

104492

**DÜĞÜM GRUPLARININ
SU(2) TEMSİLLERİ**

Tangül UYGUR
Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Ağustos – 2002

"Bu tez çalışması Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonunca kabul edilen 011078 nolu proje kapsamında desteklenmiştir."

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Tangül Uygur'un Dügüm Gruplarının SU(2) Temsilleri başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Doktora tezi 02.08.2002 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç. Dr. Hüseyin Azcan	
Üye	: Prof. Dr. Turgut Önder	
Üye	: Prof. Dr. Orhan Özer	
Üye	: Doç. Dr. Mustafa Korkmaz	
Üye	: Doç. Dr. Zekeriya Arvasi	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun **.7.8.2022.** tarih ve **.274....** sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Orhan ÖZER
Fen Bilimleri Enstitüsü
Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

DÜĞÜM GRUPLARININ SU(2) TEMSİLLERİ

TANGÜL UYGUR

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Hüseyin AZCAN

2002, 73 sayfa

Bu çalışmada bazı düğüm gruplarının (indirgenemez) SU(2) temsillerinin uzayının topolojik tipi karakterize edilmiştir. Genel bir düğüm grubu için ve özelde iki köprülü düğümler için yapısı hakkında henüz hiç bir şey söylenemeyen bu temsil uzayının, n bir tek tamsayı olmak üzere n tamsayı düğümler için $\Delta(-1)$ düğümün Alexander polinomunun -1 deki değeri olmak üzere $\frac{\Delta(-1)-1}{2}$ tane açık yayın ayrık birleşimi olduğu gösterilmiştir. Daha sonra $(2,n)$ tipindeki bir iki köprülü düğümün grubunun SU(2) temsil uzayının topolojik tipi karakterize edilmiş ve bu uzayın n pozitif tamsayısının tek olması durumunda bir açık yay ve $\frac{n-1}{2}$ tane çemberin ayrık birleşimi ve n pozitif tamsayısının çift olması durumunda ise $\frac{n}{2}$ tane çemberin ayrık birleşimi olduğu gösterilmiştir. Bu kuruluşlar sırasında temsil uzayının öğelerinin inşaa edilmiş yöntemleri detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Düğüm grubu, düğüm gruplarının SU(2) temsilleri, küresel geometri.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SU(2) REPRESENTATIONS OF KNOT GROUPS

TANGÜL UYGUR

Anadolu University

Graduate School of Natural and Applied Sciences,
Mathematics Program

Supervisor: Assoc. Prof. Hüseyin AZCAN

2002,73 Pages

In this study, the characterization of the topological type of the irreducible SU(2) representations of a particular class of knot groups was undertaken. To the best of our knowledge, there is no study so far towards the structure of SU(2) representation space of the knot groups in general, the two bridge knots in particular. Here, in this thesis, it was shown that the representation space of an n tangle where n is an odd integer is disjoint union of $\frac{\Delta(-1)-1}{2}$ arcs where $\Delta(-1)$ is the Alexander polynomial of the knot evaluated at -1 . Later, a characterization of the topology of the space of representation of a 2-bridge knot of type $(2,n)$ was given. It was also shown that this space is the disjoint union of an open arc and $\frac{n-1}{2}$ circles when n is an odd integer whereas it is the disjoint union of $\frac{n}{2}$ circles when n is an even integer. While constructing the elements of the representation space, a detailed exposition of the method was also given.

Keywords: The knot group, SU(2) representation of the knot group, spherical geometry.

TEŐEKKÜR

Öncelikle yaşamımın her anında olduğu gibi, doktora alışmam boyunca da benden hibir desteklerini esirgemeyen annem Őükran, babam Tarık ve kardeşim Zeki Uygur'a minnet borcumu belirtmek isterim.

Öđrencisi olmaktan her zaman onur duyduğum danışmanım Hüseyin Azcan'a verdiği destekten dolayı teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca alışmalarım boyunca yanımda olan anabilim dalı başkanım Aynur Özdař'a ve başta oda arkadaşım Dilek Tanışlı olmak üzere tüm arkadaşlarıma teőekkürü bir bor bilirim.

İçindekiler

Şekiller Dizini	v
1 GİRİŞ	1
1.1 Düğüm Tanımı ve Düğümlerin Denkleği	2
1.2 Düzlem İzdüşüm	3
1.2.1 Reidemeister Hareketleri	5
1.3 Düğüm Grubu	6
2 KÜRESEL GEOMETRİ VE KUATERNİONLAR	13
2.1 S^2 Üzerinde Geometri	13
2.1.1 S^2 nin Metrik Yapısı	13
2.1.2 Küresel Trigonometri	18
2.2 Kuaternionlar	21
2.3 S^3 Üzerinde Geometri	26
2.3.1 S^3 de Eşlenik Sınıfları	27
3 n-TAMSAYI DÜĞÜMLERİN SU(2) TEMSİLLERİ	31
3.1 Genel Kavramlar	31
3.2 Özel Bir SU(2) Temsil: Çember Temsiller	32
3.3 n-Tamsayı Düğümler ve SU(2) Temsillerin Kuruluşu	33
3.3.1 Temsil Uzayı	40
4 $(2, n)$ TİPİNDEKİ İKİ KÖPRÜLÜ DÜĞÜMLERİN SU(2) TEMSİLLERİ UZAYI	42
4.1 Başlangıç Örneği	42
Kaynakça	73

Şekiller Dizini

1.1	Koşullara uymayan iki izdüşüm	4
1.2	Alttan-üstten geçiş bilgisi	5
1.3	Reidemeister hareketleri	5
1.4	Alttan geçişleri düzleme indirilmiş yonca yaprağı	7
1.5	Yonca yaprağı düğümü ve temel grubunun üreteçleri	7
1.6	Üstten geçmeler altındaki duvarlar	8
1.7	Alttan geçişleri düzleme indirilmiş bir kavşak	9
1.8	Bir kavşak noktasındaki meridyenel üreteçler.	10
1.9	Sekiz şekli düğümü diyagramı.	12
2.1	Kürede verilen iki noktanın belirlediği doğru	15
2.2	Kürede bir doğru ve kutup noktası	15
2.3	Küre üzerinde paralellik yoktur	16
2.4	İki nokta ve belirledikleri doğrunun kutup noktası	17
2.5	Küre üzerinde dik doğrular	17
2.6	Küresel bir üçgen	19
2.7	-1 ve +1 merkezli küreler.	27
2.8	$S_{\frac{\pi}{2}}^2$ de f_X fonksiyonu.	29
3.1	n tamsayı düğüm diyagramı	34
3.2	n -tamsayı düğüm grubunun temsilinin $S_{\frac{\pi}{2}}^2$ deki konfigürasyonu.	36
3.3	Çember temsilini oluşturan noktaların elde edilişi.	37
3.4	$S_{\frac{\pi}{2}}^2$ konfigürasyonundaki eş ikizkenar üçgenler.	38
4.1	(2,3) iki köprülü düğümü	43
4.2	(2,3) düğümü için elde edilen dişli.	43
4.3	(2,3) düğümünün üreteçlerinin tamamel sanal kuaternion konfigürasyonu.	44
4.4	$[y_2, y_5]$ ve $[y'_2, y'_5]$ doğrularının arakesiti.	45
4.5	Gerek koşulu veren üçgenler.	46
4.6	$f(x) = \frac{\sin 7x}{\sin x}$ fonksiyonunun grafiği.	48
4.7	(2,3) düğümünün bir çember temsili.	49
4.8	(2,3) düğümü için çember temsilinden küre konfigürasyonuna geçiş.	50
4.9	Yeter koşulu veren üçgenler.	51
4.10	S_{α}^2 temsilinin konfigürasyonu.	54
4.11	(2,2) düğümü diyagramı.	55

4.12	(2,2) düğümünden elde edilen dışli.	56
4.13	(2,2) düğümü için konfigürasyonun küre yüzeyindeki görüntüsü. . . .	56
4.14	(2,2) düğümünün üreteçlerinin tamamen sanal kuaternion konfigürasyonu.	57
4.15	(2,2) düğümü için gerek koşulu veren üçgenler.	57
4.16	(2,2) düğümünün bir çember temsili.	59
4.17	$f(x) = \frac{\sin 5x}{\sin x}$ fonksiyonunun grafiği	59
4.18	$o_1y_1y_4$ üçgeni.	61
4.19	$o_1y_4y_4$ üçgeni.	61
4.20	(2,2) düğümü için yeter koşulu veren üçgenler.	62
4.21	Sırasıyla $n \in 2\mathbb{Z}$ ve $n \in 2\mathbb{Z}+1$ için (2,n) düğüm diyagramları.	64
4.22	$n \in 2\mathbb{Z} + 1$ için (2,n) düğümünün üreteçlerinin tamamen sanal kısımlarının konfigürasyonu.	66
4.23	(2,n) ($n \in 2\mathbb{Z} + 1$) düğümü için gerek koşulu veren üçgenler.	66
4.24	(2,n) ($n \in 2\mathbb{Z}+1$) düğümü için çember temsilinden S_α^2 konfigürasyonuna geçiş.	68
4.25	(2,n) ($n \in 2\mathbb{Z}+1$) düğümü için yeter koşulu veren üçgenler.	68
4.26	(2,n) ($n \in 2\mathbb{Z}$) düğümü konfigürasyonu.	69
4.27	S_α^2 ve $S_{\pi-\alpha}^2$ konfigürasyonları.	70
4.28	Temsil uzayı.	72

Bölüm 1

GİRİŞ

Bu çalışmada iki özel düğüm sınıfının gruplarının indirgenemez $SU(2)$ temsilleri incelenmektedir. Grubunun indirgenemez $SU(2)$ temsilleri uzayının topolojik yapısının karakterize edildiği bu düğüm sınıflarından ilki n bir tek pozitif tamsayı olmak üzere n tamsayı düğümlerdir. Dördüncü bölümde yer verilen bu karakterizasyon sonucuna göre bir n tamsayı düğümünün grubunun indirgenemez $SU(2)$ temsilleri uzayı $SO(3)$ denklik altında $\frac{n-1}{2}$ tane açık yayın (açık aralık) ayrık birleşimidir. Bu uzay n tamsayı düğümlerinin $(2, n)$ torus düğümü olması açısından Burde[1] tarafından da tamamen cebirsel yöntemlerle incelenmiştir. İndirgenemez $SU(2)$ temsilleri uzayı karakterize edilen bir diğer düğüm sınıfı $(2, n)$ tipindeki iki köprülü düğümlerdir ve bu karakterizasyon ise beşinci bölümde yapılmıştır. $(2, n)$ tipindeki iki köprülü düğümlerin indirgenemez $SU(2)$ temsilleri uzayının elemanlarının inşasında kullanılan yöntem, n tamsayı düğümlerin gruplarının $SU(2)$ temsilleri uzayının elemanlarının inşasında kullanılan yöntem ile prensipte benzerdir. Sonuç olarak n bir tek pozitif tamsayı ise $(2, n)$ tipindeki düğümün grubunun $SU(2)$ temsilleri uzayı $SO(3)$ denklik altında $\frac{n-1}{2}$ tane çember ile bir açık yayın ayrık birleşimi ve eğer n bir çift pozitif tamsayı ise $\frac{n}{2}$ tane çemberin ayrık birleşimi olduğu gösterilmiştir. $(2, n)$ tipindeki düğümün grubunun $SU(2)$ temsilleri uzayı kısmen Riley [2] ve tamamen Klassen[3] tarafından da incelenmiştir. Riley'in yöntemi bu tezde kullanılan yöntemden ve Klassen'in yönteminden tamamen farklıdır. Klassen'in kullandığı yöntem ile bu çalışmada kullanılan yöntem geometriktirler. Genel bir iki köprülü düğümün grubunun $SU(2)$ temsilleri uzayının karakterizasyonu ise henüz yapılmamıştır.

1.1 Dügüm Tanımı ve Dügümlerin Denkliği

Kaba anlamda topoloji adına manifold dediğimiz yerel olarak \mathbb{R}^n ye homeomorf nesnelerin homeomorf olma denklik bağıntısına göre sınıflandırılmasını amaçlayan bir matematik dalıdır. Yani temel problem, “verilen iki manifold arasında bir homeomorfizm var mıdır” sorusunun yanıtlanmasıdır. Fakat bu problem düşük boyutlarda (3 ya da 4) bile çözüm bulamamıştır. Benzer soru manifold çiftleri için de sorulabilir; yani X_1, X_2 iki manifold ve Y_1, Y_2 sırasıyla bu manifoldların alt manifoldları olmak üzere (X_1, Y_1) çiftinin (X_2, Y_2) çiftine homeomorf olup olmadığı sorusu anlamlıdır. Dügüm kuramı da bu anlamda manifold çiftlerinin topolojisi olarak düşünülebilir. Tam olarak klasik düğüm kuramı (S^3, S^1) çiftlerinin topolojisidir. Kuramın açık genellemesi ise $(S^3, S^1 \sqcup S^1 \dots \sqcup S^1)$ çiftlerinin topolojisidir, bu ise klasik linkler olarak adlandırılır. Şimdi bu kavramları daha detaylı görelim.

S^1 kompakt ve S^3 Hausdorff olduğundan, S^1 den S^3 e bire-bir, sürekli bir dönüşüm görüntüsüne kısıtlandığında bir homeomorfizmdir. Dolayısıyla S^3 de bir düğüm

$$k : S^1 \longrightarrow S^3$$

bire-bir, sürekli dönüşümü olarak göz önüne alınabilir.

Bir $k : S^1 \hookrightarrow S^3$ gömülmesi için, S^1 birim çemberinin k altındaki $k(S^1) \subset S^3$ görüntüsü tek türlü belli olduğundan, düğümü gömülme dönüşümü ya da $k(S^1)$ görüntüsü olarak alabiliriz. Biz aksi belirtilmedikçe düğümü, S^1 in bir $k : S^1 \hookrightarrow S^3$ gömülmesi altında S^3 deki $k(S^1)$ görüntüsü olarak ele alacağız ve k ile göstereceğiz. k_1 ve k_2 , S^3 de iki düğüm olmak üzere $f(k_1) = f(k_2)$ olacak şekilde bir

$$f : S^3 \longrightarrow S^3$$

homeomorfizmi varsa bu iki düğümüne denk ve bu denkliğe **gömülme denkliği** diyelim. k_1 ve k_2 , denk iki düğüm ise $f(k_1) = f(k_2)$ eşitliğini sağlayan $f : S^3 \longrightarrow S^3$ homeomorfizmi için

$$f(S^3 - k_1) = f(S^3 - k_2)$$

olacağından $S^3 - k_1$ uzayı $S^3 - k_2$ uzayına homeomorf olur. O halde k_1 ve k_2 gibi iki düğüm için $S^3 - k_1$ uzayı $S^3 - k_2$ uzayına homeomorf değilse k_1 düğümü ile k_2 düğümü denk olamayacağından, iki düğümün denklik problemi iki uzayın homeomorf olup olmama problemine dönüşür [4].

Düğüm için daha katı denklikler de vermek olasıdır: S^3 deki k_1 ve k_2 gibi iki düğüm için bir

$$\begin{aligned} F : S^3 \times [0, 1] &\rightarrow S^3 \\ (x, t) &\rightarrow F(x, t) = F_t(x) \end{aligned}$$

sürekli dönüşümü varsa öyle ki her $t \in [0, 1]$ için

$$F_t : S^3 \rightarrow S^3$$

bir homeomorfizm ve $F_0 = 1_{S^3}$, $F_1(k_1) = k_2$ oluyorsa k_1 düğümü k_2 düğümüne ambient isotop diyelim. Açık olarak ambient isotop olma S^3 deki düğümlerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Bu durumda düğümler üzerinde iki denklik tanımlanmış oldu. Bunlardan ilki bilinen topolojik uzay çiftlerinin (S^3, k) denkliğinden başka birşey değildir. Fakat diğer denklik (en azından \mathbb{R}^3 de) daha motive edici ve doğaldır. Ambient isotopi anlamında denklikde S^3 ün bir isotopisi (seviye koruyan homeomorfizmi) yardımıyla k_1 düğümü k_2 ye resmedilir. Apaçık olarak iki düğüm ambient isotop iseler bu iki düğüm gömülme anlamında da denktir. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir. Ancak bu iki denklik S^3 de denk kavramlardır [5].

1.2 Düzlem İzdüşüm

S^3 den bir nokta çıkarttığımızda elde ettiğimiz uzay \mathbb{R}^3 e homeomorf olduğundan S^3 den düğüm üzerinde olmayan bir noktayı çıkartarak düğümü S^1 in \mathbb{R}^3 deki görüntüsü olarak alabiliriz. $N = (0, 0, 0, 1) \notin k$ olsun. Eğer $N \in k$ ise S^3 ün bir izotopisi ile bunu sağlayabiliriz.

$$k : S^1 \rightarrow S^3$$

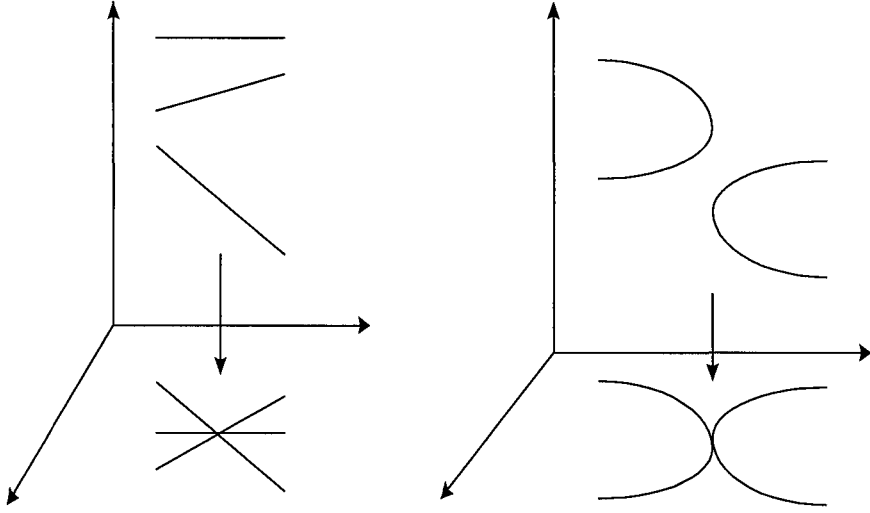
bir gömülme ve

$$\begin{aligned} i : S^3 - \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\rightarrow \frac{1}{1-x_4} (x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

steografik izdüşüm olmak üzere

$$i \circ k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

bir gömülmedir.



Şekil 1.1: Koşullara uymayan iki izdüşüm

\mathbb{R}^3 deki bir düğümü görsel bir hale getirmenin en iyi yolu düzleme izdüşürmektir. \mathbb{R}^3 deki bir düğümü,

$$\begin{aligned} \Pi_3 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x, y) \end{aligned}$$

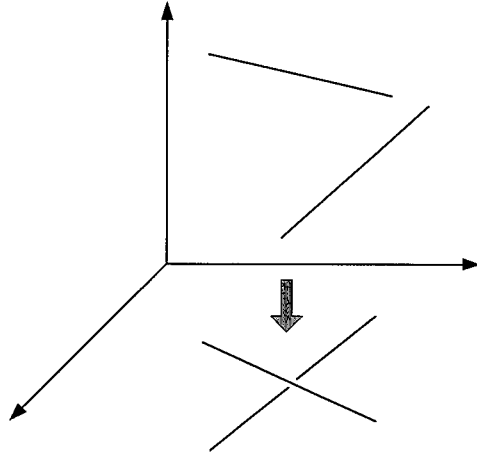
izdüşüm fonksiyonu ile düzleme izdüşürelim.

Düğümü izdüşürdüğümüzde düzlemde elde ettiğimiz eğri üzerindeki bir P noktasının $\Pi_3^{-1}(P)$ ters görüntüsü düğüm üzerinde birbirinden farklı birden fazla noktadan oluşuyorsa bu P noktasına singüler nokta diyelim.

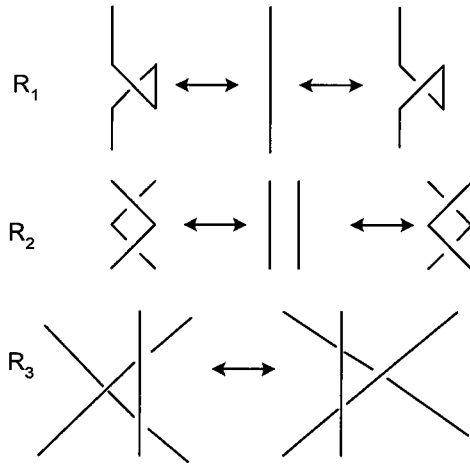
\mathbb{R}^3 deki bir k düğümünün Π_3 izdüşüm fonksiyonu altında aşağıdaki koşulları sağlayan görüntüsüne **düğüm diyagramı** denilir.

- Düğümün Π_3 altındaki görüntüsü sonlu tane singüler noktaya sahip ve bu singüler noktalar yalnızca ikili nokta olsun yani P bir singüler nokta ise $\Pi_3^{-1}(P)$ iki noktadan oluşsun. Ayrıca Şekil (1.1) de görüldüğü gibi ikili noktaların oluşmamasını sağlayalım.
- Düğümü düzleme izdüşürürken Şekil (1.2) de olduğu gibi alttan ve üstten geçiş bilgisini verelim.

Bu koşulları sağlayan bir izdüşümü, \mathbb{R}^3 de, düğümde yapabileceğimiz yerel hareketlerle sağlayabiliriz.



Şekil 1.2: Alttan-üstten geçiş bilgisi



Şekil 1.3: Reidemeister hareketleri

1.2.1 Reidemeister Hareketleri

Bir düğüm diyagramında yerel olarak yapılan Şekil (1.3) de gösterilen hareketlere Reidemeister hareketleri denir.

İki düğüm diyagramından biri diğerinden Reidemeister hareketlerinin sonlu bir dizisi ile elde edilebiliyorsa bu iki düğüm diyagramına denk denir.

Reidemeister hareketlerinin önemi aşağıda verilen teoremden özetlenmiştir. Bu teorem düğümlerin S^3 deki teorisini kombinatoriyel hale getirir [5].

