İNTEGRAL SINIRLI LİNEER OLMAYAN KONTROL SİSTEMLERİN ERİŞİM KÜMELERİ

Emrah AKYAR
Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Ekim - 2002

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Emrah Akyar 'ın **İNTEGRAL SINIRLI LİNEER OLMAYAN KONTROL SİSTEMLERİN ERİŞİM KÜMELERİ** başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Doktora tezi **05/11/2002** tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

		Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:	Doç. Dr. Halig Hüseyinov	
Üye	:	Prof. Dr. Orhan Özer	
Üye	:	Prof. Dr. Refail Gasımov	
Üye	:	Prof. Dr. Yalçın Küçük	
Üye	:	Doç. Dr. Vakıf Caferov	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun 06.11..2002......tarih ve ...37/3..........sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Orhan OZER
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

İNTEGRAL SINIRLI LİNEER OLMAYAN KONTROL SİSTEMLERİN ERİŞİM KÜMELERİ

EMRAH AKYAR

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışmanlar: **Doç. Dr. Halig HÜSEYİNOV,**
Prof. Dr. Orhan ÖZER
2002, 108 Sayfa

Bu tezde, kontrol fonksiyonları integral sınırlı, lineer olmayan kontrol sistemlerin erişim kümeleri incelenmiştir. Erişim kümelerinin, kapalılık, kompaktlık özellikleri ve verilen başlangıç koşullarına bağımlılığı araştırılmıştır. İntegral sınırlı kontrol sistemler, karmaşık sınırlı kontrol sistemler ile değiştirilerek, integral sınırlı kontrol sistemlerin erişim kümelerinin bulunması için, bir yaklaşım yöntemi elde edilmiştir. Elde edilen yaklaşım yöntemi yardımıyla bir algoritma geliştirilerek, çeşitli örnekler için erişim kümeleri nümerik olarak hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kontrol Sistem, Yaklaşım Yöntemi, Erişim Kümesi, İntegral Sınırlılık

ABSTRACT

PhD Thesis

REACHABLE SETS OF NONLINEAR CONTROL SYSTEMS WITH INTEGRAL CONSTRAINT

EMRAH AKYAR

Anadolu University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Mathematics Program

Supervisors: **Assoc. Prof. Kh.G. GUSEINOV,**
Prof. Orhan ÖZER
2002, 108 Pages

In this thesis, reachable sets of nonlinear control systems with integral constraints on the control are studied. Closedness and compactness properties of reachable sets and dependence on given initial conditions are investigated. A method for approximate calculation of reachable sets of control systems with integral constraints on the control is obtained by replacing the system with integral constraints on the control by the system with mixed constraints on the control. By this approximation method an algorithm is developed and by means of this algorithm, reachable sets for some examples are numerically calculated.

Keywords: Control System, Approximation Method, Reachable Set, Integral Constraint

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Orhan Özer ve Halig Hüseyinov' a, çalışmalarım esnasında büyük özverilerde bulunan sevgili eşim Handan Akyar' a en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	:	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	:	n-boyutlu Öklid uzayı
S	:	n-boyutlu birim küre
B	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının açık birim yuvarı
$\overline{B}$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının kapalı birim yuvarı
$\mathrm{cl}X$	:	X kümesinin kapanışı
$L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$	:	$[t_0, \theta]$ aralığından $\mathbb{R}^n$ uzayına tanımlı, p. mertebeden integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_\infty([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$	:	$[t_0, \theta]$ aralığından $\mathbb{R}^n$ uzayına tanımlı, hemen hemen sınırlı fonksiyonların uzayı
$C([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$	:	$[t_0, \theta]$ aralığından $\mathbb{R}^n$ uzayına tanımlı, sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathcal{U}$	:	Tüm mümkün kontrol fonksiyonlar kümesi
$\alpha(E, F)$	:	E ve F kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı
$X(t_0, x_0)$	:	Sistemin x_0 noktasından çıkan tüm çözümlerinin kümesi
$X(t_0, X_0)$	:	$\bigcup\limits_{x \in X_0} X(t_0, x)$
$X(t; t_0, x_0)$	:	$x(t_0) = x_0$ olmak üzere, sistemin t anındaki erişim kümesi
$X(t; t_0, X_0)$	:	$x(t_0) \in X_0$ olmak üzere, sistemin t anındaki erişim kümesi
$Z(t_0, x_0)$	:	$x(t_0) = x_0$ olmak üzere, sistemin integral tüneli
$Z(t_0, X_0)$	:	$x(t_0) \in X_0$ olmak üzere, sistemin integral tüneli
$\mathrm{esssup}\, x(\cdot)$	:	$x(\cdot)$ fonksiyonunun esaslı sınırı
$\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$ uzayının kompakt alt kümeleri uzayı
$\mu(A)$	:	A kümesinin Lebesgue ölçümü
$\xrightarrow{z}$	:	Zayıf yakınsama
$\text{çap}\, X$	:	X kümesinin çapı

GİRİŞ

Kontrol sistemler teorisi, günümüzde matematiğin çağdaş ve gelişmiş alanlarından biridir. Kontrol sistemler teorisinin gelişimi; ekonomi, fizik, kimya, biyoloji ve diğer bilimsel alanlardaki çeşitli problemlerin ortaya çıkması sonucunda olmuştur. Kontrol sistemler teorisi 1960 lı yıllarda çalışılmaya başlanmış ve bu alandaki bazı temel sonuçlar 1960 ve 1970 li yıllarda elde edilmiştir [1-23]. Halen de konu yoğun olarak çalışılmaktadır.

Kontrol sistemler teorisinin temel sonuçlarından biri, Pontryagin Maksimum Prensibi olarak bilinen, optimal kontrol fonksiyonun varlığı için gerek koşuldur [18]. Bu dönem elde edilen bir başka temel sonuç ise, lineer kontrol sistemlerin kontrol edilebilir olması için Kalman-Krasowskii adı verilen gerek ve yeter koşuldur [12-14].

Kontrol sistemler teorisinin temel kavramlarından biri erişim kümesi kavramıdır. Erişim kümesi, verilen bir başlangıç noktasından kontrol sistemin belli bir zaman anında erişebileceği noktaların kümesidir. 1960 ve 1970 li yıllarda kontrol sistemlerin erişim kümelerinin kapalılığı, kompaktlığı, bağlantılılığı ve başlangıç koşuluna sürekli bağımlılığı gibi çeşitli özellikleri araştırılmıştır [5], [6], [8], [9], [22-24].

Kontrol sistemin kontrol fonksiyonu üzerine konulan kısıtlara göre, kontrol sistemler aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.

1. Kontrol fonksiyonları geometrik sınırlı olan kontrol sistemler,
2. Kontrol fonksiyonları integral sınırlı olan kontrol sistemler,
3. Kontrol fonksiyonları karmaşık sınırlı olan kontrol sistemler. Bu durumda kontrol sistemin kontrol fonksiyonu hem geometrik hem de integral sınırlıdır.

Kontrol fonksiyonları geometrik sınırlı olan kontrol sistemlerin bir çok özelliği araştırılmış ve günümüzde bu sistemlerin erişim kümelerinin bir çok topolojik özelliği iyi bilinmektedir. Bu tür kontrol sistemlerin erişim kümelerinin evaluasyon denklemi bulunmuştur [25]. Ayrıca bu sistemlerin erişim kümelerinin yaklaşık olarak hesaplanması için çeşitli nümerik yöntemler de sunulmuştur [26-34]. Kontrol fonksiyonları geometrik sınırlı olan kontrol sistemler diferansiyel içerme formunda yazılabilir. Bu nedenle bu tür kontrol sistemlerin bazı özellikleri diferansiyel içermeler konusu kapsamında araştırılmıştır [15], [24], [25], [29], [33-47].

Kontrol fonksiyonları geometrik sınırlı olan kontrol sistemlerden farklı olarak, kontrol fonksiyonları integral sınırlı, lineer olmayan kontrol sistemler üzerinde çok fazla araştırma yapılmamıştır. Ancak kontrol fonksiyonları integral sınırlı, lineer kontrol sistemler ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır [48-54].

Açıktır ki, verilen integral sınırlılık koşulunu sağlayan fonksiyon sınırlı olmayabilir. Genel olarak, integral sınırlı kontrol sistemler diferansiyel içerme ya da geometrik sınırlı kontrol sistem formunda yazıldığında, sisteme verilen kontrol etkisi sınırlı olmayabilir ve sistemde ek olarak faz kısıtlaması ortaya çıkar. Bu yüzden, integral sınırlı kontrol sistemlerin araştırılmasında, geometrik sınırlı kontrol sistemlerin araştırılmasında kullanılan yöntemler uygulandığında, bazı zor durumlarla karşılaşılmaktadır. Bu açıdan, integral sınırlı kontrol sistemlerin araştırılmasında bazı durumlarda özel yöntemler kullanılmaktadır.

1 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, bundan sonraki bölümler için gerekli olan analiz ve kontrol teorinin bazı temel tanım ve teoremleri ile temel gösterimler verilecektir.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

$\mathbb{R}^n$ ile n-boyutlu Öklid uzayını, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ ile x vektörünün normunu, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ ile x ve y vektörlerinin iç çarpımları gösterilsin. Açıktır ki, $||x|| = \sqrt{< x, x >}$ olur.

$\mathbb{R}^n$ nin kapalı birim yuvarı $\overline{B}$, açık birim yuvarı ise B ile gösterilsin. Ayrıca $\mathbb{R}^n$ nin birim küresi üzerindeki noktalar da S ile gösterilsin. Yani,

$$\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}, \;\; B = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 1\} \text{ ve } S = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$$

olsun.

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\delta > 0$ için

$$B(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| < \delta\} \text{ ve } \overline{B}(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| \leq \delta\}$$

olsun. Yani, $B(x_0, \delta)$, x_0 noktasının açık δ komşuluğu, $\overline{B}(x_0, \delta)$ ise x_0 noktasının kapalı δ komşuluğudur.

$\mathbb{R}$ nin kapalı bir $[t_0, \theta]$ aralığından $\mathbb{R}^n$ uzayına tanımlı tüm sürekli fonksiyonların uzayı $C([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$ ile gösterilsin. Bir başka ifadeyle,

$$C([t_0, \theta], \mathbb{R}^n) = \{x(\cdot) \mid x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n \text{ sürekli fonksiyon}\}$$

olsun.

Ayrıca, $x(\cdot) \in C([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun normu

$$||x(\cdot)|| = \max_{t \in [t_0, \theta]} ||x(t)||$$

şeklinde tanımlanır. Bu norm ile $C([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$ uzayı tam uzaydır [55].

Bir metrik uzayda, verilen bir kümenin kompaktlığının araştırılması analizde çokça karşılaşılan bir problemdir. Çoğu zaman kompaktlığın tanımı kullanılarak verilen kümelerin kompakt olup olmadığının belirlenmesi mümkün olmayabilir. Yukarıda tanımlanan $C([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$ uzayı analizin önemli uzaylarından birisidir. Bu uzaydaki kümelerin kompaktlığının belirlenmesinde kullanılan önemli kriterlerden birisi Arzela-Ascoli Teoremidir. Bu teoremin ifadesinden önce aşağıdaki tanımların verilmesi gereklidir.

Tanım 1.1.1. *X normlu bir vektör uzayı olsun. $A \subset X$ kümesinin kapanışı X içinde kompakt bir küme ise A kümesine X içinde prekompakt küme denir.*

Tanım 1.1.2. *$\varPhi$, $[t_0, \theta]$ aralığında tanımlı $x(\cdot)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer her $t \in [t_0, \theta]$ ve her $x(\cdot) \in \varPhi$ için $|x(t)| < K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı varsa, $\varPhi$ fonksiyonlar ailesine düzgün sınırlıdır denir.*

Tanım 1.1.3. *$\varPhi$, $[t_0, \theta]$ aralığında tanımlı $x(\cdot)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$, $\forall t_*, t^* \in [t_0, \theta]$ ve $\forall x(\cdot) \in \Phi$ için $|t_* - t^*| < \delta$ iken $|x(t_*) - x(t^*)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, $\varPhi$ fonksiyonlar ailesine eş süreklidir denir.*

Şimdi, $C([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$ uzayında verilen kümelerin prekompaktlığını karakterize eden Arzela-Ascoli teoremi verilebilir.

Teorem 1.1.4 (Arzela-Ascoli [55]). *$\varPhi$, $[t_0, \theta]$ aralığında tanımlı $x(\cdot)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. $\varPhi$ nin $C([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$ uzayında prekompakt olması için gerekli ve yeterli koşul, $\varPhi$ nin düzgün sınırlı ve eş sürekli olmasıdır.*

Aşağıdaki önerme $\mathbb{R}^n$ uzayındaki kümelerin kompaktlığını karakterize etmektedir.

Önerme 1.1.5. *$A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul, A kümesinin kapalı ve sınırlı olmasıdır.*

Bir başka fonksiyonlar uzayı da mutlak sürekli fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 1.1.6. *$x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $[t_0, \theta]$ aralığının ikişer ikişer ayrık keyfi (a_i, b_i), $(i = 1, 2, \ldots, k)$ alt aralıkları için $\sum_{i=1}^{k}(b_i - a_i) < \delta$ iken*

$$\sum_{i=1}^{k} \|x(b_i) - x(a_i)\| < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, $x(\cdot)$ fonksiyonuna $[t_0, \theta]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon denir.

Yukarıdaki tanımdan mutlak sürekli fonksiyonların aynı zamanda düzgün sürekli olduğu sonucu elde edilebilir. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir.

Eğer $x(\cdot)$ ve $y(\cdot)$ mutlak sürekli fonksiyonlar ve $\alpha \in \mathbb{R}$ keyfi bir sayı ise $(x+y)(\cdot)$ ve $\alpha x(\cdot)$ fonksiyonları da mutlak sürekli fonksiyonlar olurlar. Buradan mutlak sürekli fonksiyonlar uzayının fonksiyonların bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile bir doğrusal uzay olduğu sonucu çıkar.

Tanım 1.1.7. *$x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $t_*, t^* \in [t_0, \theta]$ için*

$$\|x(t_*) - x(t^*)\| \leq L|t_* - t^*|^r$$

olacak şekilde $L > 0$ ve $0 < r < 1$ sayıları varsa, $x(\cdot)$ fonksiyonuna L sabiti ile Hölder sürekli fonksiyon denir. $r = 1$ durumunda ise $x(\cdot)$ fonksiyonuna L sabiti ile Lipschitz sürekli fonksiyon denir.

Tanım 1.1.8. *$f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $D \subset \mathbb{R}^m$ sınırlı kümesi ve her $y_*, y^* \in D$ için*

$$\|f(y_*) - f(y^*)\| \leq L\|y_* - y^*\|$$

olacak şekilde $L = L(D) > 0$ sayısı varsa, $f(\cdot)$ fonksiyonuna yerel Lipschitz fonksiyon denir.

Mutlak sürekli fonksiyonların tanımından aşağıdaki önermeler elde edilebilir.

Önerme 1.1.9. *$x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu Lipschitz sürekli ise $x(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, \theta]$ aralığında mutlak süreklidir.*

Önerme 1.1.10. [55] *$h(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyon ve her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} h(\tau) d\tau$$

ise, $x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}$ mutlak sürekli fonksiyondur.

İleriki bölümlerde kullanılacak olan diğer fonksiyonlar uzayları ise $L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$ ve $L_\infty([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$ uzaylarıdır.

Tanım 1.1.11. *$1 \leq p < \infty$ olmak üzere,*

$$L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^n) = \{x(\cdot) \mid x(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n \text{ ölçülebilir ve } \left(\int_{t_0}^{\theta} \|x(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

uzayına p. mertebeden integrallenebilen fonksiyonlar uzayı denir. Burada integral Lebesgue anlamındadır.

Bu uzay üzerinde $1 \leq p < \infty$ için

$$\|x(\cdot)\|_p = \left(\int_{t_0}^{\theta} \|x(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanan $\| \cdot \|_p : L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ fonksiyonunun aşağıda verilen eşitsizlikler kullanılarak $L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$ üzerinde bir norm olduğu gösterilebilir. Üstelik $L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$ uzayı bu norm ile tam uzaydır [55].

Önerme 1.1.12 (Hölder Eşitsizliği [55]).
$p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $x(\cdot) \in L_p([t_0, \theta], \mathbb{R})$, $y(\cdot) \in L_q([t_0, \theta], \mathbb{R})$ ise $x(\cdot)y(\cdot) \in L_1([t_0, \theta], \mathbb{R})$ dir ve

$$\|x(\cdot)y(\cdot)\|_1 \leq \|x(\cdot)\|_p \|y(\cdot)\|_q$$

eşitsizliği geçerlidir.

Önerme 1.1.13 (Minkowski Eşitsizliği [55]).

$u(\cdot)$ ve $v(\cdot)$, $[t_0,\theta]$ aralığından $\mathbb{R}^n$ uzayına tanımlı p. mertebeden integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\left(\int_{t_0}^{\theta}\|u(t)+v(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{t_0}^{\theta}\|u(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{t_0}^{\theta}\|v(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanımlanması gereken bir başka fonksiyonlar uzayı da $L_\infty([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)$ uzayıdır. Bu uzay tanımlanmadan önce bir fonksiyonun esaslı sınırlılık kavramı verilmelidir.

Tanım 1.1.14. *$x(\cdot):[t_0,\theta]\to\mathbb{R}^n$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer hemen hemen her $t\in[t_0,\theta]$ için $\|x(t)\|\leq M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa, $x(\cdot)$ fonksiyonuna esaslı sınırlı (essentially bounded) denir ve $x(\cdot)$ fonksiyonunun esaslı sınırı (essential supremumu)*

$$\operatorname{esssup} x(\cdot) = \inf\{M>0: \textit{ hemen hemen her } t\in[t_0,\theta] \textit{ için } \|x(t)\|\leq M\}$$

şeklinde tanımlanır.

$L_\infty([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)$ uzayı,

$$\begin{aligned} L_\infty([t_0,\theta],\mathbb{R}^n) \;=\; & \{x(\cdot)\mid x(\cdot):[t_0,\theta]\to\mathbb{R}^n \text{ ölçülebilir fonksiyon ve} \\ & \operatorname{esssup} x(\cdot)<\infty\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Açıktır ki, $L_\infty([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)$ uzayı, hemen hemen her yerde sınırlı olan fonksiyonların uzayıdır.

$x(\cdot)\in L_\infty([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)$ için norm,

$$\|x(\cdot)\|_\infty = \operatorname{esssup} x(\cdot)$$

şeklinde tanımlanır. $L_\infty([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)$ uzayı bu norm ile tam uzaydır [56].

Yukarıda tanımlanan fonksiyon uzayları arasında $p>1$ olmak üzere,

$$C([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)\subset L_\infty([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)\subset\cdots\subset L_p([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)\subset\cdots\subset L_1([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)$$

şeklinde bir ilişki vardır. Ayrıca, $p > q > 1$ için $L_p([t_0,\theta],\mathbb{R}^n) \subset L_q([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)$ olur.

Aşağıdaki teorem $L_p([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)$ uzaylarında lineer dönüşümleri karakterize eden önemli bir teoremdir.

Teorem 1.1.15 (Riesz [56]). *$1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell(\cdot)$, $L_p([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)$ üzerinde herhangi bir sınırlı doğrusal fonksiyonel ise $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere, her $f(\cdot) \in L_p([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)$ için,*

$$< \ell, f >= \int_{t_0}^{\theta} < f(t), g(t) > dt$$

olacak biçimde $g(\cdot) \in L_q([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu vardır. Ayrıca,

$$||\ell(\cdot)||_{(L_p)^*} = ||g(\cdot)||_{L_q}$$

dur.

Bu teoreme göre, $(L_p([t_0,\theta],\mathbb{R}^n))^*$ $(1 \leq p < \infty)$ uzayı ile $L_q([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ uzayı eş metrel eş yapılıdır (isometrically isomorphic). Bir başka ifade ile

$$(L_p([t_0,\theta],\mathbb{R}^n))^* \sim L_q([t_0,\theta],\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq p < \infty, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

dir. Özel olarak $(L_1([t_0,\theta],\mathbb{R}^n))^* \sim L_\infty([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)$ olmasına karşın bu özelliğin tersi doğru değildir.

Riesz Teoremi yardımıyla $L_p([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)$ uzaylarında zayıf yakınsaklık tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 1.1.16. *$\{u_n(\cdot)\} \in L_p([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)$ dizisinin $u_0(\cdot) \in L_p(([t_0,\theta],\mathbb{R}^n))$ noktasına (fonksiyonuna) zayıf yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul, her $g(\cdot) \in L_q([t_0,\theta],\mathbb{R}^n)$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ için*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{\theta} u_n(t)g(t)dt = \int_{t_0}^{\theta} < u_0(t), g(t) > dt$$

olmasıdır.

İleriki bölümlerde sıkça kullanılacak bir başka eşitsizlik de Gronwall eşitsizliğidir.

Önerme 1.1.17 (Gronwall Eşitsizliği [21]). *$[a,b] \subset \mathbb{R}$ ve $\psi(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan integrallenebilir, $h(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, $\nu(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olsun. Her $t \in [a,b]$ için*

$$\nu(t) \leq h(t) + \int_a^t \psi(\tau)\nu(\tau)d\tau$$

ise, her $t \in [a,b]$ için

$$\nu(t) \leq h(t) + c\int_a^t \psi(\tau)h(\tau)d\tau$$

olur. Burada $c = \exp\left(\int_a^b \psi(\tau)d\tau\right)$ dir.

Aşağıda $\mathbb{R}^n$ de verilen iki küme arasındaki Hausdorff uzaklığı tanımlanmaktadır.

Tanım 1.1.18. *$E, F \subset \mathbb{R}^n$ olsun.*

$$\alpha(E,F) = \max\left\{\sup_{x\in E} d(x,F), \sup_{y\in F} d(y,E)\right\}$$

sayısına E ve F kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı denir.
Burada $d(x,F) = \inf_{y\in F} \|x-y\|$ dir.

Hausdorff uzaklığı aşağıdaki özellikleri sağlar [57].

i. Her $E \subset \mathbb{R}^n$ için $\alpha(E,E) = 0$,

ii. Her $E,F \subset \mathbb{R}^n$ için $\alpha(E,F) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{cl}\, E = \mathrm{cl}\, F$,

iii. Her $E,F \subset \mathbb{R}^n$ için $\alpha(E,F) \geq 0$,

iv. Her $E,F,G \subset \mathbb{R}^n$ için $\alpha(E,F) \leq \alpha(E,G) + \alpha(G,F)$.

Burada $\mathrm{cl}\, E$, E kümesinin kapanışını göstermektedir.

ii. den $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ve $E \neq F$ için $\alpha(E, F) = 0$ olabileceği elde edilir. Bu nedenle yukarıdaki gibi tanımlanan $\alpha(\cdot,\cdot)$ fonksiyonu $2^{\mathbb{R}^n}$ üzerinde yani, $\mathbb{R}^n$ uzayının tüm alt kümelerinin oluşturduğu uzay üzerinde bir metrik değildir.

$\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathbb{R}^n$ uzayının kompakt alt kümelerinin ailesi gösterilsin. Bu durumda $\alpha(\cdot,\cdot) : \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ fonksiyonu metrik koşullarını sağlar [57]. Buradan $(\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n), \alpha(\cdot,\cdot))$ bir metrik uzay olur.

Çoğu zaman iki küme arasındaki Hausdorff uzaklığın bulunması için yukarıdaki tanım yerine aşağıdaki denk tanım kullanılır.

Önerme 1.1.19. $E, F \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ *olsun.*

$$\alpha(E, F) = \inf\{r > 0 : E \subset F + rB \;,\quad F \subset E + rB\}$$

olur.

Şimdi küme değerli dönüşüm kavramı tanımlansın.

Tanım 1.1.20. $A \subset \mathbb{R}^n$ *ve her* $x \in A$ *için* $F(x) \subset \mathbb{R}^m$ *olsun. Bu durumda,* F *dönüşümüne küme değerli dönüşüm ya da küme değerli fonksiyon denir ve* $F(\cdot) : A \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ *şeklinde gösterilir.*

Fonksiyonlara benzer olarak küme değerli dönüşümler için de süreklilik tanımı verilebilir.

Tanım 1.1.21. $F(\cdot) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ *ve* $x_0 \in A$ *olsun. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık keyfi* $x \in B(x_0, \delta)$ *için*

$$\alpha(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ *sayısı varsa,* $F(\cdot)$ *küme değerli dönüşümüne* x_0 *noktasında süreklidir denir. Eğer* $F(\cdot)$ *küme değerli dönüşümü her* $x_0 \in A$ *noktasında sürekli ise, o zaman* $F(\cdot)$ *küme değerli dönüşümüne* A *kümesinde süreklidir denir.*

Tanım 1.1.22. $F(\cdot) : A \subset \mathbb{R}^n \to \text{comp}(\mathbb{R}^m)$ *ve* $x_0 \in A$ *olsun. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık keyfi* $x \in B(x_0, \delta)$ *için*

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B$$

olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ *sayısı varsa,* $F(\cdot)$ *küme değerli dönüşümüne* x_0 *noktasında üstten yarı süreklidir denir.*

Tanım 1.1.23. $F(\cdot) : A \subset \mathbb{R}^n \to \text{comp}(\mathbb{R}^m)$ *ve* $x_0 \in A$ *olsun. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık keyfi* $x \in B(x_0, \delta)$ *için*

$$F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon B$$

olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ *sayısı varsa,* $F(\cdot)$ *küme değerli dönüşümüne* x_0 *noktasında alttan yarı süreklidir denir.*

Küme değerli dönüşümlerin süreklilik tanımından, eğer $F(\cdot) : A \subset \mathbb{R}^n \to \text{comp}(\mathbb{R}^m)$ küme değerli dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında sürekli ise, hem alttan hemde üstten yarı sürekli; tersine, eğer $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında hem alttan hemde üstten yarı sürekli ise $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü $x_0 \in A$ noktasında sürekli olur.

Yine fonksiyonlarda olduğu gibi küme değerli dönüşümler için de Hölder süreklilik ve Lipschitz süreklilik tanımları yapılabilir.

Tanım 1.1.24. $F(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \text{comp}(\mathbb{R}^m)$ *olsun. Her* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$\alpha(F(x), F(y)) \leq L\|x - y\|^r$$

olacak şekilde $L > 0$ *ve* $0 < r \leq 1$ *sayıları varsa,* $F(\cdot)$ *küme değerli dönüşümüne Hölder sürekli denir. Özel olarak* $r = 1$ *ise,* $F(\cdot)$ *küme değerli dönüşümüne* L *sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlıyor denir.*

1.2 Kontrol Sistemler

Sonlu boyutlu uzaylarda, davranışı adi diferansiyel denklemle verilen kontrol sistem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \tag{1.2.1}$$

şeklinde yazılır. Burada $t \in [t_0, \theta]$ zaman, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ sistemin t zaman anındaki faz vektörü, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ sistemin t zaman anındaki kontrol vektörü, $f(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ n-boyutlu vektör fonksiyondur.

Eğer (1.2.1) sisteminde her $t \in [t_0, \theta]$ için $A(t)$ $n \times n$-boyutlu matris, $B(t)$ $n \times m$-boyutlu matris, $\varphi(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ n-boyutlu vektör fonksiyon olmak üzere,

$$f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u + \varphi(t)$$

ise, (1.2.1) sistemine doğrusal kontrol sistem denir.

(1.2.1) sistemindeki $u(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonuna, kontrol fonksiyon denir. Kontrol fonksiyonları üzerine koyulan kısıtlamalara göre, kontrol sistemler çeşitli şekillerde sınıflandırılır.

1. $P \subset \mathbb{R}^m$ ve

$$\mathcal{U}_1 = \{u(\cdot) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^m : u(\cdot) \text{ ölçülebilir }, \forall t \in [t_0, \theta] \text{ için } u(t) \in P\}$$

olsun. Eğer (1.2.1) sisteminin kontrol fonksiyonları $u(\cdot) \in \mathcal{U}_1$ olarak seçilirse, bu tür kontrol sistemlere geometrik sınırlı kontrol sistem denir.

Eğer $F(t, x) = \{f(t, x, u) : u \in P\}$ seklinde gösterilirse, (1.2.1) kontrol sistemi

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$$

diferansiyel içermesi formunda yazılabilir.

