Murat LİMONCU

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ocak-2001

NEWTON-CARTAN GRAVİTASYON TEORİLERİNİN DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ

Murat LİMONCU

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ocak-2001

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

..Murat Limoncuer.....'ın ..Newton-Cartan..Gravitasyon .teorilerinin dif. Geometrisi. başlıklı ....Matematik.......... Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans tezi 19.01.2001. tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	Imza
Üye (Tez Danışmanı) :	Prof. Dr. Tekin Dereli	
Üye :	Prof. Dr. Şahin Koçak	
Üye :	~~Hüseyin~~ Doç. Dr. Hüseyin Az	
Üye :	....	
Üye :	....	....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 31.01.2001..... tarih ve ...4/18........ sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Orhan ÖZER
Fen Bilimleri Enstitüsü
Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NEWTON-CARTAN GRAVİTASYON TEORİLERİNİN DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ

Murat LİMONCU

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. TEKİN DERELİ

2001, Sayfa 28

Bir kütlesel çekim teorisi olarak Newton-Cartan gravitasyon teorisinin zeminini oluşturan Newton-Cartan manifoldları tanımlanarak diferansiyel geometrik açıdan incelenmektedir. Newton-Cartan manifoldlarında eğriliğin yanı sıra burulmanında bulunması halinde nelerin değiştiği ortaya konmaktadır.

Anahtar Kelimeler:Tensör Alanları, Tensör Türevleri, Riemann Manifoldları, Kovaryant Türev, Newton-Cartan Manifoldları

ABSTRACT

Master of Science Thesis

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF NEWTON-CARTAN THEORIES

Murat LİMONCU

Anadolu University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Prof.Tekin DERELİ

2001, Pages 28

The diferantial geometry of Newton-Cartan manifolds which forms the basis of Newton-Cartan theory of gravitation is examined. In particular the consequences of sppace-time having non-zero torsion besides curvature are found.

Keywords:Tensor Fields, Tensor Derivatives, Riemann Manifolds, Covariant Derivative, Newton-Cartan Manifolds

İÇİNDEKİLER

1 GİRİŞ

Einstein'ın genel görelilik teorisine göre uzay-zaman 4-boyutlu bir yarı Riemann manifoldudur. Bu yaklaşımda herhangi bir madde dağılımı uzay-zaman eğriliğine kaynak eder. Bir test kütlesinin uzay-zamanın geodesikleri üzerinde hareket ettikleri kabul edilir. (Eşdeğerlik İlkesi) Böylece kütlesel çekim (gravitasyon) kuvveti kavramının yerine uzay-zaman eğriliğinin etkisi konulmuş olmaktadır. Newton'un gravitasyon teorisine benzer bir diferansiyel geometrik yorum getirilebileceğine ilk kez 1920 lerde E.Cartan vbe K.Friedrichs dikkat çekmişlerdir. [1] , [2] , [3] Daha yakın zamanlarda Newton-Cartan uzay-zamanlarında gravitasyon teorileri Trautman [4] Dombrowski [5] Havas [6] Duval ve Künzle [8] , [9] tarafından tekrar ele alınmıştır. Ancak konu önemine rağmen fizikçiler tarafından çok fazla incelenmemiştir. [7] , [10] , [11] , [12] , [13] Matematikçilerde dejenere manifoldların diferansiyel geometrisi üzerinde çok durmamışlardır. [5] , [10] Halbuki bu hem matematiksel hem fiziksel yönden ilginç olabilecek bir konudur. Tez çalışmamızda daha geniş incelemelere başlangıç olacak yeni sonuçlar bulunmuştur.

Tezde sırasıyla

i) Tensör alanları, Tensörler, Kontraksiyon ve Tensör türevi tanımlanacak,

ii) Riemannian ve yarı-Riemannian manifold tanımlanarak bir tensör türevi olan Levi-Civita bağlantısı ve onun kovaryant türevi tanımlanacak,

iii) Galilei manifold tanımlanarak manifoldun bir Levi-Civita bağlantısıyla donatılabileceği gösterilecek. Ve manifol burulmalı olursa nelerin değişeceği ortaya konacaktır.

2 TENSÖR ALANLARI VE TENSÖR CEBRİ

Tanım 2.1. Diferansiyellenebilir sonlu boyutlu bir M manifoldunda, $(\mathfrak{X}(M), C^{\infty}(M))$ ile vektör alanlarının modülünü ve $(\mathfrak{X}^*(M), C^{\infty}(M))$ ile de kovektör alanlarının modülünü gösterirsek

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times ... \times \mathfrak{X}^*(M)}_{\text{r-tane}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M)}_{\text{s-tane}} \to C^{\infty}(M)$$

veya kısaca

$$T : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^{\infty}(M)$$

şeklindeki $C^{\infty}(M)$-multilineer T dönüşümüne (r,s)-tipinden tensör alanı denir. Tensör alanlarının kümesini $\mathcal{I}_s^r(M)$ ile gösterirsek $(\mathcal{I}_s^r(M), C^{\infty}(M))$ de bir modüldür. (r,0)-tipinden tensör alanlarına kontravaryant, (0,s)-tipinden tensör alanlarına kovaryant tensör alanları denir. $(\mathcal{I}_s^r(M), C^{\infty}(M))$ bir modülse $T_1, T_2 \in \mathcal{I}_s^r(M)$, $f \in C^{\infty}(M)$ olmak üzere $T_1 + T_2 \in \mathcal{I}_s^r(M)$ ve $fT_1 \in \mathcal{I}_s^r(M)$ olan toplama $(+)$ ve çarpma $(\cdot)$ işlemleri vardır; öyleki $\theta^1, ..., \theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)$ ve $X_1, ..., X_s \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)\left(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s\right) &= T_1\left(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s\right) \\ &\quad + T_2\left(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s\right) \\ (fT_1)\left(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s\right) &= fT_1\left(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s\right).\end{aligned} \tag{2.1}$$

Tanım 2.2. $\otimes : \mathcal{I}_n^m(M) \times \mathcal{I}_{n'}^{m'}(M) \to \mathcal{I}_{n+n'}^{m+m'}(M)$ şeklindeki $C^{\infty}(M)$-bilineer dönüşüme tensörel çarpım denir. $A \in \mathcal{I}_n^m(M)$ ve $B \in \mathcal{I}_{n'}^{m'}(M)$ olmak üzere dönüşüm için $\otimes(A, B) = A \otimes B$ gösterimi kullanılırsa

$$\begin{aligned}&(A \otimes B)\left(\theta^1, ..., \theta^{m+m'}, X_1, ..., X_{n+n'}\right) \\ &= A\left(\theta^1, ..., \theta^m, X_1, ..., X_n\right) B\left(\theta^{m+1}, ..., \theta^{m+m'}, X_{n+1}, ..., X_{n+n'}\right)\end{aligned} \tag{2.2}$$

dır. Burada $\theta^1, ..., \theta^m, \theta^{m+1}, ..., \theta^{m+m'} \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X_1, ..., X_n, X_{n+1}, ..., X_{n+n'} \in \mathfrak{X}(M)$ dir.

Bu dönüşüme tensörel çarpım denmesinin sebebi tensörel çarpımın, $\mathcal{I}_s^r(M)$ lerin sonsuz toplamlarından oluşan $\mathcal{I}(M) = \sum\limits_{r,s=1}^{\infty} \mathcal{I}_s^r(M)$ modülünü $C^{\infty}(M)$ üzerinde bir cebir yapmasından kaynaklanmaktadır.

Tanım 2.3. Diferansiyellenebilir sonlu boyutlu bir M manifoldunda, $(T_pM, \mathbb{R})$ tanjant vektör uzayını ve $(T_pM^*, \mathbb{R})$ de kotanjant vektör uzayını göstermek üzere $\forall p \in M$ için

$$T_p : (T_pM^*)^r \times (T_pM)^s \to \mathbb{R}$$

şeklinde verilen $\mathbb{R}$-multilineer T_p dönüşümüne (r,s)-tipinden tensör denir; öyleki, $A \in \mathcal{I}_s^r(M)$, $\theta^1, ..., \theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)$ ve $X_1, ..., X_s \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere $\forall p \in M$ için

$$\left[A\left(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s\right)\right](p) = A_p\left(\theta^1(p), ..., \theta^r(p), X_1(p), ..., X_s(p)\right). \quad (2.3)$$

Tensörlerin kümesini $(\mathcal{I}_p)_s^r(M)$ ile gösterirsek $\left((\mathcal{I}_p)_s^r(M), \mathbb{R}\right)$ de bir vektör uzayıdır. Bu durumda tensör alanları M' nin her p noktasına bir tensör karşılık getirir.

