

164609

**POLİNOMLAR POLİTOPUNUN
HURWITZ VE SEKTÖR KARARLILIĞI**

Taner BÜYÜKKÖROĞLU
Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Ekim – 2002

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Taner Büyükköroğlu'nun Polinomlar Politopunun Hurwitz ve Sektör Kararlılığı başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki, Doktora tezi 06.11.2002 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç.Dr. Vakıf CAFEROV	
Üye	: Prof.Dr. Orhan ÖZER	
Üye	: Prof.Dr. Şahin KOÇAK	
Üye	: Prof.Dr. Atalay BARKANA	
Üye	: Doç.Dr. Halig HÜSEYİNOV	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 06.11.2002... tarih ve ...37/4..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Orhan ÖZER
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

POLİNOMLAR POLİTOPUNUN HURWITZ VE SEKTÖR KARARLILIĞI

TANER BÜYÜKKÖROĞLU

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Vakıf CAFEROV

2002, 92 Sayfa

Bu tezde, polinomlar politopunun Hurwitz ve sektör kararlılığı ele alınmıştır. Uç polinomları kararlı olan polinom segmentlerinin kararlılığı ve kararsızlığını test eden bir algoritma verilmiştir. Bu algoritma bir polinomik denklemin yaklaşık köklerinin bulunmasına dayalıdır. Tek ve çift katsayıları birbirinden bağımsız değişen polinomlar ailesinin kararlılığı için yeni bir kriter verilmiştir. Gerçel ve kompleks aralık polinomlar ailesinin sektör kararlılığı ele alınmıştır. Sektör kararlılığı test etmek için, uç polinomları veren bir algoritma verilmiştir. Bilindiği gibi, polinomlar politopunda tüm kenarlar kararlıysa polinomlar politopu da kararlıdır. Politopların gerçek kenarlarını belirlemek için yeni bir algoritma verilmiştir. Kompleks matrisler kümesinin Hurwitz kararlılığı araştırılmıştır. Ayrıca benzer sonuçların gerçel matrisler kümesi için geçerli olmadığı gösterilmiştir. Sonuçlarla ilgili çok sayıda açıklayıcı örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Kararlı Polinom, Konveks Kombinasyon, Polinomlar Politopu, Sektör Kararlılık, Kararlı Matrisler

ABSTRACT

PhD Thesis

THE HURWITZ AND SECTOR STABILITY OF THE POLYTOPE OF POLYNOMIALS

TANER BÜYÜKKÖROĞLU

Anadolu University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Vakıf CAFEROV

2002, 92 Pages

In this thesis, the Hurwitz stability and sector stability properties of the polynomial polytopes are considered. An algorithm for testing on stability-unstability of polynomial segments with stable end-points is given. The algorithm is based on approximate root of suitable polynomial equation. A new testing criterion for the stability of a family of polynomials with the even-odd uncoupling property is given. The sector stability of real interval and complex polynomial family are considered. An algorithm for testing the sector stability is given to find extreme polynomials. It is well known that if all exposed edges of a polynomial polytope is stable then the whole polytope is stable. An algorithm is given to find all exposed edges of polytopes. The Hurwitz stability properties of complex set of matrices are investigated. It is also shown that the similar results are not available in the case of real matrices. Results are illustrated by several examples.

Keywords : Stable Polynomial, Convex Combination, Polytope of Polynomials, Sector Stability, Stable Matrices

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen sayın Doç.Dr. Vakıf CAFEROV'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, ilgi ve desteğinden dolayı sayın Prof.Dr. Şahin KOÇAK'a da teşekkür ederim.

İçindekiler

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
SİMGELER DİZİNİ	vii
1 GİRİŞ	1
2 KARARLI POLİNOMLARIN KONVEKS KOMBİNASYONLARININ KARARLILIĞI	8
2.1 Konveks kombinasyonların kararlılığı için yeni bir algoritma . . .	8
2.2 Polinomlar segmenti ve Hurwitz kümesi	26
2.3 Kompleks katsayılı polinomların konveks kombinasyonlarının kararlılığı	33
3 TEK VE ÇİFT KATSAYILARI BİRBİRİNDEN BAĞIMSIZ DEĞİŞEN POLİNOMLAR AİLESİNİN KARARLILIĞI	41
4 SEKTÖR KARARLILIK	50
4.1 Sektör kararlılık için uç nokta teoremi	50
4.2 Görüntü kümesinin bulunması	51
4.3 Uç polinomların bulunması için bir algoritma	55
4.4 Kompleks aralık polinomların sektör kararlılığı	61
5 POLİNOMLAR POLİTOPUNDA KENARLARIN BULUNMASI	68
5.1 Polinomlar politopunda uçların belirlenmesi	68
5.2 Polinomlar politopunda kenarların belirlenmesi	73
6 MATRİSLERİN KONVEKS KÜMESİNİN KARARLILIĞI	79

6.1	Kompleks matrislerin konveks kümesinin kararlılığı	79
6.2	Gerçel matrisler kümesinin kararlılığı ile ilgili bir örnek	86
KAYNAKLAR		90

ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1	$0 \in \{L(j\omega_0, \lambda) : \lambda \in [0, 1]\}$	11
2.2	$a(j\omega)$ eğrisi	18
2.3	$m = 3$ ve $L(s, \lambda_1)$ kararlı, $L(s, \lambda_2)$ kararsız	32
3.1	Köşe noktaları z_1, z_2, z_3, z_4 olan, kenarları eksenlere paralel dikdörtgen	45
4.1	Paralel kenarın G_2 yönünde kaydırılışı	53
4.2	Benzer G kümeleri	54
4.3	E_v deki yarı doğruların yönleri	59
4.4	$\pm 1, \pm e^{j139^\circ}, \pm e^{j278^\circ}, \pm e^{j417^\circ}$ yönleri	61
4.5	$\pm 1, \pm e^{j90^\circ}, \pm e^{j110^\circ}, \pm e^{j200^\circ}, \pm e^{j220^\circ}, \pm e^{j310^\circ}$ yönleri	65
4.6	$\pm 1, \pm e^{j90^\circ}, \pm e^{j250^\circ}, \pm e^{j340^\circ}, \pm e^{j140^\circ}, \pm e^{j230^\circ}$ yönleri	66

SİMGELER DİZİNİ

$conv\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n\}$: $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ noktalarının konveks zarfı
P	: Politop
$L(s, \lambda)$: n . dereceden iki polinomun konveks kombinasyonu
L	: Polinomlar uzayında segment
$a^e(s)$: $a(s)$ polinomunun çift kısmı
$a^o(s)$: $a(s)$ polinomunun tekk kısmı
H_n	: n . dereceden kararlı polinomlara karşılık gelen vektörlerin kümesi
H_n^+	: n . dereceden pozitif katsayılı, kararlı polinomlara karşılık gelen vektörlerin kümesi
H_n^{+1}	: H_n^+ kümesinin monik polinomlara karşılık gelen altkümesi
B^{n+1}	: \mathbb{R}^{n+1} deki birim kutu (box)
V^{n+1}	: B^{n+1} in uç noktalarının kümesi
$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $n \times n$ tipindeki kompleks matrislerin kümesi

1 GİRİŞ

Lineer dinamik sistemler, Kontrol ve Kesikli sistemler teorilerinde polinom ve matrisin kararlılık problemlerinin araştırılması zorunluluğu ortaya çıkmaktadır. Ancak, birçok problemde parametreler belirsizlikler içerdiği için polinomlar ve matrisler ailesinin kararlılığı sözkonusu olmaktadır.

Bir

$$p(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n, (a_n \neq 0) \quad (1.1)$$

polinomu ve \mathbb{C} kompleks düzleminde D basit bağlantılı açık bölgesi verilsin. Eğer (1.1) polinomunun tüm kökleri D bölgesinde ise bu polinoma D -kararlı polinom denir. D özel bölgeler olduğunda, D -kararlılığa da özel isimler verilir. Öyle ki, eğer:

- D sol açık yarı düzlem ise D -kararlılığa Hurwitz kararlılık,
- D açık birim disk ise D -kararlılığa Schur kararlılık,
- $D = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{j\phi}, |\phi - \pi| < \theta_0, r > 0\}, (0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2})$ ise D -kararlılığa Sektör kararlılık,
- $D = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < -\sigma\}, (\sigma > 0)$ ise D -kararlılığa σ -kararlılık

denir.

Bu kararlılık kavramlarından en önemlisi ve en çok araştırılanı Hurwitz kararlılıktır. Bu doktora tezinde Hurwitz ve Sektör kararlılık problemleri ele alınmıştır.

Tez boyunca “Hurwitz kararlı” yerine “kararlı” deyimini kullanacağız.

Pek çok problemde (1.1) polinomunun katsayıları kesin olarak bilinmemekte, ancak bu katsayıların değişebileceği sınırlar bilinmektedir. Bu durumda (1.1) polinomu yerine

$$a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q})s + \dots + a_n(\mathbf{q})s^n \quad (1.2)$$

polinomlar ailesi ortaya çıkar. Burada \mathbf{q} vektörü belirsizlik vektörü olup, $Q \subset \mathbb{R}^l$ kümesinden alınır.

(1.2) ailesindeki tüm polinomlar D -kararlı ise (1.2) ailesine gürbüz (robust) D -kararlı aile denir.

a_i fonksiyonlarının \mathbf{q} ya bağımlılığı ve Q kümesinin özelliklerine göre farklı polinom aileleri ortaya çıkar.

Eğer

$$a_i(\mathbf{q}) = a_i(q_1, q_2, \dots, q_l) = q_i$$

ve Q kümesi \mathbb{R}^l de bir "kutu" (box) ise, yani

$$Q = \{(q_1, q_2, \dots, q_l) \in \mathbb{R}^l : \alpha_i \leq q_i \leq \beta_i, i = 1, 2, \dots, l\}$$

ise o zaman (1.2) ailesine aralık polinomlar ailesi denir.

Tanım 1.1 Eğer $Q \subset \mathbb{R}^l$ kümesi $\{\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, \dots, \mathbf{q}^k\}$ sonlu nokta kümesinin konveks zarfı, yani

$$Q = \text{conv}\{\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, \dots, \mathbf{q}^k\}$$

ise bu durumda Q ya \mathbb{R}^l uzayında bir politop denir.

Her (1.1) polinomuna $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vektörü karşılık getirirsek polinomlar politopunu, aynı dereceden polinomların konveks kombinasyonları kümesi olarak tanımlayabiliriz.

Tanım 1.2 $Q = \text{conv}\{\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, \dots, \mathbf{q}^k\} \subset \mathbb{R}^l$ politopu ve $\mathbf{q}^\alpha \in Q$ verilsin. Eğer

$$\mathbf{q}^\alpha = (1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$$

olacak biçimde $t \in (0, 1)$, $\mathbf{x} \in Q$ ve $\mathbf{y} \in Q$ bulunamıyor ise o zaman \mathbf{q}^α ya Q nun bir uç noktası denir.

Tanım 1.3 $Q = \text{conv}\{\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, \dots, \mathbf{q}^k\} \subset \mathbb{R}^l$ politopu verilsin. Q politopunun birbirinden farklı herhangi iki uç noktası \mathbf{q}^{i_1} , \mathbf{q}^{i_2} ($\mathbf{q}^{i_1} \neq \mathbf{q}^{i_2}$) olsun. \mathbf{q}^{i_1} ve \mathbf{q}^{i_2} yi birleştiren segment

$$E_{i_1, i_2} = \{\mathbf{q} \in Q : \mathbf{q} = (1 - \lambda)\mathbf{q}^{i_1} + \lambda\mathbf{q}^{i_2}, \lambda \in [0, 1]\}$$

olmak üzere eğer keyfi $\mathbf{q}^a, \mathbf{q}^b \in Q$, $\mathbf{q}^a, \mathbf{q}^b \notin E_{i_1, i_2}$ noktaları için

$$\{\mathbf{q} \in Q : \mathbf{q} = (1-t)\mathbf{q}^a + t\mathbf{q}^b, t \in [0, 1]\} \cap E_{i_1, i_2} = \emptyset$$

ise E_{i_1, i_2} segmentine Q politopunun bir kenarı denir.

Tanım 1.4 Eğer (1.2) ailesinde Q kümesi bir politop ve $a_i : Q \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları afin fonksiyonlar ise (1.2) ailesine afin polinomlar ailesi denir.

Tanım 1.5 $a : Q \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $a(q_1, q_2, \dots, q_l)$ fonksiyonu her $i = 1, 2, \dots, l$ için q_i dışındaki diğer bileşenler sabit olmak üzere q_i ye göre afin ise a fonksiyonuna multilineer fonksiyon denir.

Tanım 1.6 (1.2) ailesi verilsin. Eğer tüm a_i fonksiyonları multilineer ise (1.2) ailesine multilineer polinomlar ailesi denir.

(1.2) ailesinde sonsuz çoklukta polinom bulunmaktadır. Polinomlar ailesindeki polinomların kararlılığını tek tek kontrol etmek mümkün değildir. Bu nedenle tüm ailenin kararlılığının bazı alt ailelerin kararlılığından elde edilmesi oldukça önemlidir. Bu alt aileleri elde etmede sıfırı içermeme prensibi büyük rol oynamıştır. Sıfırı içermeme prensibi, derecesi sabit kalan ve katsayıları sürekli değişen

$$p(s, \mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q})s + \dots + a_n(\mathbf{q})s^n, \mathbf{q} \in Q \quad (1.3)$$

polinomun köklerinin parametreye göre sürekli değiştiğini ifade eden aşağıdaki teoreme dayanmaktadır ([1]).

Teorem 1.1 (1.3) ailesi invaryant dereceli ve $a_0(\mathbf{q}), a_1(\mathbf{q}), \dots, a_n(\mathbf{q})$ katsayı fonksiyonları $\mathbf{q} \in Q$ ya göre sürekli olsun. Bu durumda $p(s, \mathbf{q})$ nun kökleri de $\mathbf{q} \in Q$ ya göre süreklidir. Yani, öyle sürekli

$$s_i : Q \rightarrow \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, n$$

fonksiyonları vardır ki $s_1(\mathbf{q}), s_2(\mathbf{q}), \dots, s_n(\mathbf{q})$ kompleks sayıları $p(s, \mathbf{q})$ nun kökleridir.

Tanım 1.7 $D \subset \mathbb{C}$ açık kümesi ve $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı (sonlu veya sonsuz) verilsin. Eğer

$$\Phi_D : I \rightarrow \partial D$$

fonksiyonu sürekli ve örten ise yani, Φ_D sürekli ve her $z \in \partial D$ için $\Phi_D(\delta) = z$ olacak şekilde $\delta \in I$ varsa Φ_D fonksiyonuna D nin sınır süpüren fonksiyonu denir.

Tanım 1.8 $\mathcal{P} = \{p(\cdot, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$ polinomlar ailesi verilsin. Bir $\delta \in I$ için

$$p(\Phi_D(\delta), Q) = \{p(\Phi_D(\delta), \mathbf{q}) \in \mathbb{C} : \mathbf{q} \in Q\}$$

kümesine \mathcal{P} ailesinin $\delta \in I$ daki değer kümesi denir.

Teorem 1.2 (Sıfırı içermeme prensibi) $D \subset \mathbb{C}$ yol bağlantılı açık bir küme, $\mathcal{P} = \{p(\cdot, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$ invaryant dereceli polinomlar ailesi verilsin. Katsayı fonksiyonları $a_i(\mathbf{q})$ ($i = 0, 1, \dots, n$) sürekli ve ailede en az bir $p(s, \mathbf{q}^0)$ D -kararlı polinomu bulunsun. Bu durumda \mathcal{P} ailesinin gürbüz D -kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul her $\delta \in I$ için $0 \notin p(\Phi_D(\delta), Q)$ olmasıdır.

V. L. Kharitonov ([2]), aralık polinomlar ailesi için bir kararlılık teoremi vermiştir. Kharitonov teoremine göre, aralık polinomlar ailesinin gürbüz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul özel seçilmiş belirli dört polinomun kararlı olmasıdır. Kharitonov bu teoremi kompleks katsayılı aralık polinomları için de genelleştirmiştir ([3]).

Bu teorem polinomlar ailesinin kararlılığının araştırılmasında bir dönüm noktası olmuştur.

Afin polinom aileleri için uç nokta teoremleri geçersizdir. Yani Q nun tüm uç noktalarına karşılık gelen polinomlar D -kararlı olsa dahi afin polinomlar ailesi D -kararlı olmayabilir. Ancak bu tür aileler için kenar (edge) teoremi [4] geçerlidir.

Teorem 1.3 (Kenar Teoremi) $D \subset \mathbb{C}$ yol bağlantılı, açık küme ve $\Phi_D : I \rightarrow \mathbb{C}$ bu kümenin sınır süpüren fonksiyonu olsun. $\mathcal{P} = \{p(\cdot, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$

invariant dereceli polinomlar politopu verilsin. \mathcal{P} nin gürbüz D -kararlılığı için gerekli ve yeterli koşul Q nun bir kenarına karşılık gelen her bir \mathbf{q}^{i_1} ve \mathbf{q}^{i_2} uç noktaları çifti için

$$p_{i_1, i_2}(s, \lambda) = \lambda p(s, \mathbf{q}^{i_1}) + (1 - \lambda)p(s, \mathbf{q}^{i_2})$$

polinomunun her $\lambda \in [0, 1]$ için D -kararlı olmasıdır.

Multilineer polinomlar ailesi için, Q bir kutu olduğunda kenar teoremleri geçerli değildir. Yani Q nun kenarlarına karşılık gelen polinomlar segmenti D -kararlı olsa dahi tüm aile D -kararlı olmayabilir [5]. Ancak multilineer polinomlar ailesi için dönüşüm teoremi yardımıyla bir yeter koşul verilebilir.

Teorem 1.4 (Dönüşüm Teoremi, [5]) $Q \subset \mathbb{R}^l$ köşe noktaları $\{\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, \dots, \mathbf{q}^k\}$ olan bir kutu verilsin. $\mathcal{P} = \{p(\cdot, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$ invariant dereceli, multilineer polinomlar ailesi ve bu aileye ait en az bir $p(s, \mathbf{q}^0)$ polinomu D -kararlı olsun. Eğer her $z \in \partial D$ için

$$0 \notin \text{conv}\{p(z, \mathbf{q}^i) : i = 1, 2, \dots, k\}$$

ise \mathcal{P} multilineer polinomlar ailesi gürbüz D -kararlıdır.

A , $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. Eğer bu matrisin tüm öz değerleri kompleks düzlemin D açık bölgesinde ise bu matrise D -kararlı matris denir. Lyapunov kriterine göre A matrisinin kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$PA + A^T P < 0 \tag{1.4}$$

olacak şekilde P pozitif belirli matrisinin bulunmasıdır ([6]).

$p(s, \mathbf{q}) = q_0 + q_1 s + \dots + s^n$, monik polinomuna karşılık, karakteristik polinomu $p(s, \mathbf{q})$ olan

$$A(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -q_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -q_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -q_{n-1} \end{bmatrix}$$

matrisi tanımlanabilir. Bu matrise $p(s, \mathbf{q})$ nun kompanyon matrisi denir.

Matrisler ailesinin kararlılığı için de aralık matrisler, matrisler politopu, uç nokta, kenar kavramları benzer yolla tanımlanabilir. Genelde, matrisler politopu için kenar teoremleri geçersizdir.

Bu tez, birinci bölüm Giriş olmak üzere altı bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde, gerçel veya kompleks kararlı polinomların konveks kombinasyonlarının (segmentin) kararlılığı problemleri ele alınmıştır. Segmentin kararlılığı problemlerinin incelenmesi çok önemlidir, çünkü kenar teoremine göre polinomlar politopunun kararlılığı sonuçta o politopun kenarları olan sonlu tane segmentin kararlılığından elde edilmektedir. Bu bölümde Segmentin kararlılığının kontrolü için yeni bir algoritma verilmiştir. Bu algoritma bir tek polinomun yaklaşık köklerinin bulunmasına dayalıdır ve segmentin görüntü kümesinin uçlarının koordinatları için alt ve üst sınırlar vermektedir. Segmentin kararsız olması durumunda bu sınırlar segmentin Hurwitz bölgesinin sınırını kestiği değerlerin de yaklaşık olarak bulunmasına imkan verir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar [7-9] makale ve bildirilerinde sunulmuştur.

Üçüncü bölümde özel çeşit politop - tek ve çift kısımların oluşturduğu vektörlerin bağımsız politoplarda değiştiği bir polinomlar politopu ele alınmıştır. Bu çeşit aile için tüm uç noktaların kararlılığından ailenin kararlılığının çıktığı Rantzer'in "zayıf Kharitonov bölgesi" ile ilgili teoreminden elde edilmektedir. Ancak uç polinomların sayısı çok olabileceğinden burada uçlar kümesinin uygun alt kümesinin bulunması problemi ortaya çıkmaktadır. Üçüncü bölümde sayıyı azaltma problemi bir denklemin köklerinin bulunmasına dönüştürülmüştür.

Dördüncü bölümde aralık polinomlar ailesinin sektör kararlılığı problemleri ele alınmıştır. Gerçel, n . dereceden aralık polinomlar ailesinin sektör kararlılığı için $2(n+1)$ tane özel seçilmiş uç polinomun kararlılığının yeterli olduğu biliniyordu. Bu sonucun çok basit geometrik ispatı ve bu uç polinomların bulunması için bir algoritma verilmiştir. Bu algoritma, kompleks aralık polinomlar ailesine uygulanarak kararlılık için yeterli olan $8(n+1)$ tane uç polinom elde edilmiştir.

Polinomlar politopunda gerçek kenarların bilinmesi 3nemlidir. Polinomlar politopu bir $Q \subset \mathbb{R}^l$ politopunun afin d3nüşüm altında görüntüsü olarak, ya da sonlu tane polinomun konveks zarfı olarak verilmektedir. Ancak, Q politopunun kenarı polinomlar politopunun kenarına dönüşmeyebilir, veya politop sonlu tane polinomun konveks zarfıysa herhangi iki uç noktasını birleştiren segment kenar olmayabilir. Bir politopun gerçek uç noktalarının ve gerçek kenarlarının belirlenmesi problemleri beşinci bölümde ele alınmıştır. Bu problemin çözümü için doğrusal programlama yöntemi kullanılmaktadır.

Altıncı bölümde kompleks matrislerin konveks kümesi için [10] makalesinde verilen kriterler incelenmiştir. Bu kriterlerin kanıtı için kümedeğerli fonksiyonlar kullanılmaktadır. Bu bölümde gerçek matrislerin konveks kümesi için benzer kriterlerin doğru olmayacağına dair bir örnek verilmiştir. Bu örnekte ele alınan küme, sonlu tane kararlı monik polinomun kompanyon matrislerinin konveks zarfının oluşturduğu matrisler kümesidir.

2 KARARLI POLİNOMLARIN KONVEKS KOMBİNASYONLARININ KARARLILIĞI

Bu bölümde iki kararlı polinomun (gerçel veya kompleks) konveks kombinasyonlarının kararlı olup-olmadığını belirleyen yeni algoritmalar verilecektir. Bu algoritmalar belli bir polinom denkleminin yaklaşık köklerine dayalı olup, konveks kombinasyonların kararlılığında önemli olan tek ve çift kısımlar için alt ve üst sınırlar vermektedir.

2.1 Konveks kombinasyonların kararlılığı için yeni bir algoritma

Bu alt bölümde gerçel katsayılı, kararlı polinomların konveks kombinasyonlarının kararlılığını ele alacağız.

$$a(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \cdots + a_ns^n, \quad (2.1)$$

$$b(s) = b_0 + b_1s + b_2s^2 + \cdots + b_ns^n \quad (2.2)$$

gibi kararlı polinomlar verilsin. Bu polinomların konveks kombinasyonunu

$$L(s, \lambda) = (1 - \lambda)a(s) + \lambda b(s), \quad \lambda \in [0, 1] \quad (2.3)$$

ile gösterelim. Bundan böyle

$$L = \{L(s, \lambda) : \lambda \in [0, 1]\}$$

polinomlar ailesine segment diyeceğiz. Bilindiği gibi her $\lambda \in [0, 1]$ için $L(s, \lambda)$ polinomu kararlı ise segment gürbüz kararlıdır denir. Eğer bir $\lambda_* \in (0, 1)$ için $L(s, \lambda_*)$ polinomu kararsız ise segment kararsızdır denir.

Burada $a(s)$ ve $b(s)$ polinomlarının kararlılığı, bu polinomların konveks kombinasyonlarının kararlılığını garanti etmez.

$$p_1(s) = 0.57 + 6s + s^2 + 10s^3, \quad p_2(s) = 1.57 + 8s + 2s^2 + 10s^3$$

kararlı polinomları verilsin.

$$\frac{1}{2}p_1(s) + \frac{1}{2}p_2(s) = 1.07 + 7s + \frac{3}{2}s^2 + 10s^3$$

polinomu kararsızdır. Eğer

$$a(s) = p_1(s)(s+1)^{n-3}, \quad b(s) = p_2(s)(s+1)^{n-3}$$

gibi tanımlarsak $a(s)$ ve $b(s)$ n . dereceden kararlı polinomlardır. Ancak

$$\frac{1}{2}a(s) + \frac{1}{2}b(s) = \left(\frac{1}{2}p_1(s) + \frac{1}{2}p_2(s)\right)(s+1)^{n-3}$$

polinomu kararsızdır.

Genelliği bozmaksızın $a(s)$ ve $b(s)$ polinomlarının katsayılarının pozitif olduğunu kabul edelim. Eğer $a(s)$ polinomunun katsayıları ve $b(s)$ polinomunun katsayıları zıt işaretli ise bu durum konveks kombinasyonun kararsızlığını gerektirir.

Kararlı polinomların konveks kombinasyonunun kararlılığı ile ilgili pekçok sonuç elde edilmiştir [5,11-17]. Bialas [11] segmentin kararlı olması için $(H(a), a(s))$ polinomuna karşılık gelen Hurwitz matrisi olmak üzere $\det |H(a) + \lambda H(b)|$ fonksiyonunun pozitif gerçel köklerinin bulunmamasının gerekli ve yeterli olduğunu göstermiştir. Eğer $a(s)$ ve $b(s)$ polinomlarının çift (tek) kısımları aynı ise bu durumda segment kararlıdır [12]. Fu ve Barmish [15] kararlı bir polinom ya da matris için belli bir yönde kararlılığın korunması için maksimal sınırlar belirlemişlerdir. Bougherra, Chang ve ark. [13] beş tane polinomun pozitif gerçel köklerinin çözümünü temel alan bir algoritma vermiştir. Rantzer [16] $g(s) = a(s) - b(s)$ polinomunun büyüme koşulunu (growth condition) sağlaması durumunda konveks kombinasyonun kararlı olduğunu göstermiştir.

Bu bölümde segmentin kararlılığı ve kararsızlığını test eden bir algoritma vereceğiz. Bu algoritma, [13] deki algoritma gibi Segment Lemma [14] ya dayanmaktadır. Ancak [13] deki algoritma beş tane polinomun pozitif gerçel köklerinin bulunmasını temel alırken, bizim vereceğimiz algoritmada sadece bir polinomun pozitif gerçel yaklaşık köklerinin bulunması esas alınmıştır. Ayrıca segmentin kararsız olması durumunda algoritmamız diğer algoritmalarından farklı olarak bize segmentin bir uç noktasından diğer uç noktasına hareket

boyunca davranışını belirlememize olanak sağlar. Bu algoritma, mevcut konveks kombinasyon kararlılığı testlerine alternatif olarak kullanılabilir.

Burada $a(s)$ ve $b(s)$ polinomlarında $\omega > 0$ olmak üzere $s = j\omega$ yazıldığında

$$\begin{aligned} a(j\omega) &= (a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots) + j(a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots) \\ &= a^e(\omega) + ja^o(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(j\omega) &= (b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots) + j(b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - \dots) \\ &= b^e(\omega) + jb^o(\omega) \end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz.

Yardımcı Teorem 2.1 (Segment Lemma [14]) *Öyle $\lambda \in [0, 1]$ vardır ki*

$L(s, \lambda)$ polinomu $s = j\omega$ köke sahiptir \Leftrightarrow

$$a^e(\omega)b^o(\omega) - a^o(\omega)b^e(\omega) = 0 \quad (2.4)$$

$$a^e(\omega)b^e(\omega) \leq 0 \quad (2.5)$$

$$a^o(\omega)b^o(\omega) \leq 0 \quad (2.6)$$

sağlanır.

Bu yardımcı teoremde ifade edilen λ nın değeri

$$\lambda(\omega) = \frac{a^e(\omega)}{a^e(\omega) - b^e(\omega)} \quad \text{veya} \quad \lambda(\omega) = \frac{a^o(\omega)}{a^o(\omega) - b^o(\omega)} \quad (2.7)$$

şeklinde hesaplanabilir.

Denklem (2.4) ün pozitif gerçek (exact) kökleri ω_1^* , ω_2^* , \dots , ω_k^* bulunabilirse o zaman (2.5) ve (2.6) kontrol edilerek doğru parçasının kararlı veya kararsız olduğu belirlenebilir. Ancak bu gerçek kökleri bulmak hemen hemen olanaksızdır. Bu nedenle (2.4) denkleminin yaklaşık köklerini esas alan bir algoritma geliştireceğiz.

Öncelikle bunun için gerekli önermeleri ve sonra algoritmayı vereceğiz.

Aşağıdaki önermeler Yardımcı Teorem 2.1 in bir sonucudur.

Önerme 2.1 *$a(s)$ ve $b(s)$ n . dereceden kararlı polinomlar olsun. L polinomlar ailesi kararsızdır \Leftrightarrow (2.4) denkleminin öyle pozitif ω kökü vardır ki*

$$a^e(\omega)b^e(\omega) < 0 \quad (2.8)$$

$$a^\circ(\omega)b^\circ(\omega) < 0 \quad (2.9)$$

eşitsizliklerinden en az birisi sağlanır.

Kanıt. \Rightarrow). $\{L(s, \lambda) : \lambda \in [0, 1]\}$ kararsız olduğundan öyle $\omega_0 > 0$ ve öyle $\lambda_* \in (0, 1)$ vardır ki $L(s, \lambda_*)$ polinomu kararsızdır. Bu durumda öyle $\lambda_0 \in (0, 1)$ vardır ki $L(j\omega_0, \lambda_0) = 0$ dir.