2. $\mu_0 > 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{U}_2 = \left\{ u(\cdot) \in L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^m) : \|u(\cdot)\|_p = \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \mu_0 \right\}$$

olsun. Eğer (1.2.1) sisteminin kontrol fonksiyonları $u(\cdot) \in \mathcal{U}_2$ olarak seçilirse, (1.2.1) kontrol sistemine integral sınırlı kontrol sistem denir. Yakıt, enerji, anapara gibi tükenen kontrollerin bulunduğu kontrol sistemler bu tür, yani integral kısıtlar içeren kontrol sistemlerdir.

Eğer $u(\cdot) \in \mathcal{U}_2$ ise, herhangi bir $t_* \in [t_0, \theta]$ için $\|u(t_*)\|$ sonsuz büyük değer alabilir. Başka bir ifade ile, $L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^m)$ uzayında normu sınırlı olan fonksiyon sınırlı olmayabilir.

Ek değişken kullanılarak, integral sınırlı (1.2.1) kontrol sistemi diferansiyel içerme formunda yazılabilir.

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \|u(t)\|^p, \quad x_{n+1}(t_0) = 0$$

olsun. Bu durumda, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|^p d\tau$$

olur. O halde,

$$0 \leq \int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p dt \leq \mu_0^p$$

olduğundan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$0 \leq x_{n+1}(t) \leq \mu_0^p \tag{1.2.2}$$

olduğu bulunur. Bu durumda, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_2$ olmak üzere, incelenen (1.2.1) kontrol sistemi her $t \in [t_0, \theta]$ için, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $u(\cdot) \in L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^m)$ olmak üzere, (1.2.2) faz kısıtlaması olan $(n+1)$-boyutlu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \\ \dot{x}_{n+1}(t) &= \|u(t)\|^p, \quad x_{n+1}(t_0) = 0 \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

kontrol sistemi ile değiştirilebilir.

Eğer $z_1 = x_1, z_2 = x_2, \ldots, z_n = x_n, z_{n+1} = x_{n+1}$,
$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$f_*(t, z, u) = f_*(t, z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}) =$$
$$= \{f_1(t, z_1, \ldots, z_n, u), f_2(t, z_1, \ldots, z_n, u), \ldots, f_n(t, z_1, \ldots, z_n, u), \|u\|^p\}$$

ve

$$F(t, z) = \{f_*(t, z_1, z_2, \ldots, z_n, u) \in \mathbb{R}^{n+1} : u \in \mathbb{R}^m\} \tag{1.2.4}$$

kabul edilirse, (1.2.2) kısıtlaması olan (1.2.4) kontrol sistemi,

$$0 \leq z_{n+1}(t) \leq \mu_0^p, \quad t \in [t_0, \theta]$$

kısıtlaması olan

$$\dot{z}(t) \in F(t, z(t)), \quad z_{n+1}(t_0) = 0$$

diferansiyel içermesi şeklinde yazılabilir.

3. Eğer (1.2.1) kontrol sisteminin kontrol fonksiyonları $u(\cdot) \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ olarak seçilirse, bu durumda (1.2.1) kontrol sistemine karmaşık sınırlı kontrol sistem denir. Açıktır ki, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ olarak seçildiğinde, $u(\cdot)$ kontrol fonksiyonu

$$\forall t \in [t_0, \theta] \text{ için } u(t) \in P$$

geometrik kısıtlamasını ve

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p dt \leq \mu_0^p$$

integral kısıtlamasını sağlar.

Eğer (1.2.1) kontrol sisteminde, seçilen her $u(\cdot)$ kontrol fonksiyonuna karşılık $x(\cdot)$ yörüngesinin $\forall t \in [t_0, \theta]$ için $x(t) \in M(t) \subset \mathbb{R}^n$ koşulunu sağlaması isteniyorsa, bu durumda (1.2.1) kontrol sistemine faz kısıtlaması olan kontrol sistem denir.

2 ERİŞİM KÜMELERİ ve BAZI ÖZELLİKLERİ

2.1 Quasi-Lineer Sistemlerin Erişim Kümelerinin Topolojik Özellikleri

Kontrol sistemin bir $[t_0, \theta]$ aralığındaki davranışı,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t), \quad x(t_0) \in X_0 \tag{2.1.1}$$

diferansiyel denklemi ile verilsin. Burada $x \in \mathbb{R}^n$ sistemin n-boyutlu durum vektörü, $u \in \mathbb{R}^m$ m-boyutlu kontrol vektörü, $f(t, x(t))$ n-boyutlu vektör değerli fonksiyon, $B(t, x(t))$ $n \times m$-boyutlu matris fonksiyon ve $t \in [t_0, \theta]$ zamanı göstermektedir. Ayrıca $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt kümedir.

(2.1.1) sisteminin $u(\cdot)$ kontrol fonksiyonları

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p dt \leq \mu_0^p, \quad \mu_0 > 0, \quad 1 < p < \infty \tag{2.1.2}$$

integral eşitsizliği ile sınırlandırılmış olsun.

Tanım 2.1.1. *$L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^m)$ $(1 < p < \infty)$ uzayının (2.1.2) integral eşitsizliğini sağlayan her $u(\cdot)$ fonksiyonuna mümkün kontrol fonksiyon denir. Tüm mümkün kontrol fonksiyonların ailesi $\mathcal{U}$ ile gösterilir.*

Bir başka ifade ile

$$\mathcal{U} = \{u(\cdot) \in L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^m) : \|u\|_p \leq \mu_0\}$$

olur.

Bir $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}$ mümkün kontrol fonksiyonun ürettiği çözüm aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.1.2. *$x_0 \in X_0$ ve $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}$ olsun. Bu durumda hemen hemen her $t \in [t_0, \theta]$ için $\dot{x}_*(t) = f(t, x_*(t)) + B(t, x_*(t))u_*(t)$ diferansiyel denklemini ve*

$x_*(t_0) = x_0 \in X_0$ başlangıç koşulunu sağlayan $x_*(t) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ mutlak sürekli fonksiyonuna (2.1.1) sisteminin (t_0, x_0) başlangıç noktasından çıkan ve $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen çözümü denir.

(2.1.1) sisteminin (t_0, x_0) başlangıç noktasından çıkan ve tüm mümkün $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen çözümlerinin kümesi $X(t_0, x_0)$ ile gösterilir. (2.1.1) sisteminin (t_0, X_0) başlangıç kümesinden çıkan ve tüm mümkün $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen çözümler kümesi $X(t_0, X_0) = \bigcup_{x_0 \in X_0} X(t_0, x_0)$ olarak tanımlanır.

Aşağıda (2.1.2) kısıtı ile verilen (2.1.1) sisteminin t anındaki erişim kümesi tanımlanmaktadır.

Tanım 2.1.3. *(2.1.1) sisteminin tüm $x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ çözümlerinin bir $t \in [t_0, \theta]$ anında ulaştıkları noktaların kümesine (2.1.1) sisteminin t anındaki erişim kümesi denir ve $X(t; t_0, X_0)$ ile gösterilir. Bir başka ifade ile (2.1.1) sisteminin $t \in [t_0, \theta]$ anındaki erişim kümesi*

$$X(t; t_0, X_0) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in X(t_0, X_0)\}$$

olur.

(2.1.2) kısıtı ile verilen (2.1.1) sisteminin integral tüneli aşağıdaki gibi tanımlanır.

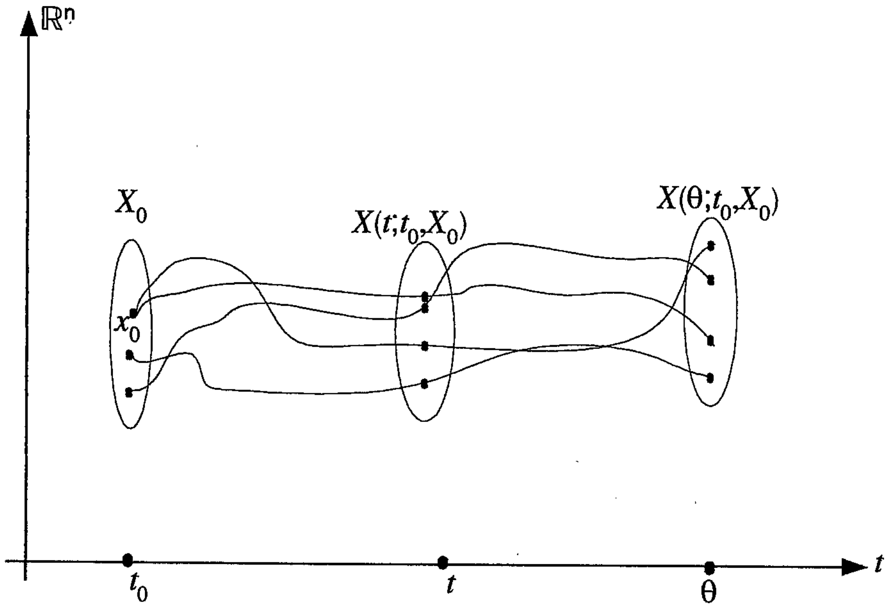
Tanım 2.1.4. *(2.1.1) sisteminin (t_0, X_0) başlangıç kümesinden çıkan tüm çözümlerinin grafiklerinin oluşturduğu kümeye, (2.1.1) sisteminin integral tüneli denir ve $Z(t_0, X_0)$ ile gösterilir. İntegral tünel,*

$$Z(t_0, X_0) = \{(t, x(t)) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in X(t_0, X_0)\}$$

ya da

$$Z(t_0, X_0) = \{(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n : x \in X(t; t_0, X_0)\}$$

şeklinde de yazılabilir.



Şekil 2.1: Sistemin t anındaki erişim kümesi

Bundan sonraki bölümlerde (2.1.1) denkleminin sağ tarafının, aşağıdaki koşulları sağladığı kabul edilecektir.

2.1.A. $f(t,x)$ ve $B(t,x)$ fonksiyonları (t,x) e göre sürekli ve x e göre yerel Lipschitz, yani her sınırlı $D \subset [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ bölgesi ve keyfi $(t,x^*), (t,x_*) \in D$ öğeleri için

$$\|f(t,x^*) - f(t,x_*)\| \leq L_1(D)\|x^* - x_*\|$$

ve

$$\|B(t,x^*) - B(t,x_*)\| \leq L_2(D)\|x^* - x_*\|$$

koşullarını sağlayan $L_1(D), L_2(D)$ pozitif Lipschitz sabitleri bulunsun.

2.1.B. Her $(t,x) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ öğesi için

$$\|f(t,x)\| \leq \gamma_1(1 + \|x\|)$$

ve

$$\|B(t,x)\| \leq \gamma_2(1 + \|x\|)$$

artım koşullarını sağlayan γ_1 ve γ_2 pozitif sabitleri var olsun.

Aşağıdaki önerme bundan sonraki önerme ve teoremlerin kanıtında sıkça kullanılacak olan bir eşitsizliği vermektedir.

Önerme 2.1.5. *Her $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için L_1 ve L_2 pozitif sabitler olmak üzere,*

$$\int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|)\, d\tau \leq L_1(\theta - t_0) + L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \tag{2.1.3}$$

olur.

Kanıt. $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ keyfi olsun. Önerme 1.1.12 Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|)\, d\tau \leq L_1(t - t_0) + L_2 \left(\int_{t_0}^{t} 1^{\frac{p}{p-1}} d\tau \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$$

olur. $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ olduğundan (3.1.2) eşitsizliğini sağlar. Buradan her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|)\, d\tau \leq L_1(\theta - t_0) + L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0$$

bulunur. □

Aşağıdaki önerme (2.1.2) kısıtı ile verilen (2.1.1) sisteminin tüm çözümlerinin grafiklerinin bir $D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kümesi ile sınırlı olduğunu göstermektedir.

Önerme 2.1.6. *Her $x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$\|x(t)\| \leq r$$

olur. Burada

$$q = \gamma_1(\theta - t_0) + \gamma_2 \mu_0 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}, \tag{2.1.4}$$

$$d_* = \max\{\|x\| : x \in X_0\} \tag{2.1.5}$$

ve

$$r = (d_* + q)\,(1 + q \exp q) \tag{2.1.6}$$

dir.

Kanıt. Keyfi $x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ seçilsin. O zaman

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau))u(\tau)d\tau \ , \quad t \in [t_0, \theta]$$

olacak şekilde $x_0 \in X_0$ ve $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ vardır. Eşitliğin her iki yanının normu alınırsa,

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau))u(\tau)\| d\tau$$

olur. Normun üçgen eşitsizliği, 2.1.B. koşulu ve $d_* = \max\{\|x\| : x \in X_0\}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq d_* + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau))\| d\tau + \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x(\tau))\| \|u(\tau)\| d\tau \\ &\leq d_* + \gamma_1 \int_{t_0}^{t} (1 + \|x(\tau)\|) d\tau + \gamma_2 \int_{t_0}^{t} (1 + \|x(\tau)\|) \|u(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq d_* + \gamma_1(\theta - t_0) + \gamma_1 \int_{t_0}^{t} \|x(\tau)\| d\tau + \gamma_2 \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\| d\tau + \\ &+ \gamma_2 \int_{t_0}^{t} \|x(\tau)\| \|u(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

yazılabilir. Diğer taraftan, önerme 1.1.12 Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ olduğundan

$$\int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\| d\tau \leq \left(\int_{t_0}^{t} 1^{\frac{p}{p-1}} d\tau \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \leq \mu_0 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \qquad (2.1.7)$$

elde edilir. O halde (2.1.7) kullanılırsa ve $q = \gamma_1(\theta - t_0) + \gamma_2 \mu_0 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}$ olduğundan,

$$\|x(t)\| \leq d_* + q + \gamma_1 \int_{t_0}^{t} \|x(\tau)\| d\tau + \gamma_2 \int_{t_0}^{t} \|x(\tau)\| \|u(\tau)\| d\tau$$

veya

$$\|x(t)\| \leq d_* + q + \int_{t_0}^{t} (\gamma_1 + \gamma_2 \|u(\tau)\|) \|x(\tau)\| d\tau$$

olur. Önerme 1.1.17 (Gronwall eşitsizliği) de $\nu(t) = \|x(t)\|$, $h(t) = d_* + q$ ve $\psi(\tau) = \gamma_1 + \gamma_2 \|u(\tau)\|$ alınırsa,

$$c = \exp \left(\int_{t_0}^{\theta} (\gamma_1 + \gamma_2 \|u(\tau)\|) d\tau \right)$$

olmak üzere,

$$\|x(t)\| \leq d_* + q + c\int_{t_0}^{t}(d_* + q)(\gamma_1 + \gamma_2\|u(\tau)\|)d\tau$$

yazılabilir. (2.1.3) eşitsizliğinden,

$$\|x(t)\| \leq d_* + q + (d_* + q)q\exp(q)$$

ya da,

$$\|x(t)\| \leq (d_* + q)(1 + q\exp(q))$$

bulunur. O halde,

$$r = (d_* + q)(1 + q\exp(q))$$

olduğundan, her $x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t)\| \leq r$$

olur. □

Bu sonuç (2.1.1) sisteminin tüm $x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ çözümlerinin grafiklerinin

$$D = \{(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \;:\; \|x\| \leq r\} \tag{2.1.8}$$

şeklinde tanımlı bir D silindirinin içinde kaldığını gösterir. Yani, aşağıdaki sonuç doğrudur.

Sonuç 2.1.7. *(2.1.2) kısıtı ile verilen (2.1.1) sistemi için*

$$Z(t_0, X_0) \subset D$$

kapsaması doğrudur. Burada D, (2.1.8) ile tanımlanan silindiri göstermektedir.

Bundan sonraki bölümlerde 2.1.A. koşulundaki D kümesi olarak, (2.1.8) ile tanımlanan D silindiri göz önüne alınacaktır.

Önerme 2.1.6 dan aşağıdaki sonuçlar da elde edilebilir.

Sonuç 2.1.8. *(2.1.2) kısıtı ile verilen (2.1.1) sisteminin* $X(t_0, X_0)$ *çözümler kümesi düzgün sınırlıdır.*

Sonuç 2.1.9. *(2.1.2) kısıtı ile verilen (2.1.1) sisteminin her* $t \in [t_0, \theta]$ *için* t *anındaki* $X(t; t_0, X_0)$ *erişim kümeleri sınırlı kümelerdir.*

Aşağıdaki önerme ise $X(t_0, X_0)$ çözümler kümesinin eş sürekliliğini vermektedir.

Önerme 2.1.10. *(2.1.2) kısıtı ile verilen (2.1.1) sisteminin* $X(t_0, X_0)$ *çözümler kümesi eş süreklidir.*

Kanıt. $\varepsilon > 0$ verilsin ve keyfi $x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ seçilsin. O zaman,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau))u(\tau)]\, d\tau \ , \quad t \in [t_0, \theta]$$

olacak şekilde $x_0 \in X_0$ ve $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ vardır. Keyfi $t_1, t_2 \in [t_0, \theta]$ alınsın. Genelliği bozmaksızın $t_1 \leq t_2$ olduğu kabul edilebilir. O zaman,

$$\begin{aligned} \|x(t_1) - x(t_2)\| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} [f(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau))u(\tau)]\, d\tau \right\| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(\tau, x(\tau))\| d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \|B(\tau, x(\tau))\| \|u(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

olur. $f(\cdot)$ ve $B(\cdot)$ fonksiyonları sürekli, D kümesi kompakt olduğundan

$$K_1 = \max\{\|f(t, x)\| : (t, x) \in D\}$$

ve

$$K_2 = \max\{\|B(t, x)\| : (t, x) \in D\}$$

alınırsa,

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq K_1 |t_2 - t_1| + K_2 \int_{t_1}^{t_2} \|u(\tau)\| d\tau$$

elde edilir. Önerme 1.1.12 Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ olduğundan her $t_1, t_2 \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t_1) - x(t_2)\| &\leq K_1 |t_2 - t_1| + K_2 \left(\int_{t_1}^{t_2} 1^{\frac{p}{p-1}} d\tau \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_1}^{t_2} \|u(\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq K_1 |t_2 - t_1| + K_2 \mu_0 |t_2 - t_1|^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

bulunur. $K = \max\{K_1, \mu_0 K_2\}$ alınırsa, her $t_1, t_2 \in [t_0, \theta]$ için

$$
\begin{aligned}
\|x(t_1) - x(t_2)\| &\leq K|t_2 - t_1| + K|t_2 - t_1|^{\frac{p-1}{p}} \\
&= K|t_2 - t_1|^{\frac{p-1}{p}}\left(1 + |t_2 - t_1|^{\frac{1}{p}}\right) \\
&\leq K\left(1 + (\theta - t_0)^{\frac{1}{p}}\right)|t_2 - t_1|^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $K_* = K\left(1 + (\theta - t_0)^{\frac{1}{p}}\right)$ alınırsa,

$$
\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq K_*|t_2 - t_1|^{\frac{p-1}{p}}
$$

olur. O halde $\delta(\varepsilon) = \left(\dfrac{\varepsilon}{K_*}\right)^{\frac{p}{p-1}}$ alınırsa, $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$ iken $\|x(t_1) - x(t_2)\| < \varepsilon$ olduğu bulunur. $x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ keyfi olduğundan $X(t_0, X_0)$ çözümler kümesi eş sürekli olur. □

Böylece, sonuç 2.1.8, önerme 2.1.10 ve 1.1.4 Arzela-Ascoli teoreminden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.11. *(2.1.2) kısıtları ile verilen (2.1.1) sisteminin $X(t_0, X_0)$ çözümler kümesi $C([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$ uzayında prekompakt bir kümedir.*

Aşağıdaki önermede $X(t_0, X_0)$ çözümler kümesinin kapalı olduğu kanıtlanmaktadır.

Önerme 2.1.12. *(2.1.2) kısıtı ile verilen (2.1.1) sisteminin $X(t_0, X_0)$ çözümler kümesi kapalı kümedir.*

Kanıt. (2.1.1) sisteminin $X(t_0, X_0)$ çözümler kümesinin kapalı bir küme olduğunun gösterilmesi için $X(t_0, X_0)$ kümesindeki her yakınsak dizinin limitinin de $X(t_0, X_0)$ kümesinde olduğu gösterilmelidir. Her $k = 1, 2, \ldots$ için $x_k(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ ve $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ olsun. $x_*(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ olduğu gösterilmelidir. Her $k = 1, 2, \ldots$ için $x_k(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ olduğundan,

$$
x_k(t) = x_k + \int_{t_0}^{t} \left[f(\tau, x_k(\tau)) + B(\tau, x_k(\tau))u_k(\tau)\right] d\tau, \quad t \in [t_0, \theta]
$$

olacak biçimde $x_k \in X_0$ ve $u_k(\cdot) \in \mathcal{U}$ vardır.

$\forall k = 1, 2, \ldots$ için $x_k \in X_0$ ve $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme olduğundan, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Genelliği bozmaksızın, $k \to \infty$ için $x_k \to x_0$ olduğu kabul edilsin. X_0 kompakt küme olduğundan, $x_0 \in X_0$ olur.

Mümkün kontrol fonksiyonlar kümesi,

$$\mathcal{U} = \left\{ u(\cdot) \in L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^m) : \int_{t_0}^{\theta} \|u(\tau)\|^p d\tau \leq \mu_0^p \ , \quad \mu_0 > 0 \quad (1 < p < \infty) \right\}$$

$L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^m)$ uzayında zayıf kompakt bir kümedir [49]. Her $k = 1, 2, \ldots$ için $u_k(\cdot) \in \mathcal{U}$ olduğundan, $\{u_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{U}$ dizisinin zayıf yakınsak bir alt dizisi vardır. Genelliği bozmaksızın, $\{u_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin zayıf yakınsak olduğu kabul edilsin ve $k \to \infty$ iken $u_k(\cdot) \xrightarrow{z} u_0(\cdot) \in \mathcal{U}$ olsun. $L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^m)$ uzayında zayıf yakınsaklığın tanımından, Her $\nu(\cdot) \in L_q([t_0, \theta], \mathbb{R}^m)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ için

$$\int_{t_0}^{\theta} \nu(\tau) u_k(\tau) d\tau \to \int_{t_0}^{\theta} \nu(\tau) u_0(\tau) d\tau$$

olur. (2.1.1) sisteminin bu $u_0(\cdot) \in \mathcal{U}$ mümkün kontrol fonksiyonunun (t_0, x_0) başlangıç noktasından ürettiği çözüm $x_0(\cdot)$ ile gösterilecek olursa,

$$x_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left[f(\tau, x_0(\tau)) + B(\tau, x_0(\tau)) u_0(\tau) \right] d\tau, \quad t \in [t_0, \theta]$$

yazılabilir. Buradan ve 2.1.B. koşulundan, her $k = 1, 2, \ldots$ ve $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\|x_k(t) - x_0(t)\| \ &\leq \ \|x_k - x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x_k(\tau)) - f(\tau, x_0(\tau))\| d\tau + \\
&\quad + \left\| \int_{t_0}^{t} \left[B(\tau, x_k(\tau)) u_k(\tau) - B(\tau, x_0(\tau)) u_0(\tau) \right] d\tau \right\| \\
&\leq \ \|x_k - x_0\| + L_1 \int_{t_0}^{t} \|x_k(\tau) - x_0(\tau)\| d\tau + \\
&\quad + \left\| \int_{t_0}^{t} \left[B(\tau, x_k(\tau)) u_k(\tau) - B(\tau, x_0(\tau)) u_0(\tau) \right] d\tau \right\| \\
&\leq \ \|x_k - x_0\| + L_1 \int_{t_0}^{t} \|x_k(\tau) - x_0(\tau)\| d\tau + \\
&\quad + L_2 \int_{t_0}^{t} \|x_k(\tau) - x_0(\tau)\| \|u_k(\tau)\| d\tau + \\
&\quad + \left\| \int_{t_0}^{t} B(\tau, x_0(\tau)) (u_k(\tau) - u_0(\tau)) d\tau \right\|
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

elde edilir. 2.1.A. koşulundan $B(\tau, x_0(\tau)) : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ sürekli fonksiyon ve $k \to \infty$ iken $x_k \to x_0$ ve $u_k(\cdot) \xrightarrow{z} u_0(\cdot)$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için $k \geq K(\varepsilon)$ iken

$$\|x_k - x_0\| + \left\| \int_{t_0}^{t} B(\tau, x_0(\tau))(u_k(\tau) - u_0(\tau))d\tau \right\| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0, \theta]$$

olacak biçimde $K(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. O halde buradan ve (2.1.9) den, her $k \geq K(\varepsilon)$ için

$$\|x_k(t) - x_0(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2\|u_k(\tau)\|)\|x_k(\tau) - x_0(\tau)\|d\tau + \varepsilon, \quad t \in [t_0, \theta]$$

elde edilir. Bu son ifade için önerme 1.1.17 Gronwall eşitsizliği, $\nu(t) = \|x_k(t) - x_0(t)\|$, $h(t) = \varepsilon$ ve $\psi(\tau) = L_1 + L_2\|u_k(\tau)\|$ için kullanılırsa,

$$c = \exp(\int_{t_0}^{\theta} L_1 + L_2\|u_k(\tau)\|d\tau)$$

olmak üzere her $k \geq K(\varepsilon)$ ve $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$\|x_k(t) - x_0(t)\| \leq \varepsilon + c\int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2\|u_k(\tau)\|)\varepsilon d\tau$$

bulunur. Diğer taraftan önerme 2.1.5 den

$$\int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2\|u_k(\tau)\|)d\tau \leq L_1(\theta - t_0) + L_2\mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}$$

olduğundan son ifade her $k \geq K(\varepsilon)$ ve her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - x_0(t)\| \leq \; & \varepsilon + \varepsilon\left(L_1(\theta - t_0) + L_2\mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\right) \\ & \exp\left(L_1(\theta - t_0) + L_2\mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\right) \end{aligned}$$

şekline dönüşür. Buradan $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_0(\cdot)$ olduğu sonucu çıkar.

Limitin tekliğinden, başlangıçta kabul edilen $x_*(\cdot)$ fonksiyonu ile $x_0(\cdot)$ fonksiyonları eşit olmalıdır. O halde $x_0(\cdot) = x_*(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ olduğundan bu sonuç (2.1.1) sisteminin $X(t_0, X_0)$ çözümler kümesinin kapalı olduğunu gösterir. □

Önerme 2.1.12 den aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Sonuç 2.1.13. *(2.1.2) kısıtı ile verilen (2.1.1) sisteminin her* $t \in [t_0, \theta]$ *için,* t *anındaki* $X(t; t_0, X_0)$ *erişim kümesi kapalı kümedir.*

Elde edilen sonuçlar birleştirilecek olursa aşağıdaki Teoremler verilebilir.

Teorem 2.1.14. *(2.1.2) kısıtı ile verilen (2.1.1) sisteminin $X(t_0, X_0)$ çözümler kümesi $C([t_0, \theta], \mathbb{R}^n)$ uzayında kompakt bir kümedir.*

Kanıt. (2.1.1) sisteminin $X(t_0, X_0)$ çözümler kümesi sonuç 2.1.8 ve önerme 2.1.12 den dolayı düzgün sınırlı ve eş süreklidir. O halde 1.1.4 Arzela-Ascoli Teoremine göre $X(t_0, X_0)$ kümesi prekompakt bir kümedir. Aynı zamanda önerme 2.1.12 de $X(t_0, X_0)$ kümesinin kapalı olduğu kanıtlandığından (2.1.1) sisteminin $X(t_0, X_0)$ çözümler kümesi kompakt küme olur. □

Teorem 2.1.15. *(2.1.2) kısıtı ile verilen (2.1.1) sisteminin her $t \in [t_0, \theta]$ için t anındaki $X(t; t_0, X_0)$ erişim kümeleri kompakt kümelerdir.*

Aşağıdaki önerme (2.1.2) kısıtı ile verilen (2.1.1) sisteminde her $t \in [t_0, \theta]$ için, $t \to X(t; t_0, X_0)$ küme değerli dönüşümünün Hölder sürekli olduğunu göstermektedir.

Önerme 2.1.16. *(2.1.2) kısıtı ile verilen (2.1.1) sistemi her $t_1, t_2 \in [t_0, \theta]$ için*

$$\alpha(X(t_1; t_0, X_0), X(t_2; t_0, X_0)) \leq M|t_1 - t_2|^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $M > 0$ sabit bir sayıdır.