Sonuç 2.1. **a)** Bir kovektör alanı (1-form) (0,1)-tipinde kovaryant tensör alanıdır. Çünkü kovektör alanları

$$\theta : \mathfrak{X}(M) \to C^{\infty}(M)$$

şeklindeki $C^{\infty}(M)$-lineer dönüşümlerdir. Bu durumda tensör alanı tanımına bakılacak olursa $r = 0$ ve $s = 1$ dir.

b) $V \in \mathfrak{X}(M)$ ve $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ olmak üzere $V(\theta) = \theta(V)$ tanımı altında bir vektör alanı (1,0)-tipinde kontravaryant tensör alanıdır. Çünkü bu tanımla

$$V : \mathfrak{X}^*(M) \to C^{\infty}(M)$$

şeklindeki $C^{\infty}(M)$-lineer dönüşümü elde edilir. Bu durumda tensör alanı tanımına bakılacak olursa $r = 1$ ve $s = 0$ dir.

c) Eğer $A : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ dönüşümü $C^{\infty}(M)$-multilineer ise daima (1,s)-tipinden olan bir $\widetilde{A} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^{\infty}(M)$ tensör alanı bulunur; öyleki

$$\widetilde{A}(\theta, X_1, ..., X_s) = \theta\left(A(X_1, ..., X_s)\right) \quad (2.4)$$

olur. Bir başka deyişle daima yukarıdaki gibi bir $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ bulunur.

d) $A \in \mathcal{I}_0^r(M)$ sadece kontravaryant ve $B \in \mathcal{I}_s^0(M)$ sadece kovaryant tensör alanları ise $A \otimes B = B \otimes A$ dır. Çünkü tensörel çarpım tanımından

$$(A \otimes B)(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s) = A(\theta^1, ..., \theta^r) B(X_1, ..., X_s) \qquad (2.5.a)$$

$$(B \otimes A)(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s) = B(X_1, ..., X_s) A(\theta^1, ..., \theta^r) \qquad (2.5.b)$$

bulunur ve $C^\infty(M)$ nin değişimli bir halka olmasından dolayı $A \otimes B = B \otimes A$ elde edilir.

Tanım 2.4. $f \in C^\infty(M)$ elemanları yani $f : M \to \mathbb{R}$ ye sürekli, sonsuz defa türevlenebilen ve her türevde yine sürekli olan fonksiyonlar (0,0)-tipinden tensör alanları olarak tanımlanırlar; öyleki A herhangi tipden bir tensör alanı olmak üzere

$$f \otimes A = A \otimes f = fA \qquad (2.6)$$

olur.

Tanım 2.5. M nin bir $\mathcal{U} \subset M$ açığında bir koordinat sistemi $\eta = (x^1, ..., x^n)$ olsun. ($\dim M = n$) Bu koordinat sisteminde $\mathfrak{X}^*(M)$ ve $\mathfrak{X}(M)$ nin standart tabanları olarak verilen $dx^1, ..., dx^n \in \mathfrak{X}^*(M)$ ve $\frac{\partial}{\partial x^1}, .., \frac{\partial}{\partial x^n} \in \mathfrak{X}(M)$ kovektör alanları ile vektör alanlarını alalım. Bu durumda bir $A \in \mathcal{I}_s^r(M)$ tensör alanının bileşenleri diye,

$$A^{i_1 ... i_r}_{j_1 ... j_s} = A\left(dx^{i_1}, ..., dx^{i_r}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, .., \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right) \qquad (2.7)$$

notasyonu ile verilen $A^{i_1 ... i_r}_{j_1 ... j_s} \in C^\infty(M)$ fonksiyonuna denir.

Bu durumda Tanım1.2, Tanım1.4 ve Sonuç1.1 den dolayı genel olarak bir A tensör alanını η koordinat sisteminde

$$A = \sum_{\substack{i_1, ..., i_r, \\ j_1, ..., j_s}=1}^{n} A^{i_1 ... i_r}_{j_1 ... j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_s} \qquad (2.8)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Notasyon: Yeri geldikçe herhangi bir koordinat sisteminde yazılan $\frac{\partial}{\partial x^i}$ baz vektör alanlarını kısaca ∂_i ile göstereceğiz. Bu durumda yukarıdaki ifadeleri sırasıyla

$$\begin{array}{l} A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = A\left(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}\right) \\ A = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_r,=1 \\ j_1,\dots,j_s}}^{n} A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \end{array} \tag{2.9}$$

şeklinde yazabiliriz.

Teorem 2.1. (1,1)-tipinden bir A tensörünün herhangi bir koordinat sisteminde yazılmış A^i_j bileşenlerinin oluşturduğu $n \times n$ tipindeki matrisin izi $Tr\left(A^i_j\right)$ koordinat sisteminden bağımsızdır değişmez. ($\dim M = n$)

İspat: Herhangi bir koordinat sistemine $\eta = (x^1, \dots, x^n)$ diyelim ve A nın bu koordinat sistemindeki bileşenlerini $({}^{\eta}A)^i_j$ ile gösterelim. Öyleyse $({}^{\eta}A)^i_j$ nın izi $Tr\left(({}^{\eta}A)^i_j\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} ({}^{\eta}A)^k_k = \sum\limits_{k=1}^{n} ({}^{\eta}A)\left(dx^k, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$ şeklinde yazabilir. Şimdi bir başka koordinat sistemine $\xi = (y^1, \dots, y^n)$ diyelim ve aynı işlemleri bu koordinat sisteminde yapalım. Bu durumda $Tr\left(({}^{\xi}A)^i_j\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} ({}^{\xi}A)^k_k = \sum\limits_{k=1}^{n} ({}^{\xi}A)\left(dy^k, \frac{\partial}{\partial y^k}\right)$ buluruz. η ile ξ arasında $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$ şeklinde bir ilişki vardır. (veya $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$ yazılabilirdi) Öyleyse analiz bilgilerinden yararlanarak

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} ({}^{\xi}A)\left(dy^k, \frac{\partial}{\partial y^k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} ({}^{\xi}A)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} dx^i, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= \sum_{k,i,j=1}^{n} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial y^k} ({}^{\eta}A)\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \delta^j_i ({}^{\eta}A)\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{k=1}^{n} ({}^{\eta}A)\left(dx^k, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

elde edilir. Görülmektedir ki her iki koordinat sistemindeki izler birbirine eşittir.

Bu önemli sonuç aşağıdaki kontraksiyon (büzülme) operatörünü tanımlamamıza yarar.

Tanım 2.6. Bir $A \in \mathcal{I}^1_1(M)$ tensör alanının herhangi bir koordinat sistemindeki bileşenlerinin oluşturduğu $n \times n$ tipindeki matrisin izine A nın kontraksiyonu denir ve $\mathbf{C}(A)$ ile gösterilir. ($\dim M = n$)

Bu durumda $\mathbf{C} : \mathcal{I}^1_1(M) \to C^{\infty}(M)$ olup $C^{\infty}(M)$-lineerdir. Çünkü; genel olarak matris cebrinde elemanları $C^{\infty}(M)$ lerden oluşan herhangi $n \times n$ tipindeki α, β matrisleri için, $f, g \in C^{\infty}(M)$ olmak üzere $Tr(f\alpha + g\beta) = fTr(\alpha) + gTr(\beta)$ eşitliği vardır. Öyleyse yukarıdaki tanımdan dolayı bu eşitlik $\mathbf{C}$ nin $C^{\infty}(M)$-lineerliğine de karşılık gelmiş olur.

Bu tanım $r \geq i \geq 1, s \geq j \geq 1$ olmak üzere herhangi bir $A \in \mathcal{I}_s^r(M)$ tensör alanına genişletilebilir. Belirlenmiş olan $\theta^1, ..., \theta^{r-1} \in \mathfrak{X}^*(M)$ kovektör alanları ile $X_1, ..., X_{s-1} \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanlarını alalım. $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ ve $X \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere

$$B(\theta, X) = A\left(\theta^1, ..., \underset{\substack{\downarrow \\ i.\text{kontravaryant hane}}}{\theta}, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., \overset{\substack{j.\text{kovaryant hane} \\ \uparrow}}{X}, ..., X_{s-1}\right) \tag{2.11}$$

ya da başka bir anlatımla

$$B = A\left(\theta^1, ..., \underset{\substack{\downarrow \\ i.\text{kontravaryant hane}}}{\cdot}, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., \overset{\substack{j.\text{kovaryant hane} \\ \uparrow}}{\cdot}, ..., X_{s-1}\right) \tag{2.12}$$

şeklinde bir $(1,1)$-tipinde B tensör alanı elde edebiliriz. Öyleyse A nın i, j üzerinden $C_j^i(A)$ kontraksiyonu diye B nin yukarıda tanımlanan kontraksiyonunu kullanabiliriz. Bu durumda

$$\begin{aligned}&\left(C_j^i(A)\right)\left(\theta^1, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., X_{s-1}\right) \\ &= \mathbf{C}\left(A\left(\theta^1, ..., \underset{\substack{\downarrow \\ i.\text{kontravaryant hane}}}{\cdot}, ..., \theta^{r-1}, X_1, ..., \overset{\substack{j.\text{kovaryant hane} \\ \uparrow}}{\cdot}, ..., X_{s-1}\right)\right)\end{aligned} \tag{2.13}$$

sonucunu elde ederiz. Görülmektedir ki $C_j^i(A) \in \mathcal{I}_{s-1}^{r-1}(M)$ dir ve bir $\eta = (x^1, ..., x^n)$ koordinat sisteminde $C_j^i(A)$ nin bileşenleri ile A nin bileşenleri arasında

$$\left(C_j^i(A)\right)_{j_1 ... j_{s-1}}^{i_1 ... i_{r-1}} = \sum_{m=1}^{n} A_{j_1 ... \underset{\substack{\downarrow \\ j.\text{indis}}}{m} ... j_{s-1}}^{i_1 ... \overset{\substack{j.\text{indis} \\ \uparrow}}{m} ... i_{r-1}} \tag{2.14}$$

eşitliği vardır.

