TEMEL GRUP VE
HESAPLAMA YÖNTEMLERİ

Murat KOPARAN
Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Eylül-2001

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Murat KOPARAN'ın Temel Grup ve Hesaplama Yöntemleri başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans tezi.14.11.2001.tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye(Tez Danışmanı)	:Doç. Dr. Hüseyin AZCAN	
Üye	:Prof. Dr. Şahin KOÇAK	
Üye	:Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 05.12.2001 Tarih ve ...35/1......sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

**TEMEL GRUP VE
HESAPLAMA YÖNTEMLERİ**

MURAT KOPARAN

**Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Doç.Dr.Hüseyin AZCAN
2001, 31 sayfa

Bu çalışmada; temel grup ve hesaplama yöntemleri verilmiştir. İki kapalı eğrinin çarpımı işlemi altında temel grup yapısını oluşturmamıza izin veren homotopi dönüşümü tanımlanmıştır. Homeomorfik yol-bağlantılı uzayların temel gruplarının izomorfik olduğu gösterilmiştir. Orbit uzayı tanımı verilerek basit bağlantılı uzayların temel grupları hesaplanmıştır. Bir kompleksin kenar grubu ve kenar grubuna izomorfik olan G(K,L) grubu tanımlanarak yol-bağlantılı üçgenlenebilen uzayların G(K,L) grubunda üreteç ve ilişkileri okumayla temel grupları hesaplanmıştır. Son olarak Van Kampen teoremini kullanarak üçgenlenebilen uzayların temel grup hesaplama örneği verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Homotopi, Temel Grup, Kenar Grup, Üçgenlenebilen Uzay

ABSTRACT

Master of Science Thesis

THE FUNDAMENTAL GROUP AND METHODS OF CALCULATIONS

MURAT KOPARAN

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Science
Mathematics Program

Supervisor: Assoc.Prof.Dr.Hüseyin AZCAN
2001, 31 pages

In this study, the fundamental group and calculation methods were put forward. Homotopi map which allows us to form the structure of the fundamental group was described. It was proved that the fundamental groups of homeomorfic path-connected spaces were izomorfic. The fundamental group of simply connected spaces were calculated by giving orbit space definition. The fundamental group was calculated through the reading of generator and relations at G(K,L) group of path-connected triangulable spaces by defining G(K,L) group which was izomorfic to the edge group and the edge group of a complex. Finally, the example of fundamental group calculation was put forward by using Van Kampen Theorem.

Keywords: Homotopy, Fundamental Group, Edge Group, Triangulable Space

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$<$	:	Küçük
$\leq$	:	Küçük eşit
$\forall$	:	Her
$\exists$	:	En az bir
$\in$	:	Eleman
$\cap$	:	Kesişim
$\cup$	:	Birleşim
f^{-1}	:	f fonksiyonunun tersi
$f \circ g$	:	f bileşke g
$\alpha(t)$	:	t elemanının α altında görüntüsü
$\alpha(T)$	:	T kümesinin α altında görüntüsü
$f : X \to Y$	:	f, X' den Y' ye fonksiyon
$X \xrightarrow{f} Y$	:	f, X' den Y' ye fonksiyon
$[a,b]$	:	a, b kapalı aralığı
X-a	:	X fark a
$X \setminus Y$	:	X fark Y
$\varnothing$	:	Boş küme
1_X	:	X' in birim elemanı
R^n	:	n boyutlu Euclidian uzayı
$\equiv$	:	Denk
$\cong$	:	İzomorf
$\sim$	:	bağıntı
$\simeq$	:	homotopi
f $\simeq$relA	:	Relative homotopi
$\langle \alpha \rangle$	:	Kapalı eğrinin denklik sınıfi
$\lvert K \rvert$	:	K' nın polihedronu
$A * B$	:	A ile B' nin serbest çarpımı
boy K	:	K kompleksinin boyutu

1 Temel Grup

1.1 Homotopik Dönüşümler

Tanım 1 : *Bir X topolojik uzayında x ve y noktaları verilmiş olsun. X uzayında x noktasından y noktasına bir yol $\alpha(0) = x$ ve $\alpha(1) = y$ özelliğine sahip olan $I = [0,1]$ olmak üzere $\alpha : I \to X$ sürekli fonksiyondur. Eğer $\alpha(0) = \alpha(1)$ ise X uzayında bir kapalı eğri ve $\alpha(0) = \alpha(1)$ noktasına bu eğrinin taban noktası denir.*

Tanım 2 : *Eğer $\alpha, \beta : I \to X$, X uzayında aynı taban noktasında iki kapalı eğri ise, $\alpha.\beta$ çarpımı;*

$$\alpha.\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & , \ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & , \ \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

şeklinde bir kapalı eğri olarak tanımlanır. $\alpha.\beta$ süreklidir.

Eğer $X = A \cup B$ verildiğinde A, B X de kapalı kümeler ve $f_1 : A \to Y$, $f_2 : B \to Y$ sürekli fonksiyonlar öyleki $\forall x \in A \cap B$ için $f_1(x) = f_2(x)$ olsun. Dolayısıyla,

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x) & , x \in A \\ f_2(x) & , x \in B \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $g : X \to Y$ fonksiyonu süreklidir. F , Y de kapalı bir küme olsun.

$$g^{-1}(F) = g^{-1}(F) \cap (A \cup B)$$

$$= (g^{-1}(F) \cap A) \cup (g^{-1}(F) \cap B)$$

$$= f_1^{-1}(F) \cup f_2^{-1}(F)$$

f_1 sürekli olduğundan $f_1^{-1}(F)$ A da kapalı, dolayısıyla X de kapalı çünkü A X de kapalı. Aynı şekilde $f_2^{-1}(F)$ X de kapalı $g^{-1}(F)$ kapalıdır. Dolayısıyla $g : X \to Y$ fonksiyonu süreklidir.

Bu çarpım, özel bir taban noktasındaki kapalı eğrilerin kümesinde bir grup yapısı vermez. Birleşme özelliği yoktur.

Örneğin; $\alpha, \beta, \gamma : I \to X$ kapalı eğrilerini alalım.

$$(\alpha\beta)\,\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & ,0 \le t \le \frac{1}{4} \\ \beta(4t-1) & ,\frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & ,\frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$\alpha\,(\beta\gamma)\,(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & ,0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(4t-2) & ,\frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ \gamma(4t-3) & ,\frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$

olduğundan $(\alpha\beta)\,\gamma(t) \neq \alpha\,(\beta\gamma)\,(t)$ dir.

Bu sorunu çözmek ve iki eğrinin çarpımı işlemi altında grup yapısını oluşturmamıza imkan sağlayan homotopi tanımını vereceğiz.

Tanım 3 : *$f, g : X \to Y$ sürekli dönüşümler olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = g(x)$ olacak şekilde $F : X \times I \to Y$ bir F sürekli dönüşümü varsa f dönüşümü g dönüşümüne homotopik denir. F dönüşümüne f den g ye homotopi denir ve $f \simeq g$ ile gösterilir.*

X in A alt kümesinde f ve g çakışırsa, A da f nin değerleri değişmeksizin f den g ye deformasyon için $\forall a \in A$ ve $\forall t \in I$ için $F(a,t) = f(a)$ dır. Böyle homotopiye f , g ye A ya göre relative homotopiktir denir ve $f \simeq g$ *rel* A yazılır. Yani $f, g : X \to Y$ dönüşümleri $\forall a \in A$ için $f(a) = g(a)$ ise $\forall t \in I$ için,

$$F : X \times I \to Y$$

$$(a,t) \to F(a,t) = f(a) = g(a)$$

Lemma 4 : *Homotopi bağıntısı X den Y ye tüm dönüşümleri kümesinde denklik bağıntısıdır.*

Kanıt. : Her $f : X \to Y$ dönüşümü, $F : X \times I \to Y$ $(x \in X, t \in I)$ için $F(x,t) = f(x)$ tanımıyla f dönüşümü kendisine homotoptur. $f, g : X \to Y$ dönüşümleri için, $f \simeq g$ ise $F : X \times I \to Y$ öyleki $F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = g(x)$ dir. $G = F(x, 1-t)$ dönüşümü için, $G(x,0) = F(x, 1-0) = F(x,1) = g(x)$ ve $G(x,1) = F(x,0) = f(x)$ dir. Dolayısıyla $g \simeq f$ dir. $f, g, h : X \to Y$ dönüşümleri için, $f \simeq g$ ve $g \simeq h$ ise $F_1 : X \times I \to Y$ öyleki $F_1(x,0) = f(x)$ ve $F_1(x,1) = g(x)$ ve $F_2 : X \times I \to Y$ öyleki $F_2(x,0) = g(x)$ ve $F_2(x,1) = h(x)$ dir.

$$H(x,t) = \begin{cases} F_1(x,2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F_2(x,2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu için $H(x,0) = F_1(x,0) = f(x)$ ve $H(x,1) = F_2(x,1) = h(x)$ dir. Dolayısıyla $f \simeq h$ dir. ■

Lemma 5 : *Homotopik fonksiyonların bileşkeleride homotopiktir.*

Kanıt. : $f, g : X \to Y$ ve $h : Y \to Z$ dönüşümleri için, $f \underset{F_1}{\simeq} g \Longrightarrow h \circ f \underset{hF}{\simeq} h \circ g$ dir.