Kanıt. Genelliği bozmaksızın $t_1 < t_2$ kabul edilebilir. $y_1 \in X(t_1; t_0, X_0)$ keyfi bir nokta olsun. O zaman

$$y_1 = x_*(t_1) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} [f(\tau, x_*(\tau)) + B(\tau, x_*(\tau))u_*(\tau)]\, d\tau$$

olacak şekilde $x_0 \in X_0$, $x_*(\cdot) \in X(t_0, x_0)$ ve $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}$ vardır.

$$y_2 = x_*(t_2) = x_0 + \int_{t_0}^{t_2} [f(\tau, x_*(\tau)) + B(\tau, x_*(\tau))u_*(\tau)]\, d\tau$$

olsun. O zaman $y_2 = x_*(t_2) \in X(t_2; t_0, X_0)$ olur. Bu iki nokta arasındaki farkın normu alınacak olursa,

$$\|y_1 - y_2\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(\tau, x_*(\tau))\| d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \|B(\tau, x_*(\tau))u_*(\tau)\| d\tau$$

elde edilir.

$$K_1 = \max\{\|f(t,x)\| : (t,x) \in D\}$$

ve

$$K_2 = \max\{\|B(t,x)\| : (t,x) \in D\}$$

alınırsa, bu son ifade

$$\|y_1 - y_2\| \leq \int_{t_1}^{t_2} (K_1 + K_2)\|u_*(\tau)\|d\tau$$

şekline dönüşür. Son olarak önerme 1.1.12 Hölder integral eşitsizliği uygulanacak olursa, $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\|y_1 - y_2\| &\leq (K_1 + K_2)\left(\int_{t_1}^{t_2} 1^{\frac{p}{p-1}} d\tau\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_1}^{t_2} \|u_*(\tau)\|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (K_1 + K_2)\mu_0 |t_1 - t_2|^{\frac{p-1}{p}}\end{aligned}$$

bulunur. $M = (K_1 + K_2)\mu_0$ seçilirse,

$$\|y_1 - y_2\| \leq M|t_1 - t_2|^{\frac{p-1}{p}}$$

olur. O halde her $t_1, t_2 \in [t_0, \theta]$ için

$$X(t_1; t_0, X_0) \subset X(t_2; t_0, X_0) + M|t_1 - t_2|^{\frac{p-1}{p}} B \tag{2.1.10}$$

dir. Benzer şekilde önce keyfi $y_2 \in X(t_2; t_0, X_0)$ noktası seçilerek de

$$X(t_2; t_0, X_0) \subset X(t_1; t_0, X_0) + M|t_1 - t_2|^{\frac{p-1}{p}} B \tag{2.1.11}$$

kapsaması elde edilebilir. Böylece (2.1.10), (2.1.11) ve önerme 1.1.19 kullanılarak keyfi $t_1, t_2 \in [t_0, \theta]$ için

$$\alpha(X(t_1; t_0, X_0), X(t_2; t_0, X_0)) \leq M|t_1 - t_2|^{\frac{p-1}{p}}$$

elde edilir. □

Tanım 2.1.17. *$E \subset \mathbb{R}^n$ için E kümesinin çapı, çap E ile gösterilir ve*

$$\text{çap}\, E = \sup_{x,y \in E} \|x - y\|$$

olarak tanımlanır.

Aşağıdaki önerme (2.1.2) kısıtı ile verilen (2.1.1) sisteminin erişim kümelerinin çapı için bir değerlendirme vermektedir.

Önerme 2.1.18.

$$K = \max_{(t,x)\in D} \|B(t,x)\| \ ve\ d = çap\, X_0$$

olmak üzere, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$çap\, X(t; t_0, X_0) \leq d + 2K\mu_0 (t-t_0)^{\frac{p-1}{p}} +$$
$$+L_1 \left[d(t-t_0) + 2K\mu_0 \tfrac{p}{2p-1}(t-t_0)^{\frac{2p-1}{p}} \right] \exp\left(L_1(\theta - t_0)\right)$$

olur.

Kanıt. $t \in [t_0, \theta]$ ve $y_1, y_2 \in X(t; t_0, X_0)$ keyfi öğeler olsun. Bu durumda,

$$y_1 = x_1(t) = x_1 + \int_{t_0}^{t} \left[f(\tau, x_1(\tau)) + B(\tau, x_1(\tau)) u_1(\tau)) \right] d\tau$$

olacak şekilde $x_1 \in X_0$, $x_1(\cdot) \in X(t_0, X_0)$, $u_1(\cdot) \in \mathcal{U}$ ve

$$y_2 = x_2(t) = x_2 + \int_{t_0}^{t} \left[f(\tau, x_2(\tau)) + B(\tau, x_2(\tau)) u_2(\tau)) \right] d\tau$$

olacak şekilde $x_2 \in X_0$, $x_2(\cdot) \in X(t_0, X_0)$, $u_2(\cdot) \in \mathcal{U}$ vardır. 2.1.A. koşulundan

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\| &\leq \|x_1 - x_2\| + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_2(\tau))\| d\tau + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x_1(\tau)) u_1(\tau) - B(\tau, x_2(\tau)) u_2(\tau)\| d\tau \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + L_1 \int_{t_0}^{t} \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| d\tau + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x_1(\tau))\| \|u_1(\tau)\| d\tau + \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x_2(\tau))\| \|u_2(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

bulunur.

$$K = \max_{(t,x)\in D} \|B(t,x)\| \text{ ve } d = \text{çap}\, X_0$$

olduğundan,

$$\|y_1 - y_2\| \leq d + L_1 \int_{t_0}^{t} \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| d\tau + K \left[\int_{t_0}^{t} \|u_1(\tau)\| d\tau + \int_{t_0}^{t} \|u_2(\tau)\| d\tau \right]$$

olur. Önerme 1.1.12 Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\|y_1 - y_2\| &\leq d + L_1 \int_{t_0}^{t} \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| d\tau + \\ &+K\left[\left(\int_{t_0}^{t} 1^{\frac{p}{p-1}} d\tau\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_0}^{t} \|u_1(\tau)\|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} + \right. \\ &\left. + \left(\int_{t_0}^{t} 1^{\frac{p}{p-1}} d\tau\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_0}^{t} \|u_2(\tau)\|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\right]\end{aligned}$$

olur. Buradan ve $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathcal{U}$ olduğundan,

$$\|y_1 - y_2\| \leq d + L_1 \int_{t_0}^{t} \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| d\tau + 2K\mu_0(t - t_0)^{\frac{p-1}{p}}$$

olur. Bu ifadeye önerme 1.1.17 Gronwall eşitsizliği $\nu(t) = \|x_1(t) - x_2(t)\|$, $h(t) = d + 2K\mu_0(t - t_0)^{\frac{p-1}{p}}$ ve $\psi(\tau) = L_1$ için kullanılırsa,

$$c = \exp\left(\int_{t_0}^{\theta} L_1 d\tau\right) = \exp\left(L_1(\theta - t_0)\right)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\|y_1 - y_2\| &\leq d + 2K\mu_0(t - t_0)^{\frac{p-1}{p}} + c\int_{t_0}^{t} L_1 \left[d + 2K\mu_0(\tau - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\right] d\tau \\ &\leq d + 2K\mu_0(t - t_0)^{\frac{p-1}{p}} + L_1 \left[d(t - t_0) + 2K\mu_0 \tfrac{p}{2p-1}(t - t_0)^{\frac{2p-1}{p}}\right] \\ &\quad \exp\left(L_1(\theta - t_0)\right)\end{aligned}$$

bulunur. $t \in [t_0, \theta]$ ve $y_1, y_2 \in X(t; t_0, X_0)$ keyfi elemanlar olduğundan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\text{çap}\, X(t; t_0, X_0) \leq d + 2K\mu_0(t - t_0)^{\frac{p-1}{p}} + \\ + L_1 \left[d(t - t_0) + 2K\mu_0 \tfrac{p}{2p-1}(t - t_0)^{\frac{2p-1}{p}}\right] \exp\left(L_1(\theta - t_0)\right)$$

olur. □

Önerme 2.1.18 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.19. $t \to t_0$ *iken* $\text{çap}\, X(t; t_0, X_0) \to \text{çap}\, X_0$ *olur.*

2.2 Quasi-Lineer Sistemlerin Erişim Kümelerinin Başlangıç Koşullarına Bağımlılığı

Bu bölümde erişim kümelerinin X_0 başlangıç kümesine bağlantısı araştırılacaktır.

Önerme 2.2.1. *X_0 ve X_1 kümeleri $\mathbb{R}^n$ uzayının kompakt alt kümeleri olmak üzere (2.1.2) kısıtı ile verilen (2.1.1) sisteminde her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$\alpha(X(t;t_0,X_0),X(t;t_0,X_1)) \leq K\alpha(X_0,X_1)$$

olur. Burada $K > 0$ sabit sayıdır.

Kanıt. Keyfi $x_0(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ alınsın ve sabitlensin. O zaman

$$x_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x_0(\tau)) + B(\tau, x_0(\tau))u(\tau)]\, d\tau, \quad t \in [t_0, \theta]$$

olacak biçimde $x_0 \in X_0$ ve $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ vardır. X_0 ve X_1 kompakt kümeler olduğundan, 1.1.18 Hausdorff uzaklığının tanımından $\|x_1 - x_0\| \leq \alpha(X_0, X_1) < +\infty$ olacak şekilde $x_1 \in X_1$ vardır. (2.1.1) sisteminin aynı $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen ve $x_1(t_0) = x_1$ başlangıç koşulunu sağlayan $x_1(\cdot) \in X(t_0, X_1)$ çözümü için

$$x_1(t) = x_1 + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x_1(\tau)) + B(\tau, x_1(\tau))u(\tau)]\, d\tau\ , \quad t \in [t_0, \theta]$$

olur. Buradan her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x_0(t) - x_1(t)\| &\leq \|x_0 - x_1\| + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x_0(\tau)) - f(\tau, x_1(\tau))\| d\tau + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\| \|B(\tau, x_0(\tau)) - B(\tau, x_1(\tau))\| d\tau \end{aligned}$$

olur. x_1 in seçilişinden ve 2.1.A. koşulundan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x_0(t) - x_1(t)\| &\leq \alpha(X_0, X_1) + L_1 \int_{t_0}^{t} \|x_0(\tau) - x_1(\tau)\| d\tau + \\ &\quad + L_2 \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\| \|x_0(\tau) - x_1(\tau)\| d\tau \\ &= \alpha(X_0, X_1) + \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|)\, \|x_0(\tau) - x_1(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeye $\nu(t) = \|x_0(t) - x_1(t)\|$, $h(t) = \alpha(X_0, X_1)$ ve $\psi(\tau) = L_1 + L_2\|u(\tau)\|$ için önerme 1.1.17 Gronwall eşitsizliği uygulanacak olursa,

$$c = \exp\left(\int_{t_0}^{\theta} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|)d\tau\right)$$

olmak üzere, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x_0(t) - x_1(t)\| \leq \alpha(X_0, X_1) + c.\alpha(X_0, X_1)\int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|)d\tau \qquad (2.2.12)$$

olduğu bulunur. Önerme 2.1.5 kullanılırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}\|x_0(t) - x_1(t)\| \quad \leq \quad & \alpha(X_0, X_1)\Big[1 + \exp\left(L_1(\theta - t_0) + L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0\right) \\ & \left(L_1(\theta - t_0) + L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0\right)\Big]\end{aligned}$$

bulunur. Gösterimlerde kısalık için

$$r_* = L_1(\theta - t_0) + L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0 \qquad (2.2.13)$$

ve

$$K = 1 + r_* \exp(r_*)$$

alınırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x_0(t) - x_1(t)\| \leq K\alpha(X_0, X_1)$$

olduğu elde edilir. Böylece keyfi sabitlenmiş $x_0(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ için $\|x_0(t) - x_1(t)\| \leq K\alpha(X_0, X_1)$ olacak biçimde $x_1(\cdot) \in X(t_0, X_1)$ olduğu gösterilmiş olur. Bu ise her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$X(t; t_0, X_0) \subset X(t; t_0, X_1) + K\alpha(X_0, X_1)B \qquad (2.2.14)$$

olması demektir.

Benzer şekilde $t \in [t_0, \theta]$ için

$$X(t; t_0, X_1) \subset X(t; t_0, X_0) + K\alpha(X_0, X_1)B \qquad (2.2.15)$$

olduğu kanıtlanır. O halde (2.2.14), (2.2.15) ve önerme 1.1.19 den her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\alpha(X(t; t_0, X_0), X(t; t_0, X_1)) \leq K\alpha(X_0, X_1)$$

bulunur. □

Yukarıdaki önermeden, $\forall n = 1, 2, \ldots$ için $X_n \subset \mathbb{R}^n$ ve $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt kümeler ve $n \to \infty$ iken $\alpha(X_n, X_0) \to 0$ ise her $t \in [t_0, \theta]$ için $n \to \infty$ iken $\alpha(X(t; t_0, X_n), X(t; t_0, X_0)) \to 0$ olduğu sonucu çıkar. O halde keyfi bir t anındaki erişim kümesi X_0 başlangıç kümesine sürekli bağımlı olur.

Önerme 2.2.2. *$t_1 > t_0$, $X_0, X_1 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt kümeler,*

$$r_0 = \alpha(X_0, X_1) + d_1(t_1 - t_0) + d_2(t_1 - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0$$

ve

$$\begin{aligned} r \;&=\; r_0 \Big[1 + \Big(L_1(\theta - t_1) + L_2\mu_0(\theta - t_1)^{\frac{p-1}{p}} \Big) \\ &\qquad \exp \Big(L_1(\theta - t_1) + L_2\mu_0(\theta - t_1)^{\frac{p-1}{p}} \Big) \Big] \end{aligned}$$

olmak üzere, (2.1.2) kısıtı ile verilen (2.1.1) sistemi için

$$\alpha(X(t; t_0, X_0), X(t; t_1, X_1)) \leq r \;, \quad t \in [t_1, \theta]$$

olur. Burada d_1 ve d_2 pozitif sabit sayılardır.

Kanıt. $t \in [t_1, \theta]$ için keyfi $y_0 \in X(t; t_0, X_0)$ alınsın. O zaman

$$y_0 = x_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x_0(\tau)) + B(\tau, x_0(\tau))u(\tau)]\, d\tau$$

olacak biçimde $x_0 \in X_0$, $x_0(\cdot) \in X(t_0, x_0)$ ve $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ vardır. 1.1.18 Hausdorff uzaklığının tanımından, $\|x_0 - x_1\| \leq \alpha(X_0, X_1)$ olacak şekilde $x_1 \in X_1$ vardır. Aynı $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ kontrol fonksiyonunun bu $x_1 \in X_1$ noktasından çıkan çözümü $x_1(\cdot) \in X(t_1, x_1)$ ile gösterilecek olursa, her $t \in [t_1, \theta]$ için

$$x_1(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} [f(\tau, x_1(\tau)) + B(\tau, x_1(\tau))u(\tau)]\, d\tau$$

yazılabilir. Buradan her $t \in [t_1, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x_0(t) - x_1(t)\| \;&\leq\; \|x_0 - x_1\| + \int_{t_1}^{t} \|f(\tau, x_0(\tau)) - f(\tau, x_1(\tau))\| d\tau + \\ &\quad + \int_{t_1}^{t} \|\, [B(\tau, x_0(\tau)) - B(\tau, x_1(\tau))]\, u(\tau)\| d\tau + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \|f(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x_0(\tau))u(\tau))\| d\tau \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

olduğu elde edilir. Önerme 2.1.6 dan $Z(t_0, X_0) \subset D_*$ ve $Z(t_1, X_1) \subset D_*$ olacak şekilde D_* silindiri vardır.

$$\max_{(t,x)\in D_*} \|f(t,x)\| = d_1 \text{ ve } \max_{(t,x)\in D_*} \|B(t,x)\| = d_2$$

olsun. O halde buradan, (2.2.16) ve 2.1.A. koşulundan,

$$\begin{aligned} \|x_0(t) - x_1(t)\| &\le \|x_0 - x_1\| + \int_{t_1}^{t} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|)(\|x_0(\tau) - x_1(\tau)\|)d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} (d_1 + d_2\|u(\tau)\|)d\tau \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

olur. Önerme 2.1.5 den

$$\int_{t_0}^{t_1} (d_1 + d_2\|u(\tau)\|)d\tau \le d_1(t_1 - t_0) + d_2(t_1 - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0$$

olduğundan ve $\|x_0 - x_1\| \le \alpha(X_0, X_1)$ seçilişinden, (2.2.17) ifadesi,

$$\begin{aligned} \|x_0(t) - x_1(t)\| &\le \alpha(X_0, X_1) + d_1(t_1 - t_0) + d_2(t_1 - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0 + \\ &+ \int_{t_1}^{t} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|)\|x_0(\tau) - x_1(\tau)\|d\tau \end{aligned}$$

şekline dönüşür. $r_0 = \alpha(X_0, X_1) + d_1(t_1 - t_2) + d_2(t_1 - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0$ olduğundan,

$$\|x_0(t) - x_1(t)\| \le r_0 + \int_{t_1}^{t} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|)\|x_0(\tau) - x_1(\tau)\|d\tau$$

olur. Bu ifadeye $\nu(t) = \|x_0(t) - x_1(t)\|$, $h(t) = r_0$ ve $\psi(\tau) = (L_1 + L_2\|u(\tau)\|)$ için 1.1.17 Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$c = \exp\left(\int_{t_1}^{\theta} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|)d\tau\right)$$

olmak üzere,

$$\|x_0(t) - x_1(t)\| \le r_0 + cr_0\int_{t_1}^{t} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|)d\tau \tag{2.2.18}$$

elde edilir. Önerme 2.1.5 den

$$\int_{t_1}^{t} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|)d\tau \le L_1(\theta - t_1) + L_2(\theta - t_1)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0$$

olur. Bu sonuç (2.2.18) de yerine yazılacak olursa,

$$\begin{aligned}\|x_0(t)-x_1(t)\| \;\leq\; & r_0\Big[1+\Big(L_1(\theta-t_1)+L_2\mu_0(\theta-t_1)^{\frac{p-1}{p}}\Big)\\ & \exp\Big(L_1(\theta-t_1)+L_2\mu_0(\theta-t_1)^{\frac{p-1}{p}}\Big)\Big]\end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}r \;=\; & r_0\,[1+\Big(L_1(\theta-t_1)+L_2\mu_0(\theta-t_1)^{\frac{p-1}{p}}\Big)\\ & \exp\Big(L_1(\theta-t_1)+L_2\mu_0(\theta-t_1)^{\frac{p-1}{p}}\Big)\Big]\end{aligned}$$

olmak üzere her $t \in [t_1, \theta]$ için,

$$X(t;t_0,X_0) \subset X(t;t_1,X_1) + rB$$

kapsaması geçerlidir.

Önce $X(t;t_1,X_1)$ kümesinden keyfi bir eleman alınarak, benzer işlemlerle her $t \in [t_1,\theta]$ için de

$$X(t;t_1,X_1) \subset X(t;t_0,X_0) + rB$$

kapsaması elde edilir. O halde bu iki kapsama ve önerme 1.1.19 kullanılarak her $t \in [t_1,\theta]$ için,

$$\alpha(X(t;t_0,X_0), X(t;t_1;X_1)) \leq r$$

sonucu elde edilir. □

Önerme 2.2.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.3. *$\forall n = 1, 2, \ldots$ için $X_n \subset \mathbb{R}^n$ ve $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt kümeler, $n \to \infty$ iken $t_n \to t_0$ ve $\alpha(X_n, X_0) \to 0$ olsun.*

O zaman, her $t \in [t_0, \theta]$ için $n \to \infty$ iken

$$\alpha(X(t;t_n,X_n), X(t;t_0,X_0)) \to 0$$

olur.

Aşağıdaki önermede (2.1.2) kısıtı ile verilen (2.1.1) sisteminin erişim kümelerinin (2.1.2) kısıtında geçen μ_0 sayısına olan bağlantısı incelenmektedir.

μ_0 ve μ_1 pozitif sayılar olmak üzere,

$$\mathcal{U}_0 = \{u(\cdot) \in L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^m) : \|u(\cdot)\|_p \leq \mu_0\}$$

ve

$$\mathcal{U}_1 = \{u(\cdot) \in L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^m) : \|u(\cdot)\|_p \leq \mu_1\}$$

olsun. (2.1.1) sisteminin (t_0, X_0) başlangıç kümesinden çıkan ve tüm $u(\cdot) \in \mathcal{U}_0$ mümkün kontrol fonksiyonları tarafından üretilen çözümlerinin kümesi $X_0(t_0, X_0)$, $t \in [t_0, \theta]$ için t anındaki erişim kümesi ise $X_0(t; t_0, X_0)$ ile gösterilsin. Benzer olarak, (2.1.1) sisteminin (t_0, X_0) başlangıç kümesinden çıkan ve tüm $u(\cdot) \in \mathcal{U}_1$ mümkün kontrol fonksiyonları tarafından üretilen çözümler kümesi ile t anındaki erişim kümesi sırasıyla $X_1(t_0, X_0)$ ve $X_1(t; t_0, X_0)$ ile gösterilsin. Bu durumda aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 2.2.4. *$K > 0$ sabit bir sayı, $r_0 = K(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} |\mu_0 - \mu_1|$ ve*

$$\begin{aligned} r &= r_0 \Big[1 + \Big(L_1(\theta - t_0) + L_2\mu_1(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\Big) \\ &\quad \exp\Big(L_1(\theta - t_0) + L_2\mu_1(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\Big)\Big] \end{aligned}$$

olmak üzere (2.1.2) kısıtı ile verilen (2.1.1) sisteminde her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\alpha(X_0(t; t_0, X_0), X_1(t; t_0, X_0)) \leq r$$

olur.

Kanıt. Keyfi $t \in [t_0, x_0]$ için $y_0 \in X_0(t; t_0, X_0)$ olsun. O zaman,

$$y_0 = x_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x_0(\tau)) + B(\tau, x_0(\tau))u_0(\tau)]\, d\tau$$

olacak şekilde $x_0 \in X_0$, $x_0(\cdot) \in X_0(t_0, x_0)$ ve $u_0(\cdot) \in \mathcal{U}_0$ vardır. $u_0(\cdot) \in \mathcal{U}_0$ mümkün kontrol fonksiyonu yardımıyla her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$u_1(t) = \frac{\mu_1}{\mu_0} u_0(t)$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda

$$\|u_1(\cdot)\|_p = \left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_1(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\mu_1}{\mu_0}\left(\int_{t_0}^{\theta} \|u_0(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \mu_1$$

olduğundan $u_1(\cdot) \in \mathcal{U}_1$ olur. (2.1.1) sisteminin yukarıdaki gibi tanımlanan $u_1(\cdot) \in \mathcal{U}_1$ mümkün kontrol fonksiyonu tarafından (t_0, x_0) başlangıç noktasından üretilen çözümü $x_1(\cdot) \in X_1(t_0, x_0) \subset X_1(t_0, X_0)$ ve $x_1(t) = y_1$ ile gösterilecek olursa,

$$y_1 = x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau))u(\tau)]\, d\tau$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}
\|y_0 - y_1\| &= \|x_0(t) - x_1(t)\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x_0(\tau)) - f(\tau, x_1(\tau))\| d\tau + \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x_0(\tau))u_0(\tau) - B(\tau, x_1(\tau))u_1(\tau)\| d\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. 2.1.A. koşulu kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\|y_0 - y_1\| &\leq L_1 \int_{t_0}^{t} \|x_0(\tau) - x_1(\tau)\| d\tau + \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x_1(\tau))\| \|u_0(\tau) - u_1(\tau)\| d\tau + \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x_0(\tau)) - B(\tau, x_1(\tau))\| \|u_0(\tau)\| d\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2\|u_0(\tau)\|)\, \|x_0(\tau) - x_1(\tau)\| d\tau + \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x_1(\tau))\| \|u_0(\tau) - u_1(\tau)\| d\tau
\end{aligned}$$

yazılabilir. $K = \max\limits_{(t,x)\in D} \|B(t,x)\|$ alınırsa $u_1(\cdot)$ fonksiyonunun tanımlanışından,

$$\begin{aligned}
\|y_0 - y_1\| &\leq \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2\|u_0(\tau)\|)\, \|x_0(\tau) - x_1(\tau)\| d\tau + \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} K \|u_0(\tau) - u_1(\tau)\| d\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2\|u_0(\tau)\|)\, \|x_0(\tau) - x_1(\tau)\| d\tau + \\
&\quad + K \left|1 - \frac{\mu_1}{\mu_0}\right| \int_{t_0}^{t} \|u_0(\tau)\| d\tau
\end{aligned}$$

olur. Önerme 1.1.12 Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\|y_0-y_1\| &\leq \int_{t_0}^{t}\left(L_1+L_2\|u_0(\tau)\|\right)\|x_0(\tau)-x_1(\tau)\|d\tau+\\ &\quad +K\mu_0\left|1-\frac{\mu_1}{\mu_0}\right|(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\\ &= \int_{t_0}^{t}\left(L_1+L_2\|u_0(\tau)\|\right)\|x_0(\tau)-x_1(\tau)\|d\tau+\\ &\quad +K\left|\mu_0-\mu_1\right|(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\end{aligned}$$

elde edilir.

$$r_0=K\left|\mu_0-\mu_1\right|(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}$$

oldugundan ve önerme 1.1.17 Gronwall eşitsizliği, $\nu(t)=\|x_0(t)-x_1(t)\|$, $h(t)=r_0$ ve $\psi(\tau)=L_1+L_2\|u_0(\tau)\|$ için kullanılacak olursa,

$$c=\exp\left(\int_{t_0}^{\theta}L_1+L_2\|u_0(t)\|dt\right)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\|y_0-y_1\| &= \|x_0(t)-x_1(t)\|\\ &\leq r_0+cr_0\int_{t_0}^{t}\left(L_1+L_2\|u_0(\tau)\|\right)d\tau\end{aligned}$$

bulunur. Önerme 2.1.5 den

$$\int_{t_0}^{t}\left(L_1+L_2\|u_0(\tau)\|\right)d\tau\leq L_1(\theta-t_0)+L_2(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0$$

oldugundan,

$$\|x_0(t)-x_1(t)\|\leq r_0\left(1+c\left(L_1(\theta-t_0)+L_2(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0\right)\right)$$

olur. $c=\exp\left(\int_{t_0}^{\theta}L_1+L_2\|u_0(t)\|dt\right)$ oldugundan,

$$\begin{aligned}\|x_0(t)-x_1(t)\| &\leq r_0\Big[1+\left(L_1(\theta-t_0)+L_2\mu_0(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\right)\\ &\qquad \exp\left(L_1(\theta-t_0)+L_2\mu_0(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\right)\Big]\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}r &= r_0\Big[1+\left(L_1(\theta-t_0)+L_2\mu_1(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\right)\\ &\qquad \exp\left(L_1(\theta-t_0)+L_2\mu_1(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\right)\Big]\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\|x_0(t) - x_1(t)\| \leq r$$

bulunur. O halde her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$X_0(t; t_0, X_0) \subset X_1(t; t_0, X_0) + rB \tag{2.2.19}$$

kapsaması elde edilir. Benzer şekilde önce $y_1 \in X_1(t; t_0, X_0)$ noktası seçilerek de her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$X_1(t; t_0, X_0) \subset X_0(t; t_0, X_0) + rB \tag{2.2.20}$$

kapsaması da elde edilebilir. O halde (2.2.19), (2.2.20) ve önerme 1.1.19 den her $t \in [t_0, \theta]$ için $\alpha(X_0(t; t_0, X_0), X_1(t; t_0, X_0)) \leq r$ elde edilir. □

$U_n = \{u(\cdot) \in L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^n) : \|u(\cdot)\|_p \leq \mu_n\}$ olsun. (2.1.1) kontrol sisteminin (t_0, X_0) başlangıç kümesinden çıkan tüm $u(\cdot) \in \mathcal{U}_n$ mümkün kontrol fonksiyonları tarafından üretilen çözümler kümesi $X_n(t_0, X_0)$ ve $t \in [t_0, \theta]$ anındaki erişim kümesi ise $X_n(t; t_0, X_0)$ ile gösterilsin. O zaman önerme 2.2.4 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.5. *$n \to \infty$ iken $\mu_n \to \mu_0$ olsun. Bu durumda her $t \in [t_0, \theta]$ için $n \to \infty$ iken*

$$\alpha(X_n(t; t_0, X_0), X_0(t; t_0, X_0)) \to 0$$

olur.

