_j(x_j) = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{j0}, \dots, x_{n0}) + (0, 0, \dots, 0, x_j - x_{j0}, 0, \dots, 0) =$$

$$= (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{j-1,0}, x_j, x_{j+1,0}, \dots, x_{n0})$$

eşitliği bulunur. Buradan görülür ki, y_j dönüşümü altında $x_j \in X_j$ öğesinin görüntüsü, $j-$inci bileşeni (x_j) olan, fakat diğer tüm bileşenleri (x_0) ögesinin bileşenleri ile aynı olan $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ çarpım uzayında bir vektördür.

Şimdi

$$f : A \subset X \to Y$$

bir fonksiyon, $x_0 \in A$ ve $j = 1, 2...n$ olsun. Bu durumda, $y_j(\cdot) : X_j \to X$, $y_j(x_j) = x_0 + I_j(x_j - x_{j0})$, fonksiyonu ile $f : A \subset X \to Y$ fonksiyonunun $F_j = f \circ y_j : X_j \to Y$ bileşkesi,

$$F_j(x_j) = (f \circ y_j)(x_j) = f(y_j(x_j)) = f(x_0 + I_j(x_j - x_{j0}))$$

olur. Burada y_j dönüşümünün tanım kümesi $(x_0 + I_j(x_j - x_{j0})) \in A$ olacak şekilde $x_j \in X_j$ ögelerinden oluşmaktadır. Yukarıda tanımladığımız F_j bileşke fonksiyonu ile f fonksiyonunun bileşenleri, $j-$inci bileşen dışında aynı olup, sadece $j-$inci bileşende farklı değerler alır. Özel olarak, $x_j = x_{j0}$ için

$$F_j(x_{j0}) = f(x_0 + I_j(x_{j0} - x_{j0})) = f(x_0)$$

olur.

Eğer F_j fonksiyonunun, x_{j0} noktasında Frechet türevi varsa, bu türeve f'nin x_0 noktasında $j-$inci bileşene göre kısmi türevi denir ve $D_j f(x_0)$ ile gösterilir. Buna ek olarak

$$D_j f : A \subset X \to L(X_j, Y)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme f 'nin $j-$inci bileşene göre kısmi türevi (veya Frechet kısmi türevi) denir ve $D_j f$ ile gösterilir.

Şimdi $h_j = x_j - x_{j0}$ dersek ve Frechet türevin tanımını uygularsak, f fonksiyonunun x_0 noktasında $j-$inci bileşene göre kısmi türevin var olması için gerek ve yeter koşul, $0 \in X_j$ noktası, $x_0 + I_j(h_j) \in A$ koşulunu sağlayan $h_j \in X_j$ ögelerinin oluşturduğu kümenin iç noktası olmak üzere, $h_j \to 0$ iken

$$\frac{f(x_0 + I_j h_j) - f(x_0) - T_j(h_j)}{||h_j||} \to 0$$

olacak şekilde bir $T_j \in L(X_j, Y)$ dönüşümünün var olmasıdır. Bir başka deyişle $d_j f(x_0)$ kısmi türevi vardır ve T_j doğrusal dönüşümüne eşittir diyebilmemiz için gerekli ve yeterli koşul

$$F_j : X_j \to Y, \qquad F_j(h_j) = f(x_0 + I_j(h_j))$$

fonksiyonunun $h_j = 0$ noktasında Frechet türevlenebilir olması ve bu türevin T_j doğrusal dönüşümüne eşit olmasıdır.

Önerme 4.1 *$X_1, X_2, \ldots, X_n$ normlu uzaylar, $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, $f : A \subset X \to Y$, f dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında Frechet türevlenebilir olsun. Bu durumda f dönüşümünün x_0 noktasında her bileşene göre kısmi türevi vardır ve $j = 1, 2, 3 \ldots n$ için*

$$d_j f(x_0) = df(x_0) \circ I_j \tag{1}$$

ve $h = (h_1, h_2, .., h_n) \in X$ için

$$df(x_0)(h) = \sum_{j=1}^{n} d_j f(x_0)(h_j) \tag{2}$$

eşitlikleri geçerlidir. Ek olarak, eğer df dönüşümü x_0 noktasında sürekli ise, her bir $d_j f$ kısmi türevi de x_0 noktasında süreklidir.

Kanıt. f dönüşümünün x_0 noktasında j. bileşene göre kısmi türevi

$$F_j(x_j) = (f \circ y_j)(x_j) = f(y_j(x_j)) = f(x_0 + I_j(x_j - x_{j0}))$$

dönüşümünün x_{j0} noktasındaki Frechet türevi olduğundan, zincir kuralından dolayı

$$d_j f(x_0) = dF_j(x_{j0}) = d(f \circ y_j)(x_{j0}) = df(y_j(x_{j0})) \cdot d(y_j(x_{j0}))$$

olur. Ayrıca $y(h_j) = x_0 + I_j(h_j)$ olduğundan, $y_j(x_{j0}) = x_0$, $d(y_j(x_{j0})) = I_j$ olduğu bulunur. O zaman buradan (1)'in doğruluğu bulunur.

Şimdi $h = (h_1, h_2, .., h_n) \in X$ olsun. O zaman (1)'den,

$$d_j f(x_0)(h_j) = df(x_0) I_j(h_j) = df(x_0)(0, ..., 0, h_j, 0, ..., 0)$$

olur. $df(x_0)(\cdot) : X \to Y$ doğrusal dönüşüm olduğundan,

$$df(x_0)(h) = df(x_0)(h_1, 0, ..., 0) + df(x_0)(0, h_2, 0, ..., 0) + ... + df(x_0)(0, ..., 0, h_n) =$$

$$= d_1 f(x_0)(h_1) + d_2 f(x_0)(h_2) + ... + d_n f(x_0)(h_n) = \sum_{j=1}^{n} d_j f(x_0)(h_j)$$

olur. Böylece (2)'nin doğruluğunu gördük.

$U_j(T) = T \circ I_j$ olmak üzere, $U_j : L(X, Y) \to L(X_j, Y)$ dönüşümünü tanımlayalım. O halde, açıktır ki $U_j(\cdot)$ dönüşümü doğrusal sürekli dönüşümdür. (1)'den

$$d_j f(x) = df(x) \circ I_j = U_j(df(x))$$

olur. $U_j(\cdot)$ doğrusal dönüşümü ve $x \to df(x)$ dönüşümleri sürekli olduğundan, iki sürekli dönüşümün bileşeni olan

$$x \to d_j f(x) = U_j(df(x))$$

dönüşümü de süreklidir. ■

Bu teoremin tersi ise yanlıştır. f fonksiyonunun x_0 noktasında kısmi Frechet türevlerin varlığı f fonksiyonunun x_0 noktasında Frechet türevlenebilir olduğunu söyleyebilmemiz için yeterli değildir.

Önerme 4.2 *$n \geq 2$ ve $X_1, X_2, \ldots, X_n$ normlu uzaylar, $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ olsun. $A \neq \emptyset$, $A \subset X$ ve $f : A \subset X \to Y$ bir fonksiyon ve f fonksiyonunun x_0 noktasının bir komşuluğunda $d_1 f$, $d_2 f, \ldots, d_n f$ kısmi türevleri tanımlı ve sürekli olsun. Bu durumda f fonksiyonu x_0 noktasında Frechet türevlenebilirdir.*

Kanıt. Hipotezden dolayı x_0 noktası, A kümesinin bir iç noktasıdır. Önerme 4.1'den dolayı, f dönüşümünün x_0 noktasında türevi varsa bu,

$$(h_1, h_2, ..., h_n) \to \sum_{j=1}^{n} d_j f(x_0)(h_j)$$

dönüşümüdür. $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in X$ için

$$R(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \sum_{j=1}^{n} d_j f(x_0)(h_j)$$

olsun. $h \to 0$ iken, $R(h))/||h|| \to 0$ olduğunu kanıtlarsak,

$$f'(x_0)(h) = \sum_{j=1}^{n} d_j f(x_0)(h_j)$$

olduğunu göstermiş oluruz, yani f fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında Frechet türevlenebilirdir. Keyfi $j = 1, 2, ..., n$ için $x \to d_j f(x)$ dönüşümleri $x_0 \in A$ noktasında sürekli olduğundan, keyfi $\varepsilon > 0$.için $x \in B$ iken

$$||d_j f(x) - d_j f(x_0)|| \leq \varepsilon \tag{3}$$

olacak biçimde x_0 merkezli bir $B \subset A$ açık yuvarı vardır. $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in X$ ögesi için $x_0 + h \in B$ olsun. Şimdi

$$z_0 = x_0, \qquad z_j = (x_{10} + h_1, x_{20} + h_2, ..., x_{j0} + h_j, x_{j+1,0}, ..., x_{n0}), \qquad j = 1, 2, ..., n$$

olarak gösterelim. $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in X$ ögesini, $j = 1, 2, ..., n$ için $z_j \in B$ olacak biçimde seçelim. z_j'lerin gösteriminden, keyfi $j = 1, 2, ..., n$ için $z_j = x_0 + \sum_{i=1}^{j} I_i(h_i)$ olarak yazabiliriz.. Burada $I_j(\cdot) : X_j \to X$ dönüşümü,

$$I_j(h_j) = (0, 0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0)$$

olarak tanımlanır. Açıktır ki $z_n = x_0 + h$, kejfi $j = 1, 2, ..., n$ için $z_j \in B$ ve $z_j = z_{j-1} + I_j(h_j)$. O halde,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{j=1}^{n} f(z_j) - f(z_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} [f(z_{j-1} + I_j(h_j)) - f(z_{j-1})]$$

olur. Bundan dolayı

$$R(h) = \sum_{j=1}^{n} [f(z_{j-1} + I_j(h_j)) - f(z_{j-1}) - d_j f(x_0)(h_j)] \tag{4}$$

eşitliği elde edilir.

X_j içinde uç noktaları 0 ve (h_j) noktaları olan kapalı doğru parçası S_j olsun. Şimdi $u \in S_j$ için

$$y_j(u) = f(z_{j-1} + I_j(u)) - f(z_{j-1}) - d_j f(x_0)(u)$$

olmak üzere $y_j(\cdot) : S_j \to Y$ fonkksiyonunu tanımlayalım. $u \in S_j$ için

$$dy_j(u) = d_j f(z_{j-1} + I_j(u)) - d_j f(x_0)$$

olur. $y_j(\cdot) : S_j \to Y$ fonksiyonuna uç noktaları 0 ve h_j noktaları olan S aralığında ortalama değer eşitsizliğini uygulayalım. O halde

$$\|y_j(h_j) - y_j(0)\| \leq \left\| \frac{d}{dt} y_j(u_*) \right\| \cdot |h_j|$$

olacak biçimde $u_* \in S_j$ vardır.

$$y_j(h_j) - y_j(0) = f(z_{j-1} + I_j(h_j)) - f(z_{j-1}) - d_j f(x_0)(h_j),$$

$$dy_j(u_*) = d_j f(z_{j-1} + I_j(u_*)) - d_j f(x_0)$$

olduğundan, buradan,

$$\|f(z_{j-1} + I_j(h_j)) - f(z_{j-1}) - d_j f(x_0)(h_j)\| \leq \|d_j f(z_{j-1} + I_j(u_*)) - d_j f(x_0)\| \cdot \|h_j\| \tag{5}$$

bulunur. $u_* \in S_j$ olduğundan, $z_{j-1} + I_j(u_*) \in B$ olur. O zaman (3)'den

$$\|d_j f(z_{j-1} + I_j(u_*)) - d_j f(x_0)\| \leq \varepsilon$$

olduğu elde ediler. Buradan ve (5)'ten, keyfi $j = 1, 2, ..., n$ için

$$\|f(z_{j-1} + I_j(h_j)) - f(z_{j-1}) - d_j f(x_0)(h_j)\| \leq \varepsilon \cdot \|h_j\|$$

ollduğu bulunur. Son olarak, buradan ve (4)'ten

$$\|R(h)\| \leq \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{n} \|h_j\| \leq \varepsilon n^{1/2} \|h\|$$

olur. Buradan ise $h \to 0$ iken, $\frac{R(h)}{\|h\|} \to 0$ olduğunu elde ederiz. ■

Önerme 4.3 *$n \geq 2$ olmak üzere $X_1, X_2....X_n$ normlu uzaylar, $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, A kümesi X uzayında açık küme ve $f : A \subset X \to Y$ olsun. f dönüşümünün A kümesi üzerinde C^1 sınıfından olması için gerekli ve yeterli koşul, tüm kısmi türevlerin A kümesi üzerinde sürekli olmasıdır.*

Kanıt. Varsayalım ki df dönüşümü, A kümesi üzerinde sürekli olsun. Bu önermeden önceki önermeye göre, her bir $d_j f$ dönüşümü de süreklidir.

Tersine, $j = 1, 2, 3...n$ için $d_j f$ kısmi türevleri sürekli olsun. Bu durumda önceki teoremden, f fonksiyonu da $\forall x \in A$ için türevlenebilirdir. ve (2)'den dolayı, $df(x_0)(h) = \sum_{j=1}^{n} d_j f(x_0)(h_j)$ olur. $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ için $P_j(x) = x_j$ olmak üzere, $P_j(\cdot) : X \to X_j$ $(j = 1, 2, 3...n)$ izdüşüm dönüşümlerni tanımlayalım. O halde,

$$df(x)(h) = \sum_{j=1}^{n} d_j f(x_0)(P_j(h))$$

eşitliği geçerlidir. $d_j f(\cdot)$ sürekli, $P_j(\cdot)$ izdüşüm dönüşümleriü de sürekli olduğundan, iki sürekli fonksiyonun bileşkesi olan $df(x)$ dönüşümü de sürekli olur. O zaman, f dönüşümü A kümesi üzerinde C^1 sınıfından olduğu elde edilir. ■

Şimdi bir örnekle konuyu pekiştirelim.

Örnek 4.4

$$f : \Re^n \to \Re^n, \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$$

fonksiyonun kısmi türevlenebilir ve $(y_1, \ldots, y_n) \in \Re^n$ noktasında Jacobian matrisinin

$$\begin{pmatrix} 2y_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2y_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2y_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2y_n \end{pmatrix}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 4.5 $f : \Re^n \to \Re^n$, $f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (y_1^2, y_2^2, \cdots, y_n^2)$ *fonksiyonu için Önerme 3.3'den, f fonksiyonunun Jacobian matrisi*

$$\begin{pmatrix} D_1f_1 & D_2f_1 & D_3f_1 & \dots & D_nf_1 \\ D_1f_2 & D_2f_2 & D_3f_2 & \dots & D_nf_2 \\ D_1f_3 & D_2f_3 & D_3f_3 & \dots & D_nf_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_1f_n & D_2f_n & D_3f_n & \dots & D_nf_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2y_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2y_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2y_n \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matrisin determinantı $2y_1 \cdot 2y_2 \cdot 2y_3 \cdot \ldots \cdot 2y_n = 2^n y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n$ *olur.*

5 YÜKSEK MERTEBEDEN FRECHET TÜREVLER

Tanım 5.1 *$f : A \subset X \to Y$ dönüşümü A kümesi üzerinde Frechet türevlenebilir olsun. O zaman, $df(\cdot) : A \subset X \to L(X,Y)$ doğrusal dönüşümü tanımlıdır. $df(\cdot) : A \subset X \to L(X,Y)$ dönüşümünnün $x_0 \in A$ noktasındaki Frechet türevine f dönüşümünün ikinci Frechet türevi denir ve $d^2 f(x_0)$ ile gösterilir.*

Önerme 5.2 *$df(\cdot) : A \subset X \to Y$ dönüşümünün, $x_0 \in A$ noktasında Frechet türevlenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul, $df(\cdot)$ dönüşümünün, x_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı ve*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{df(x) - df(x_0) - T(x - x_0)}{||x - x_0||} = 0$$

eşitliğini sağlayan sürekli ve doğrusal bir $T : X \to L(X,Y)$ dönüşümünün var olmasıdır. Bu durumda f fonksiyonun $x_0 \in A$ noktasındaki ikinci Frechet türevi T doğrusal dönüşümüdür ve $d^2 f(x_0) = T$ olur.

