DİFERANSİYEL İÇERMELERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE ÖZELLİKLERİ

Serpil İZGİ
Yüksek Lisans Tezi

Haziran - 2001

DİFERANSİYEL İÇERMELERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE ÖZELLİKLERİ

Serpil İZGİ

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

HAZİRAN 2001

Bu Tez Çalışması Anadolu Üniversitesi Araştırma Fonunca desteklenmiştir.
Proje No: 001040

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Serpil İZGİ'nin "Diferansiyel İçermelerin Çözümlerinin Varlığı ve Özellikleri" başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans tezi .... tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:Prof. Dr. Mahide KÜÇÜK	
Üye	:Doç. Dr. Halik HÜSEYNOV	
Üye	:Doç. Dr. Rauza ALİMCANOVA	
Üye	:	
Üye	:	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..27..6..2001 tarih ve ......21.1.4...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFERANSİYEL İÇERMELERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE ÖZELLİKLERİ

SERPİL İZGİ

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mahide Küçük

2001, Sayfa 81

Bu çalışmada diferansiyel içermelerin çözümlerinin varlığı araştırılmıştır. Bu amaçla önce diğer bölümlerde kullanılan temel tanım ve teoremler sunulmuştur. İkinci bölümde sağ tarafı konveks kompakt değerli küme değerli dönüşüm olan diferansiyel içermeler için Cauchy probleminin çözümünün varlığı kanıtlanmıştır. Üçüncü bölümde Cauchy probleminin çözümler kümesinin, erişim kümesinin ve integral tünelinin kapalılık ve kompaktlığı ile ilgili teoremler kanıtlanıp; çözümlerin bir yerel özelliği incelenmiştir. Son bölümde ise sağ tarafı konveks değerli olmayan diferansiyel içermelerin regülarizasyonu ve bu tür diferansiyel içermeler için Cauchy probleminin çözümünün varlığı araştırılmıştır. Bu bölümün son kesimi diferansiyel içermelerin çözümleriyle ilgili bir araştırmayı içermektedir. İntegral tünelin dışında alınan keyfi bir nokta için, diferansiyel içermenin bu noktadan geçecek ve her zaman integral tünelin dışında kalacak en az bir çözümünün bulunabileceği kanıtlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Küme Değerli Dönüşüm, Alttan ve ÜsttenYarı Süreklilik, Diferansiyel İçerme, Erişim Kümesi, İntegral Tünel.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

EXISTENCE AND PROPERTIES OF SOLUTIONS TO DIFFERENTIAL INCLUSIONS

SERPİL İZGİ

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Prof. Mahide Küçük
2001, 81 pages

In this study, existence of solutions to differential inclusions is searched. Firstly, basic definitions and theorems which are used in other parts are presented. In the second part existence of solutions to Cauchy problem for compact convex valued differential inclusions is proved. In the third part theorems which connect with closed and compact of solutions set, reachable set and integral funnel for Cauchy problem are proved and a local property of solutions is given. In the final part regularization of differential inclusions with non-convex valued right-hand side and for this type differential inclusions, existence of solutions to Cauchy problem are searched. The last section in this part includes the analysis of the solutions of differential inclusions. It has been proven that, for a point arbitrarily selected outside the integral funnel, there can be at least one solution where the differential inclusion passes through this point and always remains outside the integral funnel.
Keywords: Set-Valued Maps, Lower and Upper Semicontinuity, Differential Inclusions, Reachable Set, Integral Funnel.

ÖNSÖZ

Küme değerli analiz teorisi son yıllarda matemetiğin birçok dalında kullanılmaya başlamıştır. Örneğin diferansiyel denklemler, optimal kontrol, diferansiyel oyun teorisi küme değerli dönüşümlerle ilgilenmektedir.

Geniş bir uygulama alanına sahip olan diferansiyel içermeler sağ tarafı küme değerli dönüşüm olan diferansiyel denklemlerdir. Küme değerli dönüşüm küme değerli analizde belirli bir uzayın herbir elemanına diğer bir uzayın belirli bir alt kümesini karşı getirmek biçiminde tanımlanmıştır. Diferansiyel içerme çalışmaları küme değerli analizin kavramları kullanılarak yapılmaktadır

Diferansiyel içermelere kontrol sistemlerin genellemesi olarak bakılabilir. Diferansiyel içermeler matematik modelleri diferansiyel eşitsizlikler veya kapalı diferansiyel denklemlerle verilen sistemlerin araştırılmasında da kullanılmaktadır.

Diferansiyel içermelerle ilgili olarak ilk defa (bkz [41], [56]) sağ tarafı küme değerli dönüşüm olan diferansiyel denklemler incelenmiştir. Diferansiyel içermeler en çok 60'lı yıllarda gelişmiştir. Bu yıllarda diferansiyel içermeler yardımıyla kalite teorisine ait birkaç önemli özellik, örneğin Cauchy probleminin çözümünün varlığı, erişim kümesinin ve integral tünelin çeşitli topolojik özellikleri araştırılmıştır. (bkz [1], [6], [11], [12], [14], [21], [23], [27], [28], [35], [36], [39], [40], [43], [44], [54]). Bu dönemde diferansiyel içermeler, sağ tarafı faz vektörüne göre sürekli olmayan diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin araştırılmasında kullanılmıştır (bkz [26], [34], [54])

70'li yıllarda diferansiyel içermeler kontrol sistemlerin genel durumu gibi incelenmiştir. Küme değerli analizin çeşitli yapılarından yararlanarak, matematiksel modeli diferansiyel içerme olarak verilen kontrol sistemlerde optimallik için gerekli koşullar bulunmuştur (bkz [7], [8], [9], [16], [17], [18], [19], [20], [42], [52], [53]). 80'li yıllarda ise bu tür kontrol sistemler için viability özellikleri araştırılmış (bkz [2], [4], [25], [24], [29], [32], [30], [45], [51],) ve diferansiyel içermeler diferansiyel oyun teorisinin problemlerinin incelenmesinde kullanılmıştır (bkz [29], [37], [48]).

Viability teori kapsamında geliştirilmiş infinitezimal yapılar, birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin viscosity çözümlerinin, uygun diferansiyel oyunun değer fonksiyonunu karakterize eden Bellman-Isaacs denkleminin minimax çözümleri ile denk olduğunun kanıtlanmasında kullanılmıştır. (bkz [22], [49], [50])

Son yıllarda, diferansiyel içermeler teorisinin çeşitli problemlerine ait birçok makaleler yayınlanmaktadır (bkz [3], [5], [13], [15], [31], [39], [49], [55]). Bugün diferansiyel içermeler iyi gelişmiş bir teori olarak matematiğin çeşitli dallarında uygulanan bir teoridir.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen Prof.Dr. Mahide KÜÇÜK'e, Doç.Dr. Halik HÜSEYNOV'a, Prof.Dr. Yalçın KÜÇÜK'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\emptyset$	:	Boş küme
$B(x,r)$	:	x merkezli r yarıçaplı top
$co\ (A)$	:	A kümesinin konveks zarfı
$K(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$'in kompakt alt kümeleri uzayı
$KV(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$'in kompakt konveks alt kümeleri uzayı
$\alpha(A,B)$	:	A ile B kümesi arasındaki Hausdorff uzaklığı
$gr\ F$	:	F küme değerli dönüşümünün grafiği
$B([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$	:	$[t_0,t_1]$ aralığından $\mathbb{R}^n$'e tanımlı sınırlı fonksiyonlar uzayı
$gr^{\varepsilon}F(\cdot)$	:	$gr\ F$ 'in kapalı $\varepsilon-$komşuluğu
$X(t_0,x_0)$	:	Çözümler kümesi
$X(t;t_0,x_0)$	:	Erişim kümesi
$H(t_0,x_0)$	:	İntegral tünel
$F_\delta(t,x)$	:	Konveks zarfın δ-komşuluğu
$F_*(t,x)$	:	F küme değerli dönüşümünün regülarizasyonu
k.d.d.	:	Küme Değerli Dönüşüm
D.I.	:	Diferansiyel İçerme

1 ÖNBİLGİLER

Bu bölümde ileriki bölümlerde gerekli olacak bazı genel bilgiler verilecektir.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

$\mathbb{R}^n$ ile n-boyutlu Öklid uzayını, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

ile x ve y vektörlerinin iççarpımını, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ ile $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ vektörünün normunu göstereceğiz.

$\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı , kompakt alt kümeleri uzayını $K(\mathbb{R}^n)$ ile kompakt konveks alt kümeleri uzayını da $KV(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğiz.

$x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $A \subset K(\mathbb{R}^n)$ için x'in A kümesine olan uzaklığını

$$dist(x, A) = \min_{a \in A} \|x - a\| \text{ ile}$$

$\mathbb{R}^n$'in birim yuvarını

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \text{ ile}$$

x noktasının $\varepsilon-$komşuluğunu

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \varepsilon\} \text{ ile}$$

ve A kümesinin $\varepsilon-$komşuluğunu da

$$A^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : dist(x, A) \leq \varepsilon\}$$

ile göstereceğiz. $A \subset K(\mathbb{R}^n)$ için $co\ A$ ile A kümesinin konveks zarfını göstereceğiz. $co\ A$, A kümesini içeren en küçük konveks kümedir. $co\ A$ 'nın ayrıntılı özellikleri (bkz $[10, 47, 53]$) de araştırılmıştır.

$A \subset K(\mathbb{R}^n)$, $C \subset K(\mathbb{R}^n)$ için A ve C kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık

$$\alpha(A,C) = \max \{\max_{a\in A} dist(\, a, C) \ , \ \max_{c\in C} dist(c, A)\}$$

olarak tanımlanır. Aynı tanım

$$\alpha(A,C) = \inf \{r > 0 : A \subset C + rB \ , \ C \subset A + rB\}$$

olarak da verilebilir. $\alpha : K(\mathbb{R}^n) \times K(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty)$ fonksiyonunun metriğin tüm özelliklerini sağladığını gösterebiliriz . O zaman $(K(\mathbb{R}^n),\, \alpha(.,.))$ metrik uzaydır.

$$F(\cdot) : \mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^n) \tag{1.1.1}$$

dönüşümüne küme değerli dönüşüm (k.d.d) denir.

$D \subset \mathbb{R}^m$, $F(\cdot) : D \to K(\mathbb{R}^n)$ k.d.d. , $f(\cdot) : D \to \mathbb{R}^n$ fonksiyon olsun. $gr\ F(\cdot)$ ile $F(\cdot)$ k.d.d.'ünün , $gr\ f(\cdot)$ ile de $f(\cdot)$ fonksiyonunun grafiğini göstereceğiz ve

$$gr\ F(\cdot) = \{(x,y) \in D \times \mathbb{R}^n : y \in F(x)\}$$
$$gr\ f(\cdot) = \{(x,y) \in D \times \mathbb{R}^n : y = f(x)\}$$

olarak tanımlayacağız.

Şimdi k.d.d'lerin sürekliliği, alttan ve üstten yarı sürekliliğinin tanımlarını verelim.

Tanım 1.1.1 $F(\cdot) : \mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ *olsun.* $\forall\, \varepsilon > 0$ *ve* $x \in B(x_0, \delta)$ *için*

$$\alpha\,(F(x), F(x_0)) \leq \varepsilon$$

gerektirmesini sağlayan $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ *varsa* $F(\cdot)$ *k.d.d'ne* x_0 *noktasında süreklidir denir.*

Tanım 1.1.2 $F(\cdot) : \mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ *olsun.* $\forall\, \varepsilon > 0$ *ve* $x \in B(x_0, \delta)$ *için*

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B$$

gerektirmesini sağlayan $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ *varsa* $F(\cdot)$ *k.d.d 'ne* x_0 *noktasında üstten yarı süreklidir denir.*

Tanım 1.1.3 $F(\cdot):\mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ *olsun.* $\forall\ \varepsilon > 0$ *için* $x \in B(x_0, \delta)$ *için*

$$F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon B$$

gerektirmesini sağlayan $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ *varsa* $F(\cdot)$ *k.d.d 'ne* x_0 *noktasında alttan yarı süreklidir denir.*

Hausdorff uzaklığının tanımından , eğer $F(\cdot)$ k.d.d'ü x_0 noktasında sürekli ise, aynı zamanda alttan ve üstten yarı sürekli ve tersine , eğer $F(\cdot)$ k.d.d'ü x_0 noktasında alttan ve üstten yarı sürekli ise x_0 noktasında sürekli olduğu açıktır.

