MATRİSLER AİLESİNİN GÜRBÜZ KARARLILIĞI PROBLEMLERİ

Özlem AVUL ESEN

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

OCAK-2001

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Özlem AVUL ESEN'in "Matrisler Ailesinin Gürbüz Kararlılığı Problemleri" başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki, YÜKSEK LİSANS tezi 22.2.2001 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Vakıf Caferov	
Üye	: Doç. Dr. Mehmet Üreyen	
Üye	: Doç. Dr. Abdurrahman Karamancıoğlu	
Üye	:......................................	
Üye	:......................................	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 28.02.2001.... tarih ve ....8/1............ sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MATRİSLER AİLESİNİN GÜRBÜZ KARARLILIĞI PROBLEMLERİ

ÖZLEM AVUL ESEN

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Vakıf Caferov
2001

Bu tez çalışmasında, matrisler ailesinin gürbüz ve kuadratik kararlılığının bazı problemleri ele alınmıştır. Matrislerin konveks kombinasyonunun gürbüz ve kuadratik kararlılığı için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir. Polinomlar ailesinin gürbüz kararlılığı teorisindeki bazı sonuçların (kenar teoremi, hiperdörtgen için uç nokta teoremi, v.s.) matrisler ailesi için geçerli olmadığına dair karşıt örnekler verilmiştir. Gürbüz kararlılık ve kuadratik kararlılık problemlerinin oyun teorisi ile bağlantıları gösterilmiştir. Tez çalışmasında çok sayıda açıklayıcı örnekler de verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kararlı Matrisler, Matrislerin Konveks Kombinasyonu, Gürbüz Kararlılık, Kuadratik Kararlılık, Oyun Teorisi

ABSTRACT

Master of Science Thesis

THE PROBLEMS OF ROBUST STABILITY
OF MATRICES FAMILY

ÖZLEM AVUL ESEN

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Vakıf Caferov
2001

In this thesis, some problems of stability of matrix family are considered. Necessary and sufficient conditions for robust stability and quadratic stability of convex combination of matrices are given. Counter examples which are directly motivated by the results in the polynomial case (edges theo-rem, extremal points theorem for hyperrectangle, etc.) are also provided. These counter examples illustrate the fundamental differences between the polynomial stability problem and the matrix stability problem. A game theoretic approach is considered to analyse the relationship between the quadratic and robust stability problems. Results are illustrated by several examples.

Key Words: Stable Matrices, Convex Combinations of Matrix, Robust Stability, Quadratic Stability, Game Theory

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında danışmanım olarak verdiği tüm destek ve zamanı için Doç. Dr. Vakıf CAFEROV'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bana yardımcı olan Arş.Gör. Taner BÜYÜKKÖROĞLU'na, Matematik Bölümündeki hocalarıma ve tüm arkadaşlarıma teşekkür ediyorum.

Çalışmam boyunca bana her zaman destek olan değerli eşim Osman ESEN'e ve sevgili aileme teşekkürleri borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

1 GİRİŞ

Bir lineer dinamik sistemin hareketinin

$$\dot{x} = Ax \tag{1.1}$$

diferansiyel denklem sistemiyle verildiğini varsayalım. Burada $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, t-zaman, A ise $n \times n$ boyutlu reel matristir. $x(t_0) = 0$ başlangıç koşulu altında (1.1) in tek çözümü $x(t) \equiv 0$ dır. Buna göre $x = 0$ a (1.1) in denge konumu denir. Genelliği bozmaksızın $t_0 = 0$ alalım ve (1.1) in $x(0) = x_0$ koşulunu sağlayan çözümünü $x\,(t, x_0)$ ile gösterelim.

Uygulamalar açısından (1.1) sisteminin $x = 0$ denge konumunun (Lyapunov anlamında) kararlılığı ve asimtotik kararlılığı çok önemlidir.

Tanım 1.1. Her $\varepsilon > 0$ için öyle $\delta > 0$ varsa ki $\| x_0 \| \leq \delta$ ve $t \geq 0$ iken

$$\| x(t, x_0) \| \leq \varepsilon \tag{1.2}$$

sağlanıyorsa $x = 0$ denge konumuna (Lyapunov anlamında) kararlıdır denir [1].

Tanım 1.2. Eğer $x = 0$ denge konumu kararlıysa ve x_0 noktası sıfıra yeteri kadar yakın iken $x(t, x_0)$ yörüngesi $t \to \infty$ için sıfıra yaklaşıyor ise $x = 0$ denge konumuna asimtotik kararlıdır denir.

Teorem 1.1. (1.1) sisteminin asimtotik kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul A matrisinin tüm özdeğerlerinin reel kısmının negatif olmasıdır.

A matrisinin özdeğerleri ise I birim matris olmak üzere $\det\,(sI - A)$ polinomunun kökleridir.

Tersine, herhangi $p\,(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0$ monik polinomu

$(a_n = 1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

matrisinin karakteristik polinomudur. (1.3) matrisine $p(s)$ polinomunun kompanion (companion) matrisi denir. (1.3) ile benzer olan tüm matrislerinde karakteristik polinomunun $p(s)$ polinomu olduğu bilinmektedir.

Yukarıdaki açıklamalardan dolayı matrislerin ve polinomların kararlılık problemleri birbiriyle sıkı ilişki içindedir. Polinomların kararlılığı için pek çok yöntem bilinmektedir. Bunlara örnek olarak Hermite-Biehler teoremi , Hurwitz kriteri, Routh-Hurwitz kriteri v.b. göstermek mümkündür [2,3].

İleride kullanacağımız için burada Hurwitz kriterini verelim. Bir

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \qquad (a_i > 0, \;\; i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

polinomunun Hurwitz matrisi $n \times n$ boyutlu

$$H(p) = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & & \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & & \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \\ \vdots & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \\ 0 & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & & a_0 \end{bmatrix}$$

matrisidir.

O zaman $p(s)$ polinomunun kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul $H(p)$ matrisinin tüm baş minörlerinin pozitif olmasıdır. Buna göre

$$
\begin{aligned}
p(s) &= s^2 + a_1 s + a_0 \text{ polinomunun kararlılığı için } a_0 > 0,\ a_1 > 0;\\
p(s) &= s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \text{ polinomunun kararlılığı için } a_1 a_2 > a_0;\\
p(s) &= s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \text{ polinomunun kararlılığı için } a_1 a_2 a_3 - a_3^2 a_0 > a_1^2;
\end{aligned}
$$

koşulları gerekli ve yeterlidir.

Matrislerin kararlılığı polinomların kararlılığına dönüştüğünden bu kriterler matrisler için de geçerlidir. Bunun dışında matrislerin kararlılığı için aşağıdaki kriter ispatlanmıştır.

Teorem 1.2. Eğer bir P pozitif belirli ($P > 0$) matrisi varsa ki

$$A^T P + PA < 0 \tag{1.4}$$

ise A matrisi kararlıdır. Burada A^T matrisi A nın transpozunu göstermektedir.

Bir çok pratik problemde A matrisinin elemanları (veya $p(s)$ polinomunun katsayıları) kesin olarak bilinmemektedir. Bunun yerine, bu elemanların ve katsayıların alabileceği değerler kümesi bilinmektedir. Bu durumda aralık matrisler (aralık polinomlar), matrisler poligonu (polinomlar poligonu) v.s. gibi ailelerin kararlılığı söz konusu olmaktadır. Bu tip kararlılığa gürbüz kararlılık (robust kararlılık) denir.

Tanım 1.3. $\mathcal{A}$ matrisler ailesi verilsin. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ matrisi kararlı ise $\mathcal{A}$ ailesine gürbüz kararlı aile denir.

Benzer tanım polinomlar ailesi içinde verilebilir. 1978 yılında V.Kharitonov 'un polinomlar ailesinin (aralık polinomların) kararlılığı ile ilgili ünlü makalesinden sonra bu konuda geniş araştırmalar yapılmaya başlanmıştır. Bu araştırmalarda polinomların konveks kombinasyonlarının kararlılığı teoremleri, kenar teoremleri, uç nokta teoremleri, $\mathcal{D}$-kararlılık teoremleri, sıfırı içermeme prensibi, afin ve multilineer ailelerin kararlılığı teoremleri, küresel polinomlar ailesinin kararlılığı teoremleri v.s. göstermek mümkündür.

Biz polinomlar ailesinin kararlılığı için en önemli sonuçlardan olan Kharitonov teoremini ve kenar teoremini ifade edelim.

Katsayıları belli bir aralıkta değişen

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 \qquad (1.5)$$

$a_i \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i] \quad (i = 0...n)$ aralık polinomlar ailesini ve bu aileden aşağıdaki dört polinomu ele alalım.

$$\begin{aligned}
K_1(s) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \overline{a}_2 s^2 + \overline{a}_3 s^3 + \underline{a}_4 s^4 + \underline{a}_5 s^5 + \overline{a}_6 s^6 + ... \\
K_2(s) &= \overline{a}_0 + \overline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \overline{a}_4 s^4 + \overline{a}_5 s^5 + \underline{a}_6 s^6 + ... \\
K_3(s) &= \underline{a}_0 + \overline{a}_1 s + \overline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \underline{a}_4 s^4 + \overline{a}_5 s^5 + \overline{a}_6 s^6 + ... \\
K_4(s) &= \overline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \overline{a}_3 s^3 + \overline{a}_4 s^4 + \underline{a}_5 s^5 + \underline{a}_6 s^6 + ...
\end{aligned}$$

Teorem 1.3. (Kharitonov 1978) (1.5) ailesinin gürbüz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul yukarıdaki dört polinomun kararlı olmasıdır.