Önermenin ispatı, ikinci Frechet türevinin tanımından elde edilir.

Genel olarak bir f fonksiyonunun $r-$inci Frechet türevi, tümevarımsal olarak $d^2 f = df$ ve $d^r f = d(d^{r-1} f)$ şeklinde tanımlıdır. Açıktır ki, eğer $r \geq 2$ için, x_0 noktasında r-inci Frechet türevi söz konusu ise, $d^{r-1} f$ dönüşümünün tanım kümesinde x_0 noktasının bir iç nokta olması gerekmektedir. Bundan dolayı, x_0 noktası,

$$f,\ df,\ d^2 f,\ d^3 f, \ldots, d^{r-1} f$$

dönüşümlerinin her birinin tanım kümelerinin iç noktasıdır. Analiz bilgilerimizi hatırlarsak, $E \subset X$ açık kümesinde $d^r f$ var ve sürekli ise, f fonksiyonu C^r sınıfından olup, $f \in C^r$ şeklinde gösterilir.$\forall r \in Z^+$ için $f \in C^r$ oluyorsa $f \in C^\infty$ 'dur denir.

0_X ile X normlu vektör uzayının sıfırını, $O_{(X,Y)}$ ile, keyfi $x \in X$ için $O_{(X,Y)}(x) = 0_Y$ olacak biçimdeki $O_{(X,Y)}(\cdot) : X \to Y$ dönüşümü, yani sıfır dönüşümü gösterelim.

Örnek 5.3 *$A \neq \emptyset$ olmak üzere $f : A \subset X \to Y$ sabit dönüşüm, yani keyfi $x \in A$ için $f(x) = y_* \in Y$ olsun. Bu durumda, $\forall x_0 \in A$ için*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - O_{(X,Y)}(x - x_0)}{||x - x_0||} = 0$$

olduğundan, $\forall x \in A$ için $df(x)$ vardır ve $df(x)(\cdot) = O_{(X,Y)}(\cdot)$ olur. Benzer olarak, $\forall x \in A$ için $d^2f(x)$ vardır ve $d^2f(x)(\cdot) = O_{(X,L(X,Y))}(\cdot)$ olur Böylece, $\forall x \in A$ ve r doğal sayısı için $d^r f(x)$ vardır ve $d^r f(x)(\cdot) = O_{(X,L(X,L(X,\ldots,Y))}(\cdot)$ olduğu görülür. Bu ise $f \in C^\infty$ olması demektir.

Örnek 5.4 *$f : X \to Y$ doğrusal dönüşüm olsun. Bu durumda $df : X \to L(X,Y)$ var ve $df = f$'dir.*

Gerçekten, $f : X \to Y$ doğrusal dönüşüm olduğundan, $\forall x \in X$ ve $\forall x_0 \in X$ için $f(x) - f(x_0) = f(x - x_0)$ olur. O halde

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f(x - x_0)}{||x - x_0||} = 0$$

ve buradan $\forall x \in X$ için $df(x)(\cdot) = f(\cdot)$ olduğu bulunur. Bu eşitlikten, benzer olarak, $\forall x \in X$ ve r doğal sayısı için $d^r f(x)(\cdot) = f(\cdot) \in L(X,Y)$ olduğu elde edilir. Böylece, $f \in C^\infty$ olduğu görülür.

Örnek 5.5 *X_1 ve X_2 normlu uzaylar, $X = X_1 \times X_2$ ve $F \in L(X,Y)$ olsun. O halde, Önerme 1.16'ya göre, $\forall x \in X$ için $dF(x)$ doğrusal dönüşümdür ve $dF(x) \in L(X, L(X,Y))$ O zaman, önceki Örnek 5.4'ten, $\forall x \in X$ ve r doğal sayısı için $d^r F(x)(\cdot) = F(\cdot) \in L(X,Y)$ olduğu elde edilir. Bu ise $F \in C^\infty$ olması demektir.*

Örnek 5.6 *$G(\cdot) : L(X,Y) \times L(Y,Z) \to L(X,Z)$ dönüşümü, $G(T,U) = U \circ T$ olarak tanımlansın. Yani her $T(\cdot) \in L(X,Y)$ ve $U(\cdot) \in L(Y,Z)$ için $G(T,U)(\cdot) = (U \circ T)(\cdot) = U(T(\cdot))$. Açıktır ki, G bilineerdir ve*

$$||G(T,U)|| \leq ||U|| \cdot ||T||$$

O zaman, G sınırlı ve bilineer olduğundan süreklidir. O halde, Örnek 5.5'ten, $G \in C^\infty$ olduğu görülür.

Önerme 5.7 *(i) $f : A \subset X \to Y$ fonksiyonu, $x_0 \in A$ noktasında $r-$defa türevlenebiliyorsa, $\alpha \in K$ için*

$$(\alpha f) : A \subset X \to Y, \qquad (\alpha f) = \alpha f(x)$$

şeklinde tanımlı (αf) fonksiyonu da x_0 noktasında $r-$kez Frechet türevlenebilir ve

$$d^r(\alpha f(x_0)) = \alpha d^r f(x_0).$$

(ii) $f : A \subset X \to Y$, $g : B \subset X \to Y$ fonksiyonları, x_0 noktasında $r-$ defa türevlenebilen fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$(f+g) : X \to Y, \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

şeklinde tanımlı $(f + g)$ fonksiyonu da $x_0 \in X$ noktasında $r-$kez Frechet türevlenebilir ve

$$d^r\left((f+g)(x_0)\right) = d^r f(x_0) + d^r g(x_0)$$

Kanıt. (i) $r = 1$ için $f : A \subset X \to Y$, $x_0 \in A$ noktasında Frechet türevlenebilir olsun. Bu durumda $\alpha \in K$ için

$$(\alpha f) : X \to Y, \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

şeklinde tanımlı (αf) fonksiyonunun da $x_0 \in X$ noktasında Frechet türevlenebilir ve $d(\alpha f(x_0)) = \alpha df(x_0)$ olduğunu önerme 1.18'de kanıtlamıştık. Şimdi $k < r$ için, f fonksiyonu x_0 noktasında $k-$kez Frechet türevlenebilir iken, (αf) fonksiyonunun da x_0 noktasında k-kez Frechet türevlenebilir ve

$$d^k(\alpha f(x_0)) = \alpha d^k f(x_0)$$

olduğunu varsayalım. Şimdi, $f : A \subset X \to Y$ dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında $(k+1)$ kez Frechet türevlenebilir iken, $(\alpha f) : A \subset X \to Y$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ dönüşümünün de x_0 noktasında $(k+1)$ kez Frechet türevlenebilir ve

$$d^{k+1}(\alpha f(x_0)) = \alpha d^{k+1} f(x_0)$$

olduğunu görmeliyiz. f dönüşümü x_0'da $(k+1)$ kez Frechet türevlenebilir olduğundan $d^{k+1}f$ tanımlıdır. Buradan

$$\alpha d^{k+1}f(x_0) = \alpha d(d^k f(x_0)) = d(\alpha d^k f(x_0)) = d(d^k(\alpha f(x_0))) = d^{k+1}(\alpha f(x_0))$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat biter.

(ii) $f : A \subset X \to Y$, $g : B \subset X \to Y$ dönüşümleri x_0 noktasının açık bir V komşuluğunda Frechet türevlenebilir olduğundan, bu fonksiyonların V kümesine kısıtlanmışlarını alırsak,

$$(f+g) : V \subset X \to Y, \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

fonksiyonunu tanımlayabiliriz. $r = 1$ için Önerme 1.18'den, $d(f+g) = df + dg$ eşitliği doğrudur. Şimdi $k < r$ için, f ve g fonksiyonları x_0 noktasında $k-$kez Frechet türevlenebilir iken, $(f+g)$ fonksiyonunun da x_0 noktasında k-kez Frechet türevlenebilir ve

$$d^k\left((f+g)(x_0)\right) = d^k f(x_0) + d^k g(x_0)$$

olduğunu varsayalım. Şimdi, $f : A \subset X \to Y$ ve $g : B \subset X \to Y$ dönüşümleri $x_0 \in A$ noktasında $(k+1)$ kez Frechet türevlenebilir iken, $f+g : V \subset X \to Y$ dönüşümünün de $(k+1)$ kez Frechet türevlenebilir ve

$$d^{k+1}((f+g)(x_0)) = d^{k+1}f(x_0) + d^{k+1}g(x_0)$$

olduğunu görmeliyiz. f ve g dönüşümleri x_0'da $(k+1)$ kez Frechet türevlenebilir olduğundan $d^{k+1}f(x_0)$ ve $d^{k+1}g(x_0)$ tanımlıdır. Buradan

$$d^{k+1}f(x_0) + d^{k+1}g(x_0) = d(d^k f(x_0)) + d(d^k g(x_0)) =$$
$$= d(d^k f(x_0)) + d^k g(x_0)) = d(d^k(f+g)(x_0)) = d^{k+1}\left((f+g)(x_0)\right)$$

olur. Böylece ispat biter. ■

Bu önermede, (i) ve (ii)'de r-kez Frechet türevlenebilme yerine, açık bir E kümesi üzerinde C^∞ sınıfından olma yazabiliriz. Bu durmda, $(\alpha f) : X \to Y$ ve $(f+g) : E \subset X \to Y$ dönüşümlerinin de E kümesi üzerinde C^∞ olması benzer olarak ispatlanır.

Önerme 5.8 *$f : A \subset X \to Y$, $g \in L(Y, Z)$ olsun. Bu durumda*

(i) f dönüşümü x_0 noktasında $r-$ kez Frechet türevlenebilir ise, $(g \circ f)$ dönüşümü de x_0 noktasında $r-$ kez Frechet türevlenebilirdir.

(ii) Eğer f dönüşümü, E açık kümesinde C^r sınıfından ise $(g \circ f)$ bileşke fonksiyonu da C^r sınıfındandır.

Kanıt. (i) $r = 1$ için sonuç 1.21'den önermenin doğru olduğu görülür. $1 < k < r$ için önermenin doğru olduğunu varsayalım. $k + 1$ için önermeyi doğrulayalım. $f : A \subset X \to Y$ dönüşümünün $x_0 \in A$ noktasında $(k + 1)$ kez Frechet türevlenebilir ve $g \in L(Y, Z)$ olduğunu varsayalım. f dönüşümü x_0 noktasında $k > 1$ kez Frechet türevlenebilir olduğundan, f dönüşümü x_0 noktasının açık bir V komşuluğunda tanımlı ve Frechet türevlenebilirdir. O zaman, $(g \circ f)$ bileşke dönüşümü V'de tanımlıdır ve Sonuç1.21'den, keyfi $x \in V$ için

$$d(g \circ f)(x) = g \circ df(x)$$

olur. $T \in L(X, Y)$ için $\mu(T) = g \circ T$ olmak üzere,

$$\mu(\cdot) : L(X, Y) \to L(X, Z),$$

dogrusal dönüşümü tanımlayalım. Gerçekten, g dönüşümü doğrusal olduğundan, μ doğrusal dönüşümdür. O halde

$$d(g \circ f) = g \circ df = \mu(df)$$

olduğu bulunur. Yine g sınırlı ve

$$||\mu(T)|| = ||g \circ T|| \leq ||g|| \cdot ||T||$$

olduğundan, μ sınırlı, dolayısıyla süreklidir. Bundan dolayı, $\mu(\cdot)$ dönüşümü C^∞ sınıfındandır. $f(\cdot)$ dönüşümü x_0 noktasında $k{+}1-$kez Frechet türevlenebilir olduğundan, $df(\cdot)$ dönüşümü x_0 noktasında $k-$kez Frechet türevlenebilir olur. O halde, varsayımdan dolayı, $\mu(df) = d(g \circ df)$'de $r-$kez Frechet türevlenebilirdir. Bunun sonucu olarak $(g \circ f)$ bileşke fonksiyonu da x_0 noktasında $(r + 1)$ kez Frechet türevlenebilirdir. (ii)'nin ispatı, (i)'ye benzer olarak yapılır. ■

Sonuç 5.9 *$Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_m$ normlu uzaylar, $Y = Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \times \ldots \times Y_m$, $f : A \subset X \to Y$ bir dönüşüm, $i = 1, 2, \ldots, m$ için $f_i : A \subset X \to Y_i$ dönüşümü, f'nin i. koordinat dönüşümü olsun. Bu durumda;*

(i) f dönüşümünün $x_0 \in A$ noktasında $r-$kez Frechet türevlenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul, $f_1, f_2, \ldots, f_m$ dönüşümlerinin x_0 noktasında türevlenebilir olmasıdır.

(ii) f dönüşümünün açık E kümesinde C^r sınıfından olması için gerekli ve yeterli koşul, $f_1, f_2, \ldots, f_m$ dönüşümlerinin E kümesinde C^r sınıfından olmalarıdır.

Önerme 5.10 *$A \subset X$, $B \subset Y$ kümeleri ve $f : A \subset X \to Y$ dönüşümü verilsin. Ayrıca f fonksiyonu, $x_0 \in A$ noktasında $r-$kez türevlenebilir, $g : B \subset Y \to Z$ dönüşümü de $y_0 = f(x_0)$ noktasında $r-$kez Frechet türevlenebilir olsun. Bu durumda $(g \circ f)$ bileşke dönüşümü de x_0 noktasında $r-$kez Frechet türevlenebilirdir.*

Eger $r-$kez Frechet türevlenebilme yerine açık bir kümede C^r sınıfından olma özelliği alınırsa, önerme yine doğrulanır.