TEOREM 1 (REIDEMEISTER) *İki düğüm denk olması için gerekli ve yeterli koşul denk diyagramlara sahip olmalarıdır.*

1.3 Dügüm Grubu

Bu alt bölümde tezde kullanılan en önemli kavramlardan biri olan düğüm grubunun inşasına yer verilecektir. S^3 de verilen bir k düğümünün grubundan kastımız $S^3 - k$ manifoldunun temel grubudur.

k , S^3 de bir düğüm ve x de düğüm üzerinde olmayan S^3 ün bir elemanı olsun. Bu x noktasının k ile arakesiti boş olan ve \mathbb{R}^3 e homeomorf olan herhangi bir U komşuluğunu alalım. Ayrıca $V = S^3 - \{x\}$ olsun. Bu durumda $\Pi_1(U \cap V)$ temel grubunun aşikar grup olduğu açıktır. $S^3 - k = U \cup (V - k)$ olduğundan $S^3 - k$ uzayının temel grubunun hesabı için Van Kampen teoremi [6] uygulanırsa

$$\Pi_1(U) \cong \Pi_1(U \cap (V - k)) \cong \{e\}$$

olduğundan

$$\Pi_1(S^3 - k) \cong \Pi_1(V - k)$$

elde edilir. $V = S^3 - \{x\} \cong \mathbb{R}^3$ oluşu göz önüne alınır

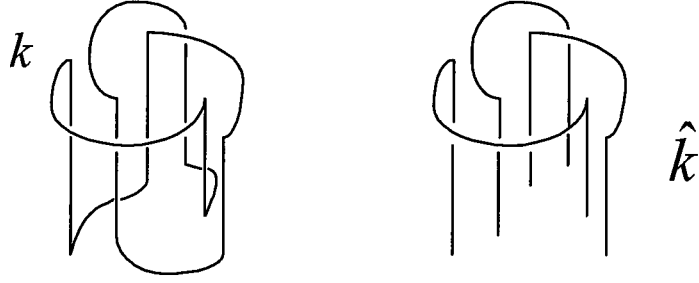
$$\Pi_1(V - k) \cong \Pi_1(\mathbb{R}^3 - k)$$

yani

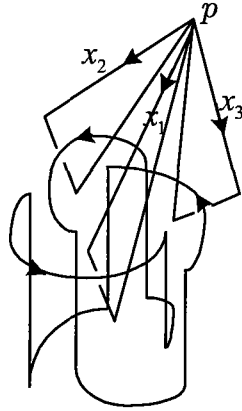
$$\Pi_1(S^3 - k) \cong \Pi_1(\mathbb{R}^3 - k)$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda $\Pi_1(\mathbb{R}^3 - k)$ yı hesaplayabiliriz. O halde $k \subseteq \mathbb{R}^3$ olsun. Varsayalım k düğümü $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$ üst yarı uzayında olsun. Düğümde iki kavşak noktası arasında kalan yay parçasına üstten geçiş diyelim ve k düğümünde her bir üstten geçmenin uç noktasını $z = 0$ düzlemine dik doğru ile birleştirelim ve alttan geçmeyi $z = 0$ düzlemine indirelim. Bunu görme kolaylığı açısından Şekil (1.4) olduğu gibi trefoil düğümü ile örnekleyelim.

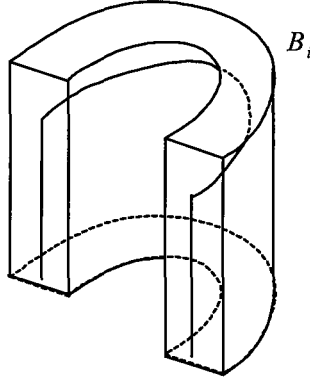
Elde ettiğimiz bu düğümün orijinal k düğümüne denk olduğu açıktır , bu düğümü de k ile gösterebiliriz. Şimdi $\mathbb{R}^3 - k$ uzayının temel grubunu Van Kampen teoremini uygulayarak hesaplayabilmek için temel gruplarını tanıdığımız parçalara ayırmaya çalışalım. k düğümünü yönlendirelim ve düğüm üzerindeki her (x, y, z) noktası için $z_1 > z$ olacak biçimde bir $p = (x_1, y_1, z_1)$ taban noktası seçelim. Her bir üstten geçiş için Şekil (1.5) de görüldüğü gibi p taban noktalı basit kapalı eğrileri göz önüne alalım. Bu basit kapalı eğrilere $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ diyelim ve $\Pi_1(\mathbb{R}_+^3 - k)$ da α_i nin homotopi sınıfını x_i ile gösterebiliriz.



Şekil 1.4: Alttan geçişleri düzleme indirilmiş yonca yaprağı



Şekil 1.5: Yonca yaprağı düğümü ve temel grubunun üreteçleri



Şekil 1.6: Üstten geçmeler altındaki duvarlar

YARDIMCI TEOREM 2 $\Pi_1(\mathbb{R}_+^3 - k, p)$, x_1, \dots, x_n ile üretilen serbest gruptur.

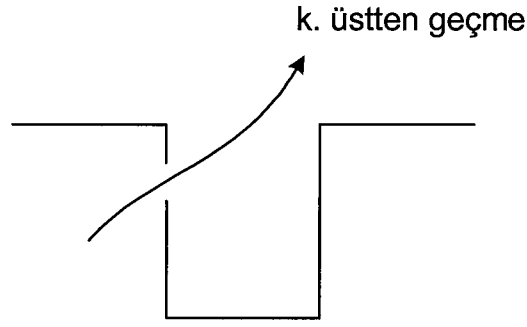
KANIT. \widehat{k} kümesi k nın üstten geçmelerinin ve bu üstten geçişleri $z = 0$ düzlemine birleştiren doğru parçalarının birleşimi olarak tanımlansın.

$\mathbb{R}_+^3 - k$ uzayı ile $\mathbb{R}_+^3 - \widehat{k}$ uzayını karşılaştıracak olursak $\mathbb{R}_+^3 - k$ uzayının alt yüzeyinde oluklar vardır. $\mathbb{R}_+^3 - \widehat{k}$ uzayında bu oluklar olmamasına karşın bu iki uzayın homotopi tipleri, dolayısıyla temel grupları aynıdır (homeomorf değildir). Elde edilen bu \widehat{k} da her bir üstten geçiş için $z = 0$ düzlemine kadar bir duvar oluşturalım ve bu duvarı birbirlerinden ayrık olacak biçimde kalınlaştıralım.

Bu durumda her bir üstten geçmenin altında 3-boyutlu diske homeomorf olan bir duvar elde edilir. Bu duvarlara B_1, \dots, B_n diyelim.

Şimdi \mathbb{R}_+^3 uzayından her i için B_i duvarının içini ve $B_i \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 \mid z = 0\}$ kümesini çıkaralım. Geriye kalan uzaya X dersek bu uzay \mathbb{R}_+^3 dan $z = 0$ düzlemi tarafında n tana yarı kürenin çıkarılıp kapanışının alınmasıdır. Başka bir deyişle \mathbb{R}_+^3 uzayına homeomorfdur. Şimdi sıra ile bu yarı küre boşluklarını Van Kampen teoremini uygulayarak $\Pi_1(\mathbb{R}_+^3 - k)$ grubunu hesaplayacak şekilde $B_i - \widehat{k}$ lar ile dolduralım. Aşıkarak $B_i - \widehat{k}$ bir çembere homotop olduğundan temel grubu $\mathbb{Z} = \langle x_i \mid - \rangle$ dir ve $B_i - \widehat{k}$ nın X ile arakesiti bir yarı küre yüzeyi yani bir diskdir. Dolayısıyla $\Pi_1(X \cap (B_i - \widehat{k})) = \{e\}$ dir. O halde Van Kampen teoremi uygulanırsa

$$\Pi_1(X \cup (B_1 - \widehat{k})) = \langle x_1 \mid - \rangle$$



Şekil 1.7: Alttan geçişleri düzleme indirilmiş bir kavşak

olur. Devam olarak indüksiyonla

$$\Pi_1 \left(X \cup (B_1 - \hat{k}) \cup (B_2 - \hat{k}) \cup \dots \cup (B_n - \hat{k}) \right) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid - \rangle$$

olduğu görülür. Böylece

$$X \cup (B_1 - \hat{k}) \cup (B_2 - \hat{k}) \cup \dots \cup (B_n - \hat{k}) = \mathbb{R}_+^3 - \hat{k}$$

olduğundan

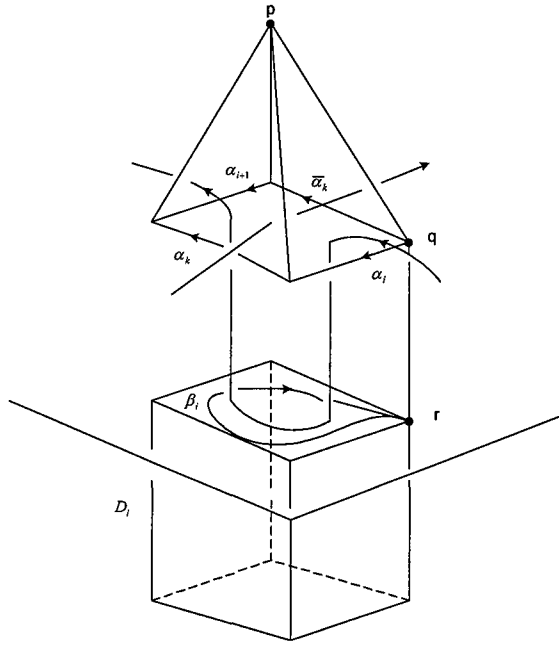
$$\Pi_1 \left(\mathbb{R}_+^3 - \hat{k} \right) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid - \rangle$$

sonucuna ulaşılır. ■

Şimdi düğüm diyagramında i . ve $(i + 1)$. üstten geçişi arasında bulunan alttan geçişe bakalım ve varsayalım ki k . üstten geçiş bu alttan geçişin üzerinde bulunsun.

α_i ve α_{i+1} kapalı eğrilerini kavşak noktasına yaklaştıralım ve alttan geçişin karşılıklı iki tarafında bulunan ve her ikisi de x_k denklik sınıfında olan $\alpha_k, \overline{\alpha_k}$ kapalı eğrilerini alalım. Bundan sonra alttan geçişin izdüşümünü \mathbb{R}_+^3 de 3-boyutlu D_i diskinde homeomorf olacak biçimde kalınlaştıralım ve $D_i - k$ yı $\mathbb{R}_+^3 - k$ ya eklediğimizi düşünelim.

q ve r noktaları Şekil(1.8) de görüldüğü gibi olmak üzere tüm basit kapalı eğrileri p taban noktasında alabilmek için D_i ye, p yi q ya ve sonra q yu r noktasına birleştiren yolu ekleyelim. Açıkça $D_i - k$ basit bağlantılıdır. Arakesit yüzeyinde aşıkâr olmayan bir eleman olan $[\beta_i]$ sınıfı \mathbb{R}_+^3 da $x_i x_k x_{i+1}^{-1} x_k^{-1}$ dir. Van Kampen



Şekil 1.8: Bir kavşak noktasındaki meridyenel türeteçler.

teoreminden dolayı birleşim uzayında $x_i x_k x_{i+1}^{-1} x_k^{-1} = e$ olmak zorundadır. Benzer argüman n defa uygulanırsa

$$\Pi_1 ((\mathbb{R}_+^3 - k) \cup (\mathbb{R}_-^3 - k)) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$$

eşitliğine ulaşılır. Burada R_i ler yukarıda elde edilen bağıntılardır. Böylece aşağıdaki teoremi kanıtlamış olduk.

TEOREM 3 \mathbb{R}^3 de verilen bir k düğümünün üstten geçişleri $i = 1, \dots, n$ için x_i ler ile etiketlenmek üzere ve R_i bağıntıları yukarıdaki gibi elde edilmek üzere bu düğümün grubu

$$\Pi_1 (\mathbb{R}^3 - k) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$$

olur.

Burada R_i bağıntılardan biri fazladır, şimdi bunu görelim:

$$Y = (\mathbb{R}_+^3 - k) \cup (D_1 - k) \cup \dots \cup (D_{n-1} - k)$$

olsun. Yukarıda gördüğümüz gibi

$$\Pi_1 (Y) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid R_1, R_2, \dots, R_{n-1} \rangle$$

dir.

$$Z = \overline{\mathbb{R}^3 - Y}$$

olsun. Bu durumda Bu durumda $\mathbb{R}^3 - k = Y \cup (Z - k)$ eşitliği ve $Z - k$ uzayının basit bağlantılı olduğu açıktır. Ayrıca β_n , düğümün sonuncu alttan geçmesini bir kez saran bir basit kapalı eğri olmak üzere $Y \cap (Z - k)$ arakesit uzayının temel grubu β_n ile üretilen sonsuz devirli gruptur. Şimdi bu basit kapalı eğriyi $z = 0$ düzleminde düğüm izdüşümü tamamen içinde kalacak biçimde genişletelim ve sonra düğümün tamamen uzayın üzerinde kalıncaya kadar Y uzayında yukarı doğru kaydıralım. Bu durumda bu eğrinin Y uzayında bir noktaya büzülebildiği açıktır. Dolayısıyla sonuncu alttan geçiş için yeni bir bağlantı gelmez.

Şimdi \mathbb{R}^3 de verilen bir k düğümünün diyagramından bu düğümün grubunun Wirtinger gösterimini nasıl bulacağımıza bakalım. Düğüm diyagramında her bir üstten geçmeye bir yay diyelim ve sağ el kuralı ile yönlendirilmiş diyagramda yayları x_i lerle etiketleyelim. Bir pozitif kavşaktan $x_{i+1} = x_k^{-1} x_i x_k$ bağıntısının ve negatif kavşaktan $x_{i+1} = x_k x_i x_k^{-1}$ bağıntısının yazılabileceğini Teorem 3 den biliyoruz.

Bu durumda diyagramı x_1, \dots, x_n gibi n tane yaydan oluşan bir düğümün grubunun Wirtinger gösterimi, R_i bağıntıları kavşak noktalarından yukarıdaki gibi elde edilmek üzere

$$\Pi_1(\mathbb{R}^3 - k) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$$

şeklindedir.

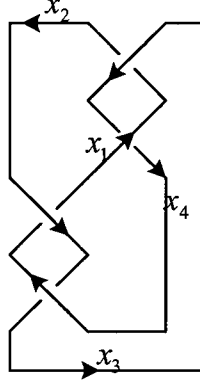
Örneğin sekiz şekli düğümün grubunun Wirtinger gösterimi, diyagramı Şekil (1.9) da görüldüğü gibi etiketlenmek üzere

$$\Pi_1(\mathbb{R}^3 - \text{sekiz şekli}) = \langle x_1, x_3 \mid x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1 x_3 = x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 \rangle$$

dir.

Bu grubun aşikar düğümün temel grubundan farklı olduğunu görmek için sekiz şekli düğümünün G grubunun üreteçleri üzerinde tanımlanan aşağıdaki dönüşümü gözönüne alalım:

$$\begin{aligned} \Psi : G &\rightarrow S_5 \\ x_1 &\rightarrow (25) (34) \\ x_2 &\rightarrow (14) (35) \\ x_3 &\rightarrow (12) (45) \\ x_4 &\rightarrow (15) (23) \end{aligned}$$



Şekil 1.9: Sekiz şekli düğümü diyagramı.

Kolayca görülebilir ki üreteçlerin görüntüleri düğüm grubundaki bağıntıları sağlar. Bu durumda Ψ dönüşümü homomorfizm olacak biçimde genişletilebilir. S_5 grubundaki $\Psi(x_1)\Psi(x_2)$ ve $\Psi(x_2)\Psi(x_1)$ elemanlarını karşılaştıralım.

$$\Psi(x_1)\Psi(x_2) = (23145)$$

$$\Psi(x_2)\Psi(x_1) = (25413)$$

Yukarıdaki eşitliklerden görüldüğü gibi $\Psi(G) \subset S_5$ altgrubu değişmeli değildir. Dolayısıyla sekiz şekli düğümünün grubu değişmeli değildir. Buradan sonuç olarak sekiz şekli düğümünün çemberden farklı olduğunu söyleyebiliriz.

Bölüm 2

KÜRESEL GEOMETRİ VE KUATERNİONLAR

2.1 S^2 Üzerinde Geometri

Klasik Öklid geometrisinin bir benzeri de S^2 üzerinde geliştirilebilir. Yani geometriyi klasik anlamda bir noktalar kümesi, bir doğrular kümesi ve noktalar kümesinden doğrular kümesine bir seri aksiyomu gerçekleyen üzerinde bulunma bağıntısı olarak alırsak küresel geometri (Öklid aksiyomlarından beşincisini sağlamamasından dolayı) Öklid olmayan bir (analitik) geometridir. Şimdi bu Öklid olmayan geometrinin S^2 modelini inceleyelim.

2.1.1 S^2 nin Metrik Yapısı

Üç boyutlu gerçel vektör uzayında normu bir olan vektörlerin kümesi olan

$$S^2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1 \}$$

birim küre yüzeyini göz önüne alalım. $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in S^2$ için

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \end{aligned}$$

standart iç-çarpım olmak üzere

$$\begin{aligned} d_{S^2} : S^2 \times S^2 &\longrightarrow [0, \pi] \\ (x, y) &\longrightarrow \cos^{-1} \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

olarak tanımlanan d_{S^2} fonksiyonu S^2 üzerinde metriktir.

$$\begin{aligned} M1 : \quad d_{S^2}(x, y) &\in [0, \pi] \text{ yani } d_{S^2}(x, y) \geq 0 \\ d_{S^2}(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \cos^{-1} \langle x, y \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

$$M2 : \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \text{ olduğundan } d_{S^2}(x, y) = d_{S^2}(y, x)$$

$$M3 : \quad x, y, z \in S^2 \text{ için } r = d_{S^2}(x, y), \quad p = d_{S^2}(y, z), \quad q = d_{S^2}(x, z) \text{ olsun.}$$

$$|\langle x \times z, y \times z \rangle| \leq \|x \times z\| \|y \times z\|$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\langle x \times z, y \times z \rangle^2 \leq \|x \times z\|^2 \|y \times z\|^2$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} \langle x \times z, y \times z \rangle &= \langle x, y \rangle \langle z, z \rangle - \langle x, z \rangle \langle z, y \rangle \\ \|x \times z\|^2 &= |x|^2 |z|^2 - \langle x, z \rangle^2 \\ \|y \times z\|^2 &= |y|^2 |z|^2 - \langle y, z \rangle^2 \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\cos r \leq \cos(q - p)$$

elde edilir. Kosinüs fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında azalan olduğundan $0 \leq q - p \leq \pi$ ise $r \geq q - p$ yani $r + p \geq q$ olur. Eğer $q - p < 0$ ise $q < p \leq r + p$ olur ki bu da istenilen şeydir. Diğer yandan $q - p > \pi$ olması da mümkün olmadığından $0 \leq q - p \leq \pi$ dir.

Buradan

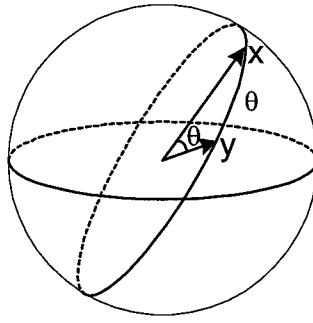
$$d_{S^2}(x, y) + d_{S^2}(y, z) \geq d_{S^2}(x, z)$$

sonucuna ulaşılır.

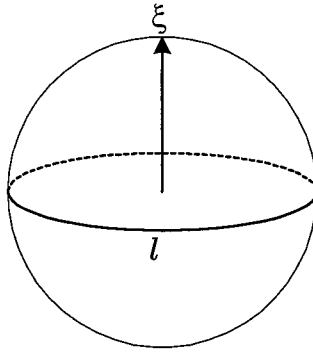
Bundan böyle S^2 üzerinde tanımlanan bu metriği, aksi belirtilmedikçe, d ile göstereceğiz.

S^2 de Doğrular

S^2 de herhangi $x \neq \mp y$ şeklinde iki x, y noktalarını alalım. x, y ve orijinden geçen düzlem ile S^2 birim küresinin kesişimi olan çembere x ve y noktalarından geçen büyük çember ya da x ve y noktalarını birleştiren doğru diyelim. Bu durumda



Şekil 2.1: Kürede verilen iki noktanın belirlediği doğru



Şekil 2.2: Kürede bir doğru ve kutup noktası

yukarıda tanımlanan metrik göz önünde bulundurulursa x ile y arasındaki uzaklık; büyük çemberin, uzunluğu $(0, \pi)$ arasında olan, x ve y yi birleştiren yay parçasının uzunluğudur. Eğer $x = -y$ ise bu uzunluk π olur.

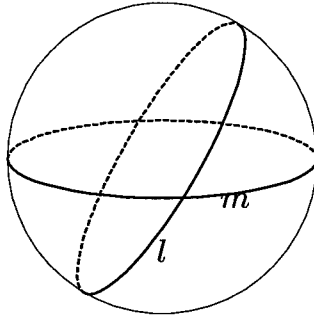
Şimdi ζ bir birim vektör olsun.

$$l = \{ x \in S^2 \mid \langle \zeta, x \rangle = 0 \}$$

kümesine ζ noktasının kutup çemberi ve $\zeta \in S^2$ noktasına da l doğrusunun kutup noktası denir.

S^2 de $x = -y$ şeklindeki x, y noktalarına **çapsal** denir.

TEOREM 4 x ve y , S^2 nin $x \neq \mp y$ olacak biçimde herhangi iki noktası olsun. Bu durumda x ve y den geçen bir tek doğru vardır. Bu doğruyu $[x, y]$ ile gösterelim.



Şekil 2.3: Küre üzerinde paralellik yoktur

KANIT. $\zeta = \frac{x \times y}{\|x \times y\|}$ diyelim. Açıkça ζ noktasının l_1 kutup çemberi x ve y noktalarından geçer. Şimdi bu çemberin tekliliğini görelim. η , x ve y den geçen herhangi bir l_2 çemberinin kutup noktası ise

$$\langle \eta, x \rangle = \langle \eta, y \rangle = 0$$

olur. Ayrıca

$$\eta \times (x \times y) = \langle y, \eta \rangle x - \langle x, \eta \rangle y$$

eşitliğinden $\eta \times (x \times y) = 0$ yani $k \in \mathbb{R}$ için $\eta = k(x \times y) = k\|x \times y\| \zeta$ sonucuna ulaşırız. $\|\eta\| = 1$ olduğundan $\eta = \mp \zeta$ elde edilir. Böylece $l_1 = l_2$ olmak zorundadır.