Bu teorem için Kharitonov'un kendi ispatı karmaşıktır. Ancak sonradan değer kümesi yaklaşımı ortaya çıktıktan sonra bu teoremin, polinomların köklerinin katsayılara göre sürekli değişimi ve kararlı polinomun kompleks düzlemdeki görüntüsünün argümentinin monotonluğu gibi klasik teoremlerin bir sonucu olduğu anlaşılmıştırb [4].

Kenar teoremi ise polinomlar politopunun kararlılığı için ifade edilmiştir.

Tanım 1.4. Eğer $A \subset \mathbb{R}^k$ kümesi, sonlu $\{p^1, p^2, p^3, ..., p^m\} \subset \mathbb{R}^k$kümesinin konveks zarfı ise yani

$$A = conv\{p^i\}$$

ise A kümesine politop (polytope) denir [5].

Tanım 1.5. Eğer $p \in A$ noktası A kümesindeki iki farklı noktayı birleştiren parçanın iç noktası biçiminde ifade edilemezse p noktasına A kümesinin uç noktası denir.

Tanım 1.6. A politopunun $p^{i_1} \neq p^{i_2}$ olmak üzere p^{i_1} ve p^{i_2} uç noktalarını ele alalım ve $[p^{i_1}, p^{i_2}]$ bu noktaları birleştiren doğru parçası olsun. Eğer her $p^a, p^b \in A$ için

$$p^a, p^b \notin [p^{i_1}, p^{i_2}] \Rightarrow [p^a, p^b] \cap [p^{i_1}, p^{i_2}] = \emptyset$$

sağlanıyorsa $[p^{i_1}, p^{i_2}]$ doğru parçasına A politopunun kenarı denir.

Eğer (1.5) bu polinomun katsayılardan oluşan $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vektörünü karşı getirerek her n. mertebeden polinoma $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayında bir vektör karşı gelmiş olur. Buna göre polinomlar politopu dediğimizde $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayındaki politopu kastediyoruz. Şimdi kenar teoremini ifade edelim.

Teorem 1.4. (Barlett, Hollat, Huang, 1988) n. mertebeden polinomların $\mathcal{A}$ politopu verilsin. O zaman $\mathcal{A}$ politopunun gürbüz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul bu politopun her kenarının gürbüz kararlı olmasıdır [6].

n. mertebeden polinomların $\mathcal{A}$ ailesi verilsin. $w > 0$ olmak üzere

$$B(w) = \{p(jw) : p(.) \in \mathcal{A}\}$$

kümesi kompleks düzlemin bir alt kümesidir ve bu alt kümeye $\mathcal{A}$ ailesinin değer kümesi (value set) denir.

Eğer A ailesi politop ise $B(w)$ kümesi her w için kompleks düzlemde bir çokgen (poligon) olur. Kenar teoreminin ispatıda $\mathcal{A}$ poligonunun bu özelliğine esaslanmıştır.

Bu tez çalışmasında bazı matrisler ailesinin gürbüz ve kuadratik kararlılığı problemleri incelenmiştir.

2. bölümde iki matrisin konveks kombinasyonu incelenmiştir. İki kararlı matrisin konveks kombinasyonunun kararlılığı için gerekli ve yeterli koşul verilmiştir. Bunun yanısıra iki polinom ve onların konveks kombinasyonlarının kararlılıkları arasındaki bağlantılar örneklerle açıklanmaya çalışılmıştır.

3. bölüm ise matrisler ailesinin kararlılığı için karşıt örnekler içermektedir. Burada polinomlar ailesi için gerekli olan kenar teoreminin matrisler

için geçersiz olduğu, politop yerine hiperdörtgen alırsak da yine kenar teoreminin geçersiz olduğuna dair karşıt örnekler verilmiştir. Aralık matrisler ailesinin karakteristik polinomlar ailesinin gürbüz kararlılığından bu polinomlar ailesinin konveks zarfının gürbüz kararlılığının çıkmadığına dair örnek de verilmiştir.

4. bölümde matrislerin kararlılığı için Lyapunov yaklaşımı açıklanmış ve yaklaşımdan çıkan bazı sonuçlar verilmiştir.

5. bölümde gürbüz kararlılık, kuadratik kararlılık ile oyun teorisi arasındaki bağlantılar ele alınmıştır. Bu bölümde kuadratik kararlılık için yeni yeter koşullar verilmiştir.

2 MATRİSLERİN KONVEKS KOMBİNASYONLARININ KARARLILIĞI

Bu bölümde, matrislerin konveks kombinasyonunun kararlılığı ile bu matrislerin karakteristik polinomlarının konveks kombinasyonunun kararlılığı arasındaki bağlantılar örneklerle gösterilmiş ve sonra matrislerin konveks kombinasyonunun kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul verilmiştir.

Tanım 2.1. $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ $n \times n$ matrisler olsun. $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere

$$A_\lambda = (1 - \lambda)A + \lambda B$$

matrisine A ile B matrislerinin konveks kombinasyonu denir.

İki kararlı matrisin konveks kombinasyonu kararlı olmayabilir. Örneğin

$$A = \begin{bmatrix} -1.5 & -12.06 & -0.06 \\ -0.25 & 0 & 1 \\ 0.25 & -4 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.5 & -12.06 & -0.06 \\ -0.25 & 0 & 1 \\ 0.25 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

seçilirse A ile B matrisleri kararlı olduğu halde $(1 - \lambda) A + \lambda B$ matrisi kararlı değildir. [7]
Gerçekten A matrisinin özdeğerleri $\eta_1 = -2.478$, $\eta_2 = -1.0995 \times 10^{-2} + 1.5638i$ ve $\eta_3 = -1.0995 \times 10^{-2} - 1.5638i$ dir. B matrisinin özdeğerleri ise $\mu_1 = -1.4471$, $\mu_2 = -2.6431 \times 10^{-2} + 1.1928i$, $\mu_3 = -2.6431 \times 10^{-2} - 1.1928i$ olarak elde edilir ve iki matris de kararlıdır, ancak $\lambda = \dfrac{2}{3}$ için $(1 - \lambda) A + \lambda B$ matrisi

$$\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = \begin{bmatrix} -0.833 & -12.06 & -0.06 \\ -0.25 & 0 & 1 \\ 0.25 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

dir ve bu matrisin özdeğerleri

$$\nu_1 = -1.8392, \quad \nu_2 = 3.0784 \times 10^{-3} + 1.3581i, \quad \nu_2 = 3.0784 \times 10^{-3} - 1.3581i$$

olduğundan kararlı değildir.

Tanım 2.2. $p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0$ reel polinomu verilsin.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

matrisine $p(s)$ polinomunun kompanion matrisi demiştik. O zaman A matrisinin karakteristik polinomu $p(s)$ polinomudur ve

$$p(s) \text{ polinomu kararlıdır} \Leftrightarrow A \text{ matrisi kararlıdır}$$

Aşağıda matrisler ve karakteristik polinomların konveks kombinasyonları ile ilgili bazı örnekler verilmiştir.

Örnek 2.1. Konveks kombinasyonu kararsız olan iki kararlı matrisin karakteristik polinomlarının konveks kombinasyonları kararlı olabilir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

kararlı matrislerini alalım. Bu iki matrisin konveks kombinasyonu $\lambda = \dfrac{1}{2}$ için

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$$

dir.

$$W_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad W_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

seçilirse

$$\begin{aligned} B_1 &= W_1 A_1 W_1^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -3 & -\frac{1}{4} & \frac{29}{4} \\ 1 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= W_2 A_2 W_2^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10^{-8} \\ 1 & 0 & -0.001 \\ 0 & 1 & -0.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.001 & -1.001 & -.001 \\ 0.5005 & -1.5005 & .4995 \\ 1.5015 & -2.5015 & .4985 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

B_1 ile B_2 nin konveks kombinasyonlarının karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} & s^3 + (0.999\lambda + 0.001)\, s^2 + \left(-8.754\lambda^2 + 10.753\lambda + 0.001\right) s \\ & -2.5038\lambda^3 + 12.007\lambda^2 - 8.5035\lambda \end{aligned}$$

$\lambda \in [0, 1]$ için kararlıdır. Çünki

$$\begin{aligned} & (0.999\lambda + 0.001) \,.\, \left(-8.754\lambda^2 + 10.753\lambda + 0.001\right) \\ & - \left(-2.5038\lambda^3 + 12.007\lambda^2 - 8.5035\lambda\right) \\ = \; & -6.24144\lambda^3 - 1.273507\lambda^2 + 8.515252 + 0.1\ 10^{-5} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B_2 &= W_2 A_2 W_2^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -14 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

elde edilir. B_1 ile B_2 nin konveks kombinasyonu

$$
(1-\lambda) B_1 + \lambda B_2 = \begin{bmatrix} \frac{-82}{13}\lambda + \frac{4}{13} & \frac{29}{13}\lambda - \frac{3}{13} \\ \frac{-261}{13}\lambda + \frac{79}{13} & \frac{69}{13}\lambda - \frac{17}{13} \end{bmatrix}
$$

dir ve konveks kombinasyonun karakteristik polinomu

$$
s^2 + (1+\lambda)s + \frac{147}{13}\lambda^2 - \frac{108}{13}\lambda + 1
$$

dir. Fakat $\lambda = \dfrac{1}{2}$ için $\frac{147}{13}\lambda^2 - \frac{108}{13}\lambda + 1 = -0.326 < 0$ olur. Dolayısıyla B_1 ve B_2 nin konveks kombinasyonu kararsız olur.