$X \times I \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{h} Z$

$hF : F' = h \circ F : X \times I \to Z$

$$F'(x,0) = h(F(x,0)) = h(f(x)) = (h \circ f)(x)$$
$$F'(x,1) = h(F(x,1)) = h(g(x)) = (h \circ g)(x)$$

$h : X \to Y$ ve $f, g : Y \to Z$ dönüşümleri için, $f \underset{F_1}{\simeq} g \Longrightarrow f \circ h \underset{hF}{\simeq} g \circ h$ dir.

$f \simeq g$ olduğundan $F_1 : Y \times I \to Z$ $F_1(x,0) = f(x)$, $F_1(x,1) = g(x)$ ve $F_2 : X \times I \to Y \times I$ $(x,t) \to F_2(x,t) = (h(x),t)$ fonksiyonlarını tanımlayalım.

$F' = F_1 \circ F_2 : X \times I \to Z$ fonksiyonu için,

$$F'(x,0) = F_1(F_2(x,0)) = F_1(h(x),0) = (f \circ h)(x)$$
$$F'(x,1) = F_1(F_2(x,1)) = F_1(h(x),1) = (g \circ h)(x). \blacksquare$$

1.2 Temel Grup Yapısı

X bir topolojik uzay, $p \in X$ bir taban noktası olsun. X uzayında p taban noktasındaki tüm kapalı eğrilerin kümesini düşünelim. $\{0,1\}$ kümesine göre relative homotopi olma p taban noktasındaki tüm kapalı eğrilerin kümesinde bir denklik bağıntısıdır. α , p taban noktasında bir kapalı eğri ve α ya homotopik p deki tüm kapalı eğrilerin sınıfını $< \alpha >$ ile göstereceğiz.

X uzayında p taban noktasındaki kapalı eğrilerin çarpımı homotopi sınıfları kümesinin,

$$< \alpha > . < \beta > = < \alpha . \beta >$$

çarpımından oluşur. Bu çarpım iyi tanımlıdır. $\alpha' \in <\alpha>$ ve $\beta' \in <\beta>$ alalım. $\alpha' \simeq \alpha$ ve $\beta' \simeq \beta$ olduğundan sırasıyla $F_1 : I \times I \to X$ $F_1(x,0) = \alpha(x)$, $F_1(x,1) = \alpha'(x)$ ve $F_2 : I \times I \to X$ $F_2(x,0) = \beta(x)$, $F_2(x,1) = \beta'(x)$ olacak şekilde homotopileri vardır. $G : I \times I \to X$ fonksiyonunu

$$G(x,t) = \begin{cases} F_1(2x,t) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ F_2(2x-1,t) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

tanımlayalım. $G(0,t) = F_1(0,t) = \alpha.\beta(t)$, $G(1,t) = F_2(1,t) = \alpha'.\beta'(t)$ olduğundan $\alpha'\beta' \simeq \alpha\beta$ dır.Dolayısıyla $\alpha'\beta' \in <\alpha\beta>$ dır.

Teorem 6 : *X uzayında p taban noktasındaki kapalı eğrilerin homotopi sınıflarının kümesi $<\alpha> . <\beta> = <\alpha.\beta>$ çarpımı altında bir grup oluşturur.*

Kanıt. : $(<\alpha> . <\beta>) . <\gamma> = <\alpha> .(<\beta> . <\gamma>)$ yani $<(\alpha.\beta).\gamma> = <\alpha(\beta.\gamma)>$ olduğunu göstermek için $(\alpha.\beta).\gamma$ ile $\alpha.(\beta.\gamma)$ nın homotopik olduğunu göstermeliyiz.

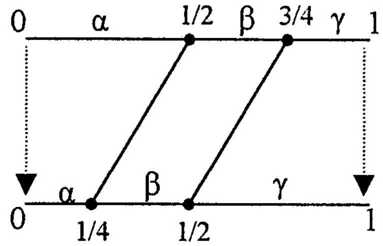
$$((\alpha.\beta).\gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & ,0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4t-1) & ,\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & ,\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$(\alpha.(\beta.\gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & ,0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(4t-2) & ,\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(4t-3) & ,\frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

tanımlayalım.

doğrusal homotopi ile $F : I \times I \to X$

$$F(t,s) = \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{1+s}) & ,0 \leq t \leq \frac{1+s}{4} \\ \beta(4t-1-s) & ,\frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4} \\ \gamma(\frac{4t-2-s}{2-s}) & ,\frac{2+s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



Şekil 1.1: Birleşme özelliği

fonksiyonu için,

$$F(t,0) = \begin{cases} \alpha(4t) & ,0 \le t \le \frac{1}{4} \\ \beta(4t-1) & ,\frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & ,\frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

ve

$$F(t,1) = \begin{cases} \alpha(2t) & ,0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(4t-2) & ,\frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ \gamma(4t-3) & ,\frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$

olduğundan $\alpha.(\beta.\gamma) \simeq (\alpha.\beta).\gamma$ dır.

$0 \le t \le 1$ için $e(t) = p$ ile tanımlı p de sabit kapalı eğrilerin homotopi sınıfı birim elemandır. p de bir α kapalı eğrisi için $<e>.<\alpha>=<\alpha>.<e>=<\alpha>$ dır. $\alpha : I \to X$ $\alpha(0) = \alpha(1) = p$ için doğrusal homotopi ile $F : I \times I \to X$ $F(x,t) = (1-t).\alpha(x) + t.p$ fonksiyonu $F(x,0) = \alpha(x)$ ve $F(x,1) = p$ dir. Dolayısıyla $\alpha \simeq e$ dir

$0 \le t \le 1$ için $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ olan $<\alpha^{-1}>$ homotopi sınıfı ters elemandır. $<\alpha>.<\alpha^{-1}>=<e>$ dir. Doğrusal homotopi ile $G : I \times I \to X$

$$G(t,s) = \begin{cases} \alpha(2t) & ,0 \le t \le \frac{s}{2} \\ e(t) & ,\frac{s}{2} \le t \le \frac{2-s}{2} \\ \alpha^{-1}(2t-1) & ,\frac{2-s}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

fonksiyonu için, $G(t,0) = \alpha(t)$ ve $G(t,1) = \alpha^{-1}(t)$ dır. ■

Bu şekilde inşaa edilen gruba temel grup denir ve X uzayında p taban noktası olmak üzere $\pi_1(X,p)$ şeklinde yazılır.

$\alpha,\beta : I \to X$ iki eğrinin çarpımı;

$$(\alpha.\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(t) & ,0 \leq t \leq a \\ \beta(t) & ,a \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu çarpım a nın şeçiminden bağımsızdır.

$$(\alpha.\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & ,0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & ,\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ve

$$(\alpha.\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & ,0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4t-1) & ,\frac{1}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu iki çarpımın aynı olduğunu görmek için $F : I \times I \to X$ fonksiyonunu

$$F(t,s) = \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{2-s}) & 0 \leq t \leq \frac{2-s}{4} \\ \beta(\frac{4t+s-2}{2-s}) & \frac{2-s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak.

$$F(t,0) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$F(t,1) = \begin{cases} \alpha(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

dir. O halde $\alpha.\beta \simeq \alpha.\beta$ dır.

Yol-bağlantılı uzaylar için; temel grup taban noktasının seçiminden bağımsızdır. Yol-bağlantılı bir uzayın temel grubunu göstermek için $\pi_1(X)$ notasyonunu kullanacağız.

Teorem 7 : *X uzayı yol-bağlantılı ise; $p, q \in X$ noktaları için $\pi_1(X,p)$ ve $\pi_1(X,q)$ grupları izomorfiktir.*

Teoremin kanıtını vermeden önce; $\gamma(1) = \sigma(0)$ sağlayan uzayda γ, σ iki yolun çarpımı,

$$\gamma.\sigma = \begin{cases} \gamma(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

formülüyle $\gamma.\sigma$ yeni bir yol verir.