Kanıt. $r-$kez Frechet türevlenebilme özelliğini ele alalım. $r = 1$ durumu, Önerme 1.20'den, zincir kuralından aşikardır. Kanıtı r üzerinde tümevarım metodunu uygulayarak tamamlayalım. $k < r$ pozitif tamsayısı için önermenin doğru olduğunu varsayalım. $(k+1)$ için de önermenin doğruluğunu görelim. f dönüşümü x_0 noktasında $1 < k < r-$kez Frechet türevlenebilir olduğundan, f dönüşümü x_0 noktasının açık bir V komşuluğunda Frechet türevlenebilir olur. Aynı ile, g dönüşümü $y_0 = f(x_0)$ noktasında $1 < k < r-$kez Frechet türevlenebilir olduğundan, g dönüşümü y_0 noktasının açık bir W komşuluğunda Frechet türevlenebilir olur. Ayrıca f dönüşümü x_0 noktasında sürekli olduğundan, genelliği bozmadan $f(V) \subset W$ olduğunu varsayabiliriz. Eğer f dönüşümünün V kümesinde kısıtlanmışını alırsak bileşke fonksiyonunun tanım kümesi de V olur. Bu durumda V kümesinden alınan her x için

$$d(g \circ f)(x) = dg(y) \circ df(x), \qquad (y = f(x))$$

eşitliği geçerlidir. $w = dg \circ f$ diyelim. Böylece w dönüşümü, V kümesini $L(Y, Z)$ uzayına resmeder ve $dg(y) = w(x)$ olur. Buradan

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x) =$$

$$= dg(y) \circ df(x) = w(x) \circ df(x)$$

olduğu elde edilir. Şimdi keyfi $x \in V$ için $F(x) = (df(x), w(x))$ olmak üzere

$$F(\cdot) : V \to L(X, Y) \times L(Y, Z), \quad x \to (df(x), w(x))$$

dönüşümünü ve $(U, T) \in L(X, Y) \times L(Y, Z)$ için $G(T, U) = U \circ T$ olmak üzere

$$G : L(X, Y) \times L(Y, Z) \to L(X, Z), \qquad G(T, U) = U \circ T$$

dönüşümünü tanımlayalım. O halde, keyfi $x \in V$ için

$$d(g \circ f)(x) = w(x) \circ df(x) = G(w(x), df(x)) =$$

$$= G(F(x)) = (G \circ F)(x\ )$$

olur.Böylece $d(g \circ f) = G \circ F$ eşitliği doğrulanır. Varsayımdan, $w(x)$ dönüşümü x_0 noktasında $k-$kez Frechet türevlenebilir, df doğrusal dönüşümü de x_0'da $k-$kez Frechet türevlenebilirdir. O zamani, F dönüşümü x_0'da $k-$kez Frechet türevlenebilirdir. $G \in C^\infty$ olduğundan, $(G \circ F) = d(g \circ f)$ dönüşümü de x_0'da $k-$kez Frechet türevlenebilir olur. Bu ise $(g \circ f)$ dönüşümünün x_0 noktasında $(k+1)$ kez Frechet türevlenebilir olması demektir. f ve g dönüşümleri açık bir kümede C^r sınıfından iken, $(g \circ f)$ bileşke dönüşümünün de açık bir kümede C^r sınfından olması özelliği de benzer olarak ispatlanır. ■

Önerme 5.11 *$f : A \subset X \to Y$ bir dönüşüm, $x_0 \in A$ olsun. f dönüşümünün, $x_0 \in A$ noktasında iki kez Frechet türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul, $\forall \varepsilon > 0$ için $||h|| < \delta$ iken keyfi $z \in X$ iken*

$$||df(x_0 + h)(z) - df(x_0)(z) - F(h, z)|| \leq \varepsilon ||h|| \cdot ||z|| \tag{1}$$

olacak biçimde $\delta > 0$ sayısının ve $F \in L(X, L(X, Y))$ dönüşümünün var olmasıdır.

Kanıt. f dönüşümününün x_0 noktasında iki kez türevlenebilir olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\forall\varepsilon > 0$ için $||h|| < \delta$ iken

$$||df(x_0+h) - df(x_0) - d^2f(x_0)(h)|| \leq \varepsilon||h||$$

olacak biçimde $\delta > 0$ vardır. Burada, $||h|| < \delta$ olacak biçimdeki h'lar için

$$d^2f(x_0)(h)(\cdot) : X \to L(X,Y)$$

olan dönşümdür. $F(h,z) = d^2f(x_0)(h)(z)$ olarak gösterirsek, (1)'i elde ederiz.

Şimdi (1) eşitsizliğinin sağladığını varsayalım. Her $||h|| < \delta$ olacak biçimdeki h için, $F_*(h)(\cdot) = F(h,\cdot)$ olmak üzere,

$$h \to F_*(h)(\cdot) : X \to L(X,Y)$$

dönüşümü tanımlayayalım. Açıktır ki $F_* \in L(X, L(X,Y))$. O halde (1)'den, $||h|| < \delta$ iken

$$||df(x_0+h) - df(x_0) - F_*(h)|| \leq \varepsilon||h||$$

olduğu görülür. Buradan, $df(\cdot)$ fonksiyonunun x_0'da türevlenebilir ve türevin

$$d(df(x_0)) = d^2f(x_0) = F_*$$

olduğu elde edilir. ■

Önerme 5.12 *$f : A \subset X \to Y$ dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında iki kez Frechet türevlenebilir olsun. Bu durumda, $d(df(x_0)) = d^2f(x_0)$ doğrusal dönüşümü simetriktir, yani $\forall h,z \in X$ için*

$$d^2f(x_0)(h,z) = d^2f(x_0)(z,h)$$

olur.

Kanıt. x_0+h+z, x_0+h, x_0+z noktaları, A kümesine ait ve

$$G(h,z) = f(x_0+h+z) - f(x_0+h) - f(x_0+z) + f(x_0) - d^2f(x_0)(h,z) \qquad (2)$$

olmak üzere, G dönüşümü tanımlayalım. x_0 noktası, A kümesinin bir iç noktası olduğundan, G dönüşümünün tanım kümesi $X \times X$ çarpım uzayında orjin noktasının bir komşuluğudur. Kanıtı tamamlamak için, $(h, z) \to (0, 0)$ iken, Y içinde

$$\frac{G(h,z)}{||(h,z)||^2} \to 0 \tag{3}$$

yakınsamasını doğrulamalıyız. $\varepsilon > 0$ alalım. f dönüşümü, x_0 noktasında iki kez Frechet türevlenebi- lir olduğundan, $df(x_0 + h)$ tanımlı ve $||h|| < 2\delta$ iken

$$||df(x_0 + h) - df(x_0) - d^2f(x_0)h|| \leq \varepsilon||h|| \tag{4}$$

olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu durumda B kümesi, X uzayında orjin merkezli δ yarıçaplı açık yuvar olmak üzere $B \times B$ çarpım kümesi, G'nin tanım kümesidir. $h \in B$ alalım. Bu h öğeşi için, $F_h(\cdot) : B \to Y$ dönüşümü

$$F_h(z) = f(x_0 + h + z) - f(x_0 + z) - d^2f(x_0)(h, z) =$$
$$= f(x_0 + h + z) - f(x_0 + z) - (d^2f(x_0)(h))(z)$$

şeklinde tanımlı olsun. Her $h, z \in B$ için

$$F_h(z) = f(x_0 + h + z) - f(x_0 + z) - d^2f(x_0)(h, z),$$
$$F_h(0) = f(x_0 + h) - f(x_0) - d^2f(x_0)(h, 0)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} F_h(z) - F_h(0) &= f(x_0 + h + z) - f(x_0 + z) - d^2f(x_0)(h, z) - \\ &\quad - f(x_0 + h) + f(x_0) + d^2f(x_0)(h, 0) \end{aligned}$$

olur. O halde buradan her $h, z \in B$ için

$$G(h, z) = F_h(z) - F_h(0) \tag{5}$$

olduğu bulunur. Her $h \in B$ için $d^2 f(x_0)(h) \in L(X, Y)$ olduğundan, Örnek 1.19 ve Önerme 1.20'den (Zincir kuralı)

$$dF_h(z) = df(x_0 + h + z) - df(x_0 + z) - d^2f(x_0)(h) =$$
$$= \left[df(x_0 + h + z) - df(x_0) - d^2f(x_0)(h + z)\right] - \left[df(x_0 + z) - df(x_0) - d^2f(x_0)(z)\right]$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik ve (4)'ten, $\forall h, z \in B$ için

$$\begin{aligned}
||dF_h(z)|| &= ||df(x_0 + h + z) - df(x_0 + z) - d^2 f(x_0)(h)|| = \\
&= || \left[df(x_0 + h + z) - df(x_0) - d^2 f(x_0)(h + z)\right] - \\
&\quad -[df(x_0 + z) - df(x_0) - d^2 f(x_0)(z)|| \leq \\
&\leq ||df(x_0 + h + z) - df(x_0) - d^2 f(x_0)(h + z)|| + \\
&\quad +||df(x_0 + z) - df(x_0) - d^2 f(x_0)(z)|| \leq \\
&\leq \varepsilon||h + z|| + \varepsilon||z|| \leq \varepsilon[||h + z|| + ||z||] \leq \varepsilon[||h|| + ||z|| + ||z||] \leq \\
&\leq \varepsilon[||(h, z)|| + ||(h, z)|| + ||(h, z)||] \leq 3\varepsilon||(h, z)||
\end{aligned}$$

olur. O zaman buradan, (5)'ten ve Önerme 2.1 ortalama değer eşitsizliğinden, $\forall h, z \in B$ için

$$||G(h, z)|| = ||F_h(z) - F_h(0)|| \leq 3\varepsilon||(h, z)|| \cdot ||z|| \leq 3\varepsilon||(h, z)||^2$$

olduğu elde edilir. Buradan, $\varepsilon > 0$ için $h, z \in B$, $||(h, z)|| \neq 0$ iken

$$\frac{G(h, z)}{||(h, z)||^2} \leq 3\varepsilon$$

olduğu bulunur ve dolayısıyla, (3)'nin doğruluğu kanıtlanmış olur.

Şimdi önermenin ispatını tamalayalım. $||(h, z)|| = ||(z, h)||$ olduğundan, (3)'den, $(z, h) \longrightarrow (0, 0)$ iken

$$\frac{G(z, h)}{||(z, h)||^2} \longrightarrow 0 \tag{6}$$

olduğu bulunur.

$$H(h, z) = d^2 f(x_0)(h, z) - d^2 f(x_0)(z, h)$$

olsun. (2)'den

$$H(h, z) = G(h, z) - G(z, h)$$

olduğu açıktır O halde, buradan, (3) ve (6)'dan, $(h, z) \longrightarrow (0, 0)$ iken,

$$\frac{H(h, z)}{||(h, z)||^2} \longrightarrow 0 \tag{7}$$

olduğu elde ediler. $\forall(h,z) \neq (0,0)$ alalım ve sabitleyelim. O halde (7)'ten, $\Re$'de $t \to 0$ iken

$$\frac{H(th,tz)}{||(th,tz)||^2} \to 0 \tag{8}$$

olduğu bulunur. Öte yandan, sıfıra yeterlı yakın keyfi $t > 0$'lar için

$$\frac{H(th,tz)}{||(th,tz)||^2} = \frac{H(h,z)}{||(h,z)||^2}$$

olduğundan, (8)'ten $\frac{H(h,z)}{||(h,z)||^2} = 0$ ve $H(h,z) = 0$, yani $d^2f(x_0)(h,z) = d^2f(x_0)(z,h)$ olduğu elde edilir. $(h,z) \neq (0,0)$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, önerme kanıtlanmış olur. ■

Şimdi varsayalım ki $r \geq 3$ olsun. $L(X, L(X, \ldots, L(X,Y)))$ uzayını, yani $X^{r'}$ uzayından Y uzayına, sürekli multilineer fonksiyonlar uzayını kısaca $L_r(X,Y)$ ile göstereceğiz. Bundan dolayı Y 'nin öğesi olarak, $(\ldots((d^rf(x_0)h_1)h_2)\ldots)h_r$ ile, X^r'nin $(h_1, h_2, h_3, \ldots, h_r)$ ögesinin sürekli bir multilineer dönüşüm altındaki görüntüsünü göstereceğiz. O halde,

$$d^rf(x_0)(h_1,h_2,h_3,\ldots,h_r) = (\ldots((d^rf(x_0)h_1)h_2)\ldots)h_r$$

eşitliği geçerlidir.

Yardımcı Teorem 5.13 *$r \geq 2$ olmak üzere f fonksiyonu, x_0 noktasında r kez Frechet türevlenebilir ise, her $z_1, z_2, z_3, ..., z_{r-1}$ için,*

$$x \to d^{r-1}f(x)(z_1, z_2, z_3, ..., z_{r-1})$$

fonksiyonuda x_0 noktasında Frechet türevlenebilir ve türev dönüşümü

$$h \to d^rf(x_0)(h, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{r-1})$$

olur.

Kanıt. $z_1, z_2, z_3, ..., z_{r-1} \in X$ olsun. $F \in L_{r-1}(X,Y)$ için

$$w(F) = F(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{r-1})$$

olmak üzere, $w : L_{r-1}(X,Y) \longrightarrow Y$ dönüşümünü tanımlayalım. O zaman verilen dönüşüm, $w \circ d^{r-1}f$ dönüşümü olur. w doğrusal ve sürekli olduğundan, Sonuç 1.21(i)'den, $w \circ d^{r-1}f$ dönüşümü, x_0 noktasında Frechet türevlenebilir ve Frechet türevi $w \circ d^r f(x_0)$ olur. Yani, $x \longrightarrow d^{r-1}f(x)(z_1, z_2, z_3, ..., z_{r-1})$ dönüşümünün x_0 noktasındaki Frechet türevi

$$h \longrightarrow w(d^r f(x_0)h) = d^r f(x_0)(h, k_1, \ldots, k_{r-1})$$

dönüşümüdür. ■

Önerme 5.14 *$f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında r kez Frechet türevlenebilir olsun. Bu durumda $d^r f(x)$ dönüşümü simetriktir. Yani, $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), ..., \sigma(r))$, $1, 2, 3, ..., r$ sayılarının bir permutasyonu ise, $\forall h_1, h_2, h_3, \ldots, h_r \in X$ için*

$$d^r f(x_0)(h_{\sigma(1)}, h_{\sigma(2)}, h_{\sigma(3)}, \ldots, h_{\sigma(r)}) = d^r f(x_0)(h_1, h_2, h_3, \ldots, h_r) \tag{9}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt. Bu önermeyi r üzerinde tümevarım kullanarak ispatlayalım. $r = 2$ için

$$d^2 f(x_0)(h_1, h_2) = d^2 f(x_0)(h_2, h_1)$$

olduğu önerme 5.12'nin sonucudur. Önermenin, $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında $r-1$ kez $(r \geq 3)$ Frechet türevlenebilir iken $(r \geq 3)$ doğru olduğunu kabul edelim ve $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında r kez Frechet türevlenebilir iken doğru olduğunu kanıtlayalım.

$f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında $r-1$ kez Frechet türevlenebilir olduğundan, Yardımcı Teorem 5.13'den

$$\Psi : x \longrightarrow d^{r-2} f(x)(h_3, h_4, \ldots, h_r)$$

dönüşümü $x_0 \in X$ noktasında iki kez Frechet türevlenebilirdir ve ikinci türevi

$$(h_1, h_2) \longrightarrow d^r f(x_0)(h_1, h_2, h_3, \ldots, h_r)$$

'dir. Önerme 5.12'den

$$d^r f(x_0)(h_2, h_1, h_3, h_4, \dots, h_r) = d^r f(x_0)(h_1, h_2, h_3, \dots, h_r)$$

eşitliği vardır. f dönüşümü, x_0 noktasının bir V komşuluğunda $(r-1)-$kez Frechet türevlenebilir olduğundan ve varsayımdan $\tau = (\tau(2), \tau(3), ..., \tau(r))$, $2, 3, 4, \dots, r$ sayılarının bir permutasyonu olmak üzere, her $h_2, h_3, \dots, h_r \in X$ için

$$d^{r-1} f(x)(h_{\tau(2)}, h_{\tau(3)}, \dots, h_{\tau(r)}) = d^{r-1} f(x)(h_2, h_3, \dots, h_r)$$

olur. Yine, Yardımcı Teorem 5.13'den, $\forall h_1 \in X$ için

$$d^r f(x_0)(h_1, h_{\tau(2)}, h_{\tau(3)}, h_{\tau(4)} ... h_{\tau(r)}) = d^r f(x_0)(h_1, h_2, h_3 ... h_r)$$

olduğu elde edilir. Böylece, (9) eşitliğinin,

(a) σ permutasyonunda sadece 1 ve 2 değiştirildiğinde;

(b) σ permutasyonu 1 'yi sabit tutarsa sağlanır.