Eğer $F(\cdot):\mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^n)$ k.d.d $\forall\ x \in \mathbb{R}^m$ noktasında sürekli (üstten veya alttan yarı sürekli) ise , $F(\cdot)$ k.d.d'ne $\mathbb{R}^m$ uzayında sürekli (üstten veya alttan yarı sürekli) k.d.d denir.

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere , $x(\cdot):[a,b] \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonlar uzayını $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ ile göstereceğiz. $x(\cdot) \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun normunu da

$$\|x(\cdot)\| = \max_{t\in[a,b]} \|x(t)\|$$

olarak tanımlayacağız.

Sonraki araştırmalarda gerekecek bir önermeyi sunalım.

Önerme 1.1.1 [53] $x(\cdot):[a,b] \to \mathbb{R}^n$ *integrallenebilir fonksiyon* , $M \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt küme* , $\forall\ t \in [a,b]$ *için* $x(t) \in M$ *olsun. Bu durumda*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x(t)dt \in co\ M$$

dir.

Kanıt. Kabul edelim ki

$$k = \frac{1}{b-a}\int_a^b x(t)dt \notin co\ M$$

olsun. $co\ M$ konveks kompakt küme, $k \notin co\ M$ olduğundan $B(k,\alpha) \cap co\ M = \emptyset$ olacak şekilde $\exists\ \alpha > 0$ vardır. Burada $B(k,\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y-k\| \leq \alpha\}$'dır.

O zaman konveks, kesişmeyen kümelerin ayırma teoremine göre $\exists\ l \in \mathbb{R}^n$ ($l \neq 0$) vektörü vardır öyle ki $\forall\ y \in B(k,\alpha)$ ve $\forall\ z \in co\ M$ için $\langle l, y\rangle \leq \langle l, z\rangle$ olur. $B(k,\alpha) = \{k + \alpha \cdot \xi : \|\xi\| \leq 1\}$ ve $\forall\ t \in [a,b]$ için $f(t) \in co\ M$ olduğundan $\forall\ t \in [a,b]$ için

$$\max_{\|\xi\|\leq 1} \langle l, k + \alpha\cdot\xi\rangle \leq \langle l, f(t)\rangle$$

olur. $\max\limits_{\|\xi\|\leq 1} \langle l, \xi\rangle = \|l\|$ olduğundan $\forall\ t \in [a,b]$ için

$$\langle l, k\rangle + \alpha \cdot \|l\| \leq \langle l, f(t)\rangle$$

olur. Bu eşitsizliği $[a,b]$ üzerinde integrallersek

$$\begin{aligned}(\langle l, k\rangle + \alpha\cdot\|l\|)\cdot(b-a) &\leq \int_a^b \langle l, f(t)\rangle\, dt = \left\langle l, \int_a^b f(t)dt\right\rangle \\ &= \langle l, (b-a)\cdot k\rangle = (b-a)\cdot\langle l, k\rangle\end{aligned}$$

olur. $(b-a) > 0$ olduğundan

$$\langle l, k\rangle + \alpha\cdot\|l\| \leq \langle l, k\rangle$$

ve

$$\alpha\cdot\|l\| \leq 0$$

olur. $\alpha > 0$, $\|l\| > 0$ olduğundan son eşitsizlik yanlıştır yani

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x(t)dt \in co\ M$$

dir. ∎

Şimdi kapalı aralıkta tanımlanmış mutlak sürekli fonksiyonun tanımını verelim.

Tanım 1.1.4 *$f(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ni [a,b]$ aralığının keyfi (a_i, b_i) , $i = 1, 2, \cdots, k$ alt aralıkları için (öyle ki $(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset$ $\forall\ i \neq j$ için)$\sum\limits_{i=1}^{k}(b_i - a_i) < \delta(\varepsilon)$ iken*

$$\left|\sum_{i=1}^{k} f(b_i) - f(a_i)\right| < \varepsilon$$

olursa, $f(\cdot)$ fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon denir.

Açıktır ki eğer $f(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli ise $f(\cdot)$ fonksiyonu $\forall\, x_0 \in (a,b)$ noktasında süreklidir. Bunun tersi doğru değildir. Yani $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyon mutlak sürekli olmayabilir.

Önerme 1.1.2 $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlıyor ise* $x(\cdot)$ *fonksiyonu* $[a,b]$ *aralığında mutlak süreklidir.*

Kanıt. m sayısı $x(\cdot)$ fonksiyonunun Lipschitz sabiti olsun. Yani, $\forall\, t_1, t_2 \in [a,b]$ için

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq m\,|t_1 - t_2| \tag{1.1.2}$$

olsun.

Keyfi $\varepsilon > 0$ ve $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{m}$ olmak üzere $(a_i, b_i) \subset [a,b]$ $i = 1, 2, \cdots, k$ aralıklarını $\forall\, i \neq j$ için $(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset$ ve

$$\sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i) < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{m} \tag{1.1.3}$$

olacak şekilde alalım. O zaman (1.1.2) ve (1.1.3)'den

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} [x(b_i) - x(a_i)] \right\| \leq \sum_{i=1}^{k} \|x(b_i) - x(a_i)\|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{k} m\,|b_i - a_i| = m \sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i) \leq m\frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon$$

olur. Yani $x(\cdot)$ fonksiyonu mutlak süreklidir. ■

Önerme 1.1.3 $x_k(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *fonksiyonları* $\forall\; k = 1, 2, \cdots$ *için mutlak sürekli,* $k \to \infty$ *iken* $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ *düzgün yakınsak,* M *kapalı, sınırlı küme, hemen hemen her* $t \in [a,b]$ *için* $\dot{x}_k\,(t) \in M$ *olsun.Bu durumda* $x_*(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *fonksiyonu mutlak sürekli,* $x_*(\cdot)$ *fonksiyonunun türevlenebilir olduğu noktalarda yani hemen hemen her* $t \in [a,b]$ *için* $\dot{x}_*\,(t) \in co\; M$ *olur.*

Kanıt. Hemen hemen her $t \in [a,b]$ ve $\forall\; k = 1, 2, \cdots$ için $\dot{x}_k\,(t) \in M$ ve M kümesi sınırlı olduğundan , hemen hemen her $t \in [a,b]$, $\forall\; k = 1, 2, \cdots$ için

$\left\|\dot{x}_k\ (t)\right\| \leq l$ olacak biçimde $l > 0$ vardır. O zaman $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$, $\forall\ k = 1, 2, \cdots$ için

$$\|x_k(t_2) - x_k(t_1)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}_k\ (\tau)d\tau \right\| \leq l\ \ |t_2 - t_1| \tag{1.1.4}$$

olur. Eğer $k \to \infty$ iken (1.1.4) eşitliğinde limit alırsak ,

$$\|\ x_*(\ t_2) - x_*(\ t_1)\| \leq l\ \ |t_2 - t_1| \tag{1.1.5}$$

olur. O zaman (1.1.5)'den $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{l}$ alırsak keyfi $(a_i, b_i\ ) \subset [a,b]$ $(i, j = 1, 2, \cdots k)$ $i \neq j$ için $(a_i, b_i\ ) \cap (a_j, b_j) = \emptyset$ ve $\sum\limits_{i=1}^{k}(b_i\ - a_i) \leq \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{l}$ olurken

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{k}[x_*(b_i\ ) - x_*(a_i)] \right\| &\leq \sum_{i=1}^{k} \|x_*(b_i\ ) - x_*(a_i)\| \leq \sum_{i=1}^{k} l\ (b_i\ - a_i) \\ &= l\ \sum_{i=1}^{k}(b_i\ - a_i) \leq l\frac{\varepsilon}{l} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Yani $x_*(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu mutlak süreklidir.

Hemen hemen her $t \in [a,b]$ için $\dot{x}_k\ (t) \in M$, M kapalı sınırlı olduğundan Önerme1.1.1.'e göre $\forall\ t \in (a,b)$, $\forall\ h \in (0, \alpha)$ için ($0 < \alpha < b - t$)

$$q_k = \frac{x_k(t+h) - x_k(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_{t}^{t+h} \dot{x}_k\ (s)ds \in co\ M$$

olur.$k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$, $co\ M$ kapalı sınırlı olduğundan $\forall\ h \in (0, \alpha)$ için

$$\lim_{k \to \infty} q_k = \frac{x_*(t+h) - x(t)}{h} \in co\ M \tag{1.1.6}$$

olduğunu elde ederiz. Eğer $t \in (a,b)$ noktası $x_*(\cdot)$ fonksiyonunun türevlenebilir noktası ise ($x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olduğundan, $[a,b]$'de hemen hemen türevlenebilir fonksiyondur (bkz [42])), (1.1.6)'dan

$$\dot{x}_*\ (t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{x_*(t+h) - x(t)}{h} \in co\ M$$

olur. Yani hemen hemen her $t \in [a,b]$ için $\dot{x}_*\ (t) \in co\ M$ dir. ∎

$A \subset \mathbb{R}$ için $meas(A)$ A kümesinin ölçümünü gösterir.

Önerme 1.1.4 *$h(\cdot):[a,b]\to\mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyon , $\forall\ t\in[a,b]$ için*

$$x(t)=\int_a^t h(\tau)d\tau$$

olsun. Bu durumda $x(\cdot):[a,b]\to\mathbb{R}$ mutlak sürekli fonksiyondur.

Kanıt. Kabul edelim ki $\forall\ \varepsilon>0$, $\forall\ (a_i,b_i)\subset[a,b]$ $i,j=1,2,\cdots,k$ aralıkları için $(a_i,b_i)\cap(a_j,b_j)=\emptyset\ i\neq j$ olsun.O zaman

$$meas\left(\bigcup_{i=1}^{k}(a_i,b_i)\right)=\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i) \tag{1.1.7}$$

olur. Keyfi $\varepsilon>0$ için $meas\ (A)<\delta(\varepsilon)$ olmak üzere $\forall\ A\subset[a,b]$ kümesi için

$$\left|\int_A h(\tau)d\tau\right|<\varepsilon \tag{1.1.8}$$

koşulunu sağlayan $\exists\ \delta(\varepsilon)>0$ vardır.(bkz [42]) Açıktır ki,

$$\left|\sum_{i=1}^{k}(x(b_i)-x(a_i))\right|=\left|\sum_{i=1}^{k}\int_{a_i}^{b_i}h(\tau)d\tau\right| \tag{1.1.9}$$

dir. Eğer $A=\bigcup\limits_{i=1}^{k}(a_i,b_i)$ dersek o zaman (1.1.9)'dan

$$\left|\sum_{i=1}^{k}(x(b_i)-x(a_i))\right|=\left|\int_A h(\tau)d\tau\right| \tag{1.1.10}$$

olur. Eğer $\sum\limits_{i=1}^{k}(b_i-a_i)<\delta(\varepsilon)$ olursa o zaman (1.1.7) , (1.1.8) ve (1.1.10)'dan $\left|\sum\limits_{i=1}^{k}(x(b_i)-x(a_i))\right|<\varepsilon$ elde edilir. Dolayısıyla $x(\cdot)$ fonksiyonu mutlak sürekli olur.
■

Önerme 1.1.5 *$h(\cdot):[a,b]\to\mathbb{R}^n$ integrallenebilir fonksiyon , $\forall\ t\in[a,b]$ için*

$$x(t)=\int_a^t h(\tau)d\tau$$

olsun. O zaman $x(\cdot):[a,b]\to\mathbb{R}^n$ mutlak sürekli fonksiyondur.