Örnek 2.3. Kararlı iki $p_1(s)$ ve $p_2(s)$ polinomunun konveks kombinasyonu kararsız olsun. $p_1(s)$ ve $p_2(s)$ ye karşı gelen kompanion matrisler sırasıyla A_1 ve A_2 iken öyle W_1, W_2 bulabiliriz ki $B_1 = W_1 A_1 W_1^{-1}$, $B_2 = W_2 A_2 W_2^{-1}$ olduğunda B_1 ve B_2 matrislerinin konveks kombinasyonu kararlı olur.

$$
p_1(s) = s^3 + s^2 + 2s + 1 \quad \text{ve} \quad p_2(s) = s^3 + 0.001s^2 + 0.001s + 10^{-8}
$$

seçelim. [8]

$$
(1-\lambda)\left(s^3 + s^2 + 2s + 1\right) + \lambda\left(s^3 + 0.001s^2 + 0.001s + 10^{-8}\right)
$$

polinomu $\lambda = \dfrac{2}{3}$ için kararsızdır.

.

$$
A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10^{-8} \\ 1 & 0 & -0.001 \\ 0 & 1 & -0.001 \end{bmatrix}
$$

matrisidir ve karakteristik polinomu $\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}\right)$ olduğu için kararlı değildir. Fakat A nın karakteristik polinomu $p_A(s)=s^2+s+1$ ve B nin karakteristik polinomu $p_B(s)=s^2+s+3$ konveks kombinasyonları kararlı olan iki polinomdur.

Örnek 2.2. Konveks kombinasyonları kararlı olan $p_1(s)$ ve $p_2(s)$ kararlı polinomlarını alalım. $p_1(s)$ ve $p_2(s)$ ye karşı gelen kompanion matrisler sırasıyla A_1 ve A_2 iken öyle W_1, W_2 bulabiliriz ki

$$B_1=W_1A_1W_1^{-1} \qquad B_2=W_2A_2W_2^{-1}$$

olduğunda B_1 ve B_2 matrislerinin konveks kombinasyonları kararsız olur.

$$p_1(s)=s^2+s+1 \ , \ p_2(s)=s^2+2s+4$$

alalım. O halde

$$(1-\lambda)\,p_1(s)+\lambda p_2(s)=s^2+(1+\lambda)s+3\lambda+1$$

polinomu $\lambda\in[0,1]$ için kararlıdır. Kompanion matrisler

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \ , \ A_2=\begin{bmatrix}0 & -4\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

olur.

$$W_1=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 7 & 3\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad W_2=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

seçersek

$$\begin{aligned}B_1 &= W_1A_1W_1^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}2 & -1\\ 7 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{13} & \frac{1}{13}\\ \frac{-7}{13} & \frac{2}{13}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\frac{4}{13} & -\frac{3}{13}\\ \frac{79}{13} & -\frac{17}{13}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi biz iki kararlı matrisin konveks kombinasyonunun kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul vereceğiz. Önce aşağıdaki tanım ve notasyonları verelim [9].

Tanım 2.3. n. mertebeden bir

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0$$

polinomunun Hurwitz matrisi $n \times n$ boyutludur ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$H(p) = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & & \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & & \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \\ \vdots & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \\ 0 & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & & a_0 \end{bmatrix}$$

$\lambda^+_{\max}(M)$ ile bir M kare matrisinin pozitif özdeğerlerinin en büyüğünü gösterelim. Eğer M pozitif özdeğere sahip değilse $\lambda^+_{\max}(M) = 0^+$ olarak kabul edilir.

Benzer şekilde $\lambda^-_{\min}(M)$, M matrisinin negatif özdeğerlerinin en küçüğünü göstersin ve eğer M negatif özdeğerlere sahip değilse $\lambda^-_{\min}(M) = 0^-$ olarak kabul edilir.

$\mathbb{R}^{n\times n}$ ile $n \times n$ boyutlu reel matrislerin lineer uzayını gösterelim.

Tanım 2.4. $T(.) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{m\times m}$ lineer dönüşümü verilsin. Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

1) Her $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ için $T(M)$ matrisinin en az bir reel özdeğeri vardır.

2)$max\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda$, M nin bir özdeğeri$\}$

ve

$max\{\nu : \nu$, $T(M)$ nin bir reel özdeğeri$\}$

sayıları ya aynı işaretli yada her ikiside sıfırdır.

Bu durumda, $T(.)$ dönüşümüne kararlılık problemini nonsingülerlik problemine dönüştüren dönüşüm denir.

Aşağıdaki lemma bu özelliklere sahip dönüşümün kararlılık problemini nonsingülerlik problemine dönüştürmesinin nedenini açıklamaktadır.

Lemma 2.1. M_0 kararlı olmak üzere iki tane $n \times n$ boyutlu M_0 ve M_1 matrislerini ve

$$\mathfrak{M} = \{M_r = M_0 + rM_1 : r_1 < 0, r_2 > 0,\ r \in (r_1, r_2)\} \tag{2.1}$$

matrislerin ailesini düşünelim. Kararlılık problemini nonsingülerlik problemine dönüştüren bir $T(.)$ dönüşümünü alalım.

O zaman $\mathfrak{M}$ nin gürbüz kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul

$$T(\mathfrak{M}) = \{T(M) : M \in \mathfrak{M}\} \tag{2.2}$$

ailesinin nonsingüler olmasıdır.

Kanıt. Gereklilik, M_r nin kararlılığı $T(M_r)$ nin tüm reel özdeğerlerinin negatif olmasını ifade ettiğinden kolayca görülür.

Yeterlilik ise her $T(M_r)$ nin nonsingüler olmasından ve M_r nin özdeğerlerinin r ye göre sürekli-liğinden elde edilir. Gerçekten her $T(M_r)$ nin nonsingülerliğinden $M_r \in \mathfrak{M}$ nin özdeğerlerinin reel kısımlarının sıfır olmadığı sonucuna varılır. Öte yandan, M_0 ın her özdeğerinin reel kısımları negatif olduğundan (M_0 ın kararlı olduğunu hatırlayalım) süreklilikten dolayı M_r nin özdeğerlerinin reel kısımlarının negatif olduğu elde edilir (aksi halde öyle r vardır ki M_r nin özdeğerlerinin reel kısımları sıfırdır) ve dolayısıyla $\mathfrak{M}$ ailesi gürbüz kararlıdır.

Lemma 2.2. M_0 ve M_1 $n \times n$ boyutlu iki matris olsun. M_0 ın nonsingüler olduğunu varsayalım. $\mathfrak{M}$ (2.1) ile tanımlı matrislerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\mathfrak{M}$ nin nonsingülerliği için maksimal aralık

$$r_{\min} = \left(\frac{1}{\lambda^{-}_{\min}(-M_0^{-1}M_1)}\right), r_{\max} = \left(\frac{1}{\lambda^{+}_{\max}(-M_0^{-1}M_1)}\right) \tag{2.3}$$

iken $(r_{\min}, r_{\max})$ dır.

Kanıt. $r \neq 0$, $\delta_r = \frac{1}{r}$ için

$$M_r = rM_0(\frac{1}{r}I + M_0^{-1}M_1) = rM_0(\delta_r I - (-M_0^{-1}M_1))$$

olduğuna dikkat edelim.

Bundan dolayı M_r $\forall r \in (r_{\min}, r_{\max})$ için non-singülerdir $\Longleftrightarrow$ $\forall \delta_r$, $\delta_r < \frac{1}{r_{\min}}$ ve $\delta_r > \frac{1}{r_{\max}}$ için $M_0^{-1}M_1$ in özdeğeri değildir.

Ayrıca M_r nin nonsingülerliği için maksimal $(r_{\min}, r_{\max})$ aralığı da (2.1) ile verilmektedir.

Teorem 2.3. $T(.) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{m\times m}$ kararlılık problemini nonsingülerlik problemine dönüştüren herhangi bir dönüşüm olsun. O zaman M_0 kararlı olmak üzere M_0 ve M_1 $n \times n$ matrislerini alalım.

$$\mathfrak{M} = \{M_r = M_0 + rM_1 : r \in (r_{\min}, r_{\max})\} \tag{2.4}$$

matrisler ailesini düşünelim. O halde $\mathfrak{M}$ nin kararlılığı için maksimal aralık $(r_{\min}, r_{\max})$ da

$$r_{\min} = \left(\frac{1}{\lambda_{\min}^{-}(-T(M_0)^{-1}T(M_1))}\right), r_{\max} = \left(\frac{1}{\lambda_{\max}^{+}(-T(M_0)^{-1}T(M_1))}\right)$$

olarak bulunmaktadır.