Eğer $\gamma \simeq \gamma'$ ve $\sigma \simeq \sigma'$ ise $\gamma.\sigma \simeq \gamma'.\sigma'$ dır.

$\gamma(1) = \sigma(0)$ ve $\sigma(1) = \delta(0)$ sağlayan üç yolu için $(\gamma.\sigma).\delta \simeq \gamma.(\sigma.\delta)$ dır.

γ^{-1} yolu $\gamma^{-1}(s) = \gamma(1-s)$ ile tanımlı ise, $\gamma.\gamma^{-1}$ yolu, $\gamma(0)$ da sabit yoluna homotopiktir, benzer olarak $\gamma^{-1}.\gamma$ yolu, $\gamma(1)$ de sabit yoluna homotopiktir.

Kanıt. : p de başlayan q da biten bir γ yolu seçelim. X yol-bağlantılı uzay olduğu için böyle bir yol vardır. α p de kapalı eğri ise $(\gamma^{-1}.\alpha).\gamma$ yolu q da bir kapalı eğridir. ve

$$\gamma_* : \pi_1(X,p) \to \pi_1(X,q)$$

$$< \alpha > \to < \gamma^{-1}.\alpha.\gamma >$$

γ_* fonksiyonu tanımlayalım.

$$\gamma_*(< \alpha.\beta >) = < \gamma^{-1}\alpha.\beta.\gamma > = < \gamma^{-1}\alpha.\gamma.\gamma^{-1}.\beta.\gamma >$$

$$= < \gamma^{-1}.\alpha.\gamma > < \gamma^{-1}.\alpha.\gamma >$$

$$= \gamma_*(< \alpha >).\gamma_*(< \beta >)$$

γ_* fonksiyonu homomorfizmdir. γ_* bir izomorfizmdir. Çünkü γ_* tersi vardır, $\gamma_*^{-1} = (\gamma^{-1})_*$ dır. ∎

X, Y uzayları arasında herbir sürekli fonksiyon için, bu iki uzayın grupları arasında bir homomorfizm bulabiliriz. $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. p X de bir taban noktası ve $q = f(p)$ Y de bir taban noktası seçelim. X de p taban noktasında α kapalı eğri için Y de q taban noktasında $f \circ \alpha$ fonksiyonu bir kapalı eğridir.

$$f_* : \pi_1(X,p) \to \pi_1(Y,q)$$

$$< \alpha > \to f_*(< \alpha > = < f \circ \alpha >$$

tanımlayalım.

$$f \circ (\alpha.\beta)(t) = f \circ \left(\begin{cases} \alpha(2t) & ,0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & ,\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \right)$$

$$= \begin{cases} (f \circ \alpha)(2t) & ,0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (f \circ \beta)(2t-1) & ,\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= (f \circ \alpha).(f \circ \beta)$$

$f \circ (\alpha.\beta) = (f \circ \alpha).(f \circ \beta)$ olduğundan,

$$f_*(<\alpha.\beta>) = <f \circ (\alpha.\beta)>$$

$$= <(f \circ \alpha).(f \circ \beta)>$$

$$= <(f \circ \alpha)><(f \circ \beta)>$$

$$= f_*(<\alpha>).f_*(<\beta>)$$

f_* fonksiyonu bir homomorfizmdir. f_* fonksiyonu f ile türetildiğini söyleriz.

Teorem 8 : *$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ fonksiyonları ve uzayları verildiğinde $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ dır.*

Kanıt. : $p \in X$, $q = f(p) \in Y$, $r = g(q) \in Z$ taban noktaları seçelim.

$$\pi_1(X,p) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y,q) \xrightarrow{g_*} \pi_1(Z,r)$$

$$(g \circ f)_* : \pi_1(X,p) \to \pi_1(Z,r)$$

$$(g \circ f)_*(\alpha) = (g \circ f \circ \alpha) = g_*(f \circ \alpha) = g_*(f_*(\alpha)) = (g_* \circ f_*)(\alpha)$$

$h : X \to Y$ homeomorfizm verildiğinde özel durumda teoremi uygularsak; $X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{h^{-1}} X$ için,

$$h_*^{-1} \circ h_* = (1_X)_* : \pi_1(X,p) \to \pi_1(X,p)$$

ve $Y \xrightarrow{h^{-1}} X \xrightarrow{h} Y$ için,

$$h_* \circ h_*^{-1} = (1_Y)_* : \pi_1(Y, h(p)) \to \pi_1(Y, h(p))$$

olduğundan $h_* : \pi_1(X,p) \to \pi_1(Y, h(p))$ izomorfizmdir. Eğer iki uzay homeomorfik ise bunların temel grupları izomorfiktir. ∎

1.3 Hesaplama Yöntemleri

R^n nin konveks altkümesinin temel grubu trivial gruptur. Eğer $i : X \to X$ özdeşlik dönüşümü X in bazı noktalarında sabit dönüşüme homotopik ise X uzayına büzülebilir uzay denir. Dolayısıyla $i : R^n \to R^n$ özdeşlik dönüşümü ve $f : R^n \to R^n$ $\forall x \in R^n$ için $f(x) = 0$ olsun. $F : R^n \times I \to R^n$ $(x,t) \to F(x,t) = tx$ için $F(x,0) = 0 = f(x)$ ve $F(x,1) = x = i(x)$ olduğundan $f \simeq i$ dır. $\pi_1(R^n, 0) = \{e\}$.

Tanım 9 : *Yol-bağlantılı ve temel grubu trivial olan bir uzaya basit bağlantılı denir.*

Teorem 10 : *X uzayı basit bağlantılı açık U, V kümelerinin birleşimi gibi yazılan bir uzay olsun. Öyleki $U \cap V$ yol-bağlantılıdır. Dolayısıyla X uzayı basit bağlantılıdır.*

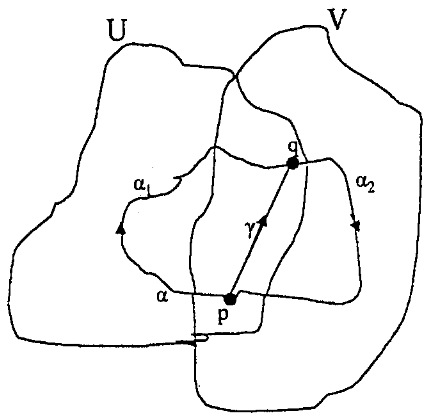
Kanıt. : U ve V basit bağlantılı olduğundan; X uzayında bir kapalı eğrinin U yada V tarafından içerilen kapalı eğrilerin çarpımına homotopik olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$p \in U \cap V$ taban noktasını seçelim. $\alpha : I \to X$, p noktasında bir kapalı eğri olsun. Lebesque lemma'dan I nın $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = 1$ şeklinde parçalanışını bulabiliriz; öyleki $\alpha([t_{k-1}, t_k])$ yolu daima U yada V kümeleri içindedir. $0 \leq s \leq 1$ için, $\alpha_k : I \to X$ yolu $s \to \alpha_k(s) = \alpha((t_k - t_{k-1})s + t_{k-1})$ şeklinde α_k yolunu tanımlayalım. $1 \leq k \leq n-1$ için herbir α_k yolunun bitim noktası $\alpha(t_k)$ ile p noktasını birleştiren, eğer $\alpha(t_k)$ noktası U da ise γ_k yolunu U da, eğer $\alpha(t_k)$ noktası V de ise γ_k yolunu V de seçelim. Eğer $\alpha(t_k) \in U \cap V$ ise $U \cap V$ yol-bağlantılı olduğundan γ_k yolu vardır. Dolayısıyla α kapalı eğrisi U yada V deki kapalı eğrilerin

$$(\alpha_1.\gamma_1^{-1}).(\ \gamma_1.\ \alpha_2.\gamma_2^{-1}).(\gamma_2.\alpha_3.\gamma_3^{-1})...(\gamma_{n-1}.\alpha_n)$$

çarpımına homotopik olur. Çünkü U ve V kümeleri basit bağlantılı olduğundan çarpımdaki herbir kapalı eğri birime homotopiktir. ■

Tanım 11 : *Orbit Uzayı: G bir grup ve X bir küme olsun. $(g, x) \to g(x)$ ile tanımlanan $G \times X \to X$ fonksiyonu*



Şekil 1.2: Teorem 10 nın ispatı

a) $\forall\ g, h \in G$ *ve* $\forall x \in X$ *için* $hg(x) = h(g(x))$

b) $e \in G$ *birim ve* $\forall x \in X$ *için* $e(x) = x$

yukarıdaki koşulları olacak şekilde sağlıyorsa bir G *grubu* X *kümesinde hareket eder denir.*

$x \in X$ *için* $O(x) = \{y \in X \mid \exists g \in G$ *için* $g(x) = y\}$ *kümesine* x *noktasının orbiti denir.*

Aynı orbit üzerinde bulunma bir denklik bağıntısıdır.