Her $\omega > 0$ için $\{L(j\omega, \lambda) : \lambda \in [0, 1]\}$ kümesi kompleks düzlemde bir doğru parçasıdır. Diğer taraftan

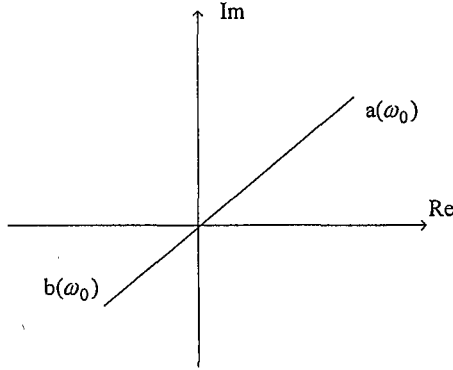
$$0 \in \{L(j\omega_0, \lambda) : \lambda \in [0, 1]\} \quad (2.10)$$

olması

$$\mathbf{a}(\omega_0) = (a^e(\omega_0), a^\circ(\omega_0))$$

$$\mathbf{b}(\omega_0) = (b^e(\omega_0), b^\circ(\omega_0))$$

vektörlerinin kolinearliğini ifade eder. Eğer Şekil 2.1 deki durum söz konusu ise



Şekil 2.1: $0 \in \{L(j\omega_0, \lambda) : \lambda \in [0, 1]\}$

hem (2.8) hem de (2.9) sağlanır.

Eğer $[\mathbf{a}(\omega_0), \mathbf{b}(\omega_0)]$ segmenti eksenlerin birisi üzerinde ise (2.8) ve (2.9) dan birisi sağlanır.

\Leftarrow). Denklem (2.4) ve (2.8), (2.9) dan birisi, diyelim ki (2.8) sağlansın. (2.4) koşulu $\mathbf{a}(\omega_0)$ ve $\mathbf{b}(\omega_0)$ vektörlerinin kolinearliğini ifade eder. (2.8) dikkate alınırsa $[\mathbf{a}(\omega_0), \mathbf{b}(\omega_0)]$ segmentinin orjinden geçtiğini söyleyebiliriz. Buna göre

(2.10) sağlanır. Yani L ailesinde $s = j\omega_0$ köke sahip bir polinom vardır ve buna göre aile kararsızdır. ■

Önerme 2.2 $a(s)$ ve $b(s)$ n . dereceden kararlı polinomlar olsun. L polinomlar ailesi kararlıdır \Leftrightarrow (2.4) denkleminin her bir gerçel $\omega > 0$ kökü için

$$a^e(\omega)b^e(\omega) > 0 \quad (2.11)$$

$$a^o(\omega)b^o(\omega) > 0 \quad (2.12)$$

eşitsizliklerinden en az birisi sağlanır.

Kanıt. \Rightarrow). Olmayana ergi yöntemini uygulayalım. (2.4) denkleminin bir $\omega > 0$ kökü için

$$a^e(\omega)b^e(\omega) \leq 0, \quad a^o(\omega)b^o(\omega) \leq 0$$

eşitsizlikleri sağlansın. Yardımcı Teorem 2.1 e göre öyle $\lambda \in (0, 1)$ vardır ki $L(s, \lambda)$ polinomu $s = j\omega$ köke sahiptir. Bu ise L ailesinin kararlılığı ile çelişir. \Leftarrow). Denklem (2.4) ün keyfi ω kökünü alalım. O zaman $\mathbf{a}(\omega)$ ve $\mathbf{b}(\omega)$ vektörleri kolineerdir. Diğer taraftan (2.11) veya (2.12) eşitsizliklerinden en az birisinin sağlanması $[\mathbf{a}(\omega), \mathbf{b}(\omega)]$ segmentinin orjinden geçmediğini ifade eder. Buna göre ailenin değer kümesi hiç bir ω için sıfırı içermez. Segmentin uç polinomları kararlı olduğundan, sıfırı içermeme prensibine göre aile kararlıdır. ■

Denklem (2.4) ün pozitif kökleri yok ise bu durumda segment kararlıdır. Bu nedenle (2.4) denkleminin en az bir pozitif kökünün olduğunu kabul edelim.

Denklem (2.4) ün birbirinden farklı pozitif yaklaşık kökleri $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ ve bu köklerin mutlak hatası ε olmak üzere, $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\omega_i - \varepsilon \leq \omega_i^* \leq \omega_i + \varepsilon \quad (2.13)$$

dir (ω_i^* m, (2.4) denkleminin gerçekte pozitif kökü olduğunu hatırlayalım). Ayrıca yeterince küçük ε için

$$0 < \omega_i - \varepsilon \quad (2.14)$$

tutulabilir. Bu bölüm boyunca (2.14) eşitsizliğinin sağlandığını kabul edeceğiz.

Şimdi aşağıdaki ifadeleri tanımlayalım

$$\begin{aligned}
\underline{a}^e(\omega_i) &= a_0 - a_2(\omega_i + \varepsilon)^2 + a_4(\omega_i - \varepsilon)^4 - a_6(\omega_i + \varepsilon)^6 + \dots \\
\bar{a}^e(\omega_i) &= a_0 - a_2(\omega_i - \varepsilon)^2 + a_4(\omega_i + \varepsilon)^4 - a_6(\omega_i - \varepsilon)^6 + \dots \\
\underline{b}^e(\omega_i) &= b_0 - b_2(\omega_i + \varepsilon)^2 + b_4(\omega_i - \varepsilon)^4 - b_6(\omega_i + \varepsilon)^6 + \dots \\
\bar{b}^e(\omega_i) &= b_0 - b_2(\omega_i - \varepsilon)^2 + b_4(\omega_i + \varepsilon)^4 - b_6(\omega_i - \varepsilon)^6 + \dots \quad (2.15) \\
\underline{a}^o(\omega_i) &= a_1(\omega_i - \varepsilon) - a_3(\omega_i + \varepsilon)^3 + a_5(\omega_i - \varepsilon)^5 - a_7(\omega_i + \varepsilon)^7 + \dots \\
\bar{a}^o(\omega_i) &= a_1(\omega_i + \varepsilon) - a_3(\omega_i - \varepsilon)^3 + a_5(\omega_i + \varepsilon)^5 - a_7(\omega_i - \varepsilon)^7 + \dots \\
\underline{b}^o(\omega_i) &= b_1(\omega_i - \varepsilon) - b_3(\omega_i + \varepsilon)^3 + b_5(\omega_i - \varepsilon)^5 - b_7(\omega_i + \varepsilon)^7 + \dots \\
\bar{b}^o(\omega_i) &= b_1(\omega_i + \varepsilon) - b_3(\omega_i - \varepsilon)^3 + b_5(\omega_i + \varepsilon)^5 - b_7(\omega_i - \varepsilon)^7 + \dots
\end{aligned}$$

Polinomların katsayılarının $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$ pozitifliği ve (2.13), (2.14) eşitsizliklerinden aşağıdaki eşitsizlikleri elde edebiliriz: her $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\underline{a}^e(\omega_i) \leq a^e(\omega_i^*) \leq \bar{a}^e(\omega_i) \quad (2.16)$$

$$\underline{b}^e(\omega_i) \leq b^e(\omega_i^*) \leq \bar{b}^e(\omega_i) \quad (2.17)$$

$$\underline{a}^o(\omega_i) \leq a^o(\omega_i^*) \leq \bar{a}^o(\omega_i) \quad (2.18)$$

$$\underline{b}^o(\omega_i) \leq b^o(\omega_i^*) \leq \bar{b}^o(\omega_i) \quad (2.19)$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \underline{a}^e(\omega_i) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \bar{a}^e(\omega_i) = a^e(\omega_i^*) \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \underline{b}^e(\omega_i) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \bar{b}^e(\omega_i) = b^e(\omega_i^*) \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \underline{a}^o(\omega_i) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \bar{a}^o(\omega_i) = a^o(\omega_i^*) \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \underline{b}^o(\omega_i) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \bar{b}^o(\omega_i) = b^o(\omega_i^*)
\end{aligned} \quad (2.20)$$

dir.

Aşağıda verilen Tablo 2.1 ve Tablo 2.2 yi ele alalım. Burada “+” ve “-” sembolleri karşılık geldikleri ifadenin işaretini belirtmektedir.

$\underline{a}^e(\omega_i)$	+			
$\bar{a}^e(\omega_i)$		-		
$\underline{b}^e(\omega_i)$	+			
$\bar{b}^e(\omega_i)$		-		
$\underline{a}^o(\omega_i)$			+	
$\bar{a}^o(\omega_i)$				-
$\underline{b}^o(\omega_i)$			+	
$\bar{b}^o(\omega_i)$				-

Tablo 2.1: Kararlılık Tablosu

$\underline{a}^e(\omega_i)$	+			
$\bar{a}^e(\omega_i)$		-		
$\underline{b}^e(\omega_i)$		+		
$\bar{b}^e(\omega_i)$	-			
$\underline{a}^o(\omega_i)$			+	
$\bar{a}^o(\omega_i)$				-
$\underline{b}^o(\omega_i)$				+
$\bar{b}^o(\omega_i)$			-	

Tablo 2.2: Kararsızlık Tablosu

Yaklaşık köklerin her birinin Tablo 2.1 veya Tablo 2.2 nin en az bir sütununu (aslında en fazla iki sütun gerçekleşebilir) gerçekleştirmesini garanti etmek için ε a bir üst sınır vereceğiz.

Öncelikle her $\omega > \omega_c$ için $\mathbf{a}(\omega) = (a^e(\omega), a^o(\omega))$ ve $\mathbf{b}(\omega) = (b^e(\omega), b^o(\omega))$ vektörleri kolinear olmayacak şekilde bir $\omega_c > 0$ tanımlayalım. Kolinearlik koşulu (2.4) denklemi ile verildiğinden ω_c olarak (2.4) denkleminin en büyük pozitif kökü olarak alınabilir. Sonuç olarak

$$0 \leq \omega \leq \omega_c \quad (2.21)$$

$$\omega + \varepsilon \leq \omega_c$$

kabul edilebilir. Yaklaşık köklerin bir i indisi için

$$\begin{aligned} D_1 &= a^e(\omega_i^*) - \underline{a}^e(\omega_i) & D_2 &= \bar{a}^e(\omega_i) - a^e(\omega_i^*) \\ D_3 &= a^o(\omega_i^*) - \underline{a}^o(\omega_i) & D_4 &= \bar{a}^o(\omega_i) - a^o(\omega_i^*) \\ D_5 &= b^e(\omega_i^*) - \underline{b}^e(\omega_i) & D_6 &= \bar{b}^e(\omega_i) - b^e(\omega_i^*) \\ D_7 &= b^o(\omega_i^*) - \underline{b}^o(\omega_i) & D_8 &= \bar{b}^o(\omega_i) - b^o(\omega_i^*) \end{aligned}$$

(ω_i^* ve ω_i , (2.13) ve (2.14) eşitsizliklerini sağlayan gerçek ve yaklaşık kök olduklarını hatırlayalım) ifadelerini tanımlayalım.

Doğrudan hesaplamalarla aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 2.3

$$\max\{a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n\} = M$$

$$\max \left\{ \frac{2\omega_c - (n+2)\omega_c^{n+1} + n\omega_c^{n+3}}{(1-\omega_c^2)^2}, \frac{1 + \omega_c^2 - (n+1)\omega_c^n + (n-1)\omega_c^{n+2}}{(1-\omega_c^2)^2} \right\} = K_1$$

$$\max \left\{ \frac{2\omega_c - (n+1)\omega_c^n + (n-1)\omega_c^{n+2}}{(1-\omega_c^2)^2}, \frac{1 + \omega_c^2 - (n+2)\omega_c^{n+1} + n\omega_c^{n+3}}{(1-\omega_c^2)^2} \right\} = K_2$$

olarak tanımlansın. Bu durumda her $p = 1, 2, \dots, 8$ ve her i için

$$\text{eğer } n \text{ çift ise} \quad 0 \leq D_p \leq 2MK_1\varepsilon$$

$$\text{eğer } n \text{ tek ise} \quad 0 \leq D_p \leq 2MK_2\varepsilon$$

dir.

Kanıt. n çift olsun. (2.15) de tanımlanan ifadelerden dolayı $0 \leq D_p$ ($p = 1, 2, \dots, 8$) olduğunu söyleyebiliriz. $p = 1$ ve herhangi bir i için

$$D_1 = a^e(\omega_i^*) - \underline{a}^e(\omega_i)$$

ifadesini ele alalım.

$$a^e(\omega_i^*) = a_0 - a_2\omega_i^{*2} + a_4\omega_i^{*4} - a_6\omega_i^{*6} + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} a_n\omega_i^{*n}$$

$$\underline{a}^e(\omega_i) = a_0 - a_2(\omega_i + \varepsilon)^2 + a_4(\omega_i - \varepsilon)^4 - a_6(\omega_i + \varepsilon)^6 + \dots$$

$$+ (-1)^{\frac{n}{2}} a_n(\omega_i + (-1)^{\frac{n}{2}+1}\varepsilon)^n$$

olduğundan

$$D_1 = a_2[(\omega_i + \varepsilon)^2 - \omega_i^{*2}] + a_4[\omega_i^{*4} - (\omega_i - \varepsilon)^4] + a_6[(\omega_i + \varepsilon)^6 - \omega_i^{*6}]$$

$$+ \dots + a_n(-1)^{\frac{n}{2}}[\omega_i^{*n} - (\omega_i + (-1)^{\frac{n}{2}+1}\varepsilon)^n]$$

dir. Parantez içerisindeki ifadeler düzenlendiğinde

$$D_1 = a_2[\omega_i + \varepsilon - \omega_i^*][\omega_i + \varepsilon + \omega_i^*] + a_4[\omega_i^* - \omega_i + \varepsilon][\omega_i^{*3} + \omega_i^{*2}(\omega_i - \varepsilon)$$

$$+ \omega_i^*(\omega_i - \varepsilon)^2 + (\omega_i - \varepsilon)^3] + a_6[\omega_i + \varepsilon - \omega_i^*][(\omega_i + \varepsilon)^5 + (\omega_i + \varepsilon)^4\omega_i^*$$

$$+ \dots + (\omega_i + \varepsilon)\omega_i^{*4} + \omega_i^{*5}] + \dots + a_n[(-1)^{\frac{n}{2}}\omega_i^* + (-1)^{\frac{n}{2}+1}\omega_i +$$

$$(-1)^{n+2}\varepsilon][\omega_i^{*n-1} + \omega_i^{*n-2}(\omega_i + (-1)^{\frac{n}{2}+1}\varepsilon) + \dots + (\omega_i + (-1)^{\frac{n}{2}+1}\varepsilon)^n]$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}\omega_i - \varepsilon &\leq \omega_i^* \leq \omega_i + \varepsilon \\ \omega_i + \varepsilon &\leq \omega_c\end{aligned}$$

eşitsizlikleri dikkate alınırsa

$$\omega_i - \omega_i^* \leq \varepsilon, \omega_i^* - \omega_i \leq \varepsilon \text{ ve } \omega_i^* \leq \omega_c$$

olduğu görülür. Bu eşitsizlikler yardımıyla

$$\begin{aligned}D_1 &\leq a_2(\varepsilon + \varepsilon)(\omega_c + \omega_c) + a_4(\varepsilon + \varepsilon)(\omega_c^3 + \omega_c^2\omega_c + \omega_c\omega_c^2 + \omega_c^3) + a_6(\varepsilon + \varepsilon)(\omega_c^5 \\ &\quad + \omega_c^4\omega_c + \dots + \omega_c\omega_c^4 + \omega_c^5) + \dots + a_n(\varepsilon + \varepsilon)(\omega_c^{n-1} + \omega_c^{n-2}\omega_c + \dots + \omega_c^{n-1}) \\ &= a_2 2\varepsilon 2\omega_c + a_4 2\varepsilon 4\omega_c^3 + a_6 2\varepsilon 6\omega_c^5 + \dots + a_n 2\varepsilon n\omega_c^{n-1} \\ &\leq 2\varepsilon M(2\omega_c + 4\omega_c^3 + 6\omega_c^5 + \dots + n\omega_c^{n-1}) \\ &= 2\varepsilon M(\omega_c^2 + \omega_c^4 + \omega_c^6 + \dots + \omega_c^n)' \\ &= 2\varepsilon M \left(\omega_c^2 \frac{1 - (\omega_c^2)^{\frac{n}{2}}}{1 - \omega_c^2} \right)' \\ &= 2\varepsilon M \frac{2\omega_c - (n+2)\omega_c^{n+1} + n\omega_c^{n+3}}{(1 - \omega_c^2)^2}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani

$$D_1 \leq 2\varepsilon M \frac{2\omega_c - (n+2)\omega_c^{n+1} + n\omega_c^{n+3}}{(1 - \omega_c^2)^2} \quad (2.22)$$

dir. D_2 , D_5 ve D_6 için de (2.22) nin sağlandığı benzer yolla gösterilebilir.

Diğer taraftan $p = 3$ ve herhangi i için

$$D_3 = a^o(\omega_i^*) - \underline{a}^o(\omega_i)$$

ifadesini ele alalım.

$$a^o(\omega_i^*) = a_1\omega_i^* - a_3\omega_i^{*3} + a_5\omega_i^{*5} - \dots + (-1)^{\frac{n+2}{2}} a_{n-1}\omega_i^{*n-1}$$

$$\begin{aligned}\underline{a}^o(\omega_i) &= a_1(\omega_i - \varepsilon) - a_3(\omega_i + \varepsilon)^3 + a_5(\omega_i - \varepsilon)^5 - \dots + \\ &\quad a_{n-1}(-1)^{\frac{n+2}{2}} (\omega_i + (-1)^{\frac{n}{2}}\varepsilon)^{n-1}\end{aligned}$$

olduğundan

$$D_3 = a_1(\omega_i^* - \omega_i + \varepsilon) + a_3[(\omega_i + \varepsilon)^3 - \omega_i^{*3}] + a_5[\omega_i^{*5} - (\omega_i - \varepsilon)^5] \\ + \dots + a_{n-1}(-1)^{\frac{n+2}{2}}[\omega_i^{*n-1} - (\omega_i + (-1)^{\frac{n}{2}}\varepsilon)^{n-1}]$$

dir. Benzer düzenlemeler ile

$$D_3 = a_1(\omega_i^* - \omega_i + \varepsilon) + a_3(\omega_i + \varepsilon - \omega_i^*)[(\omega_i + \varepsilon)^2 + (\omega_i + \varepsilon)\omega_i^* + \omega_i^{*2}] \\ + a_5(\omega_i^* - \omega_i + \varepsilon)[\omega_i^{*4} + \omega_i^{*3}(\omega_i - \varepsilon) + \omega_i^{*2}(\omega_i - \varepsilon)^2 + \omega_i^*(\omega_i - \varepsilon)^3 + \\ (\omega_i - \varepsilon)^4] + \dots + a_{n-1}[(-1)^{\frac{n+2}{2}}\omega_i^* + (-1)^{\frac{n+2}{2}+1}\omega_i + (-1)^{n+2}\varepsilon][\omega_i^{*n-2} + \\ \omega_i^{*n-3}(\omega_i + (-1)^{\frac{n}{2}}\varepsilon) + \dots + (\omega_i + (-1)^{\frac{n}{2}}\varepsilon)^{n-2}]$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikler yardımıyla

$$D_3 \leq a_1(\varepsilon + \varepsilon) + a_3(\varepsilon + \varepsilon)[\omega_c^2 + \omega_c\omega_c + \omega_c^2] + a_5(\varepsilon + \varepsilon)[\omega_c^4 + \omega_c^3\omega_c + \omega_c^2\omega_c^2 + \\ \omega_c\omega_c^3 + \omega_c^4] + \dots + a_{n-1}(\varepsilon + \varepsilon)[\omega_c^{n-2} + \omega_c^{n-3}\omega_c + \dots + \omega_c\omega_c^{n-3} + \omega_c^{n-2}] \\ = a_12\varepsilon + a_32\varepsilon3\omega_c^2 + a_52\varepsilon5\omega_c^4 + \dots + a_{n-1}2\varepsilon(n-1)\omega_c^{n-2} \\ = 2\varepsilon M(1 + 3\omega_c^2 + 5\omega_c^4 + \dots + (n-1)\omega_c^{n-2}) \\ = 2\varepsilon M(\omega_c + \omega_c^3 + \omega_c^5 + \dots + \omega_c^{n-1})' \\ = 2\varepsilon M \left(\omega_c \frac{1 - \omega_c^n}{1 - \omega_c^2} \right)' \\ = 2\varepsilon M \frac{1 + \omega_c^2 - (n+1)\omega_c^n + (n-1)\omega_c^{n+2}}{(1 - \omega_c^2)^2}$$

olduğu görülür. Dolayısı ile

$$D_3 \leq 2\varepsilon M \frac{1 + \omega_c^2 - (n+1)\omega_c^n + (n-1)\omega_c^{n+2}}{(1 - \omega_c^2)^2} \quad (2.23)$$

dir. D_4 , D_7 ve D_8 için de (2.23) ün sağlandığı benzer yolla gösterilebilir.

(2.22) ve (2.23) den istediğimiz eşitsizlikler çıkar. ■

Şimdi kararlı $a(s)$ (ve $b(s)$) polinomunun $a(j\omega)$ ($0 \leq \omega \leq \omega_c$) eğrisinin orjinden uzaklığı için bir alt sınır bulmaya çalışalım (bilindiği gibi ω , 0 dan $+\infty$ a değiştiğinde, $a(j\omega)$ eğrisi gerçel ve imajiner eksenleri sırayla saat yönünün tersi yönünde toplam n defa keser, [18]).

Bunun için t ,

$$\frac{\pi}{4}(t-1) < \arg a(j\omega_c) \leq \frac{\pi}{4}t$$

eşitsizliğini sağlayan bir doğal sayı, $\omega^0 = 0, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^t$ ise

$$\omega^1 < \omega^2 < \dots < \omega^t < \omega_c$$

ve

$$(q-1)\frac{\pi}{4} < \arg a(j\omega^q) \leq q\frac{\pi}{4} \quad (q = 1, 2, \dots, t)$$

eşitsizliklerini sağlayan gerçel sayılar olsun.

L_q ile $a(j\omega^{q-1})$ ile $a(j\omega^q)$ yi birleştiren doğru parçasını ve d_a^q ile L_q nun orjine olan uzaklığını gösterelim.

$$d_a = \min_q d_a^q$$

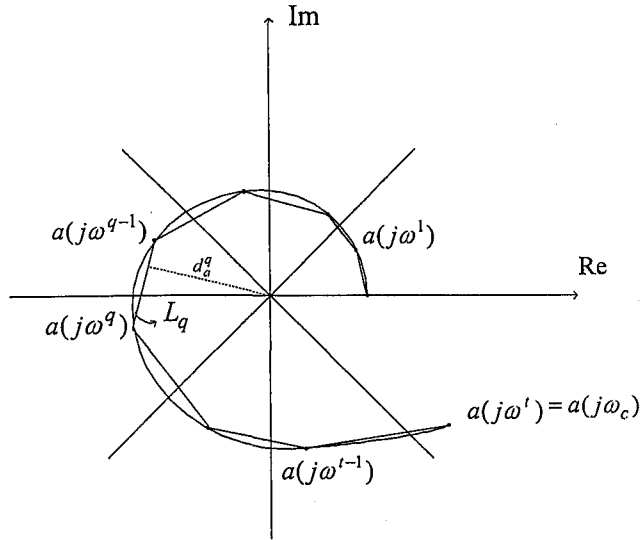
olsun, bu durumda yayın konveksliği teoremi [5] gereği

$$|a(j\omega)| \geq d_a \quad (0 \leq \omega \leq \omega_c)$$

dir. Benzer olarak

$$|b(j\omega)| \geq d_b \quad (0 \leq \omega \leq \omega_c)$$

olacak şekilde d_b seçilebilir.



Şekil 2.2: $a(j\omega)$ eğrisi

Önerme 2.4 İki boyutlu $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ ve $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ vektörleri kolinear ve $d > 0$ olmak üzere

$$\|\mathbf{a}\| \geq d, \quad \|\mathbf{b}\| \geq d$$

olsun. Bu durumda

1. $|a_1| \geq \frac{d}{\sqrt{2}}$ ve $|b_1| \geq \frac{d}{\sqrt{2}}$

veya

2. $|a_2| \geq \frac{d}{\sqrt{2}}$ ve $|b_2| \geq \frac{d}{\sqrt{2}}$

dir.

Kanıt. 1. ve 2. nin her ikisinde sağlanmadığını varsayalım.

Diyelim ki $|a_1| < \frac{d}{\sqrt{2}}$ ve $|b_2| < \frac{d}{\sqrt{2}}$ olsun. Burada $\|\mathbf{a}\| \geq d$ olduğundan

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 \geq d^2$$

dir ve buradan

$$|a_2|^2 \geq d^2 - |a_1|^2 > d^2 - \frac{d^2}{2} = \frac{d^2}{2} \Rightarrow |a_2| > \frac{d}{\sqrt{2}}$$

olur. Kolinearlığı kullanırsak $|b_2| > \frac{d}{\sqrt{2}}$ elde ederiz. Bu ise $|b_2| < \frac{d}{\sqrt{2}}$ olmasıyla çelişir.

Eğer

$$|a_1| < \frac{d}{\sqrt{2}} \text{ ve } |a_2| < \frac{d}{\sqrt{2}}$$

olduğu varsayılırsa bu durum $\|\mathbf{a}\| \geq d$ olmasıyla çelişir.

Diğer taraftan

$$|b_1| < \frac{d}{\sqrt{2}} \text{ ve } |a_2| < \frac{d}{\sqrt{2}}$$

ile

$$|a_1| < \frac{d}{\sqrt{2}} \text{ ve } |a_2| < \frac{d}{\sqrt{2}}$$

durumlarının gerçekleşmeyeceği de benzer şekilde gösterilebilir. Dolayısı ile 1. ve 2. nin her ikisinin de sağlanmadığı varsayımı hatalıdır. Sonuç olarak 1. ve 2. iddialarının en az birisi gerçekleşir. ■

Önerme 2.5 $d = \min \{d_a, d_b\}$ ve pozitif ε sayısı

$$\begin{aligned} \text{eğer } n \text{ çift ise } \quad \varepsilon &< \frac{d}{2\sqrt{2}MK_1} \\ \text{eğer } n \text{ tek ise } \quad \varepsilon &< \frac{d}{2\sqrt{2}MK_2} \end{aligned} \quad (2.24)$$

olacak şekilde seçilmiş olsun. Bu durumda her bir ω_i için Tablo 2.1 veya Tablo 2.2 nin en az bir sütunu gerçekleşir.

Kanıt. (2.4) denkleminin keyfi ω_i yaklaşık kökünü alalım. (2.24) eşitsizliği ve Önerme 2.3 den

$$0 \leq D_p < \frac{d}{\sqrt{2}} \quad (p = 1, 2, \dots, 8) \quad (2.25)$$

dir. (2.4) denklemini kolineerliği ifade ettiğinden $\mathbf{a}(\omega_i^*)$ ve $\mathbf{b}(\omega_i^*)$ vektörleri kolineerdir. Diğer taraftan d nin seçimine göre

$$\|\mathbf{a}(\omega_i^*)\| \geq d \text{ ve } \|\mathbf{b}(\omega_i^*)\| \geq d$$

dir. Önerme 2.4 ve (2.25) eşitsizliğine göre

$$|a^e(\omega_i^*)| \geq \frac{d}{\sqrt{2}} \text{ ve } |b^e(\omega_i^*)| \geq \frac{d}{\sqrt{2}}$$

dir. Buradan da $\bar{a}^e(\omega_i)$, $\underline{a}^e(\omega_i)$ ile $a^e(\omega_i^*)$ nin işaretleri ve $\bar{b}^e(\omega_i)$, $\underline{b}^e(\omega_i)$ ile $b^e(\omega_i^*)$ nin işaretlerinin aynı olması elde edilir.

Eğer ω_i^* için $[\mathbf{a}(\omega_i^*), \mathbf{b}(\omega_i^*)]$ segmenti orjinden geçmiyorsa Tablo 2.1 den en az bir sütun gerçekleşir.

Eğer ω_i^* için $[\mathbf{a}(\omega_i^*), \mathbf{b}(\omega_i^*)]$ segmenti orjinden geçiyorsa Tablo 2.2 den en az bir sütun gerçekleşir. ■

Pozitif ε sayısı (2.24) eşitsizliğini sağlıyorsa

$$0 \leq D_p < \frac{d}{\sqrt{2}}, \quad (p = 1, 2, \dots, 8) \quad (2.26)$$

olur.

Önerme 2.6 ε , (2.24) eşitsizliğini sağlayan pozitif bir sayı olsun. Bu durumda

1. L segmenti kararlıdır \Leftrightarrow her $i = 1, 2, 3, \dots, k$ için Tablo 2.1 in en az bir sütunu gerçekleşir.

2. L segmenti kararsızdır \Leftrightarrow öyle bir i vardır ki Tablo 2.2 nin en az bir sütunu gerçekleşir.

Kanıt. 1. \Rightarrow). Kabul edelim ki segment kararlı olsun. Her $i = 1, 2, \dots, k$ için $\mathbf{a}(\omega_i^*) = (a^e(\omega_i^*), a^o(\omega_i^*))$ ve $\mathbf{b}(\omega_i^*) = (b^e(\omega_i^*), b^o(\omega_i^*))$ vektörleri kolineerdir. Diyelim ki Önerme 2.4 ün 1. iddiası gerçekleşsin:

$$|a^e(\omega_i^*)| \geq \frac{d}{\sqrt{2}}, \quad |b^e(\omega_i^*)| \geq \frac{d}{\sqrt{2}}. \quad (2.27)$$

Segment kararlı olduğundan $a^e(\omega_i^*)$ ve $b^e(\omega_i^*)$ aynı işaretlidir ve (2.26), (2.27) deki eşitsizliklerden dolayı Tablo 2.1 in en az bir sütunu gerçekleşir.

\Leftarrow). (2.16)-(2.19) dan dolayı her $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$a^e(\omega_i^*)b^e(\omega_i^*) > 0 \quad (2.28)$$

$$a^o(\omega_i^*)b^o(\omega_i^*) > 0 \quad (2.29)$$

eşitsizliklerinden en az birisinin sağlandığını söyleyebiliriz. Eğer (2.28) sağlanıyorsa (2.4) denkleminde dolayı $a^o(\omega_i^*)b^o(\omega_i^*) \geq 0$ dır. Eğer (2.29) sağlanıyorsa yine (2.4) denkleminde dolayı $a^e(\omega_i^*)b^e(\omega_i^*) \geq 0$ dir. Her iki durumda da Önerme 2.2 ye göre segment kararlıdır.