Kanıt. $h(\cdot) : (h_1(\cdot), h_2(\cdot), \cdots, h_n(\cdot))$ $x(\cdot) = (x_1(\cdot), x_2(\cdot), \cdots, x_n(\cdot))$ olsun. O zaman

$$x_p(t) = \int_a^t h_p(\tau)d\tau \ , \quad p = 1, 2, \cdots, n$$

olur. Önerme 1.1.4. 'e göre $\forall$ $p = 1, 2, \cdots, n$ için $x_p : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları mutlak süreklidir. O zaman $\frac{\varepsilon}{n}$, $(a_i, b_i) \subset [a, b]$, $i = 1, 2, \cdots, k$ aralıkları için $i \neq j$ iken $(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset$ ve $\sum\limits_{i=1}^{k} (b_i - a_i) < \delta_p(\varepsilon)$ olurken

$$\left|\sum_{i=1}^{k}(x_p(b_i) - x_p(a_i))\right| < \frac{\varepsilon}{n} \tag{1.1.11}$$

olacak biçimde $\delta_p(\varepsilon) > 0$ vardır. $\delta_*(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon), \cdots, \delta_n(\varepsilon)\}$ olsun. O zaman $(a_i, b_i) \subset [a, b]$, $i = 1, 2, \cdots, k$ aralıkları için ($i \neq j$ iken $(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset$) $\sum\limits_{i=1}^{k} (b_i - a_i) < \delta_*(\varepsilon)$ olurken $\forall\, p = 1, 2, \cdots, n$

$$\left|\sum_{i=1}^{k}(x_p(b_i) - x_p(a_i))\right| < \frac{\varepsilon}{n} \tag{1.1.12}$$

olur. O zaman $(a_i, b_i) \subset [a, b]$ aralıkları için $i \neq j$ iken $(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset$ ve $\sum\limits_{i=1}^{k} (b_i - a_i) < \delta_*(\varepsilon)$ olurken (1.1.12)'ye göre

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}(x(b_i) - x(a_i))\right\| \leq \sum_{p=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{k}(x_p(b_i) - x_p(a_i))\right| \leq \sum_{p=1}^{n}\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

olur. Bu ise $x(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun mutlak sürekli olmasıdır. ∎

Şimdi diferansiyel içermelerin çözümlerinin özelliklerinin araştırılmasında önemli olacak bir teorem sunalım.

Teorem 1.1.1 *(Gronwall Eşitsizliği)* $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\psi(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}$ *negatif olmayan integrallenebilir,* $h(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}$, $u(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sürekli* , $h(\cdot)$*-negatif olmayan fonksiyonlar olsun.* $\forall$ $t \in [a, b]$ *için*

$$u(t) \leq h(t) + \int_a^t \psi(\tau)u(\tau)d\tau \tag{1.1.13}$$

ise $\forall\, t \in [a,b]$ *için*

$$u(t) \leq h(t) + c \int_a^t \psi(\tau)h(\tau)d\tau \qquad (1.1.14)$$

olur.

Burada $c = \exp(\int_a^b \psi(\tau)d\tau)$ dir.

Kanıt. $\forall\, t \in [a,b]$ için

$$\omega(t) = \int_a^t \psi(\tau)u(\tau)d\tau \quad , \quad p(t) = \int_a^t \psi(\tau)d\tau \qquad (1.1.15)$$

olsun. $\psi(\cdot) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir , $u(\cdot) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olduğundan dolayı integrallenebilirdirler ve Önerme 1.1.4'e göre $\omega(\cdot) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $p(\cdot) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları mutlak süreklidir ve $\forall\, t \in [a,b]$ için $p(t) \geq 0$ dır. Keyfi $t \in [a,b]$ için

$$\int_a^t e^{-p(\tau)}[\dot{\omega}(\tau) - \psi(\tau)\omega(\tau)]d\tau = e^{-p(t)}\omega(t) \qquad (1.1.16)$$

olduğunu gösterelim. Gerçekten (1.1.15)'ten hemen hemen her $\tau \in [a,b]$ için $\dot{p}(\tau) = \psi(\tau)$ dir. O zaman

$$\begin{aligned}\int_a^t e^{-p(\tau)}[\dot{\omega}(\tau) - \psi(\tau)\omega(\tau)]d\tau &= \int_a^t [e^{-p(\tau)}\,\dot{\omega}(\tau) - \psi(\tau)\,\dot{p}(\tau)e^{-p(\tau)}]d\tau \\ &= \int_a^t d(e^{-p(\tau)}\omega(\tau)d\tau = e^{-p(t)}\omega(t)\end{aligned}$$

olur. Yani (1.1.16) doğrudur. (1.1.15)'den hemen hemen her $\tau \in [a,b]$ için

$$\dot{\omega}(\tau) = \psi(\tau)u(\tau) \qquad (1.1.17)$$

(1.1.13) ve (1.1.15)'den $\forall\, t \in [a,b]$ için

$$u(t) \leq h(t) + \omega(t) \qquad (1.1.18)$$

$\forall\ t \in [a, b]$ için $\psi(t) \geq 0$ olduğundan, (1.1.18)'den $\forall\ t \in [a, b]$ için

$$\psi(t)u(t) \leq \psi(t)h(t) + \psi(t)\omega(t) \tag{1.1.19}$$

dir. O zaman (1.1.17) ve (1.1.19)'den hemen hemen her $t \in [a, b]$ için

$$\dot{\omega}\ (\tau) \leq \psi(t)\omega(t) + \psi(t)h(t)$$

dir. Buradan hemen hemen her $t \in [a, b]$ için

$$e^{-p(t)}[\dot{\omega}\ (t) - \psi(t)\omega(t)] \leq e^{-p(t)}\psi(t)h(t)$$

olur. Son eşitsizlikten $\forall\ t \in [a, b]$ için

$$\int_a^t e^{-p(\tau)}[\dot{\omega}\ (\tau) - \psi(\tau)\omega(\tau)]d\tau \leq \int_a^t e^{-p(\tau)}\psi(\tau)h(\tau)d\tau \tag{1.1.20}$$

(1.1.16) ve (1.1.20)'den $\forall\ t \in [a, b]$ için

$$e^{-p(t)}\omega(t) \leq \int_a^t e^{-p(\tau)}\psi(\tau)h(\tau)d\tau \tag{1.1.21}$$

elde ederiz. Şimdi $\forall\ \tau \in [a, b]$ için $\psi(\tau) \geq 0$, $h(\tau) \geq 0$ olduğundan $\forall\ \tau \in [a, b]$ için $\psi(\tau)\ h(\tau) \geq 0$, $p(t) = \int_a^t \psi(\tau)d\tau \geq 0$ ve $p(.) : [a, b] \to [0, \infty)$ fonksiyonu artan fonksiyondur. O zaman buradan $\forall\ t \in [a, b]$ için

$$e^{p(t)} \leq e^{p(b)} = \exp(\int_a^b \psi(\tau)d\tau) \tag{1.1.22}$$

ve

$$e^{-p(t)} \leq 1 \tag{1.1.23}$$

ve (1.1.23)'den

$$\int_a^t e^{-p(\tau)}\psi(\tau)h(\tau)d\tau \leq \int_a^t \psi(\tau)h(\tau)d\tau \tag{1.1.24}$$

olur. O zaman (1.1.21) ve (1.1.24)'den

$$e^{-p(t)}\omega(t) \leq \int_a^t \psi(\tau)h(\tau)d\tau$$

ve

$$\omega(t) \leq e^{p(t)} \int_a^t \psi(\tau)h(\tau)d\tau \tag{1.1.25}$$

olur. Şimdi (1.1.22) ve (1.1.25)'den $\forall\ t \in [a,b]$ için

$$\omega(t) \leq e^{p(b)} \int_a^t \psi(\tau)h(\tau)d\tau \tag{1.1.26}$$

olur. $c = e^{p(b)} = \exp(\int_a^b \psi(\tau)\ d\tau\ )$ olduğunu düşünürsek, o zaman (1.1.26)'dan $\forall$ $t \in [a,b]$ için

$$\omega(t) \leq c \int_a^t \psi(\tau)h(\tau)d\tau \tag{1.1.27}$$

olur. O zaman (1.1.18) ve(1.1.27) 'den $\forall\ t \in [a,b]$ için

$$u(t) \leq h(t) + c \int_a^t \psi(\tau)h(\tau)d\tau$$

olur. Böylece teorem kanıtlanır. ∎

Şimdi ileride kullanılacak bir prekompaktlık teoremi sunalım.

$[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $x(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu için

$$\|x(\cdot)\| = \sup_{t \in [t_0, t_1]} \|x(t)\|$$

olsun. $B([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ ile $x(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ sınırlı fonksiyonların uzayını gösterelim. Yani $\forall\ x(\cdot) \in B([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ için $\|x(\cdot)\| \leq M(x(\cdot))$ olan $M(x(\cdot)) > 0$ vardır.

Tanım 1.1.5 $\omega_{[t_0,t_1]}(x(\cdot)) = \sup_{\tau_1, \tau_2 \in [t_0, t_1]} \|x(\tau_1) - x(\tau_2)\|$ *sayısına* $x(\cdot)$ *fonksiyonunun* $[t_0, t_1]$ *aralığında osilasyonu denir.*

Tanım 1.1.6 *$\mathcal{H} \subset B([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall\ x(\cdot) \in \mathcal{H}$ için*

$$\omega_{[\tau_i,\tau_{i+1}]}(x(\cdot)) \leq \varepsilon \ , \quad i = 0,1,\cdots,k-1$$

olacak biçimde $[t_0,t_1]$ aralığının $D = \{t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k = t_1\}$ bölüntüsü varsa, o zaman $\mathcal{H}$ kümesine aynı osilasyonlu fonksiyonlar kümesi denir.

$B([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ uzayında prekompaktlık teoremini ifade edelim.

Teorem 1.1.2 *$\mathcal{H} \subset B([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlar kümesi aşağıdaki koşulları sağlasın.*

***a)** $\forall\ x(\cdot) \in \mathcal{H}$ için $\|x(\cdot)\| \leq R$ olacak şekilde $R > 0$ vardır.*

***b)** $\mathcal{H}$ kümesi aynı osilasyonlu fonksiyonlar kümesidir.*

O zaman $\mathcal{H}$ kümesi $B([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$-de prekompakttır. Yani $\forall\ m = 1,2,\cdots$ için $x_m(\cdot) \in \mathcal{H}$ olan $\{x_m(\cdot)\}_{m=1}^{\infty}$ dizisinden $[t_0,t_1]$ aralığında bir $x_* \in B([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna düzgün yakınsayan alt dizi seçilebilir. Bir başka deyişle, cl $\mathcal{H}$ kümesi $B([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$-de kompakttır.

1.2 Küme Değerli Dönüşümlerin Selektörleri

Bu kesimde bazı tür k.d.d'lerin sürekli selektörlerinin varlığını göstereceğiz. Vereceğimiz teoremler diferansiyel içermelerin çözümlerinin varlığı kanıtlanırken sıkça kullanılır. Önce k.d.d'ün selektörünün tanımını verelim.

Tanım 1.2.1 *$D \subset \mathbb{R}^m$, $F(\cdot) : D \to K(\mathbb{R}^n)$ k.d.d olsun. $\forall\ x \in D$ için $f(x) \in F(x)$ koşulunu sağlayan $f(\cdot) : D \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna $F(\cdot)$ k.d.d 'ünün D kümesinde belirlenmiş selektörü denir.*

Alttan yarı sürekli $F(\cdot) : D \to K(\mathbb{R}^n)$ $(D \subset \mathbb{R}^m)$ k.d.d.'ünün sürekli selektörlerinin varlığı için aşağıdaki Michael teoremi doğrudur.

Teorem 1.2.1 [5] *(Michael) $D \subset \mathbb{R}^m$ kompakt küme , $F(\cdot) : D \to KV(\mathbb{R}^n)$ k.d.d.'ü alttan yarı sürekli olsun. O zaman $F(\cdot)$ k.d.d.'ünün D kümesinde tanımlanmış sürekli selektörü vardır.*

Üstten yarı sürekli k.d.d.'lerin sürekli selektörleri olmayabilir. Ancak bu tür k.d.d.'lerin her zaman $\varepsilon-$yaklaşık sürekli selektörleri vardır. Şimdi $\varepsilon-$yaklaşık selektörün tanımını verelim.