$\forall x, y \in X$ için $x \sim y \Longleftrightarrow \exists g \in G$ vardır öyleki $x = g(y) \Longrightarrow X/G = X/\sim$ dir.

$x \in X$ için $x = e(x) = x$ yansıma özelliği,

$x, y \in X$ için $x = g(y)$ ise $g^{-1}(x) = g^{-1}(g(y)) = g^{-1}g(y) = y$ simetri özelliği,

$x, y, z \in X$ için $x \sim y$, $y \sim z$ ise $x \sim z$ dir. $x = g(y)$, $y = h(z)$ için,

$$x = g(y) = g(h(z)) = gh(z)$$

geçişme özelliği sağlandığından bir denklik bağıntısıdır.

$X/G = \{O(x) \mid x \in X\}$ kümesine orbit uzayı denir.

Teorem 12 : *X basit bağlantılı bir uzay, $G \times X \to X$ fonksiyonu G grubu X üzerinde hareket ediyor; ve $\forall x \in X$ ve $\forall g \in G - \{e\}$ için $U \cap g(U) = \emptyset$ olacak şekilde bir $x \in X$ komşuluğu varsa $\pi_1(X/G) \cong G$ dir.*

Kanıt. : $x_0 \in X$ sabit bir nokta olsun. $g \in G$ için x_0 ı $g(x_0)$ bağlayan yola γ diyelim. X yol-bağlantılı olduğundan böyle bir yol vardır. $\pi : X \to X/G$ $\pi(x_0) =< x_0 >$ projection için $\pi \circ \gamma$ X/G de $\pi(x_0)$ taban noktasında bir kapalı eğridir. Çünkü x_0 ve $g(x_0)$ aynı orbit uzayındadır.

$$\emptyset : G \to \pi_1(X/G, \pi(x_0))$$

$$g \to \emptyset(g) =< \pi \circ \gamma >$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $\emptyset$ fonksiyonu izomorfizmdir.

$\emptyset : G \to \pi_1(X/G, \pi(x_0))$ homomorfizmdir. g_1 , $g_2 \in G$ için, x_0 ı $g_1(x_0)$ bağlayan yoluna γ_1 ve x_0 ı $g_2(x_0)$ bağlayan yoluna γ_2 diyelim.

$\gamma_1.(g_1 \circ \gamma_2)$ yolu x_0 ı $g_1g_2(x_0)$ bağlayan bir yoldur. Çünkü $(g_1 \circ \gamma_2)(0) = g_1(\gamma_2(0)) = g_1(x_0)$ ve $(g_1 \circ \gamma_2)(1) = g_1(\gamma_2(1)) = g_1g_2(x_0)$ dır. Dolayısıyla $g_1 \circ \gamma_2$ denktir γ_2 dir.

$$\emptyset(g_1g_2) =< \pi \circ (\gamma_1.(g_1 \circ \gamma_2)) >$$

$$=< (\pi \circ \gamma_1)(\pi \circ (g_1 \circ \gamma_2)) >$$

$$=< (\pi \circ \gamma_1)(\pi \circ \gamma_2) >$$

$$= \emptyset(g_1)\emptyset(g_2)$$

dir. ∎

Örnek 13 : $(Z,+)$ *grubu,* R *uzayı için;*

$Z \times R \to R$

$(m,x) \to m(x) = m+x$ *fonksiyonun orbit uzayını ve temel grubunu hesplayalım.*

$e = 0 \in Z$, $x \in R$ için, $O(x) = 0 + x = x$

$m,n \in Z$, $x \in R$ için, $m + n(x) = m + n + x$ ve $m(n(x)) = m(n+x) = m + n + x$

olduğundan bir hareketdir. Yani $(Z,+)$ grubu R üzerinde hareket eder.

$\forall x \in R$ için $[0,1]$ aralığında bir x'in temsilcisi vardır. Temel bölge olarak $[0,1]$ aralığını alabiliriz. Uç noktaları aynı orbit de yani $0 \sim 1$ olduğundan bu uç noktaları birleştirirsek R de Z nin orbit uzayı $O(R/Z) = S^1$ dir. Temel grubu için teoremin koşullarına bakalım.

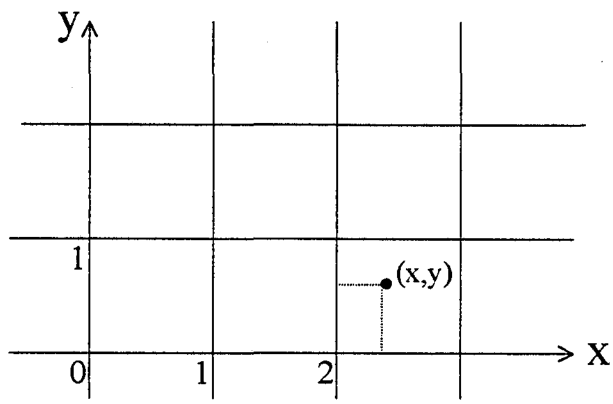
R yol-bağlantılı ve büzülebilir bir uzaydır. Dolayısıyla R basit bağlantılıdır. $x \in R$ ve x' in bir açık U komşuluğu için $U \cap g(U) = \emptyset$ olduğunu söylemek için, x' in $\varepsilon < \frac{1}{2}$ komşuluğu için $U \cap g(U) = \emptyset$ olur. Dolayısıyla $\pi_1(S^1) \cong Z$ dir.

Örnek 14 : $(Z \times Z,+)$ *grubu ve* $R \times R$ *uzayı için,*

$(Z \times Z) \times (R \times R) \to R \times R$

$((m,n),(x,y)) \to (m+x, n+y)$ *fonksiyonun hareket olduğunu ve bu hareket için orbit uzayı ve temel grubu hesaplayalım.*

$(0,0) = e \in Z \times Z$, $(x,y) \in R \times R$ için, $O(x,y) = (0,0) + (x,y) = (x,y)$



Şekil 1.3:

(m,n) , $(s,t) \in (Z \times Z, +)$ ve $(x,y) \in R \times R$ için,

$$((m,n)+(s,t))(x,y) = (m+s, n+t)(x,y) = (m+s+x, n+t+y)$$

$$(m,n)((s,t)(x,y)) = (m,n)(s+x, t+y) = (m+s+x, n+t+y)$$

olduğundan bir actiondır. Orbit uzayı için, $\forall (x,y) \in (R \times R)$ için $[0,1] \times [0,1]$ aralığında bir temsilcisi vardır. Temel bölge olarak $[0,1] \times [0,1]$ aralığını alabiliriz. $0 \leq x \leq 1$ aralığında $(x,1) \sim (x,0)$ ve $0 \leq y \leq 1$ aralığında $(1,y) \sim (0,y)$ ve $(0,0) \sim (1,0) \sim (0,1) \sim (1,1)$ olduğundan $R \times R$ uzayında ($Z \times Z, +)$ grubunun orbit uzayı tordur. $O(R \times R/Z \times Z) = T^2$ dir.

Temel grubunu hesaplamak için, teoremin koşullarına bakalım. $R \times R$ basit bağlantılıdır. Tüm noktaları doğrusal olarak öteleyerek tek bir noktaya büzebiliriz. $(x,y) \in R \times R$ için, (x,y) noktasının bir açık U açık komşuluğu ve $\forall g \in Z \times Z - \{e\}$ için $U \cap g(U) = \emptyset$ olduğunu söylemek için, $(x,y) \in R \times R$ noktasının çapı $\sqrt{2}$ den küçük olan açık bir U komşuluğunu alırsak $U \cap g(U) = \emptyset$ olur. Dolayısıyla $\pi_1(T) \cong Z \times Z$ dir.