2.3 Lineer Olmayan Kontrol Sistemlerin Erişim Kümelerinin Özellikleri

Kontrol sistemin bir $[t_0, \theta]$ aralığındaki davranışı,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) \in X_0 \tag{2.3.21}$$

diferansiyel denklemi ile verilmiş olsun. Burada $x \in \mathbb{R}^n$ sistemin n-boyutlu durum vektörü, u m-boyutlu kontrol vektör, $t \in [t_0, \theta]$ $(t_0 < \theta < \infty)$ zaman ve

$X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt kümedir. (2.3.21) denkleminin sağ tarafı aşağıdaki koşulları sağlasın.

2.3.A. $f(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ fonksiyonu sürekli ve her $D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ sınırlı kümesi için $(t, x_i, u_i) \in D \times \mathbb{R}^m$ $(i = 1, 2)$ iken

$$\|f(t, x_1, u_1) - f(t, x_2, u_2)\| \leq L_1\|x_1 - x_2\| + L_2\|u_1 - u_2\|$$

olacak şekilde $L_i = L_i(D) \geq 0$, $i = 1, 2$ sayıları bulunsun.

2.3.B. Her $(t, x, u) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ için

$$\|f(t, x, u)\| \leq H_1(1 + \|x\|) + H_2(1 + \|u\|)$$

olacak şekilde $H_i \in (0, \infty)$, $i = 1, 2$ sayıları var olsun.

Ayrıca, (2.3.21) sisteminin kontrol fonksiyonları, $L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^m)$ uzayından olmak üzere

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p dt \leq \mu_0^p, \quad \mu_0 \geq 0, \quad 1 < p < \infty \tag{2.3.22}$$

eşitsizliği ile kısıtlanmış olsun. Bir başka ifadeyle (2.3.21) sisteminin kontrol fonksiyonları $L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^m)$ uzayının μ_0 yarıçaplı kapalı topundan seçilsin.

Bu durumda

$$c_0 = \max\{\|x\| : x \in X_0\}, \tag{2.3.23}$$

$$c_* = c_0 + (H_1 + H_2)(\theta - t_0) + \mu_0 H_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}, \tag{2.3.24}$$

$$r_0 = c_*[1 + (\theta - t_0)H_1 \exp{(\theta - t_0)H_1}] \tag{2.3.25}$$

olmak üzere aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 2.3.1. *(2.3.22) kısıtı ile verilen (2.3.21)sisteminin her $x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ çözümü için*

$$\|x(t)\| \leq r_0, \quad t \in [t_0, \theta]$$

olur.

Kanıt. $x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ (2.3.21) sisteminin keyfi bir çözümü olsun. Bu durumda her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau, \ t \in [t_0, \theta]$$

olacak şekilde $x_0 \in X_0$ ve $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ vardır. 2.3.B. koşulundan ve (2.3.23) den her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau), u(\tau))\|d\tau \\
&\leq c_0 + H_1 \int_{t_0}^{t} (1 + \|x(\tau)\|)d\tau + H_2 \int_{t_0}^{t} (1 + \|u(\tau)\|)d\tau \\
&\leq c_0 + (H_1 + H_2)(\theta - t_0) + H_2 \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|d\tau + H_1 \int_{t_0}^{t} \|x(\tau)\|d\tau
\end{aligned} \tag{2.3.26}$$

elde edilir.

(2.3.22) ve önerme 1.1.12 Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|d\tau \leq (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} (\int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|^p d\tau)^{\frac{1}{p}} \leq (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0 \tag{2.3.27}$$

olur. (2.3.24) ve (2.3.27) göz önüne alınırsa, (2.3.26) dan her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t)\| \leq c_* + H_1 \int_{t_0}^{t} \|x(\tau)\|d\tau \tag{2.3.28}$$

elde edilir. Bu ifadeye $\nu(t) = \|x(t)\|$, $h(t) = c_*$ ve $\psi(\tau) = H_1$ için önerme 1.1.17 Gronwall eşitsizliği uygulanırsa (2.3.28) den her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leq c_* + c_* \exp(H_1(\theta - t_0)) \int_{t_0}^{t} H_1 d\tau \\
&\leq c_*(1 + H_1(\theta - t_0) \exp(H_1(\theta - t_0))) \\
&= r_0
\end{aligned}$$

bulunur. □

Önerme 2.3.1 den, (2.3.22) kısıtı ile verilen (2.3.21) sisteminin $X(t; t_0, X_0)$ erişim kümelerinin sınırlığını karakterize eden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3.2. *(2.3.22) kısıtı ile verilen (2.3.21) sisteminde her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$X(t; t_0, X_0) \subset r_0 \overline{B}$$

olur. Burada $r_0 > 0$ (2.3.25) ile tanımlanır.

$H \in (0, \infty)$ olsun. $\mathcal{U}_H^*$ ile

$$\|u(t)\| \leq H, \ t \in [t_0, \theta]$$

geometrik kısıtını sağlayan $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ mümkün kontrol fonksiyonların ailesi gösterilsin.

(2.3.21) sisteminin tüm $u(\cdot) \in \mathcal{U}_H^*$ mümkün kontrol fonksiyonları tarafından üretilen çözümlerinin kümesi $X_H^*(t_0, X_0)$ ile gösterilsin. Ayrıca, $t \in [t_0, \theta]$ için

$$X_H^*(t; t_0, X_0) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in X_H^*(t_0, X_0)\}$$

olsun.

Aşağıdaki teorem (2.3.22) kısıtı ile verilen (2.3.21) sisteminin $X(t; t_0, X_0)$ erişim kümeleri ile, integral sınırlılık ile beraber geometrik sınırlı da olan $u(\cdot) \in \mathcal{U}_H^*$ kontrol fonksiyonlara karşılık gelen $X_H^*(t; t_0, X_0)$ erişim kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık için bir değerlendirme vermektedir.

Teorem 2.3.3. *Her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$\alpha(X(t; t_0, X_0), X_H^*(t; t_0, X_0)) \leq 2L_2 \frac{\mu_0^p}{H^{p-1}} \left[1 + (\theta - t_0)L_1 \exp\left((\theta - t_0)L_1\right)\right]$$

eşitsizliği sağlanır. Üstelik, her $t \in [t_0, \theta]$ için $H \to \infty$ iken

$$\alpha(X(t; t_0, x_0), X_H^*(t; t_0, x_0)) \to 0$$

olur.

Kanıt. $\mathcal{U}_H^* \subset \mathcal{U}$ olduğundan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$X_H^*(t; t_0, X_0) \subset X(t; t_0, X_0) \tag{2.3.29}$$

olur.

$x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ keyfi bir çözüm olsun. O zaman her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau \tag{2.3.30}$$

olacak şekilde $x_0 \in X_0$ ve $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ vardır. Bu $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ kontrol fonksiyonu yardımıyla,

$$u_*(t) = \begin{cases} u(t) & , \quad \|u(t)\| \leq H \\ \dfrac{u(t)}{\|u(t)\|}H & , \quad \|u(t)\| > H \end{cases} \tag{2.3.31}$$

fonksiyonu tanımlansın.

$u_*(\cdot) \in \mathcal{U}_H^*$ olduğu açıktır. (2.3.21) sisteminin $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}_H^*$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen çözümü $x_*(\cdot) \in X_H^*(t_0, X_0)$ ile gösterilsin. Bu durumda her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))d\tau \tag{2.3.32}$$

olur. Buradan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t) - x_*(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau), u(\tau)) - f(\tau, x_*(\tau), u_*(\tau))\|d\tau$$

olur. 2.3.A. koşulu kullanılırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t) - x_*(t)\| \leq L_1 \int_{t_0}^{t} \|x(\tau) - x_*(\tau)\|d\tau + L_2 \int_{t_0}^{t} \|u(\tau) - u_*(\tau)\|d\tau \tag{2.3.33}$$

olur.

$$\Omega_t = \{\tau \in [t_0, t] : \|u(\tau)\| > H\}$$

olsun. Bu durumda $[t_0, t] \setminus \Omega_t = \{\tau \in [t_0, t] : \|u(\tau)\| \leq H\}$ olur. (2.3.31) ifadesi ve $u_*(\cdot)$ kontrol fonksiyonunun tanımlanışından her $\tau \in [t_0, t] \setminus \Omega_t$ için $\|u(\tau) - u_*(\tau)\| = 0$ olur. O halde (2.3.33) ifadesi her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t) - x_*(t)\| \leq L_1 \int_{t_0}^{t} \|x(\tau) - x_*(\tau)\|d\tau + L_2 \int_{\Omega_t} \|u(\tau) - u_*(\tau)\|d\tau \tag{2.3.34}$$

şekline dönüşür. Öte yandan, $t \in \Omega_t$ iken $\|u(\tau)\| > H$ ve $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ olduğundan

$$H^p \mu(\Omega_t) \leq \int_{\Omega_t} \|u(\tau)\|^p d\tau \leq \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|^p d\tau \leq \mu_0^p$$

ya da,

$$\mu(\Omega_t) \leq \frac{\mu_0^p}{H^p} \tag{2.3.35}$$

olur. Burada $\mu(\Omega_t)$ ile Ω_t kümesinin Lebesgue ölçümü gösterilmektedir. Önerme 1.1.12 Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa,

$$\int_{\Omega_t} \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau \leq \mu(\Omega_t)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega_t} \|u(\tau) - u_*(\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.3.36}$$

olur. $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ ve $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}$ olduğundan önerme 1.1.13 Minkowski eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left(\int_{\Omega_t} \|u(\tau) - u_*(\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega_t} \|u(\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega_t} \|u_*(\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\mu_0 \tag{2.3.37}$$

elde edilir. Böylece (2.3.35) - (2.3.37) den

$$\int_{\Omega_t} \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau \leq 2\frac{\mu_0^p}{H^{p-1}}$$

olur. Bu ifade (2.3.34) de yerine yazılırsa,

$$\|x(t) - x_*(t)\| \leq L_1 \int_{t_0}^{t} \|x(\tau) - x_*(\tau)\| d\tau + 2L_2 \frac{\mu_0^p}{H^{p-1}}$$

olur. Bu ifadeye $\nu(t) = \|x(t) - x_*(t)\|$, $h(t) = 2L_2\frac{\mu_0^p}{H^{p-1}}$ ve $\psi(t) = L_1$ için önerme 1.1.17 Gronwall eşitsizliği uygulanırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_*(t)\| &\leq 2L_2\frac{\mu_0^p}{H^{p-1}} + \exp\left((\theta - t_0)L_1\right) \int_{\Omega_t} 2L_2 \frac{\mu_0^p}{H^{p-1}} L_1 d\tau \\ &\leq 2L_2\frac{\mu_0^p}{H^{p-1}} \left[1 + (\theta - t_0)L_1 \exp\left((\theta - t_0)L_1\right)\right] \end{aligned}$$

olur. O halde keyfi $x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ çözümü için

$$\|x(t) - x_*(t)\| \leq 2L_2\frac{\mu_0^p}{H^{p-1}} \left[1 + (\theta - t_0)L_1 \exp\left((\theta - t_0)L_1\right)\right], \quad t \in [t_0, \theta]$$

olacak şekilde $x_*(\cdot) \in X_H^*(t_0, X_0)$ çözümünün var olduğu kanıtlanmış olur. Bu ise her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$X(t; t_0, X_0) \subset X_H^*(t; t_0, X_0) 2L_2\frac{\mu_0^p}{H^{p-1}} \left[1 + (\theta - t_0)L_1 \exp\left((\theta - t_0)L_1\right)\right] B \tag{2.3.38}$$

anlamına gelir. O halde (2.3.29), (2.3.38) ve önerme 1.1.19 kullanılırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\alpha(X(t; t_0, X_0), X_H^*(t; t_0, X_0)) \leq 2L_2\frac{\mu_0^p}{H^{p-1}} \left[1 + (\theta - t_0)L_1 \exp\left((\theta - t_0)L_1\right)\right]$$

eşitsizliği sağlanır. □

3 QUASİ-LİNEER SİSTEMLERİN ERİŞİM KÜMELERİNİN YAKLAŞIK OLARAK HESAPLANMASI

Bu bölümde erişim kümelerinin yaklaşık olarak hesaplanması için nümerik bir yöntem verilecektir.

3.1 İntegral Sınırlı ve Karmaşık Sınırlı Quasi-Lineer Kontrol Sistemlerin Erişim Kümeleri Arasındaki İlişki

Kontrol sistemin bir $[t_0, \theta]$ aralığındaki davranışı, $x \in \mathbb{R}^n$ sistemin n-boyutlu durum vektörü, $u \in \mathbb{R}^m$ m-boyutlu kontrol vektörü, $f(t, x(t))$ n-boyutlu vektör değerli fonksiyon, $B(t, x(t))$ $n \times m$-boyutlu matris fonksiyon ve $t \in [t_0, \theta]$ zamanı göstermek üzere,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.1.1}$$

diferansiyel denklemi ile verilsin.

(3.1.1) sisteminin $u(\cdot)$ kontrol fonksiyonları $u(\cdot) \in L_p([t_0, \theta], \mathbb{R}^m)$ olmak üzere,

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p dt \leq \mu_0^p, \quad \mu_0 > 0, \quad 1 < p < \infty \tag{3.1.2}$$

integral eşitsizliği ile sınırlandırılmış olsun.

Ayrıca (3.1.1) denkleminin sağ tarafı 2.1.A. ve 2.1.B. koşullarını sağlasın.

(3.1.1) sisteminin tüm mümkün kontrol fonksiyonlarının kümesi $\mathcal{U}$, (t_0, x_0) başlangıç noktasından çıkan ve tüm $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ mümkün kontrol fonksiyonlarının ürettiği çözümler kümesi ve $t \in [t_0, \theta]$ anındaki erişim kümeleri ise sırasıyla $X(t_0, x_0)$ ve $X(t; t_0, x_0)$ ile gösterilsin. $Z(t_0, x_0)$ ile, (3.1.2) kısıtı ile verilen (3.1.1) sisteminin (t_0, x_0) başlangıç noktasıyla integral tüneli gösterilsin. Sonuç

2.1.7 den dolayı $Z(t_0, x_0) \subset D$ olacak biçimde

$$D = \{(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\} \tag{3.1.3}$$

silindiri vardır. Burada r, (2.1.6) ile tanımlanmıştır.

Bu bölümde, 2.1.A. koşulundaki D kümesi olarak, (3.1.3) ile tanımlanan D silindiri göz önüne alınacaktır.

$H \in (0, \infty)$ olsun. $\mathcal{U}_1$ ile

$$\|u(t)\| \leq H, \quad t \in [t_0, \theta]$$

geometrik kısıtını da sağlayan mümkün kontrol fonksiyonların kümesi gösterilsin. Yani,

$$\mathcal{U}_1 = \{u(\cdot) \in \mathcal{U} : \|u(t)\| \leq H, \ t \in [t_0, \theta]\}$$

olur. Açıktır ki $\mathcal{U}_1$ karmaşık sınırlı kontrol fonksiyonlar kümesidir.

(3.1.1) sisteminin tüm mümkün $u(\cdot) \in \mathcal{U}_1$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen tüm çözümlerinin kümesi $X_1(t_0, x_0)$ ile gösterilsin. Benzer şekilde (3.1.1) sisteminin tüm mümkün $u(\cdot) \in \mathcal{U}_1$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen çözümlerinin bir $t \in [t_0, \theta]$ anında ulaştıkları noktaların kümesi, bir başka ifade ile $t \in [t_0, \theta]$ anındaki erişim kümesi,

$$X_1(t; t_0, x_0) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n \ : \ x(\cdot) \in X_1(t_0, x_0)\}$$

ile gösterilsin.

$$K_1 = \max_{(t,x) \in D} \|B(t, x)\|, \tag{3.1.4}$$

$$c_* = L_1(\theta - t_0) + L_2 \mu_0 (\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}, \tag{3.1.5}$$

olmak üzere aşağıdaki önerme integral sınırlı ve karmaşık sınırlı lineer olmayan kontrol sistemlerin erişim kümeleri arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Önerme 3.1.1. *Her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$\alpha(X(t; t_0, x_0), X_1(t; t_0, x_0)) \leq K_1 \frac{2\mu_0^p}{H^{p-1}} (1 + c_* \exp(c_*))$$

dir. Üstelik, her $t \in [t_0, \theta]$ *için* $H \to \infty$ *iken*

$$\alpha(X(t; t_0, x_0), X_1(t; t_0, x_0)) \to 0$$

olur.

Kanıt. $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ olduğundan her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$X_1(t; t_0, x_0) \subset X(t; t_0, x_0) \tag{3.1.6}$$

olur.

$x(\cdot)$, (3.1.2) kısıtı ile verilen (3.1.1) sisteminin keyfi bir çözümü olsun. Yani, $x(\cdot) \in X(t_0, x_0)$ keyfi olsun. O zaman $\forall t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau))u(\tau)]\, d\tau$$

olacak biçimde $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ vardır ve $x(t) \in X(t; t_0, x_0)$ olur. Bu $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ kontrol fonksiyonu yardımıyla her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$u_*(t) = \begin{cases} u(t) & , \ \|u(t)\| \leq H \\ \dfrac{u(t)}{\|u(t)\|} & , \ \|u(t)\| > H \end{cases}$$

kontrol fonksiyonunu tanımlansın. Bu durumda,

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\| dt \leq \int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p dt \leq \mu_0^p$$

ve her $t \in [t_0, \theta]$ için $\|u_*(t)\| \leq H$ olduğundan yukarıdaki gibi tanımlanan $u_*(\cdot)$ kontrol fonksiyonu $\mathcal{U}_1$ kümesinin elemanı olur. (3.1.1) sisteminin $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}_1$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen çözümü $x_*(\cdot) \in X_1(t_0, x_0)$ ile gösterilsin. O zaman her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x_*(\tau)) + B(\tau, x_*(\tau))u_*(\tau)]\, d\tau$$

şeklinde yazılabilir ve $x_*(t) \in X_1(t; t_0, x_0)$ olur. Buradan $x(\cdot)$ ve $x_*(\cdot)$ çözümlerinin farklarının normu alınacak olursa her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_*(t)\| \ \leq \ & \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, x_*(\tau))\| d\tau + \\ & + \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x(\tau))u(\tau) - B(\tau, x_*(\tau))u(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

elde edilir. $K_1 = \max_{(t,x)\in D} \|B(t,x)\|$ olduğundan 2.1.A. koşulu kullanılırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\|x(t) - x_*(t)\| &\leq L_1 \int_{t_0}^{t} \|x(\tau) - x_*(\tau)\| d\tau + \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x_*(\tau))\| \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\| \|B(\tau, x(\tau)) - B(\tau, x_*(\tau)\| d\tau \\
&\leq L_1 \int_{t_0}^{t} \|x(\tau) - x_*(\tau)\| d\tau + L_2 \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\| \|x(\tau) - x_*(\tau)\| d\tau + \\
&+ K_1 \int_{t_0}^{t} \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u(\tau)\|) \|x(\tau) - x_*(\tau)\| d\tau + \\
&+ K_1 \int_{t_0}^{t} \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

olur.

(3.1.7) ifadesini hesaplamak için

$$\Omega_t = \{\tau \in [t_0, t] \ : \ \|u(\tau)\| > H\}$$

kümesi tanımlansın. Bu durumda $[t_0, \theta] \backslash \Omega_t = \{\tau \in [t_0, t] \ : \ \|u(\tau)\| \leq H\}$ olur.

$u_*(\cdot)$ fonksiyonun tanımlanışından her $\tau \in [t_0, \theta] \backslash \Omega_t$ için $\|u(\tau) - u_*(\tau)\| = 0$ olacağı açıktır.

Ayrıca $\mu(\Omega_t)$, Ω_t kümesinin Lebesque ölçümü göstermek üzere,

$$\mu_0^p \geq \int_{t_0}^{t} \|u(\tau)\|^p d\tau \geq \int_{\Omega_t} \|u(\tau)\|^p d\tau \geq \int_{\Omega_t} H^p d\tau \geq H^p \mu(\Omega_t)$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradan

$$\mu(\Omega_t) \leq \frac{\mu_0^p}{H^p} \tag{3.1.8}$$

elde edilir. (3.1.8) ifadesi, Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_t} \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau &\leq \left(\int_{\Omega_t} 1^{\frac{p}{p-1}} d\tau \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega_t} \|u(\tau) - u_*(\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (\mu(\Omega_t))^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int_{\Omega_t} \|u(\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega_t} \|u_*(\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
&\leq \left(\frac{\mu_0^p}{H^p} \right)^{\frac{p-1}{p}} [\mu_0 + \mu_0] \\
&\leq 2 \frac{\mu_0^p}{H^{p-1}}
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

olduğu elde edilir.

O halde (3.1.9) den her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
K_1 \int_{t_0}^{t} \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau = K_1 \Bigg(\int_{\Omega_t} \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau + \\
+ \int_{[t_0,t]\setminus\Omega_t} \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau \Bigg) = K_1 \int_{\Omega_t} \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau \leq \\
\leq K_1 \frac{2\mu_0^p}{H^{p-1}}
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

yazılabilir. Bu durumda, (3.1.7) ve (3.1.10) den, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t) - x_*(t)\| \leq K_1 \frac{2\mu_0^p}{H^{p-1}} + \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|)\|x(\tau) - x_*(\tau)\| d\tau$$

olduğu bulunur. Bu ifade için önerme 1.1.17 Gronwall eşitsizliği $\nu(t) = \|x(t) - x_*(t)\|$, $h(t) = K_1 \frac{2\mu_0^p}{H^{p-1}}$ ve $\psi(\tau) = (L_1 + L_2\|u(\tau)\|)$ için kullanılırsa,

$$c = \exp\left(\int_{t_0}^{\theta} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|) d\tau \right)$$

olmak üzere,

$$\|x(t) - x_*(t)\| \leq K_1 \frac{2\mu_0^p}{H^{p-1}} + cK_1 \frac{2\mu_0^p}{H^{p-1}} \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|) d\tau$$

bulunur. Önerme 2.1.5 den

$$\int_{t_0}^{\theta} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|) d\tau \leq L_1(\theta - t_0) + L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0$$

olduğundan ve (3.1.5) den her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$\|x(t) - x_*(t)\| \leq K_1 \frac{2\mu_0^p}{H^{p-1}} (1 + c_* \exp(c_*)) \tag{3.1.11}$$

elde edilir. $x(\cdot) \in X(t_0, x_0)$ sistemin keyfi bir çözümü olduğundan (3.1.11) den her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$X(t; t_0, x_0) \subset X_1(t; t_0, x_0) + K_1 \frac{2\mu_0^p}{H^{p-1}} (1 + c_* \exp(c_*))B \tag{3.1.12}$$

kapsaması elde edilir. O halde (3.1.6) ve (3.1.12) kapsamaları ile önerme 1.1.19 kullanılırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$\alpha(X(t; t_0, x_0), X_1(t; t_0, x_0)) \leq K_1 \frac{2\mu_0^p}{H^{p-1}} (1 + c_* \exp(c_*))$$

olur. □

3.2 Parçalı Sabit Kontrol Fonksiyonlar

$\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_N = \theta\}$ ile $[t_0, \theta]$ aralığının

$$t_{i+1} - t_i = \frac{\theta - t_0}{N} = \Delta, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

olacak şekildeki düzgün bir bölüntüsü gösterilsin. Bu bölüntü yardımıyla,

$$\mathcal{U}_2 = \{u(\cdot) \in \mathcal{U}_1 : u(t) = u_i, \ \forall t \in [t_i, t_{i+1}), \ i = 0, 1, \ldots, N-1\} \tag{3.2.13}$$

kontrol fonksiyonlar kümesi tanımlansın. Bir başka ifadeyle $\mathcal{U}_2$ kümesi $i = 0, 1, \ldots, N-1$ için $[t_i, t_{i+1})$ aralığında sabit, karmaşık sınırlı kontrol fonksiyonların bir ailesi olsun. Bu durumda $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ olduğu açıktır.

(3.1.1) sisteminin tüm mümkün $u(\cdot) \in \mathcal{U}_2$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen çözümler kümesi ile, $t \in [t_0, \theta]$ anındaki erişim kümeleri sırasıyla $X_2(t_0, x_0)$ ve $X_2(t; t_0, x_0)$ ile gösterilsin. Ayrıca,

$$K_1 = \max_{(t,x) \in D} \|B(t, x)\|, \tag{3.2.14}$$

$$K_2 = \max_{(t,x) \in D} \|f(t, x)\|, \tag{3.2.15}$$

$$\varphi(\Delta) = K_2 \Delta + K_1 \mu_0 \Delta^{\frac{p-1}{p}}, \tag{3.2.16}$$

$$\omega^*(\Delta) = \max_{\substack{(t,x) \in D, \ (\tau,y) \in D \\ |t-\tau| < \Delta, \ \|x-y\| < \Delta}} \|B(t, x) - B(\tau, y)\|, \tag{3.2.17}$$

$$\xi(\Delta) = 2\mu_0\omega^*(\varphi(\Delta))(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} + 2\mu_0 K_1 \Delta^{\frac{p-1}{p}} \tag{3.2.18}$$

olsun.

$D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kompakt küme, $B(t,x)$ sürekli $n \times m$-boyutlu matris fonksiyon olduğundan, $\Delta \to 0$ iken $\omega^*(\Delta) \downarrow 0^+$ olur.

Aşağıdaki önerme $X_1(t; t_0, x_0)$ ve $X_2(t; t_0, x_0)$ erişim kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı için bir değerlendirme vermektedir.

Önerme 3.2.1. *Her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$\alpha(X_1(t; t_0, x_0), X_2(t; t_0, x_0)) \leq \xi(\Delta)(1 + c_* \exp(c_*))$$

olur. Burada c_* (3.1.5) ile tanımlanan sabittir.

Kanıt. $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$ olduğundan her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$X_2(t; t_0, x_0) \subset X_1(t; t_0, x_0) \tag{3.2.19}$$

kapsaması doğru olur.