■

l ve m , S^2 nin farklı iki doğrusu olsun. Bu durumda $l \cap m = \{\mp *\}$ çapsal nokta çiftidir.

KANIT. Varsayalım ζ ve η , sırasıyla l ve m doğrularının kutup noktası olsun. $l \neq m$ olduğundan $\zeta \neq \mp \eta$ yani $\zeta \times \eta \neq 0$ olur. Bu durumda l ile m doğrularının arakesiti $\mp \frac{\zeta \times \eta}{\|\zeta \times \eta\|}$ noktalarıdır. ■

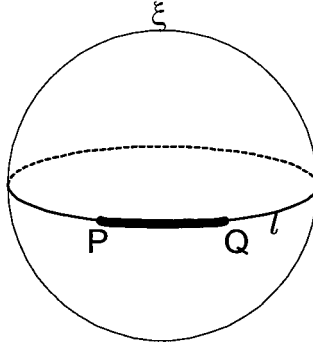
Sonuç olarak S^2 de herhangi iki doğru kesişirler.

Doğruların Parametrik Temsili

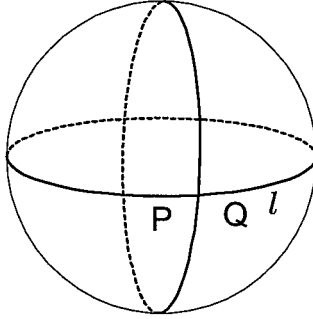
Varsayalım l , kutup noktası ζ olan bir doğru olsun. $P, Q \in l$ noktalarını $\langle P, Q \rangle = 0$ olacak biçimde seçelim.

Bu durumda

$$\alpha(t) = (\cos t)P + (\sin t)Q$$



Şekil 2.4: İki nokta ve belirledikleri doğrunun kutup noktası



Şekil 2.5: Küre üzerinde dik doğrular

olmak üzere

$$l = \{ \alpha(t) \mid t \in [0, 2\pi) \}$$

olur.

S^2 de herhangi iki doğrunun kutup noktaları ortogonal ise bu doğrulara dik denir.

TEOREM 5 l, S^2 de bir doğru ve P bir nokta olsun. P, l doğrusunun kutup noktası değilse P den geçen ve l ye dik olan bir tek m doğrusu vardır. Eğer P, l doğrusunun kutbu ise P noktasından geçen her doğru l ye diktir.

Doğru Parçaları

P ve Q S^2 de $\langle P, Q \rangle = 0$ olacak biçimdeki iki nokta, t_1 ve t_2 de $t_1 < t_2$ ve $t_2 - t_1 < 2\pi$ eşitsizliklerini sağlayan iki reel sayı olmak üzere S^2 nin

$$s = \{ \alpha(t) = (\cos t)P + (\sin t)Q \mid t_1 \leq t \leq t_2 \}$$

şeklindeki bir altkümesine $\alpha(t_1)$ noktasını $\alpha(t_2)$ ye birleştiren doğru parçası denir.

Her doğru parçası bir tek doğru tanımlar ve diğer yandan verilen bir doğru parçası P, Q, t_1 ve t_2 yi tek türlü belirlemez.

s yukarıdaki gibi $s = \{ (\cos t)P + (\sin t)Q \mid t_1 \leq t \leq t_2 \}$ şeklinde tanımlı bir doğru parçası ve l de P ve Q noktalarından geçen doğru olsun. Bu durumda l doğrusu üzerindeki herhangi \tilde{P} ve \tilde{Q} gibi iki nokta için

$$s = \left\{ \tilde{\alpha}(t) = (\cos t)\tilde{P} + (\sin t)\tilde{Q} \mid \tilde{t}_1 \leq t \leq \tilde{t}_2 \right\}$$

olacak şekilde $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in \mathbb{R}$ vardır. Burada $t_2 - t_1 = \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1$ dir ve bu sayı doğru parçasının uzunluğudur. Ayrıca $\{\alpha(t_1), \alpha(t_2)\} = \{\tilde{\alpha}(\tilde{t}_1), \tilde{\alpha}(\tilde{t}_2)\}$ dir ve bu noktalara s nin uç noktaları denir.

A ve B S^2 de çapsal olmayan iki nokta olsun. Bu durumda A ve B yi uç noktası kabul eden iki doğru parçası vardır ve bunların birleşimi A ve B den geçen doğru, kesişimleri ise $\{A, B\}$ kümesidir. Bu doğru parçalarından kısa olanına AB minör doğru parçası, uzun olanına AB major doğru parçası denir.

A ve B , S^2 de herhangi iki çapsal nokta olsun. Uç noktaları A ve B olan bir doğru parçasına yarı doğru denir. Uç noktalarından biri çıkarılmış bir yarı doğruya ışın ve diğer uç noktaya da ışının başlangıç noktası denir. Başlangıç noktaları ortak olan iki ışının birleşimine ise açı denir.

Bir $\angle PQR$ açısının ölçüsü;

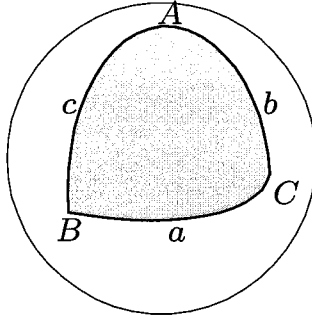
$$\cos^{-1} \left\langle \frac{Q \times P}{\|Q \times P\|}, \frac{Q \times R}{\|Q \times R\|} \right\rangle$$

P, Q ve R S^2 de doğrusal olmayan üç nokta olsun. PQR üçgeni, PQ, QR ve PR minör doğru parçalarının birleşimi olarak tanımlanır.

2.1.2 Küresel Trigonometri

ABC bir üçgen, a ; BC kenarının uzunluğu, b ; AC kenarının uzunluğu ve c ; AB kenarının uzunluğu olsun.

Kosinüs Kuralı ABC üçgeninde $\cos A = \frac{\langle A \times B, A \times C \rangle}{\|A \times B\| \|A \times C\|}$ dir.



Şekil 2.6: Küresel bir üçgen

$$\begin{aligned}
 \|A \times B\|^2 &= \langle A \times B, A \times B \rangle \\
 &= \|A\|^2 \|B\|^2 - \langle A, B \rangle^2 \\
 &= 1 - \cos^2 c \\
 &= \sin^2 c
 \end{aligned}$$

benzer şekilde

$$\|A \times C\|^2 = \sin^2 b$$

olduğundan ve

$$\begin{aligned}
 \langle A \times B, A \times C \rangle &= \langle B, C \rangle - \langle A, C \rangle \langle A, B \rangle \\
 &= \cos a - \cos b \cos c
 \end{aligned}$$

eşitliğinden cosinüs kuralı adı verilen

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

eşitliği elde edilir.

Kutup Üçgeni S^2 de ABC üçgenini göz önüne alalım. $A' = \frac{B \times C}{\|B \times C\|}$, $B' = \frac{C \times A}{\|C \times A\|}$, $C' = \frac{A \times B}{\|A \times B\|}$ olmak üzere $A'B'C'$ üçgenine ABC üçgeninin kutup üçgeni diyelim. $A'B'C'$ üçgeninde $B'C'$ kenarının uzunluğu a' , $A'B'$ kenarının uzunluğu c' , $A'C'$ kenarının uzunluğu b' olsun.

ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerinde

$$\begin{aligned}
 \cos A &= \left\langle \frac{A \times C}{\|A \times C\|}, \frac{A \times B}{\|A \times B\|} \right\rangle = - \left\langle \frac{C \times A}{\|C \times A\|}, \frac{A \times B}{\|A \times B\|} \right\rangle = -\cos a' \\
 \cos B &= \left\langle \frac{B \times A}{\|B \times A\|}, \frac{B \times C}{\|B \times C\|} \right\rangle = - \left\langle \frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{B \times C}{\|B \times C\|} \right\rangle = -\cos b' \\
 \cos C &= \left\langle \frac{C \times A}{\|C \times A\|}, \frac{C \times B}{\|C \times B\|} \right\rangle = - \left\langle \frac{C \times A}{\|C \times A\|}, \frac{B \times C}{\|B \times C\|} \right\rangle = -\cos c'
 \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$a' = \pi - A, b' = \pi - B, c' = \pi - C$$

kutup üçgenlerinin kenar uzunlukları elde edilir. Şimdi $A'B'C'$ kutup üçgeninde kosinüs kuralı

$$\cos A' = \frac{\cos a' - \cos b' \cos c'}{\sin b' \sin c'}$$

formülünde ilgili değerler yerine konulursa;

$$\begin{aligned} \cos(\pi - a) &= \frac{\cos(\pi - A) - \cos(\pi - B) \cos(\pi - C)}{\sin(\pi - B) \sin(\pi - C)} \\ \Leftrightarrow -\cos a &= \frac{-\cos A - \cos B \cos C}{\sin B \sin C} \\ \Leftrightarrow \cos a &= \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} \end{aligned}$$

elde edilir.

Sinüs Kuralı ABC üçgeninde

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

eşitliğinden

$$1 - \cos A = \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \sin c} = 2 \sin^2 \frac{A}{2}$$

ve

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\sin b \sin c} = 2 \cos^2 \frac{A}{2}$$

olur. Bu eşitliklerden yararlanarak

$$\sin^2 A = \frac{[\cos(b - c) - \cos a][\cos a - \cos(b + c)]}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

elde edilir. Benzer eşitlikler $\sin^2 B$ ve $\sin^2 C$ için de yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa sinüs kuralı olarak bilinen

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

eşitliğine ulaşılır (Daha detaylı bilgi için [11, 12]).

2.2 Kuaternionlar

\mathbb{R}^2 nin kompleks sayılar yardımı ile cisim yapılışına benzer olarak \mathbb{R}^4 de aşağıda açıklanan şekilde bir yarı cisim (değişmeli olmayan cisim) yapılabilir. Önce \mathbb{R}^2 nin nasıl cisim yapıldığını anımsayalım. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olsunlar. Toplama işlemi bilindik şekilde tanımlanmış olsun. Çarpma işlemi ise

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

şeklinde tanımlanırsa bu çarpma \mathbb{R}^2 yi cisim yapar. Bilindiği gibi bu çarpma

$$(x_1, y_1) \longleftrightarrow x_1 + iy_1 \text{ ve } (x_2, y_2) \longleftrightarrow x_2 + iy_2$$

eşlemeleri kullanılarak kompleks sayılardaki çarpmadan taşınmıştır. Şimdi benzer işlemi \mathbb{R}^4 de yapalım. z_1, z_2 iki kompleks sayı olsunlar ve $z_1 + z_2j$ sayısına bir kuaternion yada süper kompleks diyelim. Kompleks sayılarda olduğu gibi $j^2 = -1$ ve burada $ij = k, ji = -k$ olsun. Bir $z = a + ib$ kompleks sayısı için

$$jz = j(a + ib) = (a - ib)j = \bar{z}j$$

olur. Şimdi iki kuaternionu çarpalım. $P = z_1 + z_2j$ ve $Q = w_1 + w_2j$ iki kuaternion olmak üzere

$$\begin{aligned} PQ &= (z_1 + z_2j)(w_1 + w_2j) \\ &= z_1w_1 + z_2jw_2j + z_1w_2j + z_2jw_1 \\ &= z_1w_1 - z_2\bar{w}_2 + (z_1w_2 + z_2\bar{w}_1)j \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $z_1 = a_0 + a_1i, z_2 = a_2 + a_3i, w_1 = b_0 + b_1i, w_2 = b_2 + b_3i$ yazılırsa gerçel sayılar türünden bu işlem

$$\begin{aligned} PQ &= (a_0 + a_1i + (a_2 + a_3i)j)(b_0 + b_1i + (b_2 + b_3i)j) \\ &= (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k)(b_0 + b_1i + b_2j + b_3k) \\ &= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)i + \\ &\quad (a_0b_2 + a_2b_0 - a_1b_3 + a_3b_1)j + (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)k \end{aligned}$$

şeklindedir.

Kuaternionlar kümesini \mathbb{H} ile gösterelim. Yani

$$\mathbb{H} = \{a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

olsun.

Bir $Q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ kuaternionu için a_0 gerçel sayısına Q kuaternionunun gerçel kısmı denir ve $\text{Re}(Q)$ ile gösterilir, $a_1i + a_2j + a_3k$ toplamına ise kuaternionun sanal kısmı denir ve $\text{Im}(Q)$ ile gösterilir. Yani

$$Q = \text{Re}(Q) + \text{Im}(Q)$$

yazılabilir. Q kuaternionunun normu ise

$$\|Q\| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

şeklinde tanımlanır. Normu bir olan kuaternionlara birim kuaternionlar denilirse birim kuaternionlar kümesinin taşıyıcı kümesi

$$S^3 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2} = 1 \right\}$$

birim küresi olarak alınabilir. Gerçel kısmı sıfır olan bir kuaterniona ise tamamen sanal kuaternion denir ve tamamen sanal birim kuaternionlar kümesi ise

$$S^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \right\}$$

birim küresi ile eşlenebilir.

Şimdi yukarıda $Q = \text{Re}(Q) + \text{Im}(Q)$ şeklinde ifade ettiğimiz bir Q kuaternionunun eşleniği diye $\text{Re}(Q) - \text{Im}(Q)$ kuaternionuna denilir ve \bar{Q} ile gösterilir. $Q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} Q\bar{Q} &= (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k)(a_0 - a_1i - a_2j - a_3k) \\ &= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

yani $\|Q\| = \sqrt{Q\bar{Q}}$ olur. Buradan $\|Q\| \neq 0$ olacak biçimdeki Q kuaternionu için

$$Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{\|Q\|^2}$$

olur.

Bir $Q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ birim kuaternionu için

$$a_0^2 + \|\text{Im}(Q)\|^2 = 1$$

olduğundan $a_0 = \cos \varphi$, $\|\text{Im}(Q)\| = \sin \varphi$ olacak şekilde bir $0 \leq \varphi \leq \pi$ vardır.

$$q = \frac{a_1}{\|\text{Im}(Q)\|}i + \frac{a_2}{\|\text{Im}(Q)\|}j + \frac{a_3}{\|\text{Im}(Q)\|}k$$

dersek q bir tamamen sanal birim kuaterniondur ve

$$\text{Im}(Q) = \|\text{Im}(Q)\| q$$

olur. Buradan Q birim kuaternionunun

$$Q = \cos \varphi + q \sin \varphi$$

kutupsal formu elde edilmiş olur. Kutupsal formu bu şekilde olan bir Q birim kuaternionu için

$$Q = e^{\varphi q}$$

üstel gösterimini de kullanacağız.

Herhangi iki $p = a_1i + a_2j + a_3k$ ve $q = b_1i + b_2j + b_3k$ tamamen sanal kuaternionu için p ile q nun iç çarpımı

$$\langle p, q \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

vektörel çarpımı ise

$$p \times q = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. $P = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ ve $Q = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$ gibi iki kuaternion için

$$\begin{aligned} P\bar{Q} &= (a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (-a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3) i + \\ &\quad (-a_0b_2 + a_2b_0 + a_1b_3 - a_3b_1) j + (a_0b_3 - a_1b_2 + a_2b_1) k \end{aligned}$$

ve

$$\langle P, Q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

olduğundan

$$\langle P, Q \rangle = \text{Re}(P\bar{Q})$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} PQ &= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2) i + \\ &\quad (a_0b_2 + a_2b_0 - a_1b_3 + a_3b_1) j + (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0) k \end{aligned}$$

eşitliği göz önüne alınırsa

$$PQ = (\operatorname{Re}(P)\operatorname{Re}(Q) - \langle \operatorname{Im}(P), \operatorname{Im}(Q) \rangle) + \operatorname{Re}(P)\operatorname{Im}(Q) + \operatorname{Re}(Q)\operatorname{Im}(P) + \operatorname{Im}(P) \times \operatorname{Im}(Q)$$

sonucuna ulaşılır.

YARDIMCI TEOREM 6 . : $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ çarpma işlemi $P, Q \in \mathbb{H}$ için

$$\operatorname{Im}(P) \otimes \operatorname{Im}(Q) = -\langle \operatorname{Im}(P), \operatorname{Im}(Q) \rangle + \operatorname{Im}(P) \times \operatorname{Im}(Q)$$

olmak üzere

$$PQ = (\operatorname{Re}(P) + \operatorname{Im}(P))(\operatorname{Re}(Q) + \operatorname{Im}(Q))$$

$$PQ = \operatorname{Re}(P)\operatorname{Re}(Q) + \operatorname{Re}(P)\operatorname{Im}(Q) + \operatorname{Re}(Q)\operatorname{Im}(P) + \operatorname{Im}(P) \otimes \operatorname{Im}(Q)$$

şeklinde tanımlanırsa, \mathbb{H} kuaternionlar vektör uzayı \mathbb{R} cismi üzerinde bir cebirdir.

KANIT. • $P, Q, M \in \mathbb{H}$ için

$$Q(P + M) = (\operatorname{Re}(Q) + \operatorname{Im}(Q))[(\operatorname{Re}(P) + \operatorname{Re}(M)) + (\operatorname{Im}(P) + \operatorname{Im}(M))]$$

olur ve buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$Q(P + M) = QP + QM$$

eşitliği kolayca görülür. Benzer şekilde

$$(Q + P)M = QM + PM$$

olur.

•

$$Q(PM) = (\operatorname{Re}(Q) + \operatorname{Im}(Q))[\operatorname{Re}(PM) + \operatorname{Im}(PM)]$$

$$(QP)M = (\operatorname{Re}(QP) + \operatorname{Im}(QP))(\operatorname{Re}(M) + \operatorname{Im}(M))$$

eşitliklerinin sağ taraflarında gerekli düzenlemeler yapılır ve

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(Q) \times (\operatorname{Im}(P) \times \operatorname{Im}(M)) &= \langle \operatorname{Im}(Q), \operatorname{Im}(M) \rangle \operatorname{Im}(P) - \\ &\quad \langle \operatorname{Im}(Q), \operatorname{Im}(P) \rangle \operatorname{Im}(M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{Im}(Q) \times \operatorname{Im}(P)) \times \operatorname{Im}(M) &= \langle \operatorname{Im}(Q), \operatorname{Im}(M) \rangle \operatorname{Im}(P) - \\ &\quad \langle \operatorname{Im}(P), \operatorname{Im}(M) \rangle \operatorname{Im}(Q) \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$Q(PH) = (QP)M$$

olduğu görülür.

- $\alpha \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{H}$ için

$$(\alpha P)Q = P(\alpha Q) = \alpha(PQ)$$

olur. ■

YARDIMCI TEOREM 7 Bir Q birim kuaternionunun tamamen sanal olması için gerekli ve yeterli koşul $Q^2 = -1$ olmasıdır.

KANIT. Varsayalım ki Q bir tamamen sanal birim kuaternion olsun. Bu durumda $Q = -\bar{Q}$ olur. Buradan $\|Q\|^2 = Q\bar{Q} = Q(-Q) = -Q^2 = 1$ yani $Q^2 = -1$ elde edilir.

Tersine, Q birim kuaternionu için $Q^2 = -1$ olsun. $Q^2 = -1$ eşitliğinin her iki tarafı \bar{Q} ile çarpılırsa Q birim olduğundan $Q = -\bar{Q}$ elde edilir. Buradan $\text{Re}(Q) = 0$ yani Q tamamen sanaldır. ■

S^3 ve $SU(2)$ İlişkisi

Şimdi

$$GL(2, \mathbb{C}) = \{ A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0 \}$$

grubunun

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) \mid z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = 1 \right\}$$

altgrubunu ve \mathbb{H} kuaternionlar grubunun S^3 birim kuaternionlar altgrubunu göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} \phi & : S^3 \longrightarrow SU(2) \\ \phi(z_1 + z_2.j) & = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa ϕ bir grup izomorfizmidir [13, 11].

2.3 S^3 Üzerinde Geometri

$Q \neq \mp 1$ olacak biçimdeki bir birim kuaternionu alalım. $\alpha \in (0, \pi)$ ve q bir tamamen sanal birim kuaternion olmak üzere, Q birim kuaternionunun

$$Q = \cos \alpha + q \sin \alpha$$

ya da üstel şekilde tek türlü yazılabildiğini biliyoruz. Bu durumda birim kuaternionlar kümesi

$$S^3 = \bigcup_{\substack{\alpha \in [0, \pi] \\ q \in S^2}} e^{\alpha q}$$

şeklinde ifade edilebilir.

\langle, \rangle ile \mathbb{R}^4 deki standart iç-çarpım gösterilmek üzere, S^3 birim kuaternionlar kümesi üzerindeki

$$d_{S^3}(Q_1, Q_2) = \cos^{-1} \langle Q_1, Q_2 \rangle$$

metriğini göz önüne alalım.

Şimdi sabit bir $\alpha \in [0, \pi]$ için

$$S_\alpha^2 = \{ \cos \alpha + q \sin \alpha \mid q \in S^2 \}$$

kümesini α (küresel yarıçaplı) küresi olarak isimlendirebiliriz. Çünkü herhangi bir $Q = \cos \alpha + q \sin \alpha$ için

$$d_{S^3}(1, Q) = \alpha \text{ ve } d_{S^3}(-1, Q) = \pi - \alpha$$

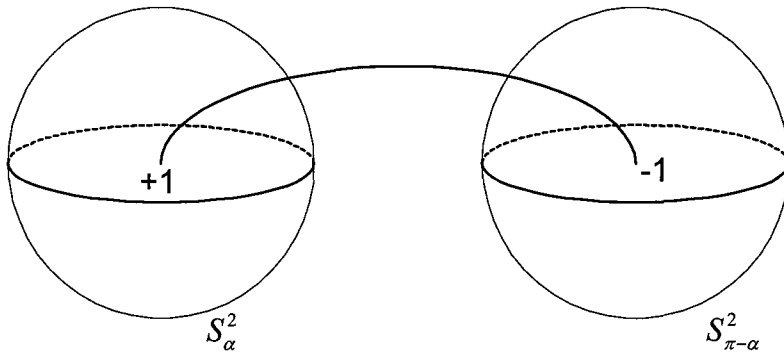
olur. Bu tanımlamadan sonra

$$S^3 = \bigcup_{\alpha \in [0, \pi]} S_\alpha^2$$

şeklinde yazabiliriz. Bu bize S^3 ün S^2 lere bir (singüler) parçalanışını verir. Yalnızca $\alpha = 0$ ve $\alpha = \pi$ için sırasıyla $+1$ ve -1 noktalarının kendilerinden oluşan S_0^2 ve S_π^2 singüler küreleri ortaya çıkar.