2. \Rightarrow). Kabul edelim ki segment kararsız olsun. Önerme 2.1 ve Önerme 2.4 e göre

$$a^e(\omega_i^*)b^e(\omega_i^*) < 0 \text{ ve } |a^e(\omega_i^*)| \geq \frac{d}{\sqrt{2}}, \quad |b^e(\omega_i^*)| \geq \frac{d}{\sqrt{2}}$$

veya

$$a^o(\omega_i^*)b^o(\omega_i^*) < 0 \text{ ve } |a^o(\omega_i^*)| \geq \frac{d}{\sqrt{2}}, \quad |b^o(\omega_i^*)| \geq \frac{d}{\sqrt{2}}$$

olacak şekilde bir i vardır. (2.26) eşitsizliğinden dolayı Tablo 2.2 nin en az bir sütunu gerçekleşir.

\Leftarrow). Önerme 2.1 ve (2.16)-(2.19) eşitsizlikleri kullanılarak gösterilebilir. ■

Kabul edelim ki segment kararsız olsun. Bu durumda Önerme 2.6 ya göre öyle bir i vardır ki Tablo 2.2 nin en az bir sütunu gerçekleşir. Bu i ye karşılık (2.7) formülündeki λ nın değeri için $L(s, \lambda(\omega_i^*))$ polinomu $s = j\omega_i^*$ köke sahiptir. Burada

$$\lambda(\omega_i^*) = \frac{a^e(\omega_i^*)}{a^e(\omega_i^*) - b^e(\omega_i^*)} \text{ veya } \lambda(\omega_i^*) = \frac{a^o(\omega_i^*)}{a^o(\omega_i^*) - b^o(\omega_i^*)}$$

dir (ω_i^* , (2.4) denkleminin gerçek köküdür).

Önerme 2.7 $[a, b], [c, d]$ tamamen negatif veya pozitif gerçel ekseninde bulunan aralıklar ve $bd < 0$ olsun.

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x}{x - y}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

1. Eğer $b > a > 0, c < d < 0$ ise $f(x, y)$ minimum değerini $x = a, y = c$ ve maksimum değerini $x = b, y = d$ noktalarında alır.
2. Eğer $d > c > 0, a < b < 0$ ise $f(x, y)$ minimum değerini $x = b, y = d$ ve maksimum değerini $x = a, y = c$ noktalarında alır.

Kanıt. $f(x, y)$ nin kısmi türevleri:

$$f_x(x, y) = -\frac{y}{(x - y)^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{x}{(x - y)^2}$$

dir. İki değişkenli fonksiyonlar için ortalama değer teoremine göre (x_1, y_1) ile (x_2, y_2) noktalarını birleştiren doğru parçası üzerinde bir (ξ_1, ξ_2) noktası vardır ki

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = f_x(\xi_1, \xi_2)(x_2 - x_1) + f_y(\xi_1, \xi_2)(y_2 - y_1)$$

sağlanır.

1. durum için

$$f(x, y) - f(a, c) = f_x(\xi_1, \xi_2)(x - a) + f_y(\xi_1, \xi_2)(y - c) > 0$$

$$f(x, y) - f(b, d) = f_x(\eta_1, \eta_2)(x - b) + f_y(\eta_1, \eta_2)(x - d) < 0$$

olduğu görülür.

2. durum da benzer yolla incelenir. ■

(2.16)-(2.19) eşitsizlikleri ve Önerme 2.7 gözönüne alınırsa aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 2.8 Tablo 2.2 nin sütunlarından en az birisinin gerçekleştiği indis i olsun. Bu durumda

Eğer Tablo 2.2 nin 1. sütunu gerçekleşiyor ise $\lambda(\omega_i^*) \in \left[\frac{a^e(\omega_i)}{a^e(\omega_i) - b^e(\omega_i)}, \frac{\bar{a}^e(\omega_i)}{\bar{a}^e(\omega_i) - \bar{b}^e(\omega_i)} \right]$

Eğer 2. sütun gerçekleşiyor ise $\lambda(\omega_i^*) \in \left[\frac{\bar{a}^e(\omega_i)}{\bar{a}^e(\omega_i) - \bar{b}^e(\omega_i)}, \frac{a^e(\omega_i)}{a^e(\omega_i) - b^e(\omega_i)} \right]$

Eğer 3. sütun gerçekleşiyor ise $\lambda(\omega_i^*) \in \left[\frac{a^o(\omega_i)}{a^o(\omega_i) - b^o(\omega_i)}, \frac{\bar{a}^o(\omega_i)}{\bar{a}^o(\omega_i) - \bar{b}^o(\omega_i)} \right]$

Eğer 4. sütun gerçekleşiyor ise $\lambda(\omega_i^*) \in \left[\frac{\bar{a}^o(\omega_i)}{\bar{a}^o(\omega_i) - \bar{b}^o(\omega_i)}, \frac{a^o(\omega_i)}{a^o(\omega_i) - b^o(\omega_i)} \right]$

Yukarıdaki aralıklar ε a bağlıdır ve uzunlukları yeterince küçüktür. Bu nedenle bu aralıklar $\lambda(\omega_i^*)$ ın yaklaşık değerlerini ve bu değerlerin hatasını verir.

Segmentin kararsız olması durumunda Önerme 2.8, $s = j\omega$ köküne sahip $L(s, \lambda)$ polinomunu veren tüm λ ların yaklaşık değerlerini ve bu değerlerin hatalarını hesaplayabilmemizi sağlar.

Kabul edelim ki ε , (2.24) eşitsizliğini sağlayan keyfi pozitif bir sayı olsun. Bu durumda her bir ω_i kökü için Tablo 2.1 veya Tablo 2.2 nin en az bir sütunu geçekleşir. Tablo 2.2 nin en az bir sütununun gerçekleştiği i indislerinin kümesini $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ ile gösterelim. Önerme 2.8 e göre her bir $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ ye $\lambda(\omega_i^*)$ gerçek değerini bulunduran en az bir $[\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i]$ aralığı karşılık gelir. Eğer bir i indisi için Tablo 2.2 nin birden fazla sütunu gerçekleşiyorsa bu indise birden fazla aralık karşılık gelir. Bu durumda bu aralıkların arakesitleri alınmalıdır (bu aralıklar $\lambda(\omega_i^*)$ yi bulundurduklarından arakesitleri boş kümeden farklıdır). Böylece verilen bir ε ve her bir $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ ye bir tek $[\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i]$ aralığı karşılık gelir.

Kabul edelim ki bu aralıklar birbirleriyle kesişmesin (bu durum $L(s, \lambda)$ nin $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$ olmak üzere farklı iki $s = j\omega_1, s = j\omega_2$ kökü olmamasına karşılık gelir) ve artma biçiminde sıralanmış olsun. Bu aralıklardan keyfi

$$\lambda_1 \in (\bar{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2), \lambda_2 \in (\bar{\lambda}_2, \underline{\lambda}_3), \dots, \lambda_{m-1} \in (\bar{\lambda}_{m-1}, \underline{\lambda}_m)$$

seçilir ve $L(s, \lambda_1), L(s, \lambda_2), \dots, L(s, \lambda_{m-1})$ polinomlarının kararlı veya kararsız oldukları kontrol edilir. Sonra ise segmentin davranışı belirlenebilir (sonraki alt bölüme bakınız).

Algoritma 1.1

- 1) $a(s)$ ve $b(s)$ polinomları için (2.4) denklemi yazılır.
- 2) Eğer (2.4) denkleminin pozitif gerçel kökü yok ise segment kararlıdır. Kabul edelim ki (2.4) denkleminin en az bir pozitif gerçel kökü olsun. Bu durumda (2.24) eşitsizliğini sağlayan uygun bir ε sayısı seçilir. (2.4) denkleminin birbirinden farklı tüm $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ yaklaşık pozitif kökleri ve mutlak hataları bulunur.

- 3) Her $i = 1, 2, \dots, k$ için (2.15) deki ifadeler hesaplanır. Eğer her ω_i için Tablo 2.1 in en az bir sütunu gerçekleşiyor ise segment kararlıdır. Eğer Tablo 2.2 nin en az bir sütununun gerçekleştiği öyle bir ω_i varsa bu durumda segment kararsızdır.
- 4) Kabul edelim ki segment kararsız ve $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ kümesi Tablo 2.2 nin en az bir sütununun gerçekleştiği i ler olsun (ε nun seçiminden dolayı Tablo 2.1 veya Tablo 2.2 nin en az bir sütunu gerçekleşir). Her bir $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ için $\lambda(\omega_i^*)$ yi bulunduran $[\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i]$ aralıkları hesaplanır. Kabul edelim ki bu aralıklar ayırık ve artan sırada yazılmış olsun.
- 5) Keyfi $\lambda_1 \in (\bar{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2)$, $\lambda_2 \in (\bar{\lambda}_2, \underline{\lambda}_3)$, \dots , $\lambda_{m-1} \in (\bar{\lambda}_{m-1}, \underline{\lambda}_m)$ seçip $L(s, \lambda_1)$, $L(s, \lambda_2)$, \dots , $L(s, \lambda_{m-1})$ polinomlarının kararlı veya kararsız olduğu kontrol edilir. Buradan segmentin davranışı belirlenebilir.

Şimdi birkaç açıklayıcı örnek verelim.

Örnek 2.1

$$\begin{aligned} a(s) &= 2 + 8s + 13s^2 + 6s^3 + 5s^4 + s^5 \\ b(s) &= 1 + 4s + 5s^2 + 5s^3 + 3s^4 + s^5 \end{aligned}$$

polinomları verilsin. (2.4) denklemi

$$2\omega^9 - 15\omega^7 + 32\omega^5 - 16\omega^3 = 0$$

denklemine dönüşür ve üç tane pozitif köke sahiptir;

$$\begin{aligned} \omega_1^* &= 2 \\ \omega_2^* &= 0.848070512... \\ \omega_3^* &= 1.667566013... \end{aligned}$$

Buradan $\omega_c = 2$ alınabilir. Basit hesaplamalar sonucunda

$$M = 13, K_2 = 93, d = \frac{1}{\sqrt{2}}, \varepsilon < 0.0002$$

olarak bulunur. (2.24) e uygun olarak $\varepsilon = 0.0001$ alınabilir. Bu ε değeri için yaklaşık kökler

$$\omega_1 = 2, \omega_2 = 0.8480, \omega_3 = 1.6675$$

dir.

(2.15) deki ifadeler hesaplandığında; ω_1 için Tablo 2.1 in 1. sütunu, ω_2 için Tablo 2.1 in 2. ve 3. sütunu ve ω_3 için Tablo 2.1 in 1. ve 4. sütununun gerçekleştiği görülür. Bu nedenle segment kararlıdır.

Örnek 2.2

$$\begin{aligned} a(s) &= 3 + s + 5s^2 + s^3 + s^4 \\ b(s) &= 1 + 2s + 3s^2 + 5s^3 + s^4 \end{aligned}$$

polinomlarını ele alalım. (2.4) denklemi

$$4\omega^7 - 23\omega^5 + 21\omega^3 - 5\omega = 0$$

olur ve üç tane pozitif köke sahiptir;

$$\begin{aligned} \omega_1^* &= 0.6367324701... \\ \omega_2^* &= 0.8110794934... \\ \omega_3^* &= 2.164883788... \end{aligned}$$

Burada $\omega_c = 2.5$ alınabilir. Hesaplamalar sonucu

$$\begin{aligned} M &= 5, K_2 = 67.5, \\ d_a &= 0.03270685678 \text{ (} a(j\omega) \text{ nın orijine olan uzaklığı),} \\ d_b &= 0.2461069279 \text{ (} b(j\omega) \text{ nın orijine olan uzaklığı)} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$d = \min\{d_a, d_b\} = 0.03270685678$$

dir. (2.24) eşitsizliğinden $\varepsilon < 0.0000342... olmalıdır$. Dolayısı ile $\varepsilon = 0.00001$ alınabilir. Bu ε için yaklaşık kökler

$$\omega_1 = 0.63673, \omega_2 = 0.81107, \omega_3 = 2.16488$$

dir. (2.15) deki ifadeler hesaplandıktan sonra ω_3 için Tablo 2.1 in 1. ve 4. sütununun gerçekleştiğini görürüz. Diğer taraftan ω_2 ve ω_3 için Tablo 2.2 nin 1. ve 3. sütunu gerçekleşir. Önerme 2.8 kullanılarak

$$[\underline{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1] = [0.209661605, 0.209941126]$$

$$[\underline{\lambda}_2, \bar{\lambda}_2] = [0.9563087719, 0.956392263]$$

elde edilir. $\lambda = 0.5$ için konveks kombinasyon $L(s, \lambda) = (1 - \lambda)a(s) + \lambda b(s)$ kararsızdır. Bundan dolayı segment kararsızdır. Ayrıca bir $\lambda \in [\underline{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1]$ ve bir $\lambda \in [\underline{\lambda}_2, \bar{\lambda}_2]$ için $L(s, \lambda)$ polinomu $j\omega$ köke sahiptir.

2.2 Polinomlar segmenti ve Hurwitz kümesi

Bu alt bölümde, bir önceki alt bölümde konveks kombinasyonların kararlılığını incelemek için verdiğimiz algoritmanın parametrik uzayda kararlı polinomlara karşı gelen Hurwitz kümesinin geometrisiyle ilgili ortaya çıkardığı bazı sonuçlar ele alınacaktır.

$$a(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n$$

polinomuna $(n + 1)$ boyutlu

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

katsayı vektörü karşılık getirebiliriz. Hurwitz kararlı n . dereceden $a(s)$ polinomlarına karşılık gelen vektörlerin oluşturduğu alt küme H_n ile gösterilir. Bu durumda kenar teoremi şu şekilde ifade edilebilir:

Teorem 2.1 \mathbb{R}^{n+1} uzayında $x_{n+1} = 0$ hiperdüzlemiyle kesişmeyen bir politop verilsin. Eğer bu politopun kenarları H_n ye dahilse tüm politop da H_n ye dahildir.

Hurwitz kararlılık için gerekli koşulun tüm katsayıların aynı işaretli olması olduğunu dikkate alırsak herhangi bir $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ vektörü H_n de ise tüm i ler için $a_i > 0$ veya tüm i ler için $a_i < 0$ sağlanmaktadır.

H_n kümesi orjine göre simetrik olan iki kümenin birleşimidir ve bunlardan pozitif koordinatlı bölgede bulunanına H_n^+ diyelim:

$$H_n^+ = \{(a_0, a_1, \dots, a_n) \in H_n, a_i > 0, i = 0, 1, \dots, n\}.$$

H_n^+ kümesinin monik polinomlara karşılık gelen alt kümesi ise H_n^{1+} olsun:

$$H_n^{1+} = \{(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 1) \in H_n^+\}.$$

Kararlı polinomlar kümesi açık olduğundan H_n^+ kümesi de açıktır.

Bir $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ ($a_i > 0$) vektörü verilsin. O zaman şunları söyleyebiliriz.

1. $\mathbf{a} \in H_n^+ \Leftrightarrow a(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n$ polinomu kararlıdır.
2. $\mathbf{a} \in \partial H_n^+$ (H_n^+ nın sınırı) $\Leftrightarrow a(s)$ polinomunun s_1, s_2, \dots, s_n kökleri aşağıdaki özelliğe sahiptir:
 - (a) $\text{Re } s_i \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)
 - (b) Öyle s_i vardır ki $\text{Re } s_i = 0$ dır
3. \mathbf{a} vektörü H_n^+ nın dış noktasıdır \Leftrightarrow öyle s_i kökü vardır ki $\text{Re } s_i > 0$ dır

Teorem 2.2 $H_n^+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kümesi açık, büzülebilir, basit bağlantılı bir konidir. H_n^{1+} kümesi de açık, contractable ve basit bağlantılıdır.

İkinci dereceden bir polinomun kararlılığı için gerekli ve yeterli koşul katsayıların aynı işaretli olmasıdır. Bunu ve 2.1 alt bölümündeki örneği dikkate alırsak aşağıdakileri söyleyebiliriz:

1. H_2^+ kümesi konvekstir.
2. Her $n > 2$ için H_n^+ kümesi konveks değildir.

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H_n^+$ alalım. Bu iki vektörün konveks kombinasyonlarının kümesi

$$L = \{(1 - \lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

olsun.

Bu L segmentinin, bir uç noktasından diğer uç noktasına hareket zamanı özelliklerini araştıracağız.

$a(s)$ ve $b(s)$ polinomlarında $\omega > 0$ ve $t = \omega^2$ olmak üzere $s = j\omega$ yazılırsa

$$\begin{aligned} a(j\omega) &= (a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots) + j\omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \dots) \\ &= a^e(\omega^2) + j\omega a^o(\omega^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(j\omega) &= (b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots) + j\omega(b_1 - b_3\omega^2 + b_5\omega^4 - \dots) \\ &= b^e(\omega^2) + j\omega b^o(\omega^2) \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} a^e(t) &= a_0 - a_2t + a_4t^2 - \dots \\ a^o(t) &= a_1 - a_3t + a_5t^2 - \dots \\ b^e(t) &= b_0 - b_2t + b_4t^2 - \dots \\ b^o(t) &= b_1 - b_3t + b_5t^2 - \dots \end{aligned}$$

gösterelim ve

$$a^e(t)b^o(t) - a^o(t)b^e(t) = 0 \quad (2.30)$$

denklemini ele alalım.

Önerme 2.9 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H_n^+$ olsun. $L \subset H_n^+ \Leftrightarrow (2.30)$ denklemini sağlayan tüm pozitif t ler için

$$a^e(t)b^e(t) > 0 \quad (2.31)$$

$$a^o(t)b^o(t) > 0 \quad (2.32)$$

eşitsizliklerinden en az birisi sağlanır.

Önerme 2.10 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H_n^+$ olsun. $L \not\subset H_n^+ \Leftrightarrow (2.30)$ denkleminin öyle pozitif t kökü vardır ki

$$a^e(t)b^e(t) < 0 \quad (2.33)$$

$$a^o(t)b^o(t) < 0 \quad (2.34)$$

eşitsizliklerinden en az birisi sağlanır.

Önerme 2.9 un kanıtı. \Rightarrow). $L \subset H_n^+$ ve $t_* = \omega_*^2$ (2.30) denkleminin pozitif bir kökü olsun. Bu durumda $(a^e(\omega_*^2), \omega_* a^o(\omega_*^2))$ ve $(b^e(\omega_*^2), \omega_* b^o(\omega_*^2))$ vektörleri kolineerdir ve

$$L(s, \lambda) = (1 - \lambda)a(s) + \lambda b(s), \quad \lambda \in [0, 1]$$

olmak üzere

$$\{L(j\omega_*, \lambda) : \lambda \in [0, 1]\} \quad (2.35)$$

bu iki vektörü birleştiren, kompleks düzlemde sıfırdan geçmeyen bir segmenttir. Eğer bu segment koordinat eksenlerinin birisi üzerinde ise (2.31) veya (2.32) eşitsizliklerinden birisi sağlanır. Eğer bu segment eksen üzerinde değilse bu durumda (2.31), (2.32) eşitsizliklerinin her ikisi de sağlanır.

\Leftarrow). $L \not\subset H_n^+$ olduğunu varsayalım. Bu durumda öyle $\lambda \in (0, 1)$ vardır ki $L(s, \lambda)$ polinomu sağ kapalı yarı düzlemde bir köke sahiptir. Polinom köklerinin katsayılarına göre sürekliliğinden öyle $\lambda_* \in (0, 1)$ vardır ki $L(s, \lambda_*)$ polinomu $j\omega_*$ köküne sahiptir. Bu ise (2.35) segmentinin orjinden geçmesini gerektirir. Bir taraftan $t_* = \omega_*^2$ (2.30) denklemini sağlar ve diğer taraftan (2.31), (2.32) eşitsizlikleri sağlanmaz. Bu çelişkidenden dolayı $L \subset H_n^+$ olur. ■

Önerme 2.10 un kanıtı Önerme 2.9 un kanıtına benzer yolla yapılabilir.

(2.30) denkleminin pozitif gerçek kökleri $t_1^*, t_2^*, \dots, t_k^*$ bulunabilirse (2.31), (2.32), (2.33) ve (2.34) eşitsizlikleri kontrol edilerek L segmentinin davranışı hakkında bir sonuca varılabilir. Ancak gerçek köklerin bulunması hemen hemen olanaksız olduğundan (2.30) denkleminin yaklaşık köklerini ele alacağız.

Eğer (2.30) denkleminin pozitif kökü yoksa bu durumda $L \subset H_n^+$ dir. Bu nedenle bu bölüm boyunca (2.30) denkleminin en az bir pozitif kökünün olduğunu kabul edeceğiz. (2.30) denkleminin birbirinden farklı pozitif yaklaşık kökleri t_1, t_2, \dots, t_k ve bu yaklaşık köklerin mutlak hatası ε olsun: her i için

$$t_i - \varepsilon \leq t_i^* \leq t_i + \varepsilon \quad (2.36)$$

dir. Yeterince küçük pozitif ε sayısı için

$$t_i - \varepsilon > 0 \quad (2.37)$$

tutulabilir. Bundan böyle (2.36) ve (2.37) eşitsizliklerinin geçerli olduğunu kabul edelim.

$a^e(t_i^*)$, $a^o(t_i^*)$, $b^e(t_i^*)$ ve $b^o(t_i^*)$ 'a alt ve üst sınır vermek için aşağıdaki ifadeleri tanımlayalım:

$$\begin{aligned}
\underline{a}^e(t_i) &= a_0 - a_2(t_i + \varepsilon) + a_4(t_i - \varepsilon)^2 - a_6(t_i + \varepsilon)^3 + \dots \\
\bar{a}^e(t_i) &= a_0 - a_2(t_i - \varepsilon) + a_4(t_i + \varepsilon)^2 - a_6(t_i - \varepsilon)^3 + \dots \\
\underline{b}^e(t_i) &= b_0 - b_2(t_i + \varepsilon) + b_4(t_i - \varepsilon)^2 - b_6(t_i + \varepsilon)^3 + \dots \\
\bar{b}^e(t_i) &= b_0 - b_2(t_i - \varepsilon) + b_4(t_i + \varepsilon)^2 - b_6(t_i - \varepsilon)^3 + \dots \\
\underline{a}^o(t_i) &= a_1 - a_3(t_i + \varepsilon) + a_5(t_i - \varepsilon)^2 - a_7(t_i + \varepsilon)^3 + \dots \\
\bar{a}^o(t_i) &= a_1 - a_3(t_i - \varepsilon) + a_5(t_i + \varepsilon)^2 - a_7(t_i - \varepsilon)^3 + \dots \\
\underline{b}^o(t_i) &= b_1 - b_3(t_i + \varepsilon) + b_5(t_i - \varepsilon)^2 - b_7(t_i + \varepsilon)^3 + \dots \\
\bar{b}^o(t_i) &= b_1 - b_3(t_i - \varepsilon) + b_5(t_i + \varepsilon)^2 - b_7(t_i - \varepsilon)^3 + \dots
\end{aligned}$$

(2.36) ve (2.37) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
\underline{a}^e(t_i) &\leq a^e(t_i^*) \leq \bar{a}^e(t_i) \\
\underline{b}^e(t_i) &\leq b^e(t_i^*) \leq \bar{b}^e(t_i) \\
\underline{a}^o(t_i) &\leq a^o(t_i^*) \leq \bar{a}^o(t_i) \\
\underline{b}^o(t_i) &\leq b^o(t_i^*) \leq \bar{b}^o(t_i)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{a}^e(t_i) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{a}^e(t_i) = a^e(t_i^*) \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{b}^e(t_i) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{b}^e(t_i) = b^e(t_i^*) \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{a}^o(t_i) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{a}^o(t_i) = a^o(t_i^*) \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{b}^o(t_i) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{b}^o(t_i) = b^o(t_i^*)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

dir. Aşağıda verilen Tablo 2.3 ve Tablo 2.4 ü ele alalım.

$\underline{a}^e(t_i)$	+			
$\bar{a}^e(t_i)$		-		
$\underline{b}^e(t_i)$	+			
$\bar{b}^e(t_i)$		-		
$\underline{a}^o(t_i)$			+	
$\bar{a}^o(t_i)$				-
$\underline{b}^o(t_i)$			+	
$\bar{b}^o(t_i)$				-

Tablo 2.3: Kararlılık Tablosu

$\underline{a}^e(t_i)$	+			
$\bar{a}^e(t_i)$		-		
$\underline{b}^e(t_i)$		+		
$\bar{b}^e(t_i)$	-			
$\underline{a}^o(t_i)$			+	
$\bar{a}^o(t_i)$				-
$\underline{b}^o(t_i)$				+
$\bar{b}^o(t_i)$			-	

Tablo 2.4: Kararsızlık Tablosu

Burada “+” ve “-” sembolleri karşılık geldikleri ifadenin işaretini belirtmektedir. Önerme 2.6 yı dikkate alırsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Önerme 2.11 $a, b \in H_n^+$ olsun. $L \subset H_n^+ \Leftrightarrow$ Her $i = 1, 2, \dots, k$ ve yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısı için Tablo 2.3 ün en az bir sütunu gerçekleşir.

Önerme 2.12 $a, b \in H_n^+$ olsun. $L \not\subset H_n^+ \Leftrightarrow$ öyle bir i ve $\varepsilon > 0$ vardır ki Tablo 2.4 ün en az bir sütunu gerçekleşir.

(2.38) eşitsizlikleri ve Önerme 2.7 gözönüne alınırsa aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 2.13 Tablo 2.4 ün sütunlarından en az birisinin gerçekleştiği indis i olsun. Bu durumda

Eğer Tablo 2.4 ün 1. sütunu gerçekleşiyor ise $\lambda(t_i^*) \in \left[\frac{\underline{a}^e(t_i)}{\underline{a}^e(t_i) - \underline{b}^e(t_i)}, \frac{\bar{a}^e(t_i)}{\bar{a}^e(t_i) - \bar{b}^e(t_i)} \right]$
Eğer 2. sütun gerçekleşiyor ise $\lambda(t_i^*) \in \left[\frac{\bar{a}^e(t_i)}{\bar{a}^e(t_i) - \bar{b}^e(t_i)}, \frac{\underline{a}^e(t_i)}{\underline{a}^e(t_i) - \underline{b}^e(t_i)} \right]$
Eğer 3. sütun gerçekleşiyor ise $\lambda(t_i^*) \in \left[\frac{\underline{a}^o(t_i)}{\underline{a}^o(t_i) - \underline{b}^o(t_i)}, \frac{\bar{a}^o(t_i)}{\bar{a}^o(t_i) - \bar{b}^o(t_i)} \right]$
Eğer 4. sütun gerçekleşiyor ise $\lambda(t_i^*) \in \left[\frac{\bar{a}^o(t_i)}{\bar{a}^o(t_i) - \bar{b}^o(t_i)}, \frac{\underline{a}^o(t_i)}{\underline{a}^o(t_i) - \underline{b}^o(t_i)} \right]$

Kararsızlık durumunda (yani $L \not\subset H_n^+$) Önerme 2.13, segmentin H_n^+ nın sınırını kestiği λ nın yaklaşık değerini ve bu yaklaşık değer hatasını belirleyebilmemizi sağlar.

Pozitif ε sayısı yeterince küçük olsun öyle ki her t_i yaklaşık kökü için Tablo 2.3 veya Tablo 2.4 ün en az bir sütunu gerçekleşsin. Tablo 2.4 ün en az bir

sütununun gerçekleştiği i indislerinin kümesini $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ ile gösterelim. Önerme 2.13 e göre her bir $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ ye $\lambda(t_i^*)$ gerçek değerini bulunduran en az bir $[\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i]$ aralığı karşılık gelir.

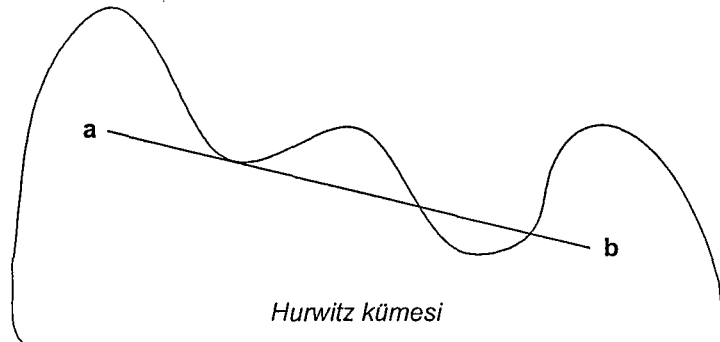
Kabul edelim ki bu aralıklar birbirleriyle kesişmesin ve artma biçiminde sıralanmış olsun. Bu aralıklardan keyfi

$$\lambda_1 \in (\bar{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2), \lambda_2 \in (\bar{\lambda}_2, \underline{\lambda}_3), \dots, \lambda_{m-1} \in (\bar{\lambda}_{m-1}, \underline{\lambda}_m)$$

seçilir ve $L(s, \lambda_1), L(s, \lambda_2), \dots, L(s, \lambda_{m-1})$ polinomlarının kararlı veya kararsız oldukları kontrol edilir. Elde edilen sonuca göre de segmentin davranışı belirlenebilir.

Örneğin, $m = 3$ ve $L(s, \lambda_1)$ kararlı, $L(s, \lambda_2)$ kararsız olsun. Bu durumda

1. $a(s) = L(s, 0)$ dan başlayan segment belli bir $\lambda \in [\underline{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1]$ da Hurwitz kümesinin sınırına iç teğettir.
2. $\lambda \in [\underline{\lambda}_2, \bar{\lambda}_2]$ için segment Hurwitz kümesini terk eder.
3. $\lambda \in [\underline{\lambda}_3, \bar{\lambda}_3]$ için segment Hurwitz kümesine tekrar girer.



Şekil 2.3: $m = 3$ ve $L(s, \lambda_1)$ kararlı, $L(s, \lambda_2)$ kararsız

2.3 Kompleks katsayılı polinomların konveks kombinasyonlarının kararlılığı

Burada, 2.1 alt bölümünde gerçel katsayılı kararlı polinomların konveks kombinasyonlarının kararlılığını incelemek için bahsettiğimiz algoritmayı, kompleks katsayılı polinomların konveks kombinasyonlarının kararlılığının incelenmesi için uygulayacağız.

[19] makalesinde kompleks polinomların konveks kombinasyonlarının kararlılığı problemi parametrik Routh tablosundan elde edilen bir polinomun $(0, 1)$ aralığında kökünün olup-olmaması problemine getirilmektedir. Ancak bu polinomun katsayıları büyük sayılar çıkabilir.

$a(s)$ ve $b(s)$ n . dereceden kompleks katsayılı kararlı polinomlar olsun:

$$a(s) = (\alpha_0 + j\beta_0) + (\alpha_1 + j\beta_1)s + \cdots + (\alpha_n + j\beta_n)s^n$$

$$b(s) = (\mu_0 + j\nu_0) + (\mu_1 + j\nu_1)s + \cdots + (\mu_n + j\nu_n)s^n$$

Burada $\alpha_n\mu_n > 0$ veya $\beta_n\nu_n > 0$ veya $\alpha_n\nu_n - \beta_n\mu_n \neq 0$ eşitsizliklerinden en az birisinin sağlandığını varsayalım. Bu koşul konveks kombinasyon için derece düşmemesini garanti eder.