$gr^{\varepsilon}F(\cdot)$ ile $grF(\cdot)$ kümesinin kapalı $\varepsilon-$ komşuluğunu gösterelim ve

$$gr^{\varepsilon}F(\cdot) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : dist\ ((x,y), grF(\cdot)) \leq \varepsilon\}$$

olarak tanımlayalım.

Tanım 1.2.2 *$D \subset \mathbb{R}^m$, $F(\cdot) : D \to K(\mathbb{R}^n)$ k.d.d. , $\varepsilon > 0$ olsun. $\forall\ x \in D$ için $(x,\ f(x)) \in gr^{\varepsilon}F(\cdot)$ koşulunu sağlayan $f(\cdot) : D \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna $F(\cdot)$ k.d.d.'ünün D kümesinde tanımlanmış $\varepsilon-$yaklaşık selektörü denir.*

Aşağıdaki teorem sürekli $\varepsilon-$yaklaşık selektörün varlığını gösteren bir teoremdir.

Teorem 1.2.2 *$D \subset \mathbb{R}^m$ kompakt küme $F(\cdot) : D \to KV(\mathbb{R}^n)$ üstten yarı sürekli k.d.d. olsun. O zaman $\forall\ \varepsilon > 0$ için $F(\cdot)$ k.d.d.'ünün D kümesinde tanımlanmış sürekli $\varepsilon-$yaklaşık selektörü vardır.*

1.3 Diferansiyel İçermelerin Tanımı ve Çözüm Kavramı Cauchy Problemi

$[a,b] \subset \mathbb{R}$, $F(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ k.d.d. olsun.

$$\frac{dx(t)}{dt} \in F(t, x(t)) \ , \ t \in [a,b] \tag{1.3.1}$$

ifadesine diferansiyel içerme denir. Burada $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ bilinmeyen fonksiyondur.

Şimdi diferansiyel içermenin çözümü tanımını verelim. İki tür çözüm kavramı kullanacağız.

Tanım 1.3.1 *Hemen hemen her $t \in [a,b]$ için (1.3.1) içermesini sağlayan mutlak sürekli $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna (1.3.1) diferansiyel içermesinin çözümü denir.*

Bundan farklı tür tanımlanan çözüm klasik çözümdür.

Tanım 1.3.2 *Keyfi $t \in [a,b]$ için (1.3.1) içermesini sağlayan sürekli diferansiyellenebilir $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna (1.3.1) diferansiyel içermesinin klasik çözümü denir.*

Açıktır ki, her klasik çözüm aynı zamanda çözümdür.

Eğer (1.3.1) diferansiyel içermesinde $F(\cdot)$ k.d.d.'ü özel olarak tek değerli ise, o zaman (1.3.1)diferansiyel içermesi diferansiyel denkleme dönüşür. Yani keyfi $(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ için $F(t,x) = \{f(t,x)\}$ ise, o zaman (1.3.1) diferansiyel içermesi

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x(t)) \ , \ t \in [a,b]$$

diferansiyel denklemine dönüşür.

(1.3.1) diferansiyel içermesinin $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in [a,b]$ koşulunu sağlayan çözümlerinin bulunması problemine Cauchy problemi denir. Somut olarak, Cauchy problemini aşağıdaki gibi göstereceğiz.

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &\in F(t,x(t)) \ , \ t \in [a,b] \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

(1.3.2) probleminin çözümler kümesini $X(t_0,x_0)$ ile gösterelim ve $t \in [a,b]$ için

$$X(t;t_0,x_0) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in X(t_0,x_0)\}$$
$$H(t_0,x_0) = \{(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n : x \in X(t;t_0,x_0)\}$$

'ı tanımlayalım. $X(t;t_0,x_0)$ kümesine (1.3.2) diferansiyel içermesinin (t_0,x_0) başlangıç noktası için t anındaki erişim kümesi, $H(t_0,x_0)$ kümesine ise integral tüneli denir.

Cauchy problemi aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\dot{x}(t) \in F(t,x(t)) \ , \ t \in [a,b] \tag{1.3.3}$$

$$x(t_0) \in X_0 \tag{1.3.4}$$

Burada $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ dir. Yani (1.3.3) D.I.'inin $t_0 \in [a,b]$ zamanında X_0 kümesinde olacak çözümü aranır.(1.3.3) ve (1.3.4) Cauchy probleminin çözümler kümesini $X(t_0, X_0)$ ile gösterelim.

$$X(t; t_0, X_0) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in X(t_0, X_0)\}$$
$$H(t_0, X_0) = \{(t, x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n : x \in X(t; t_0, X_0)\}$$

olsun. O zaman $X(t; t_0, X_0)$ kümesine (1.3.3) D.I.'nin (t_0, X_0) başlangıç kümesi için t zamanındaki erişim kümesi, $H(t_0, X_0)$'a ise integral tüneli denir.

2 KONVEKS DEĞERLİ DİFERANSİYEL İÇERMELER İÇİN CAUCHY PROBLEMİ

Bu bölümde sağ tarafı kompakt konveks değerli alttan yarı sürekli küme değerli dönüşüm olan diferansiyel içermelerin çözümlerini, diferansiyel içermeler için $\delta-$çözüm kavramı ile özelliklerini ve sağ tarafı kompakt konveks değerli üsten yarı sürekli küme değerli dönüşüm olan diferansiyel içermelerin çözümlerini inceleyeceğiz.

2.1 Sağ Tarafı Kompakt Konveks Değerli Alttan Yarı Sürekli Küme Değerli Dönüşümler Olan Diferansiyel İçermelerin Çözümü

Bu kesimde, sağ tarafı konveks kompakt değerli alttan yarı sürekli k.d.d.'ler olan diferansiyel içermelerin çözümünün varlığını inceleyeceğiz. Konveks kompakt değerli k.d.d.'lerin sürekli selektörünün varlığını araştırmada Michael teoremini kullanacağız.

Teorem 2.1.1 $F(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to KV(\mathbb{R}^n)$ *k.d.d.'ü* $[a,b] \times \mathbb{R}^n$*'de alttan yarı sürekli,* $t_0 \in (a,b)$ *olsun. Bu durumda* $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ *aralığında (1.3.2) Cauchy probleminin çözümü varolacak şekilde* $\exists\ \delta > 0$ *vardır.*

Kanıt. $r > 0$ için $M = \{(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \le r\}$ olsun. O zaman $M \subset [a,b] \times \mathbb{R}^n$ kompakt küme $\forall\ (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ için $F(t,x) \in KV(\mathbb{R}^n)$, $(t,x) \to F(t,x)$ k.d.d.'ü M kümesinde alttan yarı sürekli olduğundan Michael teoremine göre $(t,x) \to F(t,x)$ k.d.d.'nün $f(\cdot) : M \to \mathbb{R}^n$ sürekli selektörü vardır. Yani $\forall\ (t,x) \in M$ için $f(t,x) \in F(t,x)$ olacak şekilde M kümesinde sürekli $(t,x) \to f(t,x)$ fonksiyonu vardır. Şimdi $\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x(t))$, $t \in [a,b]$ diferansiyel denkleminin $x(t_0) = x_0$ koşulunu sağlayan çözümünün varlığını araştıralım. $(t,x) \to f(t,x)$ fonksiyonu M kümesi üzerinde sürekli , $(t_0,x_0) \in int\ M$ olduğundan, Peano teoremine göre (bkz [33])

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x(t)) \ \ x(t_0) = x_0$$

Cauchy probleminin $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ aralığında en az bir çözümü varolacak şekilde $\exists\, \delta > 0$ vardır. Üstelik $\forall\, t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ için $(t, x(t)) \in M$ olur.$\forall\, t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ için $f(t, x(t)) \in F(t, x(t))$ olduğundan çözüm hemen hemen her $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ için $\frac{dx(t)}{dt} \in F(t, x(t))$ koşulunu sağlar ve aynı zamanda (1.3.2) Cauchy probleminin çözümü olur. ■

2.2 Diferansiyel İçermeler için δ -Çözüm Kavramı, δ -Çözümlerin Özellikleri

Bu kesimde sağ tarafı konveks kompakt değerli üstten yarı sürekli k.d.d.'ler olan D.I.'ler için (1.3.2) Cauchy probleminin çözümünün varlığını araştıracağız. Önce D.I.'ler için $\delta-$çözüm tanımını verelim.

$A \subset \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ için A^δ ile A kümesinin kapalı δ komşuluğunu gösteririz. O zaman $\delta > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ için $t^\delta = \{\tau \in \mathbb{R} : |\tau - t| \leq \delta\}$, $x^\delta = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \delta\}$ olur. Açıktır ki $x^\delta = B(x, \delta)$ dır. $(t, x) \rightarrow F(t, x)$, ($(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$) k.d.d.'ü ve $\delta > 0$ için

$F(t^\delta, x^\delta) = \{f \in F(\tau, y) : \tau \in t^\delta \ , \ y \in x^\delta\}$ olur

$F_\delta(t, x) = [co\ F(t^\delta, x^\delta)]^\delta$ ile konveks zarfın δ-komşuluğunu göstereceğiz. Bu durumda $F_\delta(t, x) = \{y \in \mathbb{R}^n : dist(y, co\ F(t^\delta, x^\delta)) \leq \delta\}$ dır.

$(t, x) \rightarrow F_\delta(t, x)$ k.d.d.'ünün bir özelliğini inceleyelim.

Önerme 2.2.1 *$E \subset [a, b] \times \mathbb{R}^n$ kompakt küme, $F(\cdot) : E \rightarrow KV(\mathbb{R}^n)$ üstten yarı sürekli k.d.d. olsun.Bu durumda $\forall\ \varepsilon > 0$, $\delta \in [0,\ \delta(\varepsilon))$ için $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ $((t, x) \in E)$ k.d.d.'ünün E kümesinde grafiğinin ε komşuluğu $(t, x) \rightarrow F_\delta(t, x)$ $((t, x) \in E)$ k.d.d.'ünün grafiğini içerecek biçimde $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ vardır. Yani*

$$\begin{aligned} gr_E F_\delta(\cdot) &= \{(t, x, y) \in E \times \mathbb{R}^n : y \in F_\delta(t, x)\} \subset \{(t, x, y) \in E \times \mathbb{R}^n : y \in F(t, x)\} + \varepsilon B^* \\ &= gr_E F(\cdot) + \varepsilon B^* \end{aligned}$$

dir.

Burada $B^* = \{b \in \mathbb{R}^{2n+1} : \|b\| \leq 1\}$ dir.