Kanıt. Lemma 2.1 den $\mathfrak{M}$ kararlıdır $\Longleftrightarrow$ $T(\mathfrak{M})$ nonsingülerdir olduğunu biliyoruz. O halde

$$T(\mathfrak{M}) = \{T(M_0) + rT(M_1) : r \in (r_{\min}, r_{\max})\}$$

olduğundan lemma 2.2 yi uygulayarak (2.4) elde edilir.

Bu teoremden kararlı matrislerin konveks kombinasyonunun kararlılığı için gerekli ve yeterli koşul elde edilir.

M_0 ve M_1 matrisleri $n \times n$ boyutlu kararlı matrisler ve

$$M_\lambda = (1 - \lambda) M_0 + \lambda M_1 \tag{2.5}$$

bu matrislerin konveks kombinasyonu olsun.

$$r_{\max} = \left[\frac{1}{\lambda_{\max}^{+}\left(-T(M_0)^{-1} T(M_1 - M_0)\right)}\right] \tag{2.6}$$

olarak tanımlayalım.

Bu durumda aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 2.4 (2.5) konveks kombinasyonunun kararlı olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$r_{\max} \geq 1$$

olmasıdır.

Kanıt. Konveks kombinasyon kararlı olsun $r_{\max}$ tanımına göre $\forall\lambda \in (0, r_{\max})$ için M_λ kararlıdır ve $\forall\lambda > r_{\max}$ için M_λ kararsız olmaktadır. Eğer $r_{\max} < 1$ olsaydı $r_{\max} < \lambda < 1$ olacak şekilde öyle λ sayısı bulabiliriz ki M_λ kararsızdır. Bu ise konveks kombinasyonun kararlılığı ile çelişir.
Tersine $r_{\max} \geq 1$ olsun. Eğer konveks kombinasyon kararlı değilse $\exists\lambda \in (0,1)$ vardır ki M_λ kararsızdır. Bu durumda $r_{\max} \leq \lambda$ olmalıdır. Bu ise $r_{\max} \geq 1$ ile çelişir.

Şimdi ise kararlılık problemini nonsingülerlik problemine dönüştüren T dönüşümüne örnekler verelim. M $n \times n$ kare matrisi için $m = n^2$ olmak üzere

$$T(M) = diag\{M, M, ..., M\} + [m_{ij}I]$$

alalım. Eğer M nin özdeğerleri λ_i $(i = 1, 2, ..., n)$ ise $T(M)$ nin özdeğerleri $\lambda_i + \lambda_j$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ biçimindedir. [10]

T dönüşümü için diğer bir örnek $m = \dfrac{n(n+1)}{2}$ olmak üzere [11] de verilmiştir.

Örneğin M 3×3 boyutlu ise

$$T(M) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & m_{13} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{11}+m_{22} & m_{12} & m_{23} & m_{13} & 0 \\ 0 & m_{21} & m_{22} & 0 & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{21} & 0 & m_{11}+m_{33} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{31} & m_{32} & m_{21} & m_{22}+m_{33} & m_{23} \\ 0 & 0 & 0 & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

matrisidir.

Örnek 2.4. Kararlı M_0 ve M_1 matrislerini aşağıdaki gibi seçelim.

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

M_0 ve M_1 matrislerinin karakteristik polinomları

$$\begin{aligned} p_{m_0}(s) &= s^3 + 2s^2 + s + 1 \\ p_{m_1}(s) &= s^3 + 2s^2 + 3s + 2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu iki matrisin konveks kombinasyonunun kararlılığını inceleyelim. T dönüşümünü yukarıdaki gibi 6×6 biçiminde bir matris seçersek

$$T(M_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad T(M_1 - M_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. $T(M_0)$ ın tersini bulup $T(M_1 - M_0)$ ile çarparsak,

$$-T(M_0)^{-1}T(M_1-M_0) = -\begin{bmatrix} -5 & 1 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -9 & 0 & -5 & 5 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matrisin özdeğerleri 0,0,0,0,-3,-1 dir. (2.6) formülünden $r_{max} = \infty$ olarak elde edilir ve teorem 2.4 den dolayı konveks kombinasyon kararlıdır.

3 MATRİSLER AİLESİNİN KARARLILIĞI İÇİN KARŞIT ÖRNEKLER

Yukarıda da bahsettiğimiz gibi polinomlar ailesinin kararlılığı için bir çok gerekli ve yeterli koşullar yayınlanmıştır (Kharitonov teoremi, kenar teoremi v.s.). Matrisler politopu için benzer sonuçlar henüz elde edilmemiştir. Mevcut sonuçlar ya özel durumlar içindir yada yeterli koşullar vermektedirler. Örneğin [12] makalesinde aralık matrisler ele alınsada, uç matrisler üzerine simetriklik koşulu konulmuştur. Geçen bölümde bahsettiğimiz gerekli ve yeterli koşul ise ancak iki matrisin konveks kombinasyonu için geçerlidir.

Burada biz polinomlar ailesi için geçerli olan bazı teoremlerin matrisler ailesi için geçersiz olduğuna dair karşıt örnekler vereceğiz [13].

İddia 1. $\mathbb{M} = \{M_\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i M_i \;;\; \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}$ matrisler politopu verilsin. Eğer her $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için $\lambda M_i + (1 - \lambda) M_i$ kararlı ise $\mathbb{M}$ aileside kararlıdır.

Burada biz polinomlar politopu için doğru olan bu iddianın matrisler politopu için doğru olmadığını göstereceğiz.

Örnek 3.1.

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \begin{bmatrix} -1,0 & 0 & 1,0 \\ 0 & -1,0 & 0 \\ -1,0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} -1,0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,0 & 1,0 \\ 0 & -1,0 & 0,1 \end{bmatrix} \\
M_3 &= \begin{bmatrix} -1,0 & 0 & -1,0 \\ 0 & -1,0 & -1,0 \\ 1,0 & 1,0 & 0,1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Şimdi M_1, M_2, M_3 ün konveks zarfını alarak $\mathbb{M}$ polytopunun kenarlarının kararlı olduğunu kontrol edelim. M_1 ve M_2 nin konveks kombinasyonu $\forall\lambda \in [0, 1]$ için kararlıdır. Çünki

$$\det(sI - (\lambda M_1 + (1-\lambda)\, M_2)) = (s+1)(s^2 + 0,9s + (\lambda^2 + (1-\lambda)^2 - 0.1))$$

dir ve 2. çarpanın katsayıları daima pozitif olduğundan kararlıdır $(\lambda^2 + (1-\lambda)^2 - 0,1 = 2\lambda^2 - 2\lambda + 0.9$ ifadesi her $\lambda \in [0,1]$ için pozitiftir).

Aynı zamanda M_1 ve M_3 ün konveks kombinasyonu $\forall\lambda \in [0,1]$ için kararlıdır, çünki

$$\det(sI - (\lambda M_1 + (1-\lambda)\, M_3)) = (s+1)(s^2 + 0,9s + ((1-\lambda)^2 + (1-2\lambda)^2 - 0.1))$$

dir ve $((1-\lambda)^2 + (1-2\lambda)^2 - 0,1)$ ifadesi her $\lambda \in [0,1]$ için pozitiftir.

Son olarak M_2 ve M_3 ün de konveks kombinasyonu $\forall\lambda \in [0,1]$ için kararlıdır. Çünki

$$\det(sI - (\lambda M_2 + (1-\lambda)\, M_3)) = (s+1)(s^2 + 0,9s + ((1-\lambda)^2 + (1-2\lambda)^2 - 0.1))$$

Dolayısıyla bu politopun kenarları kararlıdır. Fakat $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ için

$$\frac{1}{3}M_1 + \frac{1}{3}M_2 + \frac{1}{3}M_3 = \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri -1, -1, 0.1 olduklarından politop kararsızdır.

İddia 2. (Hiperdörtgenin kenarlarının kontrolü) Burada birinci tahmin başarısız olduğu için $\mathbb{M}$ yi keyfi bir politop yerine bir hiperdörtgen olarak alalım. Yani aralık matrislerin durumunu düşünelim.