1.4 Homotopi Tipi

Tanım 15 : *X, Y uzayları için $g \circ f \simeq 1_X$ ve $f \circ g \simeq 1_Y$ olacak şekilde $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$ sürekli dönüşümleri varsa X ve Y aynı homotopi tipine sahiptir veya homotopik denktir denir. $X \simeq Y$ ile gösterilir.*

Lemma 16 : *$X \simeq Y$ bağıntısı topolojik uzaylarda denklik bağıntısıdır.*

Kanıt. : $X = Y$ ve $g = f^{-1}$ için $X \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} X$ $\quad f \circ f^{-1} \simeq 1_X$, $f^{-1} \circ f \simeq 1_X$

$X \simeq X$ yansımı özelliği,

$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y \quad g \circ f \simeq 1_X$, $f \circ g \simeq 1_Y$ $\quad X \simeq Y$ ise,

$Y \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} X \quad f \circ g \simeq 1_Y$, $g \circ f \simeq 1_X$ $\quad Y \simeq X$ simetri özelliği,

$f, g : X \to Y$ ve $h : Y \to Z$ dönüşümleri için, $f \underset{F}{\simeq} g \Longrightarrow h \circ f \underset{hF}{\simeq} h \circ g$ ve $h : X \to Y$ ve

$f, g : Y \to Z$ dönüşümleri için, $f \underset{F}{\simeq} g \Longrightarrow f \circ h \underset{hF}{\simeq} g \circ h$ homotopi dönüşümlerin iyi tanımıdan;

$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$ ve $Y \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} Z$ ise

$$g \circ v \circ u \circ f \simeq g \circ 1_Y \circ f = g \circ f \simeq 1_X$$

$$u \circ f \circ g \circ v \simeq u \circ 1_Y \circ v = u \circ v \simeq 1_Z$$

$X \underset{g \circ v}{\overset{u \circ f}{\rightleftarrows}} Z$ geçişme özelliğidir. Dolayısıyla $X \simeq Y$ denklik bağıntısıdır ■

Teorem 17 : *a) Bir uzay bir noktaya büzülebilir ancak ve ancak bir nokta ile aynı homotopi tipine sahiptir.*

b) Bir noktaya büzülebilir bir uzay basit bağlantılıdır.

c) Bir noktaya büzülebilir bir uzayda herhangi iki dönüşüm homotopiktir.

d) X *büzülebilir ise* 1_X , $\forall x_0 \in X$ *için* $f(x) = x_0$ *sabit dönüşüme homotopiktir.*

Kanıt. : a) X büzülebilir bir uzay olsun. $p \in X$ alalım.

$c_p : X \to X$ sabit dönüşüm olsun. X büzülebilir olduğundan,

$x \to c_p(x) = p$

$$F : X \times I \to X$$
$$(x,t) \to F(x,t) = (1-t).1_X + t.c_p(x)$$

$1_X \simeq c_p$ homotopiktir. $i : \{p\} \to X$ inclusion map için $X \underset{i}{\overset{c_p}{\rightleftarrows}} \{p\}$ gösterirki, X ile $\{p\}$ aynı hopotopi tipine sahiptir.

Tersine X bir nokta ile aynı homotopi tipine sahip bir uzay olsun. $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \{p\}$ $g \circ f \simeq 1_X$ dir. O halde $1_X \simeq c_p$ dir.

b) X büzülebilir uzay olsun. O halde $1_X \simeq c_p$ dir.

$$F : X \times I \to X$$
$$(x,t) \to F(x,t) = (1-t).1_X + t.c_p(x)$$

$\gamma(s) = F(x,s)$, x' i p ye bağlayan bir yoldur. Böylece X uzayı yol-bağlantılıdır. Dolayısıyla X basit bağlantılıdır.

c) X büzülebilir bir uzay; o halde $1_X \simeq c_p$ dir. $f,g : Z \to X$ dönüşümleri için;

$$f = 1_X \circ f \simeq c_p \circ f = c_p \circ g \simeq 1_X \circ g = g$$

d) X büzülebilir bir uzay ise $1_X \simeq c_p$ ve c_p , $c_x : X \to X$ dönüşümleri için,

$$c_p = 1_X \circ c_p \simeq c_p \circ c_p = c_p \circ c_x \simeq 1_X \circ c_x = c_x \quad \blacksquare$$

Tanım 18 : *X topolojik uzayını bir A altkümesine; eğer $\forall a \in A$ için $r(a) = a$ olacak şekilde bir $r : X \to A$ sürekli dönüşümü varsa A' ya X' in retract'ı denir.*

Tanım 19 : *$A \subset X$ olsun. Eğer $r : X \to A$ retract'ı ve $F : X \times I \to X$ homotopisi $x \in X$ için, $F(x,0) = x$ $F(x,1) = r(x)$ ve $a \in A$, $t \in I$ için $F(a,t) = a$ olacak sekilde varsa A' ya X' in deformasyon retractı denir.*

Tanım 20 : *$\{x_0\}$ kümesi X' in bir deformasyon retract'ı olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktası varsa, X topolojik uzayına bir noktaya büzülebilir denir.*

Örnek 21 : *R^n nin herhangi bir konveks X altkümesi bir noktaya büzülebilir gösteriniz.*

Keyfi bir $x_0 \in X$ noktası seçelim.

$$F : X \times I \to X$$
$$(x,t) \to F(x,t) = (1-t).x + t.x_0$$

fonksiyonunu $x \in X$ için $F(x,0) = x$, $F(x,1) = x_0$ ve $A = \{x_0\}$ olmak üzere $r : X \to A$ retract'ı $x_0 \in A$ ve $t \in I$ için $F(x_0,t) = x_0 = r(x)$ olduğundan $\{x_0\}$ kümesi X in bir deformasyon retractıdır. Dolayısıyla X bir noktaya büzülebilir.

$\{x_0\}$ X' in bir deformasyon retract'ı ise X bir noktaya büzülebilir.

2 Üçgenleme

Tanım 22 : *$v_0, v_1, ..., v_k$ noktaları R^n uzayında olsun. $v_1 - v_0$, $v_2 - v_0$,..., $v_k - v_0$ lineer bağımsız ise R^n de $v_0, v_1, ..., v_k$ noktalarının kümesinin bağımsız olduğu söylenir. Bunun için λ_0 , λ_1 ,..., λ_k gerçel sayıları verildiğinde;*

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i = 0 \ , \ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 0$$

ise $\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$ ifadesine denktir.

Tanım 23 : *$v_0, v_1, ..., v_k$ bazı R^n öklid uzayında bağımsız noktalar ve $\lambda_i \in R$ öyleki $\forall i$ için $\lambda_i \geq 0$ ve $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$ olduğunda; bir geometrik k-simpleks*

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_o v_0 + ... + \lambda_k v_k$$

noktaların kümesidir. $v_0, v_1, ..., v_k$ noktalarına da simpleksin köşeleri denir.

$\forall i$ için $\lambda_i > 0$ olmak üzere $\sum \lambda_k v_k$ noktalarının kümesi k-simpleksinin altuzayı k-simpleksinin içi olarak adlandırılır. Bir geometrik k-simpleksinde k sayısına simpleksin boyutu denir. Bir 0-simpleks bir noktadır, 1-simpleks kapalı doğru, 2-simpleks bir üçgen, 3-simpleks bir dörtyüzlüdür, ve böyle devam eder.Simpleksler doğal olarak yüzlere sahiptir. 0-yüzleri $v_0, v_1, ..., v_k$ noktalarıdır. Yani simpleksin köşeleridir. 1-yüzleri simpleksin kenarlarıdır.

Tanım 24 : *R^n öklidyen uzayda; ortak yüzlerde kesişen simplekslerin sonlu ailesine simplisial kompleks denir. ve K, L gibi büyük harflerle gösterilir.*

K' nın boyutu, *boy*K , K daki simplekslerin boyutlarının maksimumudur.

K simplisial kompleks topolojik uzay değildir. K simplisial kompleks açıkça elemanları simpleksler olan bir kümedir. K simplisial kompleks R^n nin bir altkümesidir. R^n nin noktalarını kümesi K' nın simplekslerinin en az birindedir; R^n nin bir altuzayı gibi topoloji vermeyle K simplisial kompleksine topolojik uzay gibi baktığımızda, komplekse polihedron denir ve $|K|$ ile gösterilir.

Tanım 25 : *X topolojik uzayını üçgenleme K simplisial kompleksden meydana gelir ve $h : |K| \to X$ homeomorfizmdir.*

K simplisial kompleksler öklidyen uzayında bulunan sonlu sayıda simplekslerin birleşiminden meydana geldiğinden $|K|$ polihedron bir kaç özelliğe sahiptir. Örneğin, kompakt ve metrik uzay olur. Bir uzay üçgenlenebiliyorsa bu özelliklere sahipdir.