Kanıt. Kabul edelimki $\exists\ \varepsilon_* > 0$, $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi, $(t_i, x_i, y_i) \in gr_E F_{\delta_i}(\cdot)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ olmak üzere $i \to \infty$ iken $\delta_i \to 0$, $\forall\ i = 1, 2, \cdots$ için

$$(t_i, x_i, y_i) \in gr_E F_{\delta_i}(\cdot) \text{ ve } (t_i, x_i, y_i) \notin gr_E F(\cdot) + \varepsilon_* B^* \tag{2.2.1}$$

olacak biçimde $\{(t_i, x_i, y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi vardır. E kompakt küme, $\forall\ i$ için $(t_i, x_i) \in E$ olduğundan , genelliği bozmadan $i \to \infty$ iken $(t_i, x_i) \to (t_*, x_*)$ ve $(t_*, x_*) \in E$ olduğunu kabul edelim. $F(\cdot)$ k.d.d.'ü E'de üstten yarı sürekli olduğundan $\frac{\varepsilon_*}{8}$, keyfi $|t - t_*| < \delta_*$, $\|x - x_*\| < \delta_*$ için

$$F(t, x) \subset F(t_*, x_*) + \frac{\varepsilon_*}{8} B \tag{2.2.2}$$

olacak biçimde $\delta_* \in (0, \frac{\varepsilon_*}{4})$ vardır. Öte yandan $i \to \infty$ iken $\delta_i \to 0$, $t_i \to t_*$, $x_i \to x_*$ olduğundan $\forall\ i \geq N_1$ için

$$\delta_i < \frac{\varepsilon_*}{8}\ ,\ t_i^{\delta_i} \subset t_*^{\delta_*}\ ,\ x_i^{\delta_i} \subset x_*^{\delta_*} \tag{2.2.3}$$

olacak biçimde $\exists\ N_1 > 0$ vardır. O zaman (2.2.2) ve (2.2.3)'den $\forall\ i \geq N_1$ için

$$F(t_i^{\delta_i}, x_i^{\delta_i}) \subset F(t_*, x_*) + \frac{\varepsilon_*}{8} B \tag{2.2.4}$$

elde ederiz. $F(t_*, x_*)$ ve B kümeleri konveks olduğundan (2.2.4)'den $\forall\ i \geq N_1$ için

$$coF(t_i^{\delta_i}, x_i^{\delta_i}) \subset F(t_*, x_*) + \frac{\varepsilon_*}{8} B$$

olur. $\delta_i < \frac{\varepsilon_*}{8}$ olduğundan dolayı $\forall\ i \geq N_1$ için

$$[coF(t_i^{\delta_i}, x_i^{\delta_i})]^{\delta_i} \subset F(t_*, x_*) + \frac{\varepsilon_*}{4} B \tag{2.2.5}$$

olur. $F_{\delta_i}(t_i, x_i) = [coF(t_i^{\delta_i}, x_i^{\delta_i})]^{\delta_i}$ olduğu için (2.2.5)'den $\forall\ i \geq N_1$ için

$$F_{\delta_i}(t_i, x_i) \subset F(t_*, x_*) + \frac{\varepsilon_*}{4} B \tag{2.2.6}$$

olur. $\forall\ i$ için $(t_i, x_i, y_i) \in gr_E F_{\delta_i}(.)$ olduğundan $\forall\ i$ için $y_i \in F_{\delta_i}(t_i, x_i)$ olur. O zaman buradan ve (2.2.6)'dan $\forall\ i \geq N_1$ için

$$y_i \in F(t_*, x_*) + \frac{\varepsilon_*}{4} B$$

olur. Buradan $\forall\ i \geq N_1$ için

$$\|y_i - f_i\| \leq \frac{\varepsilon_*}{4} \tag{2.2.7}$$

olan $f_i \in F(t_*, x_*)$ vardır. (2.2.7)'den

$$\|(t_*, x_*, y_i) - (t_*, x_*, f_i)\| = \|y_i - f_i\| \leq \frac{\varepsilon_*}{4} \tag{2.2.8}$$

olur. $\forall\ i \geq N_1$ için $(t_*, x_*, f_i) \in gr_E F(\cdot)$ olduğundan (2.2.8)'den $\forall\ i \geq N_1$ için

$$(t_*, x_*, y_i) \in gr_E F(.) + \frac{\varepsilon_*}{4} B^* \tag{2.2.9}$$

olur. $\delta_* \in (0, \frac{\varepsilon_*}{4})$ olduğundan (2.2.3)'den $\forall\ i \geq N_1$ için

$$|t_i - t_*| \leq \frac{\varepsilon_*}{4}\ ,\ \|x_i - x_*\| \leq \frac{\varepsilon_*}{4}$$

O zaman $\forall\ i \geq N_1$ için

$$\|(t_i, x_i, y_i) - (t_*, x_*, y_i)\| \leq |t_i - t_*| + \|x_i - x_*\| \leq \frac{\varepsilon_*}{2} \tag{2.2.10}$$

dir. O zaman (2.2.9) ve(2.2.10)'dan $\forall\ i \geq N_1$ için

$$(t_i, x_i, y_i) \in gr_E F(\cdot) + (\frac{\varepsilon_*}{4} + \frac{\varepsilon_*}{2}) B^* = gr_E F(.) + \frac{3}{4}\varepsilon_* B^* \tag{2.2.11}$$

(2.2.1) ve (2.2.11) çelişir, yani varsayımımız doğru değildir. Kanıt biter. ∎

Şimdi (1.3.1) D.I'si için δ-çözüm kavramını verelim.

Tanım 2.2.1 *Hemen hemen her $t \in [a, b]$ için $\dot{x}\ (t) \in F_\delta(t, x(t))$ D.I'ni sağlayan mutlak sürekli $x(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna (1.3.1) D.I.'nin δ-çözümü denir.*

Aşağıda δ-çözümlerin bazı özellikleri incelenmiştir.

Önerme 2.2.2 *$[a, b] \subset \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ açık küme , $F(\cdot) : G \to KV(\mathbb{R}^n)$ üstten yarı sürekli k.d.d. olsun. Kabul edelim ki $gr\ x_k(\cdot) = \{(t, x_k(t)) : t \in [a, b]\} \subset G\ \ \forall$ $k = 1, 2, \cdots$ olan , $x_k(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları (1.3.1) D.I.'nin δ_k çözümleri olsun ve $k \to \infty$ iken $\delta_k \to 0$, $[a, b]$ aralığında $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ düzgün yakınsak, $gr\ x_*(\cdot) \subset G$ olsun.Bu durumda $x_*(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu (1.3.1) diferansiyel içermesinin çözümüdür.*

Kanıt. Keyfi $t_0 \in [a,b]$, $\varepsilon > 0$ alalım ve sabitleyelim. $gr\ x_*(\cdot) \subset G$ olduğundan $(t_0, x_*(t_0)) \in G$ olur. $F(\cdot)$ k.d.d.'ü G açık kümesinde üstten yarı sürekli olduğundan

$$G_0 = \{(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| < 2\eta\ ,\ \|x - x_*(t_0)\| < 3\eta\}$$

kümesindeki (t,x)'ler için

$$F(t,x) \subset F(t_0, x_*(t_0))^{\varepsilon} \tag{2.2.12}$$

olacak biçimde $\exists\ \eta > 0$ vardır. Burada $F(t_0,x_*(t_0))^{\varepsilon} = F(t_0,x_*(t_0)) + \varepsilon B$ dir. $x_k(\cdot)$ fonksiyonları sürekli ve düzgün olarak $x_*(\cdot)$ fonksiyonuna yakınsak olduklarından, $x_*(\cdot)$ fonksiyonu süreklidir. Gerçekten $t_* \in [a,b]$ alırsak $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ olduğundan $\frac{\varepsilon}{3}$ için $\forall\ k \geq K_1$ ve $t \in [a,b]$ için

$$\|x_k(t) - x_*(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.2.13}$$

olacak şekilde $K_1 > 0$ vardır.

$\forall\ k = 1, 2, \cdots$ için $x_k(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları süreklidir. Keyfi $k_* \geq K_1$ alalım. Bu durumda $\forall\ t \in [t_* - \delta_*, t_* + \delta_*]$ için

$$\|x_{k_*}(t_*) - x_{k_*}(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.2.14}$$

olacak biçimde $\delta_* = \delta(\varepsilon, k_*) > 0$ vardır.

O zaman (2.2.13) ve (2.2.14)'den $\forall\ t \in [t_* - \delta_*, t_* + \delta_*]$ için

$$\begin{aligned}\|x_*(t) - x_*(t_*)\| &\leq \|x_*(t) - x_{k_*}(t)\| + \|x_{k_*}(t) - x_{k_*}(t_*)\| + \|x_{k_*}(t_*) - x_*(t_*)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

olur.Yani $\forall\ \varepsilon > 0$ için $t \in [t_* - \delta_*, t_* + \delta_*]$ iken $\|x_*(t) - x_*(t_*)\| \leq \varepsilon$ olan $\delta_* > 0$ vardır. Bu ise $x_*(\cdot)$ fonksiyonunun t_* noktasında sürekli olmasıdır. $t_* \in [a,b]$ keyfi sabitlenmiş nokta olduğundan $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında süreklidir.

$k \to \infty$ iken $\delta_k \to 0^+$, $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ düzgün yakınsak, $x_*(\cdot)$ fonksiyonu sürekli olduğundan $\forall\ k \geq K_0$, $t \in (t_0 - \gamma, t_0 + \gamma)$ (yani $|t - t_0| < \gamma$) için

$$\|x_k(t) - x_*(t)\| < \eta\ ,\ \|x_*(t) - x_*(t_0)\| < \eta \tag{2.2.15}$$

olacak şekilde $\gamma \in (0,\eta)$ ve $k_0 > 0$ vardır. $\delta_k < \min\{\eta,\varepsilon\}$ seçelim.(2.2.12) ve (2.2.15)'den $\delta = \delta_k$, $k \geq k_0$, $|t-t_0| < \gamma < \eta$ olurken

$$t^\delta \subset t_0^{2\eta} \ , (x_k(t))^\delta \subset (x_*(t_0))^{3\eta} \ , F(t^\delta,(x_k(t))^\delta) \subset F(t_0,x_*(t_0))^\varepsilon \qquad (2.2.16)$$

olur.

Gerçekten $|t-t_0| < \eta$ ve $\forall\tau \in t^\delta$ için $|\tau - t| < \delta$ olur. $\delta = \delta_k < \eta$ olduğundan $|\tau - t_0| \leq |\tau - t| + |t-t_0| < 2\eta$, yani $\tau \in t_0^{2\eta}$ olur. $\forall y \in (x_k(t))^\delta$ için $\|y - x_k(t)\| \leq \delta$, $\delta = \delta_k < \eta$ ve $k \geq k_0$ iken $\|x_k(t) - x_*(t)\| < \eta$, $|t-t_0| < \gamma$ iken $\|x_*(t) - x_*(t_0)\| < \eta$ olduğundan $k \geq k_0$, $\delta = \delta_k$, $|t-t_0| < \gamma$ olurken

$$\|y - x_*(t_0)\| \leq \|y - x_k(t)\| + \|x_k(t) - x_k(t_0)\| + \|x_k(t_0) - x_*(t_0)\| \leq 3\eta$$

yani $y \in (x_*(t_0))^{3\eta}$ olur.

Aynı zamanda $\delta = \delta_k$, $k \geq k_0$, $|t-t_0| < \gamma < \eta$ olduğu zaman $t^\delta \subset t_0^{2\eta}$, $(x_k(t))^\delta \subset (x_k(t_0))^{3\eta}$ olduğundan (2.2.12)'den

$$F(t^\delta,(x_k(t))^\delta) \subset F(t_0,x_*(t_0))^\varepsilon \qquad (2.2.17)$$

olur. $x_k(\cdot)$ fonksiyonları (1.3.1) D.I.-sinin δ_k çözümleri olduğu için hemen hemen her $t \in [a,b]$ için

$$\dot{x}_k\ (t) \in [coF(t^{\delta_k},(x_k(t))^{\delta_k}]^{\delta_k} \qquad (2.2.18)$$

dir. $F(t_0,x_*(t_0))^\varepsilon$ konveks küme, $co\ A^\varepsilon = (co\ A)^\varepsilon$ olduğundan, (2.2.16) ve (2.2.17)'den hemen hemen her $t \in (\ t_0 - \gamma,\ t_0 + \gamma)$ ve $\forall k \geq k_0$ için $\dot{x}_k\ (t) \in [F(t_0,x_*(t_0))]^{(\varepsilon+\delta_k)}$ olur (2.2.15)'e göre $\delta_k < \varepsilon$ dur. O zaman hemen hemen her $t \in (t_0-\gamma, t_0+\gamma)$ ve $\forall k \geq k_0$ için

$$\dot{x}_k\ (t) \in F(t_0,x_*(t_0))^{2\varepsilon} \qquad (2.2.19)$$

dir. $t \in (\ t_0 - \gamma,\ t_0 + \gamma) \subset [a,b]$ aralığında $k \to \infty$ iken düzgün olarak $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$, $F(t_0,x_*(t_0))^{2\varepsilon}$ konveks kompakt küme olduğundan (2.2.18) ve Önerme 1.1.3'e göre $t \in (\ t_0 - \gamma,\ t_0 + \gamma)$ aralığında $x_*(\cdot)$ fonksiyonu mutlak süreklidir ve hemen hemen her $t \in (\ t_0 - \gamma,\ t_0 + \gamma)$ için

$$\dot{x}_*\ (t) \in F(t_0,x_*(t_0))^{2\varepsilon} \qquad (2.2.20)$$

olur. (2.2.19)'a göre $t_0 \in [a,b]$ keyfi sabitlenmiş nokta olduğundan keyfi $\varepsilon > 0$ ve $\tau \in [a,b]$ için $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $(\tau - \gamma_\tau, \tau + \gamma_\tau)$ aralığında mutlak sürekli ve hemen hemen her $t \in (\tau - \gamma_\tau; \tau + \gamma_\tau)$ için

$$\dot{x}_*(t) \in F(\tau, x_*(\tau))^{2\varepsilon} \tag{2.2.21}$$

olacak şekilde $\gamma_\tau > 0$ vardır. $[a,b] \subset \bigcup\limits_{\tau \in [a,b]} (\tau - \gamma_\tau, \tau + \gamma_\tau)$, $[a,b]$ kompakt küme olduğundan $\tau_i \in [a,b]$, $i = 1, 2, \cdots, p$ noktaları