Sabit ve tamamen sanal bir q birim kuaternionu için

$$\{ \cos \alpha + q \sin \alpha \mid \alpha \in [0, 2\pi] \}$$



Şekil 2.7: -1 ve +1 merkezli küreler.

kümesini göz önüne alırsak bu küme S^3 ün bir alt grubudur ve kolayca görülebilir ki bu alt grup $S^1 \subset \mathbb{C}$ birim çemberine izomorftur. Bu alt grubu S_q^1 ile gösterelim. Bu alt gruplar Cartan alt grupları olarak adlandırılırlar. Her q tamamen sanal birim kuaternionu için $\exists 1 \in S_q^1$ olduğu açıktır.

2.3.1 S^3 de Eşlenik Sınıfları

Bir $X = e^{\alpha x}$ birim kuaternionu için

$$\begin{aligned} f_X : S^3 &\rightarrow S^3 \\ Y &\rightarrow XYX^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümünü göz önüne alalım. $Y = e^{\beta y}$ şeklindeki bir birim kuaternionun bu dönüşüm altındaki görüntüsü

$$\begin{aligned} XYX^{-1} &= (\cos \alpha + x \sin \alpha) (\cos \beta + y \sin \beta) (\cos \alpha - x \sin \alpha) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta + y \cos \alpha \sin \beta + x \sin \alpha \cos \beta + x \otimes y \sin \alpha \sin \beta) \\ &\quad (\cos \alpha - x \sin \alpha) \end{aligned}$$

buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$f_x(Y) = \cos \beta + \sin \beta (y \cos 2\alpha + x \times y \sin 2\alpha + 2 \langle x, y \rangle x \sin^2 \alpha)$$

şeklinde elde edilir. Yani

$$\frac{1}{\sin \beta} \text{Im} (XYX^{-1}) = y \cos 2\alpha + 2 \langle x, y \rangle x \sin^2 \alpha + x \times y \sin 2\alpha$$

olur. Şimdi $y \in S^2$ vektörü $\left\{x, \frac{x \times y}{\|x \times y\|}, \frac{1}{\|x \times y\|} [(x \times y) \times x]\right\}$ tabanında yazılırsa $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} y &= a_1 x + a_2 \frac{x \times y}{\|x \times y\|} + a_3 \frac{1}{\|x \times y\|} [(x \times y) \times x] \\ &= a_1 x + a_2 \frac{x \times y}{\|x \times y\|} + a_3 \frac{1}{\|x \times y\|} (y - \langle x, y \rangle x) \\ &= \left(a_1 - a_3 \frac{\langle x, y \rangle}{\|x \times y\|} \right) x + a_2 \frac{x \times y}{\|x \times y\|} + a_3 \frac{y}{\|x \times y\|} \end{aligned}$$

ve buradan $a_1 = \langle x, y \rangle$, $a_2 = 0$, $a_3 = \|x \times y\|$ elde edilir.

S^2 de x noktası etrafında 2α lık dönme dönüşümü matrisine $A_{2\alpha}$ dersek

$$A_{2\alpha}(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle x, y \rangle \\ 0 \\ \|x \times y\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x, y \rangle \\ \sin 2\alpha \cdot \|x \times y\| \\ \cos 2\alpha \cdot \|x \times y\| \end{pmatrix}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} A_{2\alpha}(y) &= \langle x, y \rangle x + \|x \times y\| \frac{x \times y}{\|x \times y\|} \sin 2\alpha + \|x \times y\| \frac{y - \langle x, y \rangle x}{\|x \times y\|} \cos 2\alpha \\ &= \langle x, y \rangle x + x \times y \sin 2\alpha + y \cos 2\alpha - \langle x, y \rangle x \cos 2\alpha \\ &= \langle x, y \rangle (1 - \cos 2\alpha) x + x \times y \sin 2\alpha + y \cos 2\alpha \\ &= 2 \langle x, y \rangle x \sin^2 \alpha + x \times y \sin 2\alpha + y \cos 2\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{\sin \alpha} \operatorname{Im}(XYX^{-1}) = A_{2\alpha}(y) \quad (2.1)$$

eşitliğine ulaşırız. Yani β (küresel) yarıçaplı S^2_β küresindeki bir $Y = e^{\beta y}$ birim kuaternionunun f_X dönüşümü altındaki görüntüsü yine S^2_β küresinde bulunur. Ayrıca z tamamen sanal birim kuaternionu için

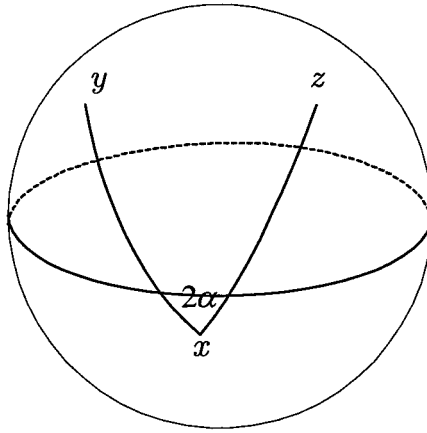
$$f_X(Y) = \cos \beta + z \sin \beta$$

dersek, $X = e^{\alpha x}$ olmak üzere (2.1) eşitliğinden tamamen sanal z birim kuaternionunun y nin x noktası etrafında 2α döndürülmesi ile elde edildiği açıktır.

ÖNERME 8 S^3 de $X = e^{\alpha x}$, $Y = e^{\beta y}$ ve $Z = e^{\beta z}$ şeklindeki herhangi üç nokta için

$$Z = XYX^{-1}$$

eşitliği sağlanıyorsa tamamen sanal z birim kuaternionu $S^2_{\frac{\pi}{2}}$ de y nin x noktası etrafında 2α döndürülmesi ile elde edilir.



Şekil 2.8: $S^2_{\frac{\pi}{2}}$ de f_X fonksiyonu.

ÖNERME 9 S^3 de Q_1 ve Q_2 gibi herhangi iki birim kuaternionun eşlenik olması için gerekli ve yeterli koşul gerçel kısımlarının eşit olmasıdır.

KANIT. Yukarıda f_X dönüşümünü tartışırken bir birim kuaternionun eşleniği ile aynı gerçel kısma sahip olduğunu görmüştük. Şimdi tersini kanıtlayalım. Yani varsayalım Q_1 ve Q_2 gerçel kısımları eşit olan iki birim kuaternion olsun. $Q_1 = e^{\alpha q_1}$ ve $Q_2 = e^{\alpha q_2}$ diyelim. Bu durumda q_1 ve q_2 nin $S^2_{\frac{\pi}{2}}$ deki orta noktası

$$q = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \langle q_1, q_2 \rangle}}$$

noktasıdır. Bu q noktası yukarıda belirttiğimiz geometrik nedenlerle ve aşağıda direkt olarak göstereceğimiz cebirsel nedenlerle

$$Q_1 = q^{-1}Q_2q$$

eşitliğini sağlar.

$$\begin{aligned} q^{-1}Q_2q &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\langle q_1, q_2 \rangle}} (q_1 + q_2)^{-1} (\cos \alpha + q_2 \sin \alpha) \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\langle q_1, q_2 \rangle}} (q_1 + q_2) \\ &= \frac{1}{2(1+\langle q_1, q_2 \rangle)} (-q_1 - q_2) (\cos \alpha + q_2 \sin \alpha) (q_1 + q_2) \\ &= \frac{-1}{2(1+\langle q_1, q_2 \rangle)} (q_1 \cos \alpha + q_1 \otimes q_2 \sin \alpha + q_2 \cos \alpha - \sin \alpha) (q_1 + q_2) \\ &= \frac{-1}{2(1+\langle q_1, q_2 \rangle)} (-1 + q_1 \otimes q_2) \cos \alpha + (q_1 \otimes q_2) \otimes q_2 \sin \alpha + \\ &\quad (q_2 \otimes q_1 - 1) \cos \alpha - (q_1 + q_2) \sin \alpha \\ &= \frac{1}{(1+\langle q_1, q_2 \rangle)} (1 + \langle q_1, q_2 \rangle) \cos \alpha - 2q_1 (1 + \langle q_1, q_2 \rangle) \sin \alpha \\ &= Q_1 \end{aligned}$$

Böylece önermenin kanıtı tamamlanmış olur. ■

Buradan bir $Q = e^{\alpha q}$ birim kuaternionunun eşlenik sınıfının α (küresel) yarıçaplı S^2_α küresi olduğu sonucuna varırız. Bu ise bize S^3 ün bir cebirsel parçalanışını verir.

Bölüm 3

n-TAMSAYI DÜĞÜMLERİN SU(2) TEMSİLLERİ

3.1 Genel Kavramlar

Bu bölüm ve takip eden bölümde tezin girişinde bahsedilen düğüm sınıflarının gruplarının $SU(2)$ temsilleri inceleneceğinden başlangıç olarak genel anlamda bir grubun $SU(2)$ temsili kavramına kısaca göz atalım.

G bir grup olmak üzere G den $SU(2)$ ya giden bir homomorfizme G nin bir $SU(2)$ temsili denir. $SU(2)$ grubu S^3 birim kuaternionlar grubuna izomorf olduğundan burada S^3 ün cebirsel ve geometrik yapısı kullanılacak ve dolayısıyla bir temsil ile G grubundan S^3 e giden bir homomorfizm kastedilecektir. Bu şekildeki homomorfizmlerin kümesi $R(G)$ ile gösterilsin yani

$$R(G) = \{ \phi \mid \phi : G \longrightarrow S^3 \text{ homomorfizm} \}$$

olsun. S^3 grubu değişmeli olmayan bir grup olmasına karşın sonsuz sayıda değişmeli alt grubu vardır (Cartan alt grupları). Görüntüleri bir Cartan alt grubunda olan başka bir deyişle görüntüsü değişmeli olan bir temsile **indirgenebilir temsil** denir. Bir G grubunun indirgenebilir temsillerinin kümesini $S(G)$ ile gösterelim yani

$$S(G) = \{ \phi \in R(G) \mid \text{Im}(\phi) \leq S_q^1 \leq S^3 : \}$$

olsun. Bu tanımlardan sonra bir G grubunun indirgenemez temsilleri kümesini $R^*(G)$ ile gösterelim:

$$R^*(G) = R(G) - S(G)$$

Öte yandan temsil uzayı $R(G)$ küme yapısından fazla olarak bir topolojik uzay yapısına da sahiptir. G ayrık topoloji ile alınırsa $R(G)$ kompakt-açık topoloji ile donatılabilir. Kabaca bu topoloji ise $K \subset G$ kompakt ve $U \subset S^3$ açık olmak üzere

$$H_{K,U} = \{\phi \in R(G) \mid \phi(K) \subseteq U\}$$

kümelerini alt taban kabul eden topolojidir. $S(G)$ ve $R^*(G)$ de $R(G)$ den doğal alt uzay topolojileri devralırlar. Kolaylıkla görüleceği gibi bu uzay oldukça büyüktür ve

$$SO(3) = S^3 / \{\mp 1\} = \{[Q] \mid [Q] = \{Q, -Q\}, Q \in S^3\}$$

ortogonal grubunun $R(G)$ üzerinde doğal bir etkisi vardır. İkinci bölümde gördüğümüz S^3 ün kendi üzerinde eşlenik olma ile verilen etkisi yardımı ile $SO(3)$ ün S^3 üzerinde bir etkisi

$$\begin{aligned} SO(3) \times S^3 &\longrightarrow S^3 \\ ([Q], Q') &\longrightarrow QQ'Q^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanabilir. $SO(3)$ ün $R(G)$ üzerindeki etkisi ise $\phi \in R(G)$ ve $g \in G$ olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} SO(3) \times R(G) &\longrightarrow R(G) \\ ([Q], \phi(g)) &\longrightarrow Q\phi(g)Q^{-1} \end{aligned}$$

$R(G)$ üzerindeki bu etki doğal bir şekilde $R^*(G)$ üzerine de kısıtlanabilir. Bizim bu iki bölümde inceleyeceğimiz uzay ise G bir düğüm grubu olmak üzere $R^*(G)/SO(3)$ olacaktır.

3.2 Özel Bir $SU(2)$ Temsil: Çember Temsiller

Bu altbölümde öncelikle çok özel bir $SU(2)$ temsil inceleyeceğiz.

$$G = \langle x_1, \dots, x_n \mid R_1, \dots, R_n \rangle$$

bir düğüm grubu olsun. Bu grubun üreteçlerini S^3 de $S^2_{\frac{\pi}{2}}$ küresine resmeden ve bütün üreteçlerinin görüntüleri aynı bir büyük çembere resmeden bir temsil varsa buna bir **çember temsil** diyelim. Düğüm gruplarının bu türden temsilleri [[8]] de sınıflanmıştır. Biz burada bizim için gerekli olan n tamsayı düğümlerin ve $(2, n)$ tipindeki iki köprülü düğümlerin çember temsillerini inşaa edeceğiz. ϕ , diyagramı

Şekil (3.1) de verilen n tamsayı düğümünün grubunun $\phi(x_i) = \underline{x}_i$ olarak verilen bir çember temsili olsun. Bu durumda $x_{i+1} = x_j x_i x_j^{-1}$ bağıntısından

$$\begin{aligned} \underline{x}_j \underline{x}_i \underline{x}_j^{-1} &= -\underline{x}_j \underline{x}_i \underline{x}_j \\ &= -(-\langle \underline{x}_j, \underline{x}_i \rangle + \underline{x}_j \times \underline{x}_i) \underline{x}_j \\ &= 2 \langle \underline{x}_j, \underline{x}_i \rangle \underline{x}_j - \underline{x}_i \end{aligned}$$

elde edilir. Yani \underline{x}_{i+1} noktası \underline{x}_i noktasının \underline{x}_j noktasında yansımasıdır dolayısıyla $d(\underline{x}_i, \underline{x}_j) = d(\underline{x}_j, \underline{x}_{i+1})$ olur. n tamsayı düğümü n kavşaktan oluştuğu için, eğer $d(\underline{x}_i, \underline{x}_j) = \varphi$ olarak adlandırılırsa, $n\varphi \equiv 0 \pmod{2\pi}$ olmalıdır. Apaçık olarak çember temsiller bu kongüransın çözümleri kümesidir ve çözüm kümesi $t = 1, 2, \dots, n-1$ olmak üzere $\varphi_t = \frac{2t\pi}{n}$ dir. Başka bir deyişle G düğüm grubunun çember temsilleri kümesi $\{\varphi_{\frac{2\pi}{n}}, \varphi_{\frac{4\pi}{n}}, \dots, \varphi_{\frac{2(n-1)\pi}{n}}\}$ dir. Diğer yandan t ve $n-t$ ye karşılık gelen çember temsiller $SO(3)$ denk oldukları için bir n tamsayı düğümün $SO(3)$ denk olmayan çember temsilleri sayısı $\frac{n-1}{2}$ tanedir.

Tamamen benzer tartışma diyagramı Şekil (4.21) verilen $(2, n)$ tipinde bir iki köprülü düğüm için yapılırsa bu düğümün grubunun bir ϕ çember temsili için $\gamma = d(\phi(Y_1), \phi(Y_{n+1}))$ olmak üzere $d(\phi(Y_1), \phi(Y_2)) = 2\gamma$ olup, çember temsilleri $(2n+1)\gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}$ kongüransının çözümü ile verilir. Bu kongüransın çözüm kümesi $t = 1, 2, \dots, 2n$ olmak üzere $\gamma_t = \frac{2t\pi}{2n+1}$ dir. Bu durumda $SO(3)$ denk olmayan çember temsiller $\gamma_{\frac{2\pi}{2n+1}}, \gamma_{\frac{4\pi}{2n+1}}, \dots, \gamma_{\frac{2n\pi}{2n+1}}$ dir. Yani $SO(3)$ denk olmayan çember temsillerin sayısı n dir.

3.3 n-Tamsayı Düğümler ve $SU(2)$ Temsillerin Kuruluşu

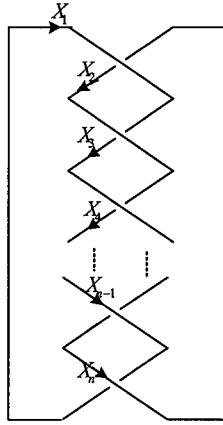
Bu bölümde diyagramı Şekil (3.1) de görüldüğü gibi olan n -tamsayı ($n \in 2\mathbb{Z} + 1$) düğümlerin gruplarının $SU(2)$ temsilleri uzayını inceleyeceğiz.

$k \subset S^3$ bir n tamsayı düğümü olmak üzere bu düğümün diyagramı Şekil (3.1) deki gibi etiketlenmiş ve yönlendirilmiş olsun. Bu durumda düğüm grubunun Wirtinger gösterimi

$$R_1 = X_n X_{n-1} X_n^{-1} X_1^{-1}, R_2 = X_1 X_n X_1^{-1} X_2^{-1} \text{ ve } i > 2 \text{ için } R_i = X_{i-1} X_{i-2} X_{i-1}^{-1} X_i^{-1}$$

olmak üzere

$$G = \langle X_1, X_2, \dots, X_n \mid R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$$



Şekil 3.1: n tamsayı düğüm diyagramı

formundadır. Şimdi bu grubun bir $SU(2)$ temsilini yani bir

$$\phi : G \longrightarrow S^3$$

homomorfizmini göz önüne alalım. $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere R_i bağıntılarından dolayı herhangi iki $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için X_i ile X_j nin eşlenik olduğu açıktır. Diğer yandan bir grup homomorfizmi eşlenik olmayı koruduğundan herhangi iki $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $\phi(X_i), \phi(X_j) \in S^3$ elemanları da eşleniktirler. Gösterim kolaylığı açısından $i = 1, 2, \dots, n$ için $\phi(X_i) \in S^3$ elemanını da X_i ile göstereyim. Önerme (14) den S^3 de eşlenik olan herhangi iki elemanın gerçel kısımları eşit olduğundan $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ve $\alpha \in (0, \pi)$ olmak üzere

$$X_i = e^{\alpha x_i}$$

şeklindedir.

$$P = e^{\gamma p}, Q = e^{\alpha q} \text{ ve } R = e^{\alpha r} \in S^3 \text{ olmak üzere}$$

$$R = P Q P^{-1}$$

eşitliği sağlanıyorsa, r noktası $S^2_{\frac{2}{\pi}}$ küresinde q noktasının p noktası etrafında 2γ kadar döndürülmesi ile elde edildiğinden, herhangi bir $i \in \{1, \dots, n-2\}$ için S^2 de $[x_i, x_{i+1}]$ doğru parçasının uzunluğu ile $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ doğru parçasının uzunluğunun eşit olduğu, n -tamsayı düğümünün grubunun Wirtinger gösterimindeki bağıntılardan dolayı açıktır. Yine $[x_1, x_n]$ doğru parçasının uzunluğu da yukarıda bahsedilen

uzunluğa eşittir. Yani

$$d(x_i, x_{i+1}) = d(x_{i+1}, x_{i+2}) = d(x_1, x_n)$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca grubun Wirtinger gösterimindeki bağıntılardan $i = 1, 2, \dots, n-3$ için $[x_i, x_{i+1}]$ doğru parçası ile $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ doğru parçası arasındaki açının $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ ile $[x_{i+2}, x_{i+3}]$ arasındaki açığa eşit olduğu kolayca görülür. Yani

$$\sphericalangle([x_i, x_{i+1}], [x_{i+1}, x_{i+2}]) = \sphericalangle([x_{i+1}, x_{i+2}], [x_{i+2}, x_{i+3}]) = \sphericalangle([x_{n-1}, x_n], [x_n, x_1]) = 2\alpha$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi $\xi = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|}$ noktasını göz önüne alalım. $i, j, t \in \{1, \dots, n\}$ ve $j \geq i$ için

$$\langle x_i, x_t \rangle = \langle x_j, x_{t+j-i} \rangle$$

olduğundan herhangi iki $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\langle x_i - x_j, \xi \rangle = 0$$

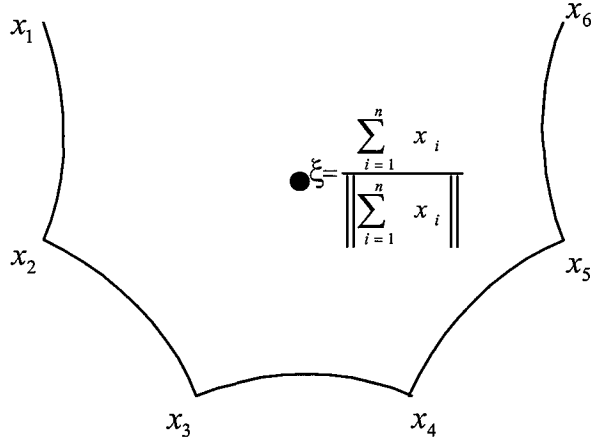
yani

$$\langle x_i, \xi \rangle = \langle x_j, \xi \rangle$$

eşitliği sağlanır.

Bu durumda kolayca görülebilir ki $i = 1, \dots, n-1$ için $[x_i, \xi]$ doğru parçası ile $[x_i, x_{i+1}]$ doğru parçası arasındaki açı, $[x_i, x_{i+1}]$ ile $[x_{i+1}, \xi]$ arasındaki açığa eşittir.

Şimdi bu ξ noktasının kutup çemberini göz önüne alalım. $i = 1, \dots, n$ için x_i ve ξ noktalarından geçen doğrunun kutup çemberini kestiği noktalardan x_i noktasına yakın olanına \underline{x}_i diyelim.



Şekil 3.2: n-tamsayı düğüm grubunun temsilinin $S^2_{\frac{\pi}{2}}$ deki konfigürasyonu.

Bu durumda $i = 1, \dots, n$ için

$$\underline{x}_i = \frac{1}{\cos \theta} (\xi \times x_i) \times \xi$$

olur. $(\xi \times x_i) \times \xi = \langle \xi, \xi \rangle x_i - \langle x_i, \xi \rangle \xi$ ve $\sin \theta = \langle x_i, \xi \rangle$ olduğundan

$$\underline{x}_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \langle x_i, \xi \rangle^2}} (x_i - \langle x_i, \xi \rangle \xi)$$

eşitliği elde edilir. Böylece aşağıdaki yardımcı teoremi kanıtlamış oluruz.