Her σ türü permutasyon, (a) ve (b) tipi permutasyonların çarpımı olduğundan, (9) eşitliği her σ için sağlanır. Böylece kanıt biter. ■

$\Re^n$ uzayının doğal baz vektörlerini $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ ile gösterelim. Yani,

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 0, 1)$$

Önerme 5.15 *$n \geq 2$ bir doğal sayı olmak üzere $A \subseteq \Re^n$ ve $f : A \subseteq \Re^n \to Y$ dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında r kez Frechet türevlenebilir olsun. $i = 1, 2, 3, ..., r$ için $1 \leq j_i \leq n$ olmak üzere $j_1, j_2, j_3, \dots, j_r$ tamsayıları verilsin. Bu durumda $D_{j_1} D_{j_2} D_{j_3} \dots D_{j_r} f(x_0)$ kısmi türevi vardır ve*

$$D_{j_1} D_{j_2} D_{j_3} \dots D_{j_r} f(x_0) = d^r f(x_0)(e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3}, \dots, e_{j_r}).$$

Kanıt. $r = 1$ için önerme 4.1'den, $D_j f(x_0) = df(x_0)(e_j)$, $(j = 1, 2, 3 ... n)$ eşitliği doğrudur. Yani, önerme, $r = 1$ için doğrudur. Kabul edelim ki, $1 \leq k < r$ pozitif tamsayısı için önerme doğrudur. Önermeyi, $k + 1$ için doğrulayalım. Varsayımdan dolayı, f dönüşümü, x_0 noktasında $k+1-$kez Frechet türevlenebilirdir.

O halde, f dönüşümü, x_0 noktasının açık bir V komşuluğunda $k-$kez Frechet türevlenebilirdir. $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_k$ tamsayıları 1 ile n arasında olsun. Bu durumda, f dönüşümü, x_0 noktasının açık bir V komşuluğunda $k-$kez Frechet türevlenebilir olduğundan, varsayımdan dolayı, her $x \in V$ kümesinden alınan her x ögesi için $D_{j_1} D_{j_2} D_{j_3}, \ldots, D_{j_k} f(x)$ kısmı türevi vardır ve

$$D_{j_1} D_{j_2} D_{j_3}, \ldots, D_{j_k} f(x) = d^k f(x)(e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3}, \ldots, e_{j_k})$$

olur. $1 \leq j \leq n$ olsun. f dönüşümü, x_0 noktasında $k+1-$kez Frechet türevlenebilir olduğundan, buradan

$$\begin{aligned} D_j \left(D_{j_1} D_{j_2} D_{j_3}, \ldots, D_{j_r} f(x_0)\right) &= \left[\frac{d}{dt}\left(D_{j_1} D_{j_2} D_{j_3}, \ldots, D_{j_k} f(x_0 + te_j)\right)\right]_{t=0} = \\ &= \left[\frac{d}{dt} d^k f(x_0 + te_j)(e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3}, \ldots, e_{j_k})\right]_{t=0} \end{aligned}$$

olur. $x \rightarrow d^k f(x)(e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3}, \ldots, e_{j_k})$ dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında Frechet türevlenebilir olduğundan, Yardımcı Teorem 5.13'den ve Sonuç 1.21(iii)'den, türev dönüşümü

$$h \rightarrow d^{k+1} f(x_0)(h, e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3}, \ldots, e_{j_k})$$

olur. $t \rightarrow x_0 + te_j$ dönüşümünün 0 noktasında türevi e_j olduğundan,

$$\left[\frac{d}{dt} d^k f(x_0 + te_j)(e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3}, \ldots, e_{j_k})\right]_{t=0} = d^{k+1} f(x_0)(e_j, e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3}, \ldots, e_{j_k})$$

elde edilir. O zaman

$$\begin{aligned} D_j D_{j_1} D_{j_2} D_{j_3}, \ldots, D_{j_r} f(x_0) &= D_j \left(D_{j_1} D_{j_2} D_{j_3}, \ldots, D_{j_r} f(x_0)\right) = \\ &= d^{k+1} f(x_0)(e_j, e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3}, \ldots, e_{j_k}) \end{aligned}$$

olduğu bulunur. Böylece kanıt tamamlanmış olur. ■

Sonuç 5.16 (i) $h_i = (h_{1i}, h_{2i}, h_{3i}, \ldots, h_{ni}) \in \Re^n$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ *olmak üzere, önerme 5.15'in hipotezi altında*

$$d^r f(x_0)(h_1, h_2, \ldots, h_r) = \sum h_{j_1 1} h_{j_2 2} h_{j_3 3}, \ldots, h_{j_r r} D_{j_1} D_{j_2} D_{j_3}, \ldots, D_{j_r} f(x_0)$$

eşitliği geçerlidir. Burada eşitliğin sağındaki toplam, birbirinden farklı tüm sıralı $(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_r)$ *r−lileri üzerinden alınmaktadır.* $(i = 1, 2, 3, ..., r)$ *Bu sıralı her* $1 \leq r \leq r$ *için* $1 \leq j_i \leq n$.

Sonuç 5.17 *(ii) Önerme 5.15'in varsayımı altında,* $(1, 2, 3, ..., r)$*'nin her* $(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_r)$ *ve* $(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_r)$ *permutasyonları için*

$$D_{k_1} D_{k_2} D_{k_3}, \ldots, D_{k_r} f(x_0) = D_{j_1} D_{j_2} D_{j_3}, \ldots, D_{j_r} f(x_0)$$

eşitliği geçerlidir.

Önerme 5.18 *$n \geq 2$ olmak üzere $f : A \subset \Re^n \to Y$ bir dönüşüm ve $r \geq 2$ bir tamsayı olsun. Bu durumda f dönüşümünün, $x_0 \in A$ noktasında r−kez türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul, f dönüşümünün $(r-2)$ inci mertebeden tüm kısmi türevlerinin, x_0 noktasının bir V komşuluğunda Frechet türevlenebilir olması ve V kümesinde tanımlı $(r-1)$−inci mertebeden tüm kısmi türevlerin, x_0 noktasında Frechet türevlenebilir olmasıdır.*

Kanıt. $n \geq 2$ olmak üzere $f : A \subset \Re^n \to Y$ bir dönüşüm, $r \geq 2$ bir tamsayı. f dönüşümünü, $x_0 \in A$ noktasında r−kez türevlenebilir olsun. O zaman Yardımcı Teorem 5.13 ve Önerme 5.15'den, x_0 noktasının bir V komşuluğunda f dönüşümünün $(r-2)$ inci mertebeden tüm kısmi türevleri Frechet türevlenebilirdir ve V kümesinde tanımlı $(r-1)$−inci mertebeden tüm kısmi türevler, x_0 noktasında Frechet türevlenebilirdir.

Şimdi, x_0 noktasının bir V komşuluğunda f dönüşümünün $(r-2)$ inci mertebeden tüm kısmi türevleri Frechet türevlenebilir ve V kümesinde tanımlı $(r-1)$−inci mertebeden tüm kısmi türevler, x_0 noktasında Frechet türevlenebilir olsun. f dönüşümünün, $x_0 \in A$ noktasında r−kez türevlenebilir olduğunu gösterelim.

$r = 2$ için kanıt yapalım. Genel durum benzer şekilde yapılır. f dönüşümünün x_0 noktasının bir V komşuluğunda türevlenebilir ve birinci mertebeden

$$D_1 f, \quad D_2 f, \quad D_3 f, \ldots, D_n f$$

kısmi türevlerin x_0 noktasında türevlenebilir olduğunu varsayalım. Önerme 4.1'den, D_1f, D_2f, $D_3f, \ldots, D_nf$ dönüşümleri, V komşuluğunda tanımlıdır ve her $x \in V$ için $D_jf(x) = df(x)e_j$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, olur. O zaman, her $j = 1, 2, \ldots, n$ için $x \to df(x)e_j$ dönüşümünün x_0 noktasında türevlenebilir olduğu bulunur. Şimdi, $x \to df(x)$ dönüşümünün x_0 noktasında türevlenebilir olduğunu kanıtlayalım.

$\varepsilon > 0$ alalım. Her $j = 1, 2, \ldots, n$ için $x \to df(x)e_j$ dönüşümü x_0 noktasında türevlenebilir olduğundan, $||h|| < \delta_j$ iken

$$||df(x_0 + h)(e_j) - df(x_0)(e_j) - T_j(h)|| \leq \varepsilon||h||$$

olacak biçimde $T_j \in L(\Re^n, Y)$ ve $\delta_j > 0$ sayısı vardır. Açıktır ki, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \Re^n$ için $z = \sum_{j=1}^{n} z_je_j$ olur. O halde, $df(x_0 + h)(\cdot)$ ve $df(x_0)(\cdot)$ dönüşümleri doğrusal olduklarından, $||h|| < \min\{\delta_j : j = 1, 2, ...n\}$ için

$$\left\|df(x_0 + h)(z) - df(x_0)(z) - \sum_{j=1}^{n} z_jT_j(h)\right\| =$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{n} z_j[df(x_0 + h)(e_j) - df(x_0)(e_j) - T_j(h)\right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon||h|| \sum_{j=1}^{n} |z_j| \leq \varepsilon||h|| \cdot ||z|| \cdot n^{1/2}$$

eşitsizliği görülür. $(h, z) \to \sum_{j=1}^{n} z_jT_j(h)$ dönüşümü bilineer ve sürekli olduğundan, önerme 5.11'den $x \to df(x)$ dönüşümünün x_0 noktasında türevlenebilir olduğu, dolayısıyla f dönüşümünün x_0 noktasında iki kez Frechet türevlenebilir olduğu görülür. ∎

Önerme 5.19 *$n \geq 2$ olmak üzere $A \subset \Re^n$ açık küme, $f : A \subset \Re^n \to Y$ bir dönüşüm, p, r tamsayılar ve $0 \leq p < r$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.*

1. *f dönüşümü, A kümesi üzerinde C^r sınıfındandır.*

2. *d^pf dönüşümü, A kümesi üzerinde C^{r-p} sınıfındandır.*

3. *f dönüşümünün $r-$inci mertebeden tüm kısmi türevleri, A kümesi üzerinde süreklidir.*

4. f dönüşümünün p-inci mertebeden tüm kısmı türevleri, A kümesi üzerinde C^{r-p} sınıfındandır.

Kanıt. (1) $\Longleftrightarrow$ (2) denkliği, $d^r f = d^{r-p}(d^p f)$ eşitliğinden bulunur.

(1) $\Rightarrow$ (3) önerme 5.15'in sonucudur.

(3) $\Rightarrow$ (1) olduğunu kanıtlayalım. (3) doğru olsun. O zaman, f dönüşümünün $r-$inci mertebeden tüm kısmi türevleri, A kümesi üzerinde sürekli olduğundan, Önerme 4.3'den, f dönüşümünün $(r-1)-$inci mertebeden tüm kısmi türevleri, A kümesi üzerinde türevlenebilir ve bundan dolayı A kümesi üzerinde sürekli olur. Yine, önerme 4.3'den, f dönüşümünün $(r-2)-$inci mertebeden kısmi türevleri A kümesinde türevlenebilirdir. O halde, Önerme 5.18'den, $x \longrightarrow d^r f(x)$ dönüşümü A üzerinde tanımlıdır, yani keyfi $x \in A$ için f dönüşümünün r-inci mertebeden Frechet türevi vardır. Ek olarak, Sonuç 5.16(i)'den, $d^r f$ dönüşümü, A kümesi üzerinde sürekli, dolayısıyla f fonksiyonu A üzerinde C^r sınıfından olur.

(3) $\Rightarrow$ (4) olduğunu kanıtlayalım. (3) doğru olsun, yani f dönüşümünün $r-$inci mertebeden tüm kısmi türevleri, A kümesi üzerinde sürekli olsun. O zaman, f dönüşümünün $p-$inci mertebeden tüm kısmi türevlerinin $r-p$. mertebeden kısmı türevleri, A kümesi üzerinde sürekli olur. Bu durumda, (3) $\Rightarrow$ (1)'den, f dönüşümünün A kümesi üzerinde p-inci mertebeden kısmı tüm türevlerinin C^{r-p} sınıfından olduğu bulunur.

(4) $\Rightarrow$ (3) olduğunu kanıtlayalım. (4) doğru olsun, yani f dönüşümünün p-inci mertebeden tüm kısmı türevleri, A kümesi üzerinde C^{r-p} sınıfından olsun. Bu durumda, (1) $\Rightarrow$ (3)'den, f dönüşümünün $p-$inci mertebeden kısmı türevlerinin, $(r-p)-$inci mertebeden kısmi türevleri süreklidir, dolayısıyla, f dönüşümünün $r-$inci mertebeden tüm kısmi türevleri, A kümesi üzerinde sürekli olur. ■

ALIŞTIRMALAR

Örnek 5.20 $f : \Re^2 \to \Re$, $f(x,y) = x\cos y + y^2\cos x$ *fonksiyonu veilsin.* $\Re$ *üzerinde* $D_1D_2f(x,y) = D_2D_1f(x,y)$ *olduğunu görelim.*

$$\begin{aligned} D_1f &= \cos y - y^2\sin x \\ D_2D_1f &= -\sin y - 2y\sin x \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} D_2f &= -x\sin y + 2y\cos x \\ D_1D_2f &= -\sin y - 2y\sin x \end{aligned}$$

olduğundan. $D_1D_2f(x,y) = D_2D_1f(x,y)$ *olduğu görülür.*

Örnek 5.21 $f : \Re^3 \to \Re$, $f(x,y,z) = xe^y + (z-x)\cos y + z\sin x$ *dönüşümü veriliyor. Buna göre* f'*' nin ikinci mertebeden türevlerinin* $(0,0,0)$ *noktasındaki değerini bulunuz.*

$$\begin{aligned} D_1f(x,y,z) &= e^y - \cos y + z\cos x \\ D_2f(x,y,z) &= xe^y + (x-z)\sin y \\ D_3f(x,y,z) &= \cos y + \sin x \end{aligned}$$

ve

$$D_1D_1f(x,y,z) = -z\sin x, \qquad D_1D_2f(x,y,z) = e^y + \sin y,$$

$$D_1D_3f(x,y,z) = \cos x, \qquad D_2D_1f(x,y,z) = \sin y,$$

$$D_2D_2f(x,y,z) = xe^y + (x-z)\cos y, \qquad D_2D_3f(x,y,z) = -\sin y,$$

$$D_3D_1f(x,y,z) = \cos x, \qquad D_3D_2f(x,y,z) = -\sin y, \qquad D_3D_3f(x,y,z) = 0$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} &D_1D_1f(0,0,0) = 0, \quad D_2D_1f(0,0,0) = 0, \quad f_{31}(0,0,0) = 1, \\ &D_1D_2f(0,0,0) = 1, \quad D_2D_2f(0,0,0) = 0, \quad f_{32}(0,0,0) = 0, \\ &D_1D_3f(0,0,0) = 1, \quad D_2D_3f(0,0,0) = 0, \quad f_{33}(0,0,0) = 0, \end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

6 FRECHET TÜREVLENEBİLEN FONKSİYONLAR İÇİN TAYLOR TEOREMİ

Bu bölümde, Frechet türevlenebilir fonksiyonlar için Taylor teoremini inceleyeceyiz.