Örnek 3.2.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & -12.06 & -0.06 & 0 \\ -0.25 & -0.03 & 1.00 & 0.5 \\ 0.25 & -4.0 & -1.03 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & m_{44} \end{bmatrix}$$

$-1.5 \leq m_{11} \leq -0.5$, $-4.0 \leq m_{44} \leq -1.0$ ile tanımlanan aralık matrisler ailesini düşünelim.

$$\begin{aligned} m_{11} &= -0.5 - q_1 \quad q_1 \in [0,1] \\ m_{44} &= -1.0 - q_2 \quad q_2 \in [0,3] \end{aligned}$$

yazalım. Karakteristik polinomun, aşağıdaki şekilde olduğunu kolayca gösterebiliriz

$$\begin{aligned} \Delta(s, q_1 q_2) &= s^4 + (2.56 + q_1 + q_2)s^3 \\ &+ (2.871 + 2.06q_1 + 1.56q_2 + q_1 q_2)s^2 \\ &+ (3.164 + 4.841q_1 + 1.56q_2 + 1.06q_1 q_2)s \\ &+ (10853 + 3.773q_1 + 1.985q_2 + 4.032q_1 q_2) \end{aligned}$$

$[0,1] \times [0,3]$ hiperdörtgenin dört kenarının kararlılığını gözden geçirelim yani aşağıdaki dört durumu ele alalım:

1.Durum: $q_1 = 0$, $q_2 \in [0,3]$.

$$\begin{aligned} \Delta(s, 0, q_2) &= s^4 + (2.56 + q_2)\, s^3 + (2.871 + 1.56q_2)\, s^2 \\ &+ (3.164 + 1.561q_2)\, s + (1,853 + 1.985q_2) \end{aligned}$$

2.Durum: $q_1 \in [0,1]$, $q_2 = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta(s, q_1, 0) &= s^4 + (2.56 + q_1)\, s^3 + (2.871 + 2.06q_1)\, s^2 \\ &+ (3.164 + 4.841q_1)s + (1.853 + 3.773q_1) \end{aligned}$$

3.Durum: $q_1 = 1, q_2 \in [0,3]$.

$$\begin{aligned}\Delta(s,1,q_1) &= s^4 + (3.56 + q_1)\, s^3 + (4.931 + 2.56q_{2)})s^2 \\ &\quad +(8.005 + 2.621q_2)s + (5.626 + 6.017q_2)\end{aligned}$$

4.Durum: $q_1 \in [0,1]\,,\ q_2 = 3$.

$$\begin{aligned}\Delta(s,q_1,3) &= s^4 + (5.56 + q_1)\, s^3 + (7.551 + 5.06q_1)\, s^2 \\ &\quad + (7.847 + 8.21q_1)\, s + (7.808 + 15.869q_1)\end{aligned}$$

Dört kenarın da kararlılığı kolayca gösterilebilir. Örneğin, birinci kenarın kararlılığı 4. mertebeden monik polinomun kararlılık koşuluna yani aşağıdaki eşitsizliğe denktir:

Her $q_2 \in [0,3]$ için

$$\begin{aligned}&(2.56 + q_2)\,(2.871 + 1.56q_2)\,(3.164 + 1.561q_2) \\ &-(2.56 + q_2)^2\,(1.853 + 1.985q_2) - (3.164 + 1.561q_2)^2 > 0\end{aligned}$$

Son ifadeyi sadeleştirirsek

$$1.1 + 0.819q_2 + 1.1983q_2^2 + 0.4502q_2^3 > 0$$

elde ederiz. Katsayılar pozitif olduğundan q_2 ise $[0,3]$ aralığında değiştiğinden yukarıdaki eşitsizlik daima sağlanır. Benzer yolla diğer kenarların da kararlılığı gösterilebilir.

Fakat $q_1 = 0.5$, $q_2 = 1.0$ konduğunda bulunan iç nokta kararsız olan

$$\begin{aligned}\Delta(s,0.5,1.0) &= s^4 + 4.06s^3 + 5.961s^2 + 7.676s + 7.741 \\ &= (s + 2.2389)(s + 1.8263)\,(s - 0.0026 + j1.376) \\ &\quad (s - 0.0026 - j1.376)\end{aligned}$$

karakteristik polinomuna yol açar.

İddia 3. (Polinomlarda Mapping) $\mathbb{M}$ bir hiperdörtgen iken aralık matrislerin durumunu ve karakteristik polinomların kümesini düşünelim.

$$\mathbb{P}_{\mathbb{M}} = \{p(s) : p(s) = \det(sI - M_\lambda), M_\lambda \in \mathbb{M}\}$$

Şimdi $\mathbb{M}$ kararlıdır $\Leftrightarrow$ $conv\mathbb{P}_{\mathbb{M}}$ kararlıdır olduğu iddia edilmektedir. Biz bu iddianın doğru olmadığını göreceğiz.

Elemanları $m_{ij}^- \leq m_{ij} \leq m_{ij}^+$, $i, j = 1, 2, ..., n$ koşullarını sağlayan $n \times n$ boyutlu aralık matrisler ailesi $\mathbb{M}$ olsun. $\mathbb{M}$ kümesi $\mathbb{R}^{n \times n}$uzayında bir hiperdörtgendir.

m_{ij} lerin ancak sınır değerlerini alırsak elde edilen $M_1, M_2, ..., M_m$ matrisleri $\mathbb{M}$ nin uç noktalarıdır. Bu matrislerin karakteristik polinomları $p_1(s), p_2(s), ..., p_m(s)$ olsun.

O zaman

$$conv\mathbb{P}_{\mathbb{M}} = \{p_\lambda(s) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i(s) : \lambda_i \geq 0, i = 1, ..., n \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}$$

dir. $\mathbb{M}$ ailesi gürbüz kararlı olmasına rağmen $conv\mathbb{P}_{\mathbb{M}}$ ailesinde kararsız polinom bulunabilir.

Karşıt örnek olarak aşağıdaki aralık matrisler ailesini alalım.

Örnek 3.3.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
-2.4780 &\leq m_{11} \leq -1.4471; \\
-0.0518 &\leq m_{22} \leq -0.0194; \\
2.000 &\leq m_{23} \leq 3.4370; \\
m_{23} &= -0.7115; \\
-0.0026 &\leq m_{33} \leq -0.0012
\end{aligned}
$$

İle aralık matrisini tanımlayalım. İlk olarak bu hiperdörtgenin kararlı olduğunu göstereceğiz. Yani $\forall M \in \mathbb{M}$ matrisi kararlıdır. M blok diagonal olduğu için

$$
\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}, \\
M_{11} &= m_{11}; \\
M_{22} &= \begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

yazarız. M nin özdeğerlerinin M_{11} ve M_{22} nin özdeğerlerinin birleşimi olduğunu ve bundan başka M_{11} in özdeğerlerinin m_{11} in tüm değerleri için negatif reel olduğunu görüyoruz. Aynı zamanda

$$
\det(sI - M_{22}) = s^2 - (m_{22} + m_{33})\, s + m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32}
$$

elde edilir.

m_{ij} üzerinde alınan sınırları kullanarak $\det(sI - M_{22})$ nin katsayılarının daima pozitif kaldığı kolayca görülür. Bundan dolayı $\mathbb{M}$ hiperdörtgeni gürbüz kararlıdır. $conv\mathbb{P}_{\mathbb{M}}$ in gürbüz kararlı olmadığını gösterelim, $\mathbb{M}$ de

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \begin{bmatrix} -2.478 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0194 & 3.437 \\ 0 & -0.7115 & -0.0026 \end{bmatrix}; \\
M_2 &= \begin{bmatrix} -1.4471 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0518 & 2.0 \\ 0 & -0.7115 & -0.0012 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

uç matrislerini alalım. M_1 ve M_2 nin karakteristik polinomları p_{M_1} ve p_{M_2} aşağıdadır.

$$
\begin{aligned}
p_{M_1}(s) &= \det(sI - M_1) = s^3 + 2.5s^2 + 2.5s + 6.06 \\
p_{M_2}(s) &= \det(sI - M_2) = s^3 + 1.5s^2 + 1.5s + 2.06
\end{aligned}
$$

Karakteristik polinomların konveks kombinasyonu

$$
\frac{1}{2}p_{M_1}(s) + \frac{1}{2}p_{M_2}(s) = s^3 + 2.0s^2 + 2.0s + 4.06
$$

olarak elde edilir ve kararsız olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla $conv\mathbb{P}_{\mathbb{M}}$ politopu kararsız bir polinom içerir ve gürbüz kararlı değildir.

4 KARARLILIK İÇİN LYAPUNOV TEORİSİ

$$\dot{x} = Ax \ , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

sisteminin asimptotik kararlılık problemini ele alalım. İlk olarak A nın karakteristik polinomunu hesaplarız ve Routh-Hurwitz kriterini uygularız. Eğer karakteristik polinomun tüm kökleri negatif reel kısma sahipseler $\dot{x} = Ax$ in sıfır konumu asimptotik kararlıdır. A nın özdeğerlerini hesaplamadan $\dot{x} = Ax$ in asimptotik kararlılığını kontrol etmenin bir metodu vardır. Bu yöntemi açıklamadan önce pozitif belirli ve pozitif yarı belirli matrisleri tanımlamalıyız.

Tanım 4.1. M, elemanları kompleks sayılar cisminden olan bir $n \times n$ matris olsun. M^*, M nin kompleks eşleniğinin traspozu iken $M^* = M$ ise M ye Hermitian matris denir.
Eğer M reel matris ise Hermitian matrise simetrik matris denir.

Bir Hermitian matrisin tüm özdeğerleri reeldir ve unitary matris denilen bir P nonsingüler matrisi vardır öyle ki $P^{-1} = P^*$ ve $\hat{M} = PMP^*$ matrisi özdeğerleri köşegen üzerinde olan köşegen bir matristir.