Bu iki polinomun konveks kombinasyonlarının kümesi

$$L = \{L(s, \lambda) : L(s, \lambda) = (1 - \lambda)a(s) + \lambda b(s), \quad 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

olsun. Eğer L ailesindeki tüm polinomlar kararlı ise bu aileye kararlı aile denir.

$a(s)$ ve $b(s)$ polinomlarında $s = j\omega$ yazılırsa,

$$a(j\omega) = (\alpha_0 - \beta_1\omega - \alpha_2\omega^2 + \beta_3\omega^3 + \cdots) + j(\beta_0 + \alpha_1\omega - \beta_2\omega^2 - \alpha_3\omega^3 + \cdots)$$

$$b(j\omega) = (\mu_0 - \nu_1\omega - \mu_2\omega^2 + \nu_3\omega^3 + \cdots) + j(\nu_0 + \mu_1\omega - \nu_2\omega^2 - \mu_3\omega^3 + \cdots)$$

elde ederiz.

$$a_R(\omega) = \alpha_0 - \beta_1\omega - \alpha_2\omega^2 + \beta_3\omega^3 + \dots$$

$$a_I(\omega) = \beta_0 + \alpha_1\omega - \beta_2\omega^2 - \alpha_3\omega^3 + \dots$$

$$b_R(\omega) = \mu_0 - \nu_1\omega - \mu_2\omega^2 + \nu_3\omega^3 + \dots$$

$$b_I(\omega) = \nu_0 + \mu_1\omega - \nu_2\omega^2 - \mu_3\omega^3 + \dots$$

gösterimlerini kullanalım.

Önerme 2.14 L ailesi kararlıdır \Leftrightarrow

$$a_R(\omega)b_I(\omega) - a_I(\omega)b_R(\omega) = 0 \quad (2.40)$$

denkleminin herbir gerçel ω kökü için

$$a_R(\omega)b_R(\omega) > 0 \quad (2.41)$$

$$a_I(\omega)b_I(\omega) > 0 \quad (2.42)$$

eşitsizliklerinden en az birisi sağlanır.

Kanıt. \Rightarrow). L ailesi kararlı ve ω , (2.40) denkleminin herhangi gerçel kökü olsun. Bu durumda iki boyutlu $(a_R(\omega), a_I(\omega))$ ve $(b_R(\omega), b_I(\omega))$ vektörleri orjinden geçen bir doğru üzerindedir. L kararlı olduğundan bu vektörlerin konveks kombinasyonları kümesi olan $\{L(j\omega, \lambda) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ doğru parçası orjinden geçmez. Buna göre (2.41) veya (2.42) gerçekleşmiş olur (Eğer bu parça koordinat eksenlerinden birinin üzerinde ise (2.41) veya (2.42) eşitsizliklerinin bir tanesi, diğer durumlarda ise her ikisi gerçekleşir).

\Leftarrow). L ailesinin kararsız olduğunu kabul edelim. $a(s)$ ve $b(s)$ kararlı olduğundan ve polinom köklerinin katsayılarına göre sürekliliğinden öyle $\omega_* \in R$ vardır ki L ailesindeki bir polinom $j\omega_*$ köküne sahiptir. Buna göre $\{L(j\omega_*, \lambda) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ doğru parçası orjinden geçer. Bundan dolayı ω_* , bir taraftan (2.40) denklemini sağlarken, diğer taraftan (2.41) ve (2.42) eşitsizliklerinin hiçbirisi gerçekleşmez. Aldığımız çelişkiyen dolayı L kararlı olur. ■

Önerme 2.15 L ailesi kararsızdır \Leftrightarrow (2.40) denkleminin öyle ω gerçel kökü vardır ki

$$a_R(\omega)b_R(\omega) < 0 \quad (2.43)$$

$$a_I(\omega)b_I(\omega) < 0 \quad (2.44)$$

eşitsizliklerinden en az birisi sağlanır.

Önerme 2.15 in kanıtı Önerme 2.14 ün kanıtına benzer yolla yapılabilir.

Burada (2.40) denkleminin gerçekte (exact) $\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_k^*$ gerçekte kökleri için (2.41), (2.42), (2.43) ve (2.44) eşitsizlikleri kontrol edilerek L ailesinin kararlı olup olmadığı belirlenebilir. Ancak gerçekte köklerin bulunması her zaman mümkün olmadığından dolayı yaklaşık kökleri kullanalım.

Kabul edelim ki $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$, (2.40) denkleminin sıfırdan farklı yaklaşık gerçekte kökleri ve ε bu köklerin mutlak hatası olsun. Buradan $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$\omega_i - \varepsilon \leq \omega_i^* \leq \omega_i + \varepsilon \quad (2.45)$$

dir.

$$\omega_i^* > 0 \text{ ise yeterince küçük } \varepsilon > 0 \text{ sayısı için } \omega_i - \varepsilon > 0 \quad (2.46)$$

$$\omega_i^* < 0 \text{ ise yeterince küçük } \varepsilon > 0 \text{ sayısı için } \omega_i + \varepsilon < 0 \quad (2.47)$$

tutulabilir.

Bundan böyle (2.45)-(2.47) eşitsizliklerinin geçerli olduğunu kabul edelim.

Yukarıdaki önermelerden görüldüğü gibi L ailesinin kararlı olup olmadığını belirlemek için (2.40) denkleminin gerçekte kökleri, bilinen bilgisayar programları yardımıyla yaklaşık olarak bulunup, (2.41)-(2.44) eşitsizliklerini kontrol etmeliyiz. Bu eşitsizliklerde $a_R(\omega)$, $a_I(\omega)$, $b_R(\omega)$, $b_I(\omega)$ fonksiyonlarının işaretleri önem taşıdığından bunlar için alt ve üst sınırları aşağıdaki gibi belirleyelim:

Eğer $\omega_i > 0$ ise

$$\begin{aligned}
\underline{a}_R(\omega_i) &= \alpha_0 - \beta_1(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\beta_1)) - \alpha_2(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\alpha_2))^2 + \beta_3(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\beta_3))^3 + \dots \\
\bar{a}_R(\omega_i) &= \alpha_0 - \beta_1(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\beta_1)) - \alpha_2(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\alpha_2))^2 + \beta_3(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\beta_3))^3 + \dots \\
\underline{b}_R(\omega_i) &= \mu_0 - \nu_1(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\nu_1)) - \mu_2(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\mu_2))^2 + \nu_3(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\nu_3))^3 + \dots \\
\bar{b}_R(\omega_i) &= \mu_0 - \nu_1(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\nu_1)) - \mu_2(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\mu_2))^2 + \nu_3(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\nu_3))^3 + \dots \\
\underline{a}_I(\omega_i) &= \beta_0 + \alpha_1(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\alpha_1)) - \beta_2(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\beta_2))^2 - \alpha_3(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\alpha_3))^3 + \dots \\
\bar{a}_I(\omega_i) &= \beta_0 + \alpha_1(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\alpha_1)) - \beta_2(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\beta_2))^2 - \alpha_3(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\alpha_3))^3 + \dots \\
\underline{b}_I(\omega_i) &= \nu_0 + \mu_1(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\mu_1)) - \nu_2(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\nu_2))^2 - \mu_3(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\mu_3))^3 + \dots \\
\bar{b}_I(\omega_i) &= \nu_0 + \mu_1(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\mu_1)) - \nu_2(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\nu_2))^2 - \mu_3(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\mu_3))^3 + \dots
\end{aligned}$$

Eğer $\omega_i < 0$ ise

$$\begin{aligned}
\underline{a}_R(\omega_i) &= \alpha_0 - \beta_1(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\beta_1)) - \alpha_2(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\alpha_2))^2 + \beta_3(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\beta_3))^3 + \dots \\
\bar{a}_R(\omega_i) &= \alpha_0 - \beta_1(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\beta_1)) - \alpha_2(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\alpha_2))^2 + \beta_3(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\beta_3))^3 + \dots \\
\underline{b}_R(\omega_i) &= \mu_0 - \nu_1(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\nu_1)) - \mu_2(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\mu_2))^2 + \nu_3(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\nu_3))^3 + \dots \\
\bar{b}_R(\omega_i) &= \mu_0 - \nu_1(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\nu_1)) - \mu_2(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\mu_2))^2 + \nu_3(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\nu_3))^3 + \dots \\
\underline{a}_I(\omega_i) &= \beta_0 + \alpha_1(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\alpha_1)) - \beta_2(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\beta_2))^2 - \alpha_3(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\alpha_3))^3 + \dots \\
\bar{a}_I(\omega_i) &= \beta_0 + \alpha_1(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\alpha_1)) - \beta_2(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\beta_2))^2 - \alpha_3(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\alpha_3))^3 + \dots \\
\underline{b}_I(\omega_i) &= \nu_0 + \mu_1(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\mu_1)) - \nu_2(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\nu_2))^2 - \mu_3(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\mu_3))^3 + \dots \\
\bar{b}_I(\omega_i) &= \nu_0 + \mu_1(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\mu_1)) - \nu_2(\omega_i + \varepsilon \operatorname{sgn}(\nu_2))^2 - \mu_3(\omega_i - \varepsilon \operatorname{sgn}(\mu_3))^3 + \dots
\end{aligned}$$

(2.45)-(2.47) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
\underline{a}_R(\omega_i) &\leq a_R(\omega_i^*) \leq \bar{a}_R(\omega_i) \\
\underline{b}_R(\omega_i) &\leq b_R(\omega_i^*) \leq \bar{b}_R(\omega_i) \\
\underline{a}_I(\omega_i) &\leq a_I(\omega_i^*) \leq \bar{a}_I(\omega_i) \\
\underline{b}_I(\omega_i) &\leq b_I(\omega_i^*) \leq \bar{b}_I(\omega_i)
\end{aligned} \tag{2.48}$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{a}_R(\omega_i) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{a}_R(\omega_i) = a_R(\omega_i^*) \\
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{b}_R(\omega_i) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{b}_R(\omega_i) = b_R(\omega_i^*) \\
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{a}_I(\omega_i) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{a}_I(\omega_i) = a_I(\omega_i^*) \\
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{b}_I(\omega_i) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{b}_I(\omega_i) = b_I(\omega_i^*)
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

dir. Aşağıdaki tabloları ele alalım:

$\underline{a}_R(\omega_i)$	+			
$\bar{a}_R(\omega_i)$		-		
$\underline{b}_R(\omega_i)$	+			
$\bar{b}_R(\omega_i)$		-		
$\underline{a}_I(\omega_i)$			+	
$\bar{a}_I(\omega_i)$				-
$\underline{b}_I(\omega_i)$			+	
$\bar{b}_I(\omega_i)$				-

Tablo 2.5: Kararlılık Tablosu

$\underline{a}_R(\omega_i)$	+			
$\bar{a}_R(\omega_i)$		-		
$\underline{b}_R(\omega_i)$		+		
$\bar{b}_R(\omega_i)$	-			
$\underline{a}_I(\omega_i)$			+	
$\bar{a}_I(\omega_i)$				-
$\underline{b}_I(\omega_i)$				+
$\bar{b}_I(\omega_i)$			-	

Tablo 2.6: Kararsızlık Tablosu

Tablolardaki “+” ve “-” işaretleri karşılardaki ifadelerin işaretini göstermektedir.

Önerme 2.16 L ailesi kararlıdır \Leftrightarrow Her $i = 1, 2, \dots, k$ ve yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısı için Tablo 2.5 ün en az bir sütunu gerçekleşir.

Önerme 2.17 L ailesi kararsızdır \Leftrightarrow öyle bir i ve $\varepsilon > 0$ vardır ki Tablo 2.6 nun en az bir sütunu gerçekleşir.

Önerme 2.16 ve Önerme 2.17 nin kanıtı Önerme 2.6 nın kanıtına benzer yolla yapılır.

Örnek 2.3

$$\begin{aligned}
 a(s) &= (1 + 0.7j) + 9s + (5 + 0.3j)s^2 + 2s^3 \\
 b(s) &= (4 + 2j) + (7 + 0.6j)s + (3 + 0.5j)s^2 + s^3
 \end{aligned}$$

Kararlı polinomları verilsin.

$s = j\omega$ yazılırsa

$$a(j\omega) = 1 - 5\omega^2 + j(0.7 + 9\omega - 0.3\omega^2 - 2\omega^3)$$

$$b(j\omega) = 4 - 0.6\omega - 3\omega^2 + j(2 + 7\omega - 0.5\omega^2 - \omega^3)$$

ve buradan (2.40) denklemini aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} a_R(\omega)b_I(\omega) - a_I(\omega)b_R(\omega) &= 0 \\ -0.8 - 28.58\omega - 1.8\omega^2 - 1.18\omega^3 + 0.4\omega^4 - \omega^5 &= 0 \end{aligned}$$

Bu denklem bir tek gerçel köke sahiptir ve $\varepsilon = 0.00001$ yaklaşıklıkla bulunan bu gerçel kök $\omega_1 = -0.02804$ için

$$\underline{a}_R(\omega_1) = 0.996065987$$

$$\bar{a}_R(\omega_1) = 0.996071595$$

$$\underline{b}_R(\omega_1) = 4.014457593$$

$$\bar{b}_R(\omega_1) = 4.014472957$$

$$\underline{a}_I(\omega_1) = 0.447358004$$

$$\bar{a}_I(\omega_1) = 0.447538435$$

$$\underline{b}_I(\omega_1) = 1.803278622$$

$$\bar{b}_I(\omega_1) = 1.803419230$$

dir. Tablo 2.5 de birinci ve üçüncü sütun gerçekleştiğinden Önerme 2.16 ya göre verilen polinomların konveks kombinasyonları da kararlıdır.

Örnek 2.4

$$a(s) = (0.57 + 0.5j) + 6s + (1 + 0.84j)s^2 + 10s^3,$$

$$b(s) = (1.57 + 0.4j) + 8s + (2 + 0.5j)s^2 + 10s^3$$

kararlı polinomlarını ele alalım.

$s = j\omega$ yazılırsa (2.40) denklemini

$$-0.557 - 4.86\omega + 1.6338\omega^2 + 14\omega^3 - 1.18\omega^4 - 10\omega^5 = 0$$

olarak elde edilir. Bu denklemin $\varepsilon = 0.00001$ yaklaşıklıkla gerçel kökleri $\omega_1 = -0.87201$, $\omega_2 = -0.80159$, $\omega_3 = -0.11452$, $\omega_4 = 0.79535$, $\omega_5 = 0.87478$ olarak bulunur. Bunlardan $\omega_1 = -0.87201$ için

$$\begin{aligned}\underline{a}_R(\omega_1) &= -0.1904188 \\ \bar{a}_R(\omega_1) &= -0.1903840 \\ \underline{b}_R(\omega_1) &= 0.0491622 \\ \bar{b}_R(\omega_1) &= 0.0492320 \\ \underline{a}_I(\omega_1) &= 1.2596766 \\ \bar{a}_I(\omega_1) &= 1.2602821 \\ \underline{b}_I(\omega_1) &= -0.3253647 \\ \bar{b}_I(\omega_1) &= -0.3256435\end{aligned}$$

olarak elde edilir. ω_1 için bulunan bu değerlerin işaretleri Tablo 2.6 daki ikinci ve üçüncü sütundaki gibidir. Dolayısıyla Önerme 2.17 ye göre verilen polinomların konveks kombinasyonları kararsızdır.

Örnek 2.5 ([19])

$$\begin{aligned}a(s) &= (2.6 - 2.6j) + (5.8 - 1.6j)s + (4.2 + j)s^2 + s^3, \\ b(s) &= (-39.2 - 40.8j) + (-1.4 - 38.2j)s + (6.1 - 7j)s^2 + s^3\end{aligned}$$

kararlı polinomlarının konveks kombinasyonlarının kararlılığını inceleyelim.

$s = j\omega$ için

$$\begin{aligned}a(j\omega) &= (2.6 + 1.6\omega - 4.2\omega^2) + j(-2.6 + 5.8\omega - \omega^2 - \omega^3), \\ b(j\omega) &= (-39.2 + 38.2\omega - 6.1\omega^2) + j(-40.8 - 1.4\omega + 7\omega^3 - \omega^3)\end{aligned}$$

elde edilir. (2.40) denklemi

$$-208 + 257.76\omega - 89.3\omega^2 + 48.86\omega^3 + 1.1\omega^4 - 1.9\omega^5$$

olarak bulunur. Bu denklem üç tane gerçel köke sahiptir. Bu kökler $\varepsilon = 0.000000001$ yaklaşıklıkla

$$\omega_1 = -5.892582995, \omega_2 = 0.9610862814, \omega_3 = 4.863257239$$

dir. ω_1 yaklaşık kökü için Tablo 2.5 in 2. ve 3. sütunları, ω_2 için Tablo 2.6 nın 1. ve 3. sütunları ve ω_3 için Tablo 2.6 nın 2. ve 4. sütunları gerçekleşir. Buradan Önerme 2.17 ye göre $a(s)$ ve $b(s)$ polinomlarının konveks kombinasyonları kararsızdır.

3 TEK VE ÇİFT KATSAYILARI BİRBİRİNDEN BAĞIMSIZ DEĞİŞEN POLİNOMLAR AİLESİNİN KARARLILIĞI

Bu bölümde, tek ve çift katsayı vektörlerinin iki bağımsız politopta değiştiği özel bir polinom politopunun kararlılığını ele alacağız. Bu ailenin gürbüz kararlılığı için bazı durumlarda daha kolay kontrol edilebilen kriterler verilecektir.

Tek ve çift katsayıların bağımsız değiştiği aileler için kararlılık problemi [20] makalesinde ele alınmıştır. Burada \mathcal{E} -yeterli ve \mathcal{O} -yeterli alt kümeler tanımlanmıştır. Ancak bu alt kümelerin bulunması yöntemleri yeterli kadar karmaşıktır. Buna göre de, bu tip ailelerin kararlılığı için daha kolay kontrol edilebilecek koşullar verilecektir.

$$E = \text{conv}\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^{k_1}\} \subset \mathbb{R}^{l_1}, \quad O = \text{conv}\{\mathbf{o}^1, \mathbf{o}^2, \dots, \mathbf{o}^{k_2}\} \subset \mathbb{R}^{l_2}$$

politopları verilsin ve genelliği bozmaksızın $k_1 \leq k_2$ olduğunu varsayalım. E ve O politopları üzerinde

$$a_i : E \rightarrow \mathbb{R}, \text{ her } \mathbf{q} \in E \text{ için } a_i(\mathbf{q}) > 0$$

$$b_i : O \rightarrow \mathbb{R}, \text{ her } \mathbf{r} \in O \text{ için } b_i(\mathbf{r}) > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

afin dönüşümlerini tanımlayalım. Çift katsayıların oluşturduğu vektörün $\mathbf{q} \in E$ parametresinin ve tek katsayıların oluşturduğu vektörün ise $\mathbf{r} \in O$ parametresinin bir afin fonksiyonu olan

$$p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = a_1(\mathbf{q}) + b_1(\mathbf{r})s + a_2(\mathbf{q})s^2 + b_2(\mathbf{r})s^3 + \dots$$

formundaki polinomlar ve bu polinomlardan oluşan

$$p(s, E, O) = \{p(\cdot, \mathbf{q}, \mathbf{r}) : \mathbf{q} \in E, \mathbf{r} \in O\}$$

polinomlar ailesinin gürbüz kararlılığını inceleyeceğiz.

Öncelikle $p(s, E, O)$ ailesinin, bir $s = j\omega$ ($\omega > 0$) için değer kümesinin kompleks düzlemde nasıl bir küme olduğunu belirlemeye çalışalım.

$p(s, E, O)$ polinomlar ailesinin bir $s = j\omega$ için değer kümesi

$$p(j\omega, E, O) = \{p(j\omega, \mathbf{q}, \mathbf{r}) : \mathbf{q} \in E, \mathbf{r} \in O\} \subset \mathbb{C}$$

dir. Bu değer kümesi $\mathbf{q} \in E$ ve $\mathbf{r} \in O$ noktalarına karşılık gelen $p(j\omega, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ kompleks sayılarından oluşur. $p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ polinomunda $s = j\omega$ için

$$p(j\omega, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = (a_1(\mathbf{q}) - a_2(\mathbf{q})\omega^2 + \dots) + j(b_1(\mathbf{r})\omega - b_2(\mathbf{r})\omega^3 + \dots)$$

dir. Yukarıda görüldüğü gibi $p(j\omega, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ nin gerçel kısmı $\mathbf{q} \in E$ parametresinin, sanal kısmı ise $\mathbf{r} \in O$ parametresinin afin fonksiyonlarıdır.

Değer kümesine ait kompleks sayıların gerçel ve sanal kısımları birbirinden bağımsız olduğundan ve bu kısımlar parametrelere göre sürekli olduklarından bu küme kompleks düzlemde bir dikdörtgendir.

Şimdi bu dikdörtgenin köşelerini belirlemek için öncelikle $p(j\omega, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ kompleks sayısının gerçel ve sanal kısımlarının değişim aralıklarını bulmalıyız. Sırasıyla

$$R(\omega, \mathbf{q}) := \text{Re } p(j\omega, \mathbf{q}, \mathbf{r})$$

ve

$$I(\omega, \mathbf{r}) := \text{Im } p(j\omega, \mathbf{q}, \mathbf{r})$$

olarak tanımlayalım.

R fonksiyonu \mathbf{q} ya göre, I fonksiyonu ise \mathbf{r} ye göre süreklidir. E ve O konveks olduklarından değer kümesine ait bir z noktasının gerçel ve sanal kısımlarının değişim aralıkları

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{q} \in E} R(\omega, \mathbf{q}) &\leq \text{Re } z \leq \max_{\mathbf{q} \in E} R(\omega, \mathbf{q}) \\ \min_{\mathbf{r} \in O} I(\omega, \mathbf{r}) &\leq \text{Im } z \leq \max_{\mathbf{r} \in O} I(\omega, \mathbf{r}) \end{aligned}$$

dir. $R(\omega, \mathbf{q})$ fonksiyonu $\mathbf{q} \in E$ ye göre afin ve E bir politop olduğundan

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{q} \in E} R(\omega, \mathbf{q}) &= \min_{\mathbf{q} \in \{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^{k_1}\}} R(\omega, \mathbf{q}) \\ \max_{\mathbf{q} \in E} R(\omega, \mathbf{q}) &= \max_{\mathbf{q} \in \{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^{k_1}\}} R(\omega, \mathbf{q}) \end{aligned}$$

dir. Aynı şekilde $I(\omega, \mathbf{r})$ fonksiyonu $\mathbf{r} \in O$ ya göre afın ve O bir politop olduğundan

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{r} \in O} I(\omega, \mathbf{r}) &= \min_{\mathbf{r} \in \{\mathbf{o}^1, \mathbf{o}^2, \dots, \mathbf{o}^{k_2}\}} I(\omega, \mathbf{r}) \\ \max_{\mathbf{r} \in O} I(\omega, \mathbf{r}) &= \max_{\mathbf{r} \in \{\mathbf{o}^1, \mathbf{o}^2, \dots, \mathbf{o}^{k_2}\}} I(\omega, \mathbf{r})\end{aligned}$$

olur.

Sonuç olarak bir $s = j\omega$ için değer kümesi $p(j\omega, E, O)$, eksenlere paralel bir dikdörtgendir. Bu dikdörtgenin her bir köşesine karşılık, öyle $i_1 \in \{1, 2, \dots, k_1\}$, $i_2 \in \{1, 2, \dots, k_2\}$ indisleri vardır ki, dikdörtgenin bu köşesi $p(j\omega, \mathbf{e}^{i_1}, \mathbf{o}^{i_2})$ dir.

Önerme 3.1 $\mathbf{e} \in E$ olsun. Eğer her $j \in \{1, 2, \dots, k_2\}$ için $p(s, \mathbf{e}, \mathbf{o}^j)$ polinomu kararlıysa, o zaman

$$p(s, \mathbf{e}, O) = \{p(s, \mathbf{e}, \mathbf{o}) : \mathbf{o} \in O\}$$

ailesi kararlıdır.

Kanıt. Her hangi bir $\mathbf{o} \in O$ alalım. O zaman

$$\begin{aligned}\mathbf{o} &= \lambda_1 \mathbf{o}^1 + \lambda_2 \mathbf{o}^2 + \dots + \lambda_{k_2} \mathbf{o}^{k_2}, \quad \lambda_j \geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k_2} &= 1\end{aligned}$$

olacak biçimde λ_j sayıları vardır. $b_i(\mathbf{r})$ fonksiyonları \mathbf{r} parametresinin afın fonksiyonları olduklarından

$$p(s, \mathbf{e}, \mathbf{o}) = \lambda_1 p(s, \mathbf{e}, \mathbf{o}^1) + \lambda_2 p(s, \mathbf{e}, \mathbf{o}^2) + \dots + \lambda_{k_2} p(s, \mathbf{e}, \mathbf{o}^{k_2})$$

yazabiliriz. $p(s, \mathbf{e}, \mathbf{o}^j)$ kararlı polinomlarının çift kısımları aynıdır. [12] makalesindeki sonuçlara göre $p(s, \mathbf{e}, \mathbf{o})$ polinomu da kararlıdır. ■

Aşağıdaki önermenin kanıtı benzer yolla yapılabilir.

Önerme 3.2 $\mathbf{o} \in O$ olsun. Eğer her $i \in \{1, 2, \dots, k_1\}$ için $p(s, \mathbf{e}^i, \mathbf{o})$ polinomu kararlıysa, o zaman

$$p(s, E, \mathbf{o}) = \{p(s, \mathbf{e}, \mathbf{o}) : \mathbf{e} \in E\}$$

ailesi de kararlıdır.

Önerme 3.3 $p(s, E, O)$ ailesinin kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul $k_1 \cdot k_2$ tane köşe polinomları olan $p(s, \mathbf{e}^i, \mathbf{o}^j)$ $i = 1, 2, \dots, k_1, j = 1, 2, \dots, k_2$ polinomlarının kararlı olmasıdır.

Kanıt.

\Leftarrow). $p(s, \mathbf{e}^i, \mathbf{o}^j)$ ($i = 1, 2, \dots, k_1, j = 1, 2, \dots, k_2$) polinomları kararlı olsun. $\mathbf{e} \in E$ ve $\mathbf{o} \in O$ keyfi olmak üzere $p(s, \mathbf{e}, \mathbf{o})$ alalım. $\mathbf{e} \in E$ olduğundan

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= \lambda_1 \mathbf{e}^1 + \lambda_2 \mathbf{e}^2 + \dots + \lambda_{k_1} \mathbf{e}^{k_1}, \lambda_j \geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k_1} &= 1\end{aligned}$$

olacak biçimde λ_j sayıları vardır. $a_1(\mathbf{q}), a_2(\mathbf{q}), \dots$ fonksiyonları afin olduklarından

$$\begin{aligned}p(s, \mathbf{e}, \mathbf{o}) &= p(s, \lambda_1 \mathbf{e}^1 + \lambda_2 \mathbf{e}^2 + \dots + \lambda_{k_1} \mathbf{e}^{k_1}, \mathbf{o}) \\ &= \lambda_1 p(s, \mathbf{e}^1, \mathbf{o}) + \lambda_2 p(s, \mathbf{e}^2, \mathbf{o}) + \dots + \lambda_{k_1} p(s, \mathbf{e}^{k_1}, \mathbf{o})\end{aligned}$$

dur. $p(s, \mathbf{e}^i, \mathbf{o}^j)$ ler kararlı olduklarından Önerme 3.1 e göre

$$p(s, \mathbf{e}^1, O), p(s, \mathbf{e}^2, O), \dots, p(s, \mathbf{e}^{k_1}, O)$$

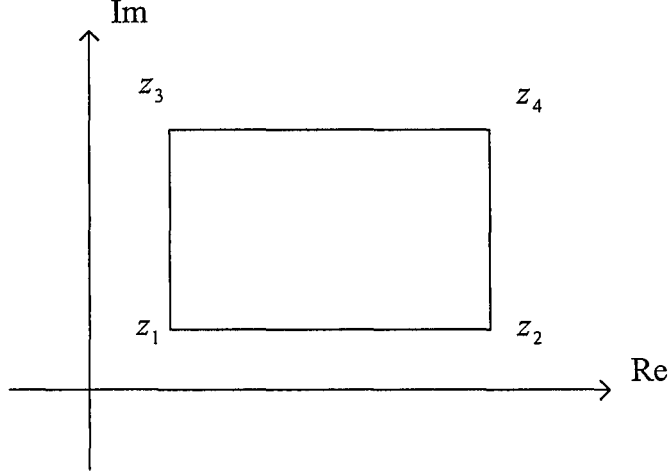
aileleri kararlıdır. Dolayısıyla $p(s, \mathbf{e}^i, \mathbf{o})$ ($i = 1, 2, \dots, k_1$) polinomları kararlıdır ve tek kısımları aynıdır. O zaman yine [12] deki sonuçlara göre $p(s, \mathbf{e}, \mathbf{o})$ da kararlıdır. ■

Kompleks düzlemde köşe noktaları z_1, z_2, z_3 ve z_4 noktalarında ve kenarları eksenlere paralel dikdörtgenin (Şekil 3.1) sıfırı içermemesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\max\{\operatorname{Re} z_1, -\operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_1, -\operatorname{Im} z_3\} > 0 \quad (3.1)$$

olmasıdır ([5], sayfa 91). Bu dikdörtgenin sanal eksene paralel bir doğru parçasına dönüşmesi durumunda ($z_1 = z_2$ ve $z_3 = z_4$ olması durumunda) (3.1) koşulu

$$\max\{\operatorname{Re} z_1, -\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, -\operatorname{Im} z_3\} > 0 \quad (3.2)$$



Şekil 3.1: Köşe noktaları z_1, z_2, z_3, z_4 olan, kenarları eksenlere paralel dikdörtgen

koşuluna döndüştür. Buna göre, $[z_1, z_3]$ parçasının sıfırı içermemesi için gerekli ve yeterli koşul $\text{Re } z_1 = 0$ olması durumunda

$$\text{Im } z_1 > 0 \text{ veya } \text{Im } z_3 < 0$$

olmasıdır.

Şimdi, E politopunun her bir köşesine karşılık

$$R_i(\omega) := R(j\omega, \mathbf{e}^i), \quad (i = 1, 2, \dots, k_1)$$

ve O politopunun her bir köşesine karşılık

$$I_j(\omega) := I(j\omega, \mathbf{o}^j), \quad (j = 1, 2, \dots, k_2)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım.