Tanım 2.7. Diferansiyellenebilir bir M manifoldunda $\mathfrak{D} : \mathcal{I}(M) \rightarrow \mathcal{I}(M)$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\mathfrak{D}$ ye tensör türevi denir:

($\mathfrak{D}1$) $\mathfrak{D} : \mathcal{I}_s^r(M) \rightarrow \mathcal{I}_s^r(M)$, $\forall r, s \in \mathbb{N}$ için

($\mathfrak{D}2$) $\mathfrak{D}(aA + bB) = a\mathfrak{D}(A) + b\mathfrak{D}(B)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall A, B \in \mathcal{I}_s^r(M)$ için

($\mathfrak{D}3$) $\mathfrak{D}(T_1 \otimes T_2) = \mathfrak{D}(T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes \mathfrak{D}(T_2)$, $\forall T_1 \in \mathcal{I}_s^r(M)$ ve $\forall T_2 \in \mathcal{I}_{s'}^{r'}(M)$ için

($\mathfrak{D}4$) $\mathfrak{D}(C(A)) = C(\mathfrak{D}(A))$, $\forall A \in \mathcal{I}_s^r(M)$ ve herhangi bir C kontraksiyonu için

Bu tanımda ($\mathfrak{D}1$) dönüşümün derecesinin sıfır olduğunu yani tensör tipinin korunduğunu söylemektedir. ($\mathfrak{D}2$) ve ($\mathfrak{D}3$) cebirsel olarak bir türev tanımının sağlaması gereken ilk koşulları vermektedir $\mathbb{R}$-lineerlik ve Leibniz koşulu, ($\mathfrak{D}4$) $\mathfrak{D}$ nin bütün kontraksiyonlarla komütatif olduğunu söylemektedir.

Teorem 2.2. Herhangi bir $\mathfrak{D}$ tensör türevi için, $A \in \mathcal{I}_s^r(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\left[A\left(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s\right)\right] &= (\mathfrak{D}A)\left(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s\right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r} A\left(\theta^1, ..., \mathfrak{D}\theta^i, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s\right) \qquad (2.15) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{s} A\left(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., \mathfrak{D}X_j, ..., X_s\right) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitliğe *çarpım kuralı* denir. Burada $\theta^1, ..., \theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X_1, ..., X_s \in \mathfrak{X}(M)$ dir.

İspat Bildiğimiz C kontraksiyonunun $(r+s)$ defa ard arda uygulanması ile elde edilen yeni kontraksiyonu $\overline{C} = \underbrace{CC...C}_{(r+s)\text{-tane}}$ ile gösterelim. Bu durumda

$$A\left(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s\right) = \overline{C}\left(A \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_s \otimes \theta^1 \otimes ... \otimes \theta^r\right) \qquad (2.16)$$

olacaktır. Mesela $r = s = 1$ ise, herhangi bir koordinat sisteminde

$$A\left(\theta^1, X_1\right) = \sum_{i,j=1}^{n} A_j^i \left(\theta^1\right)_i (X_1)^j \qquad (2.17)$$

elde edilir. Aynı koordinat sisteminde

$$\begin{aligned}\overline{C}\left(A\otimes X_1\otimes\theta^1\right) &= C_1^1C_2^1\left(\sum_{m,n,i,j=1}^{n}A_n^m\left(X_1\right)^j\left(\theta^1\right)_i\partial_m\otimes\partial_j\otimes dx^n\otimes dx^i\right)\\ &= \sum_{i,j=1}^{n}A_j^i\left(\theta^1\right)_i\left(X_1\right)^j\end{aligned}\tag{2.18}$$

bulunur ve $A\left(\theta^1,X_1\right)=\overline{C}\left(A\otimes X_1\otimes\theta^1\right)$ olduğu görülür. Yukarıdaki en genel durumdada benzer şekilde uygun kontraksiyon oparatörleri bulunur. Bu durumda

$$\mathfrak{D}\left[A\left(\theta^1,...,\theta^r,X_1,...,X_s\right)\right]=\mathfrak{D}\left(\overline{C}\left(A\otimes X_1\otimes...\otimes X_s\otimes\theta^1\otimes...\otimes\theta^r\right)\right)\tag{2.19}$$

ifadesini oluşturabiliriz. ($\mathfrak{D}3$) ve ($\mathfrak{D}4$) kullanılarak

$$\begin{aligned}&\mathfrak{D}\left[A\left(\theta^1,...,\theta^r,X_1,...,X_s\right)\right]=\\ &\qquad\overline{C}\left(\left(\mathfrak{D}A\right)\otimes X_1\otimes...\otimes X_s\otimes\theta^1\otimes...\otimes\theta^r\right)\\ &\qquad+\overline{C}(A\otimes(\textstyle\sum_{j=1}^{s}X_1\otimes...\otimes\mathfrak{D}X_j\otimes...\otimes X_s)\otimes\theta^1\otimes...\otimes\theta^r)\\ &\qquad+\overline{C}(A\otimes X_1\otimes...\otimes X_s\otimes(\textstyle\sum_{i=1}^{r}\theta^1\otimes...\otimes\mathfrak{D}\theta^i\otimes...\otimes\theta^r))\end{aligned}\tag{2.20}$$

bulunur. Burada kontraksiyonun eşiti tekrar kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}\left[A\left(\theta^1,...,\theta^r,X_1,...,X_s\right)\right] &= \left(\mathfrak{D}A\right)\left(\theta^1,...,\theta^r,X_1,...,X_s\right)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{r}A\left(\theta^1,...,\mathfrak{D}\theta^i,...,\theta^r,X_1,...,X_s\right)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{s}A\left(\theta^1,...,\theta^r,X_1,...,\mathfrak{D}X_j,...,X_s\right)\end{aligned}\tag{2.21}$$

elde edilir.

Sonuç 2.2. a) Çarpım kuralının önemi, eğer söz konusu tensör türevinin bütün $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektör alanları ile bütün $f\in C^\infty(M)$ fonksiyonları üzerindeki etkisi bilinirse, çarpım kuralı kullanılarak herhangi bir tensör alanı üzerindeki etkisinin bulunabilmesidir. Bunun nedeni $\forall X\in\mathfrak{X}(M)$ ve $\forall f\in C^\infty(M)$ için $\mathfrak{D}X$ ve $\mathfrak{D}f$ biliniyorsa, $\theta\in\mathfrak{X}^*(M)$ olmak üzere çarpım kuralı

$$\left(\mathfrak{D}\theta\right)(X)=\mathfrak{D}\left[\theta(X)\right]-\theta\left(\mathfrak{D}X\right)\tag{2.22}$$

sonucunu verir. Sağ tarafta $\theta(X) \in C^{\infty}(M)$ olduğundan, $\forall\theta \in \mathfrak{X}^{*}(M)$ için $\mathfrak{D}\theta$ da biliniyor demektir. Bu durumda çarpım kuralının genel ifadesinden

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{D}A)\left(\theta^{1},...,\theta^{r},X_{1},...,X_{s}\right) &= \mathfrak{D}\left[A\left(\theta^{1},...,\theta^{r},X_{1},...,X_{s}\right)\right] \\
&\quad -\sum_{i=1}^{r} A\left(\theta^{1},...,\mathfrak{D}\theta^{i},...,\theta^{r},X_{1},...,X_{s}\right) \qquad (2.23)\\
&\quad -\sum_{j=1}^{s} A\left(\theta^{1},...,\theta^{r},X_{1},...,\mathfrak{D}X_{j},...,X_{s}\right)
\end{aligned}$$

herhangi bir A tensör alanının $\mathfrak{D}A$ tensör türevi bulunur. Çünkü sağ taraf sadece vektör alanlarının, kovektör alanlarının ve fonksiyonların türevlerinden oluşmaktadır. Öte yandan $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ ve $\forall f \in C^{\infty}(M)$ için $\mathfrak{D}X$ ve $\mathfrak{D}f$ biliniyorsa, $fX \in \mathfrak{X}(M)$ olduğundan $\mathfrak{D}fX$ de biliniyor demektir. Bu durumda $\mathfrak{D}$ tensör türevinin bütün fonksiyonlar ve vektör alanları üzerindeki etkisini öyle vermeliyiz ki ($\mathfrak{D}$3) den dolayı $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ ve $\forall f \in C^{\infty}(M)$ için

$$\mathfrak{D}fX = (\mathfrak{D}f)X + f\mathfrak{D}X \qquad (2.24)$$

eşitliği sağlanmalıdır.

b) A tensörü özel olarak $\theta \in \mathfrak{X}^{*}(M)$ kovektör alanı seçilirse, daha önce belirtildiği gibi çarpım kuralından $X \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere

$$\mathfrak{D}\left[\theta(X)\right] = (\mathfrak{D}\theta)(X) + \theta(\mathfrak{D}X) \qquad (2.25)$$

bulunur. Herhangi bir koordinat sistemine geçip $\theta = dx^{i}$ ve $X = \partial_{j}$ alalım ve

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}dx^{i} &= \sum_{m=1}^{n} S_{m}^{i}dx^{m} \qquad (2.26.a)\\
\mathfrak{D}\partial_{j} &= \sum_{m=1}^{n} F_{j}^{m}\partial_{m} \qquad (2.26.b)
\end{aligned}$$

diyelim. Tabi ki burada $F_{m}^{i}, S_{j}^{m} \in C^{\infty}(M)$ dir. İfadeleri eşitlikte yerine koyarsak

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}\left[dx^{i}(\partial_{j})\right] &= \left(\sum_{m=1}^{n} S_{m}^{i}dx^{m}\right)(\partial_{j}) + dx^{i}\left(\sum_{m=1}^{n} F_{j}^{m}\partial_{m}\right)\\
\mathfrak{D}\left[\delta_{j}^{i}\right] &= \sum_{m=1}^{n} S_{m}^{i}\delta_{j}^{m} + \sum_{m=1}^{n} F_{j}^{m}\delta_{m}^{i}\\
0 &= S_{j}^{i} + F_{j}^{i} \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

sonucunu buluruz. Bu durumda

$$\mathfrak{D}\partial_j = \sum_{m=1}^{n} F_j^m \partial_m \Rightarrow \mathfrak{D}dx^i = \sum_{m=1}^{n} -F_m^i dx^m \tag{2.28}$$

olur.