Teorem 4.1. Bir M Hermitian matrisi alalım ve $\lambda_{\min}$ ve $\lambda_{\max}$ M nin sırasıyla en küçük ve en büyük özdeğerleri olsun. $\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayında n boyutlu her x için

$$\lambda_{\min} \parallel x \parallel^2 \leq x^* M x \leq \lambda_{\max} \parallel x \parallel^2$$

dir. Burada x_i x in i. bileşeni iken

$$\parallel x \parallel^2 = \langle x, x \rangle = x^* x = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

dir.

Tanım 4.2. Eğer $\mathbb{C}^n$ deki sıfırdan farklı her x için $x^* M x > 0$ ise M Hermitian matrisine pozitif belirli matris denir. Eğer $\mathbb{C}^n$ deki her x için $x^* M x \geq 0$ ise M Hermitian matrisine pozitif yarı belirli matris denir.

Eğer M elemanları reel sayı olan simetrik matris ise M nin pozitif belirli olması için her $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ için

$$x^T M x > 0$$

olmasıdır. Bazen simetrik M matrisinin pozitif belirli olması her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$x^T M x > \alpha \parallel x \parallel^2 \qquad (\alpha > 0)$$

ile tanımlanmaktadır. Bu eşitsizliklerin denk olduklarını gösterelim.

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \parallel x \parallel = 1\}$$

olsun. S kümesi kompakttır ve her $x \in S$ için $x^T M x > 0$ dir (birinci koşula göre).

$$\varphi : S \to \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = x^T M x$$

fonksiyonu S üzerinde süreklidir ve pozitiftir. S kompakt olduğundan sürekli fonksiyonun bilinen özelliğine göre öyle $x_* \in S$ vardır ki $\varphi(x) \geq \varphi(x_*)$ dır. $\varphi(x_*)=\alpha$ diyelim. Şimdi keyfi $x \in \mathbb{R}^n$ alalım ve $x \neq 0$ olsun. $y = \dfrac{x}{\parallel x \parallel}$ vektörü için $y \in S$ dir.

$$\parallel y \parallel = \parallel \frac{x}{\parallel x \parallel} \parallel = \frac{\parallel x \parallel}{\parallel x \parallel} = 1$$

Bundan dolayı

$$\begin{aligned} \varphi(y) &\geq \alpha, \quad y^T M y \geq \alpha \\ \left(\frac{x}{\parallel x \parallel}\right)^T M \left(\frac{x}{\parallel x \parallel}\right) &\geq \alpha \ \text{ ve } \ x^T M x \geq \alpha \parallel x \parallel^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $x = 0$ için de bu eşitsizlik geçerli olduğundan denklik ispatlanmış olur.

Eğer $-M$ matrisi pozitif belirli ise M ye negatif belirli matris denir.

M pozitif belirli matris olsun. M aynı zamanda simetrik olduğundan özdeğerleri reeldir ve bu özdeğerler $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ olsun. O zaman

$$\lambda_{\max}(M) = \max_{\|x\|=1} x^T M x$$

dir. Burada $\lambda_{\max}(M)$ M nin en büyük özdeğerini göstermektedir. Bu eşitliği ispatlayalım. M simetrik olduğundan öyle W ortogonal $(W^{-1} = W^T)$ matrisi vardır ki $y = Wx$ için

$$x^T M x = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

ve $\| y \| = \| x \|$ dir. O zaman $\| x \| = 1 \Leftrightarrow \| y \| = 1$. Eğer $\| y \| = 1$ ise

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_{\max}(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2) = \lambda_{\max}$$

Buradan

$$\max_{\|y\|=1} \left[\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2\right] \leq \lambda_{\max}$$

elde edilir. Tersine $\lambda_{\max} = \lambda_{i_0}$ olsun. $y_i = 0$, $i \neq i_0$, $y_{i_0} = 1$ gibi alırsak $y_* = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ vektörü için $\| y_* \| = 1$ olur.

$$\left(\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2\right) |_{y=y_*} = \lambda_{i_0} = \lambda_{\max}$$

$$\max_{\|y\|=1} \left[\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2\right] \geq \lambda_{\max}$$

Bu eşitsizliklerden

$$\lambda_{\max} = \max_{\|y\|=1} \left[\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2\right] = \max_{\|x\|=1} x^T M x$$

elde edilir.

Teorem 4.2. M nin pozitif belirli(pozitif yarı belirli) bir Hermitian matrisi olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki koşullardan herhangi birinin sağlanmasıdır:

1. M nin tüm özdeğerleri pozitiftir (negatif değil).

2. M nin tüm baş minörleri pozitiftir (M nin tüm baş minörleri negatif değil).

3. Bir nonsingüler(singüler) N matrisi vardır öyle ki $M = N^*N$ dir.

Teorem 4.3. A nın tüm özdeğerlerinin negatif reel kısma sahip olması için yada buna denk olarak $\dot{x} = Ax$ in sıfır konumu asimptotik kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul herhangi bir pozitif belirli hermitian N matrisi için

$$A^*M + MA = -N \tag{4.1}$$

matris denkleminin bir tek M pozitif belirli hermitian çözümüne sahip olmasıdır.

Kanıt. Yeterlilik: $V(x) = x^*Mx$ olsun. $\dot{x} = Ax$ in herhangi $x(t)$ çözümü boyunca

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \frac{d}{dt}V(x(t)) = \frac{d}{dt}(x^*(t)Mx(t)) \\
&= (\frac{d}{dt}x^*(t))Mx(t) + x^*(t)M(\frac{d}{dt}x(t)) \\
&= x^*(t)A^*Mx(t) + x^*(t)MAx(t) \\
&= x^*(t)(A^*M + MA)x(t) \\
&= -x^*(t)Nx(t)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Teorem 4.1 den $(\lambda_N)_{\min}$ N nin en küçük özdeğeri, $(\lambda_M)_{\max}$ M nin en büyük özdeğeri iken

$$\frac{V'}{V} = \frac{x^*Nx}{x^*Mx} \leq -\frac{(\lambda_N)_{\min}}{(\lambda_M)_{\max}} \tag{4.2}$$

dir. Varsayımdan M ve N matrisleri pozitif belirli olduklarından teorem 4.2 den $(\lambda_N)_{\min} > 0$ ve $(\lambda_M)_{\max} > 0$ olduğunu biliyoruz.

$$x = \frac{(\lambda_N)_{\min}}{(\lambda_M)_{\max}}$$

ile tanımlarsak (4.2) eşitsizliği $V' \leq -\alpha V$ eşitsizliğine dönüşür. Buradan

$$V(t) \leq e^{-\alpha t}V(0)$$

olur. $\alpha > 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla V fonksiyonu $x' = Ax$ nin her çözümü boyunca exponansiyel olarak sıfıra yaklaşır. Öte yandan $x = 0 \Longleftrightarrow V(x) = 0$ dır. Bu, $x' = Ax$ in sıfır konumunun asimptotik kararlı olduğunu ispatlar.

Gereklilik: Eğer $x' = Ax$ in sıfır konumu asimptotik kararlı ise A nın tüm özdeğerleri negatif reel kısma sahiptir. Sonuç olarak her N için

$$A^*M + MA = -N$$

denklemini sağlayan bir tek M matrisi vardır ve M matrisi

$$M = \int_0^\infty e^{A^*t}Ne^{At}dt$$

ile ifade edilir. Şimdi N pozitif tanımlı ise M nin de pozitif tanımlı olduğunu gösterelim. $N = H^*H$ olacak şekilde H nonsingüler matrisini seçelim (teorem 4.2).

Aşağıdakini yazabiliriz:

$$\begin{aligned} x_0^*Mx &= \int_0^\infty x_0^*e^{A^*t}H^*e^{At}x_0dt \\ &= \int_0^\infty \| He^{At}x_0 \|^2 dt \end{aligned}$$

H ve e^{At} her t için nonsingüler olduğundan $x_0 \neq 0$ oldukça her t için $He^{At}x_0 \neq 0$ dır. Dolayısıyla her $x_0 \neq 0$ için $x_0^* Mx > 0$ olduğu sonucuna varılır ve M pozitif tanımlıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1. A matrisi reel, $n \times n$ boyutlu matris olsun. A nın kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\int_0^{\infty} e^{A^T t} N e^{At} dt > 0$$

olacak şekilde bir $N > 0$ matrisinin olmasıdır.

Sonuç 4.2. Eğer bir $M > 0$ matrisi varsa ki

$$A^T M + MA < 0$$

ise A matrisi kararlıdır.

Teorem 4.4. A_1 ve A_2 simetrik, kararlı iki matris ise A_1 ve A_2 nin konveks kombinasyonları kararlıdır.

Kanıt. Matrisler simetrik oldukları için özdeğerleri reeldirler. Kararlı da olduklarından özdeğerleri negatiftir. Buna göre A_1 ve A_2 negatif belirli matrislerdir. Yani

$$A_1 < 0 \quad A_2 < 0$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned} \lambda A_1 + (1-\lambda) A_2 &< 0 \qquad \forall \lambda \in [0,1] \\ x^T (\lambda A_1 + (1-\lambda) A_2) x &= \lambda (x^T A_1 x) + (1-\lambda)(x^T A_2 x) < 0 \end{aligned}$$

konveks kombinasyonda negatif belirli olduğundan kararlıdır.