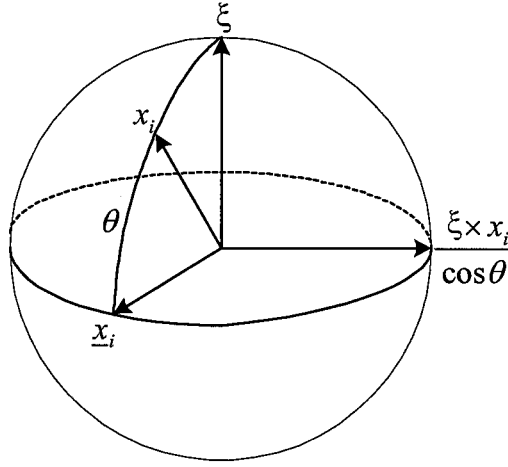
YARDIMCI TEOREM 10 k, S^3 de bir n-tamsayı düğümü ve G bu düğümün grubunun Wirtinger gösterimi olsun. Eğer G den $SU(2)$ ye bir grup homomorfizmi varsa bu homomorfizm bir çember temsili indirger.

Şimdi varsayalım $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ noktaları yukarıda bahsettiğimiz gibi bir n-tamsayı düğümünün bir çember temsili ve bu noktaları üzerinde bulunduran çember Γ olsun. Yani G yine bu düğümün grubunun üreteçleri X_1, X_2, \dots, X_n olan Wirtinger gösterimi olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi: G &\longrightarrow S^3 \\ X_i &\longrightarrow \phi(X_i) = \underline{x}_i \end{aligned}$$

bir homomorfizm öyle ki $i = 1, \dots, n$ için \underline{x}_i noktaları $\Gamma \subset S^2_{\frac{\pi}{2}}$ doğrusu üzerinde olsun. Bu Γ çemberinin kutup noktasına ζ diyelim. Bir $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ alalım. $i \in \{1, \dots, n\}$ için ζ ve \underline{x}_i noktalarından geçen doğruya Γ_i dersek

$$x_i = \underline{x}_i \cos \theta + \zeta \sin \theta$$



Şekil 3.3: Çember temsili oluşturulan noktaların elde edilişi.

eşitliğini sağlayan x_i noktalarını düşünelim. $\beta = \frac{\pi}{2} - \theta$ yani $i \in \{1, \dots, n\}$ için x_i ile ζ arasındaki uzaklık β olsun.

$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ noktaları bir çember temsili oluşturduğundan herhangi bir $i \in \{1, \dots, n-2\}$ için

$$d(\underline{x}_i, \underline{x}_{i+1}) = d(\underline{x}_{i+1}, \underline{x}_{i+2})$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla $[\underline{x}_i, \zeta]$ doğru parçası ile $[\zeta, \underline{x}_{i+1}]$ doğru parçası arasındaki açı, $[\zeta, \underline{x}_{i+1}]$ ile $[\zeta, \underline{x}_{i+2}]$ arasındaki açığa eşittir. Bu açığa φ diyelim. Yani

$$\sphericalangle([\underline{x}_i, \zeta], [\zeta, \underline{x}_{i+1}]) = \sphericalangle([\underline{x}_{i+1}, \zeta], [\zeta, \underline{x}_{i+2}]) = \varphi$$

olsun. Ayrıca $i \in \{1, \dots, n-1\}$ için

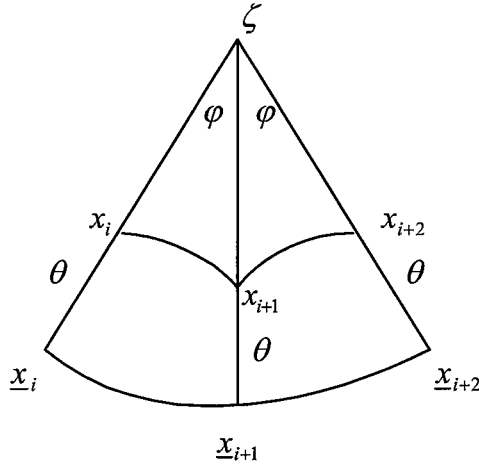
$$d(x_i, \zeta) = d(\zeta, x_{i+1}) = \beta$$

olduğundan $i \in \{1, \dots, n-2\}$ için

$$d(x_i, x_{i+1}) = d(x_{i+1}, x_{i+2})$$

olur.

$i \in \{1, \dots, n-1\}$ için $[\zeta, x_i]$ doğru parçası ile $[x_i, x_{i+1}]$ doğru parçası arasındaki açığa α dersek $\zeta x_i x_{i+1}$ üçgeni ikizkenar olduğundan $[x_i, x_{i+1}]$ doğru parçası ile $[x_{i+1}, \zeta]$ doğru parçası arasındaki açının da α olduğu açıktır. Herhangi bir



Şekil 3.4: $S^2_{\frac{\pi}{2}}$ konfigürasyonundaki eş ikizkenar üçgenler.

$i \in \{1, \dots, n-1\}$ için bu $\zeta x_i x_{i+1}$ ikizkenar üçgeni göz önüne alınırsa kosinüs kuralından

$$\cos \alpha = \frac{\langle \zeta, x_{i+1} \rangle - \langle x_i, x_{i+1} \rangle \langle x_i, \zeta \rangle}{\sqrt{1 - \langle x_i, x_{i+1} \rangle^2} \sqrt{1 - \langle x_i, \zeta \rangle^2}}$$

eşitliği elde edilir.

$i \in \{1, \dots, n-2\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_i &= \underline{x}_i \cos \theta + \zeta \sin \theta \\ x_{i+1} &= \underline{x}_{i+1} \cos \theta + \zeta \sin \theta \\ x_{i+2} &= \underline{x}_{i+2} \cos \theta + \zeta \sin \theta \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından

$$\langle x_i, x_{i+1} \rangle = \langle \underline{x}_i, \underline{x}_{i+1} \rangle \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

olur. ve burada $\langle \underline{x}_i, \underline{x}_{i+1} \rangle = \cos \varphi$ olduğundan

$$\langle x_i, x_{i+1} \rangle = \cos^2 \theta \cos \varphi + \sin^2 \theta$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi elde edilen bu eşitlikleri kullanarak aşağıdaki düzenlemeleri

yapalım.

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \frac{\sin \theta - \sin \theta (\cos^2 \theta \cos \varphi + \sin^2 \theta)}{\sqrt{1 - (\cos^2 \theta \cos \varphi + \sin^2 \theta)^2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta}} \\
 &= \frac{\sin \theta (1 - \cos^2 \theta \cos \varphi - \sin^2 \theta)}{\cos \theta \sqrt{1 - (\cos^2 \theta \cos \varphi + \sin^2 \theta)^2}} \\
 &= \frac{\sin \theta \cos^2 \theta (1 - \cos \varphi)}{\cos \theta \sqrt{1 - (\cos^2 \theta \cos \varphi + \sin^2 \theta)^2}} \\
 &= \frac{\sin \theta \cos \theta (1 - \cos \varphi)}{\sqrt{1 - (\cos^2 \theta \cos \varphi + \sin^2 \theta)^2}}
 \end{aligned}$$

$1 - (\cos^2 \theta \cos \varphi + \sin^2 \theta)^2$ ifadesini düzenlemek istersek

$$\begin{aligned}
 1 - (\cos^2 \theta \cos \varphi + \sin^2 \theta)^2 &= 1 - (\cos^2 \theta (\cos \varphi - 1) + 1)^2 \\
 &= (1 - \cos^2 \theta (\cos \varphi - 1) - 1) \\
 &\quad (1 + \cos^2 \theta (\cos \varphi - 1) + 1) \\
 &= -\cos^2 \theta (\cos \varphi - 1) (2 + \cos^2 \theta (\cos \varphi - 1)) \\
 &\quad \cos^2 \theta (1 - \cos \varphi) (2 + \cos^2 \theta (\cos \varphi - 1))
 \end{aligned}$$

şeklini alır ve bu ifade

$$\cos \alpha = \frac{\sin \theta \cos \theta (1 - \cos \varphi)}{\sqrt{1 - (\cos^2 \theta \cos \varphi + \sin^2 \theta)^2}}$$

eşitliğinde yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\cos \alpha = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \cos \varphi}}{\sqrt{2 + \cos^2 \theta (\cos \varphi - 1)}}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{1 + \cos \varphi}}{\sqrt{2 + \cos^2 \theta (\cos \varphi - 1)}}$$

olur. Şimdi $i \in \{1, \dots, n\}$ olmak üzere S_α^2 küresinde bulunan

$$X_i = \cos \alpha + x_i \sin \alpha$$

yani

$$X_i = \frac{1}{\sqrt{2 + \cos^2 \theta (\cos \varphi - 1)}} \left\{ \sin \theta \sqrt{1 - \cos \varphi} + \sqrt{1 + \cos \varphi} (x_i \cos \theta + \zeta \sin \theta) \right\}$$

şeklindeki X_1, X_2, \dots, X_n noktalarını göz önüne alalım.

$$d(x_i, x_{i+1}) = d(x_{i+1}, x_{i+2})$$

ve

$$\langle ([x_i, x_{i+1}], [x_{i+1}, x_{i+2}]) \rangle = 2\alpha$$

olduğundan

$$X_{i+2} = X_{i+1}X_iX_{i+1}^{-1}$$

eşitliği sağlanır. Yani $i \in \{1, \dots, n\}$ olmak üzere elde edilen $X_i = e^{\alpha x_i}$ noktaları G düğüm grubunun Wirtinger gösterimindeki bağıntıları sağlar.

Böylece n tamsayı düğümünün grubunun bir çember temsilinden $\alpha > \frac{\pi-\varphi}{2}$ olmak üzere S_α^2 küresindeki bir temsil elde edilmiş olur. Ayrıca $-\theta$ alınması halinde benzer konfigürasyon elde edileceği ve bu konfigürasyonun da $S_{\pi-\alpha}^2$ küresindeki bir temsili vereceği açıktır. $-\theta$ için elde edilen konfigürasyondan ise $\alpha < \pi - \frac{\pi-\varphi}{2}$ olur.

Diyagramı Şekil (3.1) de verilen n tamsayı düğümünün grubu G ile gösterilmek üzere G grubunun bir çember temsilini ele alalım. Yani

$$\begin{aligned} \phi_t : G &\longrightarrow S^3 \\ X_i &\longrightarrow x_i \end{aligned}$$

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ve $x_i \in S_{\frac{\pi}{2}}^2$ olacak biçimde bir homomorfizm olsun. Bu şekildeki bir homomorfizm için $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ olmak üzere

$$d(x_i, x_{i+1}) = d(x_{i+1}, x_{i+2})$$

olduğu açıktır. Bu uzunluğu φ_t ile gösterirsek, $t \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ olmak üzere $\varphi_t = \frac{2t\pi}{n}$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda yukarıdaki argümanla ϕ_t çember temsilinden $\frac{\pi-\varphi_t}{2} < \alpha < \frac{\pi+\varphi_t}{2}$ özelliğindeki her α için S_α^2 ve $S_{\pi-\alpha}^2$ kürelerinde birer temsil elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem kanıtlanmış oldu:

TEOREM 11 k, S^3 de bir n -tamsayı düğümü, G bu düğümün grubunun Wirtinger gösterimi ve $\varphi \in \left\{ \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2(n-1)\pi}{n} \right\}$ olsun. G nin indirgenemez bir $SU(2)$ temsilinin olması için gerek ve yeter koşul üreteçlerin görüntülerinin aynı α (küresel) yarıçaplı, $+1$ merkezli küre yüzeyi üzerinde olması ve $\frac{\pi-\varphi}{2} < \alpha < \frac{\pi+\varphi}{2}$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır

3.3.1 Temsil Uzayı

Az önce k bir n -tamsayı düğümü olmak üzere bu düğümün grubunun herhangi bir indirgenemez $SU(2)$ temsilinin tek türlü belirgin bir çember temsili

verdiğini gördük. Öte yandan verilen bir $SU(2)$ temsilin üreteçleri hangi eşlenik sınıfına taşıdığını Teorem (16) ile karakterize ettik. Bu teoremden herhangi bir S_α^2 küresinde en az iki üreticinin görüntüsü farklı bir temsiline olması için gerekli ve yeterli koşulun $\varphi \in \left\{ \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2(n-1)\pi}{n} \right\}$ olmak üzere

$$\frac{\pi - \varphi}{2} < \alpha < \frac{\pi + \varphi}{2}$$

olduğunu gördük. n -tamsayı düğümünün grubunun $SO(3)$ denk olmayan çember temsillerinin sayısı $\frac{n-1}{2}$ olduğundan ve her bir ϕ_t çember temsilinden φ_t yukarıdaki gibi tanımlanmak üzere $\frac{\pi - \varphi_t}{2} < \alpha < \frac{\pi + \varphi_t}{2}$ özelliğindeki her α için S_α^2 ve $S_{\pi - \alpha}^2$ kürelerinde birer indirgenemez temsil elde edildiğinden $R^*(G)/SO(3)$ uzayı $\frac{n-1}{2}$ tane açık aralığın ayrık birleşimidir.

Bölüm 4

$(2, n)$ TİPİNDEKİ İKİ KÖPRÜLÜ DÜĞÜMLERİN $SU(2)$ TEMSİLLERİ UZAYI

4.1 Başlangıç Örneği

Genel teoreme başlamadan önce aşağıdaki basit örnekle genel durum hakkında bilgi edinelim.

Diyagramı Şekil(4.1) deki gibi verilen $(2, 3)$ iki köprülü düğümünü göz önüne alalım. Bu düğümün temel grubu G nin Wirtinger gösterimi,

$$\begin{aligned} R_1 &= Y_3^{-1}Y_2^{-1}Y_1Y_2 \\ R_2 &= Y_2^{-1}Y_3^{-1}Y_4Y_3 \\ R_3 &= Y_5^{-1}Y_4^{-1}Y_3Y_4 \\ R_4 &= Y_1^{-1}Y_5^{-1}Y_2Y_5 \\ R_5 &= Y_4^{-1}Y_1^{-1}Y_5Y_1 \end{aligned}$$

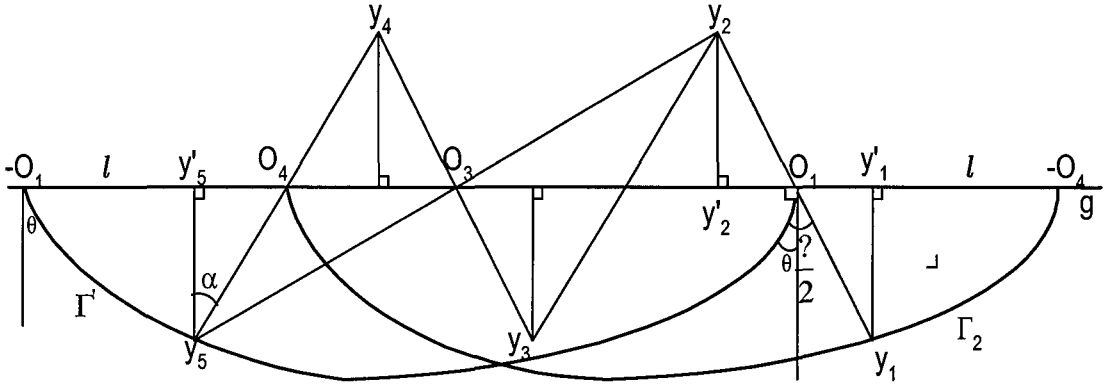
olmak üzere

$$G = \langle Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \mid R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 \rangle$$

şekindedir.

Düğüm grubunun bir S^3 temsili yani bir

$$\phi : G \rightarrow S^3$$



Şekil 4.3: (2,3) düğümünün üreteçlerinin tamamel sanal kuaternion konfigürasyonu.

orta noktalarının aynı doğru üzerinde olduğu görülür. Bu doğruyu g ile gösterelim. Düğüm grubunun Wirtinger gösterimindeki R_4 ve R_5 bağıntılarından dolayı Şekil (4.2) deki testere dişleri için aşağıdaki koşullar sağlanır:

1. $[y_1, y_2]$ doğru parçasının orta dikmesi y_5 den geçer.
2. $[y_4, y_5]$ doğru parçasının orta dikmesi y_1 den geçer.
3. $\widehat{y_2 y_5 o_1} = \widehat{o_1 y_5 y_1} = \widehat{y_5 y_1 o_4} = \widehat{o_4 y_1 y_4} = \alpha$

Yukarıdaki koşullar altında

$$d(y_2, y_5) = d(y_5, y_1) = d(y_4, y_1)$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır.

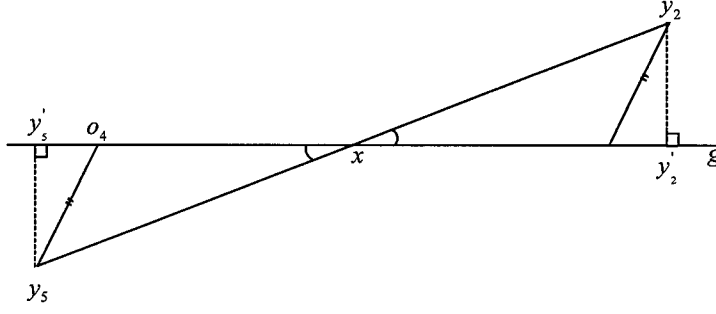
$i = 1, 2, 3, 4, 5$ için y_i noktasından g doğrusuna indirilen dikmenin g yi kestiği nokta y'_i ile gösterilsin. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(y'_i, o_i) &= d(o_i, y'_{i+1}) = k \\ d(y'_1, -o_4) &= d(y'_5, -o_1) = l \\ d(y_i, y'_i) &= h \end{aligned}$$

gösterimleri kullanılsın. Bu durumda $l = \pi - 7k$ olduğu açıktır.

Şimdi $[y_2, y_5]$ doğru parçasının g doğrusunu kestiği noktayı x ile gösterelim.

$$\begin{aligned} \widehat{o_4 x y_5} &= \widehat{y_2 x o_1} = \phi \\ d(y_2, x) &= a, d(y_5, x) = b, d(y'_2, x) = c, d(y'_5, x) = d \end{aligned}$$



Şekil 4.4: $[y_2, y_5]$ ve $[y'_2, y'_5]$ doğrularının arakesiti.

olsun. Bu durumda $y_5y'_5x$ ve $y_2y'_2x$ üçgenlerinde sinüs kuralı göz önüne alınırsa

$$\frac{\sin \phi}{\sin h} = \frac{1}{\sin a} = \frac{1}{\sin b}$$

yani

$$\sin a = \sin b$$

elde edilir. Bu durumda

$$a = b \text{ yada } a = \pi - b$$

olur. Önce varsayalım $a = b$ olsun. Bu durumda $y_2y'_2x$ ve $y_5y'_5x$ üçgenlerinde kosinüs kuralından

$$\cos \frac{\pi}{2} = \frac{\cos a - \cos h \cos c}{\sin h \sin c} = \frac{\cos b - \cos h \cos d}{\sin h \sin d}$$

yani

$$\cos c = \cos d$$

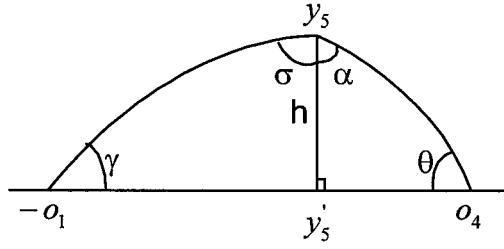
elde edilir. Buradan $c = d$ olur.

Şimdi $a = \pi - b$ olması durumunu inceleyelim. Yine $y_2y'_2x$ ve $y_5y'_5x$ üçgenlerinde kosinüs kuralından

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos h \cos c \\ \cos(\pi - a) &= \cos h \cos d \end{aligned}$$

eşitliklerine ulaşılır. Dolayısıyla

$$\cos c = -\cos d$$



Şekil 4.5: Gerek koşulu veren üçgenler.

yani $c = \pi - d$ olur ki bu da $y'_5 \neq \mp y'_2$ olması ile çelişir.

Sonuç olarak $[y_2, y_5]$ doğru parçası g doğrusunu y'_5 ile y'_2 noktalarının orta noktası olan o_3 noktasında keser. Benzer şekilde $[y_1, y_4]$ doğru parçasının g doğrusunu kestiği noktanın o_2 noktası olduğu kolayca görülebilir.

$[y_1, y_2]$ doğru parçasının orta dikmesine Γ' diyelim. g nin $-o_1$ noktasındaki dikmesi ile Γ' arasındaki açı θ ve $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ olsun. Bu durumda g nin o_1 noktasındaki dikmesi ile Γ' arasındaki açı da θ ve dolayısıyla $\widehat{y'_2 o_1 y_2}$ açısı θ olur. Böylece $i = 1, 2, 3, 4$ için

$$\widehat{y'_i o_i y_i} = \widehat{y_{i+1} o_i y'_{i+1}} = \theta$$

olduğu kolayca görülür. Bu konfigürasyondan aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$d(y_5, y'_5) = h$, $\widehat{-o_1 y_5 y'_5} = \sigma$ ve $d(y_5, o_4) = t$ olmak üzere Şekil (4.5) i göz önüne alalım. $-o_1 y_5 y'_5$ üçgeninde kosinüs kuralı düşünülürse

$$\cos h = \frac{\cos \gamma + \cos \frac{\pi}{2} \cos \sigma}{\sin \frac{\pi}{2} \sin \sigma}$$

yani

$$\cos h = \frac{\cos \gamma}{\sin \sigma}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $o_4 y_5 y'_5$ üçgeni göz önüne alınarak

$$\cos h = \frac{\cos \theta + \cos \alpha \cos \frac{\pi}{2}}{\sin \alpha \sin \frac{\pi}{2}}$$

yani

$$\cos h = \frac{\cos \theta}{\sin \alpha}$$

eşitliğine ulaşılır. Elde edilen bu iki eşitlikten

$$\frac{\cos \gamma}{\sin \sigma} = \frac{\cos \theta}{\sin \alpha}$$

yani $\sin \sigma = \tan \theta \sin \alpha$ olur.