Tanım 2.8. $V \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere L_V tensör türevi tanımlansın; öyleki, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M)$ için $L_V f = V(f)$, $L_V X = [V, X]$ olsun. Buradaki $[V, X]$ parantezi Lie parantezi olup bu türeve *Lie türevi* denir.

Bu türevin koşulları uyumludur. Çünkü, $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonu (0,0)-tipinden bir tensör alanıdır. Aynı şekilde $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanı da (1,0)-tipinden bir tensör alanıdır. Bu durumda L_V bir tensör türevi ise

$$L_V f \otimes X = (L_V f) \otimes X + f \otimes L_V X \tag{2.29}$$

yazabiliriz öte yandan tanım gereği $f \otimes X = fX \in \mathfrak{X}(M)$ dir. Bu durumda tanımdan

$$L_V f \otimes X = L_V f X = [V, fX] \tag{2.30}$$

yazılır. Lie parantezinin tanımından

$$\begin{aligned} L_V f \otimes X &= V(f) X + [V, X] \\ &= V(f) X + L_V X \end{aligned} \tag{2.31}$$

bulunur. İki sonuç birleştirilirse $(L_V f) \otimes X + f \otimes L_V X = V(f) X + L_V X$ bulunur. Bu eşitliğin her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için geçerli olması gerekliliğinden $L_V f = V(f)$ bulunur. Tanımdan çıkan önemli bir özellik Lie parantezinden kaynaklanan

$$L_{fV} W = [fV, W] \tag{2.32.a}$$

$$L_{fV} W = -W(f) V + f[V, W] \tag{2.32.b}$$

$$L_{fV} W = -W(f) V + L_V W \tag{2.32.c}$$

özellikleridir. $(V, W \in \mathfrak{X}(M))$

Tanım 2.9. $V \in \mathfrak{X}(M)$ ve $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ olmak üzere $D_{V\otimes\theta}$ tensör türevi tanımlansın; öyleki, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M)$ için $D_{V\otimes\theta} f = 0$, $D_{V\otimes\theta} X = \theta(X) V$ olsun.

Bu türevin koşulları da uyumludur. Çünkü, bir önceki tanımda uygulanan mantık burada da kullanılırsa $(D_{V\otimes\theta}f)\otimes X+f\otimes D_{V\otimes\theta}X = fD_{V\otimes\theta}X$ elde edilir. Eşitliğin her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için geçerli olması gerekliliğinden $D_{V\otimes\theta}f = 0$ bulunur. Bu tipden türevler cebirsel türevlerdir. Tanımdan çıkan başka bir özellik açıkca gözüken $D_{f(V\otimes\theta)}W = fD_{V\otimes\theta}W$ özelliğidir.

3 RIEMANN MANİFOLDLARI

Tanım 3.1. g tensör alanı (0,2)-tipinde, simetrik, dejenere olmayan ($\det g \neq 0$) ve pozitif tanımlı olacak şekilde n-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldunun $(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$ vektör alanı modülünde verilsin. Bu durumda (M, g) ikilisine (M nin g ile donatılmasına) bir *Riemann manifoldu* denir. Eğer pozitif tanımlılık şartı kaldırılırsa ikiliye *yarı-Riemann manifoldu* denir. Tanımlanan g tensör alanına *metrik tensör alanı* denir.

Tanım 3.2. Diferansiyellenebilir bir M manifoldunun $(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$ vektör alanı modülünde aşağıdaki koşulları sağlayan $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dönüşümüne bir *bağlantı* denir. $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere $D(V, W) = D_V W \in \mathfrak{X}(M)$ olarak notasyonlandırılır. $\forall V_1, V_2, V, W_1, W_2, W \in \mathfrak{X}(M)$, $\forall f, g \in C^\infty(M)$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

(D1) $D_{(fV_1+gV_2)}W = fD_{V_1}W + gD_{V_2}W$ dir. Yani V ye göre $C^\infty(M)$-lineerlik vardır.

(D2) $D_V(aW_1 + bW_2) = aD_VW_1 + bD_VW_2$dir. Yani W ye göre $\mathbb{R}$-lineerlik vardır.

(D3) $D_V(fW) = V(f)W + fD_VW$ dir.

Burada D_V ifadesine D bağlantısının *kovaryant türevi* denir. Dolayısıyla D_VW ifadesi W nin V ye göre *kovaryant* türevidir.

Dikkat edilirse bağlantı tanımında manifoldun Riemann manifoldu (ya da yarı-Riemann manifoldu) olmasına gerek yoktur. Fakat Teorem 2.2 de göreceğiz ki tek türlü belirgin bir bağlantı için yukarıdaki üç koşula iki koşul daha ekleyerek bir Riemann manifoldunda (ya da yarı-Riemann manifoldunda) çalışma gereği duyacağız. Şimdi Teorem 2.2 ye hazırlık amacıyla cebirsel bir teoremi aşağıda ispatlayarak verelim.

Teorem 3.1. M bir Riemann manifoldu (ya da yarı-Riemann manifoldu) olmak üzere belirlenmiş bir $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ kovektör alanı ve $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\theta(X) = g(V, X) \tag{3.1}$$

eşitliği varsa $V \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanı tekdir.

İspat (varsa tekdir) Varsayalım ki bu eşitliği sağlayan iki tane vektör alanı V, W olsun. Bu durumda $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ ve $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\theta(X) = g(V,X) \tag{3.2.a}$$

$$\theta(X) = g(W,X) \tag{3.2.b}$$

olacağı bulunur ki, g nin bilineerliğinden

$$g(V,X) - g(W,X) = 0 \tag{3.3.a}$$

$$g(V-W,X) = 0 \tag{3.3.b}$$

elde edilir. Eşitlik $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ için geçerli olduğundan g nin non-dejenereliği kullanılırsa $V - W = 0$ ve buradan da $V = W$ bulunur.

(vardır) Bir $(x^1, ..., x^n)$ koordinat sisteminde kovektör alanı $\theta = \sum_{k=1}^{n} \theta_k dx^k$ ve vektör alanları $X = \sum_{j=1}^{n} X^j \partial_j$ ile $V = \sum_{i=1}^{n} V^i \partial_i$ olsun. Bu durumda

$$\theta(X) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j X^j \tag{3.4.a}$$

$$g(V,X) = \sum_{i,j=1}^{n} V^i X^j g_{ij} \tag{3.4.b}$$

olmalıdır. İki ifade eşitlenirse

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(\theta_j - V^i g_{ij}\right) X^j = 0 \tag{3.5}$$

elde edilir. Eşitliğin bütün X ler için geçerli olması için $n \geq j \geq 1$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\theta_j - V^i g_{ij}\right) = 0 \tag{3.6}$$

olmalıdır. Bu durumda

$$V^i = \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \theta_j \tag{3.7}$$

bulunur ve böylece V nin varlığı gösterilmiş olur.

Teorem 3.2. M bir Riemann manifoldu (ya da yarı-Riemann manifoldu) olmak üzere, bir D bağlantısı için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa bağlantı tekdir:

(D4) $[V,W] = D_V W - D_W V$, $\forall V, W \in \mathfrak{X}(M)$ için,

(D5) $Xg(V,W) = g(D_X V, W) + g(V, D_X W)$, $\forall X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ için.

Tek türlü belirgin bu bağlantıya *Levi-Civita bağlantısı*, ve bu bağlantının verdiği kovaryant türeve de *Levi-Civita kovaryant türevi* denir ve aşağıdaki *Koszul formulü* ile karakterize edilir:

$$\begin{aligned} 2g(D_V W, X) &= Vg(W,X) + Wg(X,V) - Xg(V,W) \\ &\quad - g(V,[W,X]) + g(W,[X,V]) + g(X,[V,W]) \end{aligned} \tag{3.8}$$

İspat Koszul formülü (D4) ve (D5) den ($X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanlarının kendi aralarındaki çembersel permütasyonlarından elde edilen yeni ifadeler yardımıyla) kolaylıkla çıkartılır. Dikkat edilirse Koszul formülünde sağ taraf X vektör alanına göre $C^\infty(M)$-lineerdir. Bu durumda sağ tarafa $F(V,W,X)$ dersek, belirlenmiş $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanları için bir $\theta = F(V,W,.) : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ kovektör alanı elde ederiz. Dolayısıyla elimizde $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ ve belirlenmiş $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\theta(X) = 2g(D_V W, X) \tag{3.9}$$

eşitliği vardır. Öyleyse Teorem 3.1 e göre $D_V W$ tekdir. Yani belirlenen her V, W vektör alanı çifti için tek bir $D_V W$ vardır, dolayısıyla D de tekdir.

Koszul formülünün bağlantıyı (Levi-Civita) karakterize etmesi demek: Koszul formülünden (D1), (D2), (D3), (D4) ve (D5) koşullarının hepsinin çıkartılabiliyor olması demektir. Gerçektende elemanter işlemlerle bu karakterizasyonun sağlandığı rahatlıkla görülür.

$(x^1, ..., x^n)$ koordinat sisteminde X, V, W vektör alanlarını $n \geq k, i, j \geq 1$ olmak üzere $X = \partial_k$, $V = \partial_i$ ve $W = \partial_j$ olarak seçelim ($\dim M = n$). Bu durumda $D_{\partial_i}\partial_j = \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^m \partial_m$ dersek, Koszul formülünden

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) \tag{3.10}$$

bulunur ve $\Gamma_{ij}^{k} \in C^{\infty}(M)$ bağlantı katsayılarına *Christoffel sembolleri* denir. Burada g^{km} ile g_{km} nin oluşturduğu matrisin tersi anlatılmaktadır ve bilindiği gibi

$$\sum_{m=1}^{n} g^{im} g_{mj} = \delta_j^i \tag{3.11}$$

dir.