Teorem 4.5. A_1 ve A_2 simetrik, kararlı iki matris olsun. O zaman öyle $P_1 > 0$, $P_2 > 0$ matrisleri vardır ki

$$P(\lambda) = (1-\lambda) P_1 + \lambda P_2$$

için

$$A^T(\lambda) P(\lambda) + P(\lambda) A(\lambda) < 0$$

dır. Burada $A(\lambda) = (1-\lambda) A_1 + \lambda A_2$ dir.

Kanıt. $P_1 = -A_1$, $P_2 = -A_2$ alalım. $A_1 < 0$ ve $A_2 < 0$ olduğundan $P_1 > 0$, $P_2 > 0$ dır.

$$P(\lambda) = -[(1-\lambda) A_1 + \lambda A_2]$$

O halde her $x \neq 0$ için

$$\begin{aligned} x^T(A^T(\lambda) P(\lambda) + P(\lambda) A(\lambda))x &= x^T[-((1-\lambda) A_1 + \lambda A_2)((1-\lambda) A_1 + \lambda A_2) \\ &\quad +((1-\lambda) A_1 + \lambda A_2)((1-\lambda) A_1 + \lambda A_2)]x \\ &= -2x^T\left([(1-\lambda) A_1 + \lambda A_2]^2\right) x \\ &= -2x^T A(\lambda) A(\lambda) x \\ &= -2(A(\lambda) x)^T A(\lambda) x \\ &= -2 \| A(\lambda) x \|^2 < 0 \end{aligned}$$

Böylece teorem ispatlanmış olur. Bu teorem Barmish'in iddiasının ([3], sayfa 347) simetrik matrisler için doğru olduğunu göstermektedir.

5 KUADRATİK KARARLILIK VE OYUN TEORİSİ

Bu bölümde matrisler ailesinin kuadratik kararlılık kavramı tanımlanmış, kuadratik kararlılık, gürbüz kararlılık problemlerinin oyun teorisi ile bağlantıları verilmiştir. Sonra iki kararlı matrisin konveks kombinasyonunun kuadratik kararlı olması için yeni gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir [14,15].

Tanım 5.1. $\mathcal{A}$ matrisler ailesi verilsin. Eğer öyle $P_* > 0$ matrisi varsa ki her $A \in \mathcal{A}$ için

$$A^T P_* + P_* A < 0$$

ise $\mathcal{A}$ ailesine kuadratik kararlı aile denir. Burada > 0 (< 0) işaretleri pozitif (negatif) belirliliği göstermektedir.

Teorem 5.1. Eğer $\mathcal{A}$ matrisler ailesi kuadratik kararlı ise $\mathcal{A}$ nın konveks zarfı olan $conv\mathcal{A}$ aileside kuadratik kararlıdır.

Kanıt. Koveks zarfın tanımına göre

$$conv\mathcal{A} = \left\{ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_k A_k ; A_1, A_2, ..., A_k \in \mathcal{A}, \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \ \alpha_i > 0, \ k \in N \right\}$$

yazabiliriz. $\mathcal{A}$ ailesi kuadratik kararlı olsun. Öyle $P_* > 0$ vardır öyle ki her $A \in \mathcal{A}$ için

$$A^T P_* + P_* A < 0 \tag{5.1}$$

dir. Herhangi $A \in conv\mathcal{A}$ alalım. O zaman öyle $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ $A_1, A_2, ..., A_k \in \mathcal{A}$ vardır ki

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_k A_k \tag{5.2}$$

dir. Öte yandan (5.1) e göre her i için

$$A_i^T P_* + P_* A_i < 0 \tag{5.3}$$

dır. (5.3) ü α_i ile çarpıp taraf tarafa toplarsak

$$\alpha_1 A_1^T P_* + \alpha_1 P_* A_1 + ... + \alpha_k A_k^T P_* + \alpha_k P_* A_k = (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_k A_k)^T P_* + P_* (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_k A_k) < 0$$

olur. O zaman (5.2) ye göre her $A \in conv\mathcal{A}$ için

$$A^T P_* + P_* A < 0$$

olur. Teorem ispatlanmış oldu.

$\mathcal{P}$ ile $(n \times n)$ boyutlu pozitif yarı belirli matrisler ailesini gösterelim. $\mathcal{A}$ ise $(n \times n)$ boyutlu matrislerin kompakt bir ailesi olsun. $P \in \mathcal{P}$ ve $A \in \mathcal{A}$ için $A^T P + PA$ matrisinin en büyük özdeğerini $J(A, P)$ ile gösterelim:

$$J(A, P) = \lambda_{\max}(A^T P + PA)$$

$J(A, P)$ nin maksiminine J_1, minimaksına J_2 diyelim:

$$J_1 = \max_{A \in \mathcal{A}} \min_{P \in \mathcal{P}} J(A, P) \tag{5.4}$$

$$J_2 = \min_{P \in \mathcal{P}} \max_{A \in \mathcal{A}} J(A, P) \tag{5.5}$$

A ve P kümeleri kompakt, $J(A, P)$ fonksiyonu ise sürekli olduğundan (5.4) ve (5.5) de maksimum ve minimum yazılabilir.
Oyun teorisinden biliniyor ki $J_1 \leq J_2$ dir [16].

Teorem 5.2. $\mathcal{A}$ ailesinin robust kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul $J_1 < 0$ olmasıdır. $\mathcal{A}$ ailesinin kuadratic kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul $J_2 < 0$ olmasıdır.

Kanıt. Eğer $J_1 < 0$ ise her $A \in \mathcal{A}$ için öyle pozitif belirli P matrisi vardır ki

$$\lambda_{\max}\left(A^T P + PA\right) < 0$$

dır. Bu durumda $\mathcal{A}$ ailesi gürbüz kararlı olur. Benzer yolla bunun tersi ve kuadratik kararlılığın $J_2 < 0$ a denk olduğu ispatlanır.

yukarıdaki eşitsizlikden ve teorem 5.2. den aşağıdaki sonucu elde ediyoruz.

Sonuç 5.1. Eğer $\mathcal{A}$ ailesi kuadratic kararlı ise gürbüz kararlıdır.

Bu sonuç kontrol teorisinde iyi bilinen bir sonuçtur. Burada bu sonuç oyun teorisinden elde edilmiştir.

Teorem 5.3. Kuadratic kararlılığın gürbüz kararlılığa denk olması için gerek ve yeter koşul $(5.4), (5.5)$ oyununda bir denge noktasının bulunabilmesidir.

Yani bir $(A_0, P_0) \in \mathcal{A} \times \mathcal{P}$ çifti vardır öyle ki $\forall A \in \mathcal{A}$ ve $P \in \mathcal{P}$ için

$$J(A, P_0) \leq J(A_0, P_0) \leq J(A_0, P) \tag{5.6}$$

dir. Bu teorem doğrudan oyun teorisinde iyi bilinen denge noktası toreminden görülür. Fakat genel oyun problemleri için denge noktasının varlığı ve bulunması problemleri kolay değildir. Kararlılık için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 5.4. Eğer alınan her $P \in \mathcal{P}$ için

$$J(A^*, P^*) \leq J(A^*, P) + \alpha \tag{5.7}$$

olacak şekilde $\alpha > 0$ skaleri varsa kuadratic kararlılık indeksi J_2 ve gürbüz kararlılık indeksi J_1 arasındaki hata α dan büyük değildir. Burada A^* ve P^* minimaks probleminin çözümüdür. Buradan kuadratic kararlılık ve gürbüz kararlılığın denk olmaları için gerekli ve yeterli koşul yukarıdaki eşitsizliğinin $\alpha = 0$ da sağlanmasıdır.

Kanıt Alınan her $P \in \mathcal{P}$ için (5.7) eşitsizliğinden

$$J(A^*, P^*) \leq \alpha + \min_{P \in \mathcal{P}} J(A^*, P)$$

elde edilir.

$$\min_{P \in \mathcal{P}} J(A^*, P) \leq \max_{A \in \mathcal{A}} \min_{P \in \mathcal{P}} J(A, P) \tag{5.8}$$

olduğu gösterilebilir. Gerçekten,

$$f(A) = \min_{P \in \mathcal{P}} J(A, P)$$

fonksiyonunu tanımlarsak

$$f(A^*) \leq \max_{A \in \mathcal{A}} f(A)$$

yazabiliriz. O zaman

$$\min_{P \in \mathcal{P}} J(A^*, P) \leq \max_{A \in \mathcal{A}} \min_{P \in \mathcal{P}} J(A, P)$$

elde ederiz. (5.7) ile birleştirilirse,

$$\begin{aligned} J(A^*, P^*) &\leq \alpha + \max_{A \in \mathcal{A}} \min_{P \in \mathcal{P}} J(A, P) \\ &= \alpha + J\left(A', P'\right) \end{aligned} \tag{5.9}$$

ortaya çıkar. Bu

$$J_2 \leq \alpha + J_1$$

demektir. Buradan kuadratik ve gürbüz kararlılık indeksleri arasındaki hata

α ya eşit yada α dan küçüktür. Böylece ilk kısmın ispatı tamamlanmıştır. Şimdi ikinci kısmı ispat edelim. (5.7) şartı $\alpha = 0$ için sağlanıyorsa (5.9) eşitsizliği de sağlanır.

$$\min_{P\in\mathcal{P}} \max_{A\in\mathcal{A}} J(A,P) \le \max_{A\in\mathcal{A}} \min_{P\in\mathcal{P}} J(A,P)$$

bulunur.

$$\max_{A\in\mathcal{A}} \min_{P\in\mathcal{P}} J(A,P) \le \min_{P\in\mathcal{P}} \max_{A\in\mathcal{A}} J(A,P)$$

olduğunu hatırlayalım. Buradan maksimin ve minimaks problemlerinin denkliğini söyleyebiliriz.
Tersine kuadratik ve gürbüz kararlılığının denkliği (5.6) şartının $\alpha = 0$ için sağlandığını ifade eder.