Şimdi $-o_1y_5y'_5$ üçgeninde sinüs kuralından

$$\frac{\sin \sigma}{\sin l} = \frac{\sin \gamma}{\sin h}$$

ve buradan

$$\sin h = \frac{\sin l \sin \gamma}{\sin \sigma}$$

olur. Benzer şekilde $o_4y_5y'_5$ üçgeninden

$$\frac{\sin \alpha}{\sin k} = \frac{\sin \theta}{\sin h}$$

yani

$$\sin h = \frac{\sin \theta \sin k}{\sin \alpha}$$

olur. Yine elde edilen bu son iki eşitlikten

$$\frac{\sin l \sin \gamma}{\sin \sigma} = \frac{\sin \theta \sin k}{\sin \alpha}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte $\sin \sigma = \tan \theta \sin \alpha$ ve $\sin \gamma = \cos \theta$ kullanılarak

$$\sin l = \tan^2 \theta \sin k$$

olur. $l = \pi - 7k$ olduğundan

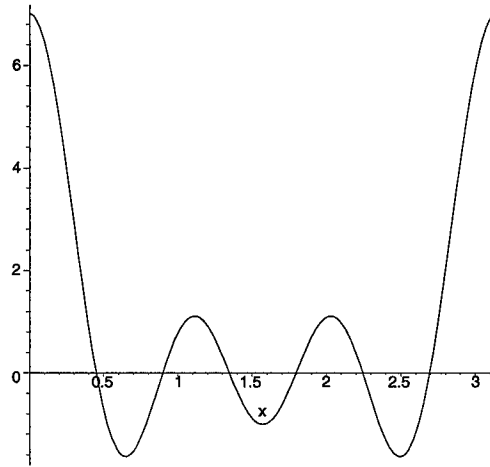
$$\frac{\sin 7k}{\sin k} = \tan^2 \theta$$

elde edilir.

Şimdi bundan sonraki bazı hesaplar için gerekli olan

$$f(x) = \frac{\sin ax}{\sin x}, \quad a \in 2\mathbb{Z}+1$$

fonksiyonunu inceleyelim. Bu fonksiyonun periyodu π olup $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ özelliğini sağlar. Dolayısıyla bu fonksiyonu $(0, \pi)$ aralığında inceleyebiliriz. Açık olarak bu fonksiyonun sıfırları $n \in \{1, 2, \dots, a-1\}$ olmak üzere $x_n = \frac{n\pi}{a}$ noktalarıdır. Bunlara ilaveten fonksiyonun türevini sıfır yapan noktalar $a = \tan ax \cot x$ eşitliğini



Şekil 4.6: $f(x) = \frac{\sin 7x}{\sin x}$ fonksiyonunun grafiği.

sağlayan noktalardır ve $\lim_{x \rightarrow \mp \frac{\pi}{2}} \tan x = \mp \infty$ olduğundan f fonksiyonunun ardışık iki sıfırı arasında $a = \tan ax \cot x$ denkleminin tek bir çözümü vardır. Dolayısıyla bu aralıkta yalnız bir yerel minimum ya da yalnız bir yerel maksimum vardır.

Özel olarak, $a = 7$ olması durumunda f fonksiyonunu göz önüne alalım ve $(2, 3)$ düğüm grubunun temsillerini incelemeye devam edelim. Şekil (4.3) göz önünde bulundurulursa $\theta = 0$ olması halinde her $y_i \in S_{\frac{\pi}{2}}^2$ noktasının g çemberi üzerinde olduğu ve $i = 1, 2, 3$ olmak üzere $d(y_i, y_{i+1}) = d(y_{i+1}, y_{i+2}) = 2k$ olduğu açıktır. Yani $f(x) = \frac{\sin 7x}{\sin x}$ fonksiyonunun her bir sıfırına karşılık bir çember temsili vardır.

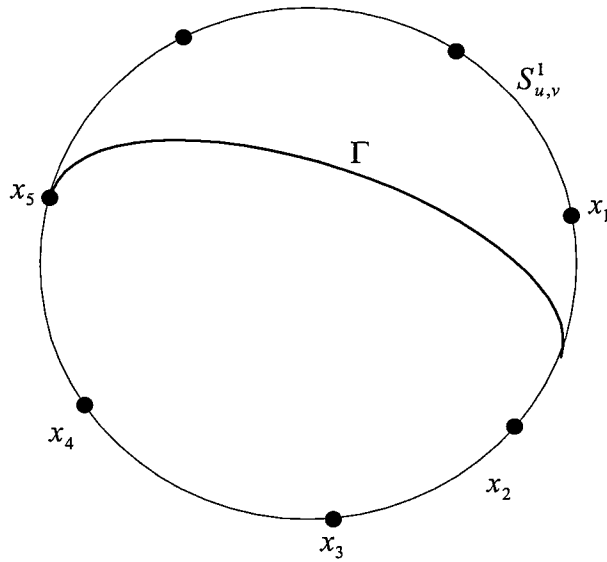
u, v tamamen sanal birim kuaternionlar kümesinin ortogonal herhangi iki elemanı olmak üzere

$$S_{u,v}^1 = \{u \cos \theta + v \sin \theta \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$$

kümesini ve diyagramı Şekil (4.1) deki gibi verilen $(2, 3)$ düğümünün grubunun üreteçlerini $S_{u,v}^1$ çemberine gönderen Şekil (4.7) da verilen çember temsilini göz önüne alalım. Şekilden anlaşıldığı gibi

$$\phi : G \rightarrow S_{u,v}^1 \subset S^3$$

homomorfizmi için $\phi(Y_i) = x_i$ şeklindedir ve $d(x_i, x_{i+1}) = d(x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{2\pi}{7}$ ($i = 1, 2, 3$) eşitliği sağlanır. Bu durumda $[x_1, x_2]$ doğru parçasının orta dikmesi olan Γ doğrusu x_3 noktasından geçer. x_1 ile x_2 nin orta noktasına o_1 diyelim.



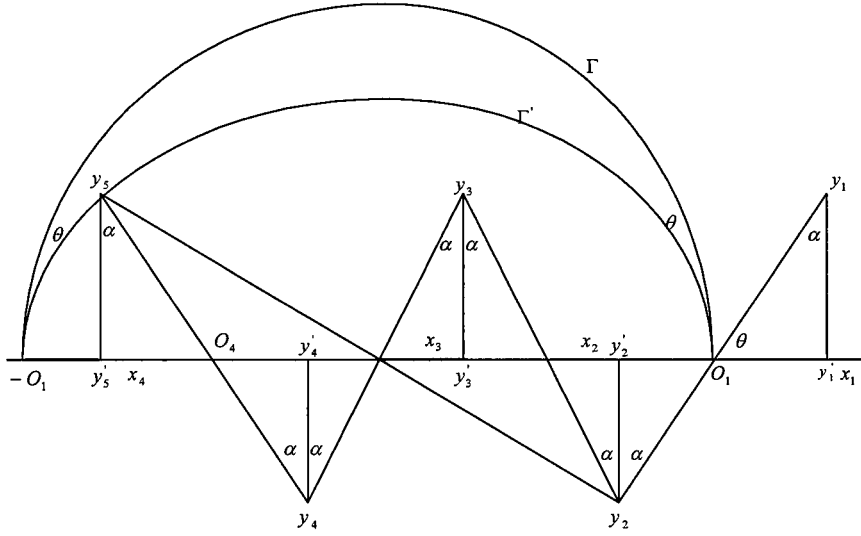
Şekil 4.7: (2,3) düğümünün bir çember temsili.

$\tan^2 \theta \in (0, 7)$ olacak şekilde $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığında bir θ seçelim ve $[x_1, x_2]$ doğru parçasının orta dikmesi olan Γ doğrusunun $o_1 x_5$ eksenini boyunca θ kadar döndürülmesi ile elde edilen doğruya Γ' diyelim. o_1 noktasından geçen ve Γ' doğrusuna dik olan doğruyu ise Γ_1 olarak adlandıralım. Şimdi göz önüne alınan bu θ için

$$\frac{\sin 7k}{\sin k} = \tan^2 \theta$$

eşitliğini sağlayan ve $[\frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}]$ aralığında olan k gerçel sayısını ele alalım. $S_{u,v}^1$ çemberi üzerinde o_1 noktasından k kadar uzaklıkta bulunan noktaları belirleyelim ve bunlardan x_2 noktasına yakın olanına y'_2 , diğerine y'_1 diyelim. $S_{u,v}^1$ çemberinin y'_2 noktasındaki dikmesinin Γ_1 doğrusunu kestiği noktalardan y'_2 ne yakın olanı y_2 , y'_1 noktasındaki dikmesinin Γ_1 doğrusunu kestiği noktalardan y'_1 ne yakın olanı ise y_1 olsun. Yine $S_{u,v}^1$ çemberi üzerinde y'_2 noktasına k kadar uzakta bulunan noktalardan x_4 noktasına yakın olanını belirleyelim ve bu noktaya da o_2 diyelim. Bu o_2 noktasından ve y_2 noktasından geçen doğru Γ_2 olsun. $S_{u,v}^1$ çemberi üzerinde o_2 noktasından k kadar uzaklıkta bulunan noktalardan x_4 e yakın olanı y'_3 , $S_{u,v}^1$ çemberinin bu noktadaki dikmesi ile Γ_2 nin arakesit noktalarından y'_3 noktasına yakın olanı ise y_3 olsun. Bu şekilde devam ederek y_4 ve y_5 noktalarını belirleyelim.

$$\frac{\sin 7k}{\sin k} = \tan^2 \theta$$



Şekil 4.8: (2,3) düğümü için çember temsilinden küre konfigürasyonuna geçiş.

eşitliğinin elde edilişi ve alınan θ için k nın bu eşitliği sağlayan gerçel sayı olarak seçilmesi göz önünde bulundurulursa y_5 noktasının Γ' doğrusu üzerinde olduğu açıktır. Ayrıca $i = 1, 2, 3, 4$ için

$$\widehat{y_i o_i y'_i} = \widehat{y_{i+1} o_i y'_{i+1}} = \theta$$

ve $i = 1, 2$ için

$$o_i \widehat{y_{i+1} o_{i+1}} = o_{i+1} \widehat{y_i o_{i+2}}$$

olduğu kolayca görülür.

$$o_i \widehat{y_{i+1} o_{i+1}} = o_{i+1} \widehat{y_i o_{i+2}} = 2\alpha$$

diyelim.

$d(-o_1, y'_5) = l$ olmak üzere o_4 ve y_1 noktalarından geçen doğruyu düşünürsek $d(y'_1, -o_4) = l$ olduğu kolayca görülür. Böylece

$$d(-o_1, y_5) = d(-o_4, y_1)$$

ve buradan

$$d(y_5, o_1) = d(y_1, o_4)$$

yani

$$\sin A = \frac{\cos \theta \sin 7k}{\sin h} \quad (4.2)$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece (4.1) ve (4.2) eşitliklerinden

$$\cos \alpha = \frac{\cos t \cos \theta \sin 7k}{\sin h} \quad (4.3)$$

olur. $y_5y_5'o_4$ üçgeninde sinüs kuralından da

$$\frac{\sin \theta}{\sin h} = \frac{\sin \alpha}{\sin k}$$

olduğundan

$$\sin h = \frac{\sin \theta \sin k}{\sin \alpha}$$

elde edilir. Bu son eşitlik (4.3) eşitliğinde kullanılırsa

$$\cos \alpha = \frac{\cos t \cos \theta \sin 7k \sin \alpha}{\sin \theta \sin k}$$

elde edilir. Yine $y_5y_5'o_4$ üçgeninde kosinüs kuralından

$$\cos t = \frac{\cos \frac{\pi}{2} + \cos \alpha \cos \theta}{\sin \alpha \sin \theta}$$

yani

$$\cos t = \frac{\cos \alpha \cos \theta}{\sin \alpha \sin \theta}$$

olduğundan

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha \cos^2 \theta \sin 7k}{\sin^2 \theta \sin k}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitliğin gerçekleşmesi için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\sin 7k}{\sin k} = \tan^2 \theta$$

eşitliğinin sağlanmasıdır ki bu da bizim verilen θ için k seçimimizi belirleyen eşitliktir.

Herhangi bir $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ için $y_iy_i'o_i$ üçgeninden

$$\alpha + \theta > \frac{\pi}{2}$$

olduğu açıktır. Ayrıca yine $y_iy_i'o_i$ üçgeninde kosinüs kuralından

$$\cos k = \frac{\cos \alpha + \cos \frac{\pi}{2} \cos \theta}{\sin \frac{\pi}{2} \sin \theta}$$

yani

$$\cos \alpha = \cos k \sin \theta$$

elde edilir. Böylece (2, 3) düğümünün Şekil (4.7) da verilen çember temsiline karşılık $\tan^2 \theta \in (0, 7)$ olacak şekilde $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığındaki θ ve $\frac{\sin 7k}{\sin k} = \tan^2 \theta$ eşitliğini sağlayan ve $[\frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}]$ aralığındaki k gerçel sayısı için $\cos \alpha = \cos k \sin \theta$ olmak üzere S_α^2 küresinde bir konfigürasyon elde edilmiş oldu.

$i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere y_i'' ; y_i ile y_i'' noktalarının orta noktası y_i' olacak şekildeki nokta olsun. Bu durumda her $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ için

$$\begin{aligned} d(y_i, y_{i+1}) &= d(y_i'', y_{i+1}'') \text{ ve} \\ \widehat{y_i' y_i'' o_i} &= \widehat{o_i y_{i+1}'' y_{i+1}'} = \alpha \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Ayrıca $S_{\frac{\pi}{2}}^2$ de y_1, y_2, y_3, y_4 ve y_5 noktalarının oluşturduğu düzgün testere dişlisi ile $y_1'', y_2'', y_3'', y_4''$ ve y_5'' noktalarının oluşturduğu dişli eş olduğundan $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere S^3 deki

$$Y_i' = e^{(\pi-\alpha)y_i''}$$

şeklindeki noktaların (2, 3) düğümünün grubunun bir $S_{\pi-\alpha}^2$ konfigürasyonu oluşturduğu sonucuna ulaşılır. Böylece düğüm grubunun Şekil (4.7) da verilen çember temsiline karşılık g doğrusundaki simetriden dolayı yukarıda bahsedilen koşulları sağlayan her α için S_α^2 ve $S_{\pi-\alpha}^2$ kürelerinde birer konfigürasyon elde edilmiş olur.

$f(x) = \frac{\sin 7x}{\sin x}$ fonksiyonunun herhangi bir $x_t = \frac{t\pi}{7}$ ($t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) sıfırına karşılık gelen çember temsili alınır, benzer argümanla

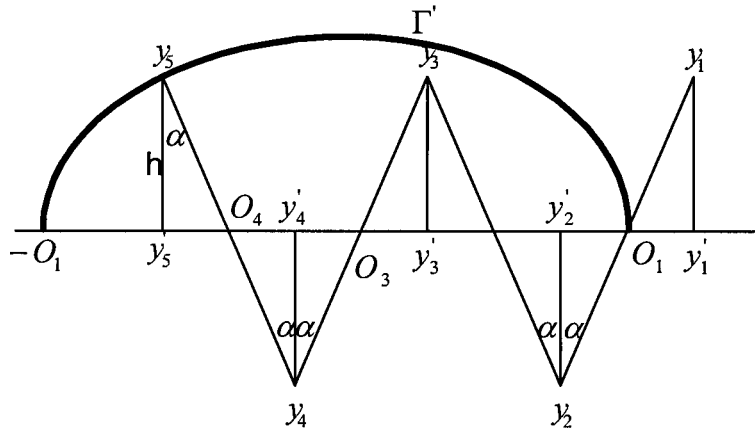
$$\tan^2 \theta_0 = \max \left\{ \frac{\sin 7x}{\sin x} \right\} ; x \in \left[\frac{(t-1)\pi}{7}, \frac{(t+1)\pi}{7} \right]$$

olmak üzere $\tan^2 \theta \in (0, \theta_0)$ olacak biçimdeki $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığındaki θ ve $[\frac{(2t-1)\pi}{14}, \frac{(2t+1)\pi}{14}]$ aralığındaki $\frac{\sin 7k}{\sin k} = \tan^2 \theta$ eşitliğini sağlayan k gerçel sayısı için bir S_α^2 küresinde konfigürasyon elde edilebilir.

Şimdi (2, 3) düğümünün bir $\alpha \in (0, \pi)$ için S_α^2 küresinde temsili olduğunu varsayalım. Yani $i = 1, 2, 3, 4, 5$ için $\phi(Y_i) = e^{\alpha y_i}$ olacak biçimde bir

$$\phi : G \rightarrow S^3$$

homomorfizmi olsun. G düğüm grubundaki bağıntılar ve önerme 13 göz önünde bulundurulursa y_i noktaları $S_{\frac{\pi}{2}}^2$ de istenilen üç koşulu sağlayan Şekil (4.10) de görüldüğü gibi bir düzgün testere dişlisi oluşturur.



Şekil 4.10: S_α^2 temsilinin konfigürasyonu.

Yine dışı üzerinde $[y_i, y_{i+1}]$ doğru parçasının orta noktasını alalım ve o_i ile gösterelim. Bilindiği gibi bu orta noktalar bir g doğrusu üzerinde bulunurlar. Daha önceki notasyonumuz gibi y_i noktalarından g doğrusuna inilen dikmelerin ayaklarını y'_i, y'_i ile o_i arasındaki uzaklığı k ile ve o_1 ile y_5 den geçen $[y_1, y_2]$ doğru parçasının orta dikmesi olan doğruyu Γ' ile gösterelim.

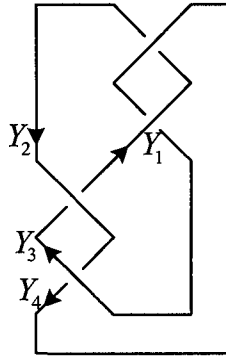
Yukarıda bahsettiğimiz y'_i ile o_i arasındaki uzaklığı gösteren k için

$$\frac{\sin 7k}{\sin k} = \tan^2 \theta$$

eşitliğini sağlayan θ açısının, Γ' ile g doğrusuna o_1 noktasında dik olan doğru arasındaki açı olduğunu biliyoruz. g doğrusuna o_1 noktasında dik olan bu çemberi Γ ile gösterelim.

Şimdi g çemberinin Γ doğrusu ile arakesit noktaları olan o_1 ve $-o_1$ arasını 7 eş parçaya bölelim. o_1 noktasına $\frac{\pi}{7}$ uzaklıkta bulunan noktalardan y'_2 noktasına yakın olanına x_2 , diğerine x_1 ve $\frac{3\pi}{7}$ uzaklıkta bulunan noktalardan y'_2 noktasına yakın olanına x_3 diyelim. Benzer şekilde $d(x_3, x_4) = d(x_4, x_5) = \frac{2\pi}{7}$ olacak biçimde x_4, x_5 noktalarını belirleyelim. Bu durumda $-o_1 = x_5$ olduğu ve $[x_1, x_2]$ doğru parçasının orta dikmesi olan Γ doğrusunun x_5 den geçtiği açıktır. Yani g doğrusu üzerindeki bu x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) noktaları $(2, 3)$ düğüm grubunun bir çember temsilidir. Böylece $(2, 3)$ düğümünün grubunun S_α^2 küresindeki bir temsilinden bir çember temsilini elde etmiş olduk.

Şimdi $n \in \mathbb{Z}$ olması durumunda $(2, n)$ tipindeki bir iki köprülü düğümün grubunun $SU(2)$ temsilleri uzayını incelememize yine bir örnekle başlayalım.



Şekil 4.11: (2,2) düğümü diyagramı.

Diyagramı Şekil (4.11) daki gibi olan (2, 2) tipindeki iki köprülü (sekiz şekli) düğümü göz önüne alalım. Bu durumda düğümün temel grubu G nin Wirtinger gösterimi;

$$\begin{aligned} R_1 &= Y_1^{-1} Y_2^{-1} Y_3 Y_2 \\ R_2 &= Y_2^{-1} Y_3 Y_4 Y_3^{-1} \\ R_3 &= Y_1^{-1} Y_4^{-1} Y_2 Y_4 \\ R_4 &= Y_3^{-1} Y_1 Y_4 Y_1^{-1} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$G = \langle Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \mid R_1, R_2, R_3, R_4 \rangle$$

şeklindedir.

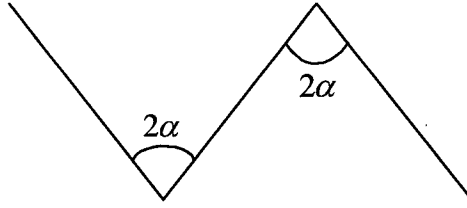
G grubunun bir S^3 temsilini yani bir

$$\phi : G \longrightarrow S^3$$

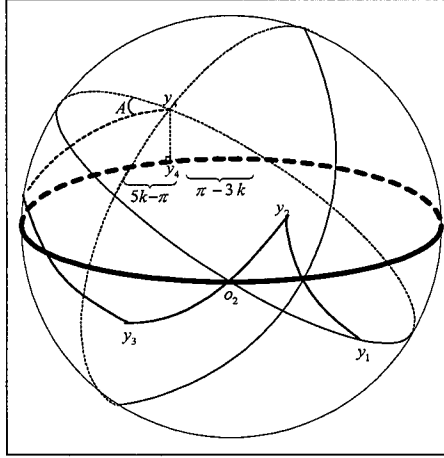
homomorfizmini göz önüne alalım. Eşlenik olma homomorfizm altında korunduğundan ve Önerme 13 ve 14 den dolayı, $i = 1, 2, 3, 4$ ve $y_i \in S_{\frac{\pi}{2}}^2$ olmak üzere, bir $\alpha \in (0, \pi)$ için $\phi(Y_i) = e^{\alpha y_i}$ şeklindedir ve R_1, R_2 bağıntılarından y_1, y_2, y_3, y_4 noktaları $S_{\frac{\pi}{2}}^2$ de Şekil (4.12) deki gibi bir düzgün dişli oluştururlar. Yine gösterim kolaylığı açısından $\phi(Y_i)$ görüntülerini de Y_i şeklinde gösterelim.

$i = 1, 2, 3$ için $[y_i, y_{i+1}]$ doğru parçasının orta noktasını o_i ile gösterirsek bir önceki örnekte olduğu gibi o_i noktalarının bir doğru üzerinde olduğu görülür, bu doğruyu yine g ile gösterelim.