Tanım 3.3. Bir Riemann manifoldunda (ya da yarı-Riemann manifoldunda) $V \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere D_V bir tensör türevi tanımlansın; öyleki, $\forall f \in C^{\infty}(M)$ için $D_V f = V(f)$ ve D_V Levi-Civita kovaryant türevi olsun. Dolayısıyla türev (D1), (D2), (D3), (D4) ve (D5) koşullarının hepsini sağlamaktadır.

D_V nin Levi-Civita verilmesi Koszul formülü dolayısıyla $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ için $D_V X$ in g tensörüne bağlı olarak verilmesi demektir. Koszul formülü (D3) karakterize ettiğinden tanımın $D_V f = V(f)$ ile uyumluluğu kendiliğinden gelmektedir.

Bu tanımın önemli bir sonucu (D5) koşulunun $\forall V \in \mathfrak{X}(M)$ için $D_V g = 0$ sonucunu vermesidir. Bu yüzden bu koşula *metrikle uyumluluk koşulu* denir. Bu birinci bölümde tensör türevleri için verilen çarpım kuralının $D_V g$ için yazılmasıyla rahatlıkla görülür.

Tanım 3.4. $\theta \in \mathfrak{X}^*(M), V, W, U \in \mathfrak{X}(M)$ ve herhangi bir D bağlantısının kovaryant türevi aracılığı ile aşağıdaki gibi tanımlanan (1,3)-tipindeki R tensörüne *eğrilik tensörü* denir:

$$\mathfrak{R}(U, V, W) = D_{[V,W]} U - D_V D_W U + D_W D_V U \tag{3.12.a}$$

$$R(\theta, U, V, W) = \theta(\mathfrak{R}(U, V, W)) \tag{3.12.b}$$

Görüldüğü gibi tanımdan dolayı eğrilik tensörü V ve W vektör alanlarına göre antisimetriktir.

Tanım 3.5. $\theta \in \mathfrak{X}^*(M), V, W \in \mathfrak{X}(M)$ ve herhangi bir D bağlantısının kovaryant türevi aracılığı ile aşağıdaki gibi tanımlanan (1,2)-tipindeki T tensörüne *burulma tensörü* denir:

$$\mathcal{T}(V, W) = [V, W] - D_V W + D_W V \tag{3.13.a}$$

$$T(V, W) = \theta(\mathcal{T}(V, W)) \tag{3.13.b}$$

Görüldüğü gibi tanımdan dolayı burulma tensörü V ve W vektör alanlarına göre antisimetriktir. Dikkat edilirse D eğer Levi-Civita olarak seçilirse (D4) den dolayı özdeş olarak $T = 0$ dır.

Not Eğer (M, g) ikilisine T burulma tensörüde eklenirse (M, g, T) üçlüsü oluşturulmuş olur ki bu üçlünün üzerinde verilecek olan tek türlü belirgin bağlantı Levi-Cvita bağlantısı değildir. Çünkü artık $T \neq 0$ dır. Tek türlü belirgin bu bağlantı (D5) şartının (yani metrik uyumluluk) korunmasıyla aşağıdaki Kozsul formülü (burulmalı) ile karakterize edilir:

$$\begin{aligned} 2g(D_V W, X) &= Vg(W, X) + Wg(X, V) - Xg(V, W) \\ &\quad -g(V, [W, X]) + g(W, [X, V]) + g(X, [V, W]) \\ &\quad -g(V, T(W, X)) + g(W, T(X, V)) + g(X, T(V, W)) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Bu formülden (D1), (D2), (D3) ve (D5) koşullarının hepsi çıkartılır. Hatta T nin, Tanım2.5 de verilen tanımı da bu formülden elde edilir ki, bu Levi-Civita' daki (D4) koşuluna karşılık gelmiş olur. Kozsul formülünün (burulmalı) çıkarılışı Teorem 2.2 de kullanılan mantıkla, (D5) den ve T nin tanımından hareketle elde edilir. Tek türlülüğün Teorem 2.2 de kullanılan mantıkla ispatlandığı açıktır. Buradan elde edilen ve Christoffel sembollerine karşılık gelen afin bağlantı katsayıları

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^{k} &= \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^{j}} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{m}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(T_{j\ i}^{\ k} + T_{i\ j}^{\ k} + T_{ij}^{k} \right) \end{aligned} \tag{3.15}$$

olarak bulunur.

4 NEWTON-CARTAN MANİFOLDLARI

Tanım 4.1. n-boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldunun $(\mathfrak{X}(M), C^{\infty}(M))$ vektör alanı modülünde g ve τ tensör alanları aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde verilsin:

(G1) g (0,2)-tipinde, simetrik, dejenere $(\det g = 0)$ ve $rank\,(g) = n-1$,

(G2) τ (0,1)-tipinde (yani bir kovektör alanı) ve g nin dejenerelik şartını sağlayan öyle bir $V \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanı vardır ki $\tau(V) = 1$ dir.

Buradaki (M, g, τ) üçlüsüne (M nin g, τ ile donatılmasına) *Newton-Cartan manifoldu* denir. g tensör alanının dejenere olması, $\forall p \in M$ için g_p tensörünün dejenere olması demektir. Yani öyle bir $U \in \mathfrak{X}(M)$ vardır ki $\forall p \in M$ ve $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ için $[g(U, X)](p) = g_p(U_p, X_p) = 0$ eşitliğini sağlayan $U_p \in T_pM$ tanjant vektörü $\forall p \in M$ için sıfırdan farklıdır. g tensör alanının rankı demek $\forall p \in M$ için g_p tensörünün rankı demektir. Bu durumda T_pM nin herhangi bir bazı kullanılarak g_p tensörünün oluşturduğu matrisin rankı $\forall p \in M$ için $n-1$ dir ve bilindiği gibi rank baz seçiminden bağımsızdır.

Teorem 4.1. g nin dejenerelik şartını sağlayan bütün vektör alanları birbiriyle lineer bağımlıdır ve τ altındaki görüntüleri sıfırdan farklıdır.

İspat Varsayalım ki birbiriyle lineer bağımsız olan ve dejenerelik şartını sağlayan iki vektör alanı U, W olsun. Bu takdirde $\forall p \in M$ için U_p, W_p tanjant vektörleride lineer bağımsız olacaktır ve g_p nin dejenerelik şartını sağlayacaklardır. Bu tanjant vektörler T_pM nin bir $\{U_p, W_p, (X_1)_p, ..., (X_{n-2})_p\}$ bazına tamamlayarak g_p nin matrisini oluşturursak dejenerelikten dolayı ilk iki sütün ile ilk iki satır tamamiyle sıfır değerini alacaktır bunun anlamı ise matrisin rankının $n-2$ olmasıdır. Bu sonuç G1 ile çelişmektedir. Demek ki dejenerelik şartını sağlayan bütün vektör alanları birbiriyle lineer bağımlıdır. Bunun sonucu olarak $\forall p \in M$ için $\alpha(p) \neq 0$ olan $\alpha \in C^{\infty}(M)$ kullanılarak dejenerelik şartını sağlayan bütün vektör alanlarını G2 de verilen $V \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanı cinsinden αV olarak yazabiliriz. Son olarak $\forall p \in M$ için $\tau_p(\alpha(p) V_p) \neq 0$ olduğunu göstermeliyiz. Biz G2 den $\tau(V) = 1$ olduğunu biliyoruz öyleyse; $\forall p \in M$ için $[\tau(V)](p) = \tau_p(V_p) = 1$ olmalıdır. Buradanda ispatımızın son adımı $\tau_p(\alpha(p) V_p) = \alpha(p) \tau_p(V_p) = \alpha(p) \neq 0$ şeklinde elde edilir.

Teorem 4.2. $\overline{g} = g + \tau \otimes \tau$ şeklinde tanımlı $\overline{g}$ tensör alanı non-dejenere ve simetrikdir.

İspat Simetriklik açıkça gözükmektedir. g simetrik olduğundan $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\overline{g}(X,Y) = g(X,Y) + \tau(X)\tau(Y) \tag{4.1.a}$$

$$\overline{g}(X,Y) = g(Y,X) + \tau(Y)\tau(X) \tag{4.1.b}$$

$$\overline{g}(X,Y) = \overline{g}(Y,X) \tag{4.1.c}$$

bulunur. Demek ki $\overline{g}$ de simetriktir.