Teorem 3.1 $p(s, E, O)$ ailesinin kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul $p(s, \mathbf{e}^i, \mathbf{o}^i)$ $i = 1, 2, \dots, k_1$ polinomlarının kararlı olması ve $R_1(\omega)R_2(\omega)\dots R_{k_1}(\omega) = 0$ denkleminin tüm $\omega_* > 0$ kökleri için

$$\max_{1 \leq m \leq k_2} I_m(\omega_*) < 0 \text{ veya } \min_{1 \leq m \leq k_2} I_m(\omega_*) > 0 \quad (3.3)$$

olmasıdır.

Kanıt. \Rightarrow). $p(s, E, O)$ ailesinin kararlı olması durumunda her $\omega \geq 0$ için

$$\max\left\{\min_{1 \leq m \leq k_1} R_m(\omega), -\max_{1 \leq m \leq k_1} R_m(\omega), \min_{1 \leq m \leq k_2} I_m(\omega), -\max_{1 \leq m \leq k_2} I_m(\omega)\right\} > 0 \quad (3.4)$$

dir [5]. Değer kümesi

$$[\min_i R_i(\omega), \max_i R_i(\omega)] \times [\min_j I_j(\omega), \max_j I_j(\omega)]$$

dikdörtgeni olduğundan $R_1(\omega)R_2(\omega)\dots R_{k_1}(\omega) = 0$ denkleminin her $\omega_* > 0$ kökü için

$$\min_i R_i(\omega_*) \leq 0, \max_i R_i(\omega_*) \geq 0$$

sağlanmaktadır. Buna göre (3.4) eşitsizliğinden

$$\max\left\{\min_{1 \leq m \leq k_2} I_m(\omega), -\max_{1 \leq m \leq k_2} I_m(\omega)\right\} > 0$$

olur ve buradan

$$\max_{1 \leq m \leq k_2} I_m(\omega_*) < 0 \text{ veya } \min_{1 \leq m \leq k_2} I_m(\omega_*) > 0$$

elde edilir.

\Leftarrow). $p(s, e^i, o^i)$ $i = 1, 2, \dots, k_1$ polinomları kararlı ve $R_1(\omega)R_2(\omega)\dots R_{k_1}(\omega) = 0$ denkleminin tüm $\omega_* > 0$ kökleri için

$$\max_{1 \leq m \leq k_2} I_m(\omega_*) < 0 \text{ veya } \min_{1 \leq m \leq k_2} I_m(\omega_*) > 0$$

olsun. Her $i \in \{1, 2, \dots, k_1\}$ için $p(s, e^i, O)$ ailesinin kararlı olduğunu kanıtlayalım. $p(j\omega, e^i, O)$ görüntü kümesi gerçel kısmı $R_i(\omega)$, sanal kısmı ise

$$[\min_j I_j(\omega), \max_j I_j(\omega)]$$

parçasında değişen, sanal eksene paralel bir doğru parçasıdır. $R_i(\omega) = 0$ denkleminin her ω kökü için

$$\min_j I_j(\omega) > 0 \text{ veya } \max_j I_j(\omega) < 0$$

olduğundan görüntü kümesi sıfırı içermez. Diğer taraftan $p(s, e^i, o^i)$ polinomu kararlı olduğundan sıfırı içermeme prensibine göre $p(s, e^i, O)$ kararlıdır ve Önerme 3.3 e göre $p(s, E, O)$ ailesi kararlıdır. ■

Bu teorem yardımıyla, en fazla k_1 tane polinomun kararlılığının kontrolü ve $R_1(\omega)R_2(\omega)\dots R_{k_1}(\omega) = 0$ denklemin tüm pozitif köklerinin I_m ($1 \leq m \leq k_2$) fonksiyonları altındaki değerleri yardımıyla $p(s, E, O)$ ailesinin kararlı-kararsızlığı belirlenebilir.

Benzer yolla $k_1 > k_2$ durumu için aşağıdaki teorem de kanıtlanabilir.

Teorem 3.2 $p(s, E, O)$ ailesinin kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul $p(s, \mathbf{e}^j, \mathbf{o}^j)$ ($j = 1, 2, \dots, k_2$) polinomlarının kararlı olması ve $I_1(\omega)I_2(\omega)\dots I_{k_2}(\omega) = 0$ denkleminin her $\omega_* > 0$ kökü için

$$\max_{1 \leq m \leq k_1} R_m(\omega_*) < 0 \text{ veya } \min_{1 \leq m \leq k_1} R_m(\omega_*) > 0$$

olmasıdır.

$k_1 > k_2$ olması durumunda Teorem 3.2 nin kullanılması daha uygundur.

$R_i(\omega)$ ve $I_j(\omega)$ fonksiyonları aslında ω^2 nin fonksiyonlarıdır. Buna göre Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 deki denklemlerin ω ya göre değil ω^2 ye göre çözülmesi yeterlidir.

Şimdi elde ettiğimiz sonuçlarla ilgili açıklayıcı örnekler verelim.

Örnek 3.1 ([20]) Köşe noktaları $\mathbf{e}^1 = (4, 3)$, $\mathbf{e}^2 = (4, 2)$, $\mathbf{e}^3 = (3, 1)$, $\mathbf{e}^4 = (2, 0.8)$, $\mathbf{e}^5 = (1, 4)$, $\mathbf{e}^6 = (2, 5)$, $\mathbf{e}^7 = (2.5, 4.8)$, $\mathbf{e}^8 = (3.5, 4)$ olan $E = \text{conv}\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4, \mathbf{e}^5, \mathbf{e}^6, \mathbf{e}^7, \mathbf{e}^8\}$ politopu ve köşe noktaları $\mathbf{o}^1 = 3.9$, $\mathbf{o}^2 = 4.5$ olan $O = \text{conv}\{\mathbf{o}^1, \mathbf{o}^2\}$ politopu verilsin.

$$p(s, \mathbf{e}, \mathbf{o}) = e_1 + o_1s + e_2s^2 + s^3, \quad \mathbf{e} \in E, \quad \mathbf{o} \in O$$

polinomlar ailesinin kararlılığını inceleyelim.

$$p(s, \mathbf{e}^1, \mathbf{o}^1) = 4 + 3.9s + 3s^2 + s^3, \quad (3.9 \times 3 - 4 \times 1 > 0)$$

$$p(s, \mathbf{e}^2, \mathbf{o}^2) = 4 + 4.5s + 2s^2 + s^3, \quad (4.5 \times 2 - 4 \times 1 > 0)$$

uç polinomları kararlıdır. $s = j\omega$ için

$$p(j\omega, \mathbf{e}, \mathbf{o}) = (e_1 - e_2\omega^2) + j(o_1\omega - \omega^3)$$

dir. Buradan $R_i(\omega)$ ve $I_j(\omega)$ fonksiyonları

$$\begin{aligned}e^1 = (4, 3) &\rightarrow R_1(\omega) = 4 - 3\omega^2 \\e^2 = (4, 2) &\rightarrow R_2(\omega) = 4 - 2\omega^2 \\e^3 = (3, 1) &\rightarrow R_3(\omega) = 3 - 1\omega^2 \\e^4 = (2, 0.8) &\rightarrow R_4(\omega) = 2 - 0.8\omega^2 \\e^5 = (1, 4) &\rightarrow R_5(\omega) = 1 - 4\omega^2 \\e^6 = (2, 5) &\rightarrow R_6(\omega) = 2 - 5\omega^2 \\e^7 = (2.5, 4.8) &\rightarrow R_7(\omega) = 2.5 - 4.8\omega^2 \\e^8 = (3.5, 4) &\rightarrow R_8(\omega) = 3.5 - 4\omega^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}o^1 = 3.9 &\rightarrow I_1(\omega) = 3.9\omega - \omega^3 \\o^2 = 4.5 &\rightarrow I_2(\omega) = 4.5\omega - \omega^3\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Teorem 3.2 deki denklem

$$\begin{aligned}I_1(\omega)I_2(\omega) &= 0 \\ \omega^2(3.9 - \omega^2)(4.5 - \omega^2) &= 0\end{aligned}$$

dir ve bu denklemden $\omega^2 = 0$, $\omega^2 = 3.9$ ve $\omega^2 = 4.5$ olarak bulunur. Bu değerlere karşılık $R_i(\omega)$ fonksiyonlarının aldığı değerler;

$\omega^2 = 3.9$ için

$$\begin{aligned}R_1(\omega) = -7.7, \quad R_2(\omega) = -3.8, \quad R_3(\omega) = -0.9, \quad R_4(\omega) = -1.12, \\ R_5(\omega) = -14.6, \quad R_6(\omega) = -17.5, \quad R_7(\omega) = -16.22, \quad R_8(\omega) = -12.1\end{aligned}$$

dir ve $\max_{1 \leq i \leq 8} R_i(\omega) = -0.9 < 0$ olur.

$\omega^2 = 4.5$ için

$$\begin{aligned}R_1(\omega) = -9.5, \quad R_2(\omega) = -5, \quad R_3(\omega) = -1.5, \quad R_4(\omega) = -1.6, \\ R_5(\omega) = -17, \quad R_6(\omega) = -20.5, \quad R_7(\omega) = -19.1, \quad R_8(\omega) = -14.5\end{aligned}$$

dir ve buradan $\max_{1 \leq i \leq 8} R_i(\omega) = -1.5 < 0$ dir.

Dolayısıyla Teorem 3.2 nin koşulları sağlandığından bu polinomlar ailesi karardır.

[20] makalesinde verilen yöntemle göre bu ailenin kararlılığı için sekiz tane uç polinomun kararlılığı incelenmelidir.

Örnek 3.2 $E = \text{conv}\{(0, 0, 0), (0, 0, 0.5)\}$

$O = \text{conv}\{(0, 0.4, 0), (0, 0.4, 0.5), (0.3, 0, 0), (0.3, 0, 0.5), (0.3, 0.4, 0), (0.3, 0.4, 0.5)\}$

$\mathbf{q} \in E, \mathbf{r} \in O$

$$p(s, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = (1 - q_1 + q_2 - q_3) + (3 - r_1 - r_2 + 3r_3)s + (3 + q_1 - q_2 - 3q_3)s^2 + (1 + r_1 + r_2 + r_3)s^3$$

ailesinin kararlı olup olmadığını inceleyelim.

E politopunun köşe noktaları sırası ile $\mathbf{e}^1 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{e}^2 = (0, 0, 0.5)$ ve O politopunun köşeleri $\mathbf{o}^1 = (0, 0.4, 0)$, $\mathbf{o}^2 = (0, 0.4, 0.5)$, $\mathbf{o}^3 = (0.3, 0, 0)$, $\mathbf{o}^4 = (0.3, 0, 0.5)$, $\mathbf{o}^5 = (0.3, 0.4, 0)$, $\mathbf{o}^6 = (0.3, 0.4, 0.5)$ dir.

$$p(s, \mathbf{e}^1, \mathbf{o}^1) = 1 + 2.6s + 3s^2 + 1.4s^3$$

$$p(s, \mathbf{e}^2, \mathbf{o}^2) = 0.5 + 4.1s + 1.5s^2 + 1.9s^3$$

polinomları kararlıdır. Şimdi $s = j\omega$ için

$$p(j\omega, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = [(1 - q_1 + q_2 - q_3) - (3 + q_1 - q_2 - 3q_3)\omega^2] + j[(3 - r_1 - r_2 + 3r_3)\omega - (1 + r_1 + r_2 + r_3)\omega^3]$$

dir. Buradan

$$(0, 0, 0) \rightarrow R_1(\omega) = 1 - 3\omega^2$$

$$(0, 0, 0.5) \rightarrow R_2(\omega) = 0.5 - 1.5\omega^2$$

ve

$$(0, 0.4, 0) \rightarrow I_1(\omega) = 2.6\omega - 1.4\omega^3$$

$$(0, 0.4, 0.5) \rightarrow I_2(\omega) = 4.1\omega - 1.9\omega^3$$

$$(0.3, 0, 0) \rightarrow I_3(\omega) = 2.7\omega - 1.3\omega^3$$

$$(0.3, 0, 0.5) \rightarrow I_4(\omega) = 4.2\omega - 1.8\omega^3$$

$$(0.3, 0.4, 0) \rightarrow I_5(\omega) = 2.3\omega - 1.7\omega^3$$

$$(0.3, 0.4, 0.5) \rightarrow I_6(\omega) = 3.8\omega - 2.2\omega^3$$

dir. $R_1(\omega) = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{3}$ ve $R_2(\omega) = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{3}$ bulunur. Bu $\omega^2 = \frac{1}{3}$ için

$$I_1(\omega) = \frac{32\sqrt{3}}{45} \quad I_2(\omega) = \frac{52\sqrt{3}}{45} \quad I_3(\omega) = \frac{34\sqrt{3}}{45}$$

$$I_4(\omega) = \frac{6\sqrt{3}}{5} \quad I_5(\omega) = \frac{26\sqrt{3}}{45} \quad I_6(\omega) = \frac{46\sqrt{3}}{45}$$

olduğundan Teorem 3.1 in koşulları sağlanır. Dolayısı ile yukarıdaki polinomlar ailesi kararlıdır.

4 SEKTÖR KARARLILIK

Bu bölümde aralık polinomlar ailesinin sektör kararlılığı problemleri incelenecektir. Aralık polinomlar ailesinin sektör kararlılığı için uç nokta teoremlerinin geçerli olduğu bilinmektedir. Ancak uç sayısı eksponansiyel değiştiğinden sektör kararlılık için yeterli olan daha az sayıda polinomun bulunması önemlidir. Burada, [21] deki genel algoritma sektör kararlılık için uygulanarak kararlılık için yeterli olan uç polinomlar bulunmuştur.

4.1 Sektör kararlılık için uç nokta teoremi

$$q_0 + q_1s + \cdots + q_ns^n, \alpha_i \leq q_i \leq \beta_i, \alpha_i > 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (4.1)$$

aralık polinom ailesini ele alalım. Kompleks düzlemde

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{j\phi}, |\phi - \pi| < \theta_0, r > 0\}, \quad (0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}) \quad (4.2)$$

sektör kümesini tanımlayalım.

Tanım 4.1 *Eğer (4.1) ailesindeki her polinomun tüm kökleri Ω kümesinde ise (4.1) ailesine sektör kararlıdır denir.*

Tanım 4.2 *$D \subset \mathbb{C}$ açık kümesi verilsin. İnvaryant dereceye sahip her aralık polinomlar ailesi için eğer uç polinomların D -kararlılığından bu ailenin kararlılığı çıkarsa o zaman D kümesine zayıf Kharitonov kümesi denir.*

Tanım 4.3 *$D \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin ve aşağıdaki koşullar sağlansın:*

i) D açık kümedir

ii) D basit bağlantılıdır

iii) D nin sınırını pozitif yönde süpüren ve parçalı C^2 sınıfından olan

$$\phi_D : I \rightarrow \partial D$$

sınır süpürme fonksiyonu vardır.

Bu durumda D ye regüler bölge denir.

Teorem 4.1 ([22]) $D \subset \mathbb{C}$ regüler küme olsun. D nin zayıf Kharitonov bölgesi olması için yeterli koşul D ve

$$\frac{1}{D} = \{z \in \mathbb{C} : zd = 1, d \in D\}$$

kümelerinin konveks olmasıdır.

Yukarıdaki tanımları ve Teorem 4.1 i gözönünde tutarak Ω kümesini ele alalım.

Ω kümesi için sınır süpürme fonksiyonu

$$\begin{aligned} \phi_{\Omega} & : (-\infty, \infty) \rightarrow \partial\Omega \\ \phi_{\Omega}(\delta) & = \begin{cases} \delta e^{j\theta_0} & , \delta \leq 0 \\ \delta e^{j(\pi-\theta_0)} & , \delta > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

dir. Bu fonksiyon parçalı C^2 sınıfındandır. Diğer taraftan $\frac{1}{\Omega} = \Omega$ dır. Gerçekten, Ω kümesinde $|z|$ genliği her pozitif değeri alabildiğinden $\frac{1}{\Omega}$ yı bulmak için argümentin değişim aralığını bulmamız yeterlidir. Eğer $z \in \Omega$ ise

$$\pi - \theta_0 \leq \arg z \leq \pi + \theta_0$$

olduğundan $w = \frac{1}{z}$ için

$$-\pi - \theta_0 \leq \arg w \leq -\pi + \theta_0$$

olur. Bu eşitsizlik ise w nun argümentinin de z nin argümentinin değiştiği aralıkta değiştiğini gösterir. Dolayısıyla $\frac{1}{\Omega} = \Omega$ dir. Bu nedenle $\frac{1}{\Omega}$ kümesi de konveks kümedir. Teorem 4.1 e göre Ω kümesi zayıf Kharitonov bölgesidir. Bundan dolayı aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.1 Eğer (4.1) ailesinde tüm uç polinomlar kararlı ise o zaman aile de kararlıdır.

4.2 Görüntü kümesinin bulunması

(4.1) ailesinin (4.2) sektörünün sınırındaki bir değer için görüntü kümesinin θ_0 a bağlı olarak en fazla $2(n+1)$ -gen olduğunu ve bu çokgenin köşelerini veren polinomların ise sektörün sınırındaki değerden bağımsız olduğunu göreceğiz.

(4.1) ailesi ve $\theta = \pi - \theta_0$ olmak üzere $s = re^{j\theta}$ ($r > 0$) verilsin. Eğer

$$q_i = \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i)x_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

dönüşümünü uygularsak $[\alpha_i, \beta_i]$ aralığı $[0, 1]$ aralığına dönüştür. (4.1) ailesi ise

$$\{\alpha_0 + (\beta_0 - \alpha_0)[0, 1]\} + \{\alpha_1 + (\beta_1 - \alpha_1)[0, 1]\}s + \dots + \{\alpha_n + (\beta_n - \alpha_n)[0, 1]\}s^n \quad (4.3)$$

ailesine dönüştür. (4.1) ailesinin görüntü kümesi ise

$$(\beta_0 - \alpha_0)[0, 1] + (\beta_1 - \alpha_1)[0, 1]s + \dots + (\beta_n - \alpha_n)[0, 1]s^n \quad (4.4)$$

ailesinin görüntü kümesinin sabit bir kompleks sayı kadar ötelenmiştir. Buna göre (4.4) ailesinin görüntü kümesini bulmamız yeterlidir. Eğer (4.4) de $s = re^{j\theta}$ yazarsak (4.4) ailesinin görüntü kümesi G aşağıdaki gibi belirlenmiş olur:

$$G = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + z_1 + \dots + z_n, \text{ her } z \text{ için öyle } x_i \in [0, 1] \\ \text{vardır ki } z_i = (\beta_i - \alpha_i)x_i r^i e^{j(i\theta)} \quad (i = 0, 1, \dots, n)\}.$$

G kümesi, bir ucu orjinde ve açısı $i\theta$ olan doğru parçaları üzerindeki kompleks sayıların toplamıdır:

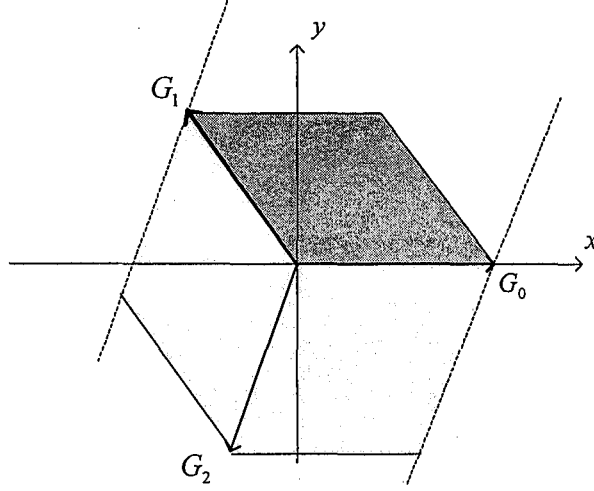
$$G = G_0 + G_1 + \dots + G_n, \\ G_i = \{(\beta_i - \alpha_i)xr^i e^{j(i\theta)} : x \in [0, 1]\} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

Tanım 4.4 ([5]) *Düzlemde bir konveks çokgen verilsin. Eğer bu çokgenin her kenarı için, bu kenara eşit ve paralel bir başka kenar bulunabiliyorsa bu çokgene parpoligon denir.*

Teorem 4.2 1) *Eğer $1, \theta, 2\theta, \dots, n\theta$ yönleri içinde paralel (çakışık veya zıt yönlü) olanları yoksa G kümesi $2(n+1) - gen$ bir parpoligondur.*

2) *Eğer $1, \theta, 2\theta, \dots, n\theta$ yönleri içerisinde k tane paralel ikili varsa G kümesi $2(n-k+1) - gen$ bir parpoligondur.*

Kanıt. 1). G_0 ile G_1 nin toplamı bir kenarı gerçel eksen üzerinde, bir köşesi ise orjinde olan bir paralel kenardır. Bu paralel kenarı G_2 ile topladığımızda

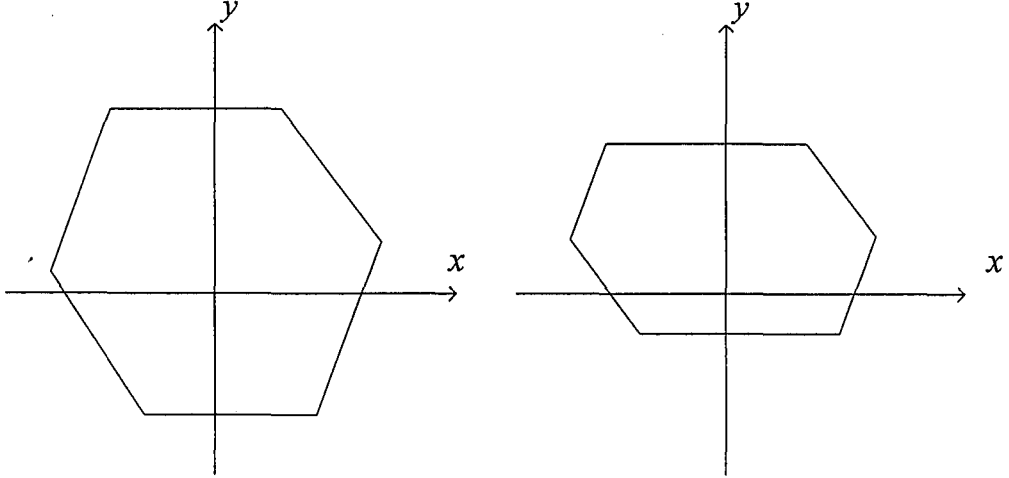


Şekil 4.1: Paralel kenarın G_2 yönünde kaydırılması

onu G_2 yönünde uygun biçimde kaydırmış oluruz ve bu paralel kenar bir 6-*gen* parpoligon bölge “süpürmüş” olur (Şekil 4.1). Böyle devam edilirse belirli bir adımdan sonra elde edilen parpoligonla yeni bir G_k yı topladığımızda, bu parpoligonun kenarlarından hiçbiri G_k yönüne paralel olmadığından “süpürme” sonunda köşe sayısı 2 tane fazla olan yeni bir parpoligon elde edilir. Toplam yön sayısı $(n + 1)$ olduğundan sonuçta $2(n + 1) - gen$ bir parpoligon elde edilir.

2). Eğer G_i lerin yönlerinden 2 tanesi paralel ise belirli bir adımda parpoligonu iki paralel kenarına paralel biçimde kaydırmamız gerekmektedir. Bu durumda köşe sayısı artmayıp değişmez kalacaktır. Eğer k tane böyle ikili varsa sonuçta toplam k defa kaydırırken yeni köşeler oluşmayacaktır. Buna göre parpoligon $2(n + 1) - 2k = 2(n - k + 1) - gen$ olacaktır. ■

G görüntü kümesi (4.3) ailesinin Ω nın sınırından aldığımız $s = re^{j\theta}$ değerine karşılık gelen görüntü kümesidir. s kompleks sayısı sınırdaki değişirken θ sabit kalıp, r değişmektedir. Dolayısıyla G kümesi de r ye bağlı olarak değişmektedir. G çokgeninin kenarlarının yönlerini G_0, G_1, \dots, G_n yönleri belirlemektedir. Bu yönler ise r den bağımsızdır. Buna göre r nin farklı değerleri için G kümeleri “benzerdirler”, yani kenarları paraleldir (Şekil 4.2). Aynı zamanda, G parpoligonunun her köşesine karşılık gelen kompleks sayı G_i lerin belirli uç noktalarına (her G_i nin uç noktalarından biri sıfırdır) karşılık gelen



Şekil 4.2: Benzer G kümeleri

sayıların toplamıdır. Yukarıdaki açıklamadan dolayı bir r için G nin belirli bir köşesi G_i lerin hangi uçlarından elde edilmişse başka r ler için de G nin bu köşesi G_i lerin aynı uçlarından elde edilmektedir. G_i nin her ucu ise polinomda s^i teriminin katsayısını (α_i veya β_i yi) belirlemektedir. Buna göre G nin her köşesini bir polinom belirler ve bu polinomlar r den bağımsızdırlar.

Biz görüntü kümesi G yi bulurken Ω nin gerçel eksenin yukarısında bulunan $s = re^{j(\pi-\theta_0)}$ ($r > 0$) sınır değerlerini kullandık. Gerçel eksenin aşağısındaki sınır değerleri $s = re^{j(\pi+\theta_0)}$ ($r > 0$) dir. $s = re^{j(\pi+\theta_0)}$ sınır değerleri için görüntü kümesi $s = re^{j(\pi-\theta_0)}$ için bulunan görüntü kümesinin gerçel eksene göre simetriğidir ve parpoligonların gerçel eksene göre simetrik köşelerini veren polinomlar aynıdır.

G nin toplam köşe sayısı $2(n+1)$ olduğundan aşağıdaki teoremi kanıtlamış olduk:

Teorem 4.3 (4.1) ailesi ve Ω (4.2) sektörü verilsin. Bu ailenin Ω -kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul en fazla $2(n+1)$ tane özel seçilmiş polinomların Ω -kararlı olmasıdır.

Bu polinomların bulunması algoritması bir sonraki alt bölümde verilecektir.

4.3 Uç polinomların bulunması için bir algoritma

[23] makalesinde aralık polinomların sektör kararlılığı için yeterli olan uç polinomların bulunması için bir algoritma verilmiştir. Ancak bu algoritmanın uygulanması çok fazla işlem gerektirmektedir.

Burada (4.1) ailesinin değer kümesinin köşelerini veren (en fazla $2(n+1)$ tane) polinomları bulmamızı sağlayan bir algoritma vereceğiz.

Tanım 4.5

$$B^{n+1} = \{x : x \in \mathbb{R}^{n+1}, 0 \leq x_i \leq 1 \ (i = 0, 1, \dots, n)\}$$

kümesine \mathbb{R}^{n+1} de birim kutu denir.

Birim kutunun uçları (köşeleri) kümesi genellikle V^{n+1} ile gösterilir. Gösterim kolaylığı açısından birim kutuyu B ve köşelerinin kümesini V ile gösterebiliriz.

(4.1) ailesini

$$a_i : B \rightarrow \mathbb{R}, \ a_i(x) = \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i)x_i, \ (i = 0, 1, \dots, n)$$

olmak üzere

$$a_0(x) + a_1(x)s + \dots + a_n(x)s^n \tag{4.5}$$

şeklinde yazabiliriz.

Burada Ω nın gerçel eksenin yukarısında bulunan bir $s = re^{j\theta}$ ($\theta = \pi - \theta_0$, $r > 0$) sınır değerini (4.5) de yerine yazdığımızda

$$f(x) := a_0(x) + a_1(x)re^{j\theta} + \dots + a_n(x)r^n e^{j(n\theta)}$$

afin dönüşümünü elde ederiz. Burada f afin dönüşümü altında B birim kutusunun görüntüsünü ele alacağız. Bu görüntü (4.3) ailesinin $s = re^{j(\pi-\theta_0)}$ daki değer kümesidir.

Tanım 4.6 $v \in V$ alalım. $w \in V$ olmak üzere

$$k = i \text{ iken } v_i \neq w_i, \text{ ve } k \neq i \text{ iken } v_k = w_k$$

olacak şekilde bir i indisi varsa, w köşe noktasına v nin bir komşu köşesi denir. v nin komşu köşelerinin kümesi N_v ile gösterilir. $w \in N_v$, $f(w) \neq f(v)$ olacak şekildeki w köşe noktası için

$$\{\alpha[f(w) - f(v)] : \alpha > 0\}$$

yarı doğrusuna $f(v)$ deki bir kenar yön denir (Sıfırı dışlamak için $f(w) \neq f(v)$ koşulu konulmaktadır). $f(v)$ deki kenar yönlerin kümesi ise E_v ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 4.1 $v \in V$ olsun. $f(v)$ noktasının $f(B)$ görüntü poligonunun bir uç noktası olması için gerekli ve yeterli koşul E_v nin bir açık yarı düzlem tarafından içerilmesidir.

Kanıt. \Rightarrow). $f(v)$, $f(B)$ poligonunun bir uç noktası olsun. $f(B)$ konveks poligon olduğundan öyle bir açık yarı düzlem vardır ki $f(B)$ bu açık yarı düzlemde, $f(v)$ ise bu açık yarı düzlemin sınırındadır. Bu durumda E_v de bu açık yarı düzlemedir.

\Leftarrow .) Önce $v = (0, 0, \dots, 0)^T$ alalım. v nin komşu köşeleri $v^i = (v_0^i, v_1^i, \dots, v_n^i)^T$ ($v_0^i = 1, v_k^i = 0$) noktalarıdır. $x \in B$, $x \neq 0$ alalım. Bu durumda

$$x = \sum_{i=0}^n x_i v^i, \quad x_i \in [0, 1], \quad \sum_{i=0}^n x_i > 0$$

dir. Eğer $f(x) = Ax + b$ ise

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^n x_i v^i\right) - f(v) &= A\left(\sum_{i=0}^n x_i v^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^n x_i (Av^i) \\ &= \sum_{i=0}^n x_i [Av^i + b - A0 - b] \\ &= \sum_{i=0}^n x_i [f(v^i) - f(v)] \end{aligned}$$

elde edilir. Yardımcı teoremin koşuluna göre, $f(w) \neq f(v)$ koşulunu sağlayan v^i ler için $\{\alpha[f(v^i) - f(v)] : \alpha > 0\}$ yarı doğrularının hepsi bir açık yarı düzlemdir. Buna göre her $x \in B$ için ya $f(x) - f(v) = 0$ yada $f(x) - f(v)$ da bu açık yarı düzlemdir. Bundan dolayı $f(v)$ noktası $f(B)$ poligonunun bir köşe noktasıdır.