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{p} (\tau_i - \gamma_{\tau_i}, \tau_i + \gamma_{\tau_i}) \tag{2.2.22}$$

olacak biçimde vardır.Üstelik hemen hemen her $t \in (\tau_i - \gamma_{\tau_i}, \tau_i + \gamma_{\tau_i})$ için

$$\dot{x}_*(t) \in F(\tau_i, x_*(\tau_i))^{2\varepsilon} \tag{2.2.23}$$

olur. Eğer $F_* = \bigcup\limits_{i=1}^{p} F(\tau_i, x_*(\tau_i))^{2\varepsilon}$ dersek , o zaman (2.2.21) ve (2.2.22)'den hemen hemen her $t \in [a,b]$ için $\dot{x}_*(t) \in F_*$ olur. $i = 1, 2, \cdots, p$ için $F(\tau_i, x_*(\tau_i))$ kümeleri kapalı sınırlı olduğundan F_* kapalı ve sınırlıdır. F_* kapalı sınırlı olduğundan hemen hemen $t \in [a,b]$ için $\|\dot{x}_*(t)\| \leq r$ olan $r > 0$ vardır. Buradan ise Önerme 1.1.3'deki kanıta benzer olarak , $x_*(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun mutlak sürekli olduğu elde edilir. Eğer $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $\tau \in [a,b]$ noktasında türevlenebilir ise , o zaman (2.2.22)'den keyfi $\varepsilon > 0$ için

$$\dot{x}_*(\tau) \in F(\tau, x_*(\tau))^{2\varepsilon} \tag{2.2.24}$$

olur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\dot{x}_*(\tau) \in F(\tau, x_*(\tau))$ olur. $x_*(\cdot)$ mutlak sürekli olduğundan $[a,b]$ aralığında hemen hemen türevlenebilir ve o zaman (2.2.24)'den hemen hemen her $t \in [a,b]$ için $\dot{x}_*(t) \in F(t, x_*(t))$ olur, yani $x_*(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu (1.3.1) D.I'nin çözümüdür. ■

Bu önermeden çıkan sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Sonuç 2.2.1 $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *açık küme* , $F(\cdot) : G \to KV(\mathbb{R}^n)$ *üstten yarı sürekli k.d.d. olsun.* $\forall k = 1, 2, \cdots$ *için* $x_k(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *fonksiyonlarının (1.3.1) D.I.'nin çözümleri olduğunu kabul edelim.* $grx_k(\cdot) = \{(t, x_k(t)) : t \in [a,b]\} \subset G$,

$k \to \infty$ iken $[a,b]$ aralığında $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$düzgün yakınsak ve gr $x_*(\cdot) \subset G$ ise $x_*(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu (1.3.1) D.I'nin çözümüdür.

Kanıt. Açıktır ki (1.3.1) D.I.'nin çözümü aynı zamanda keyfi $\delta > 0$ için δ çözümdür. $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ $k \to \infty$ iken $\delta_k \to 0^+$ olan bir dizi olsun. O zaman her k için $x_k(\cdot)$ fonksiyonu δ_k çözüm olur ve Önerme 2.2.2'den sonuç elde edilir. ■

Sonuç 2.2.2 *$[a,b] \subset \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ açık küme, $F(\cdot) : G \to K(\mathbb{R}^n)$ üstten yarı sürekli k.d.d. olsun. $\forall k = 1, 2, \cdots$ için $x_k(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonlarının (1.3.1) D.I.'nin çözümleri olduğunu kabul edelim. $grx_k(\cdot) = \{(t, x_k(t)) : t \in [a,b]\} \subset G$, $k \to \infty$ iken $[a,b]$ aralığında düzgün olarak $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$, gr $x_*(\cdot) \subset G$ olsun. Bu durumda $x_*(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $\dot{x}\,(t) \in coF(t, x(t))$ D.I'nin çözümüdür.*

Kanıt. $F(\cdot) : G \to K(\mathbb{R}^n)$ ise o zaman $coF(\cdot) : G \to KV(\mathbb{R}^n)$ olur. $x_k(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları (1.3.1) D.I.'nin çözümleri ise , $\forall(t,x) \in G$ için $F(t,x) \subset coF(t,x)$ olduğundan bu fonksiyonlar aynı zamanda $\dot{x}_k\,(t) \in coF(t, x_k(t))$ D.I.'nin de çözümleridir. Dolayısıyla Sonuç 2.2.1'den kanıt biter. ■

2.3 Sağ Tarafı Konveks Kompakt Değerli Üstten Yarı Sürekli Küme Değerli Dönüşümler Olan Diferansiyel İçermelerin Çözümlerinin Varlığı

Bu kesimde sağ tarafı konveks kompakt değerli k.d.d.'ler olan D.I.'ler için Cauchy probleminin çözümünün varlığını inceleyeceğiz.

Teorem 2.3.1 *$G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ açık küme, $(t_0, x_0) \in G$, $F(\cdot) : G \to KV(\mathbb{R}^n)$ üstten yarı sürekli k.d.d. olsun. Bu durumda*

$$\dot{x}\,(t) \in F(t, x(t)) \ , \ x(t_0) = x_0 \tag{2.3.1}$$

Cauchy probleminin çözümü vardır.

Eğer

$$Z = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t_0 \le t \le t_0 + a_*, \|x - x_0\| \le b_*\} \subset G$$

ise, o zaman (2.3.1) Cauchy probleminin $[t_0, t_0 + d]$ *aralığında çözümü vardır.*

Burada

$$d = \min\{a_*, \frac{b_*}{m}\},\ m = \sup\{\|f\| : f \in F(t,x),\ (t,x) \in Z\}\ dir.$$

Uyarı 2.3.1 $Z^* = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t_0 - a^* \leq t \leq t_0\ ,\ \|x - x_0\| \leq b^*\} \subset G$ *ise, bu durumda (2.3.1) Cauchy probleminin* $[t_0 - d^*, t_0]$ *aralığında çözümü vardır. Burada*

$$d^* = \min\{a^*, \frac{b^*}{m^*}\}\quad ,\ m^* = \sup\{\|f\| : f \in F(t,x),\ (t,x) \in Z^*\}$$

Kanıt. $(t_0, x_0) \in G$, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ açık küme olduğundan

$$Z = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t_0 \leq t \leq t_0 + a_*\ ,\ \|x - x_0\| \leq b_*\} \subset G \tag{2.3.2}$$

olan $a_* > 0$ ve $b_* > 0$ vardır. $Z \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ kompakt küme $F(\cdot) : Z \to KV(\mathbb{R}^n)$ üstten yarı sürekli olduğundan $M = \bigcup_{(t,x)\in Z} F(t,x)$ kümesi kompakt kümedir. (bkz[3]). Dolayısıyla

$$m = \sup\ \{\|f\| : f \in F(t,x),\ (t,x) \in Z\} = \max\ \{\|f\| : f \in M\} < \infty$$

olur.

Buradan $d = \min\{a_*, \frac{b_*}{m}\} > 0$ olur. $k = 1, 2, \cdots$ için $h_k = \frac{d}{k}$, $t_{k,i} = t_0 + i\ h_k$, $i = 0, 1, \cdots, k$ olsun. $x_k(\cdot) : [t_0, t_0 + d] \to \mathbb{R}^n$ Euler yakalşımını belirleyelim. $\forall k$ için $x_k(t_{k,0}) = x_0$ olsun. Açıktır ki keyfi sabitlenmiş k ve $i = 0, 1, \cdots, k$ için $t_{k,i} \in [t_0, t_0 + d]$ dir.

Kabul edelim ki k sabit olsun. O zaman $i = 0, 1, 2, \cdots, k-1$ için $x_k(t_{k,i}) = x_{k,i}$ belirlenmiş ise $x_k(.)$ fonksiyonu $[t_{k,i}, t_{k,i+1}]$ aralığında

$$x_k(t) = x_{k,i} + v_{k,i}(t - t_{k,i}) \tag{2.3.3}$$

gibi belirlenir. Burada $v_{k,i} \in F(t_{k,i}, x_{k,i})$ dir. Şimdi $\forall t \in [t_0, t_0 + d]$ için

$$\begin{aligned} &\|x_k(t) - x_0\| \leq m(t - t_0) \\ &gr x_k(\cdot) = \{(t, x_k(t)) : t \in [t_0, t_0 + d]\} \subset Z \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

olduğunu gösterelim. ($(t_0, x_0) \in Z$), (2.3.3)'e göre $t \in [t_{k,0}, t_{k,1}]$ olurken

$$x_k(t) = x_0 + v_{k,0}(t - t_0) \tag{2.3.5}$$

olur. Burada $v_{k,0} \in F(t_0, x_0)$ ve $(t_0, x_0) \in Z$ olduğundan (2.3.2)'ye göre $\|v_{k,0}\| \leq m$ dir. Bu durumda (2.3.5)'den $\forall t \in [t_0, t_{k,1}]$ için

$$\|x_k(t) - x_0\| \leq \|v_{k,0}\| (t - t_0) \leq m(t - t_0) \tag{2.3.6}$$

olur. $t \in [t_0, t_0 + d]$ olduğundan $t - t_0 \leq d \leq \frac{b_*}{m}$ dir. Böylece $\forall t \in [t_0, t_{k,1}]$ iken $\|x_k(t) - x_0\| \leq b_*$ elde edilir. Yani

$$\{(t, x_k(t)) : t \in [t_0, t_{k,1}]\} \subset Z \tag{2.3.7}$$

olur.Şimdi kabul edelim ki $i > 0$, $\forall t \in [t_0, t_{k,i}]$ için

$$\begin{aligned} &\|x_k(t) - x_0\| \leq m(t - t_0) \\ &\{(t, , x_k(t)) : t \in [t_0, t_{k,i}]\} \subset Z \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

olsun. O halde $\forall t \in [t_{k,i}, t_{k,i+1}]$ için

$$\begin{aligned} &\|x_k(t) - x_0\| \leq m(t - t_0) \\ &\{(t, x_k(t)) : t \in [t_0, t_{k,i+1}]\} \subset Z \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

olduğunu göstereceğiz. $t \in [t_{k,i}, t_{k,i+1}]$ alalım. (2.2.3)'e göre

$$x_k(t) = x_{k,i} + v_{k,i}(t - t_0) \tag{2.3.10}$$

olur ve $v_{k,i} \in F(t_{k,i}, x_{k,i})$ dir. (2.3.8)'e göre $(t_{k,i}, x_{k,i}) \in Z$ dir. Dolayısıyla $\|v_{k,i}\| \leq m$ dir. Bu durumda (2.3.8) ve (2.3.10)'dan, $t \in [t_{k,i}, t_{k,i+1}]$ iken

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - x_0\| &\leq \|x_k(t) - x_{k,i}\| + \|x_{k,i} - x_0\| \leq \|v_{k,i}\| .(t - t_{k,i}) + m(t_{k,i} - t_0) \\ &\leq m(t - t_{k,i}) + m(t_{k,i} - t_0) = m(t - t_0) \end{aligned}$$

Yani $\forall t \in [t_{k,i}, t_{k,i+1}]$ için

$$\|x_k(t) - x_0\| \leq m(t - t_0) \tag{2.3.11}$$

olur. $t \in [t_0, t_0 + d]$ olduğundan, $t - t_0 \leq d \leq \frac{b_*}{m}$ olur ve (2.3.11)'den $\forall t \in [t_{k,i}, t_{k,i+1}]$ için $\|x_k(t) - x_0\| \leq m\ d \leq b_*$ olur yani $\{(t, x_k(t)) : t \in [t_{k,i}, t_{k,i+1}]\} \subset Z$ bulunur.