Öncelikle g nin $\ker\tau$ ya kısıtlanmışının $g\,|_{\ker\tau\times\ker\tau}: \ker\tau\times\ker\tau \to C^\infty(M)$, yani $\forall p \in M$ için g_p nin $\ker\tau_p$ ya kısıtlanmışının $(g_p)\,|_{\ker\tau_p\times\ker\tau_p}: \ker\tau_p\times\ker\tau_p \to \mathbb{R}$ non-dejenere olduğunu göstermeliyiz. Öyleyse göstermemiz gereken, öyle bir $U \in \ker\tau$ vektör alanının varlığıdır ki $\forall p \in M$ ve $\forall X \in \ker\tau$ için $(g_p)\,|_{\ker\tau_p\times\ker\tau_p}(U_p, X_p) = 0$ eşitliğini sağlayan $U_p \in \ker\tau_p$ tanjant vektörü $\forall p \in M$ için sıfır olmalıdır. Bu açıktır: Eğer $\forall p \in M$ için $U_p \neq 0$ olsaydı U vektör alanı g nin dejenereliğini sağlayan bir vektör alanı olurdu ki biz Teorem4.1. de bu vektör alanlarının τ altındaki görüntülerinin sıfırdan farklı olduğunu göstermiştik. Öyleyse burada Teorem3.1. le bir çelişki vardır. Çünkü bilindiği gibi $\ker\tau = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \tau(X) = 0\}$ dır. Dolayısıyla $\forall p \in M$ için $U_p = 0$, yani $(g_p)\,|_{\ker\tau_p\times\ker\tau_p}$non-dejenere olmalıdır. Cebirin bir temel teoremi, aynı bir F cisim üzerinde sonlu boyutlu iki vektör uzayı X ve Y ise bir F-lineer $f : X \to Y$ dönüşümü için $\dim X = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\ker f)$ eşitliğinin var olmasıdır. Bu teorem gereği $\dim T_pM = \dim M = n$ ve $\dim\mathbb{R} = 1$ olduğundan $\mathbb{R}$-lineer $\tau_p : T_pM \to \mathbb{R}$ dönüşümü için $n = 1 + \dim(\ker\tau_p)$ olur. Buradan $\dim(\ker\tau_p) = n - 1$ bulunur. Bu durumda artık $\forall p \in M$ için $\ker\tau_p$ nin öyle bir $\{(a_p)_1, (a_p)_2 ..., (a_p)_{n-1}\}$ bazını seçebiliriz ki $n-1 \geq i \geq 1$ ve $n-1 \geq j \geq 1$ olmak üzere

$$(g_p)\,|_{\ker\tau_p\times\ker\tau_p}\left((a_p)_i, (a_p)_j\right) = \varepsilon_{ij} = \{ \begin{array}{c} 0,\ i \neq j \text{ için} \\ -1 \text{ yada } 1,\ i = j \text{ için} \end{array} \tag{4.2}$$

olur. Eğer bu baza, $\forall p \in M$ için $\tau_p(V_p) = 1$ olduğu için $\ker \tau_p$ nin elemanı olmayan G2 de verilen V_p tanjant vektörünü dahil edersek ($\forall p \in M$ için $V_p \neq 0$), T_pM için $\{V_p, (a_p)_1, (a_p)_2 ..., (a_p)_{n-1}\}$ bazını bulmuş oluruz. $\forall p \in M$ için teoremde verilen $\overline{g}_p = g_p + \tau_p \otimes \tau_p$ tensörünün matrisi bu baza göre oluşturulursa $n-1 \geq i \geq 1$ ve $n-1 \geq j \geq 1$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\overline{g}_p(V_p, V_p) &= g_p(V_p, V_p) + \tau_p(V_p)\tau_p(V_p) = 1 && (4.3.a)\\
\overline{g}_p\left((a_p)_i, (a_p)_j\right) &= g_p\left((a_p)_i, (a_p)_j\right) + \tau_p((a_p)_i)\,\tau_p\left((a_p)_j\right) = \varepsilon_{ij} && (4.3.b)\\
\overline{g}_p\left(V_p, (a_p)_i\right) &= g_p\left(V_p, (a_p)_i\right) + \tau_p(V_p)\tau_p\left((a_p)_i\right) = 0 && (4.3.c)
\end{aligned}
$$

olacağı için söz konusu matrisin köşegenindeki elemanlarının hepsi sıfırdan farklı, diğer elemanları ise sıfır olacaktır. Öyleyse, $\forall p \in M$ için bu baza göre $\det \overline{g}_p \neq 0$ olmalıdır. Biz biliyoruz ki bu yolla oluşturulan matrislerin determinantının sıfırdan farklı olması (veya sıfır olması) baz seçiminden bağımsızdır. Dolayısıyla daima $\forall p \in M$ için $\det \overline{g}_p \neq 0$ dır. Determinantın sıfırdan farklı olması $\forall p \in M$ için $\overline{g}_p$ tensörünün non-dejenere olması demektir. Bu da $\overline{g}$ tensör alanının non-dejenere olmasına karşılık gelir.

Bu durumda daima (M, g, τ) Newton-Cartan manifoldlarından, $(M, \overline{g})$ Riemann manifoldlarına geçiş yapılabilir. Bu Newton-Cartan yapısının $\overline{g}$ nin burulmasız ve metrikle uyumlu olan (yani Levi-Civita bağlantısıyla) ya da burulmalı ve yine metrikle uyumlu olan bir bağlantısıyla donatılıp donatılamayacağının tartışmasını gündeme getirmektedir. Bu tartışmalar aşağıdaki teoremlerle verilmektedir.

Teorem 4.3. $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ için $\tau(X) = \overline{g}(V, X)$ dir. Bir başka deyişle τ nun duali V dir $\tau^* = V$. (burada V vektör alanı G2 de verilen g nin dejenerelik şartını sağlayan ve $\tau(V) = 1$ olan vektör alanıdır)

İspat $\overline{g} = g + \tau \otimes \tau$ ise $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için $\overline{g}(X, Y) = g(X, Y) + \tau(X)\tau(Y)$ yazılabilir, eğer $X = V$ alınırsa $\tau(V) = 1$ ve $\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$ için $g(V, Y) = 0$ olduğundan, $\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$
\begin{aligned}
\overline{g}(V, Y) &= g(V, Y) + \tau(V)\tau(Y) && (4.4.a)\\
\overline{g}(V, Y) &= \tau(Y) && (4.4.b)
\end{aligned}
$$

bulunmuş olur.

Teorem 4.4. $\overline{g}$ nin burulmasız ve metrikle uyumlu olan bağlantısının (yani Levi-Civita bağlantısının) kovaryant (tensör) türevini D_X ile gösterirsek, Newton-Cartan manifoldunda $d\tau = 0$ ve $L_V g = 0$ olması şartıyla $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ için $D_X \tau = 0$ ve $D_X g = 0$ dır. (Burada "L_V" ile Lie (tensör) türevi gösterilmektedir. V vektör alanı G2 de verilen g nin dejenerelik şartını sağlayan ve $\tau(V) = 1$ olan vektör alanıdır)

İspat $d\tau = 0$ ifadesinin anlamı $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$X\tau(Y) - Y\tau(X) - \tau([X,Y]) = 0 \tag{4.5}$$

eşitliğidir. Bu eşitlik Teorem4.3. den dolayı

$$X\overline{g}(V,Y) - Y\overline{g}(V,X) - \overline{g}(V,[X,Y]) = 0 \tag{4.6}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $[X,Y]$ parantezi X, Y nin Lie parantezidir. Öte yandan herhangi bir tensör türevi için verilen çarpım kuralını Lie (tensör) türevi için kullanırsak, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\begin{aligned} (L_V \tau)(X) &= L_V \tau(X) - \tau(L_V X) \\ &= V\tau(X) - \tau([V,X]) \end{aligned} \tag{4.7}$$

olur İlk eşitlikten

$$V\tau(X) - \tau([V,X]) = X\tau(V) \tag{4.8}$$

elde edilir. Bu yukarıda yerine konursa

$$(L_V \tau)(X) = X\tau(V) \tag{4.9}$$

bulunur. Biz G2 de $\tau(V) = 1$ olduğunu söylemiştik. Bu durumda

$$L_V \tau = 0 \tag{4.10}$$

bulunmuş olur. Öte yandan $L_V \tau = 0$ ise, $\overline{g} = g + \tau \otimes \tau$ olduğundan

$$L_V \overline{g} = L_V g + L_V(\tau \otimes \tau) \tag{4.11.a}$$

$$L_V \overline{g} = L_V g + (L_V \tau) \otimes \tau + \tau \otimes (L_V \tau) \tag{4.11.b}$$

$$L_V \overline{g} = L_V g = 0 \tag{4.11.c}$$

elde edilir. Çünkü teoremimizin koşullarından birisi $L_V g = 0$ dir. Bu durumda tensör türevleri için verilen çarpım kuralından, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için,

$$\begin{aligned} V\overline{g}(X,Y) - \overline{g}([V,X],Y) - \overline{g}(X,[V,Y]) &= 0 && (4.12.a) \\ V\overline{g}(X,Y) + \overline{g}(Y,[X,V]) - \overline{g}(X,[V,Y]) &= 0 && (4.12.b) \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi herhangi bir tensör türevi için verilen çarpım kuralını kovaryant (tensör) türevi için kullanırsak, $\forall U, W \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\begin{aligned} (D_U \tau)(W) &= D_U \tau(W) - \tau(D_U W) \\ &= U\tau(W) - \tau(D_U W) && (4.13) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Teorem 4.3. den yararlanırsak ifademiz

$$(D_U \tau)(W) = U\overline{g}(V,W) - \overline{g}(V, D_U W) \qquad (4.14)$$

şeklini alır. Levi-Civita bağlantısı Koszul formülü ile karakterize edilir ve bu formül $\mathfrak{X}(M)$ nin bütün elemanları için geçerlidir. Bu durumda yukarıdaki eşitlikte $\overline{g}(V, D_U W) = \overline{g}(D_U W, V)$ nin yerine Koszul formülünden

$$\begin{aligned} \overline{g}(D_U W, V) &= \frac{1}{2}\{U\overline{g}(W,V) + W\overline{g}(V,U) - V\overline{g}(U,W) \\ &\quad -\overline{g}(U,[W,V]) + \overline{g}(W,[V,U]) + \overline{g}(V,[U,W])\} && (4.15) \end{aligned}$$

ifadesi konur ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} (D_U \tau)(W) &= \frac{1}{2}\{V\overline{g}(U,W) + \overline{g}(U,[W,V]) - \overline{g}(W,[V,U])\} \\ &\quad +\frac{1}{2}\{U\overline{g}(W,V) - W\overline{g}(V,U) - \overline{g}(V,[U,W])\} && (4.16) \end{aligned}$$

bulunur. Kıvrık parantez içerisindeki ilk terim ile ikinci terimin sıfır olduğu yukarıda 4.6 ve 4.12.b de gösterilmişti. Bu durumda

$$(D_U \tau)(W) = 0 \qquad (4.17)$$

elde edilir. Öylcyse $\forall U \in \mathfrak{X}(M)$ için $D_U \tau = 0$ olduğu gösterilmişdir. $\overline{g} = g + \tau \otimes \tau$ ve $\forall U, W \in \mathfrak{X}(M)$ için $(D_U \tau)(W) = 0$ olduğundan,

$$D_X \overline{g} = D_X g + D_X (\tau \otimes \tau) \tag{4.18.a}$$

$$D_X \overline{g} = D_X g + (D_X \tau) \otimes \tau + \tau \otimes (D_X \tau) \tag{4.18.b}$$

$$D_X \overline{g} = D_X g \tag{4.18.c}$$

bulunur. Teoremde $D_X \overline{g} = 0$ olduğu verilmiştir. (metrikle uyumluluk) Öyleyse yukarıdaki cşitlikten dolayı $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ için $D_X g = 0$ bulunmuş olur.