Yardımcı Teorem 6.1 *$x_0, h \in X$ alalım. $f : A \subseteq X \to Y$ fonksiyonu verilsin. $t \in \Re$, $(x_0+th) \in A$ olmak üzere, $\psi : \Re \to Y$, $\psi(t) = f(x_0+th)$ şeklinde ψ fonksiyonu tanımlayalım. Eğer f fonksiyonu $t_0 \in \Re$ olmak üzere $z_0 = x_0 + t_0 h$ noktasında r-kez türevlenebilir ise, ψ fonksiyonunun t_0 noktasında r-inci türevi vardır ve*

$$d^r\psi(t_0) = d^r f(z_0)(h)^r$$

olur. Burada $(h)^r$, $X^r = X \times X \times ... \times X$ uzayında her bir koordinatı h olan bir noktadır.

Kanıt. Teoremi, tümevarım yöntemi ile ispatlayalım. $r = 1$ olsun. $\varphi : \Re \to A$, $\varphi(t) = x_0 + th$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda $\psi = (f \circ \varphi)$ yazılabilir. O halde, $z_0 = x_0 + t_0 h$, $\varphi'(t_0) = h$ olduğundan; Sonuç $1.21(iii)$'den

$$\begin{aligned}\psi'(t_0) = (f \circ \varphi)'(t_0) = f'(\varphi(t_0)) \circ \varphi'(t_0) = \\ = df(x_0 + t_0 h)(h) = df(z_0)(h)\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Böylece, $r = 1$ için teoremin doğru olduğunu kanıtladık.

Şimdi, $1 \leq k < r$ için teoremin doğru olduğunu kabul edip, $(k+1)$ için de doğru olduğunu görmeliyiz. f fonksiyonu z_0 noktasında $(k+1)$ kez Frechet türevlenebilir olsun. Bu durumda f fonksiyonu, keyfi $t \in E$ için $x_0 + th$ noktalarında k-kez türevlenebir olacak biçimde t_0 noktasının $\Re$ içinde bir E komşuluğu vardır.

Teorem k için doğru olduğundan, keyfi $t \in E$ için $\psi^{(k)}(t)$ var ve

$$d^k\psi(t) = d^k f(z)(h)^k$$

olur. Burada $z = x_0 + th$, $t \in E$. $d^k\psi(\cdot)$ fonksiyonunun E kümesi üzerinde kısıtlanmışı, $z \to d^k f(z)(h)^k$ ve $t \to x_0 + th$ fonksiyonlarının bileşkesidir.

$$\Phi \; : \; A \subset X \to Y, \quad \Phi(z) = d^k f(z)(h)^k,$$
$$\Gamma \; : \; E \subset \Re \to A \subset X, \quad \Gamma(t) = x_0 + th$$

olarak tanımlarsak, $\forall t \in E$ için, $d^k\psi(t) = (\Phi \circ \Gamma)(t)$ eşitliği geçerlidir. Açıktır ki, $\Gamma'(t_0) = h$. Yardımcı Teorem 5.13'den, Φ fonksiyonu, $z_0 = x_0 + t_0 h$ noktasında türevlenebilirdir ve türevi $s \to d^{k+1} f(z_0)(s, h, h, ..., h)$ dönüşümüdür. O halde, Sonuç 1.21(iii)'den,

$$d^{(k+1)}\psi(t_0) = \left[d\left(d^k\psi(t)\right)\right]_{t=t_0} = \left[d\left((\Phi \circ \Gamma)(t_0)\right)\right]_{t=t_0} =$$
$$= d(\Phi(\Gamma(t_0)) \circ d(\Gamma(t_0)) = d^{k+1} f(z_0)(h, h, h, ..., h) = d^{k+1} f(z_0)(h)^{k+1}$$

eşitliği gerçeklenir. Böylece, Önerme kanıtlandı. ■

Önerme 6.2 *(Taylor Teoremi) $f : A \subseteq X \to Y$ fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında r kez Frechet türevlenebilir olsun. O zaman, X içinde $h \to 0$ iken*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df(x_0)(h) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0)(h)^2 + ... + \frac{1}{r!}d^r f(x_0)(h)^r + o(||h||^r) \tag{1}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt. f fonksiyonu x_0 noktasında r-kez Frechet türevlenebilir olduğundan, keyfi $x \in B(x_0, \eta)$ için, f fonksiyonunun x noktasında $(r-1)$ kez türevlenebilir olacağı biçimde x_0 merkezli η yarıçaplı açık bir $B(x_0, \eta) = \{x \in X : ||x - x_0|| < \eta\}$ yuvarı vardır $h \neq 0$ ve $x_0 + h \in B(x_0, \eta)$ olsun. O halde, $\forall t \in [0, 1]$ için $x_0 + th \in B(x_0, \eta)$ olur.

$\forall t \in [0, 1]$ için $\psi(t) = f(x_0 + th)$ olmak üzere $\psi : [0, 1] \to Y$ fonksiyonunu tanımlayalım. $\forall t \in [0, 1]$ için $x_0 + th \in B$ olduğundan, $\psi(\cdot)$ fonksiyonunun tanım kümesi $[0, 1]$ kapalı aralığını içerir. Bu durumda, Yardımcı Teorem 6.1'den, $[0, 1]$ aralığının her noktasında $\psi(\cdot)$ fonksiyonunun $(r-1)$-inci türevi vardır ve keyfi $t \in [0, 1]$ için

$$d^{r-1}\psi(t) = d^{r-1} f(x_0 + th)(h)^{r-1}$$

olur. $t = 0$ noktasında ise, $\psi(\cdot)$ fomksiyonunun r-inci türevi vardır. $\psi(\cdot)$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında keyfi $1 \leq k \leq r - 1$-inci mertebeden türevlenebilir ve keyfi $t \in [0, 1]$ ve $1 \leq k \leq r - 1$ için $d^k\psi(t) = d^k f(x_0 + th)(h)^k$ olduğundan, Önerme 2.1 ortalama değer teoreminden,

$$r!||f(x_0 + h) - f(x_0) - df(x_0)(h) - ... - \frac{1}{r!}d^r f(x_0)(h)^r|| \leq \tag{2}$$
$$\leq \left\|\frac{d^{r-1}f(x_0 + \xi h)(h)^{r-1} - d^{r-1}f(x_0)(h)^{r-1}}{\xi} - d^r f(x_0)(h)^r\right\|$$

olacak biçimde $\xi \in (0, 1)$ vardır. f fonksiyonu x_0 noktasında r kez Frechet türevlenebilir olduğundan, verilen $\varepsilon > 0$ için, $||z|| < \delta$ iken

$$||d^{r-1}f(x_0 + z) - d^{r-1}f(x_0) - d^r f(x_0)(z)|| \leq \varepsilon \cdot ||z||$$

olacak biçimde $\delta \in (0, \eta)$ sayısı vardır. eşitsizliği sağlanır. Buradan. $||h|| < \delta$ iken (2) eşitsizliğinin sağ tarafı için

$$\left\|\frac{d^{r-1}f(x_0 + \xi h)(h)^{r-1} - d^{r-1}f(x_0)(h)^{r-1}}{\xi} - d^r f(x_0)(h)^r\right\| \leq \varepsilon \cdot ||h||^r$$

olduğu elde edilir. Bu iise (1)'in doğru olması demektir. ∎

Önerme 6.3 *$p > 0$, f fonksiyonu X uzayının bir alt kümesinden Y uzayına tanımlı bir fonksiyon, $x_0 \in X$ ve $x_0 + h \in X$ noktalarını birleştiren kapalı doğru parçası S olsun. Ek olarak, f fonksiyonu S kümesinin her noktasında $(r - 1)$ kez Frechet türevlenebilir, S kümesinin hemen hemen her noktasımda ise r - kez Frechet türevlenebilir olsun. Bu durumda sayılamaz çoklukta $\zeta \in [0, 1]$ için*

$$||f(x_0 + h) - f(x_0) - df(x_0)(h) - \frac{1}{2!}d^2 f(x_0)(h)^2 - ... - \frac{1}{(r-1)!}d^{r-1}f(x_0)(h)^{r-1}|| \leq$$
$$\leq \frac{(1-\zeta)^{r-p}}{p(r-1)!}||d^r f(x_0 + \zeta h)(h)^r||$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt. Bu önermenin ispatı, Önerme 6.2'nin ispatındaki (6.2) eşitsizliğinden elde edilir. ∎

Tanım 6.4 *$f : A \subset X \to \Re$ fonksiyonu ve $x_0 \in A$ noktası verilsin. x_0 noktasının X uzayı içindeki bir komşuluğuna V diyelim. Eğer $\forall x \in A \cap V$ için $f(x_0) \leq f(x)$ eşitsizliği sağlanıyorsa, bu $x_0 \in A$ noktasına f fonksiyonunun yerel minimum noktası denir. Eğer $\forall x \in A \cap V$ için $f(x_0) < f(x)$ eşitsizliği sağlanıyorsa, bu $x_0 \in A$ noktasına f fonksiyonunun kesin yerel minimum noktası denir.*

Tanım 6.5 *$f : A \subseteq X \to \Re$ fonksiyonu ve $x_0 \in A$ noktası verilsin. x_0 noktasının X uzayındaki bir komşuluğu V olsun. Eğer $\forall x \in A \cap V$ için $f(x) \leq f(x_0)$. eşitsizliği sağlanıyorsa, bu $x_0 \in A$ noktasına f fonksiyonunun yerel maximum noktası denir. Eğer $\forall x \in A \cap V$ için $f(x) < f(x_0)$ şeklinde ise, $x_0 \in A$ noktasına f fonksiyonunun kesin yerel maximum noktası denir.*

Önerme 6.6 *$f : A \subseteq X \to \Re$ fonksiyonu verilsin. $x_0 \in A$ noktası f fonksiyonunun yerel minimum noktası ve f fonksiyonu x_0 noktasında Frechet türevlenebilir olsun. Bu durumda $df(x_0) = 0$ olur. Ek olarak eğer f fonksiyonunun x_0 noktasında iki kez Frechet türevlenebilir ise $\forall h \in X$ için $d^2f(x_0)(h)^2 \geq 0$ 'dir.*

Kanıt. Önermenin ilk kısmını ispatlamak için, olmayana ergi metodunu kullanalım. $df(x_0)h_* \neq 0$ olacak biçimde bir $h_* \in X$ olduğunu varsayalım. $x_0 \in A$. A açık küme olduğundan, keyfi $t \in [-\delta, \delta]$ için $x_0 + th_* \in A$ olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı vardır. $y(\cdot) : [-\delta, \delta] \to \Re$ fonksiyonunu, $y(t) = f(x_0 + th_*)$ şeklinde tanımlayalım. Açıktır ki, $t = 0$ noktası y fonksiyonunun yerel minimum noktasıdır. $y(\cdot) : [-\delta, \delta] \to \Re$ fonksiyonu $(-\delta, \delta)$ aralığında türevlenebilir olduğundan, $y'(0) = 0$ olur. Öte yandan, $y'(0) = df(x_0)h_*$ olduğundan, varsayımdan dolayı $y'(0) = df(x_0)h_* \neq 0$. Elde ettiğimiz çelişki, varsayımımızın doğru olmadığını gösterir, yani, $df(x_0) = 0$.

Şimdi teoremin ikinci kısmını ispatlayalım. Ek olarak, f fonksiyonu x_0 noktasında iki kez Frechet türevlenebilir olduğunu varsayalım. $x_0 \in A$ noktası f fonksiyonunun yerel minimum noktası olduğundan, Önermenin birinci kısmından, $df(x_0) = 0$ olur. Aksini, yani $\forall h \in X$ için $d^2f(x_0)(h)^2 \geq 0$ olmadığını varsayalım. O zaman, $d^2f(x_0)(h_*)^2 = -\alpha$ olacak biçimde $h_* \in X$ ve $\alpha > 0$ vardır. Bu durumda, Taylor teoreminden, $\Re$ içinde $t \to 0$ iken

$$f(x_0 + th_*) = f(x_0) - \frac{1}{2}t^2\alpha + o(t^2)$$

olur. $t \to f(x_0 + th_*)$ dönüşümü $t = 0$ noktasında sürekli, $\alpha > 0$ olduğundan, buradan, yeteri kadar küçük ve sıfırdan farklı her t gerçel sayısı için $f(x_0 + th) < f(x_0)$ olduğu bulunur. Bu durum, x_0 noktasının f fonksiyonunun bir yerel minimum olması ile çelişir. Böylece, Önerme ispatlandı. ■

$x_0 \in A$ noktasının f fonksiyonunun yerel minimum noktası olması için, $\forall h \in X$ için $d^2 f(x_0)(h)^2 \geq 0$ olması yeterli değil. Bu doğrultuda 6.7 önermeyi verelim.

Önerme 6.7 *$f : A \subseteq X \to \Re$ fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında iki kez Frechet türevlenebilir ve $d\, f(x_0) = 0$ olsun. Ayrıca $\forall h \in X$ ve $c > 0$ sayısı için*

$$d^2 f(x_0)(h)^2 \geq c \cdot ||h||^2$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda x_0 noktası f fonksiyonunun kesin yerel minimum noktasıdır.

Kanıt. Taylor teoreminden,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{2}d^2 f(x_0)h^2 + o(||h||^2) \geq$$
$$\geq f(x_0) + \frac{1}{2}c||h||^2 + o(||h||^2) \geq f(x_0) + ||h||^2(\frac{1}{2}c + o(1))$$

olduğu bulunur. $c > 0$ olduğundan, buradan, keyfi $h \in B_\eta = \{x \in X : ||x|| \leq \eta\}$, $h \neq 0$, için $f(x_0 + h) > f(x_0)$ olacak biçimde $\eta > 0$ sayısı vardır. Bu ise, x_0 noktasının f fonksiyonunun kesin yerel minimum noktası olması demektir. ■

Sonuç 6.8 *X sonlu boyutlu bir uzay, $f : A \subseteq X \to \Re$ fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında iki kez Frechet türevlenebilir, $df(x_0) = 0$ ve $\forall h \in X \backslash \{0\}$ için $d^2 f(x_0)(h)^2 > 0$ olsun. Bu durumda x_0 noktası f fonksiyonunun yerel minimum noktasıdır.*

Kanıt. $S = \{x \in X : ||x|| = 1\}$, yani S kümesi birim küre olsun. Bu durumda, sonlu boyutlu X uzayında S kümesi kompakt kümedir. $x \to d^2 f(x_0)(x)^2$ dönüşümü sürekli olduğundan, S kümesi üzerinde alttan sınırlıdır ve infimum değerini alır. O halde, $\forall h \in X\backslash\{0\}$ için $d^2f(x_0)(h)^2 > 0$ olduğundan, $\forall h \in S$ için

$$d^2f(x_0)(h)^2 \geq c > 0$$

olacak biçimde $c > 0$ vardır.olsun. Keyfi $h \in X\backslash\{0\}$ alalım ve sabitleyelim. $x = \frac{h}{||h||}$ olsun. O zaman $x \in S$ ve

$$d^2f(x_0)(h)^2 = ||h||^2 d^2f(x_0)(x)^2 \geq c \cdot ||h||^2$$

olduğu bulunur. O halde, Önerme 6.7'den, x_0 noktasının f fonksiyonunun yerel minimum noktası olduğu görülür. ∎

$X = \Re^n$ ise, sonuç 5.16(i)'den, $\forall h \in X\backslash\{0\}$ için $d^2f(x_0)(h)^2 > 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul, $\forall h \in \Re^n\backslash\{0\}$ için

$$\sum_{j=1}^{n} h_i h_j D_i D_j f(x_0) > 0$$

olmasıdır.