Dolayısıyla (2.3.6), (2.3.7), (2.3.11) ve (2.3.12)'den tümvarım yöntemine göre (2.3.4)'ün doğruluğunu göstermiş oluruz.

Yeniden k alalım ve sabitleyelim. O zaman $x_k(\cdot) : [t_0, t_0{+}d] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun tanımına göre, yani (2.3.3)'e göre $x_k(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, t_0 + d]$ aralığında süreklidir ve $t \in (t_{k,i}, t_{k,i+1})$ $i = 0, 1, \cdots, k-1$ iken

$$\dot{x}_k\ (t) = v_{k,i} \tag{2.3.13}$$

$\forall\ i = 0, 1, \cdots, k-1$ için $v_{k,i} \in F(t_{k,i}, x_{k,i})$, $(t_{k,i}, x_{k,i}) \in Z$ olduğundan $\forall\ i = 0, 1, \cdots, k-1$ için $\|v_{k,i}\| \leq m$ dir. O zaman (2.3.13)'den $\forall t \neq t_{k,i}$ için $(i = 0, 1, \cdots, k-1)$

$$\left\|\dot{x}_k\ (t)\right\| \leq m \tag{2.3.14}$$

olur. Keyfi $t_1 \in [t_0, t_0 + d]$, $t_2 \in [t_0, t_0 + d]$ alalım. O zaman $x_k(t_2) - x_k(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}_k\ (\tau) d\tau$ dur. (2.3.14)'den

$$\|x_k(t_2) - x_k(t_1)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \left\|\dot{x}_k\ (\tau)\right\| d\tau \leq m \mid t_2 - t_1 \mid \tag{2.3.15}$$

dir. Önerme1.1.2.'den de $x_k(\cdot)$ fonksiyonunun mutlak sürekliliği elde edilir. (2.3.4)'e göre $\forall k = 1, 2, \cdots$ için $gr_*\ x_k(\cdot) \subset Z$, Z kompakt küme olduğundan, $x_k(\cdot)$ fonksiyonları düzgün sınırlıdır. $\forall k = 1, 2, \cdots$ ve $t \in [t_0, t_0 + d]$ için $\|x_k(t)\| \leq R$ olacak şekilde bir $R > 0$ vardır. (2.3.15)'den ise $x_k(\cdot)$ fonksiyonlarının düzgün sürekliliği elde edilir. O zaman Askoli teoremine göre (bkz [53]) $[t_0, t_0 + d]$ aralığında $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ düzgün yakınsak olan bir $x_*(\cdot) : [t_0, t_0 + d] \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonu vardır. Keyfi k için $gr\ x_k(\cdot) \subset Z$, Z kompakt, $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ olduğundan $gr x_*(\cdot) \subset Z$ olur. Öte yandan (2.3.15)'den $\forall k$ ve $\forall\ t_1$, $t_2 \in [t_0, t_0 + d]$

$$\|x_k(t_2) - x_k(t_1)\| \leq m \mid t_2 - t_1 \mid \tag{2.3.16}$$

olur. $t \in [t_0, t_0 + d]$ aralığında $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ düzgün yakınsak olduğundan (2.3.16)'dan $k \to \infty$ iken limit alınırsa

$$\|x_*(t_2) - x_*(t_1)\| \leq m \mid t_2 - t_1 \mid$$

olur. Buradan ise $x_*(\cdot)$ fonksiyonunun mutlak sürekliliği elde edilir. Şimdi $t_{k,i} = t_0 + ih_k$ olduğundan $\forall\ t \in [\ t_{k,i}, t_{k,i+1}]$ için

$$|t - t_{k,i}| \leq h_k \tag{2.3.17}$$

olur. (2.3.16) ve (2.3.17)'den $\forall\ t \in [\ t_{k,i}, t_{k,i+1}]$ için

$$\|x_k(t) - x_{k,i}\| \leq m\,|t - t_{k,i}| \leq mh_k \tag{2.3.18}$$

olur.

$$\delta_k = \max\{h_k, mh_k\} \tag{2.3.19}$$

olsun. O zaman açıktır ki, $k \to \infty$ iken $\delta_k \to 0$ olur. (2.3.17) ve (2.3.18) 'den $\forall\ t \in [\ t_{k,i}, t_{k,i+1}]$ için

$$t_{k,i} \in t^{\delta_k}\ \ ,\ x_{k,i} \in (x_k(t))^{\delta_k} \tag{2.3.20}$$

(2.3.13) 'den $\forall t \in (\ t_{k,i}, t_{k,i+1})$ için $\dot{x}\ (t) = v_{k,i} \in F(t_{k,i}, x_{k,i})$ olduğu bulunur. O zaman (2.3.18)'den $\forall t \in (\ t_{k,i}, t_{k,i+1})$ için

$$\dot{x_k}\ (t) \in F(t^{\delta_k}, (x_k(t))^{\delta_k}) \tag{2.3.21}$$

olur. $F(t^{\delta_k}, (x_k(t))^{\delta_k}) \subset F_{\delta_k}(t, x_k(t)) = \left[coF(t^{\delta_k}, (x_k(t))^{\delta_k})\right]^{\delta_k}$ olduğundan (2.3.21)'den $\forall t \in (\ t_{k,i}, t_{k,i+1})$ için

$$\dot{x_k}\ (t) \in F_{\delta_k}(t, x_k(t)) \tag{2.3.22}$$

olur. $i = 0, 1, \cdots, k-1$ keyfi olduğundan (2.3.22)'den $\forall t \neq t_{k,i}\ \ i = 0, 1, \cdots, k-1$ için

$$\dot{x_k}\ (t) \in F_{\delta_k}(t, x_k(t))$$

olduğunu elde ederiz. Böylece $x_k(\cdot) : [t_0, t_0 + d] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonlarının (1.3.1) D.I.'nin δ_k çözümleri olduklarını gördük. O zaman $\forall k$ için $grx_k(\cdot) \subset Z$, $grx_*(\cdot) \subset Z$ ve $[t_0, t_0 + d]$ aralığında $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ düzgün yakınsak olduğundan Önerme 2.2.2'ye göre $x_*(\cdot) : [t_0, t_0 + d] \to \mathbb{R}^n$ mutlak sürekli fonksiyon (1.3.1) D.I. nin çözümüdür.

$\forall k$ için $x_k(t_0) = x_0$, $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ olduğundan $x_*(t_0) = x_0$ olur. Böylece $x_*(\cdot)$ fonksiyonu (2.3.1) Cauchy probleminin çözümüdür. ∎

Eğer Teorem 2.3.1'de konvekslik koşulu olmazsa teorem doğru olmaz.

Örnek 2.3.1 $t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}$ *ve* $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ *için*

$$F(t,x) = \begin{cases} 1 & , \; x < 0 \\ \{-1,1\} & , \; x = 0 \\ -1 & , \; x > 0 \end{cases} \tag{2.3.23}$$

olsun. Açıktır ki $\forall (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ *için* $F(t,x)$ *kompakt kümedir,* $x = 0$ *iken* $F(t,0)$ *konveks değildir ve* $F(\cdot) : [0,1] \times \mathbb{R} \to K(\mathbb{R})$ *üstten yarı sürekli küme değerli dönüşümdür. Şimdi* $\forall (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ *için* $F(t,x)$ *kümesi (2.3.20) ile tanımlanmak üzere*

$$\dot{x}\,(t) \in F(t, x(t)) \; , \; x(0) = 0 \tag{2.3.24}$$

Cauchy problemine bakalım. (2.3.24) Cauchy probleminin çözümü yoktur. Ancak $\forall (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ *için* $F(t,x)$ *kümesi (2.3.23) ile belirlenmiş olursa*

$$\dot{x}\,(t) \in F(t, x(t))$$

D.I.'nin δ çözümleri vardır. Aşağıdaki gibi belirlenmiş Euler yaklaşımına bakalım.

$h_k = \frac{1}{2k}$, $t_{k,i} = i\frac{1}{2k}$, $i = 0, 1, \cdots, 2k$, $x(0) = 0$ *olsun. O zaman* $F(0,0) = \{-1,1\}$ *olduğundan* $v_{k,0} = 1$ *ve* $t \in (0, \frac{1}{2k}]$ *iken* $x_k(t) = t$ *olsun.* $x_{k,1} = \frac{1}{2k}$ *olduğundan ,* $F(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}) = \{-1\}$ *olur. O zaman* $v_{k,1} = -1$ *ve* $t \in (\frac{1}{2k}, \frac{2}{2k}]$ *iken* $x_k(t) = \frac{1}{2k} - (t - \frac{1}{2k})$ *olsun.* $x_{k,2} = 0$ *olduğundan* $F(\frac{2}{2k}, 0) = \{-1,1\}$ *olur. O zaman* $v_{k,2} = 1$ *ve* $t \in (\frac{2}{2k}, \frac{3}{2k}]$ *iken* $x_k(t) = 0 + (t - \frac{2}{2k})$ *olsun. Böylece,*

$$x_k(t) = \begin{cases} 0 + (t - \frac{2i}{2k}) & , \; t \in (\frac{2i}{2k}, \frac{2i+1}{2k}] \\ \frac{1}{2k} - (t - \frac{2i+1}{2k}) & , \; t \in (\frac{2i+1}{2k}, \frac{2i+2}{2k}] \end{cases} \tag{2.3.25}$$

$i = 0, 1, \cdots, k-1$ *olup (2.3.25)'den* $\forall\ t \neq t_{k,i}\quad i = 0, 1, \cdots, k-1$ *için*

$$\dot{x}\ (t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \in (\frac{2i}{2k}, \frac{2i+1}{2k}) \\ -1 & , \quad t \in (\frac{2i+1}{2k}, \frac{2i+2}{2k}) \end{cases} \tag{2.3.26}$$

dir. (2.3.25)'den $\forall\ t \in [0,1]$ *için*

$$\|x(t)\| \leq \frac{1}{2k} \tag{2.3.27}$$

olur. Şimdi $\delta_k = \frac{1}{k}$ *olsun. O zaman (2.3.27)'ten* $\forall\ t \in [0,1]$ *ve* $\forall\ k = 1, 2, \cdots$ *için* $0 \in (x_k(t))^{\delta_k}$ *olur.Bu durumda* $\forall\ k = 1, 2, \cdots$ *ve* $t \in [0,1]$ *için*

$$[-1,1] \subset [coF(t^{\ \delta_k}, (x_k(t))^{\delta_k}]^{\delta_k} = F_{\ \delta_k}(t, x_k(t)) \tag{2.3.28}$$

olur. (2.3.26) ve (2.3.28)'den , $\forall\ t = t_{k,i}$ *için* $(\ i = 0, 1, \cdots, k-1\ )$

$$\dot{x}_k\ (t) \in F_{\delta_k}(t, x_k(t)) \tag{2.3.29}$$

elde edilir. (2.3.26)'ya göre $x_k(\cdot)$ *fonksiyonları mutlak süreklidir. O zaman (2.3.29)'a göre* $x_k(\cdot)$ *fonksiyonları (2.3.24) D.I. 'nin* δ_k *çözümleridir. (2.3.25) ve (2.3.27)'ye göre* $k \to \infty$ *iken* $[0,1]$ *aralığında* $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ *dizisi düzgün olarak* $x_*(\cdot) = 0$ *fonksiyonuna yakınsar. Ancak* $\forall\ t \in [0,1]$ *için* $\dot{x}_*\ (t) = 0 \notin F(t,0) = \{-1,1\}$ *, yani* $x_*(\cdot) = 0$ *fonksiyonu (2.3.24) D.I.'nin çözümü değildir. Öte yandan* $\forall\ t \in [0,1]$ *için*

$$\dot{x}_*\ (t) = 0 \in [-1,1] = coF(t,0) = coF(t, x_*(t))$$

olur. Yani , $x_*(\cdot)$ *fonksiyonu* $\dot{x}\ (t) \in coF(t, x(t))$ *D.I.'nin çözümü olur.*

3 ÇÖZÜMLER KÜMESİNİN ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde diferansiyel içermelerin çözümler kümesinin sınırlılığı ile çözümlerin tüm aralığa devam ettirilmesini, çözümler kümesinin kapalılık ve kompaktlığını ve çözümlerin yerel özelliklerini inceleyeceğiz.