Teorem 4.5. $\overline{g}$ nin burulmalı ve metrik uyumlu olan bağlantısının covariant (tensör) türevini D_X ile gösterirsek, Newton-Cartan manifoldunda $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için $(d\tau)(X, Y) = \tau(T(X, Y))$ ve $(L_V g)(X, Y) = g(T(V, X), Y) + g(T(V, Y), X)$ olaması şartıyla $D_X \tau = 0$ ve $D_X g = 0$ dır. (Burada L_V ile Lie (tensör) türevi gösterilmektedir. V vektör alanı G2 de verilen g nin dejenerelik şartını sağlayan ve $\tau(V) = 1$ olan vektör alanıdır)

İspat $(d\tau)(X, Y) = \tau(T(X, Y))$ ifadesinin anlamı $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$X\tau(Y) - Y\tau(X) - \tau([X, Y]) = \tau(T(X, Y)) \tag{4.19}$$

eşitliğidir. Bu eşitlik Teorem4.3. den dolayı

$$X\overline{g}(V, Y) - Y\overline{g}(V, X) - \overline{g}(V, [X, Y]) = \overline{g}(V, T(X, Y)) \tag{4.20}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $[X, Y]$ parantezi X, Y nin Lie parantezidir. Öte yandan herhangi bir tensör türevi için verilen çarpım kuralını Lie (tensör) türevi için kullanırsak $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\begin{aligned} (L_V \tau)(X) &= L_V \tau(X) - \tau(L_V X) \\ &= V\tau(X) - \tau([V, X]) \end{aligned} \tag{4.21}$$

olur. İlk eşitlikten

$$V\tau(X) - \tau([V, X]) = X\tau(V) + \tau(T(V, X)) \tag{4.22}$$

elde edilir. Bu yukarıda yerine konursa

$$(L_V \tau)(X) = X\tau(V) + \tau(T(V,X)) \tag{4.23}$$

bulunur. Biz G2 de $\tau(V) = 1$ olduğunu söylemişdik budurumda

$$(L_V \tau)(X) = \tau(T(V,X)) \tag{4.24}$$

bulunur. Öte yandan $(L_V \tau)(X) = \tau(T(V,X))$ ise, $\overline{g} = g + \tau \otimes \tau$ olduğundan, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\begin{aligned}
L_V \overline{g} &= L_V g + L_V (\tau \otimes \tau) && (4.25.a)\\
L_V \overline{g} &= L_V g + (L_V \tau) \otimes \tau + \tau \otimes (L_V \tau) && (4.25.b)\\
(L_V \overline{g})(X,Y) &= g(T(V,X),Y) + g(T(V,Y),X) &&\\
&\quad + \tau(T(V,X))\tau(Y) + \tau(T(V,Y))\tau(X) && (4.25.c)\\
(L_V \overline{g})(X,Y) &= \overline{g}(T(V,X),Y) + \overline{g}(T(V,Y),X) && (4.25.d)
\end{aligned}$$

elde edilir. Çünkü teoremimizin $(L_V g)(X,Y) = g(T(V,X),Y) + g(T(V,Y),X)$ koşulu bunu gerektirir. Bu durumda tensör türevleri için verilen çarpım kuralından

$$\left.\begin{aligned}
V\overline{g}(X,Y) - \overline{g}(L_V X, Y) - \overline{g}(X, L_V Y) &= \overline{g}(T(V,X),Y)\\
&\quad + \overline{g}(T(V,Y),X)\\
V\overline{g}(X,Y) + \overline{g}(Y,[X,V]) - \overline{g}(X,[V,Y]) &= \overline{g}(T(V,X),Y)\\
&\quad + \overline{g}(T(V,Y),X)
\end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

bulunur. Şimdi herhangi bir tensör türevi için verilen çarpım kuralını kovaryant (tensör) türevi için kullanırsak, $\forall U, W \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\begin{aligned}
(D_U \tau)(W) &= D_U \tau(W) - \tau(D_U W)\\
&= U\tau(W) - \tau(D_U W) && (4.27)
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Teorem 4.3. den yararlanırsak ifademiz

$$(D_U \tau)(W) = U\overline{g}(V,W) - \overline{g}(V, D_U W) \tag{4.28}$$

şeklini alır. Levi-Civita bağlantısı Koszul kormülü ile karakterize edersek (bu formül $\mathfrak{X}(M)$ nin bütün elemanları için geçerlidir), bu durumda yukarıdaki eşitlikte $\overline{g}(V, D_U W) = \overline{g}(D_U W, V)$ nin yerine Koszul formülünden (burulmalı)

$$\begin{aligned}\overline{g}(D_U W, V) &= \frac{1}{2}\{U\overline{g}(W,V) + W\overline{g}(V,U) - V\overline{g}(U,W) \\ &\quad -\overline{g}(U,[W,V]) + \overline{g}(W,[V,U]) + \overline{g}(V,[U,W]) \\ &\quad -\overline{g}(U,T(W,V)) + \overline{g}(W,T(V,U)) + \overline{g}(V,T(U,W))\}\end{aligned} \tag{4.29}$$

ifadesi konur ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}(D_U \tau)(W) &= \frac{1}{2}\{V\overline{g}(U,W) + \overline{g}(U,[W,V]) - \overline{g}(W,[V,U])\} \\ &\quad +\frac{1}{2}\{U\overline{g}(W,V) - W\overline{g}(V,U) - \overline{g}(V,[U,W])\} \\ &\quad +\frac{1}{2}\{\overline{g}(U,T(W,V)) - \overline{g}(W,T(V,U)) - \overline{g}(V,T(U,W))\}\end{aligned} \tag{4.30}$$

bulunur. Kıvrık parantez içerisindeki ilk terimin $\overline{g}(T(V,U),W) + \overline{g}(T(V,W),U)$, ikinci terimin ise $\overline{g}(V,T(U,W))$ olduğu yukarıda 4.20 ve 4.26 de gösterilmişti. Öyleyse

$$\begin{aligned}(D_U \tau)(W) = \tfrac{1}{2}\{\overline{g}(T(V,U),W) + \overline{g}(T(V,W),U)\} + \tfrac{1}{2}\overline{g}(V,T(U,W)) \\ +\tfrac{1}{2}\{\overline{g}(U,T(W,V)) - \overline{g}(W,T(V,U)) - \overline{g}(V,T(U,W))\}\end{aligned} \tag{4.31}$$

bulunur. Buradan görüldüğü gibi

$$(D_U \tau)(W) = 0 \tag{4.32}$$

çıkar. $\forall U, W \in \mathfrak{X}(M)$ için $(D_U \tau)(W) = 0$ ise $\forall U \in \mathfrak{X}(M)$ için $D_U \tau = 0$ olduğu gösterilmiş olur. Bu durumda $\overline{g} = g + \tau \otimes \tau$ olduğundan

$$D_X \overline{g} = D_X g + D_X (\tau \otimes \tau) \tag{4.33.a}$$

$$D_X \overline{g} = D_X g + (D_X \tau) \otimes \tau + \tau \otimes (D_X \tau) \tag{4.33.b}$$

$$D_X \overline{g} = D_X g \tag{4.33.c}$$

bulunur. Teoremde $D_X \overline{g} = 0$ olduğu verilmiştir (metrikle uyumluluk). Öyleyse yukarıdaki eşitlikten dolayı $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ için $D_X g = 0$ bulunmuş olur.

Sonuç 4.1. $\overline{g}$ non-dejenere ve simetrik olduğundan bir $(x^1,...,x^n)$ koordinat sisteminde

$$\sum_{m=1}^{n} \overline{h}^{im}\overline{g}_{mj} = \delta^i_j \tag{4.34}$$

eşitliğini sağlayan (2,0)-tipinde, non-dejenere ve simetrik olan bir $\overline{h}$ tensör alanı vardır. Bu durumda

$$\sum_{m=1}^{n} \overline{h}^{im}\left(g_{mj} + \tau_m\tau_j\right) = \delta^i_j \tag{4.35}$$

olmalıdır. $(x^1,...,x^n)$ koordinat sisteminde G2 den

$$\tau(V) = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \tau_j V^j = 1 \tag{4.36}$$

ve G1 den

$$g\text{-dejenere} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} g_{ij} V^j = 0 \tag{4.37}$$

sonuçları elde edilir. Öyleyse

$$\sum_{m,j=1}^{n} V^j\overline{h}^{im}\left(g_{mj} + \tau_m\tau_j\right) = \sum_{j=1}^{n} V^j\delta^i_j \tag{4.38}$$

ifadesinin eşitini yukarıdaki özdeşliklerden yararlanarak

$$\sum_{m=1}^{n} \overline{h}^{im}\tau_m = V^i \tag{4.39}$$

olarak buluruz.