Örnek 6.9 *$\Re^3$ uzayında klasik iç çarpım tanımlanmış olsun. $2x - 2y - z = 5$ düzleminde olan ve $(1, 1, 1)$ noktasına en yakın olan noktanın koordinatlarını bulunuz.*

Sorunun çözümüne başlamadan önce,

$$d : \Re^3 \to \Re, \quad d(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda $2x - 2y - z = 5$ yan koşulu altında, $d(\cdot)$ dönüşümünün minimumunu bulmalıyız. Ayrıca, $d : \Re^3 \to \Re$ fonksiyonu, verilen noktadan kapalı kümeye uzaklık fonksiyonu olduğundan dolayı, geometri bilgilerimizden, F dönüşümünün minimuma sahip olduğunu biliyoruz.

$2x - 2y - z = 5$ düzleminde herhangi bir nokta $(x, y, 2x - 2y - 5)$ şeklinde tek olarak belirlidir. O zaman,

$$F : \Re^2 \to \Re, \quad F(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (2x - 2y - 6)^2$$

dönüşümünün minimum değerini bulmalıyız. $\Re^2$ *üzerinde* F *dönüşümü* C^∞ *sınıfındandır. Bundan dolayı,*

$$[DF_{(x,y)}] = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) =$$

$$= (2(x-1) + 4(2x-2y-6), \quad 2(y-1) - 4(2x-2y-6)) =$$

$$= (10x - 8y - 26, \quad 10y - 8x + 22),$$

$$[D^2F_{(x,y)}] = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} -8 \\ 10 \end{matrix}$$

$100 - (-64) = 100 + 64 = 164$

olduğu bulunur. $[DF_{(x,y)}] = 0$ *denklemini çözersek,*

$$10x - 8y - 26 = 0, \quad 10x - 8y = 26, \quad 5x - 4y = 13$$

$$10y - 8x + 22 = 0, \quad 10y - 8x = -22, \quad 5y - 4x = -11$$

ve $y = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{7}{3}$ *olarak bulunur.* $\Re^2$ *üzerinde* $D^2F(x,y)$ *pozitif tanımlı olduğundan,* $\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ *noktasının kesin yerel minimum nokta olduğu görülür. Bu nokta* F *dönüşümü için mutlak minimum noktasıdır.*

Son olarak, $z = 2x - 2y - 5$ *eşitliğinden,* z *'yi çözelim. O halde* $z = 2 \cdot \frac{7}{3} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 5 = -\frac{2}{3}$ *bulunur. Boylece,* $2x - 2y - z = 5$ *düzleminde olan ve* $(1,1,1)$ *noktasına en yakın olan noktanın koordinatlarının,* $\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ *olduğu görülür.*

Örnek 6.10 $F : \Re^2 \to \Re$, $\quad F(x,y) = xe^{xy}$ *fonksiyonunun,* $(1,1)$ *noktasında ikinci basamaktan Taylor açılımını yazınız.*

$$f(x,y) = f(1,1) + [\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)] + \frac{1}{2!}[\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}(1,1)(x-1)^2 +$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)(x-1)(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(y-1)^2] + o\left((x-1)^2 + (y-1)^2\right)$$

yazılabilir.

$$f(1,1) = 1 \cdot e = e,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} = (1+xy)e^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2e,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = e,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2y + xy^2)e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 3e,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^3 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = e,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (2x + x^2 y)e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 3$$

olduğundan,

$$f(x,y) = e + [2e(x-1) + e(y-1)] + \frac{1}{2!}[3e(x-1)^2 +$$

$$+6e(x-1)(y-1) + e(y-1)^2] + o\left((x-1)^2 + (y-1)^2\right),$$

eşitliği geçerlidir.

7 TERS FONKSİYON TEOREMİ

$f : A \subset X \to Y$ fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında Frechet türevlenebilir olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için

$$y(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) \tag{1}$$

olarak tanımlanan $y : X \to Y$ fonksiyonu, x_0 noktasının bir komşuluğunda, f fonksiyonuna doğrusal anlamda yaklaşmamızı sağlar. Eğer $df(x_0) \in LH(X, Y)$ ise (1) ile tanımlanan $y : X \to Y$ fonksiyonu X'den Y' ye homemorfizmadır. Doğal olarak bu noktada aklımıza şu soru gelmektedir. f fonksiyonunu x_0 noktasının bir V komşuluğuna kısıtlarsak, bu kısıtlanmış fonksiyon V kümesinden $f(V)$ kümesine bir homemorfizma tanımlar mı? Bu sorunun cevabı genelde olumsuzdur. Fakat X ve Y uzayları tam uzaylar, f fonksiyonu x_0 noktasının bir komşuluğunda türevlenebilen fonksiyon ve df dönüşümü x_0 noktasında sürekli ise bu soruya olumlu bir yanıt verebiliriz.

Yardımcı Teorem 7.1 *X ve Y Banach uzay olsunlar. $T \in LH(X, Y)$, $M = ||T^{-1}||$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $A \subset X$ kümesi X uzayında açık bir küme olsun. $f : A \subset X \to Y$ fonksiyonu, $\forall x, x' \in A$ için*

$$||f(x) - f(x') - T(x - x')|| \leq \frac{\varepsilon}{M}||x - x'|| \tag{2}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda, f fonksiyonu A kümesinden $f(A)$ kümesine homeomofizmadır ve $f(A)$ kümesi Y uzayı içinde açıktır. Ek olarak $A = X$ ise, $f(A) = f(X) = Y$ olur.

Kanıt. $\forall z \in X$ için

$$\frac{||z||}{M} \leq ||T(z)|| \leq ||T|| \cdot ||z||$$

olduğundan, $\forall x, x' \in A$ için, (2)'den dolayı

$$(1 - \varepsilon)\frac{||x - x'||}{M} \leq ||f(x) - f(x')|| \leq \left(||T|| + \frac{\varepsilon}{M}\right) ||x - x'|| \tag{3}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizliğin sağ kısmından f fonksiyonunun sürekli olduğu, sol kısmından ise f fonksiyonunun birebir ve f^{-1} fonksiyonunun sürekli olduğu görülür. Dolayısıyla f fonksiyonu A kümesinden $f(A)$ kümesine örten bir homeomorfizmadır.

$f(A)$ kümesinin Y uzayı içinde açık olduğunu kanıtlamak için $f(A)$ kümesinden bir y_* öğesi alalım ve $x_* \in A$ ögesi için $f(x_*) = y_*$ olsun. Şimdi,

$$C = B^*(x_*, \alpha) = \{x \in X : \|x - x_*\| \leq \alpha\} \subset A$$

$$D = S^*(y_*, \alpha(1-\varepsilon)/M) = \{y \in Y : \|y - y_*\| \leq \alpha(1-\varepsilon)/M\} \subset Y$$

olsun. Açıktır ki, C, A'nın içinde, x_* merkezli, yarıçapı α olan kapalı yuvar. D, Y'nin içinde, y_* merkezli, yarıçapı $\alpha(1-\varepsilon)/M$ olan kapalı yuvardır. $y \in D$ alalım ve sabitleyelim. $x \in C$ için,

$$h(x) = x - T^{-1}(f(x) - y)$$

olmak üzere, $h(\cdot) : C \to X$ dönüşümünü tanımlayalım.

$$f(x_*) = y_*, \qquad y \in D, \qquad x_* - x = T^{-1}T(x_* - x)$$

olduğundan, (2)'den, keyfi $x \in C$ için

$$\begin{aligned}
\|h(x) - x_*\| &= \left\|T^{-1}[y - y_* + f(x_*) - f(x)] - (x_* - x)\right\| = \\
&= \|T^{-1}[y - y_* + f(x_*) - f(x) - T(x_* - x)]\| = \\
&= \|T^{-1}(y - y_*) + T^{-1}(f(x_*) - f(x) - T(x_* - x))\| \leq \\
&\leq M\|y - y_*\| + M\frac{\varepsilon}{M}\|x - x_*\| \leq (1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\alpha \leq \alpha
\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Bu ise, $h(x) \in C$ olması demektir. Böylece, $h(\cdot) : C \to C$ olacak biçimde dönüşümündür. (2)'den, ek olarak, keyfi $x, x' \in C$ için

$$\begin{aligned}
\|h(x) - h(x')\| &= \left\|T^{-1}(f(x') - f(x)) - (x' - x)\right\| = \\
&= \left\|T^{-1}[f(x') - f(x) - T(x' - x)]\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \cdot \|f(x') - f(x) - T(x' - x)\| \leq \\
&\leq M\frac{\varepsilon}{M} \cdot \|x - x'\| = \varepsilon \cdot \|x - x'\|
\end{aligned}$$

olduğundan, h fonksiyonu büzülme sabiti $\varepsilon \in (0,1)$ olan bir büzülme dönüşümüdür. Böylece, $h(\cdot) : C \to C$ olacak biçimde büzülme dönüşümüdür. O zaman, Banach-Picard sabiit nokta teoreminden, $h(x) = x$ olacak biçimde tek bir $x \in C$ vardır. O halde, $h(\cdot)$ dönüşümünün tanımından, $h(x) = x$ ise, $x = x - T^{-1}(f(x) - y)$ ve buradan $y = f(x)$ olur. Böylece, her sabitlenmiş $y \in D$ için, $y = f(x)$ olacak biçimde tek bir $x \in C$ olduğunu gördük. Bundan dolayı $D \subset f(C) \subset f(A)$, yani,

$$S^*(y_*, \alpha(1-\varepsilon)/M) \subset f(A)$$

olur. $y_* \in f(A)$ keyfi seçilerek sabitlenmiş olduğundan, $f(A)$ kümesinin Y uzayında açık olduğu görülür. Eğer $A = X$ ise, α 'yı yeterince büyük seçersek, $f(A) = Y$ olduğu görülür. ■

Sonuç 7.2 *X ve Y Banach uzaylar, $T \in LH(X,Y)$ ve $M = \|T^{-1}\|$ olsun. Ek olarak, $\|S - T\| < 1/M$ olacak biçimde $S \in L(X,Y)$ olsun. Bu durumda $S \in LH(X,Y)$ ve*

$$\|S^{-1}\| \leq \frac{M}{(1 - M\|S-T\|)} \tag{4}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt. Yardımcı Teorem 7.1'de, $A = X$, $f = S$ alırsak, $T \in LH(X,Y)$, $S \in L(X,Y)$ olduğundan, keyfi $x \in X$, $x' \in X$ için

$$\|S(x) - S(x') - T(x - x')\| =$$
$$= \|S(x) - S(x') - S(x - x') + (S - T)(x - x')\| =$$
$$= \|(S - T)(x - x')\| \leq \|S - T\| \cdot \|x - x'\|$$

olur. $\varepsilon = M \cdot \|S - T\|$ dersek, buradan, keyfi $x \in X$, $x' \in X$ için

$$\|S(x) - S(x') - T(x - x')\| \leq \frac{\varepsilon}{M}\|x - x'\|$$

olduğu bulunur. O halde, Yardımcı Teorem 7.1'den, $S(X) = Y$ ve $S \in LH(X,Y)$ olduğu bulunur.

Öte yandan, $A = X$, $f = S$ iken, Yardımçı Teorem 7.1'deki (3) eştsizliği sağlanır. O zaman (3) eşitsizliğin sol tarafından, keyfi $x \in X$, $x' \in X$ için

$$(1-\varepsilon)\frac{||x - x'||}{M} \leq ||S(x) - S(x')|| = ||S(x - x')|| \leq ||S|| \cdot ||x - x'||$$

olduğu bulunur. Buradan, $\varepsilon = M \cdot ||S - T||$ olduğundan,

$$||S|| \geq \frac{1 - M \cdot ||S - T||}{M}$$

ve (4) eşitsizliğinin doğru olduğu elde edilir. ■

Sonuç 7.3 *X Banach uzayı, $L \in L(X, X)$ ve $||L|| < 1$ olsun. X uzayı üzerindeki birim dönüşüm 1_X olsun, yani keyfi $x \in X$ için $1_X(x) = x$. Bu durumda, $1_x + L \in LH(X, X)$ olur ve*

$$||(1_X + L)^{-1}|| \leq \frac{1}{1 - ||L||} \tag{5}$$

$$\left\|(1_X + L)^{-1} - 1_X + L\right\| \leq \frac{||L||^2}{1 - ||L||} \tag{6}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Kanıt. Eğer Sonuç 7.2 'de $X = Y$, $S = 1_X + L$, $T = 1_X$ alırsak, bu durumda $M = 1$ olur ve $1_x + L \in LH(X, X)$ olduğu ve (5) eşitsizliğinin sağlandığı elde edilir.

(6)'nın sağlandığını kanıtlayalım.

$$(1_X + L)(1_X - L) = 1_X - L^2, \quad (L^2 = L \circ L)$$

olduğundan,

$$(1_X + L)^{-1} - 1_X + L = (1_X + L)^{-1}[1_X - (1_X - L^2)]$$

olur. $||L^2|| \leq ||L||^2$ olduğundan, buradan ve (5)'ten

$$\left\|(1_X + L)^{-1} - 1_X + L\right\| = \left\|(1_X + L)^{-1}[1_X - (1_X - L^2)]\right\| \leq$$

$$\leq \left\|(1_X + L)^{-1}L^2\right\| \leq \left\|(1_X + L)^{-1}\right\| \cdot \left\|L^2\right\| \leq \frac{||L||^2}{1 - ||L||}$$

olduğu elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 7.4 *X, Y Banach uzaylar, $H = LH(X,Y)$ olsun. Bu durumda, H kümesi $L(X,Y)$ uzayı içinde açık kümedir. Ek olarak, eğer H kümesi boş kümeden farklı ve*

$$I : H \to L(Y,X), \quad I(T) = T^{-1}$$

dönüşümü ise, I dönüşümü H üzerinde C^{∞} sınıfındandır ve $T \in H$ için $dI(T) : L(X,Y) \to L(Y,X)$ dönüşümü

$$dI(T)(U) = -T^{-1} \circ U \circ T^{-1}$$

olur.

Kanıt. $T \in H$ alalım. Bu durumda sonuç 7.2'den,

$$B\left(T, \frac{1}{\|T^{-1}\|}\right) = \left\{S \in L(X,Y) : \|S - T\| \leq \frac{1}{\|T^{-1}\|}\right\} \subset H$$

olur. Böylece, keyfi $T \in H$, bir açık komşuluğu ile H kümesinde olur. Bu ise, $H \subset L(X,Y)$ kümesinin açık olması demektir.

Eğer $U \in L(X,Y)$ öğesi için $T + U \in B\left(T, \frac{1}{\|T^{-1}\|}\right)$ oluyorsa, o zaman

$$\|T^{-1} \circ U\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|U\| < 1$$

olur. Buradan

$$1_X + T^{-1} \circ U \in LH(X,X)$$

olduğu elde edilir.

$$\begin{aligned}
&(T+U)^{-1} - T^{-1} + T^{-1} \circ U \circ T^{-1} = \\
&= (1_X + T^{-1} \circ U)^{-1} \circ T^{-1} - T^{-1} + T^{-1} \circ U \circ T^{-1} = \\
&= [(1_X + T^{-1} \circ U)^{-1} - 1_X + T^{-1} \circ U] \circ T^{-1}
\end{aligned}$$

olduğundan, (5) 'den dolayı

$$\begin{aligned}
&\left\|(T+U)^{-1} - T^{-1} + T^{-1} \circ U \circ T^{-1}\right\| = \\
&= \left\|[(1_X + T^{-1} \circ U)^{-1} - 1_X + T^{-1} \circ U] \circ T^{-1}\right\| \leq \\
&\leq \frac{\|T^{-1}\|^3 \cdot \|U\|^2}{1 - \|T^{-1}\| \cdot \|U\|}
\end{aligned}$$

olur ve buradan I fonksiyonunun T 'de diferansiyellenebilir ve

$$dI(T)(U) = -T^{-1} \circ U \circ T^{-1}$$

olduğu görülür.