2.1 Bir Kompleksin Kenar Grubu

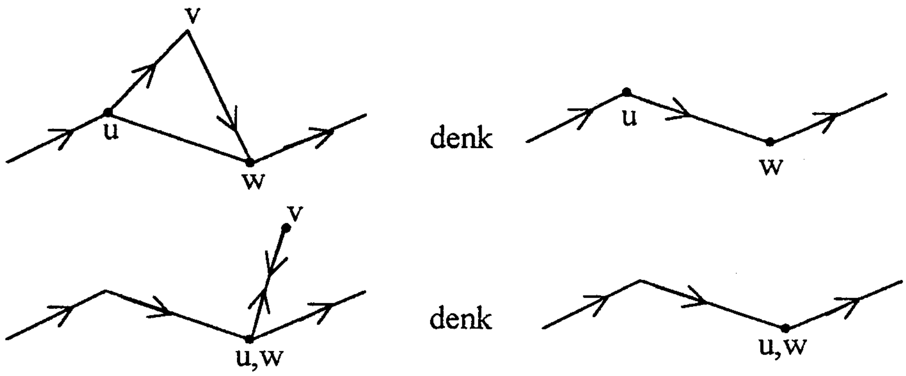
X yol-bağlantılı üçgenlenebilen bir uzay olsun. X yerine $|K|$ polihedronunu alarak $h : |K| \longrightarrow X$ özel bir üçgenleme alalım. $|K|$ polihedronunun avantajı; K kompleksinin kenarlarıyla yapılan kapalı eğriler ile temsil edilen temel grubun elemanlarıdır. Böylece "kenar kapalı eğrileri" kullanarak bir grup inşaa edeceğiz; ve K kompleksinin kenar grubu diyeceğiz. Bu kenar grubu hesaplanabilir ve $|K|$ polihedronunun temel grubuna izomorfiktir.

Tanım 26 : *K kompleksinde bir kenar yolu; arka arkaya gelen v_i , v_{i+1} köşelerin K' nın bir simpleksini germesiyle $v_0 v_1 ... v_k$ köşelerinin dizisidir. Eğer, $v = v_0 = v_k$ ise köşelerin dizisi v tabanında bir kenar kapalı eğri denir.*

Tanım 27 : *Eğer aşağıdaki işlemleri sonlu sayıda uygulayarak, α ve β iki kenar yolundan diğerini elde ediyorsak α ve β denktir ve $\alpha \sim \beta$ ile gösterilir.*

a) Eğer $v_i = v_{i+1}$ ise, $...v_i v_{i+1}...$ yerine $...v_i...$ ya da tersine $...v_i...$ yerine $...v_i v_i...$;

b) Eğer v_{i-1}, v_i, v_{i+1} K kompleksinin bir simpleksini gerer ise, $...v_{i-1} v_i v_{i+1}...$ yerine $...v_{i-1} v_{i+1}...$ ya da tersine $...v_{i-1} v_{i+1}...$ yerine $...v_{i-1} v_i v_{i+1}...$



Şekil 2.4: İki kenar yolun denkliği

sonlu sayıda işlemlerle bir denklik bağıntısıdır.

α, β kenar yollarını alalım. $\alpha \sim \beta$ ise,

$\alpha \xrightarrow{R_1} \alpha^1 \xrightarrow{R_2} \alpha^2 \rightarrow \dots \xrightarrow{R_n} \alpha^n = \beta$ ise,

$\beta \xrightarrow{R_n} \beta^n \xrightarrow{R_{n-1}} \beta^{n-1} \rightarrow \dots \xrightarrow{R_1} \beta^1 = \alpha$ olduğundan $\beta \sim \alpha$ dır.

α, β, δ kenar yollarını alalım. $\alpha \sim \beta, \beta \sim \delta$ ise,

$\alpha \xrightarrow{R_1} \alpha^1 \xrightarrow{R_2} \alpha^2 \rightarrow \dots \xrightarrow{R_n} \alpha^n = \beta$

$\beta \xrightarrow{T_1} \beta^1 \xrightarrow{T_2} \beta^2 \rightarrow \dots \xrightarrow{T_m} \beta^m = \delta$ ise bu işlemleri arka arkaya uygulayarak $\alpha \sim \delta$ dır.

v özel köşesinde taban kenar kapalı eğrilerinin denklik sınıfı;

$\{vv_1v_2...v_{k-1}v\} . \{vw_1w_2...w_{l-1}v\} = \{vv_1v_2...v_{k-1}vw_1...w_{l-1}v\}$

çarpımı altında bir grup oluşturur.

$$\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle = \langle\alpha\beta\rangle$$

$$\alpha' \in \langle\alpha\rangle \text{ ve } \beta' \in \langle\beta\rangle$$

alalım.

$$\alpha\beta \equiv \alpha'\beta \equiv \alpha\beta' \equiv \alpha'\beta'$$

olduğundan $\alpha'\beta' \in \langle\alpha\beta\rangle$ dır.

Özdeşlik elemanı $\{v\}$ denklik sınıfı ve $\{vv_1v_2...v_{k-1}v\}$ nın tersi $\{vv_{k-1}...v_1v\}$ denklik sınıfıdır. Böylece v tabanın da K nın bir kenar grubudur; $E(K,v)$ ile gösterilir.

Teorem 28 : *$E(K,v)$ grubu $\pi_1(|K|,v)$ grubuna izomorfiktir.*

$|K|$ polihedronunda bir kapalı eğriği K kompleksinde kenar kapalı eğrisi gibi yorumlayarak $\phi : E(K,v) \rightarrow \pi_1(|K|,v)$ fonksiyonu inşaa edelim. $vv_1...v_{k-1}v$ kenar kapalı eğrisini veren, I birim aralığını k eşit parçaya bölerek,

$$\alpha(0) = \alpha(1) = v\ ,\ 1 \leq i \leq k-1 \text{ için } \alpha(i/k) \doteq v_i$$

olacak şekilde $\alpha : I \rightarrow |K|$ olsun.

Dolayısıyla, α, $|K|$ da v tabanında bir kapalı eğridir. Böylece $\phi(\{vv_1v_2...v_{k-1}v\}) = \langle\alpha\rangle$ tanımlayalım. ϕ fonksiyonu homomorfizm, bire bir ve örtendir.

Tanım 29 : *K kompleksinin 1-boyutlu L altkompleksi, eğer $|L|$ polihedronu yol-bağlantılı ve basit bağlantılı yani $|L|$ büzülebilir ise, ağaç denir. K nın tüm köşelerini içeren böyle bir altkomplekse maksimal ağaç denir. Böyle bir altkompleks daima vardır. Çünkü K kompleksi sonlu sayıda simplekslerden meydana gelir.*

Teorem 30 : *$|K|$ yol-bağlantılı ise, maksimal ağaç K nın tüm köşelerini içerir.*

Kanıt. : L maksimal ağaç olsun. Varsayalım $v \in K - L$ olsun. $u \in L$ seçelim. $|K|$ yol-bağlantılı olduğundan v ve u yu birbirine bağlayan bir yol vardır. $E(K,v) \cong \pi_1(|K|,v)$ olduğundan biz bu yol yerine $uv_1v_2...v_kv$ kenar yolunu alabiliriz. L de olan bu kenar yolunun son köşesi v_i olsun. v_{i+1} köşesini eklemeyle L de olmayan v_iv_{i+1} 1-simpleksdir. $L' = L \cup v_iv_{i+1}$ kesinlikle L den daha büyük bir altkompleksdir. Ayrıca $|L'| \simeq |L|$ dir. Çünkü v_iv_{i+1} simpleksi $|L|$ yi hesaba katmaksızın v_i ye büzülebilir. Böylece $|L'|$ büzülebilir. O halde L maksimal ağaç değildir. Bu da hipotezimizle çelişir. ∎

Böyle bir L altkompleksi seçtiğimizde, $|L|$ basit bağlantılı olduğundan, L deki kenar kapalı eğrilerinin $E(K,v)$ kenar grubuna katkıda bulunmayacak ve böylece bizim hesaplarımızda L nin simplekslerini göz ardı edebiliriz.

Eğer $|K|$ yol-bağlantılı ve $|L|$, K nın tüm köşelerini içeren basit bağlantılı bir polihedron ise, sonlu sayıda üreteç ve ilişkileriyle bir $G(K,L)$ grubu inşaa edebiliriz. Böylece $G(K,L) \cong E(K,v)$ dolayısıyla $\pi_1(|K|,v)$ grubuna izomorfik olur.