$v_* \in V$ ve $v_* \neq 0$ olsun. Bu durumda $f(v_*)$ noktasının $f(B)$ nin bir köşe noktası olduğunu gösterelim. $y = x - v_*$ dönüşümünü alalım ve

$$f_1(y) = f(x) - f(v_*)$$

afin dönüşümünü tanımlayalım. $\tilde{B} = \{x - v_* : x \in B\}$ kutusu, B birim kutusunun v_* kadar ötelenmişidir ve bir köşesi $v = (0, 0, \dots, 0)^T$ noktasındadır. $w \in N_{v_*}$ olmak üzere

$$v = v_* - v_* \in \tilde{B}$$

$$\tilde{w} = w - v_* \in \tilde{B}$$

için

$$f_1(v) = f(v_*) - f(v_*)$$

$$f_1(\tilde{w}) = f(w) - f(v_*)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \tilde{E}_v &= \bigcup_{\tilde{w} \in N_v} \{\alpha[f_1(\tilde{w}) - f_1(v)] : \alpha > 0\} \\ &= \bigcup_{w \in N_{v_*}} \{\alpha[f(w) - f(v_*)] : \alpha > 0\} \end{aligned}$$

dır. Buna göre E_{v_*} ı bulunduran açık yarı düzlem \tilde{E}_v yi de bulundurur. Diğer taraftan

$$f(v_*) = f_1(v) + f(v_*)$$

$$f(B) = f_1(\tilde{B}) + f(v_*)$$

dir. $f(v)$, $f(B)$ nin köşesi olduğundan $f_1(v)$ de $f_1(\tilde{B})$ nin köşesidir. $f_1(\tilde{B})$, $f(B)$ nin $f(v_*)$ kadar ötelenmiş ve $f_1(v)$, $f(v_*)$ ın $f(v_*)$ kadar ötelenmiş olduğundan $f(v_*)$ da $f(B)$ nin bir köşesidir. ■

Yardımcı teoremden görüldüğü üzere bir $v \in V$ için $f(v)$ noktasının $f(B)$ poligonunun köşesi olup olmadığı, $f(v)$ deki kenar yönleri bulunduran bir yarı uzayın varlığına bağlıdır. Bu nedenle birim kutunun keyfi bir $v \in V$ köşesi için $f(v)$ deki kenar yönleri belirleyelim. v nin toplam $n+1$ tane komşu köşesi olduğundan bu komşu köşeleri w^0, w^1, \dots, w^n ile gösterebiliriz. Öncelikle

$$f(w^i) - f(v) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

kompleks sayılarını bulalım. $i = 0, 1, \dots, n$ için

$$f(w^i) - f(v) = [a_0(w^i) - a_0(v)] + [a_1(w^i) - a_1(v)]re^{j\theta} + \dots + [a_i(w^i) - a(v)]r^i e^{j(i\theta)} + \dots + [a_n(w^n) - a(v)]r^n e^{j(n\theta)}$$

dir. Burada

$$a_k(x) = \alpha_k + (\beta_k - \alpha_k)x_k, \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

ve

$$a_k(w^i) - a_k(v) = \begin{cases} 1 & , \quad i \neq k \text{ ise} \\ 0 & , \quad i = k \text{ ise} \end{cases}$$

olduğundan

$$f(w^i) - f(v) = (-1)^{v_i} (\beta_i - \alpha_i) r^i e^{j(i\theta)} \neq 0$$

dir. Bu durumda $f(v)$ deki kenar yönlerin kümesi

$$E_v = \bigcup_{i=0}^n \{(-1)^{v_i} \alpha (\beta_i - \alpha_i) r^i e^{j(i\theta)} : \alpha > 0\}$$

olarak elde edilir.

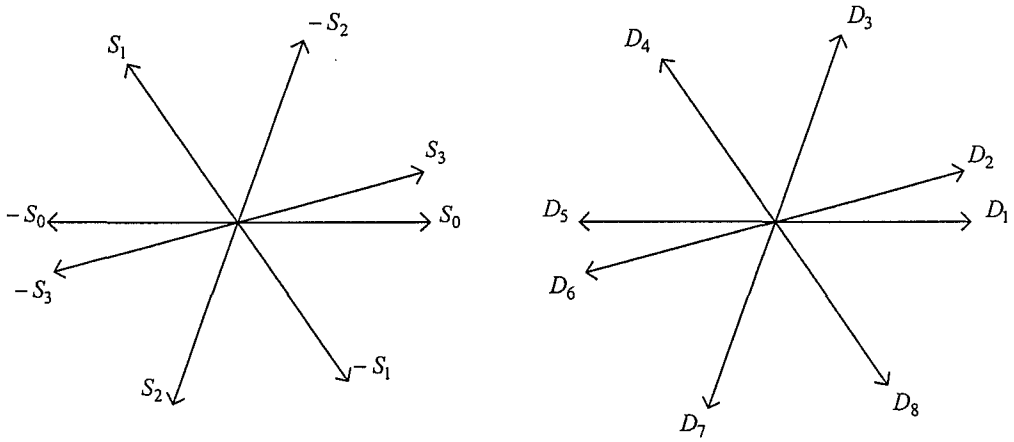
Eğer $S_i = e^{j(i\theta)}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) birim kompleks sayılarını tanımlarsak E_v yi oluşturan yarı doğruların yönleri

$$\pm S_0, \pm S_1, \dots, \pm S_n$$

kompleks sayıların ürettiği yönlerdir. Buna göre bir $v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in V$ köşesi için E_v deki yarı doğrular

$$(-1)^{v_0} S_0, (-1)^{v_1} S_1, \dots, (-1)^{v_n} S_n$$

kompleks sayıları tarafından üretilir. Yardımcı Teoreme göre $f(B)$ görüntü kümesinin köşe noktalarını bulmak için $\pm S_0, \pm S_1, \dots, \pm S_n$ $(n+1)$ -lilerin içerisinde bir yarı uzayda kalan $(n+1)$ -lileri bulmak gerekmektedir. Eğer bu yönleri Şekil (4.3) deki gibi sıralayacak olursak bir $v \in V$ köşe noktasının $f(v)$



Şekil 4.3: E_v deki yarı doğruların yönleri

nin bir uç noktası olması için E_v kenar yönleri kümesinin aşağıda sıralanmış $(n+1)$ -lilerden birisi tarafından üretilmiş olması gerekir:

$$\begin{aligned} &\{D_1, D_2, \dots, D_{n+1}\} \\ &\{D_2, D_3, \dots, D_{n+2}\} \\ &\vdots \\ &\{D_{2n+2}, D_1, D_2, \dots, D_n\}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Bu $(n+1)$ -liler içerisinde her bir $\pm S_i$ kompleks sayılarından ya $-S_i$ yada S_i vardır.

Yardımcı Teorem 4.2 *Değer kümesinin uç noktaları ile (4.6) daki $(2n+2)$ tane $(n+1)$ -liler arasında bire-bir eşleme vardır.*

Kanıt. Değer kümesinin bir uç noktası z ve $z = f(v)$ olacak şekilde $v \in V$ alalım. Eğer $z = f(w)$ olacak şekilde $w \in V$, $w \neq v$ varsa

$$\{(-1)^{v_0} S_0, (-1)^{v_1} S_1, \dots, (-1)^{v_n} S_n\} = \{(-1)^{w_0} S_0, (-1)^{w_1} S_1, \dots, (-1)^{w_n} S_n\}$$

olur. Bu ise z uç noktasına karşılık bir tek

$$\{D_k, D_{k+1}, \dots, D_{k+n}\}$$

$(n+1)$ -lisinin olduğunu gösterir.

Diğer taraftan (4.6) dan bir $(n+1)$ -li alalım. $v = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ köşesi

$$v_i = \begin{cases} 0 & , S_i \in \{D_k, D_{k+1}, \dots, D_{k+n}\} \\ 1 & , S_i \in \{D_k, D_{k+1}, \dots, D_{k+n}\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu v köşesi için $f(v)$ değer kümesinin bir uç noktasıdır ve $z = f(v)$ uç noktası (4.6) dan bir $(n+1)$ -liye karşılık gelir. ■

Örnek 4.1 ([23])

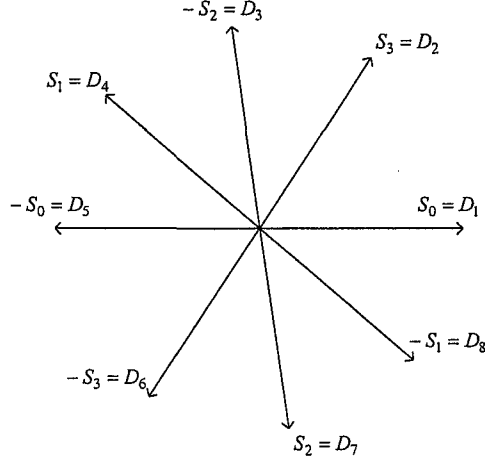
$$p(s, q) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + q_3 s^3, \quad 0 < \alpha_i < q_i < \beta_i, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

3. dereceden aralık polinom ailesini ele alalım. $\theta_0 = 41^\circ$ için Ω (4.2) sektörü verilsin. Bu durumda yönleri veren $S_i = e^{j(i\theta)}$ ($\theta = 139^\circ$, $i = 0, 1, 2, 3$) birim kompleks sayıları

$$\pm 1, \pm e^{j139^\circ}, \pm e^{j278^\circ}, \pm e^{j417^\circ}$$

dir. Değer kümesinin uç noktalarına karşılık gelen köşe noktalarını veren 4-lüler ve bu 4-lülere karşılık gelen köşe noktaları ise

$$\begin{aligned} \{D_1, D_2, D_3, D_4\} &= \{S_0, S_1, -S_2, S_3\} \rightarrow \mathbf{v}^1 = (0, 0, 1, 0) \\ \{D_2, D_3, D_4, D_5\} &= \{-S_0, S_1, -S_2, S_3\} \rightarrow \mathbf{v}^2 = (1, 0, 1, 0) \\ \{D_3, D_4, D_5, D_6\} &= \{-S_0, S_1, -S_2, -S_3\} \rightarrow \mathbf{v}^3 = (1, 0, 1, 1) \\ \{D_4, D_5, D_6, D_7\} &= \{-S_0, S_1, S_2, -S_3\} \rightarrow \mathbf{v}^4 = (1, 0, 0, 1) \\ \{D_5, D_6, D_7, D_8\} &= \{-S_0, -S_1, S_2, -S_3\} \rightarrow \mathbf{v}^5 = (1, 1, 0, 1) \\ \{D_6, D_7, D_8, D_1\} &= \{S_0, -S_1, S_2, -S_3\} \rightarrow \mathbf{v}^6 = (0, 1, 0, 1) \\ \{D_7, D_8, D_1, D_2\} &= \{S_0, -S_1, S_2, S_3\} \rightarrow \mathbf{v}^7 = (0, 1, 0, 0) \\ \{D_8, D_1, D_2, D_3\} &= \{S_0, -S_1, -S_2, S_3\} \rightarrow \mathbf{v}^8 = (0, 1, 1, 0) \end{aligned}$$



Şekil 4.4: ± 1 , $\pm e^{j139^\circ}$, $\pm e^{j278^\circ}$, $\pm e^{j417^\circ}$ yönleri

dır. Dolayısıyla değer kümesinin uç noktalarını veren sekiz polinom sırasıyla

$$\begin{aligned}
 p_1(s) &= \alpha_0 + \alpha_1 s + \beta_2 s^2 + \alpha_3 s^3, & p_2(s) &= \beta_0 + \alpha_1 s + \beta_2 s^2 + \alpha_3 s^3 \\
 p_3(s) &= \beta_0 + \alpha_1 s + \beta_2 s^2 + \beta_3 s^3, & p_4(s) &= \beta_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \beta_3 s^3 \\
 p_5(s) &= \beta_0 + \beta_1 s + \alpha_2 s^2 + \beta_3 s^3, & p_6(s) &= \alpha_0 + \beta_1 s + \alpha_2 s^2 + \beta_3 s^3 \\
 p_7(s) &= \alpha_0 + \beta_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3, & p_8(s) &= \alpha_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \alpha_3 s^3
 \end{aligned}$$

olarak belirlenmiş olur.

4.4 Kompleks aralık polinomların sektör kararlılığı

$$p(s, q) = (q_0 + jq_1) + (q_2 + jq_3)s + \dots + (q_{2n} + jq_{2n+1})s^n, \quad (4.7)$$

$$\alpha_i \leq q_i \leq \beta_i \quad (i = 0, 1, \dots, 2n + 1)$$

kompleks aralık polinom ailesinin (4.2) Ω kararlılığı problemini ele alacağız. Burada

$$0 \notin [\alpha_{2n}, \beta_{2n}] \text{ veya } 0 \notin [\alpha_{2n+1}, \beta_{2n+1}] \quad (4.8)$$

dir. (4.8) koşulu derecenin düşmemesini garanti eder.

(4.7) ailesinin Hurwitz kararlılığı probleminde, yani Ω sol açık yarı düzlem olduğunda (4.7) ailesinin kararlılığı için 8 tane uç polinomun kararlılığı yeterlidir ([3]). Burada (4.7) ailesinin Ω kararlılığı için en fazla $8(n + 1)$ tane uç polinomun kararlılığının yeterli olduğunu göstereceğiz.

Aralık polinom ailelerinde görüntü kümesini bulmak için uyguladığımız yöntemi kompleks aralık polinomlar için uygulayacağız. (4.7) ailesi ve $\theta = \pi - \theta_0$ olmak üzere $s = re^{j\theta}$ ($r > 0$) verilsin. Eğer

$$q_i = \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i)x_i, \quad (i = 0, 1, \dots, 2n + 1)$$

dönüşümünü uygularsak $[\alpha_i, \beta_i]$ aralığı $[0, 1]$ aralığına dönüştür. (4.7) ailesinin görüntü kümesi,

$$\begin{aligned} & \{(\beta_0 - \alpha_0)[0, 1] + j(\beta_1 - \alpha_1)[0, 1]\} + \{(\beta_2 - \alpha_2)[0, 1] + j(\beta_3 - \alpha_4)[0, 1]\}s \\ & + \dots + \{(\beta_n - \alpha_n)[0, 1] + j[0, 1]\}s^n \quad (4.9) \end{aligned}$$

ailesinin görüntü kümesinin sabit bir kompleks sayı kadar ötelenmiştir. Buna göre (4.9) ailesinin G görüntü kümesi (4.9) da $s = re^{j\theta}$ yazılarak aşağıdaki gibi belirlenmiş olur:

$$G = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + z_1 + \dots + z_{2n+1}, \text{ her } z \text{ için}$$

$$\text{öyle } x_i \in [0, 1] \text{ vardır ki } z_i = (\beta_i - \alpha_i)x_i r^i e^{j(i\theta)} \quad (i = 0, 1, \dots, 2n + 1) \}.$$

G kümesi, bir ucu orjinde ve açısı $i\theta$ olan doğru parçaları üzerindeki kompleks sayıların toplamıdır:

$$G = G_0 + G_1 + \dots + G_{2n+1},$$

$$G_i = \{(\beta_i - \alpha_i)xr^i e^{j(i\theta)} : x \in [0, 1]\} \quad (i = 0, 1, \dots, 2n + 1)$$

Eğer Teorem 4.2 deki yol izlenirse aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.4 1) Eğer $1, \theta, 2\theta, \dots, n\theta, \frac{\pi}{2}, \theta + \frac{\pi}{2}, 2\theta + \frac{\pi}{2}, \dots, n\theta + \frac{\pi}{2}$ yönleri içinde paralel (çakışık veya zıt yönlü) olanları yoksa G kümesi $4(n + 1) -$ gen bir parpoligondur.

2) Eğer $1, \theta, 2\theta, \dots, n\theta$ yönleri içerisinde k tane paralel ikili varsa G kümesi $(4n - 2k + 4) -$ gen bir parpoligondur.

Aralık polinom ailelerinden farklı olarak (4.7) kompleks aralık ailesinin değer kümesini hem Ω nın gerçel eksen üzerinde kalan sınırındaki $s = re^{j(\pi - \theta_0)}$

($r > 0$) hem de gerçel eksenin aşağısında kalan sınırındaki $s = re^{j(\pi+\theta_0)}$ ($r > 0$) değerleri için ayrıca incelemek gerekir. Bundan dolayı değer kümesi en fazla $8(n+1)$ - gen parpoligondur.

$s = re^{j(\pi-\theta_0)}$ ($r > 0$) değeri için değer kümesinin uç noktalarını belirleyen (en fazla $4(n+1)$ tane) polinomların bulunmasını veren algoritmayı uygulayabiliriz. Bunun için, $B \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ de birim kutu ve bu kutunun köşelerinin kümesini V olsun. (4.7) ailesini

$$a_i : B \rightarrow \mathbb{R}, a_i(x) = \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i)x_i, (i = 0, 1, \dots, 2n+1)$$

olmak üzere

$$[a_0(x) + ja_1(x)] + [a_2(x) + ja_3(x)]s + \dots + [a_{2n}(x) + ja_{2n+1}(x)]s^n \quad (4.9)$$

şeklinde yazabiliriz.

Burada Ω nın gerçel eksenin yukarısında bulunan $s = s = re^{j(\pi-\theta_0)}$ ($r > 0$) sınır değerini (4.9) da yerine yazdığımızda

$$f(x) := [a_0(x) + ja_1(x)] + [a_2(x) + ja_3(x)]re^{j\theta} + \dots + [a_{2n}(x) + ja_{2n+1}(x)]r^n e^{j(n\theta)}$$

afin dönüşümünü elde ederiz.

Eğer $S_{2i} = e^{j(i\theta)}$, $S_{2i+1} = e^{j(i\theta+\frac{\pi}{2})}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) birim kompleks sayılarını tanımlarsak E_v yi oluşturan yarı doğruların yönleri

$$\pm S_0, \pm S_1, \dots, \pm S_{2n+1}$$

kompleks sayılarının ürettiği yönlerdir. Buna göre bir $v = (v_0, v_1, \dots, v_{2n+1}) \in V$ köşesi için E_v deki yarı doğrular

$$(-1)^{v_0} S_0, (-1)^{v_1} S_1, \dots, (-1)^{v_{2n+1}} S_{2n+1}$$

kompleks sayıları tarafından üretilir. Bu yönler Şekil (4.3) deki gibi sıralandıktan sonra bu yönlerden bir açık yarı düzlemde kalacak şekilde

$$\begin{aligned} & \{D_1, D_2, \dots, D_{2n+2}\} \\ & \{D_2, D_3, \dots, D_{2n+3}\} \\ & \vdots \\ & \{D_{4n+4}, D_1, D_2, \dots, D_{2n+1}\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$4(n+1)$ tane $(2n+2) - li$ belirlenmiş ve dolayısıyla değer kümesinin uç noktalarını veren köşe noktaları bulunmuş olur.

Ω nın gerçel eksenin aşağısında bulunan sınırından $s = s = re^{j(\pi+\theta_0)}$ ($r > 0$) sınır değerini (4.9) da yerine yazdığımızda benzer şekilde $4(n+1)$ tane $(2n+2) - li$ belirlenmiş olur.

Teorem 4.5 (4.7) ailesi ve Ω (4.2) sektörü verilsin. Bu ailenin Ω -kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul en fazla $8(n+1)$ tane özel seçilmiş polinomların Ω -kararlı olmasıdır.

Örnek 4.2

$$p(s, q) = (q_0 + jq_1) + (q_2 + jq_3)s + (q_4 + jq_5)s^2 \quad (4.11)$$

$$9 \leq q_0 \leq 10, \quad -2 \leq q_1 \leq -1, \quad 3 \leq q_2 \leq 4, \quad -2 \leq q_3 \leq -1,$$

$$0.1 \leq q_4 \leq 0.2, \quad -0.05 \leq q_5 \leq 0.05$$

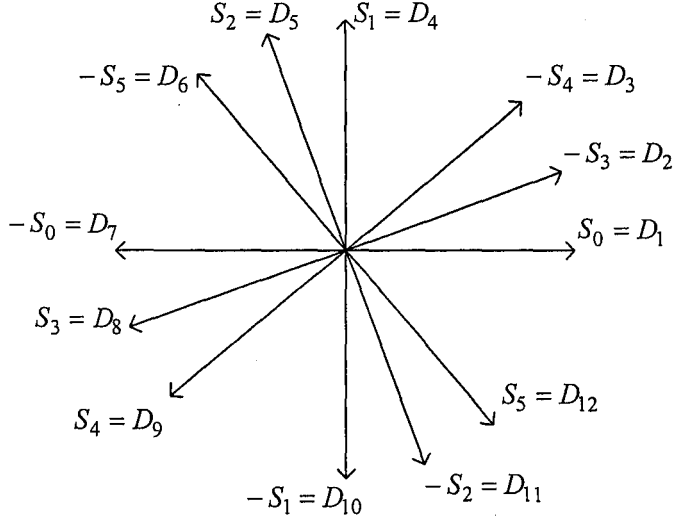
kompleks aralık polinom ailesi ve $\theta_0 = 70^\circ$ olmak üzere (4.2) Ω sektörü verilsin. (4.11) ailesinin değer kümesinin uç noktalarını belirleyen polinomları bulalım. Ω nın gerçel eksen üzerinde kalan sınırındaki $s = re^{j(\pi-\theta_0)}$ ($r > 0$) değerleri için yönleri veren $S_{2i} = e^{j(i\theta)}$, $S_{2i+1} = e^{j(i\theta+\frac{\pi}{2})}$ ($\theta = 110^\circ$, $i = 0, 1, 2$) birim kompleks sayıları

$$\pm 1, \pm e^{j90^\circ}, \pm e^{j110^\circ}, \pm e^{j200^\circ}, \pm e^{j220^\circ}, \pm e^{j310^\circ}$$

dır. Yönler sıralandıktan sonra bu yönler içerisinde açık yarı düzlemde kalan 12 tane 6-*lı*

$$\begin{aligned} \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\}, & \quad \{D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7\}, \\ \{D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8\}, & \quad \{D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9\}, \\ \{D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}\}, & \quad \{D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}\}, \\ \{D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}\}, & \quad \{D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_1\}, \\ \{D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_1, D_2\}, & \quad \{D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_1, D_2, D_3\}, \\ \{D_{11}, D_{12}, D_1, D_2, D_3, D_4\}, & \quad \{D_{12}, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\} \end{aligned}$$

dir. Burada



Şekil 4.5: ± 1 , $\pm e^{j90^\circ}$, $\pm e^{j110^\circ}$, $\pm e^{j200^\circ}$, $\pm e^{j220^\circ}$, $\pm e^{j310^\circ}$ yönleri

$\{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\} = \{S_0, S_1, S_2, -S_3, -S_4, -S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^1 = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$
 $\{D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7\} = \{-S_0, S_1, S_2, -S_3, -S_4, -S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^2 = (1, 0, 0, 1, 1, 1)$
 $\{D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8\} = \{-S_0, S_1, S_2, S_3, -S_4, -S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^3 = (1, 0, 0, 0, 1, 1)$
 $\{D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9\} = \{-S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, -S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^4 = (1, 0, 0, 0, 0, 1)$
 $\{D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}\} = \{-S_0, -S_1, S_2, S_3, S_4, -S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^5 = (1, 1, 0, 0, 0, 1)$
 $\{D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}\} = \{-S_0, -S_1, -S_2, S_3, S_4, -S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^6 = (1, 1, 1, 0, 0, 1)$
 $\{D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}\} = \{-S_0, -S_1, -S_2, S_3, S_4, S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^7 = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$
 $\{D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_1\} = \{S_0, -S_1, -S_2, S_3, S_4, S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^8 = (0, 1, 1, 0, 0, 0)$
 $\{D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_1, D_2\} = \{S_0, -S_1, -S_2, -S_3, S_4, S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^9 = (0, 1, 1, 1, 0, 0)$
 $\{D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_1, D_2, D_3\} = \{S_0, -S_1, -S_2, -S_3, -S_4, S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^{10} = (0, 1, 1, 1, 1, 0)$
 $\{D_{11}, D_{12}, D_1, D_2, D_3, D_4\} = \{S_0, S_1, -S_2, -S_3, -S_4, S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^{11} = (0, 0, 1, 1, 1, 0)$
 $\{D_{12}, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\} = \{S_0, S_1, S_2, -S_3, -S_4, S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^{12} = (0, 0, 0, 1, 1, 0)$

olduğundan, $s = re^{j(\pi-\theta_0)}$ ($r > 0$) daki değer kümesinin uç noktalarını veren polinomlar

$$p_1(s) = (9 - 2j) + (3 - j)s + (0.2 + 0.05j)s^2$$

$$p_2(s) = (10 - 2j) + (3 - j)s + (0.2 + 0.05j)s^2$$

$$p_3(s) = (10 - 2j) + (3 - 2j)s + (0.2 + 0.05j)s^2$$

$$p_4(s) = (10 - 2j) + (3 - 2j)s + (0.1 + 0.05j)s^2$$

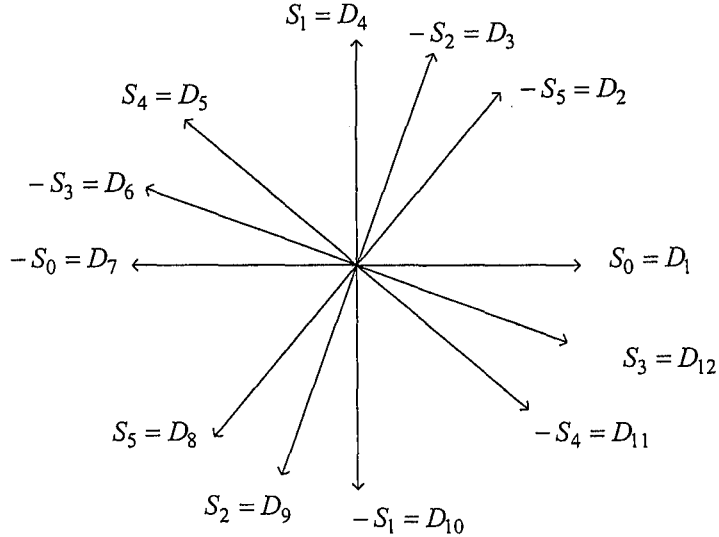
$$\begin{aligned}
p_5(s) &= (10 - j) + (3 - 2j)s + (0.1 + 0.05j)s^2 \\
p_6(s) &= (10 - j) + (4 - 2j)s + (0.1 + 0.05j)s^2 \\
p_7(s) &= (10 - j) + (4 - 2j)s + (0.1 - 0.05j)s^2 \\
p_8(s) &= (9 - j) + (4 - 2j)s + (0.1 - 0.05j)s^2 \\
p_9(s) &= (9 - j) + (4 - j)s + (0.1 - 0.05j)s^2 \\
p_{10}(s) &= (9 - j) + (4 - j)s + (0.2 - 0.05j)s^2 \\
p_{11}(s) &= (9 - 2j) + (4 - j)s + (0.2 - 0.05j)s^2 \\
p_{12}(s) &= (9 - 2j) + (3 - j)s + (0.2 - 0.05j)s^2
\end{aligned}$$

dır.

Ω nın gerçel eksenin aşağısında kalan sınırındaki $s = re^{j(\pi+\theta_0)}$ ($r > 0$) değerleri için yönleri veren $S_{2i} = e^{j(i\theta)}$, $S_{2i+1} = e^{j(i\theta+\frac{\pi}{2})}$ ($\theta = 250^\circ$, $i = 0, 1, 2$) birim kompleks sayıları

$$\pm 1, \pm e^{j90^\circ}, \pm e^{j250^\circ}, \pm e^{j340^\circ}, \pm e^{j140^\circ}, \pm e^{j230^\circ}$$

dır. Bu yönler Şekil 4.6 daki gibi sıralandıktan sonra açık yarı düzlemde kalan



Şekil 4.6: $\pm 1, \pm e^{j90^\circ}, \pm e^{j250^\circ}, \pm e^{j340^\circ}, \pm e^{j140^\circ}, \pm e^{j230^\circ}$ yönleri

12 tane 6-lı ve karşılık gelen yönler

$\{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\} = \{S_0, S_1, -S_2, -S_3, S_4, -S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^1 = (0, 0, 1, 1, 0, 1)$
 $\{D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7\} = \{-S_0, S_1, -S_2, -S_3, S_4, -S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^2 = (1, 0, 1, 1, 0, 1)$
 $\{D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8\} = \{-S_0, S_1, -S_2, -S_3, S_4, S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^3 = (1, 0, 1, 1, 0, 0)$
 $\{D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9\} = \{-S_0, S_1, S_2, -S_3, S_4, S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^4 = (1, 0, 0, 1, 0, 0)$
 $\{D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}\} = \{-S_0, -S_1, S_2, -S_3, S_4, S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^5 = (1, 1, 0, 1, 0, 0)$
 $\{D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}\} = \{-S_0, -S_1, S_2, -S_3, -S_4, S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^6 = (1, 1, 0, 1, 1, 0)$
 $\{D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}\} = \{-S_0, -S_1, S_2, S_3, -S_4, S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^7 = (1, 1, 0, 0, 1, 0)$
 $\{D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_1\} = \{S_0, -S_1, S_2, S_3, -S_4, S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^8 = (0, 1, 0, 0, 1, 0)$
 $\{D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_1, D_2\} = \{S_0, -S_1, S_2, S_3, -S_4, -S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^9 = (0, 1, 0, 0, 1, 1)$
 $\{D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_1, D_2, D_3\} = \{S_0, -S_1, -S_2, S_3, -S_4, -S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^{10} = (0, 1, 1, 0, 1, 1)$
 $\{D_{11}, D_{12}, D_1, D_2, D_3, D_4\} = \{S_0, S_1, -S_2, S_3, -S_4, -S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^{11} = (0, 0, 1, 0, 1, 1)$
 $\{D_{12}, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\} = \{S_0, S_1, -S_2, S_3, S_4, -S_5\} \rightarrow \mathbf{v}^{12} = (0, 0, 1, 0, 0, 1)$

dir ve buradan $s = re^{j(\pi+\theta_0)}$ ($r > 0$) daki değer kümesinin uç noktalarını veren polinomlar

$$\begin{aligned}
p_{13}(s) &= (9 - 2j) + (4 - j)s + (0.1 + 0.05j)s^2 \\
p_{14}(s) &= (10 - 2j) + (4 - j)s + (0.1 + 0.05j)s^2 \\
p_{15}(s) &= (10 - 2j) + (4 - j)s + (0.1 - 0.05j)s^2 \\
p_{16}(s) &= (10 - 2j) + (3 - j)s + (0.1 - 0.05j)s^2 \\
p_{17}(s) &= (10 - j) + (3 - j)s + (0.1 - 0.05j)s^2 \\
p_{18}(s) &= (10 - j) + (3 - j)s + (0.2 - 0.05j)s^2 \\
p_{19}(s) &= (10 - j) + (3 - 2j)s + (0.2 - 0.05j)s^2 \\
p_{20}(s) &= (9 - j) + (3 - 2j)s + (0.2 - 0.05j)s^2 \\
p_{21}(s) &= (9 - j) + (3 - 2j)s + (0.2 + 0.05j)s^2 \\
p_{22}(s) &= (9 - j) + (4 - 2j)s + (0.2 + 0.05j)s^2 \\
p_{23}(s) &= (9 - 2j) + (4 - 2j)s + (0.2 + 0.05j)s^2 \\
p_{24}(s) &= (9 - 2j) + (4 - 2j)s + (0.1 + 0.05j)s^2
\end{aligned}$$

olarak belirlenmiş olur. $p_1(s), p_2(s), \dots, p_{24}(s)$ polinomları Ω -kararlı olduğundan (4.11) aralık kompleks polinomlar ailesi de Ω -kararlıdır.