$x(\cdot) \in X_1(t_0, x_0)$ keyfi bir çözüm olsun. O zaman $\forall t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau))u(\tau)]\, d\tau$$

olacak şekilde $u(\cdot) \in \mathcal{U}_1$ vardır. Bu $u(\cdot) \in \mathcal{U}_1$ kontrol fonksiyonu yardımıyla

$$u_*(t) = \frac{1}{\Delta}\int_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau)d\tau, \quad t \in [t_i, t_{i+1})$$

şeklinde yeni bir $u_*(\cdot)$ kontrol fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda $u(\cdot) \in \mathcal{U}_H \subset \mathcal{U}$ olduğundan, her $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\begin{aligned} \|u_*(t)\| &\leq \frac{1}{\Delta}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(\tau)\| d\tau \\ &\leq \frac{1}{\Delta}\int_{t_i}^{t_{i+1}} H d\tau \\ &= \frac{1}{\Delta}(t_{i+1} - t_i)H = H \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

elde edilir. Açıktır ki, her $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\Delta\|u_*(t)\| = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau)d\tau \right\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(\tau)\| d\tau$$

olur. Bu eşitsizliğinin sağ tarafına önerme 1.1.12 Hölder integral eşitsizliği uygulanacak olursa,

$$\Delta\|u_*(t)\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(\tau)\|d\tau \leq \Delta^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(\tau)\|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafının p. kuvveti alınırsa,

$$\Delta^p\|u_*(t)\|^p \leq \Delta^{p-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(\tau)\|^p d\tau$$

ve buradan

$$\Delta\|u_*(t)\|^p \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(\tau)\|^p d\tau \tag{3.2.21}$$

olduğu bulunur. $u_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_i, t_{i+1})$ aralığında sabit fonksiyon olduğundan keyfi $\tau \in [t_i, t_{i+1})$ için $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u_*(\tau)\|^p d\tau = \Delta\|u_*(\tau)\|^p$ olur. O zaman (3.2.21) den

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u_*(\tau)\|^p d\tau \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(\tau)\|^p d\tau$$

olur. O halde, buradan

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\theta} \|u_*(\tau)\|^p d\tau &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u_*(\tau)\|^p d\tau \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(\tau)\|^p d\tau \\ &= \int_{t_0}^{\theta} \|u(\tau)\|^p d\tau \leq \mu_0^p \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

dır. Böylece, (3.2.20) ve (3.2.22) ifadelerinden, yukarıdaki şekilde tanımlanan $u_*(\cdot)$ kontrol fonksiyonunun $\mathcal{U}_2$ kümesinin elemanı olduğu görülmüş olur. (3.1.1) sisteminin (t_0, x_0) başlangıç noktasından çıkan ve $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}_2$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen çözümü $x_*(\cdot)$ ile gösterilirse, $x_*(\cdot) \in X_2(t_0, x_0)$ olur ve her $t \in [t_0, \theta]$ için,

$$x_*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left[f(\tau, x_*(\tau)) + B(\tau, x_*(\tau))u_*(\tau)\right] d\tau$$

olur. Eğer $x(\cdot)$ ve $x_*(\cdot)$ çözümlerinin farkının normu alınacak olursa, her $t \in$

$[t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\|x(t) - x_*(t)\| &\le \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, x_*(\tau))\| d\tau + \\
&+ \left\| \int_{t_0}^{t} \left[B(\tau, x(\tau)) u(\tau) - B(\tau, x_*(\tau)) u_*(\tau) \right] d\tau \right\| \\
&\le \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, x_*(\tau))\| d\tau + \\
&+ \left\| \int_{t_0}^{t} [B(\tau, x(\tau)) - B(\tau, x_*(\tau))] u(\tau) d\tau \right\| + \\
&+ \left\| \int_{t_0}^{t} B(\tau, x_*(\tau)) [u(\tau) - u_*(\tau)] d\tau \right\|
\end{aligned}$$

olur. 2.1.A. koşulu kullanılırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\|x(t) - x_*(t)\| &\le L_1 \int_{t_0}^{t} \|x(\tau) - x_*(\tau)\| d\tau + L_2 \int_{t_0}^{t} \|x(\tau) - x_*(\tau)\| \|u(\tau)\| d\tau + \\
&+ \left\| \int_{t_0}^{t} B(\tau, x_*(\tau)) [u(\tau) - u_*(\tau)] d\tau \right\|
\end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned}
\|x(t) - x_*(t)\| &\le \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u(\tau)\|) \|x(\tau) - x_*(\tau)\| d\tau + \\
&+ \left\| \int_{t_0}^{t} B(\tau, x_*(\tau)) [u(\tau) - u_*(\tau)] d\tau \right\|
\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

elde edilir.

Elde edilen bu ifade de $\left\| \int_{t_0}^{t} B(\tau, x_*(\tau)) [u(\tau) - u_*(\tau)] d\tau \right\|$ terimi yeterince küçük tutulabilirse, önerme 1.1.17 Gronwall eşitsizliği kullanılarak, $\|x(t) - x_*(t)\|$ normunun küçük olduğu kanıtlanabilir.

Bunun için önce $\left\| \int_{t_0}^{t} B(\tau, x_*(\tau)) [u(\tau) - u_*(\tau)] d\tau \right\|$ ifadesi hesaplansın.

$t \in [t_k, t_{k+1})$ olacak şekilde $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ sayısı vardır. Buradan,

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} B(\tau, x_*(\tau)) [u(\tau) - u_*(\tau)] d\tau &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} B(\tau, x_*(\tau)) [u(\tau) - u_*(\tau)] d\tau + \\
&+ \int_{t_k}^{t} B(\tau, x_*(\tau)) [u(\tau) - u_*(\tau)] d\tau
\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

yazılabilir. Öte yandan, $u_*(\cdot)$ kontrol fonksiyonun tanımlanışından, her $t \in [t_k, t_{k+1})$ için

$$\Delta u_*(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau) d\tau$$

olduğu bulunur. Buradan ise

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} u_*(\tau)d\tau = \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau)d\tau$$

olduğu elde edilir. Bu ise

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} (u(\tau) - u_*(\tau))d\tau = 0 \tag{3.2.25}$$

olması demektir. O halde (3.2.25) kullanılırsa,

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} B(\tau, x_*(\tau))[u(\tau) - u_*(\tau)]d\tau = \int_{t_i}^{t_{i+1}} [B(\tau, x_*(\tau)) - B(t_i, x(t_i))]$$
$$[u(\tau) - u_*(\tau)]d\tau + \int_{t_i}^{t_{i+1}} B(t_i, x_*(t_i))[u(\tau) - u_*(\tau)]d\tau =$$
$$= \int_{t_i}^{t_{i+1}} [B(\tau, x_*(\tau)) - B(t_i, x_*(t_i))][u(\tau) - u_*(\tau)]d\tau$$

olur. Her iki yanının normu alınırsa,

$$\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} B(\tau, x_*(\tau))[u(\tau) - u_*(\tau)]d\tau\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\|B(\tau, x_*(\tau)) - B(t_i, x_*(t_i))\| \, \|u(\tau) - u_*(\tau)\|)d\tau \tag{3.2.26}$$

bulunur. $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$x_*(t) = x_*(t_i) + \int_{t_i}^{t} [f(\tau, x_*(\tau)) + B(\tau, x_*(\tau))u_*(\tau))] \, d\tau$$

olduğundan,

$$\|x_*(t) - x_*(t_i)\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f(\tau, x_*(\tau))\|d\tau + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|B(\tau, x_*(\tau))\| \|u_*(\tau)\|d\tau$$

yazılabilir.

$$K_1 = \max_{(t,x)\in D} \|B(t, x)\|$$

ve

$$K_2 = \max_{(t,x)\in D} \|f(t, x)\|$$

olduğundan,

$$\|x_*(t) - x_*(t_i)\| \leq K_2\Delta + K_1 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u_*(\tau)\|d\tau$$

bulunur. Bu ifadeye önerme 1.1.12 Hölder integral eşitsizliği uygulanırsa, her $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\begin{aligned} \|x_*(t) - x_*(t_i)\| &\leq K_2\Delta + K_1\mu_0\Delta^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \varphi(\Delta) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\varphi(\Delta)$ (3.2.16) ile tanımlanmıştır ve $\Delta \to 0$ için $\varphi(\Delta) \to 0$ dır. Genelliği bozmaksızın $\Delta \leq \varphi(\Delta)$ alınabilir. O halde $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$|t - t_i| \leq \Delta \leq \varphi(\Delta) \text{ ve } \|x_*(t) - x_*(t_i)\| \leq \varphi(\Delta)$$

olduğundan, (3.2.17) kullanılarak

$$\begin{aligned} &\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|B(\tau, x_*(\tau)) - B(t_i, x_*(t_i))\| \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \omega^*(\varphi(\Delta)) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

bulunur. O halde buradan ve (3.2.26) eşitsizliğinden keyfi $i = 1, 2, \dots k-1$ için

$$\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} B(\tau, x_*(\tau))[u(\tau) - u_*(\tau)] d\tau \right\| \leq \omega^*(\varphi(\Delta)) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau$$

olduğu elde edilir. O zaman son eşitsizlikten

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} B(\tau, x_*(\tau))[u(\tau) - u_*(\tau)] d\tau \right\| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} B(\tau, x_*(\tau))[u(\tau) - u_*(\tau)] d\tau \right\| \leq \\ &\leq \omega^*(\varphi(\Delta)) \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \omega^*(\varphi(\Delta)) \int_{t_0}^{t_k} \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

olduğu bulunur. 1.1.12 Hölder integral eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_{t_0}^{t_k} \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau \leq (t_k - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_0}^{t_k} \|u(\tau) - u_*(\tau)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.2.28}$$

elde edilir. $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}$ ve $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ olduğundan ve önerme 1.1.13 Minkowski eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \left(\int_{t_0}^{t_k} \|u(\tau) - u_*(\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{t_0}^{t_k} \|u(\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{t_0}^{t_k} \|u_*(\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2\mu_0 \end{aligned}$$

olur. O halde bu son eşitsizlikten, (3.2.27) ve (3.2.28) ifadelerinden

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} B(\tau, x_*(\tau))[u(\tau)-u_*(\tau)]d\tau\right\| &\leq \omega^*(\varphi(\Delta))2\mu_0(t_k-t_0)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq 2\mu_0(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\omega^*(\varphi(\Delta))\end{aligned} \tag{3.2.29}$$

olduğu elde edilir.

$t \in [t_k, t_{k+1})$ olduğundan $t - t_k < \Delta$ olur. Sırasıyla Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri kullanılırsa, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}_2$ ve $\forall \tau \in [t_k, t]$ için $\|B(\tau, x_*(\tau))\| \leq K_1$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left\|\int_{t_k}^{t} B(\tau, x_*(\tau))(u(\tau)-u_*(\tau))d\tau\right\| &\leq \int_{t_k}^{t}\|B(\tau, x_*(\tau))\|\|u(\tau)-u_*(\tau)\|d\tau \\ &\leq K_1\int_{t_k}^{t}\|u(\tau)-u_*(\tau)\|d\tau \\ &\leq K_1\left(\int_{t_k}^{t} d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{t_k}^{t}\|u(\tau)-u_*(\tau)\|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq K_1(t-t_k)^{\frac{p-1}{p}}\left[\left(\int_{t_k}^{t}\|u(\tau)\|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}+\right. \\ &\quad \left.+\left(\int_{t_k}^{t}\|u_*(\tau)\|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\ &\leq K_1\Delta^{\frac{p-1}{p}}2\mu_0\end{aligned} \tag{3.2.30}$$

olduğu elde edilir. O halde (3.2.24), (3.2.29), (3.2.30) ve $\xi(\Delta)$ nın tanımından

$$\begin{aligned}\left\|\int_{t_0}^{t} B(\tau, x_*(\tau))(u(\tau)-u_*(\tau))d\tau\right\| &\leq 2\mu_0(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\omega^*(\varphi(\Delta))+ \\ &\quad +2\mu_0K_1\Delta^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \xi(\Delta)\end{aligned} \tag{3.2.31}$$

olduğu bulunur. Eğer (3.2.31) ifadesi (3.2.23) de yerine yazılacak olursa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t)-x_*(t)\| \leq \int_{t_0}^{t}(L_1+L_2\|u(\tau)\|)\|x(\tau)-x_*(\tau)\|d\tau + \xi(\Delta)$$

olur. Son olarak, önerme 1.1.17 Gronwall eşitsizliği $\nu(t) = \|x(t)-x_*(t)\|$,

$h(t) = \xi(\Delta)$ ve $\psi(\tau) = L_1 + L_2\|u(\tau)\|$ için kullanılacak olursa,

$$c = \exp\left(\int_{t_0}^{\theta} L_1 + L_2\|u(\tau)\|d\tau\right)$$

olmak üzere, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t) - x_*(t)\| \leq \xi(\Delta) + c\int_{t_0}^{t} \xi(\Delta)(L_1 + L_2\|u(\tau)\|)d\tau$$

ya da

$$\|x(t) - x_*(t)\| \leq \xi(\Delta) + c\xi(\Delta)\int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|)d\tau$$

elde edilir. Önerme 2.1.5 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\|x(t) - x_*(t)\| \leq\ & \xi(\Delta) + \xi(\Delta)\left(L_1(\theta - t_0) + L_2\mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\right) \\ & \exp\left(L_1(\theta - t_0) + L_2\mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}\right)\end{aligned}$$

olur. $c_* = L_1(\theta - t_0) + L_2\mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}$ olduğundan her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t) - x_*(t)\| \leq \xi(\Delta)(1 + c_* \exp(c_*)) \tag{3.2.32}$$

elde edilir.

O halde $x(\cdot) \in X_1(t_0, x_0)$ keyfi bir çözüm olduğundan, (3.2.32) ifadesinden her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$X_1(t; t_0, x_0) \subset X_2(t; t_0, x_0) + \xi(\Delta)(1 + c_* \exp(c_*))B \tag{3.2.33}$$

kapsaması elde edilir.

Böylece (3.2.19) ve (3.2.33) kapsamaları ve önerme 1.1.19 kullanılırsa, kanıt tamamlanmış olur. □

Önerme 3.2.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.2. $\forall t \in [t_0, \theta]$ *için* $\Delta \to 0$ *iken*

$$\alpha(X_1(t; t_0, x_0), X_2(t; t_0, x_0)) \to 0$$

olur.

3.3 Parçalı Sabit ve Normları Düzgün Bölüntüde Olan Kontrol Fonksiyonlar

$\Gamma^* = \{y_0 = 0, y_1, \ldots, y_R = H\}$ ile $j = 0, 1, 2, \ldots, R-1$ için

$$y_{j+1} - y_j = \frac{H}{R} = \Delta^*$$

olmak üzere, $[0, H]$ aralığının düzgün bölüntüsü gösterilsin.

Γ^* bölüntüsü kullanılarak (3.2.13) ile tanımlanan $\mathcal{U}_2$ mümkün kontrol fonksiyonlar ailesinin aşağıdaki gibi bir alt ailesi tanımlansın.

$$\mathcal{U}_3 = \{u(\cdot) \in \mathcal{U}_2 : \|u(t)\| = y_{j_i} \in \Gamma^*, \ \forall t \in [t_i, t_{i+1}), \ i = 0, 1, \ldots, N-1\} \tag{3.3.34}$$

Bu durumda, $\mathcal{U}_3$ kontrol fonksiyonları ailesi, normları Γ^* düzgün bölüntüsünde olan, parçalı sabit mümkün kontrol fonksiyonların kümesi olur. Ayrıca $\mathcal{U}_3 \subset \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ kapsaması doğru olur.

(3.1.1) sisteminin, tüm $u(\cdot) \in \mathcal{U}_3$ mümkün kontrol fonksiyonları tarafından üretilen çözümleri kümesi $X_3(t_0, x_0)$, $t \in [t_0, \theta]$ anındaki erişim kümesi ise $X_3(t; t_0, x_0)$ ile gösterilsin. Bu durumda keyfi $t \in [t_i, t_{i+1})$ için $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ $\|u(t)\| = y_{j_i}$ olacak biçimde $y_{j_i} \in \Gamma^*$ vardır.

$u(\cdot) \in \mathcal{U}_3$ olsun. Bu durumda, $u(\cdot)$ mümkün kontrol fonksiyonu (3.1.2) eşitsizliğini sağladığından,

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u(\tau)\|^p d\tau = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u(\tau)\|^p d\tau = \Delta \sum_{i=0}^{N-1} y_{j_i}^p \leq \mu_0^p$$

olur. Buradan

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_{j_i}^p \leq \frac{\mu_0^p}{\Delta} \tag{3.3.35}$$

elde edilir. O halde $u(\cdot) \in \mathcal{U}_3$ kontrol fonksiyonunun (3.1.2) integral eşitsizliğini sağlaması yerine (3.3.35) eşitsizliğini sağlaması yeterlidir.

Aşağıdaki önerme sırasıyla $\mathcal{U}_2$ ve $\mathcal{U}_3$ mümkün kontrol fonksiyonlar ailelerine karşılık gelen $X_2(t; t_0, x_0)$ ve $X_3(t; t_0, x_0)$ erişim kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı için bir değerlendirme vermektedir.

Önerme 3.3.1. *Her* $t \in [t_0, \theta]$ *için*

$$\alpha(X_2(t; t_0, x_0), X_3(t; t_0, x_0)) \leq K_1 \Delta^*(\theta - t_0)(1 + c_* \exp(c_*))$$

eşitsizliği sağlanır. Burada K_1 *ve* c_* *sırasıyla* (3.1.4) *ve* (3.1.5) *ile tanımlanan sabitlerdir.*

Kanıt. $\mathcal{U}_3 \subset \mathcal{U}_2$ olduğundan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$X_3(t; t_0; x_0) \subset X_2(t; t_0; x_0) \qquad (3.3.36)$$

olur.

Keyfi $x(\cdot) \in X_2(t_0, x_0)$ olsun. O zaman her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau))u(\tau)]\, d\tau \qquad (3.3.37)$$

olacak biçimde $u(\cdot) \in \mathcal{U}_2$ kontrol fonksiyonu vardır. Bu durumda her $t \in [t_0, \theta]$ için $x(t) \in X_2(t; t_0, x_0)$ olur.

$u(\cdot) \in \mathcal{U}_2$ ve $\mathcal{U}_2$ parçalı sabit fonksiyonların kümesi olduğundan, her $t \in [t_i, t_{i+1})$ için $u(t) = u_i$ $(i = 0, 1, ..., N-1)$ olur. Bu $u(\cdot) \in \mathcal{U}_2$ kontrol fonksiyonu yardımıyla

$$u_*(t) = \begin{cases} y_{j_i} \|u_i\|^{-1} u_i & , \quad u_i \neq 0 \\ 0 & , \quad u_i = 0 \end{cases}$$

$u_*(\cdot)$ fonksiyonu tanımlansın. Burada y_{j_i} ile $\|u_i\| \in [y_{j_i}, y_{j_{i+1}})$ olacak şekildeki $y_{j_i} \in \Gamma^*$ öğesi gösterilmektedir (Eğer $\|u_i\| = H$ ise $y_{j_i} = y_R = H$ olarak kabul edilir). Bu durumda $u_*(\cdot)$ fonksiyonu $\mathcal{U}_3$ fonksiyonlar ailesinin bir öğesi olur. Açıktır ki, $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\|u_*(t)\|^p = \|y_{j_i} \|u_i\|^{-1} u_i\|^p = y_{j_i}^p$$

olur. $\|u_i\| \in [y_{j_i}, y_{j_{i+1}})$ olduğundan, $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\|u_*(t)\|^p = y_{j_i}^p \leq \|u_i\|^p = \|u(t)\|^p$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{\theta} \|u_*(t)\|^p dt &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u_*(t)\|^p dt \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} y_{j_i}^p dt \\
&\leq \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u_i\|^p dt \\
&= \int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p dt \leq \mu_0^p
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca, keyfi $t \in [t_i, t_{i+1})$ için $\|u_*(t)\| = y_{j_i} \leq H$ dir. Böylece, $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}_3$ olur.

$i = 0, 1, \ldots, N-1$ seçilsin ve sabitlensin. O zaman $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}_3$ kontrol fonksiyonunun tanımından, her $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u_*(t)\| &= \|u_i - y_{j_i}\|u_i\|^{-1} u_i\| \\
&= \|(1 - y_{j_i}\|u_i\|^{-1}) u_i\| \\
&= \frac{|\|u_i\| - y_{j_i}|}{\|u_i\|} \|u_i\| \\
&= |\|u_i\| - y_{j_i}|
\end{aligned}$$

olur. Her $t \in [t_i, t_{i+1})$ için $\|u_i\| \in [y_{j_i}, y_{j_{i+1}})$ olduğundan, her $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\|u(t) - u_*(t)\| \leq \|u_i\| - \|y_{j_i}\| \leq y_{j_{i+1}} - y_{j_i} = \Delta^*$$

olur. $i = 0, 1, \ldots, N-1$ keyfi sabitlenmiş olduğundan, son eşitsizlikten her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|u(t) - u_*(t)\| \leq \Delta^* \tag{3.3.38}$$

eşitsizliği doğrudur.

(3.1.1) sisteminin $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}_3$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen çözümü $x_*(\cdot)$ ile gösterilsin. O zaman her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x_*(\tau)) + B(\tau, x_*(\tau)) u_*(\tau)] \, d\tau$$

ve $x_*(t) \in X_3(t; t_0, x_0)$ olur. Buradan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\|x(t) - x_*(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, x_*(\tau))\| d\tau + \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x(\tau))u(\tau) - B(\tau, x_*(\tau))u_*(\tau)\| d\tau \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, x_*(\tau))\| d\tau + \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x(\tau)) - B(\tau, x_*(\tau))\| \|u(\tau)\| d\tau + \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x_*(\tau))\| \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau
\end{aligned}$$

olur. 2.1.A. koşulu kullanılırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned}
\|x(t) - x_*(t)\| &\leq L_1 \int_{t_0}^{t} \|x(\tau) - x_*(\tau)\| d\tau + L_2 \int_{t_0}^{t} \|x(\tau) - x_*(\tau)\| \|u(\tau)\| d\tau + \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x_*(\tau))\| \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau
\end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned}
\|x(t) - x_*(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u(\tau)\|) \|x(\tau) - x_*(\tau)\| d\tau + \\
&+ \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x_*(\tau))\| \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau
\end{aligned}$$

olur. $K_1 = \max\limits_{(t,x) \in D} \|B(t, x)\|$ olduğundan ve (3.3.38) ifadesi kullanılırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t) - x_*(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u(\tau)\|) \|x(\tau) - x_*(\tau)\| d\tau + K_1 \int_{t_0}^{t} \Delta^* d\tau$$

ya da

$$\|x(t) - x_*(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u(\tau)\|) \|x(\tau) - x_*(\tau)\| d\tau + K_1 \Delta^* (\theta - t_0)$$

olduğu elde edilir. Bu ifadeye $\nu(t) = \|x(t) - x_*(t)\|$, $h(t) = K_1 \Delta^* (\theta - t_0)$ ve $\psi(\tau) = L_1 + L_2 \|u(\tau)\|$ için önerme 1.1.17 Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$c = \exp \left(\int_{t_0}^{\theta} (L_1 + L_2 \|u(\tau)\|) d\tau \right)$$

olmak üzere, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t) - x_*(t)\| \leq K_1 \Delta^* (\theta - t_0) + c K_1 \Delta^* (\theta - t_0) \int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2 \|u(\tau)\|) d\tau$$

bulunur. Önerme 2.1.5 den

$$\int_{t_0}^{t} (L_1 + L_2\|u(\tau)\|)\, d\tau \le L_1(\theta - t_0) + L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} \mu_0$$

ve $c_* = L_1(\theta - t_0) + L_2\mu_0(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}}$ olduğundan, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\|x(t) - x_*(t)\| \le K_1\Delta^*(\theta - t_0)\,[1 + c_* \exp(c_*)]$$

bulunur. $x(\cdot) \in X_2(t_0, x_0)$ keyfi seçildiğinden, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$X_2(t; t_0; x_0) \subset X_3(t; t_0; x_0) + [K_1\Delta^*(\theta - t_0)(1 + c_* \exp(c_*))]B \qquad (3.3.39)$$

olur. O halde (3.3.36) ve (3.3.39) kapsamaları ve önerme 1.1.19 den kanıt tamamlanmış olur. □

Önerme 3.3.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.2. *Her $t \in [t_0, \theta]$ için $\Delta^* \to 0$ iken*

$$\alpha(X_2(t; t_0, x_0), X_3(t; t_0, x_0)) \to 0$$

olur.

3.4 Birim Kürenin Delta Ağı ve Sonlu Sayıda Kontrol Fonksiyonlar Kümesi

$S = \{u \in \mathbb{R}^m : \|u\| = 1\}$ ile m-boyutlu Öklid uzayının birim küresi, $\widetilde{\Gamma} = \{s_0, s_1, \ldots, s_p\}$ ile ise S birim küresinin verilen bir $\delta > 0$ sayısına karşılık gelen sonlu δ-ağı gösterilsin.

$\widetilde{\Gamma}$ yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlı kontrol fonksiyonların yeni bir $\mathcal{U}_4$ ailesi tanımlansın.

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_4 \;=\; & \{u(\cdot) \in \mathcal{U}_3 : u(t) = y_{j_i} s_{\ell_i},\ t \in [t_i, t_{i+1}),\ y_{j_i} \in \Gamma^*, \\ & s_{\ell_i} \in \widetilde{\Gamma},\ i = 0, ..., N-1\}. \end{aligned}$$

Bu durumda, $\mathcal{U}_4$ kontrol fonksiyonları ailesi, normları Γ^* bölüntüsünde olan sonlu sayıda parçalı-sabit kontrol fonksiyonların ailesi olur. Açıktır ki,

$$\mathcal{U}_4 \subset \mathcal{U}_3 \subset \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$$

olur.

(3.1.1) sisteminin $u(\cdot) \in \mathcal{U}_4$ kontrol fonksiyonları tarafından üretilen çözümlerinin kümesi $X_4(t_0, x_0)$ ile, $t \in [t_0, \theta]$ anındaki erişim kümesi ise $X_4(t; t_0, x_0)$ ile gösterilsin.

Bu durumda, aşağıdaki önerme 3.3.34 ile tanımlı $\mathcal{U}_3$ kontrol fonksiyonlar ailesine karşılık gelen $X_3(t; t_0, x_0)$ erişim kümesi ile $X_4(t; t_0, x_0)$ erişim kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığı için bir değerlendirme vermektedir.

Önerme 3.4.1. *Her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$\alpha(X_3(t; t_0, x_0), X_4(t; t_0, x_0)) \leq \delta K_1 H(\theta - t_0)(1 + c_* \exp(c_*))$$

eşitsizliği doğrudur. Burada K_1 ve c_* sırasıyla (3.1.4) ve (3.1.5) ile tanımlanan pozitif sabitlerdir.

Kanıt. $\mathcal{U}_4 \subset \mathcal{U}_3$ olduğundan her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$X_4(t; t_0, x_0) \subset X_3(t; t_0, x_0) \tag{3.4.40}$$

olur.

$x(\cdot) \in X_3(t_0, x_0)$ keyfi bir çözüm olsun. O zaman her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau))u(\tau)]\, d\tau$$

olacak biçimde $u(\cdot) \in \mathcal{U}_3$ vardır. Bu durumda her $t \in [t_0, \theta]$ için $x(t) \in X_3(t; t_0, x_0)$ olur.

$u(\cdot) \in \mathcal{U}_3$ olduğundan, $\mathcal{U}_3$ kontrol fonksiyonları kümesinin tanımından, $y_{j_i} \in \Gamma^*$ olmak üzere, her $t \in [t_i, t_{i+1})$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ için $\|u(t)\| = y_{j_i}$ olur. O halde $b_{\ell_i} \in S$ olmak üzere, her $t \in [t_i, t_{i+1})$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ için

$$u(t) = y_{j_i} b_{\ell_i}, \quad y_{j_i} \in \Gamma^*, \quad b_{\ell_i} \in S$$

olur.

S kümesinde verilen, δ-ağın tanımından, her $b_{\ell_i} \in S$ için $\|b_{\ell_i} - s_{\ell_i}\| \leq \delta$ olacak şekilde $s_{\ell_i} \in \widetilde{\Gamma}$ elemanı vardır. Buradan $u(\cdot)$ kontrol fonksiyonu yardımıyla,

$$u_*(t) = y_{j_i} s_{\ell_i}, \quad y_{j_i} \in \Gamma^*, \quad s_{\ell_i} \in \widetilde{\Gamma}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

kontrol fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda her $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\|u_*(t)\| = \|u(t)\| = y_{j_i}$$

olur. O halde $u(\cdot) \in \mathcal{U}_3$ olduğundan ve $\mathcal{U}_4$ ün tanımından yukarıdaki gibi tanımlanan $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}_4$ olur.

Ayrıca, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_*(t)\| &= \|y_{j_i} b_{l_i} - y_{j_i} s_{\ell_i}\| \\ &= \|y_{j_i}(b_{\ell_i} - s_{\ell_i})\| \\ &\le \delta y_{j_i} \le \delta H \end{aligned} \tag{3.4.41}$$

olur.