K nın $v = v_0 < v_1 < ... < v_k$ sıralı köşelerinin listesi olmak üzere, bu şekilde yazılan K nın bir simpleksine sıralı simpleks denir. $G(K,L)$ grubunu g_{ij} üreteç semboliyle, eğer v_i , v_j köşeleri L nin bir simpleksini gerer ise $g_{ij} = 1$ ilişkisiyle; ve eğer v_i, v_j, v_k köşeleri $K - L$ nin sıralı 2-simpleksini gerer ise $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$ ilişkisiyle tanımlayalım.

Eğer $i = j$ ise $g_{ii} = 1$ ve $i = k$ ise $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$ ilişkisinden $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ dir.

Teorem 31 : *$G(K,L) \cong E(K,v)$ dir.*

Kanıt. : Birbirlerinin tersi olan $\phi : G(K,L) \to E(K,v)$ ve $\theta : E(K,v) \to G(K,L)$ iki homomorfizm tanımlayalım ve böylece $\theta\phi$ ve $\phi\theta$ özdeşlik izomorfizmidir.

L de E_i kenar yoluyla K nın v_i köşesini v ye bağlayan ve $E_0 = v$ almayla, $G(K,L)$ nın üreteçlerinde

$$\phi(g_{ij}) = \left\{E_i v_i v_j E_j^{-1}\right\}$$

olarak ϕ fonksiyonunu tanımlayalım.

Eğer v_i , v_j L nin bir simpleksini gerer ise, dolayısıyla $E_i v_i v_j E_j^{-1}$ L de olan bir kapalı eğridir, ve böylece $|L|$ basit bağlantılı olduğundan $E(K,v)$ nin özdeşlik elemanını temsil eder. Ayrıca, eğer v_i, v_j, v_k $K-L$ nin sıralı 2-simpleksini gererse,

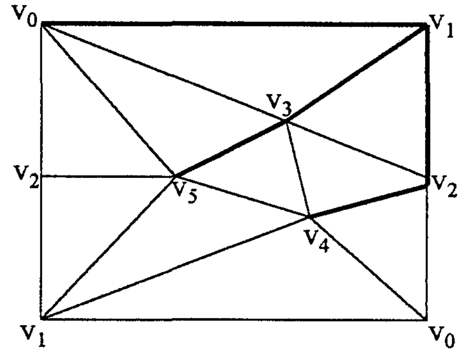
$$\begin{aligned}
\phi(g_{ij})\,\phi(g_{jk}) &= \left\{E_i v_i v_j E_j^{-1}\right\}\left\{E_j v_j v_k E_k^{-1}\right\} \\
&= \left\{E_i v_i v_j E_j^{-1} E_j v_j v_k E_k^{-1}\right\} \\
&= \left\{E_i v_i v_j v_k E_k^{-1}\right\} \\
&= \left\{E_i v_i v_k E_k^{-1}\right\} \\
&= \phi(g_{ik})
\end{aligned}$$

dır. ϕ fonksiyonu $G(K,L)$ grubunda ilişkileri korumayla $G(K,L)$ den $E(K,v)$ ye bir homomorfizmdir. v_i , v_j K nın bir simpleksini geren köşe çifti için;

$$g_{ij} = \begin{cases} h_{ij} & v_i v_j \;\; K-L \text{ nin sıralı bir simpleksi ise,} \\ h_{ji}^{-1} & v_i v_j \;\; K-L \text{ nin sıralı bir simpleksi ise,} \\ 1 & \text{diğer durumlarda ise,} \end{cases}$$

olsun. $v v_k v_l v_m ... v_n v$ K da bir kenar kapalı eğri ise,

$$\theta\left(\left\{v v_k v_l v_m ... v_n v\right\}\right) = g_{ok} g_{kl} ... g_{no}$$



Şekil 2.5: Projektif düzlemin üçgenlemesi ve maksimal ağacı

olarak θ fonksiyonunu tanımlayalım. θ fonksiyonu $E(K, v)$ den $G(K, L)$ ye bir homomorfizmdir.

Şimdi,

$$\theta\phi\left(g_{ij}\right) = \theta\left(\left\{E_i v_i v_j E_j^{-1}\right\}\right) = g_{ij}$$

böylece $\theta\phi$ $G(K, L)$ nin bir özdeşlik izomorfizmdir.

Ayrıca, $vv_k v_l v_m ... v_n v$ K da bir kenar kapalı eğri için;

$$\left\{vv_k v_l v_m ... v_n v\right\} = \left\{E_0 v v_k E_k^{-1}\right\} ... \left\{E_n v_n v E_0^{-1}\right\}$$

$$\phi\theta\left(\left\{vv_k v_l v_m ... v_n v\right\}\right) = \phi\theta\left(\left\{E_0 v v_k E_k^{-1}\right\}\right) ... \phi\theta\left(\left\{E_n v_n v E_0^{-1}\right\}\right)$$

dolayısıyla $\phi\theta$ K nın bir özdeşlik izomorfizmidir. ■

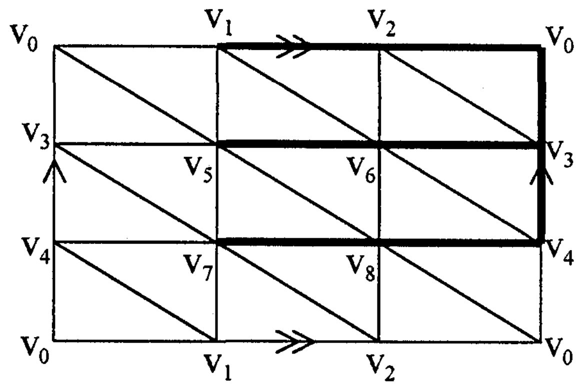
Örnek 32 : *Projektif düzlemin temel grubunu hesaplayınız.*

Projektif düzlemin bir üçgenlemisi ve maksimal ağacı olmak üzere (Şekil 2.5); projektif düzlemin üreteç ve ilişkilerini okumayla temel grubu;

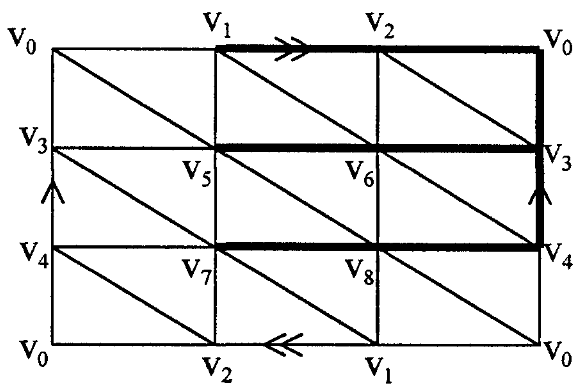
$g_{01}g_{14} = g_{04}$, $g_{02}g_{24} = g_{04}$, $g_{02}g_{25} = g_{05}$, $g_{12}g_{25} = g_{15}$, $g_{14}g_{45} = g_{15}$ *ilişkileri okumadan*

$g_{04} = g_{14}$, $g_{02} = g_{04}$, $g_{25} = g_{15}$, $g_{14} = g_{15}$ *olduğundan birbirine denk beş üreteç*

$g_{02} = g_{04} = g_{14} = g_{15} = g_{25}$ *ve* $g_{02}g_{25} = 1$ *buradan da* $(g_{02})^2 = 1$ *yazarsak* $\pi_1(P^2) \cong Z_2$ *dir.*



Şekil 2.6: Torusun üçgenlemesi ve maksimal ağacı



Şekil 2.7: Klein Şişesinin üçgenlemesi ve maksimal ağacı

Örnek 33 : *Torus'un temel grubunu hesaplayınız.*

Torus'un bir üçgenlemesi ve maksimal ağacı olmak üzere (Şekil 2.6); torus'un üreteç ve ilişkilerini okumayla temel grubu;

$g_{01}g_{15} = g_{05}$, $g_{03}g_{35} = g_{05}$, $g_{35}g_{57} = g_{37}$, $g_{34}g_{47} = g_{37}$

ve $g_{08}g_{84} = g_{04}$, $g_{02}g_{28} = g_{08}$, $g_{28}g_{87} = g_{27}$, $g_{12}g_{27} = g_{17}$

ilişkileri okumayla $g_{01} = g_{05} = g_{35} = g_{37} = g_{47}$ *ve*

$g_{04} = g_{08} = g_{28} = g_{27} = g_{17}$ *olmak üzere iki farklı üreteç vardır. Buradan da torusun temel grubu* $\pi_1(T) \cong Z \times Z$ *dir*