5 POLİNOMLAR POLİTOPUNDA KENARLARIN BULUNMASI

$Q \subset \mathbb{R}^l$ bir kutu (box)

$$Q = \{\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_l)^T : \alpha_i \leq q_i \leq \beta_i\}$$

olmak üzere

$$a_i(\mathbf{q}) : Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$a_n(\mathbf{q}) > 0$$

afin fonksiyonları verilsin (T sembolü transpozu göstermektedir). Bu durumda

$$p(s, \mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q})s + \dots + a_n(\mathbf{q})s^n \quad (5.1)$$

polinomlar ailesi bir \mathcal{P} polinomlar politopunu tanımlar. Kenar teoremine göre [4, 24], eğer bu politopta tüm kenarlar kararlıysa \mathcal{P} ailesi de kararlıdır. Diğer taraftan, \mathcal{P} politopunun her bir kenarı Q kutusunun en az bir kenarının görüntüsüdür. Dolayısıyla, eğer Q kutusunun tüm kenarlarının görüntüleri olan polinom segmentleri kararlı ise \mathcal{P} ailesi de kararlıdır. Q kutusunun kenar sayısı $l \cdot 2^{l-1}$ dir ve bu kenarların bazılarının görüntüsü \mathcal{P} politopunun gerçek kenarı olmayabilir. Buna göre de bu bölümde \mathcal{P} nin gerçek kenarlarının belirlenmesi problemini ele alacağız.

Elde edilen sonuçlar, polinomlar politopu (5.1) biçiminde değil, sonlu tane polinomun konveks zarfı biçiminde verildiğinde de geçerlidir.

5.1 Polinomlar politopunda uçların belirlenmesi

Eğer her polinoma, katsayılarından oluşan bir vektör karşılık getirirsek (5.1) \mathcal{P} ailesine \mathbb{R}^{n+1} uzayında

$$P = \{\mathbf{a}(\mathbf{q}) = (a_0(\mathbf{q}), a_1(\mathbf{q}), \dots, a_n(\mathbf{q}))^T : \mathbf{q} \in Q\} \quad (5.2)$$

politopu karşılık gelmektedir.

$a_i(\mathbf{q})$ fonksiyonlarının afin fonksiyonlar olduklarını dikkate alırsak

$$\mathbf{a}(\mathbf{q}) = A \cdot \mathbf{q} + \mathbf{b} \quad (5.3)$$

olacak biçimde A matrisi ve \mathbf{b} vektörü bulabiliriz. Diğer yandan, genelliği bozmaksızın

$$Q = B^l = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$$

alabiliriz. Çünkü

$$q_i = \alpha_i + x_i(\beta_i - \alpha_i) \quad (i = 1, 2, \dots, l)$$

dönüşümleriyle Q kutusu B^l kutusuna, (5.1) ailesi ise yeni bir afin aileye dönüşür. (5.3) ifadesinde \mathbf{b} vektörü ötelemeyi ifade ettiğinden, yine genelliği bozmaksızın $\mathbf{b} = 0$ alabiliriz. B^l nin her bir ucu 0 ve 1 lerin bir $l - li$ sidir. Yani her uç, $x_i = 0$ veya 1 olmak üzere (x_1, x_2, \dots, x_l) biçimindedir. Bu uca komşu (y_1, y_2, \dots, y_l) ucu için öyle j vardır ki $x_i = y_i, i \neq j$ ($i = 1, 2, \dots, l$), $x_j \neq y_j$ sağlanmaktadır. Örneğin,

$$l = 3, B^3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$$

için $(0, 1, 1)$ e komşu uçlar

$$(1, 1, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 0)$$

uçlarıdır. B^l nin kenarlarını ise komşu uçları birleştiren segmentler oluşturmaktadır.

P politopunun gerçek uçlarını bulmak için B^l nin hangi uçlarının, B^l nin A matrisi altında görüntü kümesi olan $A(B^l)$ nin uç noktasına dönüştüğünü bulmak gerekir. Dolayısıyla, aşağıdaki probleme gelmiş bulunuyoruz.

\mathbb{R}^{n+1} uzayında sonlu tane $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ noktaları verilsin ve P kümesi bu noktaların konveks zarfı olarak tanımlansın:

$$P = \text{conv} \{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \}.$$

\mathbf{a}_i noktalarından hangilerinin P nin bir uç noktası olup-olmadığını belirlememiz gerekmektedir.

Yardımcı Teorem 5.1

$$\mathbf{a} \in \text{conv} \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\} \quad (5.4)$$

olması için gerekli ve yeterli koşul

$$0 \in \text{conv}\{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}, \dots, \mathbf{a}_k - \mathbf{a}\} \quad (5.5)$$

olmasıdır.

Kanıt. Konveks zarfın tanımına göre (5.4) sağlanıyorsa

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$$

olacak biçimde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sayıları vardır. Buradan da

$$0 = \lambda_1(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}) + \lambda_2(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}) + \dots + \lambda_k(\mathbf{a}_k - \mathbf{a})$$

elde edilir ki bu da (5.5) in sağlandığını gösterir. ■

Yardımcı Teorem 5.1 e göre genelliği bozmaksızın P nin sıfırı içerip-içermediğini belirlememiz yeterli olacaktır.

j . sütunu ($j = 1, 2, \dots, k$) \mathbf{a}_j vektörü olan B matrisini tanımlayalım:

$$B = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k].$$

Teorem 5.1 $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)^T$ olmak üzere

$$\begin{aligned} B\Lambda &= 0 \\ \lambda_i &\geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, k) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \rightarrow \max$$

doğrusal programlama problemini ele alalım. P kümesinin sıfırı içermemesi için gerekli ve yeterli koşul (5.6) nın optimal değerinin sıfır olmasıdır.

Kanıt. \Rightarrow). (5.6) nın optimal değeri sıfır olmasın. Bu durumda

$$B\Lambda^* = 0, \quad \lambda_i^* \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad \lambda_1^* + \lambda_2^* + \dots + \lambda_k^* > 0$$

olacak biçimde bir $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_k^*)^T$ vektörü bulunabilir.

$$\Lambda = \frac{\Lambda^*}{\lambda_1^* + \lambda_2^* + \dots + \lambda_k^*}$$

olarak tanımlanırsa

$$B\Lambda = 0, \lambda_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, k), \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$$

olur. Dolayısıyla

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = 0$$

bu ise P nin sıfırı içerdiğini gösterir.

\Leftarrow). (5.6) nin optimal değeri sıfır olsun. Buna göre

$$B\Lambda = 0, \lambda_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, k) \quad (5.7)$$

kümesi bir tek $\Lambda = 0$ dan oluşmaktadır. Yani

$$B\Lambda = 0, \lambda_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, k), \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$$

olacak biçimde bir $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)^T$ bulunamaz. Bu ise P nin sıfırı içermediğini gösterir. ■

Not. (5.6) probleminin optimal değeri ya sıfırdır, ya da sonsuzdur. Çünkü, eğer (5.7) kümesinde sıfırdan farklı bir Λ vektörü varsa, α keyfi pozitif sabit olmak üzere $\alpha\Lambda$ vektörü de (5.7) kümesindedir.

(5.6) doğrusal programlama probleminin çözümü için simpleks yöntemi uygulanabilir ([25]).

P politopunda her kenar B^l deki en az bir kenarın görüntüsü olduğundan her uç noktası da B^l kutusunda en az bir ucun görüntüsüdür ve B^l deki her ucun A dönüşümü altındaki görüntüsünü aldığımızda aşağıdaki üç durumdan biriyle karşılaşabiliriz.:

- 1) B^l nin ucunun görüntüsü P politopunun da ucudur,
- 2) B^l nin ucunun görüntüsü P politopunda bir kenarın iç noktasıdır,
- 3) Diğer durumlar gerçekleşir.

2) şikkını sağlayan noktaların bulunması zor değildir. B^l nin bir ucunun görüntüsü olan, örneğin, \mathbf{a}_1 noktasını alalım. Yardımcı Teorem 5.1 e göre bu \mathbf{a}_1 noktasının diğer $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_k$ noktalarının konveks zarfında olup-olmadığını belirlemek için önce $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1$ vektörlerini hesaplamamız gerekmektedir. Eğer bu vektörlerin içinde orantılı olanları varsa ve orantı sabiti negatif ise \mathbf{a}_1 vektörü bir kenarın i noktası olacaktır.

Örneğin

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, 1), \mathbf{a}_2 = (-1, 5, 4, 2), \mathbf{a}_3 = (5, -4, 1, -1), \mathbf{a}_4 = (3, 3, 3, 3)$$

ise

$$\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = (-2, 3, 1, 1), \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 = (4, -6, -2, -2), \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_1 = (2, 1, 0, 2)$$

dir ve

$$\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 = (-2) \cdot (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)$$

olduğundan \mathbf{a}_1 noktası $[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ segmentinin i noktası olmaktadır.

Görüldüğü gibi bir $[\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}]$ segmentinin bir değil, birkaç \mathbf{a}_i noktasını içermesi durumunda bu noktaların belirlenmesi ve sıralanması bu yöntemle kolayca yapılabilir.

B^l nin uçlarının görüntüleri için 1), 2) ve 3) şıklarının hangisinin gerekleştıği kenarların bulunması için önemlidir. Bu söylediklerimizi bir algoritmada ifade edelim.

Algoritma 5.1

1. $Q = \{\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_l)^T : \alpha_i \leq q_i \leq \beta_i\}$ kutusu üzerinde tanımlı (5.1) afin ailesi verilsin. nce

$$q_i = \alpha_i + x_i(\beta_i - \alpha_i) \quad (i = 1, 2, \dots, l)$$

dönüşümleri yardımıyla Q kutusunu

$$B^l = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_l) : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, l\}$$

birim kutusuna dönüştürüyoruz ve buna karşılık gelen $p(s, \mathbf{x})$ afin ailesini buluyoruz.

2. B^l kutusunda 0 ve 1 lerden oluşan her ucun \mathbb{R}^{n+1} deki $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ görüntülerini hesaplıyoruz.
3. Yardımcı Teorem 5.1 ve Teorem 5.2 yi uygulayıp, bu \mathbf{a}_i lerden hangilerinin diğerlerinin konveks zarfında olup-olmadığını buluyoruz. Buradan da gerçek uçları oluşturan \mathbf{a}_i ler ortaya çıkar.
4. Gerçek köşeleri bulurken, paralel olarak, köşe noktası olmayıp ancak belli bir $[\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}]$ segmentinin iç noktası olan \mathbf{a}_i noktalarını da belirliyoruz.

Eğer polinomlar politopu sonlu tane polinomun konveks zarfı biçiminde verilmişse uçların bulunması için aynı algoritma uygulanabilir.

Gerçek uçların bulunması için verdiğimiz Algoritma 5.1 i gerçekleştiren bir bilgisayar programı yazılabilir.

5.2 Polinomlar politopunda kenarların belirlenmesi

(5.1) politopu verilsin. Bu politopun uçlarının belirlendiğini varsayalım. Bundan sonra kenarları belirlememiz gerekmektedir.

Teorem 5.2 *Q kutusunda uç sayısı k olsun. Eğer P politopunda da uç sayısı k ise o zaman Q nun tüm kenarlarının görüntüleri P politopunun da kenarıdır.*

Kanıt. Görüntü kümesinin uç sayısı değişmediğinden, kenar sayısı da değişmez kalır. Görüntüde her kenar Q kutusunda en az bir kenarın görüntüsü olduğundan, Q nun tüm kenarlarının görüntüleri P politopunun kenarıdır. ■

Herhangi iki ucu birleştiren segment kenar olmayabilir. B^l de iki komşu uç ve bu uçları birleştiren L segmentini ele alalım. Eğer bu uçlardan en az birisinin görüntüsü 3) şikkındaki özelliği sağlıyorsa o zaman L nin görüntü segmenti P politopunda kenar olamaz. Bununla biz B^l deki bazı kenarların görüntülerini elimine etmiş oluyoruz.

B^l deki bir kenarın görüntüsü olup, uçları P politopunun uçları olan segmentlerin P de kenar olup-olmadığını görmek için aşağıdaki teoremi kullanabiliriz.

Teorem 5.3 $P = \text{conv}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ politopu verilsin ve $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ noktaları uç olsun. \mathbf{a}_i ve \mathbf{a}_j uçlarının B^l de komşu uçların görüntüleri olduklarını varsayalım. $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j}{2}$ olmak üzere

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{b} \quad (5.8)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1, \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

$$\lambda_i + \lambda_j \rightarrow \min \quad (5.9)$$

doğrusal programlama problemini ele alalım.

$[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j]$ segmentinin P nin kenarı olması için gerekli ve yeterli koşul (5.9) optimal değerinin 1 olmasıdır.

Kanıt. \Rightarrow). $[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j]$ segmenti P nin kenarı olsun. Eğer optimal değer 1 den küçükse

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k,$$

$$\sum_{t=1}^n \lambda_t - (\lambda_i + \lambda_j) > 0$$

olacak biçimde $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ vardır. Yani $\mathbf{b} = \frac{1}{2} \mathbf{a}_i + \frac{1}{2} \mathbf{a}_j$ noktası sadece \mathbf{a}_i ve \mathbf{a}_j nin değil, $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j$ dışındaki diğer köşelerin de dahil olduğu bir konveks kombinasyon biçiminde gösterilir. Bu ise $[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j]$ nin kenar olmasıyla çelişir.

\Leftarrow). Eğer optimal değer 1 ise $\lambda_i + \lambda_j \leq \sum_{t=1}^n \lambda_t = 1$ olduğundan (5.8) kümesindeki her $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ için $\lambda_i + \lambda_j = 1, \lambda_t = 0, t \neq i, j$ sağlanır. Yani \mathbf{b} noktası tek biçimde

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2} \mathbf{a}_i + \frac{1}{2} \mathbf{a}_j \quad (5.10)$$

olarak ifade edilir. Bu ise $[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j]$ nin kenar olduğunu gösterir. Gerçekten, olmayana ergi yöntemini kullanırsak eğer $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in P, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \notin [\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j]$

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] \cap [\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j] \neq \emptyset$$

olacak biçimde \mathbf{b}_1 ve \mathbf{b}_2 bulunsaydı, \mathbf{b} vektörü için ya $\mathbf{b} \in \text{conv}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_i\}$ ya da $\mathbf{b} \in \text{conv}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_j\}$ sağlanırdı. $\mathbf{b} \in \text{conv}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_i\}$ olduğunu varsayalım.

O zaman

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_i, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_3 = 1, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \lambda_3 \geq 0 \\ \mathbf{b}_1 &= \sum_{t=1}^n \mu_t \mathbf{a}_t, \quad \sum_{t=1}^n \mu_t = 1, \quad \mu_t \geq 0, \\ \mathbf{b}_2 &= \sum_{t=1}^n \eta_t \mathbf{a}_t, \quad \sum_{t=1}^n \eta_t = 1, \quad \eta_t \geq 0 \end{aligned}$$

alabiliriz. \mathbf{b}_1 ve \mathbf{b}_2 nin ifadelerini \mathbf{b} de yerine yazdığımızda \mathbf{b} nin (5.10) dan farklı yeni bir gösterimini elde ederiz. Dolayısıyla $[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j]$ bir kenardır. ■

Bu teoreme göre, kenarların belirlenmesi için aşağıdaki algoritma uygulanabilir.

Algoritma 5.2

- 1) $P = \text{conv}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ politopu verilsin ve her \mathbf{a}_i noktası uç nokta olsun. B^l kutusunun komşu uçlarının görüntüleri olan tüm $[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j]$ noktalarını birleştiren segmentlerin orta noktaları bulunur.
- 2) (5.8), (5.9) doğrusal programlama problemi çözümlenip, optimal değer hesaplanır.
- 3) Eğer bu değer 1 ise $[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j]$ politopun kenarıdır, 1 den küçük ise kenar değildir.

Kenarların belirlenmesi için verdiğimiz bu algoritmayı da gerçekleştiren bir bilgisayar programı yazılabilir.

Not. Eğer amacımız sadece kenarların belirlenmesi ise o zaman uçlar belirlenmeden, doğrudan Algoritma 5.2 uygulanabilir.

Örnek 5.1 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in B^5$ olmak üzere

$$\begin{aligned} p(s, \mathbf{x}) &= (1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + (2 + 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5)s + \\ &+ (2 + x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5)s^2 + (1 + x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5)s^3 + s^4 \end{aligned}$$

afin polinomlar ailesi verilsin. B^5 birim kutusunun uçları

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= (0, 0, 0, 0, 0), & \mathbf{v}_2 &= (0, 0, 0, 0, 1), & \mathbf{v}_3 &= (0, 0, 0, 1, 0), & \mathbf{v}_4 &= (0, 0, 0, 1, 1), \\
\mathbf{v}_5 &= (0, 0, 1, 0, 0), & \mathbf{v}_6 &= (0, 0, 1, 0, 1), & \mathbf{v}_7 &= (0, 0, 1, 1, 0), & \mathbf{v}_8 &= (0, 0, 1, 1, 1), \\
\mathbf{v}_9 &= (0, 1, 0, 0, 0), & \mathbf{v}_{10} &= (0, 1, 0, 0, 1), & \mathbf{v}_{11} &= (0, 1, 0, 1, 0), & \mathbf{v}_{12} &= (0, 1, 0, 1, 1), \\
\mathbf{v}_{13} &= (0, 1, 1, 0, 0), & \mathbf{v}_{14} &= (0, 1, 1, 0, 1), & \mathbf{v}_{15} &= (0, 1, 1, 1, 0), & \mathbf{v}_{16} &= (0, 1, 1, 1, 1), \\
\mathbf{v}_{17} &= (1, 0, 0, 0, 0), & \mathbf{v}_{18} &= (1, 0, 0, 0, 1), & \mathbf{v}_{19} &= (1, 0, 0, 1, 0), & \mathbf{v}_{20} &= (1, 0, 0, 1, 1), \\
\mathbf{v}_{21} &= (1, 0, 1, 0, 0), & \mathbf{v}_{22} &= (1, 0, 1, 0, 1), & \mathbf{v}_{23} &= (1, 0, 1, 1, 0), & \mathbf{v}_{24} &= (1, 0, 1, 1, 1), \\
\mathbf{v}_{25} &= (1, 1, 0, 0, 0), & \mathbf{v}_{26} &= (1, 1, 0, 0, 1), & \mathbf{v}_{27} &= (1, 1, 0, 1, 0), & \mathbf{v}_{28} &= (1, 1, 0, 1, 1), \\
\mathbf{v}_{29} &= (1, 1, 1, 0, 0), & \mathbf{v}_{30} &= (1, 1, 1, 0, 1), & \mathbf{v}_{31} &= (1, 1, 1, 1, 0), & \mathbf{v}_{32} &= (1, 1, 1, 1, 1)
\end{aligned}$$

dir ve bu uçların görüntüleri sırasıyla (\mathbf{v}_i nin görüntüsüne \mathbf{a}_i diyecek olursak)

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= (1, 2, 2, 1), & \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_{17} = (2, 5, 3, 2), & \mathbf{a}_3 &= (2, 3, 4, 4), \\
\mathbf{a}_4 &= \mathbf{a}_{19} = (3, 6, 5, 5), & \mathbf{a}_5 &= (2, 3, 4, 2), & \mathbf{a}_6 &= \mathbf{a}_{21} = (3, 6, 5, 3), \\
\mathbf{a}_7 &= (3, 4, 6, 5), & \mathbf{a}_8 &= \mathbf{a}_{23} = (4, 7, 7, 6), & \mathbf{a}_9 &= (2, 4, 5, 3), \\
\mathbf{a}_{10} &= \mathbf{a}_{25} = (3, 7, 6, 4), & \mathbf{a}_{11} &= (3, 5, 7, 6), & \mathbf{a}_{12} &= \mathbf{a}_{27} = (4, 8, 8, 7), \\
\mathbf{a}_{13} &= (3, 5, 7, 4), & \mathbf{a}_{14} &= \mathbf{a}_{29} = (4, 8, 8, 5), & \mathbf{a}_{15} &= (4, 6, 9, 7), \\
\mathbf{a}_{16} &= \mathbf{a}_{31} = (5, 9, 10, 8), & \mathbf{a}_{18} &= (3, 8, 4, 3), & \mathbf{a}_{20} &= (4, 9, 6, 6), \\
\mathbf{a}_{22} &= (4, 9, 6, 4), & \mathbf{a}_{24} &= (5, 10, 8, 7), & \mathbf{a}_{26} &= (4, 10, 7, 5), \\
\mathbf{a}_{28} &= (5, 11, 9, 8), & \mathbf{a}_{30} &= (5, 11, 9, 6), & \mathbf{a}_{32} &= (6, 12, 11, 9)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu noktalar için Algoritma 5.1 uygulandığında, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{32}$ noktaları içerisinde $[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j]$ segmenti üzerinde olan hiç bir noktanın bulunmadığı ve P politopunun uç noktalarının ise

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_7, \mathbf{a}_9, \mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{13}, \mathbf{a}_{15}, \mathbf{a}_{18}, \mathbf{a}_{20}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{24}, \mathbf{a}_{26}, \mathbf{a}_{28}, \mathbf{a}_{30}, \mathbf{a}_{32}$$

noktaları olduğu görülür. Bu noktalar için Algoritma 5.2 uygulandığında politopun kenarlarını veren segmentlerin

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3], \quad [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_5], \quad [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_9], \quad [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_{18}], \quad [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_7], \quad [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_{11}], \quad [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_{20}], \\
&[\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_7], \quad [\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_{13}], \quad [\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_{22}], \quad [\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_{15}], \quad [\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_{24}], \quad [\mathbf{a}_9, \mathbf{a}_{11}], \quad [\mathbf{a}_9, \mathbf{a}_{13}], \\
&[\mathbf{a}_9, \mathbf{a}_{26}], \quad [\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{15}], \quad [\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{28}], \quad [\mathbf{a}_{13}, \mathbf{a}_{15}], \quad [\mathbf{a}_{13}, \mathbf{a}_{30}], \quad [\mathbf{a}_{15}, \mathbf{a}_{32}], \quad [\mathbf{a}_{18}, \mathbf{a}_{20}], \\
&[\mathbf{a}_{18}, \mathbf{a}_{22}], \quad [\mathbf{a}_{18}, \mathbf{a}_{26}], \quad [\mathbf{a}_{20}, \mathbf{a}_{24}], \quad [\mathbf{a}_{20}, \mathbf{a}_{28}], \quad [\mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{24}], \quad [\mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{30}], \quad [\mathbf{a}_{24}, \mathbf{a}_{32}], \\
&[\mathbf{a}_{26}, \mathbf{a}_{28}], \quad [\mathbf{a}_{26}, \mathbf{a}_{30}], \quad [\mathbf{a}_{28}, \mathbf{a}_{32}], \quad [\mathbf{a}_{30}, \mathbf{a}_{32}]
\end{aligned}$$

olduğu sonucu elde edilir.

Örnek 5.2

$$p_1(s) = 3 + s + 2s^2 + 5s^3 + s^4, \quad p_2(s) = 5 + 3s + 4s^2 + 3s^3 + s^4,$$

$$p_3(s) = 4 + 3s + 2s^2 + 3s^3 + s^4, \quad p_4(s) = 4 + s + 4s^2 + 5s^3 + s^4,$$

$$p_5(s) = 4 + 3s + 4s^2 + s^3 + s^4$$

polinomları verilsin. Bu polinomların katsayılarına karşılık gelen vektörler sırasıyla,

$$\mathbf{a}_1 = (3, 1, 2, 5, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (5, 3, 4, 3, 1), \quad \mathbf{a}_3 = (4, 3, 2, 3, 1),$$

$$\mathbf{a}_4 = (4, 1, 4, 5, 1), \quad \mathbf{a}_5 = (4, 3, 4, 1, 1)$$

dır. Bu noktalar içerisinde $[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j]$ segmenti üzerinde olan hiç bir nokta bulunmamaktadır. Ayrıca tüm $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ vektörleri $P = \text{conv}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\}$ politopunun uç noktalarıdır. Bu uç noktalar için Algoritma 5.2 uygulandığında

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3], [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4], [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_5], [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4], [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5], [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5], [\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5]$$

segmentlerinin P politopunun kenarları olduğu ve

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2], [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4]$$

segmentlerinin P politopunun bir kenarı olmadığı görülür.

Örnek 5.3 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in B^5$ olmak üzere

$$p(s, \mathbf{x}) = (3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 1) + (2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 + 2)s + (x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 - 3)s^2 + s^3$$

afin polinomlar ailesi verilsin. B^5 birim kutusunun uç noktalarının (Örnek 5.1 deki gibi) görüntüleri sırasıyla

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_6 = (1, 2, -3, 1) \quad \mathbf{a}_2 = (3, 4, 0, 1) \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_8 = (2, -2, -2, 1)$$

$$\mathbf{a}_4 = (4, 0, 1, 1) \quad \mathbf{a}_5 = (-1, 0, -6, 1) \quad \mathbf{a}_7 = (0, -4, -5, 1)$$

$$\mathbf{a}_9 = \mathbf{a}_{14} = (0, 7, -1, 1) \quad \mathbf{a}_{10} = (2, 9, 2, 1) \quad \mathbf{a}_{11} = \mathbf{a}_{16} = (1, 3, 0, 1)$$

$$\mathbf{a}_{12} = (3, 5, 3, 1) \quad \mathbf{a}_{13} = (-2, 5, -4, 1) \quad \mathbf{a}_{15} = (-1, 1, -3, 1)$$

$$\mathbf{a}_{17} = \mathbf{a}_{22} = (4, 4, -2, 1) \quad \mathbf{a}_{18} = (6, 6, 1, 1) \quad \mathbf{a}_{19} = \mathbf{a}_{24} = (5, 0, -1, 1)$$

$$\mathbf{a}_{20} = (7, 2, 2, 1) \quad \mathbf{a}_{21} = (2, 2, -5, 1) \quad \mathbf{a}_{23} = (3, -2, -4, 1)$$

$$\mathbf{a}_{25} = \mathbf{a}_{30} = (3, 9, 0, 1) \quad \mathbf{a}_{26} = (5, 11, 3, 1) \quad \mathbf{a}_{27} = \mathbf{a}_{32} = (4, 5, 1, 1)$$

$$\mathbf{a}_{28} = (6, 7, 4, 1) \quad \mathbf{a}_{29} = (1, 7, -3, 1) \quad \mathbf{a}_{31} = (2, 3, -2, 1)$$

olarak bulunur. Yardımcı Teorem 5.1 ve Teorem 5.2 uygulandığında P politopunun uç noktalarının

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_4 &= (4, 0, 1, 1) & \mathbf{a}_5 &= (-1, 0, -6, 1) & \mathbf{a}_7 &= (0, -4, -5, 1) & \mathbf{a}_{10} &= (2, 9, 2, 1) \\ \mathbf{a}_{12} &= (3, 5, 3, 1) & \mathbf{a}_{13} &= (-2, 5, -4, 1) & \mathbf{a}_{15} &= (-1, 1, -3, 1) & \mathbf{a}_{18} &= (6, 6, 1, 1) \\ \mathbf{a}_{20} &= (7, 2, 2, 1) & \mathbf{a}_{21} &= (2, 2, -5, 1) & \mathbf{a}_{23} &= (3, -2, -4, 1) & \mathbf{a}_{26} &= (5, 11, 3, 1) \\ \mathbf{a}_{28} &= (6, 7, 4, 1) & \mathbf{a}_{29} &= (1, 7, -3, 1) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu uç noktalar için Algoritma 5.2 uygulandığında, politopun kenarları

$$\begin{aligned} &[\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_7], & [\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_{12}], & [\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_{20}], & [\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_7], & [\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_{13}], & [\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_{21}], & [\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_{15}], \\ &[\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_{23}], & [\mathbf{a}_{10}, \mathbf{a}_{12}], & [\mathbf{a}_{10}, \mathbf{a}_{13}], & [\mathbf{a}_{10}, \mathbf{a}_{26}], & [\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{15}], & [\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{28}], & [\mathbf{a}_{13}, \mathbf{a}_{15}], \\ &[\mathbf{a}_{13}, \mathbf{a}_{29}], & [\mathbf{a}_{18}, \mathbf{a}_{20}], & [\mathbf{a}_{18}, \mathbf{a}_{21}], & [\mathbf{a}_{18}, \mathbf{a}_{26}], & [\mathbf{a}_{20}, \mathbf{a}_{23}], & [\mathbf{a}_{20}, \mathbf{a}_{28}], & [\mathbf{a}_{21}, \mathbf{a}_{23}], \\ &[\mathbf{a}_{21}, \mathbf{a}_{29}], & [\mathbf{a}_{26}, \mathbf{a}_{28}], & [\mathbf{a}_{26}, \mathbf{a}_{29}] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 5.4

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (1, 2, 5, 1, 3), & \mathbf{a}_2 &= (5, -2, 1, 17, -5), & \mathbf{a}_3 &= (1, 6, 2, 7, 2), \\ \mathbf{a}_4 &= (11, -1, 7, -2, 12), & \mathbf{a}_5 &= (6, 1, 0, 5, 3), & \mathbf{a}_6 &= (-4, 6, 5, 1, 3), \\ \mathbf{a}_7 &= (3, 1, 3, 5, 7), & \mathbf{a}_8 &= (5, 2, 5, 7, 12), & \mathbf{a}_9 &= (3, 2, 1, 3, 2), \\ \mathbf{a}_{10} &= (2, 6, 2, 4, 3), \end{aligned}$$

olmak üzere $P = \text{conv}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8, \mathbf{a}_9, \mathbf{a}_{10}\}$ politopu verilsin. Algoritma 5.2 uygulandığında

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_5], [\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6], [\mathbf{a}_8, \mathbf{a}_9]$$

segmentleri dışında diğer tüm $[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j]$ segmentlerinin politopun kenarı olduğu görülür.