(3.1.1) sisteminin $u_*(\cdot)$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen çözümü $x_*(\cdot)$ ile gösterilsin. Bu durumda her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x_*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x_*(\tau)) + B(\tau, x_*(\tau)) u_*(\tau)]\, d\tau$$

ve $x_*(\cdot) \in X_4(t_0, x_0)$ olur. $x(\cdot)$ ve $x_*(\cdot)$ çözümlerinin farkının normu alınırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_*(t)\| &\le \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, x_*(\tau))\| d\tau + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x(\tau)) u(\tau) - B(\tau, x_*(\tau)) u_*(\tau)\| d\tau \\ &\le \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, x_*(\tau))\| d\tau + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x(\tau)) - B(\tau, x_*(\tau))\| \|u(\tau)\| d\tau + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x_*(\tau))\| \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

olur. 2.1.A. koşulu kullanılırsa, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_*(t)\| &\le L_1 \int_{t_0}^{t} \|x(\tau) - x_*(\tau)\| d\tau + L_2 \int_{t_0}^{t} \|x(\tau) - x_*(\tau)\| \|u(\tau)\| d\tau + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \|B(\tau, x_*(\tau))\| \|u(\tau) - u_*(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned}\|x(t)-x_*(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t}(L_1+L_2\|u(\tau)\|)\|x(\tau)-x_*(\tau)\|d\tau+ \\ &+\int_{t_0}^{t}\|B(\tau,x_*(\tau))\|\|u(\tau)-u_*(\tau)\|d\tau\end{aligned}$$

olur. $K_1=\max\limits_{(t,x)\in D}\|B(t,x)\|$ olduğundan ve (3.4.41) ifadesi kullanılırsa, her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\|x(t)-x_*(t)\|\leq\int_{t_0}^{t}(L_1+L_2\|u(\tau)\|)\|x(\tau)-x_*(\tau)\|d\tau+K_1\int_{t_0}^{t}\delta H d\tau$$

ya da,

$$\|x(t)-x_*(t)\|\leq\int_{t_0}^{t}(L_1+L_2\|u(\tau)\|)\|x(\tau)-x_*(\tau)\|d\tau+K_1\delta H(\theta-t_0)$$

elde edilir. Bu ifadeye $\nu(t)=\|x(t)-x_*(t)\|$, $h(t)=K_1\delta H(\theta-t_0)$ ve $\psi(\tau)=L_1+L_2\|u(\tau)\|$ için önerme 1.1.17 Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$c=\exp\left(\int_{t_0}^{\theta}(L_1+L_2\|u(\tau)\|)d\tau\right)$$

olmak üzere, her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\|x(t)-x_*(t)\|\leq K_1\delta H(\theta-t_0)+cK_1\delta H(\theta-t_0)\int_{t_0}^{t}(L_1+L_2\|u(\tau)\|)d\tau$$

elde edilir. Önerme 2.1.5 den

$$\int_{t_0}^{t}(L_1+L_2\|u(\tau)\|)\,d\tau\leq L_1(\theta-t_0)+L_2(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}\mu_0$$

ve $c_*=L_1(\theta-t_0)+L_2\mu_0(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}$ olduğundan, her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\|x(t)-x_*(t)\|\leq\delta K_1H(\theta-t_0)(1+c_*\exp(c_*))$$

olur. $x(\cdot)\in X_3(t_0,x_0)$ keyfi seçildiğinden, her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$X_3(t;t_0,x_0)\subset X_4(t;t_0,x_0)+[\delta K_1H(\theta-t_0)(1+c_*\exp(c_*))]B \qquad (3.4.42)$$

olduğu bulunur. O halde (3.4.40) ve (3.4.42) kapsamaları ile önerme 1.1.19 kullanılacak olursa, her $t\in[t_0,\theta]$ için

$$\alpha(X_3(t;t_0,x_0),X_4(t;t_0,x_0))\leq\delta K_1H(\theta-t_0)(1+c_*\exp((c_*))$$

elde edilir. $\square$

Önerme 3.4.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4.2. *Her sabitlenmiş $H > 0$ için $\delta \to 0$ iken her $t \in [t_0, \theta]$ için*

$$\alpha(X_3(t; t_0, x_0), X_4(t; t_0, x_0)) \to 0$$

olur.

3.5 Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Euler Yaklaşımı

Bu bölümde Euler yöntemi kullanılarak $X_4(\theta; t_0, x_0)$ erişim kümesi yaklaşık olarak hesaplanacaktır. Benzer yöntemler kullanılarak, her $t \in [t_0, \theta]$ için $X_4(t; t_0, x_0)$ erişim kümesi de yaklaşık olarak hesaplanabilir.

Keyfi $u(\cdot) \in \mathcal{U}_4$ alınsın ve sabitlensin. (3.1.1) sisteminin $u(\cdot) \in \mathcal{U}_4$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen $x(\cdot) \in X_4(t_0, x_0)$ çözümü, her $t \in [t_0, \theta]$ için

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau))u(\tau)]\, d\tau$$

şeklinde yazılır. Bu çözüme karşılık gelen Euler yaklaşımı,

$$z(t) = z(t_i) + (t - t_i)[f(t_i, z(t_i)) + B(t_i, z(t_i))u(t_i)],$$
$$z(t_0) = x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, 1, ..., N - 1$$

olur. Tüm mümkün $u(\cdot) \in \mathcal{U}_4$ mümkün kontrol fonksiyonlarına karşılık gelen Euler doğrularının $z(\theta)$ değerlerinin kümesi $Z(\theta; t_0, x_0)$ ile gösterilsin. Bu durumda $Z(\theta; t_0, x_0)$ kümesinin $z(\theta)$ değerleri, $y_{j_i} \in \Gamma^*$ sayıları (3.3.35) eşitsizliğini sağlamak ve $s_{\ell_i} \in \widetilde{\Gamma}$ olmak üzere,

$$z(t_{i+1}) = z(t_i) + \Delta[f(t_i, z(t_i)) + B(t_i, z(t_i))y_{j_i}s_{\ell_i}] \tag{3.5.43}$$

$$z(t_0) = x_0, \quad y_{j_i} \in \Gamma^*, \quad s_{\ell_i} \in \widetilde{\Gamma}, \quad i = 0, 1, ..., N - 1$$

recursive formülü ile hesaplanabilir.

$\mathcal{U}_4$ kontrol fonksiyonlar kümesi sonlu sayıda kontrol fonksiyondan oluştuğundan, $Z(\theta; t_0, x_0) \subset \mathbb{R}^n$ kümesi sonlu sayıda noktadan oluşur.

Aşağıdaki önerme $X_4(\theta; t_0, x_0)$ erişim kümesi ile $Z(\theta; t_0, x_0)$ kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığı için bir değerlendirme vermektedir.

$$\begin{aligned}
&K^*(\Delta) = \max_{\substack{(t^*,x^*)\in D,\ (t_*,x_*)\in D \\ |t^*-t_*|\le\Delta,\ \|x^*-x_*\|\le\Delta}} \|f(t^*,x^*) - f(t_*,x_*)\|, \\
&\eta^*(\Delta) = K^*(\varphi(\Delta)) + H\omega^*(\varphi(\Delta)), \\
&\eta(\Delta) = \Delta\eta^*(\Delta), \\
&L = L_1 + L_2 H, \\
&c^* = (\theta - t_0)\exp(L(\theta - t_0))
\end{aligned} \tag{3.5.44}$$

olsun. Burada $\omega^*(\Delta)$ ve $\varphi(\Delta)$ fonksiyonları sırasıyla (3.2.17) ve (3.2.16) ifadelerinde olduğu gibi tanımlanmış olsun. $D \subset [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n$ kompakt küme, $f(\cdot) : [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyon olduğundan, $\Delta \to 0^+$ iken $K^*(\Delta) \to 0$ olur. Bu durumda aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 3.5.1.

$$\alpha(X_4(\theta; t_0, x_0), Z(\theta; t_0, x_0)) \le c^*\eta^*(\Delta)$$

eşitsizliği doğrudur.

Kanıt. $u(\cdot) \in \mathcal{U}_4$ keyfi bir kontrol fonksiyon olsun. O halde $y_{j_i} \in \Gamma^*$, $s_{\ell_i} \in \widetilde{\Gamma}$ olmak üzere, her $t \in [t_i, t_{i+1})$ $(i = 0, 1, \dots, N-1)$ için

$$u(t) = y_{j_i} s_{\ell_i} \tag{3.5.45}$$

olur. (3.1.1) sisteminin (3.5.45) ile tanımlanan $u(\cdot) \in \mathcal{U}_4$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen çözümü, $x(\cdot) \in X_4(t_0, x_0)$ ile gösterilsin. O halde her $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\begin{aligned}
&x(t) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t} [f(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau)) y_{j_i} s_{\ell_i}]\, d\tau \\
&x(t_0) = x_0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1
\end{aligned} \tag{3.5.46}$$

olur. Bu durumda, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_4$ kontrol fonksiyonuna karşılık gelen $z(\theta) \in Z(\theta; t_0, x_0)$ noktası

$$\begin{aligned}
&z(t_{i+1}) = z(t_i) + \Delta\, [f(t_i, z(t_i)) + B(t_i, z(t_i)) y_{j_i} s_{\ell_i}] \\
&z(t_0) = x_0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1
\end{aligned} \tag{3.5.47}$$

recursive formülü ile hesaplanır.

(3.5.46) den her $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\|x(t) - x(t_i)\| \leq \int_{t_i}^{t} (\|f(\tau, x(\tau))\| + \|B(\tau, x(\tau))\|\|u(\tau)\|)\, d\tau \tag{3.5.48}$$

olur. Burada $u(\tau)$, $\tau \in [t_i, t_{i+1})$ olmak üzere (3.5.45) ile tanımlıdır.

$$K_1 = \max_{(t,x)\in D} \|B(t,x)\| \text{ ve } K_2 = \max_{(t,x)\in D} \|f(t,x)\|$$

alınırsa, (3.5.48) den her $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\|x(t) - x(t_i)\| \leq \int_{t_i}^{t} (K_2 + K_1\|u(\tau)\|)\, d\tau \leq \Delta K_2 + K_1 \int_{t_i}^{t} \|u(\tau)\| d\tau$$

olur. Elde edilen bu son eşitsizliğe önerme 1.1.12 Hölder integral eşitsizliği uygulanır ve $u(\cdot) \in \mathcal{U}_4 \subset \mathcal{U}$ olduğu göz önüne alınırsa, her $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\begin{aligned} \|x(t) - x(t_i)\| &\leq \Delta K_2 + K_1 \Delta^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{t_i}^{t} \|u(\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \Delta K_2 + \Delta^{\frac{p-1}{p}} K_1 \mu_0 \end{aligned}$$

olur. (3.2.16) ile verilen $\varphi(\Delta)$ nın tanımından, her $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\|x(t) - x(t_i)\| \leq \varphi(\Delta) \tag{3.5.49}$$

olur. Genelliği bozmaksızın $\Delta \leq \varphi(\Delta)$ kabul edilsin. O halde her $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$|t - t_i| \leq \Delta \leq \varphi(\Delta)$$

olduğundan, $K^*(\Delta)$ ve $\omega^*(\Delta)$ nın tanımından her $t \in [t_i, t_{i+1})$ için

$$\|f(t, x(t)) - f(t_i, x(t_i))\| \leq K^*(\varphi(\Delta)) \tag{3.5.50}$$

ve

$$\|B(t, x(t)) - B(t_i, x(t_i))\| \leq \omega^*(\varphi(\Delta)) \tag{3.5.51}$$

olur.

$\varepsilon_1 = \|x(t_1) - z(t_1)\|$ olsun. Bu durumda, $x(t_0) = z(t_0) = x_0$ olduğundan ve (3.5.46), (3.5.47) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 = \|x(t_1) - z(t_1)\| &\leq \|x_0 + \int_{t_0}^{t_1} [f(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau))y_{j_0}s_{\ell_0}]\, d\tau - \\
&\quad -x_0 - \Delta[f(t_0, z(t_0)) + B(t_0, z(t_0))y_{j_0}s_{\ell_0}]\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t_1} \|f(\tau, x(\tau)) - f(t_0, x(t_0))\| d\tau + \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1} \|B(\tau, x(\tau)) - B(t_0, x(t_0))\|\ \|y_{j_0}s_{\ell_0}\| d\tau
\end{aligned}$$

olur. $y_{j_0} \in \Gamma^*$ olduğundan $\|y_{j_0}\| \leq H$ ve $s_{\ell_0} \in \widetilde{\Gamma}$ olduğundan $\|s_{\ell_0}\| = 1$ olduğu göz önüne alınır, (3.5.50) ve (3.5.51) ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 = \|x(t_1) - z(t_1)\| &\leq \int_{t_0}^{t_1} K^*(\varphi(\Delta)) d\tau + \int_{t_0}^{t_1} \omega^*(\varphi(\Delta)) H d\tau \\
&\leq \Delta K^*(\varphi(\Delta)) + \Delta\omega^*(\varphi(\Delta)) H \\
&= \Delta(K^*(\varphi(\Delta)) + \omega^*(\varphi(\Delta)) H)
\end{aligned}$$

olur. O halde (3.5.44) ile tanımlanan $\eta^*(\Delta)$ nın tanımından,

$$\varepsilon_1 = \|x(t_1) - z(t_1)\| \leq \Delta\eta^*(\Delta) \tag{3.5.52}$$

elde edilir.

$\varepsilon_2 = \|x(t_2) - z(t_2)\|$ olsun. O zaman (3.5.46) ve (3.5.47) den

$$\begin{aligned}
\|x(t_2) - z(t_2)\| &= \|x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} [f(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau))y_{j_1}s_{\ell_1}]\, d\tau - \\
&\quad - [z(t_1) + \Delta[f(t_1, z(t_1)) + B(t_1, z(t_1))y_{j_1}s_{\ell_1}]]\|] \\
&\leq \|x(t_1) - z(t_1)\| + \|\int_{t_1}^{t_2} [f(\tau, x(\tau)) + B(\tau, x(\tau))y_{j_1}s_{\ell_1}]\, d\tau - \\
&\quad -\Delta[f(t_1, z(t_1)) + B(t_1, z(t_1))y_{j_1}s_{\ell_1}]\|
\end{aligned}$$

olur. (3.5.52) ifadesi kullanılırsa, $\eta(\Delta) = \Delta\eta^*(\Delta)$ ve $\|y_{j_1}s_{\ell_1}\| \leq H$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\|x(t_2) - z(t_2)\| &\leq \eta(\Delta) + \int_{t_1}^{t_2} \|f(\tau, x(\tau)) - f(t_1, z(t_1))\| d\tau + \\
&\quad + H\int_{t_1}^{t_2} \|B(\tau, x(\tau)) - B(t_1, z(t_1))\| d\tau
\end{aligned}$$

olur. Normun üçgen eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\|x(t_2)-z(t_2)\| \ \leq\ & \eta(\Delta)+\int_{t_1}^{t_2}\|f(\tau,x(\tau))-f(t_1,x(t_1))\|d\tau+\\ &+\int_{t_1}^{t_2}\|f(t_1,x(t_1))-f(t_1,z(t_1))\|d\tau+\\ &+H(\int_{t_1}^{t_2}\|B(\tau,x(\tau))-B(t_1,x(t_1))\|d\tau+\\ &+\int_{t_1}^{t_2}\|B(t_1,x(t_1))-B(t_1,z(t_1))\|d\tau)\end{aligned}$$

elde edilir. 2.1.A. koşulu ve (3.5.50), (3.5.51) ifadeleri yardımıyla,

$$\begin{aligned}\|x(t_2)-z(t_2)\| \ \leq\ & \eta(\Delta)+\int_{t_1}^{t_2}K^*(\varphi(\Delta))d\tau+L_1\int_{t_1}^{t_2}\|x(t_1)-z(t_1)\|d\tau+\\ &+H\left(\int_{t_1}^{t_2}\omega^*(\varphi(\Delta))d\tau+L_2\int_{t_1}^{t_2}\|x(t_1)-z(t_1)\|d\tau\right)\end{aligned}$$

bulunur. Tekrar (3.5.52) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\|x(t_2)-z(t_2)\| \ \leq\ & \eta(\Delta)+\Delta K^*(\varphi(\Delta))+L_1\Delta\eta(\Delta)+\\ &+H\left[\Delta\omega^*(\varphi(\Delta))+L_2\Delta\eta(\Delta)\right]\end{aligned}$$

olur. $\eta(\Delta)=\Delta\eta^*(\Delta)=\Delta\left[K^*(\varphi(\Delta))+H\omega^*(\varphi(\Delta))\right]$ olduğundan,

$$\|x(t_2)-z(t_2)\| \ \leq\ \eta(\Delta)+\eta(\Delta)+L_1\Delta\eta(\Delta)+HL_2\Delta\eta(\Delta)$$

bulunur. $L=L_1+L_2H$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\|x(t_2)-z(t_2)\| \ \leq\ & \eta(\Delta)+\eta(\Delta)(1+L_1\Delta+HL_2\Delta)\\ \leq\ & \eta(\Delta)+\eta(\Delta)(1+L\Delta)\end{aligned} \qquad (3.5.53)$$

elde edilir.

$$1+L\Delta\leq\exp(L\Delta)$$

olduğundan,

$$\|x(t_2)-z(t_2)\|\leq\eta(\Delta)+\eta(\Delta)\exp(L\Delta)$$

bulunur.

Benzer şekilde,

$$\varepsilon_3=\|x(t_3)-z(t_3)\|$$

için

$$\varepsilon_3 \leq \eta(\Delta)\exp(L(\Delta+\Delta)) + \eta(\Delta)\exp(L\Delta) + \eta(\Delta)$$

elde edilebilir.

$$\varepsilon_i = \|x(t_i) - z(t_i)\|$$

olsun. $0 < i < N$ için

$$\varepsilon_i \leq \eta(\Delta)\left[1 + e^{L\Delta} + e^{2L\Delta} + \ldots + e^{(i-1)L\Delta}\right] \tag{3.5.54}$$

olduğu kabul edilsin. $\varepsilon_{i+1} = \|x(t_{i+1}) - z(t_{i+1})\|$ için

$$\varepsilon_{i+1} \leq \eta(\Delta)\left[1 + e^{L\Delta} + e^{2L\Delta} + \ldots + e^{(i-1)L\Delta} + e^{iL\Delta}\right] \tag{3.5.55}$$

olduğu kanıtlansın.

(3.5.46) ve (3.5.47) den

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i+1} &= \|x(t_{i+1}) - z(t_{i+1})\| \\
&\leq \|x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(\tau, x(\tau) + B(\tau, x(\tau))y_{j_i}s_{\ell_i}]\,d\tau - \\
&\quad -z(t_i) - \delta\left[f(t_i, z(t_i)) + B(t_i, z(t_i))y_{j_i}s_{\ell_i}\right]\| \leq \\
&\leq \|x(t_i) - z(t_i)\| + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f(\tau, x(\tau)) - f(t_i, z(t_i))\|d\tau + \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|B(\tau, x(\tau)) - B(t_i, z(t_i))\|\|y_{j_i}\|\;\|s_{\ell_i}\|d\tau
\end{aligned}$$

olur. $\|y_{j_i}\| \leq H$, $\|s_{\ell_i}\| = 1$ olduğundan, (3.5.54) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i+1} &\leq \eta(\Delta)\sum_{k=0}^{i-1} e^{kL\Delta} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f(\tau, x(\tau)) - f(t_i, x(t_i))\|d\tau + \\
&\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f(t_i, x(t_i)) - f(t_i, z(t_i))\|d\tau + \\
&\quad + H\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|B(\tau, x(\tau)) - B(t_i, x(t_i))\|d\tau + \\
&\quad + H\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|B(t_i, x(t_i)) - B(t_i, z(t_i))\|d\tau
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. (3.5.50),(3.5.51) ifadeleri ve 2.1.A. koşulu kullanılırsa, son eşitsizlikten

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i+1} &\leq \eta(\Delta)\sum_{k=0}^{i-1} e^{kL\Delta} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} K^*(\varphi(\Delta))d\tau + L_1\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|x(t_i) - z(t_i)\|d\tau + \\ &+H\int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega^*(\varphi(\Delta))d\tau + HL_2\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|x(t_i) - z(t_i)\|d\tau\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Buradan ve (3.5.54) ifadesinden

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i+1} &\leq \eta(\Delta)\sum_{k=0}^{i-1} e^{kL\Delta} + \Delta K^*(\varphi(\Delta)) + H\Delta\omega^*(\varphi(\Delta)) + L_1\Delta\eta(\Delta) + \\ &+\sum_{k=0}^{i-1} e^{kL\Delta} + HL_2\Delta\eta(\Delta)\sum_{k=0}^{i-1} e^{kL\Delta}\end{aligned}$$

olur. $\eta^*(\Delta) = K^*(\varphi(\Delta)) + H\omega^*(\varphi(\Delta))$, $\eta(\Delta) = \Delta\eta^*(\Delta)$ ve $L = L_1 + L_2H$ olduğundan, son eşitsizlik

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i+1} &\leq \eta(\Delta)\sum_{k=0}^{i-1} e^{kL\Delta} + \Delta\eta^*(\Delta) + \Delta\eta(\Delta)(L_1 + HL_2)\sum_{k=0}^{i-1} e^{kL\Delta} \\ &= \eta(\Delta)\sum_{k=0}^{i-1} e^{kL\Delta} + \eta(\Delta) + \Delta\eta(\Delta)L\sum_{k=0}^{i-1} e^{kL\Delta} \\ &= \eta(\Delta) + \eta(\Delta)\left[1 + \Delta L\right]\sum_{k=0}^{i-1} e^{kL\Delta} \\ &\leq \eta(\Delta) + \eta(\Delta)e^{L\Delta}\sum_{k=0}^{i-1} e^{kL\Delta} \\ &= \eta(\Delta) + \eta(\Delta)\sum_{k=1}^{i} e^{kL\Delta} \\ &= \eta(\Delta)\left(1 + \sum_{k=1}^{i} e^{kL\Delta}\right) = \eta(\Delta)\sum_{k=0}^{i} e^{kL\Delta}\end{aligned}$$

olur. Böylece (3.5.55) ifadesinin doğru olduğu kanıtlanmış olur.

O halde tüme varım yöntemine göre, (3.5.54) eşitsizliği keyfi $i = 0, 1, \ldots, N$ için doğrudur. Yani, her $i = 0, 1, \ldots, N$ için

$$\varepsilon_i \leq \eta(\Delta)\sum_{k=0}^{i-1} e^{kL\Delta}$$

olur. Buradan $i = N$ için

$$\varepsilon_N = \|x(t_N) - z(t_N)\| \leq \eta(\Delta)\sum_{k=0}^{N-1} e^{kL\Delta} \tag{3.5.56}$$

olduğu elde edilir. Keyfi $k = 0, 1, \ldots, N-1$ için $k\Delta \leq \theta - t_0$, $N\Delta = \theta - t_0$, $\eta(\Delta) = \Delta\eta^*(\Delta)$, $c^* = (\theta - t_0)\exp(L(\theta - t_0))$ olduğundan ve (3.5.56) ifadesinden

$$\begin{aligned}
\varepsilon_N &\leq \Delta\eta^*(\Delta)\sum_{k=0}^{N-1} e^{L(\theta-t_0)} \\
&= N\Delta\eta^*(\Delta)e^{L(\theta-t_0)} \\
&= (\theta - t_0)\eta^*(\Delta)e^{L(\theta-t_0)} \\
&= c^*\eta^*(\Delta)
\end{aligned}$$

olur. Bu ise kanıtı tamamlar. □

3.6 Hata Değerlendirmesi ve Otonom Sistemler

Önerme 3.1.1-önerme 3.5.1 birleştirilecek olursa, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.6.1. *Aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.*

$$\begin{aligned}
\alpha(X(\theta;t_0,x_0),Z(\theta;t_0,x_0)) \leq\; & K_1\frac{2\mu_0^p}{H^{p-1}}(1+c_*\exp(c_*))+ \\
& +\xi(\Delta)(1+c_*\exp(c_*))+ \\
& +K_1\Delta^*(\theta-t_0)(1+c_*\exp(c_*))+ \\
& +K_1\delta H(\theta-t_0)(1+c_*\exp(c_*))+c^*\eta^*(\Delta)
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
c_* &= L_1(\theta-t_0)+L_2\mu_0(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}, \\
c^* &= (\theta-t_0)\exp(L(\theta-t_0)), \\
L &= L_1+L_2H, \\
\xi(\Delta) &= 2\mu_0\omega^*(\varphi(\Delta))(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}}+2\mu_0K_1\Delta^{\frac{p-1}{p}}, \\
\eta^*(\Delta) &= K^*(\varphi(\Delta))+H\omega^*(\varphi(\Delta)), \\
\eta(\Delta) &= \Delta\eta^*(\Delta), \\
\omega^*(\Delta) &= \max_{\substack{(t,x)\in D,\ (\tau,y)\in D \\ |t-\tau|<\Delta,\ \|x-y\|<\Delta}} \|B(t,x)-B(\tau,y)\|, \\
K^*(\Delta) &= \max_{\substack{(t^*,x^*)\in D,\ (t_*,x_*)\in D \\ |t^*-t_*|\leq\Delta,\ \|x^*-x_*\|\leq\Delta}} \|f(t^*,x^*)-f(t_*,x_*)\|, \\
\varphi(\Delta) &= K_2\Delta+K_1\mu_0\Delta^{\frac{p-1}{p}}, \\
K_1 &= \max_{(t,x)\in D}\|B(t,x)\|, \\
K_2 &= \max_{(t,x)\in D}\|f(t,x)\|
\end{aligned}$$

ile tanımlıdır.

Kanıt. Hausdorff uzaklığının özelliğinden

$$\begin{gathered}
\alpha(X(\theta;t_0,x_0),Z(\theta;t_0,x_0)) \leq \alpha(X(\theta;t_0,x_0),X_1(\theta;t_0,x_0))+ \\
+\alpha(X_1(\theta;t_0,x_0),X_2(\theta;t_0,x_0))+\alpha(X_2(\theta;t_0,x_0),X_3(\theta;t_0,x_0))+ \\
+\alpha(X_3(\theta;t_0,x_0),X_4(\theta;t_0,x_0))+\alpha(X_4(\theta;t_0,x_0),Z(\theta;t_0,x_0))
\end{gathered}$$

eşitsizliği doğrudur. O zaman önerme 3.1.1, önerme 3.2.1, önerme 3.3.1, önerme 3.4.1 ve önerme 3.5.1 den teoremin doğruluğu elde edilir. □

Teorem 3.6.1 den aşağıdaki sonuca varılabilir.

Sonuç 3.6.2. *Her $\varepsilon > 0$ için*

$$\alpha(X(\theta; t_0, x_0), Z(\theta; t_0, x_0)) \leq \varepsilon$$

olacak şekilde $H > 0$, $\Delta > 0$, $\Delta^* > 0$, $\delta > 0$ sayıları bulunabilir.

Eğer (3.1.1) sistemi otonom sistem ise yani, sistemin davranışı

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u, \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.6.57}$$

diferansiyel denklemi ile verilmiş ise bu durumda,

$$\begin{aligned} \omega^*(\Delta) \leq & \ \Delta L_2, \\ K^*(\Delta) \leq & \ \Delta L_1, \\ \eta^*(\Delta) \leq & \ L_1\varphi(\Delta) + HL_2\varphi(\Delta), \\ \xi(\Delta) \leq & \ 2\mu_0\left(L_2\Delta(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} + K_1\Delta^{\frac{p-1}{p}}\right) \end{aligned}$$

olur. O halde Teorem 3.6.1 aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Teorem 3.6.3. *(3.6.57) otonom sistemi için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.*

$$\begin{aligned} \alpha(X(\theta; t_0, x_0), Z(\theta; t_0, x_0)) \ \leq & \ K_1\frac{2\mu_0^p}{H^{p-1}}(1 + c_* \exp(c_*)) + \\ & +2\mu_0\left(\Delta L_2(\theta - t_0)^{\frac{p-1}{p}} + K_1\Delta^{\frac{p-1}{p}}\right) \\ & (1 + c_* \exp(c_*)) + \\ & +K_1\Delta^*(\theta - t_0)(1 + c_* \exp(c_*)) + \\ & +K_1\delta H(\theta - t_0)(1 + c_* \exp(c_*)) + \\ & +c^*\varphi(\Delta)(L_1 + L_2H) \end{aligned}$$

(3.1.1) sisteminin sağ tarafındaki $f(t,x)$ ve $B(t,x)$ fonksiyonları, 2.1.A. koşulu yerine aşağıdaki 3.6.A. koşulunu sağlasın.

3.6.A. $(t,x) \to f(t,x)$ ve $(t,x) \to B(t,x)$ fonksiyonları $[t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ uzayında yerel Lipschitz olsunlar. Yani, her sınırlı $D \subset [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n$ kümesi ve keyfi $(t_1,x_1) \in D$, $(t_2,x_2) \in D$ için

$$\|f(t_1,x_1) - f(t_2,x_2)\| \leq L_1^1|t_1-t_2| + L_1^2\|x_1-x_2\|$$

$$\|B(t_1,x_1) - B(t_2,x_2)\| \leq L_2^1|t_1-t_2| + L_2^2\|x_1-x_2\|$$

olacak biçimde $L_i^j = L_i^j(D)$ $(i=1,2\ ,\ \ j=1,2)$ sabitleri var olsun.