Şimdi ise iki kararlı A_1 ve A_2 matrislerinin konveks kombinasyonunun kararlı olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul verelim.

Teorem (5.1) e esasen kuadratik kararlılık için öyle $P > 0$ matrisi bulunmalıdır ki

$$A_1^T P + P_1 A_1 < 0, \qquad A_2^T P + P A_2 < 0$$

olsun. A_1 verildiğinde birinci eşitsizliği sağlayan P ler kümesi

$$A_1^T P + P A_1 = -N$$

nin çözümleri olan

$$\mathcal{P} = \left\{ \int_0^\infty e^{A_1^T t} N e^{A_1 t} dt : N > 0 \right\}$$

matrisler ailesidir. Eğer A_1 kararlı ise $\mathcal{P}$ ailesindeki her matris pozitif belirlidir (teorem 4.3). $\mathcal{P}$ kümesinde $A_2^T P + P A_2 < 0$ eşitsizliğini sağlayan $P > 0$ matrisinin varlığı problemi

$$A_2^T P(N) + P(N) A_2 < 0 \tag{5.10}$$

eşitsizliğini sağlayan $N > 0$ matrisinin varlığı problemine denktir. Önceki bölümde ispatladığımız gibi (5.10) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe eşdeğerdir:

$$\lambda_{\max}\left(A_2^T P(N) + P(N) A_2\right) = \max_{\|x\|=1} x^T \left(A_2^T P(N) + P(N) A_2\right) x < 0$$

Buradan aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 5.5. A_1 ve A_2 nin konveks kombinasyonunun kuadratik kararlı olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\inf_{N>0} \max_{\|x\|=1} x^T \left(A_2^T P(N) + P(N) A_2\right) x < 0$$

olmasıdır.

Görüldüğü gibi kuadratik kararlılık problemi değer fonksiyonu bilinen bir minimaks problemine dönüşür.

Örnek 5.1. $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
kararlı matrislerinin konveks kombinasyonunun kuadratik kararlılığını ispatlayalım.

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

alırsak

$$A_1^T P + P A_1 = -N$$

nin çözümü

$$P(N) = \begin{bmatrix} \dfrac{3a+c}{4} & \dfrac{-a}{2} \\ \dfrac{-a}{2} & a + \dfrac{c}{2} \end{bmatrix}$$

gibidir.

$$A_2^T P(N) + P(N) A_2 = \begin{bmatrix} -a & \frac{5}{4}a + \frac{1}{4}c - \frac{1}{2}b \\ \frac{5}{4}a + \frac{1}{4}c - \frac{1}{2}b & -3a - 2c \end{bmatrix}$$

N nin pozitif belirli olması $a > 0,\ ac - b^2 > 0$ olması demektir. $A_2^T P + PA_2$ matrisinin negatif belirli olması ise $a > 0,\ a(3a + 2c) - \frac{1}{16}(5a - 2b + c)^2 > 0$ eşitsizliği ile eşdeğerdir. Eğer $a = 1,\ b = 1,\ c = 2$ alırsak yukarıdaki eşitsizliklerin sağlandığını gösterebiliriz. Dolayısıyla öyle pozitif belirli N matrisi vardır ki

$$A_2^T P(N) + P(N) A_2 < 0$$

dır. Buna göre konveks kombinasyon kuadratik kararlıdır.

Teorem 5.6. $\mathcal{A} = conv\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ ailesini ele alalım ve her $i = 1, 2, ..., k$ için

$$A_i + A_i^T < 0$$

olsun. Bu durumda $\mathcal{A}$ ailesi kuadratik kararlıdır.

Kanıt. $P_* = I$ matrisi için

$$A_i^T P_* + P_* A_i < 0$$

olduğundan $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ ailesi kuadratik kararlıdır. Yukarıdaki ispatımıza göre bu ailenin konveks zarfı olan $\mathcal{A}$ ailesi de kuadratik kararlıdır.

Örnek 5.2. $A_1 = \begin{bmatrix} -1.5 & -1 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix}$ $\quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ -11 & -0.5 \end{bmatrix}$ olarak alalım.

O zaman

$$A_1 + A_1^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} < 0$$

$$A_2 + A_2^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} < 0$$

olduğundan konveks kombinasyon kuadratik kararlıdır. [14] makalesinde bu konveks kombinasyonun kararlılığı karmaşık bir algoritma ile gösterilmiştir.

Örnek 5.3. $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -4 \\ -5 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ $A_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & -1 & -1 \\ \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$ olsun.

$$A_1 + A_1^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A_2 + A_2^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

bu matrisler negatif belirli olduklarından konveks kombinasyon kuadratik kararlıdır.

Kararlı A_1 ve A_2 matrislerini ele alalım.

$$A_1^T P + P A_1 = -I$$

matris denkleminin çözümü

$$P_1 = \int_0^\infty e^{\left(A_1 + A_1^T\right)t} dt$$

biçimindedir ve $P_1 > 0$ dır.

Teorem 5.7. Eğer

$$A_2^T P + P A_2 < 0$$

sağlanıyorsa A_1 ile A_2 nin konveks kombinasyonu kuadratik ve bunun sonucu olarak gürbüz kararlıdır.

Kanıt. $\{A_1, A_2\}$ ailesi kuadratik kararlıdır çünki $P_1 > 0$ matrisi için

$$\begin{aligned} A_1^T P + P A_1 &= -I < 0 \\ A_2^T P + P A_2 &< 0 \end{aligned}$$

dir. Buradan da konveks kombinasyonun kuadratik kararlılığı çıkar.

KAYNAKLAR

1. CHEN, C. T., *Linear System Theory and Design* , Holt, Rinehart and Winston, New York, 1984.

2. GANTMACHER, F.R., *Theory of Matrices,* vol.2 Chelsea, New York, 1959.

3. BARMISH, B.R., *New Tools for Robustness of Linear Systems,* Macmil lan Publishing Company, 1994.

4. KHARITONOV, V.L., *Asyptotic Stability of An Equilibrium position of A Family of Systems of Linear Differential Equations,* Differencial'nye Uravnenija 14 (11) 2086-2088 1978.

5. ROCKAFELLAR, R., *Convex Analysis,* Princeton University Press, 1972.

6. BARTLETT, A.C., HOLLOT, C.V. & HUANG, L., *Root locations of An Entire Polytope of Polynomials: It Suffices to Check the Edges,* Mathematics Control, Signals and Systems, **1**, 61-71, 1988.

7. BARMISH, B.R. and HOLLOT, C. V., *Correspondence Counter-example to A Recent Result on the Stability of Interval Matrices by S. Bialas,* Int. J. Control, **39**, no. 5, 1103-1104, 1984.

8. BIALAS, S. and GARLOFF, J., *Convex Conbinations of Stable Polyno mials,* Journal of Franklin Institute Pergamond Press Ltd., **319**, 373-377, 1985.

9. FU, M. and BARMISH, B.R., *Maximal Unidirectional Perturbation Boudns for Stability of Polynomials and Matrices,* Systems and Control Letters, **11**, 173-179, 1989.

10. BREWER, J. W., *Kronecker Products and Matrix Calculus in System Theory,* IEEE Trans. Circuit and Systems 25 (9) 772-781 1978.

11. BIALAS, S., *A Necessary and Sufficient Conditions for the Stability of Convex Combinations of Stable Polynomials and Matrices,* Bull. Polish Acad. Sci. Tech. Sci. 33 (9-10) 473-480 1985 .

12. XIN, L. X., *Necessary and Sufficient Conditions for the Stability of A Class Interval Matrices,* Int. J. Cont., **45**, no.1, 211-214, 1987.

13. BARMISH, B.R., FU, M. and SALEH, S. *Stability of Polytope Matrices; Counterexamples,* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-33, 569-572, 1988

14. GU, K. ZOHDY, M. A. and LOH, N.K., *Necessary and Sufficient Conditions of Quadratic Stability of Uncertain Linear Systems,* IEEE Transactions on Automatic Control, **35**, no.5, 1990.

15. CHEN, W.H., *On Relationship Between Quadratic and Robust Stability of Uncertain Systems,* International Journal of Robust and Nonlinear Control, **9**, 51-58, 1999.

16. BASAR, T. and OLSDER, G. J., *Dynamic Noncooperative Game Theory,* Academic Press, New York, 1982.