Teorem 4.6. $h = \overline{h} - V\otimes V$ şeklinde tanımlanan h tensörü (2,0)-tipinde dejenere ve simetriktir.

İspat Eğer h dejenere, ise sıfırdan farklı ve dejenerelik şartını sağlayan en az bir tane 1-form'un var olduğunu göstermeliyiz. $(x^1,...,x^n)$ koordinat sisteminde çalışırsak

$$h^{ij} = \overline{h}^{ij} - V^iV^j \tag{4.40}$$

yazılır. Buradan

$$\sum_{j=1}^{n} h^{ij}\tau_j = \sum_{j=1}^{n} \overline{h}^{ij}\tau_j - V^iV^j\tau_j \tag{4.41}$$

elde edilir. Sonuç 4.2. de verilen özdeşlikler kullanılır ise

$$\sum_{j=1}^{n} h^{ij}\tau_j = V^i - V^i = 0 \tag{4.42}$$

bulunur. Öte yandan söz konusu koordinat siteminde $\forall\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ için

$$h(\theta,\tau) = \sum_{i,j=1}^{n} \theta_i h^{ij}\tau_j \tag{4.43}$$

elde edilir. Burada θ_i ler ne olursa olsun, $\sum_{j=1}^{n} h^{ij}\tau_j = 0$ olduğu ispatlanmıştı. Öyleyse

$$\forall\theta \in \mathfrak{X}^*(M) \text{ için } h(\theta,\tau) = 0 \tag{4.44}$$

sonucu bulunur ve $\tau \neq 0$ olduğundan h nin dejenereliği ispatlanmış olur. ($\tau = 0$ olsaydı $\tau(V) = 1$ ile çelişirdik)

Sonuç 4.2. $\overline{g} = g+\tau\otimes\tau$ ve $\overline{h} = h+V\otimes V$ tensörlerinin bir $(x^1,...,x^n)$ koordinat sisteminde

$$\sum_{m=1}^{n} \overline{h}^{im}\overline{g}_{mj} = \delta_j^i \tag{4.45}$$

eşitliğini sağladığını biliyoruz. Bu durumda

$$\sum_{m=1}^{n} \left(h^{im} + V^iV^m\right)\left(g_{mj} + \tau_m\tau_j\right) = \delta_j^i \tag{4.46}$$

ve buradan da

$$\sum_{m=1}^{n} h^{im}g_mj + h^{im}\tau_m\tau_j + V^iV^m g_mj + V^iV^m\tau_m\tau_j = \delta_j^i \tag{4.47}$$

elde edilir. Daha önce elde edilen özdeşlikler ifadenin söz konusu terimlerinde kullanılırsa

$$\sum_{m=1}^{n} h^{im}g_{mj} = \delta_j^i - V^i\tau_j \tag{4.48}$$

sonucu bulunmuş olur.

Sonuç 4.3. a) Eğer D_X ile $\overline{g}$ nin burulmasız ve metrikle uyumlu olan (Levi-Civita) bağlantısının kovaryant (tensör) türevini gösterirsek, bir $(x^1,...,x^n)$ koordinat sisteminde D_X in bağlantı katsayıları (Christoffel sembolleri) bilindiği gibi

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2}\overline{h}^{km}\left(\frac{\partial \overline{g}_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial \overline{g}_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \overline{g}_{ij}}{\partial x^m}\right) \tag{4.49}$$

olmaktadır. İfadeyi dejenere tensörler cinsinden yazmak istersek Teorem 4.4. deki sonuçlar ve (4.48) kullanılarak

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2}h^{km}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right) + V^k\frac{\partial \tau_i}{\partial x^j} \tag{4.50}$$

ifadesini elde ederiz.

b) Eğer D_X ile $\overline{g}$ nin burulmalı ve metrik uyumlu olan bağlantısının kovaryant (tensör) türevini gösterirsek, bir $(x^1,...,x^n)$ koordinat sisteminde D_X in bağlantı katsayıları bilindiği gibi

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k &= \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2}\overline{h}^{km}\left(\frac{\partial \overline{g}_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial \overline{g}_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \overline{g}_{ij}}{\partial x^m}\right) \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(T_{j\ i}^{\ k} + T_{i\ j}^{\ k} + T_{ij}^k\right)\end{aligned} \tag{4.51}$$

olmaktadır. İfadeyi dejenere tensörler cinsinden yazmak istersek Teorem 4.5 deki sonuçlar ve (4.48) kullanılarak

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k &= \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2}h^{km}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right) + \frac{1}{2}V^k\left(\frac{\partial \tau_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \tau_j}{\partial x^i}\right) \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(T_{j\ i}^{\ k} + T_{i\ j}^{\ k} + T_{ij}^k\right)\end{aligned} \tag{4.52}$$

ifadesini elde ederiz.

c) Herhangi bir koordinat sisteminde eğrilik tensörünün bileşenlerini, tanımından hareketle bağlantı katsayıları cinsinden

$$R_{\ jkl}^i = \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma_{kj}^i - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma_{lj}^i + \sum_{m=1}^{n}\Gamma_{lm}^i\Gamma_{kj}^m - \sum_{m=1}^{n}\Gamma_{km}^i\Gamma_{lj}^m \tag{4.53}$$

olarak buluruz. Burulmasız ve metrikle uyumlu bir bağlantımız varsa bağlantı katsayıları 4.50 de verilen katsayılar, burulmalı ve metrikle uyumlu bir bağlantımız varsa bağlantı katsayıları 4.52 de verilen katsayılar olacaktır.

5 SONUÇ

Newton'un ki gibi bir kütlesel çekim teorisinin geometrik formülasyonunun çıkış nedenlerinden birincisi genel görelilik teorisinin geometrik zemine oturtulmasıdır. Çünkü amaç uygun bir yaklaşıklıkla genel görelilikten Newton'un kütlesel çekim teorisine geçilebilmesidir. Öyleyse ikisinin de oturduğu zeminin geometrik olması anlamlıdır. Newton'un teorisinde zamanın mutlak olması geometrik formülasyona rankı üç olan dejenere bir tensör katılmasıyla açıklanır ve artık zaman bir kovektör alanı ile anlatılmaktadır.

Bu formülasyonun diğer yararı kuantum mekaniğinin hareket denkleminin yani Schrödinger denkleminin kovaryant türevler cinsinden yazılmasını sağlamasıdır.

Bu tezde (0,2)-tipinde, dejenere, simetrik ve rankı üç olan bir tensör alanı ile (0,1)-tipindeki bir tensör alanından (kovektör alanı) yola çıkılarak, sadece bu iki tensörü ve aralarındaki ilişkiyi içeren iki koşulla Newton-Cartan manifoldları tanımlanmıştır. Tezin özgün taraflarından birsi budur. Çünkü literatürde [11], [12], [13] bağlantı; metrikle uyumluluk şartları ve bağlantının simetrikliği adı altında üç koşulla daha kısıtlanır ve bu koşullar Newton-Cartan manifoldu tanımının içinde yerlerini alırlar. Fakat bu çalışmada söz konusu ek uyumluluk şartları, verilen tensör alanlarından hareketle elde edilen (0,2)-tipinde, non-dejenere ve simetrik bir tensör alanının Levi-Civita bağlantısının kullanılmasıyla elde edilmektedir. Tezin diğer bir özgün tarafı bu tensörlere (1,2)-tipinde anti-simetrik bir tensör eklenerek burulmalı bir yapı alınması halinde nelerin ne kadar değişeceğinin ortaya konmasıdır.

Bu tez çalışmasıyla Newton-Cartan uzay-zamanlarının geometrik yapısı açıklığa çıkarılmış olmaktadır. Ancak gravitasyon alan değişkenlerinin sağladığı bir dinamik diferansiyel denklemler sistemi [11] burada ele alınmamıştır. Eğrilik tensörünün yanı sıra burulma tensörünün varlığı üzerinde daha durulması gereken bir genellemedir. Bu konu ileride tekrar ele alınacaktır.

KAYNAKLAR

1. E.Cartan, Ann. Ec. Norm. Sup. 40 (1923) 325
2. E.Cartan, Ann. Ec. Norm. Sup. 41 (1924) 1
3. K. Friedrichs, Math. Ann. 98 (1926) 566
4. A. Trautman,
   "Foundations and current problems of general relativity"
   in Lectures on General Relativity, 1964 Brandeis Lectures,
   Vol. 1, A. Trautman, F.A.E. Pirani, H. Bondi
   (Prentice-Hall, 1965)
5. H. Dombrowski and K. Horneffer, Math. Zeitschr. 86,291-311, (1964)
6. P. Havas, Rev. Mod. Phys. October (1964) 938
7. K. Kuchar, Phys. Rev. D vol. 22, No. 6 (1980) 1285
8. C. Duval & H.P. Künzle, Gen. Rel.and Grav. vol. 16, No. 4, (1984) 333
9. C. Duval, G. Burdet, H.P. Künzle and M. Perrin Phys. Rev. D vol. 31, No. 8, (1985) 1841
10. H. Ewen and Helnz-Jürgen Schmidh Osnabrück, Diplomthesis (1989)
11. H.Goenner Phys. Let. Vol. 93A, No. 9, (1983) 469
12. C. Rüede & N. Straumann Helv. Phys. Acta 70 (1997) 318
13. G. Dautcourt, Post-Newtonian extension of the Newton-Cartan theory, Preprint gr-qc/9610036
14. O'Neill Barrett "Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity" New York, Academic Press, 1983.