O zaman $L_1^* = L_1^1 + L_1^2$ ve $L_2^* = L_2^1 + L_2^2$ alınırsa,

$$\omega^*(\Delta) = \max_{\substack{(t,x)\in D,\ (\tau,y)\in D \\ |t-\tau|<\Delta,\ \|x-y\|<\Delta}} \|B(t,x)-B(\tau,y)\| \leq L_2^1\Delta + L_2^2\Delta = L_2^*\Delta,$$

$$K^*(\Delta) = \max_{\substack{(t^*,x^*)\in D,\ (t_*,x_*)\in D \\ |t^*-t_*|\leq\Delta,\ \|x^*-x_*\|\leq\Delta}} \|f(t^*,x^*)-f(t_*,x_*)\| \leq L_1^1\Delta + L_1^2\Delta = L_1^*\Delta$$

olur. Bu durumda

$$\eta^*(\Delta) \leq L_1^*\varphi(\Delta) + HL_2^*\varphi(\Delta)$$

ve

$$\xi(\Delta) \leq 2\mu_0\left(L_2^*\Delta(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}} + K_1\Delta^{\frac{p-1}{p}}\right)$$

olur ve teorem 3.6.1 aşağıdaki gibi ifade edilir.

Teorem 3.6.4. *Aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.*

$$\begin{aligned} \alpha(X(\theta;t_0,x_0),Z(\theta;t_0,x_0)) \leq\ & K_1\frac{2\mu_0^p}{H^{p-1}}(1+c_*\exp(c_*))+ \\ & +2\mu_0\left(L_2^*\Delta(\theta-t_0)^{\frac{p-1}{p}} + K_1\Delta^{\frac{p-1}{p}}\right) \\ & (1+c_*\exp(c_*))+ \\ & +K_1\Delta^*(\theta-t_0)(1+c_*\exp(c_*))+ \\ & +K_1\delta H(\theta-t_0)(1+c_*\exp(c_*))+ \\ & +c^*\varphi(\Delta)(L_1^*+HL_2^*) \end{aligned}$$

4 NÜMERİK HESAPLAMALAR

Bu bölümde erişim kümelerinin yaklaşık olarak hesaplanması için bir algoritma verilecek ve bu algoritma bilgisayara uyarlanarak çeşitli örnekler üzerinde hesaplamalar yapılacaktır.

4.1 Algoritma

Kontrol sistemin bir $[t_0, \theta]$ aralığındaki davranışı yine $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $t \in [t_0, \theta]$ $(t_0 < \theta < \infty)$, $f(t,x)$ n-boyutlu vektör fonksiyon ve $B(t,x)$ ise $(n \times m)$-boyutlu matris fonksiyon olmak üzere,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4.1.1}$$

diferansiyel denklemi ile verilsin.

(4.1.1) sisteminin kontrol fonksiyonları

$$\int_{t_0}^{\theta} \|u(t)\|^p dt \leq \mu_0^p, \quad \mu_0 > 0, \quad 1 < p < \infty \tag{4.1.2}$$

integral eşitsizliği ile sınırlandırılmış olsun.

Ayrıca, (4.1.1) denkleminin sağ tarafı 2.1.A. ve 2.1.B. koşullarını sağlasın.

Sonuç 3.6.2 den her $\varepsilon > 0$ için $\alpha(X(\theta; t_0, x_0), Z(\theta; t_0, x_0)) \leq \varepsilon$ olacak şekilde $H > 0$, $\Delta > 0$, $\Delta^* > 0$, $\delta > 0$ sayıları bulunabileceği bilinmektedir.

$Z(\theta; t_0, x_0)$ kümesi, sonlu sayıda kontrol fonksiyon için Euler doğrularının $z(\theta)$ değerlerinin kümesi olduğundan, $Z(\theta; t_0, x_0)$ kümesini nümerik olarak hesaplanmak mümkündür. $Z(\theta; t_0, x_0)$ kümesinin hesaplanması için, sırasıyla aşağıdaki prosedürler izlensin:

I. Öncelikle her $i = 0, 1, \ldots, N-1$ için (3.5.43) ifadesinde $y_{j_i} = j_i \Delta^*$ alınarak (3.5.43) ifadesi aşağıdaki (4.1.3) formülü şeklinde yazılabilir.

$$z(t_{i+1}) = z(t_i) + \Delta[f(t_i, z(t_i)) + B(t_i, z(t_i))(j_i \Delta^*) s_{l_i}] \tag{4.1.3}$$

Burada $j_i = 0, 1, 2, \ldots, R$ tam değerlerini alır. Bu durumda (3.3.35) eşitsizliğinden $j_i = 0, 1, 2, \ldots, R$ tam sayılarının

$$\sum_{i=0}^{N-1} j_i^p \leq \frac{\mu_0^p}{\Delta\Delta^{*p}} \tag{4.1.4}$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçilmesi gerektiği elde edilir.

II. Algoritmanın temeli, (4.1.4) eşitsizliğini sağlayan tüm mümkün $j_i = 0, 1, 2, \ldots, R$ ve $s_{\ell_i} = s_0, s_1, \ldots, s_k$ değerlerinin seçilmesi ve seçilen bu değerlere göre tüm mümkün $z(\theta) = z(t_N)$ değerlerinin hesaplanmasına dayanır.

(4.1.3) formülündeki, (4.1.4) eşitsizliğini sağlayan tüm mümkün $j_0, j_1, \ldots, j_{N-1}$ sayıları çizelge 4.1 deki prosedür uygulanarak seçilebilir. Ancak, her bir adımda $j_0, j_1, \ldots, j_{N-1}$ sayıları seçildikten sonra bu sayıların (4.1.4) eşitsizliğini sağlayıp, sağlamadığı kontrol edilmelidir.

III. Daha sonra m. adımda seçilen her $j_0, j_1, \ldots, j_{N-1}$ sayıları için $s_{\ell_0}, s_{\ell_1}, \ldots, s_{\ell_{N-1}}$ vektörleri çizelge 4.1 deki yönteme benzer şekilde çizelge 4.2 de verilen yöntem kullanılarak seçilsin.

IV. Böylece her m. adımda $(m = 1, 2, \ldots, (R+1)^N)$ yukarıdaki prosedür uygulanarak belirlenen $s_{\ell_0}, s_{\ell_1}, \ldots, s_{\ell_{N-1}}$ vektörleri (4.1.3) formülünde yerine yazılarak, tüm mümkün $z(\theta)$ değerleri hesaplanabilir.

Çizelge 4.1: $j_0, j_1, \ldots, j_{N-1}$ sayılarının seçim yöntemi

Adım	$j_0, j_1, \ldots, j_{N-1}$
1	$j_0 = j_1 = j_2 = \ldots = j_{N-1} = 0$
2	$j_0 = j_1 = j_2 = \ldots = j_{N-2} = 0$, $j_{N-1} = 1$
$\vdots$	
(R+1)	$j_0 = j_1 = j_2 = \ldots = j_{N-2} = 0$, $j_{N-1} = R$
(R+2)	$j_0 = j_1 = j_2 = \ldots = j_{N-3} = 0$, $j_{N-2} = 1$, $j_{N-1} = 0$
$\vdots$	
2(R+1)	$j_0 = j_1 = j_2 = \ldots = j_{N-3} = 0$, $j_{N-2} = 1$, $j_{N-1} = R$
$\vdots$	
$(R+1)^2$	$j_0 = j_1 = j_2 = \ldots = j_{N-3} = 0$, $j_{N-2} = R$, $j_{N-1} = R$
$(R+1)^2+1$	$j_0 = j_1 = j_2 = \ldots = j_{N-4} = 0$, $j_{N-3} = 1$, $j_{N-2} = j_{N-1} = 0$
$\vdots$	
$(R+1)^2+(R+1)$	$j_0 = j_1 = j_2 = \ldots = j_{N-4} = 0$, $j_{N-3} = 1$, $j_{N-2} = 0$, $j_{N-1} = R$
$(R+1)^{N-1}$	$j_0 = 0$, $j_1 = j_2 = \ldots = j_{N-1} = R$
$(R+1)^{N-1}+1$	$j_0 = 1$, $j_1 = j_2 = \ldots = j_{N-1} = 0$
$\vdots$	
$(R+1)^{N-1}+(R+1)$	$j_0 = 1$, $j_1 = j_2 = \ldots = j_{N-2} = 0$, $j_{N-1} = R$
$\vdots$	
$(R+1)^N$	$j_0 = j_1 = j_2 = \ldots = j_{N-1} = R$,

Çizelge 4.2: $s_{\ell_0}, s_{\ell_1}, \ldots, s_{\ell_{N-1}}$ vektörlerinin seçim yöntemi

Adım	$s_{l_0}, s_{l_1}, \ldots, s_{l_{N-1}}$
m.1	$s_{l_0} = s_{l_1} = s_{l_2} = \ldots = s_{l_{N-1}} = s_0$
m.2	$s_{l_0} = s_{l_1} = s_{l_2} = \ldots = s_{l_{N-2}} = s_0,$ $s_{l_{N-1}} = s_1$
$\vdots$	
m.(k+1)	$s_{l_0} = s_{l_1} = s_{l_2} = \ldots = s_{l_{N-2}} = s_0,$ $s_{l_{N-1}} = s_k$
m.(k+2)	$s_{l_0} = s_{l_1} = s_{l_2} = \ldots = s_{l_{N-3}} = s_0,$ $s_{l_{N-2}} = s_1,\ s_{l_{N-1}} = s_0$
$\vdots$	
m.2(k+1)	$s_{l_0} = s_{l_1} = s_{l_2} = \ldots = s_{l_{N-3}} = s_0,$ $s_{l_{N-2}} = s_1,\ s_{l_{N-1}} = s_k$
$\vdots$	
m.$(k+1)^2$	$s_{l_0} = s_{l_1} = s_{l_2} = \ldots = s_{l_{N-3}} = s_0,$ $s_{l_{N-2}} = s_k,\ s_{l_{N-1}} = s_k$
m.$(k+1)^2+1$	$s_{l_0} = s_{l_1} = s_{l_2} = \ldots = s_{l_{N-4}} = s_0,$ $s_{l_{N-3}} = s_1,\ s_{l_{N-2}} = s_0,\ s_{l_{N-1}} = s_0$
$\vdots$	
m.$(k+1)^2+(k+1)$	$s_{l_0} = s_{l_1} = s_{l_2} = \ldots = s_{l_{N-4}} = s_0,$ $s_{l_{N-3}} = s_1,\ s_{l_{N-2}} = s_0,\ s_{l_{N-1}} = s_k$
$\vdots$	
m.$(k+1)^{N-1}$	$s_{l_0} = s_0,\ s_{l_1} = s_{l_2} = \ldots = s_{l_{N-1}} = s_k$
m.$(k+1)^{N-1}+1$	$s_{l_0} = s_1,\ s_{l_1} = s_{l_2} = \ldots = s_{l_{N-1}} = s_0$
$\vdots$	
m.$(k+1)^{N-1}+(k+1)$	$s_{l_0} = s_1,\ s_{l_1} = s_{l_2} = \ldots = s_{l_{N-2}} = s_0,$ $s_{l_{N-1}} = s_k$
$\vdots$	
m.$(k+1)^N$	$s_{l_0} = s_{l_1} = s_{l_2} = \ldots = s_{l_{N-1}} = s_k$

4.2 Örnekler

Bu bölümde, yukarıdaki algoritma bilgisayara uygulanarak çeşitli örnekler üzerinde hesaplamalar yapılacaktır.

Örnek 4.2.1. *Kontrol sistemin* $[0, 0.06]$ *aralığındaki davranışı aşağıdaki diferansiyel denklem ile verilmiş olsun.*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{2}\cos(200\sqrt{3}x_2) + \frac{1}{3}u_1 \sin(1 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{3}\cos(150x_1) + \frac{1}{4}u_2 \sin(1 + x_1) \\ & x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0 \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

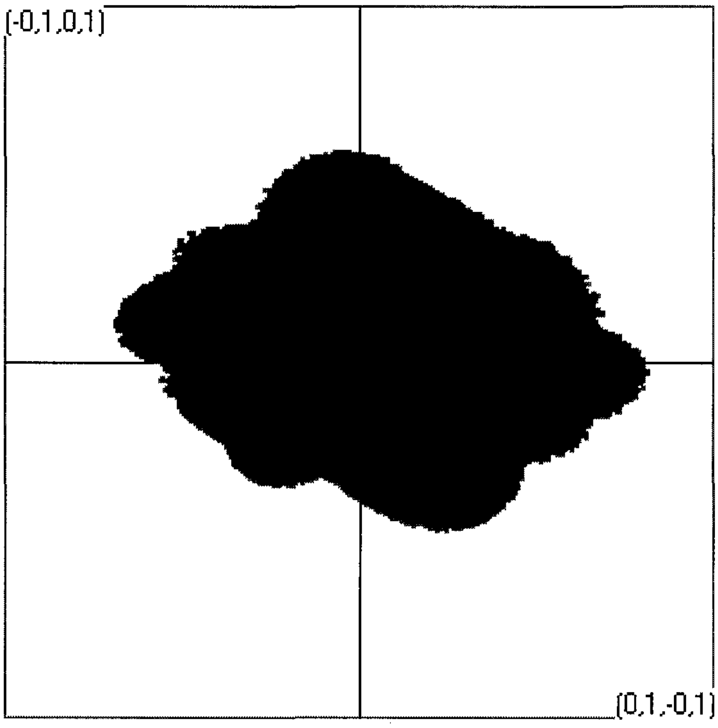
(4.2.5) sistemi, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *sistemin durum vektörü,* $f(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}\cos(200\sqrt{3}x_2), \frac{1}{3}\cos(150x_1))$ *vektör fonksiyon,* $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sin(1 - x_1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\sin(1 + x_1) \end{bmatrix}$ *matris fonksiyon,* $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ *kontrol vektörü ve* $t \in [0, 0.06]$ *zaman olmak üzere, (4.1.1) formunda yazılabilir.*

Ayrıca $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ *kontrol fonksiyonu aşağıdaki integral eşitsizliği ile sınırlandırılmış olsun.*

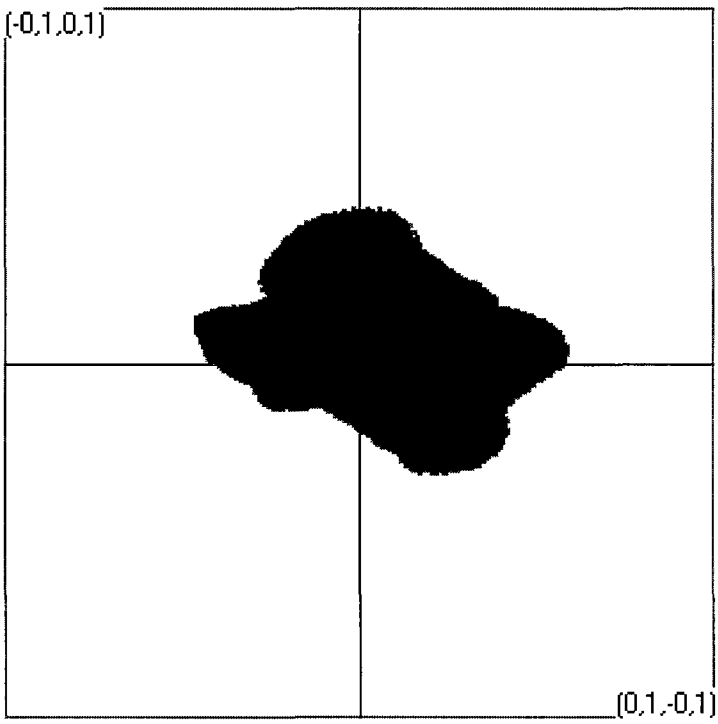
$$\int_0^{0.06} \|u(t)\|^p dt = \int_0^{0.06} \left(u_1(t)^2 + u_2(t)^2\right)^{\frac{p}{2}} dt \le \left(\frac{1}{2}\right)^p \tag{4.2.6}$$

(4.2.6) kısıtı ile verilen (4.2.5) sistemi 2.1.A. ve 2.1.B. koşullarını sağlar.

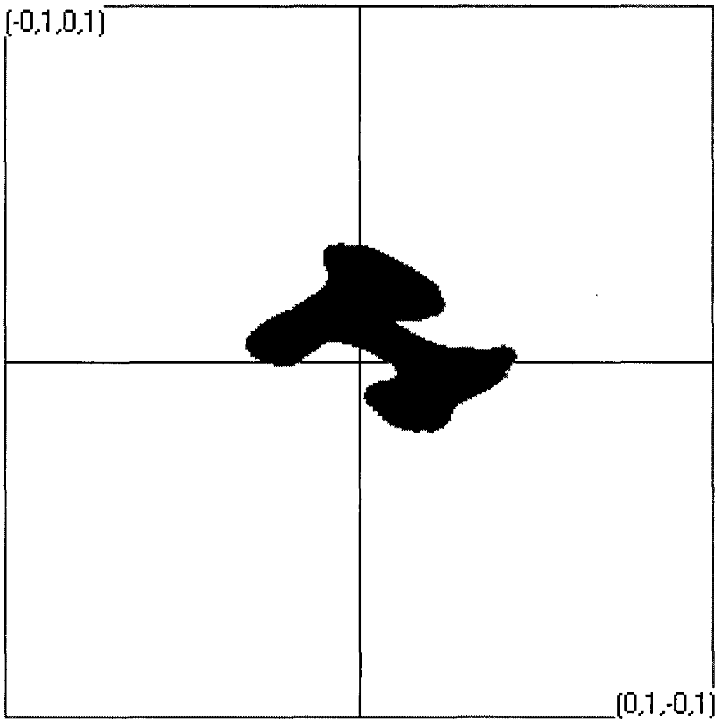
Bu durumda aşağıdaki şekiller p nin farklı değerleri için (4.2.6) kısıtı ile (4.2.5) sistemi için bu algoritmanın bilgisayara uygulanması ile elde edilen $Z(0.06; 0, (0, 0))$ *kümeleridir.*



Şekil 4.1: $p = 1.5$ için (4.2.5) sisteminin $Z(0.06; 0, (0, 0))$ erişim kümesi



Şekil 4.2: $p = 2$ için (4.2.5) sisteminin $Z(0.06; 0, (0, 0))$ erişim kümesi



Şekil 4.3: $p = 3$ için (4.2.5) sisteminin $Z(0.06; 0, (0, 0))$ erişim kümesi

Örnek 4.2.2. *Kontrol sistemin* $[0, 0.06]$ *aralığındaki davranışı aşağıdaki diferansiyel denklem ile verilmiş olsun.*

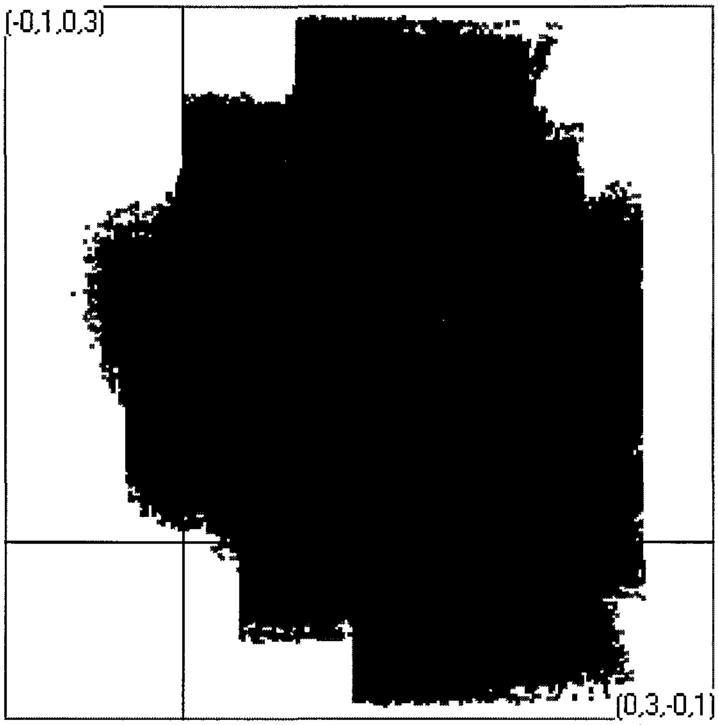
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{5t + x_1}{1 + x_2^2} + \sin(100x_1)u_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{5t - x_2}{1 + x_1^2} + u_1 + \frac{1}{3}\sin(200x_2)u_2 \\ & x_1(0) = 0.1, \quad x_2(0) = 0.1 \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Ayrıca $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ *kontrol fonksiyonu aşağıdaki integral eşitsizliği ile sınırlandırılmış olsun.*

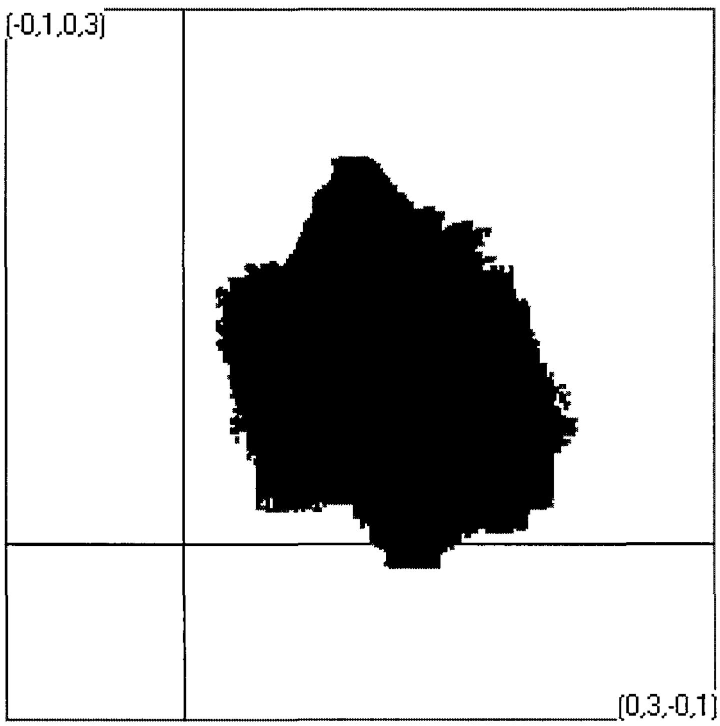
$$\int_0^{0.06} \|u(t)\|^p dt = \int_0^{0.06} \left(u_1(t)^2 + u_2(t)^2\right)^{\frac{p}{2}} dt \leq \left(\frac{1}{2}\right)^p \tag{4.2.8}$$

(4.2.8) kısıtı ile verilen (4.2.7) sisteminin 2.1.A. ve 2.1.B. koşullarını sağladığı açıktır.

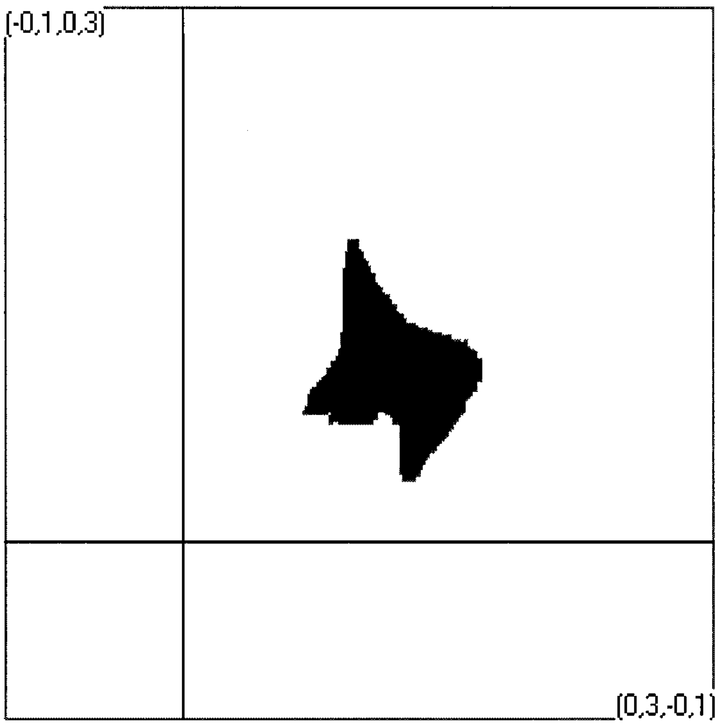
Aşağıdaki şekiller p nin farklı değerleri için (4.2.8) kısıtı ile (4.2.7) sistemi için algoritmanın bilgisayara uygulanması ile elde edilen $Z(0.06; 0, (0.1, 0.1))$ *kümeleridir.*



Şekil 4.4: $p = 1.5$ için (4.2.7) sisteminin $Z(0.06; 0, (0.1, 0.1))$ erişim kümesi



Şekil 4.5: $p = 2$ için (4.2.7) sisteminin $Z(0.06; 0, (0.1, 0.1))$ erişim kümesi



Şekil 4.6: $p = 3$ için (4.2.7) sisteminin $Z(0.06; 0, (0.1, 0.1))$ erişim kümesi

KAYNAKLAR

[1] BALAKRISHNAN, A.V., *Optimal Control Problems in Banach Spaces*, SIAM J. Control **3**, No. 1, 152-180 (1965)

[2] BUTKOVSKI, A.G., *Theory of Optimal Control Systems with Distributed Parameters*, Nauka, Moscow, USSR (1965)

[3] CESARI, L., *Existance Theorems for Abstract Multi-Dimensional Problems of Optimal Control*, University of Michigan Report, March (1966)

[4] FATTORINI, H.O., *On Complete Controllability of Linear Systems*, J. Diff. Eq. **3**, 391-402 (1967)

[5] FILIPPOV, A.F., *On Certain Questions in the Theory of Optimal Control*, SIAM J. Control **1.**, No. 1, 76-84 (1962)

[6] FILIPPOV, A.F., *Classical Solutions of Differential Equations with Multivalued Right Hand Side*, SIAM J. Control **5**, 609-621, (1967)

[7] FRIEDMAN, A., *Optimal Control in Banach Spaces*, J. Math. Anal. Appl, **18**, 35-55 (1967)

[8] HALKIN, H., *Topolojical Aspects of Optimal Control*, Contr. Diff. Eqns., **3**, 377-385 (1964)

[9] HERMES, H., *On the Closure and Convexity of Attainable Sets in Finite and Infinite Dimensions*, SIAM J. Control, **5**, No. 3, 409-417 (1967)

[10] JACOBS, M.Q., *Linear Optimal Control Problems*, SIAM J. Control, **5**, No.3., 418-437 (1967)

[11] KALMAN, R.E., *On the General Theory of Control Systems*, Proc. 1st Congress IFAC, Moscow, USSR, 1960, Vol. **1**, 481-492, Butterworths, London (1961)

[12] KALMAN, R.E., HO, Y.C. ve NARENDRA, K.S., *Controllability of Linear Dynamical Systems*, Wiley, New York, USA (1963)

[13] KALMAN, R.E., FALB, P.L. ve ARBIB, M.A., *Topics in Mathematical Control Theory*, McGraw Hill, New York, USA (1969)

[14] KRASOVSKII, N.N., *Theory of Control of Movement. Linear Systems*, Nauka, Moscow, USSR (1968)

[15] KURZHANSKII, A.B., *On Minimax Control and Estimation Strategies Under Incomplete Information*, Problems of Control and Inf. Theory, **4**, 205-218 (1975)

[16] LEE, E.B. ve MARKUS, L., *Foundations of Optimal Control Theory*, John Wiley, New York, USA (1968)

[17] OLECH, CZ., *Extremal Solutions of Control Systems*, J. of Diff. Eq. **2**, 74-101 (1966)

[18] PONTRYAGIN, L.S., BOLTYANSKII, V.G., GAMKRELIDZE, R.V. ve MISHCENKO, E.F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Pergamon Press, Oxford (1964)

[19] PSHENICHNIY, B.N., *Linear Optimal Control Problems*, SIAM J. Control, **4**, No. 4, 577-593 (1966)

[20] ROXIN, E., *On the Existence of Optimal Controls*, Michigan Math. J., **9**, 109-119 (1962)

[21] WARGA, J., *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York, USA (1972)