Ayrıca düğüm grubunun Wirtinger gösterimindeki R_3 ve R_4 bağıntılarından dolayı Şekil (4.12) deki dişli aşağıdaki koşulları sağlar:



Şekil 4.12: (2,2) düğümünden elde edilen dişli.



Şekil 4.13: (2,2) düğümü için konfigürasyonun küre yüzeyindeki görüntüsü.

1. $[y_1, y_2]$ doğru parçasının orta dikmesi y_4 den geçer.
2. $[y_3, y_4]$ doğru parçasının orta dikmesi y_1 den geçer.
3. $\widehat{y_2 y_4 o_1} = \widehat{o_1 y_4 y_1} = \widehat{y_4 y_1 o_3} = \widehat{o_3 y_1 y_3} = \alpha$

Yine bir önceki örnekte kullandığımız notasyonları kullanalım Şekil (4.14). Bu durumda $[y_1, y_4]$ doğru parçasının g doğrusunu o_2 noktasında kestiği bir önceki örnekte kullanılan argümanla görülebilir. Böylece

$$\begin{aligned} d(y'_4, -o_2) &= \pi - 3k \\ d(y'_4, -o_1) &= 5k - \pi \end{aligned}$$

olur.

$[y_1, y_2]$ doğru parçasının orta dikmesine Γ' diyelim. g nin $-o_1$ noktasındaki dikmesi ile Γ' arasındaki açı θ ve $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ olsun. Bu durumda g nin o_1 noktasındaki

olur. Benzer şekilde $y_4y_4' - o_1$ dik üçgeninden

$$\cos h = \frac{\cos \gamma + \cos \frac{\pi}{2} \cos \sigma}{\sin \frac{\pi}{2} \sin \sigma} = \frac{\cos \gamma}{\sin \sigma}$$

elde edilir. Bu iki eşitlikten

$$\frac{\cos \theta}{\sin \alpha} = \frac{\cos \gamma}{\sin \sigma}$$

ve $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ olduğundan

$$\sin \sigma = \tan \theta \sin \alpha$$

eşitliğine ulaşılır.

$d(y_4', -o_1) = 5k - \pi$ olmak üzere $y_4y_4' - o_1$ üçgeninde sinüs kuralından

$$\frac{\sin \sigma}{\sin (5k - \pi)} = \frac{\sin \gamma}{\sin h}$$

yani

$$\sin h = \frac{-\cos \theta \sin 5k}{\sin \sigma} \quad (4.4)$$

elde edilir. Benzer şekilde $y_4y_4'o_3$ üçgeninde sinüs kuralından

$$\frac{\sin \alpha}{\sin k} = \frac{\sin \theta}{\sin h}$$

yani

$$\sin h = \frac{\sin k \sin \theta}{\sin \alpha} \quad (4.5)$$

eşitliğine ulaşılır. (4.4) ve (4.5) eşitliklerinden

$$\frac{-\cos \theta \sin 5k}{\sin \sigma} = \frac{\sin k \sin \theta}{\sin \alpha}$$

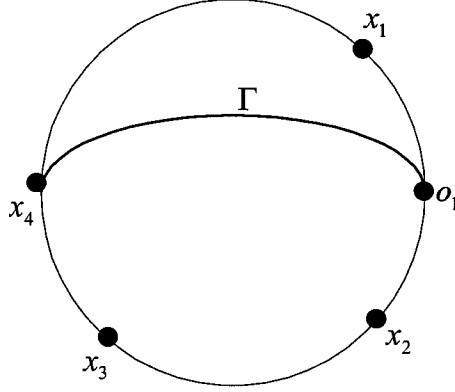
ve burada $\sin \sigma = \tan \theta \sin \alpha$ oluşu kullanılırsa

$$\frac{\sin 5k}{\sin k} = -\tan^2 \theta$$

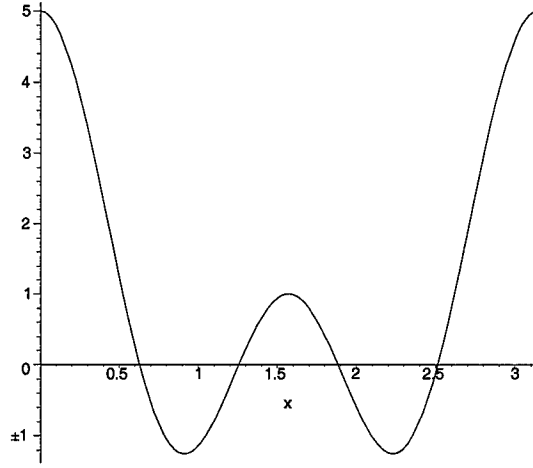
olur.

Yine u, v tamamen sanal birim kuaternionlar kümesinin ortogonal herhangi iki elemanı olmak üzere G düğüm grubunun üreteçlerini

$$S_{u,v}^1 = \{u \cos \theta + v \sin \theta \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$$



Şekil 4.16: (2,2) düğümünün bir çember temsili.



Şekil 4.17: $f(x) = \frac{\sin 5x}{\sin x}$ fonksiyonunun grafiği

çemberine gönderen, Şekil (4.16) de verilen çember temsili göz önüne alalım.

Yani $i = 1, 2, 3, 4$ için $x_i \in S_{u,v}^1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow S^3 \\ Y_i &\longrightarrow x_i \end{aligned}$$

$d(x_i, x_{i+1}) = d(x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{2\pi}{5}$ ($i = 1, 2$) olacak biçimde bir homomorfizm olsun. Bu çember temsili $f(x) = \frac{\sin 5x}{\sin x}$ fonksiyonunun $\frac{\pi}{5}$ sıfırına karşılık gelen çember temsili olduğu açıktır. Bu durumda $[x_1, x_2]$ doğru parçasının orta dikmesinin x_4 den geçer. x_1 ile x_2 nin orta noktasına o_1 ve o_1 ile x_4 den geçen orta dikmeye ise Γ diyelim.

(2,3) tipindeki düğüm için yapılan başlangıç örneğine benzer argümanla $f(x) = \frac{\sin 5x}{\sin x}$ fonksiyonunu göz önüne alalım ve fonksiyonun $[0, \frac{2\pi}{5}]$ aralığındaki minimumuna θ_0 diyelim. $-\tan^2 \theta \in (\theta_0, 0)$ olacak şekilde $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığında bir θ seçelim. Γ doğrusunun o_1x_4 eksenini boyunca saat yönünde döndürülmesi ile elde edilen doğruyu ise Γ' ile gösterelim. o_1 noktasından geçen ve Γ' doğrusuna dik olan doğruyu alalım ve Γ_1 diyelim. Şimdi bu θ için

$$\frac{\sin 5k}{\sin k} = -\tan^2 \theta$$

eşitliğini sağlayan ve $[\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}]$ aralığındaki k gerçel sayısını göz önüne alalım. $S_{u,v}^1$ çemberi üzerinde o_1 noktasından k kadar uzaklıkta bulunan noktaları belirleyelim ve bunlardan x_2 noktasına yakın olanına y'_2 , diğerine y'_1 diyelim. $S_{u,v}^1$ çemberinin y'_2 noktasındaki dikmesinin Γ_1 doğrusunu kestiği noktalardan y'_2 ne yakın olanı y_2 , y'_1 noktasındaki dikmesinin Γ_1 doğrusunu kestiği noktalardan y'_1 ne yakın olanı ise y_1 olsun. Yine $S_{u,v}^1$ çemberi üzerinde y'_2 noktasına k kadar uzaklıkta bulunan noktaya o_2 diyelim. y_3 ve y_4 noktalarını da bir önceki örnekte olduğu gibi belirleyelim. Yani y_3 noktası, y_2 nin o_2 noktasında yansıtılması ile elde edilen nokta ve o_3 , o_1 noktasından $4k$ uzaklıkta bulunan noktalardan o_2 ye yakın olanı olmak üzere y_4 noktası, y_3 ün o_3 noktasında yansıtılması ile elde edilen nokta olsunlar.

$$\frac{\sin 5k}{\sin k} = -\tan^2 \theta$$

eşitliğinin elde edilmiş ve alınan θ için k nın bu eşitliği sağlayan gerçel sayı olarak seçilmesi göz önünde bulundurulursa y_4 noktasının Γ' doğrusu üzerinde olduğu açıktır. Ayrıca $i = 1, 2, 3$ için

$$\widehat{y_i o_i y'_i} = \widehat{y_{i+1} o_i y'_{i+1}} = \theta$$

ve

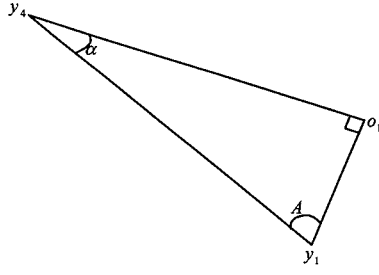
$$\widehat{o_1 y_2 o_2} = \widehat{o_2 y_3 o_3}$$

olduğu kolayca görülür.

$$\widehat{o_1 y_2 o_2} = \widehat{o_2 y_3 o_3} = 2\alpha$$

diyelim.

$o_1 o_3 y_4$ ve $o_3 o_1 y_1$ üçgenleri eş olduğundan o_3 ve y_1 noktalarından geçen doğru $[y_3, y_4]$ doğru parçasının orta dikmesidir.

Şekil 4.18: $o_1y_1y_4$ üçgeni.

Şimdi iddiamız $i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere y_i noktalarının oluşturduğu bu dişlinin $(2, 2)$ düğümünün grubunun S_α^2 küresindeki bir temsiline ait konfigürasyon olduğu. Bunun için $\widehat{y_1y_4o_1}$ açısının α ya eşit olduğunu görmek yeterlidir. Varsayalım $\widehat{y_1y_4o_1} = \alpha$ olsun.

$d(o_i, y_i) = d(o_i, y_{i+1}) = t$, $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ ve $\widehat{y_4y_1o_1} = A$ olmak üzere $y_4y_1o_1$ üçgeninde kosinüs kuralından

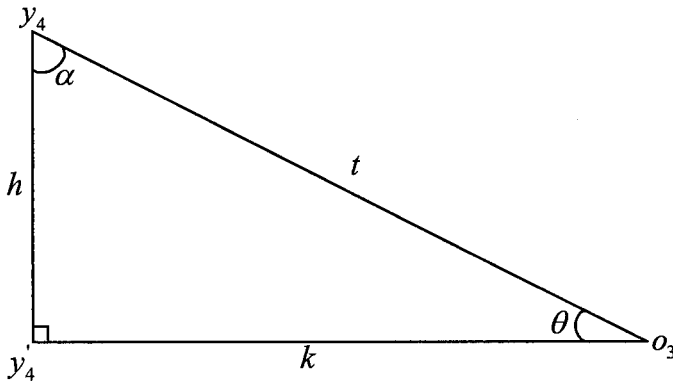
$$\cos t = \frac{\cos \alpha + \cos \frac{\pi}{2} \cos A}{\sin \frac{\pi}{2} \sin A}$$

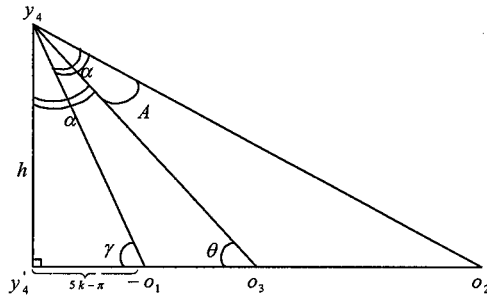
yani

$$\cos \alpha = \cos t \sin A \quad (4.6)$$

olur.

Benzer şekilde $y_4y_4'o_3$ dik üçgeninde kosinüs kuralı göz önüne alınırsa

Şekil 4.19: $o_1y_4y_4'$ üçgeni.



Şekil 4.20: (2,2) düğümü için yeter koşulu veren üçgenler.

$$\cos t = \frac{\cos \frac{\pi}{2} + \cos \alpha \cos \theta}{\sin \alpha \sin \theta}$$

elde edilir. Bu eşitlik (4.6) eşitliğinde kullanılırsa

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha \cos \theta}{\sin \alpha \sin \theta} \sin A \quad (4.7)$$

olur. Şimdi $o_2y_1o_1$ ve $o_2y_4o_3$ üçgenlerini göz önüne alırsak bu iki üçgenin eş olduğu açıktır. Dolayısıyla $\widehat{o_2y_4o_3} = A$ olur. $\widehat{y_1y_4 - o_1} = \alpha = \widehat{o_3y_4y_4'}$ oluşu göz önünde bulundurulursa $\widehat{-o_1y_4y_4'} = A$ olduğu sonucuna ulaşılır Şekil (4.20).

Bu durumda $y_4y_4' - o_1$ üçgeninde sinüs kuralı göz önüne alınırsa

$$\frac{\sin A}{\sin (5k - \pi)} = \frac{\sin \gamma}{\sin h}$$

yani

$$\sin A = \frac{-\cos \theta \sin 5k}{\sin h} \quad (4.8)$$

olur.

$y_4y_4'o_3$ üçgeninde sinüs kuralından ise

$$\frac{\sin \theta}{\sin h} = \frac{\sin \alpha}{\sin k}$$

yani

$$\sin h = \frac{\sin \theta \sin k}{\sin \alpha}$$

elde edilir. Bu eşitlik (4.8) eşitliğinde kullanılırsa

$$\sin A = \frac{-\cos \theta \sin 5k \sin \alpha}{\sin \theta \sin k}$$

olur. Böylece (4.7) eşitliği

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha \cos \theta - \cos \theta \sin 5k \sin \alpha}{\sin \alpha \sin \theta} \cdot \frac{\sin 5k \sin \alpha}{\sin \theta \sin k}$$

şeklini alır. Buradan

$$-\tan^2 \theta = \frac{\sin 5k}{\sin k}$$

eşitliğine ulaşılır ki bu da θ ya bağlı olarak k gerçel sayısını belirleyen eşitliktir. Bir önceki örnekte olduğu gibi herhangi bir $y_i y_i' o_i$ üçgeninden

$$\alpha > \frac{\pi}{2} - \theta$$

olur ve yine bu üçgende kosinüs kuralından

$$\cos k = \frac{\cos \alpha + \cos \frac{\pi}{2} \cos \theta}{\sin \frac{\pi}{2} \sin \theta}$$

yani

$$\cos \alpha = \cos k \sin \theta$$

elde edilir.

Böylece (2, 2) tipindeki iki köprülü düğüm grubunun alınan çember temsiline karşılık istenilen koşulları sağlayan θ ve k için $\cos \alpha = \cos k \sin \theta$ olmak üzere S_α^2 küresinde bir konfigürasyon elde edilmiş olur.

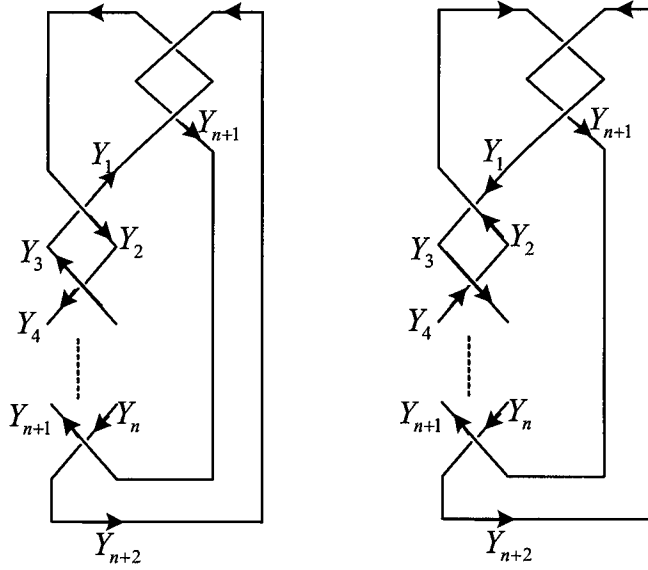
Benzer argümanla $f(x) = \frac{\sin 5x}{\sin x}$ fonksiyonunun herhangi bir $x_t = \frac{t\pi}{5}$ ($t \in \{1, 2, 3, 4\}$) sıfırına karşılık gelen çember temsili alınır,

$$-\tan^2 \theta_0 = \min \left\{ \frac{\sin 5x}{\sin x} \right\} ; x \in \left[\frac{(t-1)\pi}{5}, \frac{(t+1)\pi}{5} \right]$$

olmak üzere $-\tan^2 \theta \in (\theta_0, 0)$ olacak biçimdeki $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığındaki θ ve $\left[\frac{(2t-1)\pi}{10}, \frac{(2t+1)\pi}{10} \right]$ aralığındaki $\frac{\sin 5k}{\sin k} = -\tan^2 \theta$ eşitliğini sağlayan k gerçel sayısı için bir S_α^2 küresinde konfigürasyon elde edilebilir.

(2, 2) düğüm grubunun Şekil (4.12) da görüldüğü gibi bir S_α^2 konfigürasyonu için o_1 ile $-o_1$ arasını 5 eş parçaya bölerek ve Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 noktalarının görüntüleri bir önceki örnekte olduğu gibi belirlenerek grubun bir çember temsiline ulaşılır.

Şimdi genel duruma bakalım. Yani $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere (2, n) tipindeki bir iki köprülü düğümün S^3 temsillerini araştıralım. (2, n) tipindeki bir iki köprülü düğümün diyagramı $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ ya da $n \in 2\mathbb{Z}$ olması durumuna göre Şekil (4.21) da görüldüğü gibi yönlendirilmiş ve etiketlenmiş olsun.



Şekil 4.21: Sırasıyla $n \in 2\mathbb{Z}$ ve $n \in 2\mathbb{Z}+1$ için $(2,n)$ düğüm diyagramları.

$i = 1, 2, \dots, n$ için $R_i = Y_i^{-1}Y_{i+1}^{-\varepsilon_i}Y_{i+2}Y_{i+1}^{\varepsilon_i}$ ve $R_{n+1} = Y_{n+1}^{-1}Y_1^{\varepsilon_1}Y_{n+2}Y_1^{-\varepsilon_1}$, $R_{n+2} = Y_2^{-1}Y_{n+2}Y_1Y_{n+2}^{-1}$ olmak üzere $(2, n)$ tipindeki bir iki köprülü düğümün Wirtinger gösterimi;

$$G = \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+1}, Y_{n+2} \mid R_1, R_2, \dots, R_{n+1}, R_{n+2} \rangle$$

şekindedir. Burada $n \in 2\mathbb{Z}$ olması durumunda $i \in 2\mathbb{Z} + 1$ için $\varepsilon_i = -1$, $i \in 2\mathbb{Z}$ için $\varepsilon_i = +1$ ve $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ olması durumunda ise $i \in 2\mathbb{Z} + 1$ için $\varepsilon_i = +1$, $i \in 2\mathbb{Z}$ için $\varepsilon_i = -1$ dir.

Düğüm grubunun Wirtinger gösterimindeki bağıntılardan anlaşıldığı gibi herhangi iki üreteç eşleniktir. Ayrıca eşlenik olma homomorfizm altında korunduğundan ve S^3 de iki eleman eşlenirse gerçel kısımları eşit olduğundan, düğüm grubundaki bir Y_i elemanının S^3 deki görüntüsü olan nokta da Y_i ile gösterilmek üzere bir $\alpha \in (0, \pi)$ için

$$Y_i = e^{\alpha y_i}$$

şekindedir. S_α^2 küresinde bulunan bu Y_i noktaları $i = 1, 2, \dots, n$ için $\varepsilon_i = \mp 1$ olmak üzere $R_i = Y_i^{-1}Y_{i+1}^{-\varepsilon_i}Y_{i+2}Y_{i+1}^{\varepsilon_i}$ ve $R_{n+1} = Y_{n+1}^{-1}Y_1^{\varepsilon_1}Y_{n+2}Y_1^{-\varepsilon_1}$, $R_{n+2} = Y_2^{-1}Y_{n+2}Y_1Y_{n+2}^{-1}$ bağıntılarını sağladığından $S_{\frac{\alpha}{2}}^2$ de y_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) noktası y_{i+2} noktasının y_{i+1} etrafında 2α lık (sağ ya da sol) döndürülmesi ile elde edilir. Benzer şekilde y_2 noktası y_1 in y_{n+2} etrafında ve y_{n+1} noktası y_{n+2} nin y_1 etrafında 2α lık döndürülmesi

ile elde edilir. Buradan kolayca görüleceği gibi $i = 1, 2, \dots, n$ için $S_{\frac{\pi}{2}}^2$ de $[y_i, y_{i+1}]$ doğru parçasının uzunluğu ile $[y_{i+1}, y_{i+2}]$ doğru parçasının uzunluğu eşittir. Ayrıca $[y_i, y_{i+1}]$ doğru parçası ile $[y_{i+1}, y_{i+2}]$ arasındaki açı 2α dır. Yani $i = 1, 2, \dots, n + 2$ olmak üzere y_i noktaları $S_{\frac{\pi}{2}}^2$ küresinde Şekil (4.22) ve Şekil (4.26) de görüldüğü gibi düzgün dişli oluştururlar.

$i = 1, 2, \dots, n-1$ olmak üzere $S_{\frac{\pi}{2}}^2$ küresinde $y_i y_{i+1} y_{i+2}$ üçgeni ile $y_{i+1} y_{i+2} y_{i+3}$ üçgeni eş olduğundan $[y_i, y_{i+1}]$ ($i = 1, \dots, n + 1$) doğru parçasının orta noktası o_i olmak üzere, o_i noktaları $S_{\frac{\pi}{2}}^2$ de aynı doğru üzerinde bulunurlar. o_i noktalarını üzerinde bulduran bu doğruya g diyelim.

Başlangıç örneğinde bahsettiğimiz gibi y_i noktalarının $S_{\frac{\pi}{2}}^2$ küresinde oluşturduğu düzgün dişlinin aşağıdaki koşulları sağladığı düğüm grubunun Wirtinger gösterimindeki R_{n+1} ve R_{n+2} bağıntılarından açıktır:

1. $[y_1, y_2]$ doğru parçasının orta dikmesi y_{n+2} den geçer.
2. $[y_{n+1}, y_{n+2}]$ doğru parçasının orta dikmesi y_1 den geçer.
3. $\widehat{y_2 y_{n+2} o_1} = \widehat{o_1 y_{n+2} y_1} = \widehat{y_{n+2} y_1 o_{n+1}} = \widehat{o_{n+1} y_1 y_{n+1}} = \alpha$

Şimdi $(2, n)$ tipindeki iki köprülü düğümün grubunun $SU(2)$ temsilleri incelememize $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ olması durumu ile devam edelim.