6 MATRİSLERİN KONVEKS KÜMESİNİN KARARLILIĞI

Bu bölümde matrislerin konveks kümesinin kararlılığı için gerekli ve yeterli koşullar incelenecektir. Önce kompleks matrisler kümesi için kriterler verilecektir. Sonra benzer kriterlerin gerçel matrisler kümesi için geçerli olmadığına dair örnek verilecektir.

6.1 Kompleks matrislerin konveks kümesinin kararlılığı

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ile $n \times n$ tipindeki kompleks matrislerin kümesi, \mathcal{P} kümesi de pozitif belirli Hermitian matrislerin kümesi olsun. Eşlenik transpozunu $*$ ile gösterelim. Eğer bir matrisin özdeğerleri açık sol yarı düzlemde ise bu matrise kararlı matris denir.

Bilindiği gibi Lyapunov kriterine göre $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrisinin kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul

$$-(PA + A^*P) \in \mathcal{P} \quad (6.1)$$

olacak şekilde $P \in \mathcal{P}$ matrisinin olmasıdır ([6]).

Bu kritere denk olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.1 ([26]) *Bir A matrisinin kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul sıfırdan farklı her x vektörü için*

$$x^*(PA + A^*P)x < 0 \quad (6.2)$$

olacak şekilde $P = P(x) \in \mathcal{P}$ matrisinin olmasıdır

Kanıt. \Rightarrow). gerektirmesi (6.1) den elde edilebilir.

\Leftarrow). Sıfırdan farklı her x vektörü için (6.2) yi sağlayan $P = P(x) \in \mathcal{P}$ matrisinin bulunduğunu varsayalım. Olmayana ergi yöntemini uygularsak, A nın

$\text{Re}(\lambda) \geq 0$ koşulunu sağlayan bir λ özdeğeri bulunacaktır. Bu özdeğere karşılık gelen x özvektörü için $Ax = \lambda x$, $x^*A^* = \lambda^*x^*$ sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} x^*(PA + A^*P)x &= x^*PAx + x^*A^*Px \\ &= x^*P\lambda x + \lambda^*x^*Px \\ &= (\lambda + \lambda^*)x^*Px \\ &= 2\text{Re}(\lambda)x^*Px \geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (6.2) ile çelişir. ■

Lineer belirsiz sistemlerinin kararlılığı problemlerinde, bir tek matrisin kararlılığından çok matrislerin bir konveks kümesi \mathcal{K} nın kararlılığının kontrol edilmesi gerekir. Bilindiği gibi \mathcal{K} nın uç noktalarının kararlılığı, \mathcal{K} nın kararlılığını garanti etmez. Bununla beraber bu uç noktalarının tüm gerekli bilgileri buldurduğu gösterilecektir. Öncelikle gerekli bir kaç tanım vereceğiz.

Tanım 6.1 *Matrislerin bir \mathcal{X} kümesi ve sıfırdan farklı her x vektörü için*

- i) $\mathcal{P}(\mathcal{X}) = \{P \in \mathcal{P} : \text{her } A \in \mathcal{X}, PA + A^*P < 0\}$
 - ii) $\mathcal{P}(\mathcal{X}, x) = \{P \in \mathcal{P} : \text{her } A \in \mathcal{X}, x^*(PA + A^*P)x < 0\}$
- olarak tanımlayalım.

Bu tanımlardan

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}) = \bigcap_{x \neq 0} \mathcal{P}(\mathcal{X}, x)$$

olduğu görülür.

Eğer \mathcal{X} kümesi kuadratik kararlıysa $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \neq \emptyset$ dir ([27]).

Yukarıdaki tanımlara göre Lyapunov kriteri A nın kararlı olması için gerekli ve yeterli koşulun $\mathcal{P}(A) \neq \emptyset$ olduğunu ifade ederken, Teorem 6.1, A nın kararlı olması için gerekli ve yeterli koşulun sıfırdan farklı her x vektörü için $\mathcal{P}(A, x) \neq \emptyset$ olduğunu ifade eder. Şimdi matrislerin konveks kümesinin kararlılığını karakterize etmek için Teorem 6.1 deki koşulu kullanacağız.

Teorem 6.2 ([10]) $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ kompakt, konveks küme ve bu kümenin uç noktalarının kümesi \mathcal{E} olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

I) \mathcal{K} kararlıdır,

II) Her $x \neq 0$ için $\mathcal{P}(\mathcal{K}, x) \neq \emptyset$ dir,

III) Her $x \neq 0$ için $\mathcal{P}(\mathcal{E}, x) \neq \emptyset$ dir.

Önce

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}, x) = \mathcal{P}(\mathcal{K}, x)$$

olduğunu gösterelim.

Keyfi bir $P \in \mathcal{P}(\mathcal{E}, x)$ alalım. Bu durumda sıfırdan farklı her x vektörü ve her $A \in \mathcal{E}$ için

$$x^*(PA + A^*P)x < 0$$

dir. Diğer taraftan konveks, kompakt \mathcal{K} kümesi uç noktalarının konveks zarfına eşit olduğundan ([28]), $B \in \mathcal{K}$ için

$$B = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k$$

olacak şekilde $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{E}$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} x^*(PB + B^*P)x &= x^*(P[\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k] + [\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k]^*P)x \\ &= \lambda_1 x^*(PA_1 + A_1^*P)x + \dots + \lambda_k x^*(PA_k + A_k^*P)x \end{aligned}$$

olur ve buna göre her $x \neq 0$ ve her $B \in \mathcal{K}$ için $x^*(PB + B^*P)x < 0$ dir.

Dolayısı ile $P \in \mathcal{P}(\mathcal{K}, x)$ olur. Sonuç olarak

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}, x) = \mathcal{P}(\mathcal{K}, x)$$

dir. Şimdi I) ve II) nin denk olduğunu kanıtlamamız gerekiyor. Teorem 6.2 nin kanıtı [26] makalesinde $\mathcal{K} = \text{conv}\{A, B\}$ durumu için verilmiştir. Bu kanıt küme değerli fonksiyonların bazı topolojik özelliklerini temel almaktadır. Bunun için gerekli bazı tanımlara ihtiyacımız vardır.

Tanım 6.2 $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, \mathcal{X} kümesinin her noktasına \mathcal{Y} kümesinin bir alt kümesini karşılık getiren küme değerli bir dönüşüm olsun. $V \subset \mathcal{Y}$ olmak üzere

$$\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in \mathcal{X} : \mathcal{F}(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

kümesine V nin ön görüntüsü denir.

Eğer her $y \in \mathcal{Y}$ için $\mathcal{F}^{-1}(y) \neq \emptyset$ ise \mathcal{F} ye örten dönüşüm denir.

\mathcal{X} ve \mathcal{Y} topolojik uzaylar olmak üzere \mathcal{Y} deki açık bir kümenin ön görüntüsü açık küme ise \mathcal{F} ye alttan yarı sürekli dönüşüm denir ([29]).

Yardımcı Teorem 6.1 \mathcal{X} ve \mathcal{Y} topolojik uzaylar olsun. Kabul edelim ki alttan yarı sürekli $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ küme değerli dönüşümü örten ve değerleri boş kümeden farklı bağlantı kümeler olsun. Eğer \mathcal{X} bağlantılı ise \mathcal{Y} de bağlantılıdır.

Kanıt. \mathcal{Y} bağlantılı olmasın. Bu durumda $\mathcal{Y} = U \cup V$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V açık kümeleri vardır. \mathcal{F} nin değerleri bağlantılı kümeler olduğundan $x \in \mathcal{X}$ için $\mathcal{F}(x) \subset U$ veya $\mathcal{F}(x) \subset V$ dir. \mathcal{F} alttan yarı sürekli olduğu için $\mathcal{F}^{-1}(U)$ ve $\mathcal{F}^{-1}(V)$ açık kümelerdir. Ayrıca $\mathcal{F}^{-1}(U) \cap \mathcal{F}^{-1}(V) = \emptyset$ dir (Eğer $\mathcal{F}^{-1}(U) \cap \mathcal{F}^{-1}(V) \neq \emptyset$ olsaydı belli bir $x \in \mathcal{X}$ için $\mathcal{F}(x) \cap U \neq \emptyset$ ve $\mathcal{F}(x) \cap V \neq \emptyset$ olurdu ki bu da \mathcal{F} nin değerlerinin bağlantılı olması ile çelişir).

$\mathcal{F}^{-1}(U) \neq \emptyset$, $\mathcal{F}^{-1}(V) \neq \emptyset$ dir, çünkü öyle $x \in \mathcal{X}$ ve $y \in \mathcal{X}$ vardır ki $\mathcal{F}(x) \subset U$ ve $\mathcal{F}(y) \subset V$ dir (aksi halde \mathcal{F} örten dönüşüm olmazdı). Öte yandan $\mathcal{F}^{-1}(U) \cup \mathcal{F}^{-1}(V) = \mathcal{X}$ dir. Çünkü her $x \in \mathcal{X}$ için $\mathcal{F}(x) \subset U$ veya $\mathcal{F}(x) \subset V$ dir. Buradan $x \in \mathcal{F}^{-1}(U)$ veya $x \in \mathcal{F}^{-1}(V)$ olur. \mathcal{X} bağlantılı olduğundan çelişki ortaya çıkar. Dolayısı ile \mathcal{Y} bağlantılıdır. ■

Yardımcı Teorem 6.2 Her hangi bir $C \in \mathcal{K}$ matrisi için

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}, x) \subset \mathcal{P}(\{C\}, x) \subset \bigcup_{A \in \mathcal{E}} \mathcal{P}(\{A\}, x)$$

dir.

Kanıt. Bir $x \neq 0$ ve $P \in \mathcal{P}(\mathcal{E}, x)$ aldığımızda her $A \in \mathcal{E}$ için

$$x^*(PA + A^*P)x < 0$$

dir. $C \in \mathcal{K}$ olduğundan

$$C = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k$$

olacak şekilde $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{E}$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ vardır.

$$\begin{aligned} x^*(PC + C^*P)x &= x^*(P[\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k] + [\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k]^* P)x \\ &= \lambda_1 x^*(PA_1 + A_1^* P)x + \dots + \lambda_k x^*(PA_k + A_k^* P)x \end{aligned}$$

ve $x^*(PA_i + A_i^* P)x < 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$) olduğundan $x^*(PC + C^*P)x < 0$ dir. Buradan

$$P \in \mathcal{P}(\{C\}, x)$$

olduğu görülür.

Şimdi $P \in \mathcal{P}(\{C\}, x)$ alalım. O zaman

$$x^*(PC + C^*P)x < 0$$

dir. Eğer $P \notin \bigcup_{A \in \mathcal{E}} \mathcal{P}(\{A\}, x)$ olsaydı her $A \in \mathcal{E}$ için

$$x^*(PA + A^*P)x \geq 0$$

olurdu. $C = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k$ yazarsak her A_i için

$$x^*(PA_i + A_i^* P)x \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

elde edilir. Buradan

$$x^*[P(\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i) + (\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i^*)P]x \geq 0$$

veya

$$x^*(PC + C^*P)x \geq 0$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısı ile $P \in \bigcup_{A \in \mathcal{E}} \mathcal{P}(\{A\}, x)$ olmak zorundadır. ■

Teorem 6.2 nin kanıtı. II) ve III) ün denk olduğu yukarıda gösterilmiştir. $\mathcal{P}(\mathcal{K}, x) \neq \emptyset$ ise her $A \in \mathcal{K}$ ve her $x \neq 0$ için

$$x^*(PA + A^*P)x < 0$$

olacak şekilde $P \in \mathcal{P}(\mathcal{K}, x)$ vardır. Teorem 6.1 e göre \mathcal{K} kararlıdır ve II) önermesi I) i gerektirmektedir.

Şimdi sıfırdan farklı keyfi bir x için $I)$ ifadesinin $II)$ ifadesini gerektirdiğini gösterelim.

Önce kabul edelim ki \mathcal{K} bir politop olsun. O zaman $\mathcal{E} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ alabiliriz. k ya göre tümevarım yöntemini kullanarak bu kanıtı yapalım. $k = 1$ olması durumunda \mathcal{K} kararlı ise Teorem 6.1 e göre $\mathcal{P}(\mathcal{K}, x) \neq \emptyset$ dir. Kabul edelim ki $k \geq 2$ ve köşe sayısı k dan az olan politoplar için $I)$ ifadesi $II)$ yi gerektirsin.

$$\mathcal{E} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$$

$$\mathcal{E}' = \{A_3, \dots, A_k\}$$

diyelim ($k = 2$ ise $\mathcal{E}' = \emptyset$). $\mathcal{X} = \text{conv}\{A_1, A_2\}$, $C \in \mathcal{X}$ için $\mathcal{F}(C) = \mathcal{P}(\mathcal{E}' \cup \{C\}, x)$ ve $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(A_1) \cup \mathcal{F}(A_2)$ olmak üzere

$$\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$$

küme değerli dönüşümünü tanımlayalım. $C \in \mathcal{X}$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(C) &= \mathcal{P}(\mathcal{E}' \cup \{C\}, x) \\ &= \{P \in \mathcal{P} : \text{her } A \in \{C, A_3, \dots, A_k\} \text{ için } x^*(PA + A^*P)x < 0\} \end{aligned}$$

dir. Burada $\mathcal{F}(C) \neq \emptyset$ dir. Çünkü $\{C, A_3, A_4, \dots, A_k\} \subset \mathcal{K}$ ve tümevarımın varsayımı gereği \mathcal{K} kararlı olduğundan $\text{conv}\{C, A_3, A_4, \dots, A_k\} \subset \mathcal{K}$ kümesi de kararlıdır. Yine tümevarımın varsayımı gereği

$$\mathcal{P}(\{C, A_3, A_4, \dots, A_k\}, x) \neq \emptyset$$

dir. Bu ise $\mathcal{F}(C) \neq \emptyset$ olduğunu gösterir.

$P_1, P_2 \in \mathcal{F}(C)$ alalım. Her $A \in \{C, A_3, \dots, A_k\}$ için $x^*(P_1A + A^*P_1)x < 0$ ve $x^*(P_2A + A^*P_2)x < 0$ olduğundan her $\lambda \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} \lambda[x^*(P_1A + A^*P_1)x] + (1 - \lambda)[x^*(P_2A + A^*P_2)x] &< 0 \\ [x^*(\lambda P_1A + \lambda A^*P_1)x] + [x^*((1 - \lambda)P_2A + (1 - \lambda)A^*P_2)x] &< 0 \end{aligned}$$

yazabiliriz ve dolayısıyla her $C \in \mathcal{X}$ için $\mathcal{F}(C)$ konveks bir kümedir. Buna göre $\mathcal{F}(C)$ bağlantılıdır.

$C \in \text{conv}\{A_1, A_2\}$ olduğundan $C = \lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2$ olacak şekilde $\lambda \in [0, 1]$ vardır. Şimdi $\mathcal{F}(C) \subset \mathcal{F}(A_1) \cup \mathcal{F}(A_2)$ olmadığını varsayalım. Bu durumda $\mathcal{F}(C) \not\subset \mathcal{F}(A_1)$ ve $\mathcal{F}(C) \not\subset \mathcal{F}(A_2)$ dir.

$$\mathcal{F}(A_1) = \{P : \forall A \in \{A_1, A_3, \dots, A_k\} \text{ için } x^*(PA + A^*P)x < 0\}$$

$$\mathcal{F}(A_2) = \{P : \forall A \in \{A_2, A_3, \dots, A_k\} \text{ için } x^*(PA + A^*P)x < 0\}$$

dir. Öyle $P_0 \in \mathcal{F}(C)$ vardır ki $P_0 \notin \mathcal{F}(A_1)$, $P_0 \notin \mathcal{F}(A_2)$ dir. Yani öyle $A \in \{A_1, A_3, A_4, \dots, A_k\}$ vardır ki

$$x^*(P_0A + A^*P_0)x \geq 0$$

dir. Buradan $P_0 \in \mathcal{F}(C)$ yi dikkate alırsak

$$x^*(P_*A_1 + A_1^*P_*)x \geq 0 \quad (6.3)$$

alırız. Benzer yolla

$$x^*(P_*A_2 + A_2^*P_*)x \geq 0 \quad (6.4)$$

elde edilir. (6.3) ve (6.4) den

$$x^*(P_0C + C^*P_0)x \geq 0$$

bu ise $P_0 \in \mathcal{F}(C)$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $\mathcal{F}(C) \subset \mathcal{Y}$ dir.

$C = A_1$ için $\mathcal{F}(C) = \mathcal{F}(A_1)$ ve $C = A_2$ için $\mathcal{F}(C) = \mathcal{F}(A_2)$ olduğundan \mathcal{F} örtendir.

Şimdi $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ dönüşümünün alttan yarı sürekli olduğunu gösterelim.

$V \subset \mathcal{Y}$ açık kümesini alalım. $\mathcal{F}^{-1}(V) = \{C \in \mathcal{X} : \mathcal{F}(C) \cap V \neq \emptyset\}$ kümesinin açık olduğunu görelim. $\tilde{C} \in \mathcal{F}^{-1}(V)$ ise $\mathcal{F}(\tilde{C}) \cap V \neq \emptyset$ dir. Yani $\tilde{P} \in \mathcal{F}(\tilde{C})$ ve $\tilde{P} \in V$ olacak biçimde $\tilde{P} \in \mathcal{P}$ vardır. Öte yandan

$$\begin{aligned} \tilde{P} \in \mathcal{F}(\tilde{C}) &= \mathcal{P}(\mathcal{E} \cup \{\tilde{C}\}, x) \\ &= \{P \in \mathcal{P} : \text{her } A \in \{C, A_3, A_4, \dots, A_k\} \text{ için } x^*(PA + A^*P)x < 0\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$x^*(\tilde{P}\tilde{C} + \tilde{C}^*\tilde{P})x < 0, \quad x^*(\tilde{P}A_i + A_i^*\tilde{P})x < 0 \quad (i = 3, 4, \dots, k)$$

olur. Bu durumda \tilde{C} ya yakın C ler için de

$$x^*(\tilde{P}C + C^*\tilde{P})x < 0$$

sağlanır. Buna göre \tilde{C} ya yakın C ler için de

$$\tilde{P} \in \mathcal{F}(C)$$

ve

$$\mathcal{F}(C) \cap V \neq \emptyset$$

elde edilir. Böylece \mathcal{F} dönüşümünün alttan yarı sürekliliği de kanıtlanmış oldu. Buradan, Yardımcı Teorem 6.1 e göre $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(A_1) \cup \mathcal{F}(A_2)$ bağlantılıdır. Bu durumda $\mathcal{P}(\mathcal{E}, x) = \mathcal{F}(A_1) \cap \mathcal{F}(A_2)$ boş kümeden farklıdır (aksi halde \mathcal{Y} bağlantılı kümesi iki açık boş olmayan ayrık kümelerin birleşimi olurdu). Genel bir \mathcal{K} kompakt, konveks küme için I) ifadesinin II) ifadesini gerektirdiğini göstereyim. \mathcal{K} kararlı olduğundan ve kararlı matrislerin kümesi açık olduğundan, \mathcal{K} yı kapsayan ve kararlı matrisler kümesinin içinde kalan kapalı bir \mathcal{K}' politopu bulunabilir. Politoplar için yapılan kanıt $\mathcal{P}(\mathcal{K}', x)$ kümesinin boş küme olmadığını göstermişti. Dolayısı ile $\mathcal{P}(\mathcal{E}, x)$ kümesi de boş kümeden farklıdır.

■

6.2 Gerçel matrisler kümesinin kararlılığı ile ilgili bir örnek

Bir önceki alt bölümde kompleks matrislerden oluşan bir konveks kümenin kararlılığı için kriterler verildi. Burada ise benzer kriterlerin gerçel matrisler için geçersiz olduğuna dair bir örnek verilecektir.

Gerçel pozitif belirli matrislerin kümesi \mathcal{P} , A_1, A_2, \dots, A_m ise boyutları aynı olan gerçel matrisler olsun.

$$\mathcal{K} = \text{conv} \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$$

olması durumunda Teorem 6.2 aşağıdaki iddia biçiminde formüle edilebilir.

İddia 6.1 \mathcal{K} kümesinin kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü için $y_0 := x$, $y_i := -A_i x$ ($i = 1, 2, \dots, m$) olmak üzere

$$\min_{0 \leq i \leq m} \langle p, y_i \rangle > 0 \quad (6.5)$$

olacak şekilde $p = p(x) \in \mathbb{R}^n$ vektörünün bulunmasıdır.

Biz burada bu iddianın doğru olmadığını göstereceğiz.

p_1, p_2, \dots, p_m polinomları n . dereceden kararlı monik polinomlar olmak üzere bu polinomların belli konveks kombinasyonunun kararsız olduğunu varsayalım. A_1, A_2, \dots, A_m matrisleri de sırasıyla p_1, p_2, \dots, p_m polinomlarının kompanyon matrisleri olsun. $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ olmak üzere

$$\Delta = \left\{ \alpha_0 x - \alpha_1 A_1 x - \alpha_2 A_2 x - \dots - \alpha_m A_m x : \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}$$

kümesini alalım. Δ kümesi \mathbb{R}^n de kompakt konveks bir küme belirler. Şimdi bu kümenin sıfırı içermediğini gösterelim.

Teorem 6.3 Aşağıdaki önermeler denktir:

1) Her $x \neq 0$ ve her $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ için

$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_m A_m)x \neq \alpha_0 x$$

dir.

2) Her $A \in \text{conv} \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ için A nın gerçel, negatif olmayan özdeğeri yoktur.

Kanıt. 2) \Rightarrow 1) olduğunu gösterelim. Her $A \in \text{conv} \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ için A nın gerçel, negatif olmayan özdeğeri bulunmasın. Olmayana ergi yöntemini uygulayalım. Bu durumda öyle $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ ve öyle $x \neq 0$ vardır ki

$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_m A_m)x = \alpha_0 x \quad (6.6)$$

eşitliği sağlanır.

$\alpha_0 = 1$ olamaz. Eğer $\alpha_0 = 1$ olsaydı, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ ve buradan

$0.x = 1.x$ olması gerekirdi. Bu nedenle $\alpha_0 < 1$ olmalıdır. $1 - \alpha_0 \neq 0$ olduğu için (6.6) denkleminin her iki tarafını $(1 - \alpha_0)$ a bölelim.

$$\left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_0}A_1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_0}A_2 + \cdots + \frac{\alpha_m}{1 - \alpha_0}A_m\right)x = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0}x.$$

Burada $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_0}$, $\beta_2 = \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_0}$, \dots , $\beta_m = \frac{\alpha_m}{1 - \alpha_0}$ ve $\lambda = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0}$ diyecek olursak $\sum_{i=1}^m \beta_i = 1$ ve $\lambda = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} > 0$ olur.

$A = \beta_1A_1 + \beta_2A_2 + \cdots + \beta_mA_m$ diyelim. Bu durumda

$$Ax = \lambda x, \lambda \geq 0$$

olur. Bu ise A nın negatif olmayan özdeğerinin bulunmaması ile çelişir. Dolayısıyla varsayımımız hatalıdır. Yani Her $x \neq 0$ ve her $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ için

$$(\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \dots + \alpha_mA_m)x \neq \alpha_0x$$

dir.

Şimdi 1) \Rightarrow 2) olduğunu gösterelim. Eğer 2) önermesi sağlanmıyorsa öyle $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, $\left(\sum_{i=1}^m \beta_i = 1, \beta_i \geq 0\right)$, öyle $\lambda \geq 0$ ve $x \neq 0$ vardır ki

$$(\beta_1A_1 + \beta_1A_1 + \cdots + \beta_mA_m)x = \lambda x$$

olur. $\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} = \lambda$ denkleminde $\alpha_0 = \lambda - \lambda\alpha_0$ elde edilir.

$$(1 + \lambda)\alpha_0 = \lambda \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

olur.

$$\alpha_1 = \beta_1(1 - \alpha_0), \alpha_2 = \beta_2(1 - \alpha_0), \dots, \alpha_m = \beta_m(1 - \alpha_0)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m &= \alpha_0 + \beta_1(1 - \alpha_0) + \cdots + \beta_m(1 - \alpha_0) \\ &= \alpha_0 + (1 - \alpha_0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olur. Burada

$$(\beta_1A_1 + \beta_2A_2 + \cdots + \beta_mA_m)x = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0}x$$

olduğundan

$$\begin{aligned}(\beta_1(1 - \alpha_0)A_1 + \beta_2(1 - \alpha_0)A_2 + \dots + \beta_m(1 - \alpha_0)A_m)x &= \alpha_0x \\(\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \dots + \alpha_mA_m)x &= \alpha_0x\end{aligned}$$

olur ki bu ise 1) önermesi ile çelişir. Dolayısı ile 2) önermesi sağlanır. ■

A_1, A_2, \dots, A_m kompanyon matrislerin konveks kombinasyonunun karakteristik polinomu, p_1, p_2, \dots, p_m polinomlarının konveks kombinasyonudur. p_1, p_2, \dots, p_m polinomları monik ve kararlı olduklarından bunların konveks kombinasyonunun da katsayıları pozitifdir. Buna göre konveks kombinasyonun negatif olmayan kökü bulunamaz. Dolayısıyla Teorem 6.3 ün 2). önermesi gerçekleşmiş olur. Teorem 6.3 den dolayı 1). önerme de gerçekleşir, buna göre

$$0 \notin \Delta$$

olur.

Konveks analizden, ayırma teoremine göre öyle $p \neq 0$, $p \in \mathbb{R}^n$ vektörü vardır ki

$$\text{her } y \in \Delta \text{ için } \langle y, p \rangle > 0$$

dır ([28]). Her $y \in \Delta$ için bu eşitsizlik doğru olduğundan y_i ($i = 1, 2, \dots, m$) vektörleri için de doğru olacaktır. Dolayısı ile verdiğimiz örnekte (6.5) eşitsizliği sağlanır. Ancak $\text{conv} \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ kararlı değildir, çünkü p_1, p_2, \dots, p_m polinomlarının belli bir konveks kombinasyonu kararlı değildir.

KAYNAKLAR

1. MARDEN, M., *Geometry of Polynomials*, American Mathematical Society, Providence, R.I. (1966).
2. KHARITONOV, V.L., *Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations*, *Differentsial'nye Uravneniya*, **14**, 2086-2088 (1978).
3. KHARITONOV, V.L., *On a Generalization of a Stability Criterion*, *Izvestiya Akademii Nauk Kazakhskoi SSR Seriya Fizika Matematika*, **1**, 33-57 (1978).
4. BARTLETT, A.C., HOLLOT, C.V., ve HUANG, L., *Rootlocations of an Entire Polytope of Polynomials: It Suffices to Check The Edges*, *Mathematics of Control*, **1**, 61-71 (1988).
5. BARMISH, B.R., *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan, New York (1994).
6. CHEN, C.T., *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1984).
7. DZHAFAROV, V. ve BÜYÜKKÖROĞLU, T., *Line Segments in the Space of Hurwitz Polynomials*, International Conference on Applicable General Topology, Hacettepe University, Ankara, Turkey, pp. 13, August 12-18 2001.
8. DZHAFAROV, V. ve BÜYÜKKÖROĞLU, T., *Kompleks Polinomların Konveks Kombinasyonunun Kararlılığı*, XIV. Ulusal Matematik Sempozyumu, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, pp. 22, 19-21 Eylül 2001.
9. DZHAFAROV, V. ve BÜYÜKKÖROĞLU, T., *An Algorithm for Segment Stability*, *Mathematical and Computational Applications*, **8**, 111-118 (2003).

10. COHEN, N. ve LEWKOWICZ, I., *A Necessary and Sufficient Criterion for The Stability of a Convex Set of Matrices*, IEEE Transaction on Automatic Control, **38**, 611-615 (1993).
11. BIALAS, S., *A Necessary and Sufficient Condition for The Stability of Convex Combinations of Stable Polynomials or Matrices*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, **33**, 473-480 (1985).
12. BIALAS, S. ve GARLOFF, J., *Convex Combinations of Stable Polynomials*, J.Franklin Institute, **319**, 373-377 (1985).
13. BOUGHERRA, H., CHANG, B.C., YEH, H.H., ve BANDA, S.S., *Fast Stability Checking for The Convex Combination of Stable Polynomials*, IEEE Transactions on Automatic Control, **35**, 586-588 (1990).
14. CHAPELLAT, H. ve BHATTACHARYYA, S.P., *An Alternative Proof of Kharitonov's Theorem*, IEEE Trans. Automat. Contr., **34**, 488-450 (1989).
15. FU, M. ve BARMISH, B.R., *Maximal Unidirectional Perturbation Bounds for Stability of Polynomials and Matrices*, Systems and Control Letters, **11**, 173-179 (1988).
16. RANTZER, A., *Stability Conditions for Polytopes of Polynomials*, IEEE Transactions on Automatic Control, **37**, 79-89 (1992).
17. PUJARA, L.R. ve SHANDHAG, N., *Some Stability Theorems for Polygons of Polynomials*, IEEE Trans. Automat. Contr., **37**, 1845-1849 (1992).
18. GANTMACHER, F.R., *The Theory of Matrices*, vol. II, Chelsea, New York (1959).
19. YANG, S. ve HWANG, C., *A Test for Robust Hurwitz Stability of Convex Combinations of Complex Polynomials*, Journal of the Franklin Institute, **339**, 129-144 (2002).

20. PANIER, E.R., FAN, M.K.H. ve TITS, A.L., *On The Robust Stability of Polynomials With No Cross-Coupling Between The Perturbations in The Coefficients of Even and Odd Powers*, Systems and Control Letters, **12**, 291-299 (1989).
21. KOGAN, J., *Robust Stability and Convexity*, Springer Verlag (1994).
22. RANTZER, A., *A weak Kharitonov theorem holds if and only if the stability region and its reciprocal are convex*, International Journal of Nonlinear and Robust Control, **3**, 55-62 (1992).
23. FOO, Y.K. ve SOH, Y.C., *Root Clustering of Interval Polynomials in The Left-Sector*, Systems and Control Letters, **13**, 239-245 (1989).
24. BHATTACHARYYA, S. P., CHAPPELLAT, H. ve KEEL, L. H., *Robust Control*, Prentice Hall PTR, NJ (1995).
25. TAHA, H.A., *Operations Research an Introduction*, New York (1972).
26. JOHNSON, C.R., *A Local Lyapunov Theorem and The Stability of Sums*, Lin. Alg. Appl., **13**, 37-43 (1976).
27. GU, K., ZOHDY, M.A. ve LOH, N.K., *Necessary and Sufficient Conditions of Quadratic Stability of Uncertain Linear Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, **35**, no.5, 601-604 (1990).
28. ROCKAFELLAR, R.T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1970).
29. AUBIN, J.P. ve FRANKOWSKA, H., *Set-valued Analysis*, Birkhauser (1990).