[22] WAZEWSKI, T., *Sur une Generalization de la Notion des Solutions d'une Equation au Contingent*, Bull. Acad. Pol. Sc., **10**, 11-15 (1962)

[23] WAZEWSKI, T., *On an Optimal Control Problem*, Proc. Conference Differential Equations and Their Applications, 229-242, Prague (1963)

[24] FRANKOWSKA, H. ve OLECH, C., *Boundary Solutions to Differential Inclusions*, J. Diff. Eqs., **44**, 156-165 (1982)

[25] PANASYUK, A.I. ve PANASYUK, V.I., *An Equation Generated by a Differential Inclusion*, Mat. Zametki, **27**, 429-437 (1980)

[26] CHERNOUS'KO, F.L., *Estimation of the Phase State of Dynamical Systems*, Nauka, Moscow, USSR (1988)

[27] GUSEINOV, KH.G., MOISEYEV, A.N. ve USKAHOV, V.N., *The Approximation of Reachable Domains of Control Systems*, J. Appl. Maths Mechs, **62**, No.2 , 169-175 (1998)

[28] GUSEINOV, KH.G., NEZNAKHIN, A.A. ve USHAKOV, V.N., *Approximate Construction of Attainability Sets of Control Systems with Integral Constraints on the Control*, J. Appl. Maths Mechs, **63**, No.4 , 557-567 (1999)

[29] KOMAROV, V.A., *Estimates of the Reachable Set of Differential Inclusions*, Mat. Zametki, **37**, 916-925 (1985)

[30] KURZHANSKII, A.B. ve VALYI, I., *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*, Birkhauser, Boston, USA (1995)

[31] LOTOV, A.V., *On the Notion of Generalized Reachable Sets and Their Construction for Linear Controllable Systems*, Dokl. Akad. Nauk USSR, **250**, 1081-1083, (1980)

[32] MOISEYEV, N.N., *Numerical Methods in the Theory of Optimal Systems*, Nauka, Moscow, USSR (1971)

[33] NIKOL'SKII, M.S., *A Method for Approximating Reachable Sets for a Differential Inclusion*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **28**, 1252-1254 (1988)

[34] USHAKOV, V.N. ve KHRIPUNOV, A.P., *The Approximate Construction of Integral Cones of Differential Inclusions*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **34**, 965-977 (1994)

[35] AUBIN, J.P. ve CELLINA, A., *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, New York, USA (1984)

[36] AUBIN, J.P., *Viability Theory*, Birkhauser, Boston, USA (1991)

[37] BLAGODAT'SKIKH V.I. ve FILIPPOV, A.F., *Differential Inclusions and Optimal Control*, Proc. Steklov Inst. Math., **169**, 199-259 (1986)

[38] CARDALIAGUET, P., *Conditions Suffisantes de non Vacuit du Noyau de Viabilit*, Comptes-Rendus de 1'Academie des Sciences, Serie 1, Paris, **314**, 797-800 (1992)

[39] CLARKE, F.H., LEDYAEV, YU.S., STERN, R.J. ve WOLENSKI, P.R., *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer, New York, USA (1998)

[40] DEIMLING, K., *Multivalued Differential Equations*, de Gruyter, Berlin: New York, USA (1992)

[41] FRANKOWSKA, H., *Contingent Cones to Reachable Sets of Control Systems*, SIAM J. of Contr. Optimiz., **27**, 170-198 (1989)

[42] FRANKOWSKA, H. ve QUINCAMPOIX, M., *Viability Kernels of Differential Inclusions with Constraints: algorithm and Applications*, J. Math. Systems Estim. Control **1**, 3, 371–388 (1991)

[43] GUSEINOV, KH.G. ve USHAKOV, V.N., *Strongly and Weakly Invariant Sets with Respect to a Differential Inclusion*, Soviet. Math. Dokl., **38**, 603-605 (1989)

[44] HADDAD, G., *Monotone Trajectories of Differential Inclusions with Memory*, Isr. J. Math., **39**, 83-100 (1981)

[45] SAINT-PIERRE P., *Approximation of the Viability Kernel, Applied Mathematics & Optimization*, **29**, 187-209 (1994)

[46] TALLOS, P., *Viability Problems for Nonautonomous Differential Inclusions*, SIAM J. on Control and Optimization, **29**, 2, 255-263 (1991)

[47] WOLENSKI, P., *The Exponential Formula for the Reachable Set of Lipschitz Differential Inclusion*, SIAM J. Cont. Optim., **28**, 1148-1161 (1990)

[48] CHENTSOV, A.G., *Asymtotic Attainability Accompanying Perturbation of Integral Constraints*, Kibernetika i Sist. Analiz, 87-99 (1995)

[49] LEIGH, J.R., *Functional Analysis and Linear Control Theory*, Academic Press, London (1980)

[50] SOKOLOV, B.N., *On a Differential Game with an Information Delay When There Are Integral Constraints*, Differents. Uravneniya, **8**, No. 10, 1797-1804 (1972)

[51] SOLOMATIN, A.M., *An Approach-evasion Game Problem for a Linear System with Integral Constraints on the Control of the Players*, Prikl. Mat. Mekh., **48**, N. 4, 568-573 (1984)

[52] UKHOBOTOV, V.I., *Single-type Linear Game with Composite Constraints on the Controls*, Prikl. Mat. Mekh., **51**, No. 2, 179-185 (1987)

[53] ACHHAB M. E. ve WERTZ V., *On Reachable Sets for a Class of Nonlinear Systems with Constraints*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **229**, 105-118(1999)

[54] MOTTA M. ve SARTORI C. *Minimum Time and Energy Functions for Systems with Controls in L^p*, Preprints of 5th IFAC Symposium Nonlinear Control Systems, CD-ROM, July 4-6, Saint-Petersburg, Russia (2001)

[55] KOLMOGOROV, A.N. ve FOMIN, S.V., *Introductory Real Analysis*, Dover Publications, New York, USA (1970)

[56] REDDY, B.D., *Introductory Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, USA (1997)

[57] SHOUCHUAN, H. ve PAPAGEORGIOU N.S., *Handbook of Multivalued Analysis Volume I*, Kluver Academic Publishers, Dordrecht (1997)

[58] UCalc Fast Math Parser, http://www.ucalc.com/mathparser/index.html

EKLER

EK-1 $\mathbb{R}^2$ Uzayının Birim Küresi İçin Sonlu δ-Ağ

Bu bölümde, 4. bölümde açıklanan algoritmada kullanılan, $\mathbb{R}^m$ uzayının birim küresinin verilen $\delta > 0$ sayısına karşılık sonlu δ-ağının $m = 2$ için nasıl bulunabileceğine dair bir yöntem verilecektir.

$S = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| = 1\}$ olsun ve $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ sayısı verilsin.

$\mathbb{R}^2$ de verilen S birim çemberinin $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ olmak üzere δ-ağı aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$0 < \theta \leq \dfrac{\delta^2}{2}$ ve $k = \left[\dfrac{2\pi}{\theta}\right]$ olmak üzere

$$\widetilde{\Gamma} = \{s_i = (\cos i\theta, \sin i\theta) : i = 0, 1, \ldots, k\}$$

olsun. Burada $k = \left[\dfrac{2\pi}{\theta}\right]$ ile $\dfrac{2\pi}{\theta}$ sayısının tam kısmı gösterilmektedir.

$k = \left[\dfrac{2\pi}{\theta}\right]$ olduğundan, $\alpha \in [0, 1)$ için

$$k = \frac{2\pi}{\theta} + \alpha$$

olur. Buradan ise, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere,

$$\frac{2\pi}{\theta} \leq k < \frac{2\pi}{\theta} + 1$$

$$2\pi \leq k\theta < 2\pi + \theta$$

olur. Bu durumda s_k noktası ya s_0 ile aynı ya da s_0 ve s_1 noktaları arasındaki bir nokta olur.

Açıktır ki, her $i = 0, 1, \ldots, k-1$ için

$$\|s_{i+1} - s_i\| = r$$

yani, her $i = 0, 1, \ldots, k-1$ için s_i ve s_{i+1} noktaları arasındaki uzaklık sabittir.

O halde s_0 ve s_1 noktaları arasındaki uzaklık değerlendirilecek olursa,

$$\begin{aligned} r = \|s_0 - s_1\| &= \|(\cos 0, \sin 0) - (\cos\theta, \sin\theta)\| \\ &= \|(1,0) - (\cos\theta, \sin\theta)\| \\ &= \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \\ &= \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\cos\theta + 1} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta} \end{aligned}$$

olur. Her $\theta \geq 0$ için

$$1 - \cos\theta \leq \theta$$

olduğundan

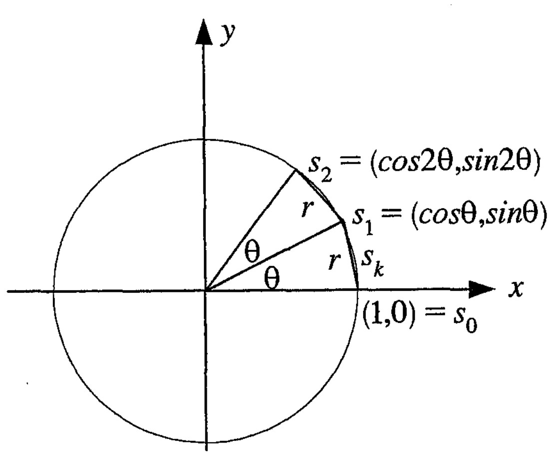
$$r = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta} \leq \sqrt{2}\sqrt{\theta}$$

olduğu bulunur.

$0 < \theta \leq \frac{\delta^2}{2}$ olarak seçildiğinden, $r < \sqrt{2}\sqrt{\frac{\delta^2}{2}} = \delta$ olarak bulunur. Böylece

$$\widetilde{\Gamma} = \{s_i = (\cos i\theta, \sin i\theta) : i = 0, 1, \ldots, k\}$$

kümesi, $\theta \leq \frac{\delta^2}{2}$ ve $k = \left[\frac{2\pi}{\theta}\right]$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ uzayının S birim çemberinin sonlu δ-ağı ($\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$) olur.



Şekil 5.1: $\mathbb{R}^2$ uzayının birim küresi için sonlu δ-ağ

EK-2 Bilgisayar Programı

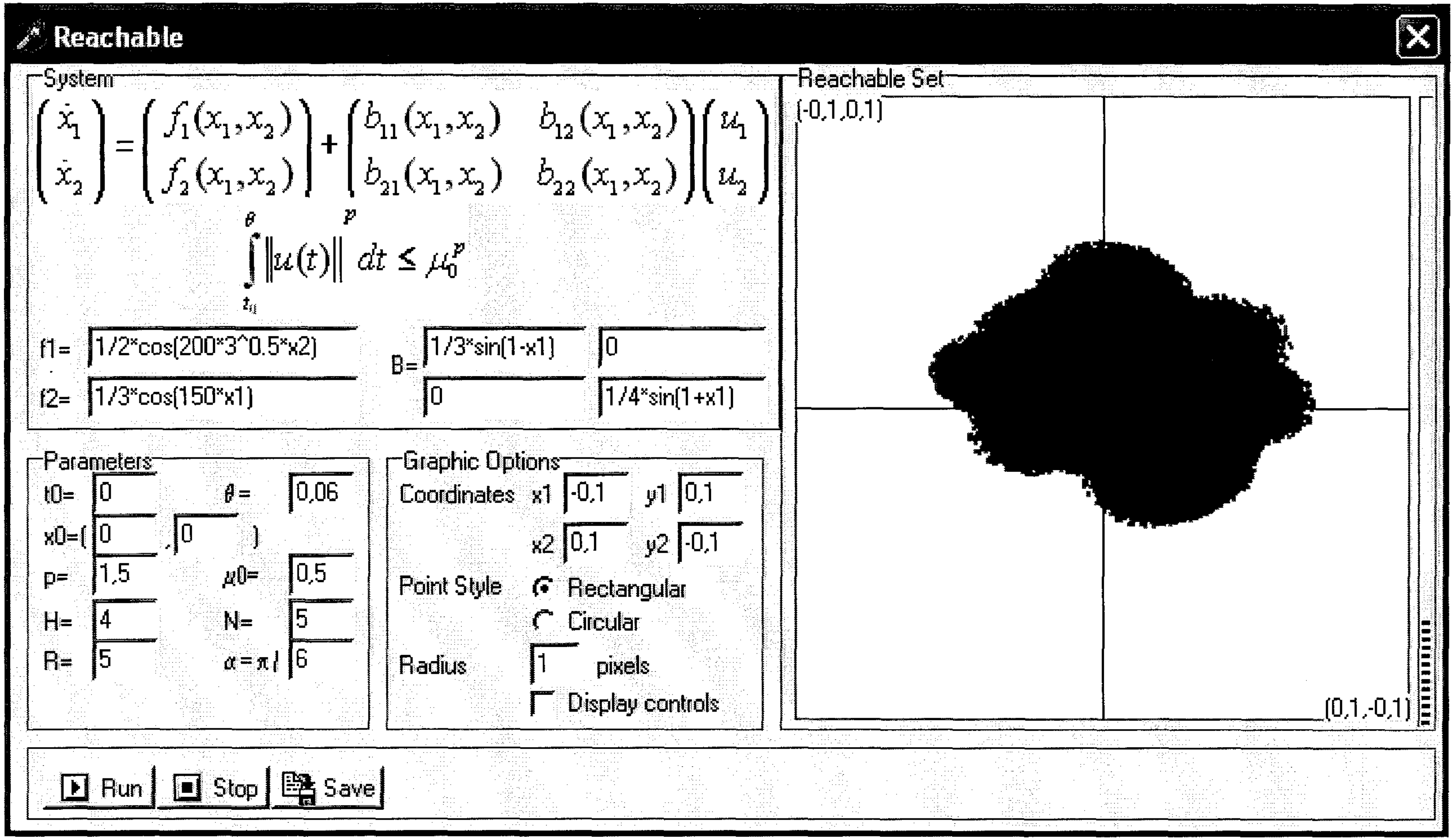
4. bölümde anlatılan algoritma kullanılarak, Borland Delphi programlama dili ile n=m=2 için bir bilgisayar programı yazılmıştır. Sistemin, programa parametre olarak girilebilmesi için "UCalc fast math parser" programı kullanılmıştır [58]. Aşağıda, yazılan bilgisayar programının ekran görüntüsü ve kaynak kodu yer almaktadır.

```
unit Unit1;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Classes, Graphics,
  Controls, Forms, Dialogs,UCalc, ExtCtrls, StdCtrls,
  ComCtrls, Buttons, Math;

type
  TForm1 = class(TForm)
    grpSystem: TGroupBox;
    igmSystem: TImage;
    lblf1: TLabel;
    lblf2: TLabel;
    f1: TEdit;
    f2: TEdit;
    b11: TEdit;
    b12: TEdit;
    b21: TEdit;
    b22: TEdit;
    Label3: TLabel;
    imgConstraint: TImage;
    grpParameters: TGroupBox;
```



Şekil 5.2: Bilgisayar programının ekran görüntüsü

```
grpReachable: TGroupBox;
imgReachable: TImage;
grpOptions: TGroupBox;
grpRun: TGroupBox;
btnRUN: TSpeedButton;
btnSTOP: TSpeedButton;
Label1: TLabel;
Label2: TLabel;
Label4: TLabel;
Label5: TLabel;
Label6: TLabel;
Label7: TLabel;
Label8: TLabel;
Label9: TLabel;
tt0: TEdit;
ttheta: TEdit;
xx01: TEdit;
pp: TEdit;
mmu0: TEdit;
hh: TEdit;
nn: TEdit;
rr: TEdit;
xx02: TEdit;
Label10: TLabel;
Label11: TLabel;
Label12: TLabel;
aalpha: TEdit;
Label13: TLabel;
Label14: TLabel;
RadioButton1: TRadioButton;
RadioButton2: TRadioButton;
```

```
Label15: TLabel;
rrad: TEdit;
Label16: TLabel;
Label17: TLabel;
xx1: TEdit;
Label18: TLabel;
yy1: TEdit;
Label19: TLabel;
xx2: TEdit;
Label20: TLabel;
yy2: TEdit;
Label21: TLabel;
status: TEdit;
Label22: TLabel;
btnSave: TSpeedButton;
SaveDialog: TSaveDialog;
chkDisplay: TCheckBox;
ProgressBar1: TProgressBar;
lstErrors: TListBox;

procedure CartesianPoint(a,b: Extended);
procedure GetParameters(Var Cont : Boolean);
procedure SetArrays;
procedure Euler(var z1,z2: Extended);
procedure IncreaseLeftHandSide(Var Q: Integer);
procedure IncreaseLeftHandSide2(var Q: Integer);
procedure ResetRightHandSize(Q: Integer);
procedure ResetRightHandSize2(Q: Integer);
procedure FormCreate(Sender: TObject);
procedure btnRUNClick(Sender: TObject);
procedure btnSTOPClick(Sender: TObject);
```

```
    procedure InitializeDisplay;
    procedure DisplayyjiStatus;
    procedure StopProgram;

    function IsInequalitySatistied: Boolean;
    function dx(x: Extended): integer;
    function dy(y: Extended): integer;
    procedure btnSaveClick(Sender: TObject);

  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form1                     : TForm1;
  t0,     theta,
  x01,    x02,
  mu0,    sdelta,
  delta, p,
  h,      deltastar,
  alpha, x1,
  x2,     y1,
  y2,     IneRight          : Extended;

  N,R,K,Rad                 : Integer;

  j,l                       : Array of Integer;

  UserEq1,    VariableX1,
```

```
  UserEq2,    VariableX2,
  VariableU1, VariableU2,
  VariableT                : Longint;

  Terminate,Disp,Cont      : Boolean;

implementation

{$R *.DFM}

//-----------------------------------------------------
procedure TForm1.GetParameters(Var Cont : Boolean); begin
  Try
    Cont:=True;
    t0:=StrtoFloat(tt0.text);
    theta:=StrtoFloat(ttheta.text);
    x01:=StrtoFloat(xx01.text);
    x02:=StrtoFloat(xx02.text);
    N:=StrtoInt(nn.text);
    R:=StrtoInt(rr.text);
    p:=StrtoFloat(pp.Text);
    mu0:=StrtoFloat(mmu0.Text);
    H:=StrtoFloat(hh.Text);
    Alpha:=StrtoFloat(aalpha.Text);
    Alpha:=Pi/Alpha;
    Delta:=abs(theta-t0)/N;
    DeltaStar:=H/R;
    K:=Trunc(2*Pi/alpha);
    x1:=StrtoFloat(xx1.Text);
    x2:=StrtoFloat(xx2.Text);
    y1:=StrtoFloat(yy1.Text);
```

```
    y2:=StrtoFloat(yy2.Text);
    rad:=Strtoint(rrad.text);
  except
    on E: EConvertError do
    Begin
      Showmessage('Incorrect parameter');
      Cont:=False;
      exit;
    End;
  End;
end;

//-------------------------------------------------------
// MAIN PROCEDURE
procedure TForm1.btnRUNClick(Sender: TObject); Var
  z1,z2       : Extended;
  I           : Integer;
  Stop,Stop2 : Boolean;
  E1,E2       : String;
  Error       : Longint;
  Save_Cursor:TCursor;
begin

  VariableX1 := ucDefineVariable('x1');
  VariableX2 := ucDefineVariable('x2');
  VariableU1 := ucDefineVariable('u1');
  VariableU2 := ucDefineVariable('u2');
  VariableT  := ucDefineVariable('t');
  E1:=trim(f1.Text) + '+(' + trim(b11.Text) + ')*u1' +
                        '+(' + trim(b12.Text) + ')*u2';
  E2:=trim(f2.Text) + '+(' + trim(b21.Text) + ')*u1' +
```

```
                        '+(' + trim(b22.Text) + ')*u2';
UserEq1 := ucParse(E1);
Error:=ucError;
UserEq2 := ucParse(E2);
if Error=0 then Error:=ucError;
if Error <> 0 then
begin
  Showmessage('Invalid system!');
  exit;
end;

Cont:=True;
GetParameters(Cont);
if not(Cont) then exit;

btnRun.Enabled:=False;

Save_Cursor := Form1.Cursor;
Screen.Cursor := crHourglass;

lstErrors.Items.Clear;

grpsystem.Enabled:=False;
grpparameters.Enabled:=False;
grpoptions.Enabled:=False;

terminate:=false;
Stop:=False;

InitializeDisplay;
SetArrays;
```

```
IneRight:=(Power(mu0,p)/(Delta*Power(deltastar,p)));

While Not Stop do
Begin
  progressbar1.Position:=progressbar1.Position+1;
  application.ProcessMessages;

  If j[N-1]<>R Then
    j[N-1]:=j[N-1]+1
  Else
  Begin
    IncreaseLeftHandSide(i);
    ResetRightHandSize(i);
  End;

  If IsInequalitySatistied Then
  Begin
    Stop2:=False;
    While Not Stop2 do
    Begin

      If l[N-1]<>K Then
      Begin
        l[N-1]:=l[N-1]+1;
      End
      Else
      Begin
        IncreaseLeftHandSide2(i);
        ResetRightHandSize2(i);
      End;
```

```
    If Disp then DisplayyjiStatus;

    if Terminate then
    Begin
      StopProgram;
      ucReleaseExpr;
      Screen.Cursor := Save_Cursor;
      exit;
    End;

    Euler(z1,z2);
    CartesianPoint(z1,z2);

    //Exit if all li=K
    Stop2:=True;
    For I:=0 to N-1 do If l[I]<>K Then Stop2:=False;

  End; //While Not Stop2

  ResetRightHandSize2(-1);

End //InequalitySatistied
Else
Begin
  IncreaseLeftHandSide(i);
  ResetRightHandSize(i);
End;

//Exit if all yji=R
Stop:=True;
```

```
    For I:=0 to N-1 do If j[i]<>R Then Stop:=False;
    imgreachable.Update;

  End; //While Not Stop do

  grpsystem.Enabled:=True;
  grpparameters.Enabled:=True;
  grpoptions.Enabled:=True;
  progressbar1.Position:=0;
  Screen.Cursor := Save_Cursor;
  showmessage('Computation completed!');
  progressbar1.Position:=progressbar1.max;
  btnRun.Enabled:=true;
  ucReleaseExpr;
end;

//-------------------------------------------------------
procedure TForm1.SetArrays; Var I:Integer; begin
  SetLength(j, N+1);
  SetLength(l,N+1);

  For i:=0 to N-1 do
  Begin
    j[i]:=0;
    l[i]:=0;
  End;
  j[N-1]:=-1;
  l[N-1]:=-1;
end;

//-------------------------------------------------------
```

```
procedure TForm1.ResetRightHandSize(Q: Integer); Var i : Integer;
begin
  For i:=Q+1 to N-1 do
    j[i]:=0;
end;

//----------------------------------------------------
procedure TForm1.ResetRightHandSize2(Q: Integer); Var i : Integer;
begin
  For i:=Q+1 to N-1 do
  Begin
    l[i]:=0;
  End;
end;

//----------------------------------------------------
function TForm1.IsInequalitySatistied: Boolean;
  Var I  : Integer;
      Sm : Extended;
      A  : Extended;
begin
  IsInequalitySatistied:=True;
  Sm:=0;
  For I:=0 to N-1 do
  Begin
    A:=Power(j[i],P);
    Sm:=Sm+A;
  End;
  If Sm>IneRight Then
    IsInequalitySatistied:=False;
end;
```

```
//---------------------------------------------------------
procedure TForm1.IncreaseLeftHandSide2(var Q: Integer); Var I :
Integer; begin
  For i:=(N-2) downto 0 do
    If l[i]<>K Then
    Begin
      l[i]:=l[i]+1;
      Q:=i;
      Break;
    End;
end;

//---------------------------------------------------------
procedure TForm1.IncreaseLeftHandSide(var Q: Integer); Var I :
Integer; begin
  For i:=(N-2) downto 0 do
    If j[i]<>R Then
    Begin
      j[i]:=j[i]+1;
      Q:=i;
      Break;
    End;
end;

//---------------------------------------------------------
procedure TForm1.Euler(var z1, z2: Extended);
  Var i   : Integer;
      t   : Extended;
      E   : Longint;
begin
```

```
  z1:=x01;
  z2:=x02;
  E:=0;
  For I:=0 to N-1 do
  Begin
    t:=t0+i*Delta;
    ucSetVariableValue(VariableT, t);
    ucSetVariableValue(VariableX1, z1);
    ucSetVariableValue(VariableX2, z2);
    ucSetVariableValue(VariableU1, j[i]*DeltaStar*cos(l[i]*alpha));
    ucSetVariableValue(VariableU2, j[i]*DeltaStar*sin(l[i]*alpha));

    z1:=z1+Delta*ucEvaluate(UserEq1);
    z2:=z2+Delta*ucEvaluate(UserEq2);
    if ucGetError <> 0 then
      lstErrors.Items.add('x1='+floattostr(z1) + '  x2=' +
                          floattostr(z2) + ' ' + ucErrorMessage);
    UcSetError:=0;
  End;
end;

//-------------------------------------------------------
procedure TForm1.CartesianPoint(a, b: Extended); var
  x,y : Integer;
begin
  x:=dx(a);
  y:=dy(b);
  if RadioButton1.Checked then
    imgReachable.Canvas.Rectangle(x-rad,y-rad,x+rad,y+rad)
  else
    imgReachable.Canvas.Ellipse(x-rad,y-rad,x+rad,y+rad);
```

```
end;

//-------------------------------------------------------
function TForm1.dx(x: Extended): integer; begin
  dx:=Round((imgReachable.ClientWidth/(x2-x1))*(x-x1));
end;

//-------------------------------------------------------
function TForm1.dy(y: Extended): integer; begin
  dy:=Round((imgReachable.ClientHeight/(y2-y1))*(y-y1));
end;

//-------------------------------------------------------
procedure TForm1.InitializeDisplay; Var
  txt : string;
  i,j : Integer;
begin
  With ImgReachable do
  Begin
    Canvas.brush.Color:=rgb(255,255,255);
    Canvas.brush.style := bsSolid;
    canvas.Rectangle(0,0,width,height);

    //Eksenler Cizdiriliyor...
    Canvas.Pen.Color:=rgb(0,0,0);
    canvas.MoveTo(dx(x1),dy(0));
    canvas.lineto(dx(x2),dy(0));
    canvas.MoveTo(dx(0),dy(y1));
    canvas.lineto(dx(0),dy(y2));

    //Sol ust ve Sag alt in koordinatlari yazdiriliyor...
```

```
    Canvas.Pen.Color:=rgb(255,0,0);
    txt:='('+FloattoStr(x1) +','+FloattoStr(x2)+')';
    canvas.TextOut(0,0,txt);
    txt:='('+FloattoStr(y1) +','+FloattoStr(y2)+')';
    i:=canvas.TextWidth(txt);
    j:=canvas.TextHeight(txt);
    canvas.TextOut(width-i,height-j,txt);

    Canvas.brush.color:=Canvas.Pen.Color;
  End;

  progressbar1.min:=0;
  progressbar1.Position:=0;
  progressbar1.max:=Trunc(Power(R+1,N));

  Disp:=chkdisplay.Checked;
end;

//-------------------------------------------------------
procedure TForm1.DisplayyjiStatus; Var
  ss,aa :String;
  I     :Integer;
begin
  ss:='';
  aa:='';
  For I:=0 to N-1 do
  begin
    Ss:=Ss + ' ' + InttoStr(j[I]);
    aa:=aa + ' ' + InttoStr(l[I]);
  end;
  status.Text:=ss + '   ' + aa;
```

```
  status.Update;
end;

//---------------------------------------------------------
procedure TForm1.btnSTOPClick(Sender: TObject); begin
  Terminate:=True;
end;

//---------------------------------------------------------
procedure TForm1.btnSaveClick(Sender: TObject); begin
  SaveDialog.FileName:='';
  SaveDialog.Execute;
  if SaveDialog.FileName<>'' Then
  Begin
    imgReachable.Picture.SaveToFile(SaveDialog.FileName);
  End;
end;

//---------------------------------------------------------
procedure TForm1.StopProgram; begin
      grpsystem.Enabled:=True;
      grpparameters.Enabled:=True;
      grpoptions.Enabled:=True;
      progressbar1.Position:=0;
      showmessage('Warning, computation interrupted!');
      btnRun.Enabled:=true;
end;

end.
```