$[y_2, y_{n+2}]$ doğru parçasının g doğrusunu kestiği noktaya x_1 dersek, başlangıç örneğinde kullanılan argümanla

$$d(o_{n+1}, x_1) = d(x_1, o_2)$$

eşitliğine ulaşılır. Yani $[y_2, y_{n+2}]$ doğru parçası g doğrusunu $o_{[\frac{n}{2}]+2}$ noktasında keser. Benzer şekilde $[y_1, y_{n+1}]$ doğru parçasının g doğrusunu $o_{[\frac{n}{2}]+1}$ noktasında kestiği kolayca görülebilir.

Başlangıç örneğinde kullandığımız gösterimlere benzer olarak $i = 1, 2, \dots, n+2$ için y_i noktasından g doğrusuna indirilen dikmenin bu doğruyu kestiği noktayı y'_i ile gösterelim ve ayrıca

$$d(y'_i, o_i) = d(o_i, y'_{i+1}) = k, \quad d(y'_1, -o_{n+1}) = d(y'_{n+2}, -o_1) = l$$

olsun. Bu durumda $l = \pi - (2n + 1)k$ olduğu açıktır.

Yine başlangıç örneğindeki gösterimleri kullanalım. Yani $[y_1, y_2]$ doğru parçasının orta dikmesi Γ_1 , g nin $-o_1$ noktasındaki dikmesi ile Γ_1 arasındaki açı

olur.

Şimdi yine u, v tamamen sanal birim kuaternionlar kümesinin ortogonal herhangi iki elemanı olmak üzere $(2, n)$ ($n \in 2\mathbb{Z} + 1$) tipindeki iki köprülü düğümün grubunun üreteçlerini

$$S_{u,v}^1 = \{u \cos \theta + v \sin \theta \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$$

çemberine gönderen bir S^3 temsilini göz önüne alalım. Bu çember temsil varsayalım

$$\phi_t : G \longrightarrow S^3$$

homomorfizmi ile verilsin ve düğüm grubunun her bir Y_i ($i = 1, \dots, n + 2$) üreteci için $\phi(Y_i) = x_i$ ve $d(x_i, x_{i+1}) = \gamma_t$ olsun. $f(x) = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ fonksiyonunun herhangi bir $x_t = \frac{t\pi}{(2n+1)}$ ($t \in \{1, 2, \dots, 2n\}$) sıfırına karşılık bir ϕ_t çember temsilinin var olduğunu biliyoruz. Yukarıda bahsettiğimiz ϕ_t çember temsili $x_t = \frac{t\pi}{(2n+1)}$ sıfırına karşılık gelen çember temsili olsun.

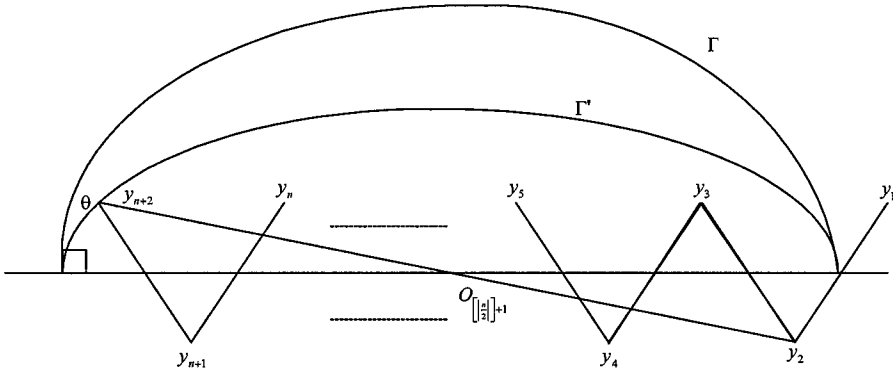
$$\tan^2 \theta_0 = \max \left\{ \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \right\} ; x \in \left[\frac{(t-1)\pi}{(2n+1)}, \frac{(t+1)\pi}{(2n+1)} \right]$$

olmak üzere $\tan^2 \theta \in (0, \theta_0)$ olacak biçimdeki $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığındaki θ gerçel sayısını alalım. $[x_1, x_2]$ doğru parçasının orta dikmesine Γ dersek, bu durumda Γ doğrusu x_{n+2} noktasından geçer. $[x_1, x_2]$ doğru parçasının orta noktası o_1 olmak üzere, Γ doğrusunun $o_1 x_{n+2}$ eksenı boyunca θ kadar döndürülmesi ile elde edilen doğruya Γ' diyelim. Bundan sonra

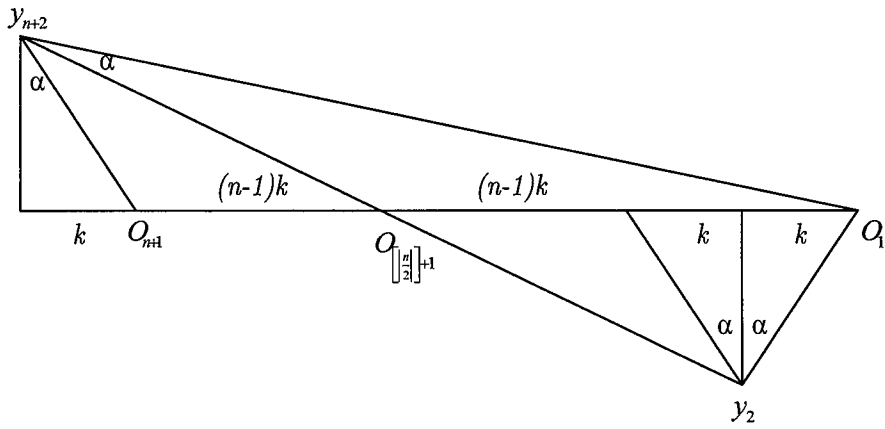
$$\frac{\sin(2n+1)k}{\sin k} = \tan^2 \theta$$

eşitliğini sağlayan $\left[\frac{(2t-1)\pi}{2n+1}, \frac{(2t+1)\pi}{2n+1} \right]$ aralığındaki $k \in \mathbb{R}$ sayısı için, başlangıç örneğinde kullandığımız argümanla y_1, y_2, \dots, y_{n+2} noktalarını belirleyelim.

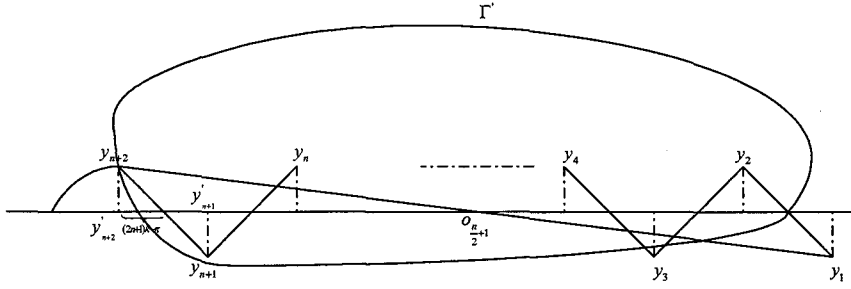
(2, 3) tipindeki iki köprülü düğüm için yapılan örnekte olduğu gibi, elde edilen $y_1, y_2, \dots, y_{n+2} \in S_{\frac{\pi}{2}}^2$ noktalarının $(2, n)$ düğüm grubunun üreteçlerinin $S_{\frac{\pi}{2}}^2$ küresindeki konfigürasyonu olduğu yani y_1, y_2, \dots, y_{n+2} noktalarının $S_{\frac{\pi}{2}}^2$ de oluşturduğu düzgün dişlinin istenilen koşulları sağladığı kolayca görülebilir. Herhangi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $o_i y_{i+1} o_{i+1} = 2\alpha$ olmak üzere $y_2 \widehat{y_{n+2}} o_1$ açısının α olduğunu görmek yeterlidir. Bu sağlanmasını istediğimiz koşullardan üçüncüsüdür. İlk iki koşul y_1, y_2, \dots, y_{n+2} noktalarının inşaa edilışinden açıktır.



Şekil 4.24: $(2,n)$ ($n \in 2\mathbb{Z}+1$) düğümü için çember temsilinden S_α^2 konfigürasyonuna geçiş.



Şekil 4.25: $(2,n)$ ($n \in 2\mathbb{Z}+1$) düğümü için yeter koşulu veren üçgenler.



Şekil 4.26: $(2, n)$ ($n \in 2\mathbb{Z}$) düğümü konfigürasyonu.

Şekil (4.25) göz önünde bulundurularak $\widehat{y_2 y_{n+2} o_1} = \alpha$ varsayımı altında başlangıç örneğinde uygulanan argümanla

$$\frac{\sin(2n+1)k}{\sin k} = \tan^2 \theta$$

eşitliğine ulaşılır ki bu da $k \in \mathbb{R}$ sayısının seçimini θ ya bağlı olarak belirleyen eşitlik olduğundan buradan üçüncü koşul kolaylıkla görülür.

$i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ olmak üzere $y_i y_i' o_i$ üçgeni göz önünde bulundurulursa $\alpha + \theta > \frac{\pi}{2}$ olduğu açıktır. Böylece $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ için $(2, n)$ tipindeki iki köprülü düğüm grubunun bir çember temsiline karşılık yukarıda açıklanan koşulları sağlayan θ ve k için $\cos \alpha = \cos k \cos \theta$ olacak biçimdeki S_α^2 küresinde bir konfigürasyon elde edilmiş olur.

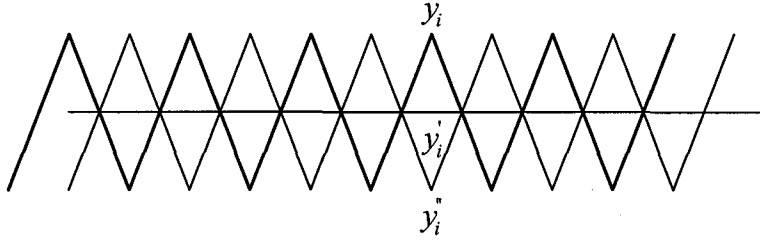
Şimdi $n \in 2\mathbb{Z}$ olması durumunda $(2, n)$ tipindeki bir iki köprülü düğüm grubunun $SU(2)$ temsilleri uzayını inceleyelim.

$(2, n)$ düğüm grubunun bir $\alpha \in (0, \pi)$ için S_α^2 küresindeki temsilinin $S_{\frac{\pi}{2}}^2$ de Şekil (4.26) de görüldüğü gibi bir konfigürasyon oluşturduğunu biliyoruz. Bu konfigürasyondan $(2, 2)$ sekiz şekli örneği için uygulanan argümanla $[y_1, y_2]$ doğru parçasının orta dikmesi olan Γ' doğrusu ile g nin o_1 noktasındaki dikmesi arasındaki açı θ olmak üzere

$$\frac{\sin(2n+1)k}{\sin k} = -\tan^2 \theta$$

eşitliğine ulaşılır.

$(2, n)$ ($n \in 2\mathbb{Z}$) düğüm grubunun $f(x) = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ fonksiyonunun $x_t = \frac{t\pi}{(2n+1)}$ ($t \in \{1, 2, \dots, 2n\}$) sıfırına karşılık gelen $\phi_t(Y_i) = x_i$ olacak şekildeki ϕ_t çember temsilini alalım. Bu çember temsilinden



Şekil 4.27: S_α^2 ve $S_{\pi-\alpha}^2$ konfigürasyonları.

$$-\tan^2 \theta_0 = \min \left\{ \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \right\} ; x \in \left[\frac{(t-1)\pi}{(2n+1)}, \frac{(t+1)\pi}{(2n+1)} \right]$$

olmak üzere $-\tan^2 \theta \in (\theta_0, 0)$ olacak biçimdeki $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığındaki θ ve $\left[\frac{(2t-1)\pi}{(2n+1)}, \frac{(2t+1)\pi}{(2n+1)} \right]$ aralığındaki $\frac{\sin(2n+1)k}{\sin k} = -\tan^2 \theta$ eşitliğini sağlayan k gerçel sayısı için bir S_α^2 küresinde bir temsil elde edilebilir.

$(2, n)$ tipindeki iki köprülü düğüm grubunun bir $\alpha \in (0, \pi)$ için S_α^2 küresinde temsilinin olduğunu varsayarak başlangıç örneğindeki argümanla çember temsiline ulaşılabilir.

Şimdi varsayalım $e^{\alpha y_1}, e^{\alpha y_2}, \dots, e^{\alpha y_{n+2}}$ noktaları $(2, n)$ düğüm grubu G nin bir S_α^2 konfigürasyonu olsun. Bu durumda y_1, y_2, \dots, y_{n+2} noktalarının $n \in 2\mathbb{Z}$ yada $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ olması durumuna göre Şekil (4.26) yada Şekil (4.22) da görüldüğü gibi bir dişli oluşturduğunu biliyoruz. y_i ve y_i' noktaları bu şekillerde görüldüğü gibi olmak üzere y_i'' noktaları Şekil (4.27) de görüldüğü gibi $d(y_i, y_i') = d(y_i', y_i'')$ eşitliğini sağlayan noktalar olsunlar. Bu durumda $i = 1, 2, \dots, n+2$ için y_i'' noktalarının $S_{\frac{\pi}{2}}^2$ de oluşturduğu dişli göz önüne alınırsa $e^{(\pi-\alpha)y_1''}, e^{(\pi-\alpha)y_2''}, \dots, e^{(\pi-\alpha)y_{n+2}''}$ noktalarının $S_{\pi-\alpha}^2$ küresinde bir konfigürasyon oluşturduğu açıktır.

ÖNERME 12 $e^{\alpha y_1}, e^{\alpha y_2}, \dots, e^{\alpha y_{n+2}}$ noktalarının G için S_α^2 da bir konfigürasyon olması için gerekli ve yeterli koşul y_i'' noktaları Şekil (4.27) de görüldüğü gibi olmak üzere $e^{(\pi-\alpha)y_1''}, e^{(\pi-\alpha)y_2''}, \dots, e^{(\pi-\alpha)y_{n+2}''}$ noktalarının $S_{\pi-\alpha}^2$ da bir konfigürasyon olmasıdır.

Elde ettiğimiz tüm bu sonuçlardan sonra şimdi diyagramı Şekil (4.21) de görüldüğü gibi olan $(2, n)$ düğümünün grubunun S^3 temsilleri uzayını karakterize edelim.

$\theta = 0$ değerine karşılık gelen temsilin çember temsili olduğunu biliyoruz. Yani $f(x) = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ fonksiyonunu sıfır yapan her bir $x_i \in (0, \pi)$ değerine karşılık bir çember temsili vardır. $f(x) = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ fonksiyonunun $(0, \pi)$ aralığındaki sıfır yerleri $x_1 = \frac{\pi}{2n+1}, \dots, x_t = \frac{t\pi}{2n+1}, \dots, x_{2n} = \frac{2n\pi}{2n+1}$ noktaları olduğundan her $t \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ için x_t noktasına karşılık $(2, n)$ düğümünün grubunun bir çember temsili vardır, bu temsile ϕ_t diyelim. Ayrıca $G = \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+2} \mid R_1, R_2, \dots, R_{n+2} \rangle$ grubunun bir ϕ_t çember temsili için yani $i \in \{1, 2, \dots, n+2\}$ olmak üzere $\phi_t(Y_i) \in S_{\frac{\pi}{2}}^2 \subset S^3$ olacak şekilde bir $\phi_t : G \rightarrow S^3$ homomorfizmi için $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere

$$d(\phi_t(Y_i), \phi_t(Y_{i+1})) = d(\phi_t(Y_{i+1}), \phi_t(Y_{i+2})) = \gamma_t$$

dersek $\gamma_t = \frac{2m\pi}{2n+1}$; $m \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ olduğunu biliyoruz. Bu çalışmada tartışılan yöntem göz önünde bulundurulursa f fonksiyonunun bir $x_t = \frac{t\pi}{2n+1}$ sıfır yeri ile bu noktaya karşılık gelen ϕ_t çember temsili arasındaki ilişkinin $\gamma_t = \frac{2t\pi}{2n+1}$ eşitliği olduğu açıktır. Şimdi $\gamma_t = \frac{2t\pi}{2n+1}$ ve $\gamma_{2n+1-t} = \frac{2(2n+1-t)\pi}{2n+1} = 2\pi - \frac{2t\pi}{2n+1}$ için elde edilen ϕ_t ve ϕ_{2n+1-t} çember temsillerini göz önüne alırsak bu temsiller $SO(3)$ denktirler. Yani $SO(3)$ denk olmayan çember temsillerinin sayısı n dir. $f(x) = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ fonksiyonunun grafiği incelenirse, $n \in 2\mathbb{Z}+1$ durumunda $t = 2, 3, \dots, n$ için x_t sıfırına karşılık gelen ϕ_t çember temsillerinin ikişer ikişer aynı S_{α}^2 küresine kadar konfigürasyonunun var olduğu görülür. $n \in 2\mathbb{Z}$ durumunda ise $t = 1, 2, \dots, n$ için x_t sıfırlarına karşılık gelen ϕ_t çember temsilleri ikişer ikişer aynı S_{α}^2 küresine kaldırılabilir.

$(2, n)$ tipindeki iki köprülü bir düğümün grubunun bir $x_t = \frac{t\pi}{2n+1}$ noktasına karşılık gelen ϕ_t çember temsili alalım. θ_0 aşağıdaki koşulları sağlayan $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığındaki reel sayı olsun.

- $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ ise,

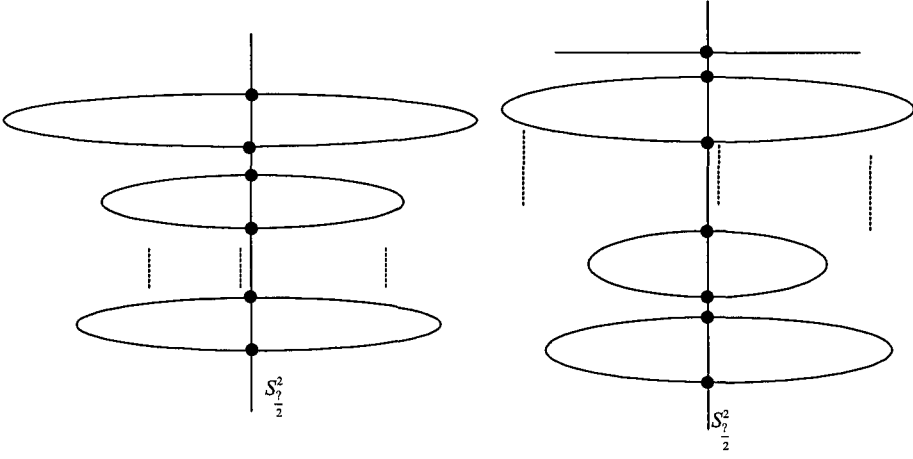
$$\tan^2 \theta_0 = \max \left\{ \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \right\} ; x \in \left[\frac{(t-1)\pi}{2n+1}, \frac{(t+1)\pi}{2n+1} \right]$$

- $n \in 2\mathbb{Z}$ ise,

$$-\tan^2 \theta_0 = \min \left\{ \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \right\} ; x \in \left[\frac{(t-1)\pi}{2n+1}, \frac{(t+1)\pi}{2n+1} \right]$$

Sonuç olarak aşağıdaki teorem kanıtlanmış olur ([3] ile karşılaştırınız).

TEOREM 13 $k, (2, n)$ tipinde bir iki köprülü düğüm olsun ve k nın grubunu G ile gösterelim. ϕ_t yukarıda bahsedildiği gibi $f(x) = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ fonksiyonunun $x_t = \frac{t\pi}{2n+1}$



Şekil 4.28: Temsil uzayı.

sıfırına karşılık gelen çember temsili ve θ_0 yukarıda bahsedilen koşulları sağlayan gerçel sayı olmak üzere, ϕ_t çember temsilinin ($S_{\frac{\pi}{2}}^2$ temsilinin) bir S_{α}^2 küresine kaldırılması için gerekli ve yeterli koşul

$$\frac{\pi}{2} - \theta_0 < \alpha < \frac{\pi}{2} + \theta_0$$

olmasıdır. Bunlara ilaveten G grubunun (indirgenemez) $SU(2)$ temsilleri uzayı; $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ durumunda $\frac{n-1}{2}$ tane çember ve bir açık aralığın ayrık birleşimi, $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ olması durumunda ise $\frac{n}{2}$ tane çemberin ayrık birleşimidir.

Kaynakça

- [1] BURDE, G., *SU(2)-representation spaces for two-bridge knot groups*, Math. Ann., **288**, 103-119, (1990)
- [2] RILEY, R., *Nonabelian representations of 2-bridge knot groups*, Quart. J. Math. Oxford Ser., **35**, 191-208, (1984)
- [3] KLASSEN, E.P., *Representations of the knot groups in SU(2)*, Transactions of the American Mathematical Society, **326**, 795-828, (1991)
- [4] GORDON, Mc.A. ve LUECKE, J., *Knots are determined by their complements*, Bull. Am. Math. Soc., **20**, 83-87, (1989)
- [5] BURDE, G. ve ZIESCHANG, H., *Knots*, de Gruyter, Berlin (1985)
- [6] MASSEY, W.S., *Algebraic topology: An introduction*, Springer-Verlag, New York (1967)
- [7] ROLFSEN, D., *Knots and links*, Publish or Perish Inc., (1976)
- [8] AZCAN, H., *Spherical representations of link quandles*, Ph. D. Thesis, Sussex, İngiltere (1991)
- [9] FOX, R., *Metacyclic invariants of knots and links*, Canad. J. of Math., **22**, 193-207, (1970)
- [10] HUMPREYS, J.E., *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies In Advanced Mathematics, Cambridge, İngiltere, (1990)
- [11] BERGER, M., *Geometry I ve II*, Springer-Verlag, Paris, Fransa, (1977)
- [12] RYAN, P., *Euclidean and non-euclidean geometry: An analytical approach*, Cambridge University Press, İngiltere, (1986)
- [13] MONTESINOS, J.M., *Classical tessellations and 3-manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, Almanya, (1987)