Örnek 34 : *Klein Şişesinin temel grubunu hesaplayınız.*

Klein şişesinin üçgenlemesi ve maksimal ağacı olmak üzere (Şekil 2.7); Kleien şişesinin üreteç ve ilişkilerini okumayla temel grubu;

$g_{01}g_{15} = g_{05}$, $g_{30}g_{05} = g_{35}$, $g_{35}g_{57} = g_{37}$, $g_{34}g_{47} = g_{37}$, $g_{47}g_{72} = g_{42}$, $g_{40}g_{02} = g_{42}$ *ve* $g_{12}g_{26} = g_{16}$, $g_{15}g_{56} = g_{16}$, $g_{56}g_{68} = g_{58}$, $g_{57}g_{78} = g_{58}$, $g_{78}g_{81} = g_{71}$, $g_{72}g_{21} = g_{71}$ *ve* $g_{20}g_{03} = g_{23}$, $g_{26}g_{63} = g_{23}$, $g_{63}g_{34} = g_{64}$, $g_{68}g_{84} = g_{64}$, $g_{84}g_{40} = g_{80}$, $g_{81}g_{10} = g_{80}$ *ilişkileri okumayla* $g_{01} = g_{05} = g_{35} = g_{37} = g_{47} = t$ *ve* $g_{81} = g_{71} = g_{72}$ *ve* $g_{40} = g_{80} = g_{42} = u$ *olmak üzere* $g_{81}g_{10} = g_{80} \Longrightarrow g_{81}t^{-1} = u \Longrightarrow g_{81} = ut = g_{71} = g_{72}$ *buradan da* $g_{47}g_{72} = g_{42} \Longrightarrow tut = u$ *ilişkiyle Klein şişesinin temel grubu* $\pi_1(K) \cong \{t, u \mid tu^{-1}tu = e\} = \{t, u \mid tut = u\}$ *dır.*

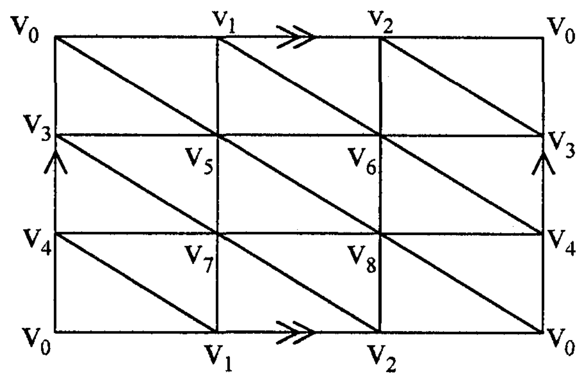
Bu son örnek gösterir ki, çok basit uzaylar için bile temel grubunu hesaplarken hoş olmayan bir çok üreteç ve ilişkilerini okumak zorundayız.

J , K uygun bir altkompleks de kesişen aynı öklid uzayda iki simplisial kompleks olsun. Varsayalım ki, $|J|$, $|K|$, $|J \cap K|$ polihedronları yol-bağlantılı uzaylar. Üç uzayında temel grubunu biliyoruz ve $\pi_1(|J \cup K|)$ yı hesaplamak istiyoruz.

$|J \cap K| \subseteq |J|$, $|J \cap K| \subseteq |K|$ için $j : |J \cap K| \to |J|$ ve $k : |J \cap K| \to |K|$ inclusion dönüşüm ve taban noktası gibi $J \cap K$ nın bir v köşesini alalım.

Teorem 35 *:(Van Kampen) v tabanında $|J \cup K|$ nın temel grubu, $\forall z \in \pi_1(|J \cap K|, v)$ için $j_*(z) = k_*(z)$ ilişkisini eklemeyle $\pi_1(|J|, v) * \pi_1(|K|, v)$ free çarpımından elde edilir.*

Kanıt. : $J \cap K$ da T_0 maksimal ağacını alalım. T_0 ın uzantısıyla J deki tüm köşeleri içermesiyle T_1, J de maksimal ağaç, aynı şekilde T_0 ın uzantısıyla K daki tüm köşeleri içermesiyle T_2 , K da maksimal ağaç olsun.$T_1 \cap (J \cap K) = T_0 = T_2 \cap (J \cap K)$ dır. Dolayısıyla $T_1 \cup T_2$, $J \cup K$ da maksimal ağaçtır.



Şekil 2.8: Torusun üçgenlemesi

$E(K,v) \cong \pi_1(|K|,v) \cong G(K,L)$ olduğundan $\pi_1(|J \cup K|)$ nın temel grubu, $J \cup K$ nın üçgenleriyle verilen $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$ ilişkisi ve $J \cup K - T_1 \cup T_2$ nın kenarlarına karşılık getirilen g_{ij} elemanlarıyla üretilir.

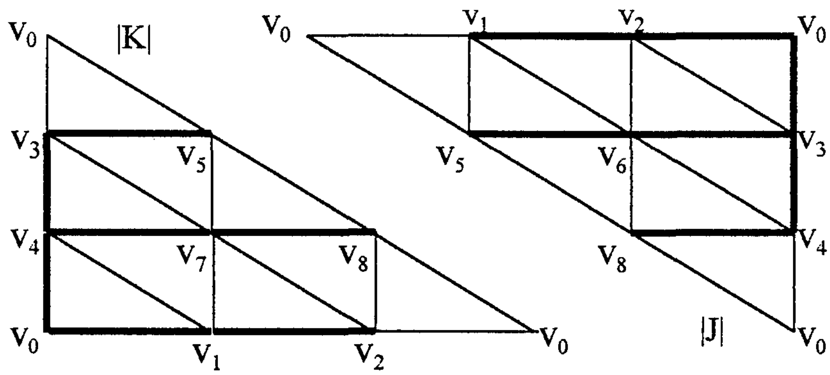
Bu grup, $J - T_1$ in üçgenlerindeki $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ ilişkisi ve $J - T_1$ in bir kenarına karşılık getirilen a_{ij} elemanı ve $K - T_2$ nın üçgenlerindeki $b_{ij}b_{jk} = b_{ik}$ ilişkisi ve $K - T_2$ nin bir kenarına karşılık getirilen b_{ij} elemanı ve $J \cap K$ nın aynı kenarında $a_{ij} = b_{ij}$ ekstra ilişkisini eklemeyle bir gruptur.

Yani, $\pi_1(|J \cap K|,v)$ nin g_{ij} üreteçi için $j_*(g_{ij}) = k_*(g_{ij})$ ilişkisini eklemeyle $J \cup K$ nın temel grubu $\pi_1(|J \cup K|,v) = \pi_1(|J|,v) * \pi_1(|K|,v)$ dır. ■

Örnek 36 : *Torus'un temel grubunu hesaplayınız.*

Torus'un bir üçgenlemesi olmak üzere (Şekil 2.8); şekli köşe boyunca keserek Van Kampen teoremine göre torus'un temel grubunu hesaplarsak.

J nin temel grubunu (Şekil 2.9) üreteç ve ilişkileri okuyrak, $g_{01}g_{15} = g_{05}$, $g_{15}g_{56} = g_{16}$, $g_{12}g_{26} = g_{16}$ $g_{26}g_{63} = g_{23}$, $g_{20}g_{03} = g_{23}$, $g_{56}g_{68} = g_{58}$, $g_{68}g_{84} = g_{64}$, $g_{63}g_{34} = g_{64}$, $g_{40}g_{08} = g_{48}$ *olmak üzere* $g_{01} = g_{05}$ *tek bir üreteç vardır. Dolayısıyla* $\pi_1(|J|,v_0) = Z$ *aynı şekilde* $\pi_1(|K|,v_0) = Z$ *dir.* $J \cap K$ *çember olduğundan temel grubu* $\pi_1(|J \cap K|,v_0) = Z$ *dir.* $J \cup K$ *nın temel grubu* $\pi_1(|J \cap K|,v_0)$ *nın* g_{ij} *üreteçi için* $j_*(g_{ij}) = k_*(g_{ij})$ *ilişkisini eklemeyle* $\pi_1(|J \cup K|,v_0) = \pi_1(|J|,v_0) * \pi_1(|K|,v_0) = Z * Z$ *dir.*



Şekil 2.9:

KAYNAKLAR

1. ARMSTRONG, M.A., Basic Topology, Springer-Verlag, 1983.

2. MASSEY, W.S., Algebraic Topology: An Introduction , Harcout, Brace and World,1967, Springer-Verlag, New York, 1977.