Şimdi $V = L(X,Y)$ ve $W = L(Y,X)$ ile gösterelim. Bu durumda,

$$G : W \to W \times W, \quad G(S) = (S,S)$$

şeklinde ve

$$F : W \times W \to L(V,W), \quad F(U) = -S_1 \circ U \circ S_2$$

şeklinde tanımlarsak, $dI = F \circ G \circ I$ olur. Açıktır ki G doğrusal ve sürekli dönüşüm. F bilineer ve sürekli dönüşümdür. Bundan dolayı, F ve G dönüşümleri. C^{∞} sınıfındandır. Önerme 5.10'dan, $F \circ G$ dönüşümü de C^{∞} sınıfındandır. $dI = F \circ G \circ I$ olduğundan,yine de Önerme 5.10'dan, eğer I dönüşümü H üzerinde r kez Frechet türevlenebilirse, bu durumda dI dönüşümü de r kez Frechet türevlenebilir olur. Bu ise I dönüşümünün H üzerinde $(r+1)$ kez Frechet türevleneilir olması demektir. I dönüşümü H üzerinde Frechet türevleneilir olduğundan, buradan I dönüşümünün H üzerinde C^{∞} sınıfından olduğu elde ediler. Önerme ispatlandı. ■

Önerme 7.5 *(Ters Fonksiyon Teoremi) X ve Y Banach uzayları. $f : A \subseteq X \to Y$ bir fonksiyon. x_0 noktası A kümesinin iç noktası, x_0 noktasının bir komşuluğunda f dönüşümünün df Frechet turevi tanımlı ve x_0 noktasında sürekli, $df(x_0) \in LH(X,Y)$ olsun. Bu durumda X uzayı içinde x_0 noktasının $V \subset A$ olacak biçimde bir V komşuluğu vardır öyle ki:*

(i) $\forall x \in V$ için f fonksiyonu x noktasında Frechet türevlenebilir ve $df(x) \in LH(X,Y)$.

(ii) f fonksiyonunun V kümesine kısıtlanmışı F ise, F fonksiyonu V kümesinden $f(V)$ kümesine homeomorfizma ve $f(V)$ kümesi Y uzayında açıktır.

(iii) $F : V \to f(V)$ fonksiyonunun tersi $F^{-1} : f(V) \to V$ fonksiyonu $\forall y \in f(V)$ noktasında Frechet türevlenebilirdir ve $x = F^{-1}(y)$ için $dF^{-1}(y) = df(x)^{-1}$ eşitliği geçerlidir.

(iv) dF^{-1} dönüşümü $y_0 = f(x_0)$ noktasında süreklidir.

(v) $r \geq 2$ olmak üzere, f fonksiyonu $x \in V$ noktasında r-kez Frechet türevlenebilir ise, F dönüşümü de $y = f(x)$ noktasında r kez Frechet türevlenebilirdir.

(vi) Eğer f fonksiyonu $E \subseteq V$ açık kümesinde C^r sınıfından ise, F^{-1} dönüşümü de $f(E)$ kümesinde C^r sınıfındandır.

Kanıt. (i): x_0 noktasının bir komşuluğunda f dönüşümünün df Frechet türevi tanımlı ve x_0 noktasında sürekli, $df(x_0) \in LH(X, Y)$ olduğundan, $df(x_0)^{-1}$ tanımlı ve $||df(x)|| \neq 0$ olur. $K = \frac{1}{||df(x_0)^{-1}||}$ olsun. $x \longrightarrow df(x)$ dönüşümü x_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı ve x_0 noktada sürekli olduğundan, $\forall x \in V$ için

$$||df(x) - df(x_0)|| \leq \frac{1}{2}K \tag{7}$$

olacak biçimde x_0 merkezli açık bir V yuvarı vardır. O zaman, Sonuç 7.2'den, $\forall x \in V$ için $df(x) \in LH(X, Y)$ olduğu görülür.

(ii): $f(\cdot) - df(x_0) : V \longrightarrow Y$ dönüşümüne bakalım ve keyfi $x \in V$, $x' \in V$ alalım. O zaman, $f(\cdot) - df(x_0) : V \longrightarrow Y$ dönüşümüne ortalama değer eşitsizliğini uygularsak, Önerme 2.1'den Bu durumda, $x \in V$, $x' \in V$ için,

$$||(f - df(x_0))(x) - (f - df(x_0))(x')|| \leq ||d\left(f - df(x_0)\right)(c)(x - x')|| \tag{8}$$

olacak biçimde $c \in V$ vardır. $h \longrightarrow df(x_0)(h)$ dönüşümü doğrusal olduğundan, $d\left(df(x_0)\right) = df(x_0)$ ve

$$d\left(f - df(x_0)\right)(c) = df(c) - df(x_0) \tag{9}$$

olduğu elde edilir.

$$(f - df(x_0))(x) - (f - df(x_0)(x') = f(x) - f(x') - df(x_0)(x - x')$$

olduğundan, buradan, (8) ve (9)'dan,

$$||f(x) - f(x') - df(x_0)(x - x')|| \leq ||d(f(c) - df(x_0))(x - x')|| =$$

$$= ||(df(c) - df(x_0))(x - x')|| \leq ||df(c) - df(x_0)|| \cdot ||(x - x')||$$

eşitsizliği elde edilir. $c \in V$ olduğundan, son eşitsizlikten ve (7)'den, keyfi $x \in V$, $x' \in V$ için

$$||f(x) - f(x') - df(x_0)(x - x')|| \leq \frac{1}{2}K \cdot ||x - x'||$$

Buradan ve Yardımcı Teorem 7.1'den (ii) doğrulanır.

(iii): (iii), (i), (ii) ve Önerme 1.26'dan sonuç olarak elde edilir.

(iv): (iii) 'den, $x = F^{-1}(y)$ için $dF^{-1}(y) = df(x)^{-1}$ eşitliği geçerlidir. Yardımcı Teorem 7.4'ten, $I(T) = T^{-1} : LH(X, Y) \to L(Y, X)$ için,

$$dI(T)(U) = -T^{-1} \circ U \circ T^{-1}$$

olur. O zaman, $x = F^{-1}(y)$ için

$$(I \circ df \circ F^{-1})(y) = [(I \circ df) \circ F^{-1}](y) = (I \circ df)[F^{-1}(y)] =$$
$$= (I \circ df)(x) = I(df(x)) = df(x)^{-1} = dF^{-1}(y)$$

olur. Böylece,

$$dF^{-1} = I \circ df \circ F^{-1} \tag{10}$$

eşitliği geçerlidir. F^{-1} dönüşümü y_0 noktasında sürekli, df doğrusal dönüşümü $x_0 = F^{-1}(y_0)$ noktasında sürekli ve $I \in C^\infty$ olduğundan dF^{-1} dönüşümü y_0 noktasında süreklidir.

(v) ve (vi), (10) eşitliğine tümevarım yöntemi uygulanarak ispatlanır. ■

$X = \Re^n$, $Y = \Re^n$, $f : \Re^n \to \Re^n$, $f_1, f_2, ..., f_n$ fonksiyonları f fonksiyonunun komponentleri olsun. Bu durumda, $df(x_0)$ doğrusal dönüşümünün $\Re^n$ uzayından $\Re^n$ uzayına homeomorfizma olması, x_0 noktasında $f : \Re^n \to \Re^n$ fonksiyonun $[D_j f_i(x_0)]$ Jacobi matrisinin determinantının sıfırdan farklı olmasına denktir. Ancak bu durum, dönüşümün tüm tanım kümesinde tersinin olmasını gerektirmez. Bu durumu bir örnekle açıklayalım.

Örnek 7.6 $(x, y) \in \Re^2$ *için*

$$f(x, y) = (e^x \cos y, \quad e^x \sin y)$$

olmak üzere $f : \Re^2 \to \Re^2$ dönüşümünü ele alalım. Bu dönüşümün Jacobi matrisi

$$D_j f_i(x_0) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & e^x \sin y \\ -e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

ve

$$\det[D_j f_i(x_0)] = (e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2 =$$
$$= e^{2x} \cdot [cos^2 y + sin^2 y] = e^{2x}$$

olur. $\forall x \in \Re$ için $e^{2x} \neq 0$ olduğundan $[D_j f_i(x)] \neq 0$ 'dır. Fakat f dönüşümü tüm tanım kümesi üzerinde birebir olmadığından tersinir değildir.

8 KAPALI FONKSİYON TEOREMİ

X ve Y Banach uzayları, $Z = X \times Y$ çarpım uzayı olsun. $A \subset Z$ alalım. $F : A \subset Z \to Y$ fonksiyonu $z_0 = (x_0, y_0)$ noktasında Frechet türevlenebilir olsun. Ayrıca, $F(z_0) = c$ olsun. $z_0 = (x_0, y_0)$ noktasının bir komşuluğundaki $(x, y) \in A$ noktaları için

$$F(x, y) = c \tag{1}$$

eşitliğini göz önüne alalım. $\psi : Z \to Y$,

$$\psi(x, y) = c + dF(z_0)(x - x_0, y - y_0)$$

fonksiyonu tanımlayalım. O halde ψ fonksiyonu, z_0 noktasının bir komşuluğunda F fonksiyonunun bir yaklaşimi olur. Bu durumda,

$$DF(z_0)(x - x_0, y - y_0) = 0$$

denklemi veya bu denkleme denk

$$d_1F(z_0)(x - x_0) + d_2F(z_0)(y - y_0) = 0 \tag{2}$$

denklemi, (1) denkleminin bir yaklaşımı olur. Eğer $d_2F(z_0)$ dönüşümü Y'den Y'ye doğrusal homeomorfizma ise, (2) denkleminden y'ni x cinsinden $y = f(x)$ olarak çözebiliriz. Eğer $d_2F(z_0)$ dönüşümü Y'den Y'ye doğrusal homeomorfizma ve dF dönüşümü z_0 noktasında sürekli ise, (1) denkleminden $f(x)$ diferansiyellenebilir olmak üzere y'ni x cinsinden $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$, olarak çözebiliriz.

Kapalı fonksiyon teoremi aslında sadece bu koşulların yeterli olduğunu belirtmektedir.

Teorem 8.1 *(Kapalı Fonksiyon Teoremi) X, Y Banach uzayları, $Z = X \times Y$ olsun. A kümesi Z içinde açık bir küme ve $F : A \subset Z \to Y$ dönüşümü A kümesinde Frechet türevlenebilir bir fonksiyon ve $z_0 = (x_0, y_0)$ noktası için $F(z_0) = c$ olsun. Ayrıca dF dönüşümü z_0 noktasında sürekli ve $d_2F(z_0) \in LH(Y, Y)$ olsun. O zaman,*

$$\forall x \in V \text{ için } (x, f(x)) \in W, \quad F(x, f(x)) = c, \quad f(x_0) = y_0$$

olacak biçimde X içinde x_0'ın açık bir V komşuluğu, Z içinde z_0 'ın açık bir W komşuluğu, Frechet türevlenebilir $f : V \to Y$ fonksiyonu vardır ve $y = f(x)$, $F(x,y) = c$ denkleminin $(x, f(x)) \in W$ olacak biçimde tek çözümüdür.

Ayrıca, $\forall z \in W$ için $d_2\ F(z) \in LH(Y,Y)$ ve $z_* = (x, f(x))$ olmak üzere her $x \in V$ için

$$df(x) = -d_2F(z_*)^{-1} \circ d_1F(z_*)$$

ve $df(\cdot)$ dönüşümü x_0 noktasında süreklidir.

Ayrıca $x \in V, r \geq 2$ iken F dönüşümü $(x, f(x))$ noktasında r kez Frechet türevlenebilir ise, f fonksiyonu x noktasında r kez Frechet türevlenebilirdir ve $r \geq 1$ olmak üzere F fonksiyonu A kümesi üzerinde C^r sınıfından ise, f fonksiyonu da V üzerinde C^r sınıfındandır. Son olarak, eger x_0 noktasının açık bağlantılı bir $V^* \subset V$ komşuluğu için. $f^* : V^* \to Y$ sürekli fonksiyon olmak üzere $f^*(x_0) = y_0$ ve $\forall x \in V^*$ için $F(x, f^*(x)) = c$ ise. f^* fonksiyonu V^* kümesinde f ile çakışır.

Ters fonksiyon teoreminin kanıtına başlamadan önce, ispatta kullanacağımız bir yardımcı teorem verelim.

Yardımcı Teorem 8.2 *X ve Y normlu uzaylar, $Z = X \times Y$. $T_1 \in L(X,Y)$, $T_2 \in L(Y,Y)$ olsun. $T \in L(Z,Z)$ dönüşümü, $(h,k) \in Z$ için $T(h,k) = (h, T_1h + T_2k)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $T \in LH(Z,Z)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $T_2 \in LH(Y,Y)$ olmasıdır.*

Kanıt. $T_2 \in LH(Y,Y)$ olduğunu varsayalım. T dönüşümünün birebir ve örten olduğunu kanıtlayalım. Keyfi $(h^*, k^*) \in Z$ alalım ve $T(h,k) = (h^*, k^*)$ denklemini çözelim. $T(h,k) = (h, T_1h + T_2k)$ olarak tanımlandığından, $(h^*, k^*) = (h, T_1h + T_2k)$ olup, buradan da

$$h^* = h, \qquad T_1h + T_2k = k^*$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu eşitliklerden, $h^* = h$ ve $T_2k = k^* - T_1(h) = k^* - T_1(h^*)$ bulunur. Buradan da,

$$k = T_2^{-1}(k^*) - T_2^{-1}[T_1(h^*)] \tag{3}$$

eşitliği geçerlidir. Böylece, (3)'den, $T(h,k)=(h^*,k^*)$ denkleminin çözümü,

$$(h,k)=T^{-1}(h^*,k^*)=(h^*,T_2^{-1}(k^*)-T_2^{-1}[T_1(h^*)])$$

olur. $T_2\in LH(Y,Y)$ olduğundan,

$$T^{-1}:Z\to Z,\quad T^{-1}(h^*,k^*)=(h^*,T_2^{-1}(k^*)-T_2^{-1}[T_1(h^*)])$$

şeklinde tanımlanan T^{-1} dönüşümü sürekli ve birebir dönüşüm olur. Bu ise $T\in LH(Z,Z)$ olduğu demektir.

Tersine $T\in LH(Z,Z)$ olduğunu varsayalım. T dönüşümü ilk bileşeni koruduğundan, $k\to T(0,k)=(0,T_2k)$ dönüşümü Y uzayından Z 'nin $\{0\}\times Y$ uzayına doğrusal bir homeomorfizma olup, $T_2\in LH(Y,Y)$ olduğu görülür. ∎

Şimdi, kapalı fonksiyon teoremini ispatlayalım.

Kanıt. $z=(x,y)$ olmak üzere

$$G(z)=G(x,y)=(x,F(x,y)) \tag{4}$$

dönüşümünü göz önüne alalım ve G birebir önüşüm olsun. O zaman, G dönüşümü ilk bileşkenini koruduğundan, G^{-1} dönüşümü de ilk bileşeni korur. Bundan dolayı

$$G^{-1}(x,y)=(x,H(x,y)) \tag{5}$$

olur. Bundan dolayı, G^{-1} dönüşümünün tanım kümesindeki her (x,y) ögesi için

$$(x,y)=G(G^{-1}(x,y))=G(x,H(x,y))=(x,F(x,H(x,y)))$$

olduğu elde edilir. Buradan ise

$$F(x,H(x,y))=y \tag{6}$$

olduğu bulunur. Ayrıca, $F(z_0)=c\in Y$ için

$$F(x,H(x,c))=c \tag{7}$$

olur. Böylece $F(x,y)=c$ eşitliğinin bir çözümünün $y=H(x,c)$ olduğu görülür.

Burada G dönüşümünün birebir olduğunu varsaydık. Eğer G dönüşümünün tanım kümesini A kümesi alırsak ve teoremdeki dönüşümü F alırsak, G dönüşümü birebir olmayabilir. Ancak, teoremin hipotezinden, (4) ile tanımlanan G dönüşümünün z_0 noktasında ters fonksiyon teoreminin koşullarını sağladığı görülür. Bundan dolayı, G dönüşümünün W kümesi üzerine kısıtlanmışı birebir olacak biçimde, Z içinde z_0 noktasının açık bir W komşuluğu bulunur. O zaman, $F(x,y) = c$ olacak biçimdeki her $(x,y) \in W$ için, $y = f(x) = H(x,c)$ olur.

Şimdi, (4) ile tanımlanan $G : A \to Z$ dönüşümünü ele alalım. O zaman

$$G(z_0) = G(x_0, y_0) = (x_0, F(x_0, y_0)) = (x_0, c)$$

olur. Ayrıca, G dönüşümü A kümesi üzerinde türevlenebilir ve A'dan alınan her z ve keyfi $(h,k) \in Z$ için

$$dG(z)(h,k) = (h, dF(z)(h,k))$$

olur. Buradan dG dönüşümünün z_0 noktasında sürekli olduğu görülür. Ek olarak,

$$dF(z)(h,k) = d_1F(z)h + d_2F(z)k \quad \text{ve} \quad d_2F(z_0) \in LH(Y,Y)$$

olduğundan, Yardımcı Teorem 8.2 'den, $dG(z_0) \in LH(Z,Z)$ olduğu bulunur. Ayrıca, eğer $r \geq 2$ olmak üzere F dönüşümü keyfi $z \in A$ noktasında r kez türevlenebilir veya $r \geq 1$ olmak üzere A kümesi üzerinde C^r sınıfından ise, Sonuç 5.9'tan, G dönüşümü uygun olarak, $z \in A$ noktasında r-kez Frechet türevlenebilirdir veya A kümesi üzerinde C^r sınıfındandır.

G dönüşümünün, z_0 noktasında ters fonksiyon teoreminin koşullarını sağladığını gördük. Bundan dolayı tamamı A içinde kalan z_0 noktasının bir W komşuluğunu bulabiliriz öyle ki:

(a): Her $z \in W$ için $d_2F(z) \in LH(Y,Y)$ olduğundan, Yardımcı Teorem 8.2'den, her $z \in W$ için $dG(z) \in LH(Z,Z)$ olur.

(b): G dönüşümünün W kümesi üzerine kısıtlanmışı, W kümesinden $U = G(W)$ kümesine örten homeomorfizmadır. Ayrıca, Z içinde U kümesi açıktır.

(c): G dönüşümünün W kümesi üzerine kısıtlanmışının tersi olan G^{-1} dönüşümü, U kümesinden alınan her z^* için türevlenebilirdir ve $G(z_0) = (x_0, c)$ noktasında dG^{-1}dönüşümü süreklidir.

(d): $r \geq 2$ bir tamsayı olmak üzere, W kümesinden alınan bir z noktasında G dönüşümü türevlenebilir ise, o zaman G^{-1} dönüşümü $z^* = G(z)$ noktasında r kez türevlenebilirdir. $r \geq 1$ olmak üzere, G dönüşümü A kümesi üzerinde C^r sınıfından ise, G^{-1} dönüşümü U kümesi üzerinde C^r sınıfındandır.

Şimdi $H : U \to Y$ dönüşümünü, (5)'i, keyfi $(x, y) \in U$ için (6)'nı ve $H(x_0, c) = y_0$ eşitliğini sağlayan dönüşüm olsun. O halde, (c)'den dolayı, H dönüşümü U kümesi üzerinde türevlenebilirdir ve dH doğrusal dönüşümü (x_0, c) noktasında süreklidir. Ayrıca (d)'den dolayı, eger $z \in W$ noktasında F dönüşümü r kez Frechet türevlenebilir ise veya A üzerinde C^r sınıfından ise, uygun olarak, H dönüşümü de $z^* = G(z)$ noktasında r kez Frechet türevlenebilir veya U kümesi üzerinde C^r sınıfından olur.

Şimdi, $V = \{x \in X : (x, c) \in U\}$ olsun. $f : V \to Y$ fonksiyonunu,

$$f(x) = H(x, c)$$

olarak tanımlayalım. U kümesi Z içinde açık olduğundan, V kümesi X içinde açıktır ve aşikar olarak

$$x_0 \in V, \qquad f(x_0) = H(x_0, c) = y_0$$

ve her $x \in V$ için

$$(x, f(x)) \in W, \; F(x, F(x)) = c$$

olur.

Ayrıca, her $x \in V$ için $y = f(x)$, $F(x, y) = c$ eşitliğinin çözümü $(x, y) = (x, f(x)) \in W$ olur. Eğer, $(x, y) \in W$, $(x, y') \in W$ ve $F(x, y) = F(x, y')$ ise, $G(x, y) = G(x, y')$ ve buradan $y = y'$ olduğu bulunur. Bu ise, G dönüşümünün W kümesi üzerine kısıtlanmışının birebirdir olması demektir.

$x \longrightarrow (x, c)$ dönüşümü, $L(X, Z)$ içinde olan $x \longrightarrow (x, 0)$ ve sabit $x \longrightarrow (0, c)$ dönüşümlerinin toplamıdır. O zaman, f dönüşümü $L(X, Z)$ içinde olan $x \longrightarrow (x, c)$ dönüşümü ile H dönüşümünün bileşkesi olduğundan, f fonksiyonu V kümesi üzerinde türevlenebilirdir, df doğrusal dönüşümü x_0 noktasında süreklidir ve f fonksiyonunun teoremde belirtilen yüksek mertebeden türevlenebilme özellikleri vardır. Ek olarak her $x \in V$ için $F(x, f(x)) = c$ olduğundan, bu eşitlikte türevin zincir kuralını uygularsak, $z = (x, f(x))$ olmak üzere

$$d_1F(z) + d_2F(z) \circ df(x) = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan ise

$$df(x) = -d_2F(z)^{-1} \circ d_1F(z)$$

olduğu bulunur.

Son olarak f fonksiyonunun tek olduğunu kanıtlamalıyız. V^*, tamamı V kümesinde olmak üzere x_0 noktasının açık bağlantılı bir komşuluğu olsun. $f^* : V^* \longrightarrow Y$ fonksiyonu sürekli. $f^*(x_0) = y_0$ ve her $x \in V^*$ için $F(x, f^*(x)) = c$ olsun.

$$E = \{x \in V^* : f^*(x) = f(x)\}$$

kümesini tanımlayalım.

Teoremin kanıtını bitirmek için, $E = V^*$ eşitliğinin doğru olduğunu görmeliyiz. x_0 ögesi E kümesine ait olduğundan E kümesi boş kümeden farklı bir kümedir. Ayrıca, f ve f^* fonksiyonları sürekli olduklarından, E kümesi V^* içinde kapalı kümedir. Eğer E kümesinin açık olduğunu kanıtlarsak, V^* açık bağlantılı olduğundan, $E = V^*$ olduğu bulunur. İspatı tamamlamak için E kümesinin açık olduğunu gösterelim. Keyfi $x^* \in E$ alalım ve sabitleyelim. Bu takdirde,

$$(x^*, f^*(x^*)) = (x^*, f(x^*)) \in W$$

olduğundan, $(x^*, f^*(x^*)) \in W$ olur. W kümesi Z içinde açık küme. $x \longrightarrow (x, f^*(x))$ dönüşümü V^* kümesi üzerinde sürekli olduğundan, keyfi $x \in V'$ için $(x, f^*(x)) \in W$ olacak biçimde x^* noktasının bir açık $V' \subset V^*$ komşuluğu vardır. Teoremin kanıtlarken, $(x,y) \in W$, $(x,y') \in W$ için $F(x,y) = F(x,y')$ iken, $y = y'$ olduğunu görmüştük. O halde, keyfi $x \in V'$ için $(x, f^*(x)) \in W$ olduğundan, keyfi $x \in V'$ için $f^*(x) = f(x)$ olur. Bu ise $V' \subset E$ olması demektir. $x^* \in E$ keyfi sabitlenmiş nokta, V' açık kümesi x^* noktasının bir açık komşuluğu olduğundan, E kümesi açıktır. Böylece kanıt biter. ■

Eğer $X = \Re^n$, $Y = \Re^m$, $F : A \subset \Re^n \times \Re^m \to \Re^m$, $F_1, ..., F_n$ fonksiyonları F fonksiyonunun bileşenleri olsun. O zaman, $dF(z_0) : \Re^{n+m} \to \Re^m$ doğrusal dönüşümü, i bileşeni

$$(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) \to \sum_{j=1}^{n} x_j D_j F_i(z_0) + \sum_{k=1}^{m} y_k D_{n+k} F_i(z_0)$$

olan dönüşümdür. Bundan dolayı, $d_1 F(z_0) : \Re^n \to \Re^m$ ve $d_2 F(z_0) : \Re^m \to \Re^m$ biçimde doğrusal dönüşümlerdir. Ayrıca, $d_1 F(z_0)$ doğrusal dönüşümün i. bileşeni

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \to \sum_{j=1}^{n} x_j D_j F_i(z_0)$$

ve $d_2 F(z_0)$ dönüşümünün i. inci bileşeni

$$(y_1, y_2, ..., y_m) \to \sum_{k=1}^{m} y_k D_{n+k} F_i(z_0)$$

dönüşümleridir. Bu durumda, kapalı fonksiyon teoremindeki $d_2 F(z_0)$ dönüşümünün, $Y = \Re^m$ uzayından $Y = \Re^m$ uzayına doğrusal bir homeomorfizma olması koşulu,

$$\begin{pmatrix} D_{n+1}F_1(z_0) & \dots & D_{n+m}F_1(z_0) \\ D_{n+1}F_2(z_0) & \dots & D_{n+m}F_2(z_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{n+1}F_m(z_0) & \dots & D_{n+m}F_m(z_0) \end{pmatrix}$$

$m \times m$ boyutlu karesel matrisin, tekil olmayan matris olması ile denktir.

Örnek 8.3 $F(\cdot) : \Re^4 \to \Re^2$ *fonksiyonu*

$$F(x, y, u, v) = \left(u^3 + xv^2 + y, \quad v^3 + yv + u^2 - x\right)$$

olarak tanımlansın. $(x, y, u, v) = (1, 1, -1, 0) \in \Re^4$ *olsun. Açıktır ki,* $(x, y, u, v) = (1, 1, -1, 0) \in \Re^4$ *için* $F(x, y, u, v) = (0, 0)$ *olur.*

$$[f(x, y]^3 + x \cdot [g(x, y)]^2 + y = 0$$

$$[g(x, y]^3 + y \cdot g(x, y) + [f(x, y)]^2 - x = 0$$

eşitliklerini sağlayan $f(x, y)$ *ve* $g(x, y)$ *fonksiyonları için,*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} & \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(1,1)}{\partial x} & \frac{\partial g(1,1)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

matrisini bulunuz.

Çözüm: Açıktır ki,

$$d_2F(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} 3u^2 & 2vx \\ 2u & 3v^2 + y \end{pmatrix}$$

O zaman

$$d_2F(1, 1, -1, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

olur.

$$\det [d_2F(1, 1, -1, 0)] = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

olduğundan, kapalı fonksiyon teoremine (Teorem 8.1) göre

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} & \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(1,1)}{\partial x} & \frac{\partial g(1,1)}{\partial y} \end{pmatrix} = -d_2F(1, 1, -1, 0)^{-1} \circ d_1F(1, 1, -1, 0) \tag{9}$$

olur. Açıktır ki,

$$d_1F(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} v^2 & 1 \\ -1 & v \end{pmatrix}.$$

O halde,

$$d_1F(1, 1, -1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

olduğu bulunur. $\det[d_2F(1,1,-1,0)] = 3 \neq 0$ olduğundan, (8)'den

$$[d_2F(1,1,-1,0)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

olduğu elde edilir. Bu durumda, buradan, (9) ve (10)'dan

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} & \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(1,1)}{\partial x} & \frac{\partial g(1,1)}{\partial y} \end{pmatrix} = -d_2F(1,1,-1,0)^{-1} \circ d_1F(1,1,-1,0) =$$

$$= -\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

yani.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} & \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(1,1)}{\partial x} & \frac{\partial g(1,1)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

olduğu bulunur.

KAYNAKLAR

[1] AUBIN, J.P. ve CELLINA, A. *Differential Inclusions. Set Valued Maps and Viability Theory.* Springer Verlag, Berlin (1984).

[2] CLARKE, F.H., LEDYAYEV, Yu.S., STERN, R.J. ve WOLENSKI, P.R. *Nonsmooth Analysis and Control Theory.* Springer Verlag, New York (1998).

[3] DEIMLING, J.P. *Multivalued Differential Equations.* Walter de Gruyter, Berlin (1992).

[4] HU, S. ve PAPAGEORGIOU, N.S. *Handbook of Multivalued Analysis.* Vol.II. Theory. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands (2001).

[5] KRASOVSKII, N.N. ve SUBBOTIN, A.I. *Game-Theoretical Control Problems.* Springer Verlag, New York (1988).

[6] CLARKE, F.H. *Optimization and Nonsmooth Analysis.* Wiley Interscience, New York (1983).

[7] AUBIN, J.P. *Viability Theory.* Birkhauser, Boston (1991).

[8] AUBIN, J.P. ve FRANKOWSKA, H. *Set Valued Analysis.* Birkhauser, Boston (1990).

[9] HU, S. ve PAPAGEORGIOU, N.S. *Handbook of Multivalued Analysis.* Vol.I. Theory. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands (1997).

[10] BRAUN, A.L. ve PAGE, A. *Elements of Functional Analysis.* Van Nostrand Reinhold Co. New York (1970).

[11] FLETT, T.M. *Differential Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge London (1980).

[12] KOLMOGOROV, A.N. ve FOMIN, S.V. *Introductory Real Analysis.* Dover Publications, New York (1975).

[13] RIESZ, F. ve NAGY, B.Sz. *Lectures on Functional Analysis.* Mir, Moscow (1979).

[14] ÖZER, O. *İleri Analiz.* Bilim Yayınevi, Ankara (1996).

[15] ŞUHUBİ, S.E. *Fonksiyonel Analiz.* İstanbul Teknik Üniversitesi Vakfı, İstanbul (2001).

[16] TAYLOR, E.A. *Introduction to Functional Analysis.* John Wiley and Sons, New York (1958).