3.1 Diferansiyel İçermelerin Çözümler Kümesinin Sınırlılığı ve Çözümlerin Devamlılığı

Bu kesimde D.I.'nin çözümler kümesinin sınırlılığını araştıracağız. Çözümler kümesinin sınırlı olmasına dayanarak her çözümün tüm aralığa devam ettirilmesini inceleyeceğiz.

Aşağıdaki probleme bakalım.

$$\dot{x}\ (t) \in F(t, x(t))\ ,\ t \in [a, b] \tag{3.1.1}$$

$$x(t_0) \in X_0 \tag{3.1.2}$$

Burada $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ keyfi kümedir.(3.1.1) (3.1.2) problemi, (3.1.1) D.I.'nin t_0 anında X_0 kümesinden geçen çözümlerinin bulunmasıdır. (3.1.1) (3.1.2) problemine genel Cauchy problemi diyeceğiz. (3.1.1) (3.1.2) probleminin çözümler kümesini $X(t_0, X_0)$ ile göstereceğiz. $t \in [a, b]$ için

$$X(t; t_0, X_0) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in\ X(t_0, X_0)\}$$
$$H(t_0, X_0) = \{(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n : x \in X(t; t_0, X_0)\}$$

olsun. $X(t; t_0, X_0)$'a (3.1.1) D.I.'nin t zamanında (t_0, X_0) başlangıç kümesinden erişim kümesi, $H(t_0, X_0)$'a (3.1.1) D.I.'nin (t_0, X_0) başlangıç kümesinden çıkan integral tüneli denir.

Teorem 3.1.1 *$X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme, $F(\cdot) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to KV(\mathbb{R}^n)$ üstten yarı sürekli, $t_0 \in [a, b]$ olsun. $\forall\ (t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$ için*

$$\max\{\|f\| : f \in F(t, x)\} \leq c(1 + \|x\|)\ \ ,\ \ c = sabit \tag{3.1.3}$$

olduğunu varsayalım.Bu durumda $\forall\ x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ *için* $\|x(\cdot)\| \leq R$, $\forall\ t \in [a, b]$, $x \in X(t; t_0, X_0)$ *için* $\|x\| \leq R$, $\forall\ (t, x) \in H(t_0, X_0)$ *için* $\|(t, x)\| \leq R + \max\{|b|, |a|\}$ *olacak şekilde* $R > 0$ *vardır.*

Kanıt. Keyfi $x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ alalım ve $[t_0 - d_1, t_0 + d_2]$ aralığında ($d_1 > 0$, $d_2 > 0$) $x(\cdot) : [t_0 - d_1, t_0 + d_2] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun (3.1.1) (3.1.2) probleminin çözümü olduğunu varsayalım. O zaman $\forall\ t \in [t_0, t_0 + d_2]$ için

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}\ (\tau) d\tau \tag{3.1.4}$$

olacak şekilde $x_0 \in X_0$ vardır ve hemen hemen her $\tau \in [t_0, t_0 + d_2]$ için

$$\dot{x}\ (\tau) \in F(\tau, x(\tau)) \tag{3.1.5}$$

olur.Önce $[t_0, t_0 + d_2]$ aralığını gözönüne alalım. O zaman hemen hemen her $\tau \in [t_0, t_0 + d_2]$ için

$$\|\dot{x}\ (\tau)\| \leq \max\ \{\|f\| : f \in F(\tau, x(\tau))\}$$

olur. (3.1.3) koşulundan, hemen hemen her $\tau \in [t_0, t_0 + d_2]$ için

$$\|\dot{x}\ (\tau)\| \leq c(1 + \|x(\tau)\|) \tag{3.1.6}$$

olur. O halde (3.1.4) ve (3.1.6)'dan $\forall\ t \in [t_0, t_0 + d_2]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|\dot{x}\ (\tau)\| d\tau \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} c(1 + \|x(\tau)\|) d\tau \qquad (3.1.7) \\ &= \|x_0\| + c(t - t_0) + c\int_{t_0}^{t} \|x(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

olur. $\max\ \{\|x\| : x \in X_0\}0 = r$ dersek X_0 kompakt küme olduğundan $r < +\infty$ dur. O zaman (3.1.7)'den $\forall\ t \in [t_0, t_0 + d_2]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq r + c(t - t_0) + c\int_{t_0}^{t} \|x(\tau)\| d\tau \qquad (3.1.8) \\ &\leq r + c(b - a) + c\int_{t_0}^{t} \|x(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

olur. (3.1.8) ve Teorem 1.1.1'den (Gronwall Eşitsizliği), $\forall\ t \in [t_0, t_0 + d_2]$ için

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq r + c(b-a) + c_* \int_{t_0}^{t} c(r + c(b-a))d\tau \\ &= r + c(b-a) + c_*[c(r + c(b-a)](t - t_0) \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

olur. (Burada $c_* = \exp \int_{t_0}^{t_0+d_2} c\ d\tau = \exp\ c \cdot d_2$ dir.) O zaman (3.1.9)'dan $\forall\ t \in [t_0, t_0 + d_2]$ için

$$\|x(t)\| \leq [(r + c(b-a)) \cdot (1 + c(b-a)) \cdot \exp\ c \cdot (b-a)] \tag{3.1.10}$$

olur. $R = [(r + c(b-a)) \cdot (1 + c(b-a)) \cdot \exp\ c(b-a)]$ dersek (3.1.10)'dan $\forall\ t \in [t_0, t_0 + d_2]$ için

$$\|x(t)\| \leq R \tag{3.1.11}$$

dir.

Şimdi $t \in [t_0 - d_1, t_0]$, $t = -\tau + 2t_0 - d_1$ değişimini alalım ve $y(\tau) = x(-\tau + 2t_0 - d_1)$ olsun. Açıktır ki, $t = t_0$ iken $\tau = t_0 - d_1$, $t = t_0 - d_1$ iken $\tau = t_0$ olur ve t değişkeni $[t_0 - d_1, t_0]$ aralığında t_0'dan başlayarak $t_0 - d_1$'e kadar azalırken , τ değişkeni $t_0 - d_1$'den başlayıp t_0'a kadar artar. O zaman

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx(-\tau + 2t_0 - d_1)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{dy(\tau)}{d\tau} \cdot (-1) = -\dot{y}\ (\tau)$$

olduğundan, $\dot{x}\ (t) \in F(t, x(t))$, D.I.'ni $-\dot{y}\ (\tau) \in F(-\tau + 2t_0 - d_1,\ y(\tau))$ gibi yazabiliriz. Bu durumda $t \in [t_0 - d_1, t_0]$ iken

$$\begin{aligned} &\dot{x}\ (t) \in F(t, x(t)) \\ &x(t_0) \in X_0 \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

problemini

$$\begin{aligned} &\dot{y}\ (\tau) \in -F(-\tau + 2t_0 - d_1,\ y(\tau))\ ,\ \tau \in [t_0 - d_1, t_0] \\ &y(t_0 - d_1) \in X_0 \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

gibi yazabiliriz. (3.1.13) probleminin çözümler kümesini $Y(t_0-d_1,X_0)$ ile gösterelim. O zaman (3.1.10)'a benzer olarak $\forall\ y(\cdot)\in Y(t_0-d_1,X_0)$ ve $\tau\in[t_0-d_1,t_0]$ için

$$\|\ y(\tau)\|\leq[(r+c(b-a))\cdot(1+c(b-a))\cdot\exp\ c\cdot(b-a)$$

olduğunu gösterebiliriz. Dolayısıyla $\forall\ y(\cdot)\in Y(t_0-d_1,X_0)$ ve $\tau\in[t_0-d_1,t_0]$ için

$$\|\ y(\tau)\|\leq R \tag{3.1.14}$$

olur. $y(\tau)-x(-\tau+2t_0-d_1)=x(t)$ olduğundan, (3.1.14)'den $\forall\ t\in[t_0-d_1,t_0]$ için

$$\|x(t)\|\leq R \tag{3.1.15}$$

olur. Sonuç olarak (3.1.11) ve (3.1.14)'den $\forall\ t\in[t_0-d_1,t_0+d_2]$ için

$$\|x(t)\|\leq R \tag{3.1.16}$$

olur.

$\forall\ t\in[a,b]$ ve $x\in X(t;t_0,X_0)$ alalım. $X(t;t_0,X_0)$ kümesinin tanımından $x(t)=x$ olan $x(\cdot)\in X(t_0,X_0)$ vardır. (3.1.16)'ya göre $\|x\|=\|x(t)\|\leq R$ ve bu durumda $\|x\|\leq R$ olur. Şimdi $\forall\ (t,x)\in H(t_0,X_0)$ olsun. $H(t_0,X_0)$ ve $X(t;t_0,X_0)$ kümelerinin tanımından , $x(\cdot)\in X(t_0,X_0)$ var öyle ki, $(t,x)=(t,x(t))$. (3.1.16)'ya göre $\|x(t)\|\leq R$ dir. $\|(t,x(t))\|\leq|t|+\|x(t)\|$, $t\in[a,b]$ olduğundan $\|(t,x(t))\|\leq R+\max\{|b|,|a|\}$, dolayısıyla $\|(t,x)\|\leq R+\max\{|b|,|a|\}$ olur. Kanıt biter. ∎

Şimdi (3.1.1) (3.1.2) probleminin tüm çözümlerinin $[a,b]$ aralığında tanımlanmasını gerektiren bir teorem sunalım.

Teorem 3.1.2 *Teorem 3.1.1.'in tüm koşulları sağlansın. $x_0\in X_0$ olsun. Bu durumda $\forall\ x(\cdot)\in X(t_0,x_0)$ çözümü tüm $[a,b]$ aralığında tanımlıdır.*

Kanıt. Keyfi $x_0(\cdot) \in X(t_0, x_0)$ alalım ve hemen hemen her $t \in [t_0 - l_1, t_0 + d_1]$ için $\dot{x}_0\ (t) \in F(t, x_0(t)), x_0(t_0) = x_0$ olduğunu kabul edelim. $t_0{+}d_1 < b$ $t_0{+}d_1 = t_1$, $x_0(t_0 + d_1) = x_1$ diyelim. Teorem 3.1.1.'e göre $\|x_1\| \leq R$ dir. O zaman benzer olarak Teorem 2.3.1'e göre hemen hemen her $t \in [t_1, t_1{+}d_1^1]$ için $\dot{x}_1\ (t) \in F(t, x_1(t))$ D.I.'ni ve $x_1(t_1) = x_1$ koşulunu sağlayan $x_1(\cdot) : [t_1, t_1{+}d_1^1] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu mutlak sürekli olacak şekilde $[t_1, t_1 + d_1^1]$ aralığı vardır. Yani $x_1(\cdot) : [t_1, t_1 + d_1^1] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $[t_1, t_1 + d_1^1]$ aralığında $\dot{x}_1\ (t) \in F(t, x_1(t),\ \ x_1(t_1) = x_1 = x(t_0 + d_1)$ Cauchy probleminin çözümüdür.

$$x_0^1(t) = \begin{cases} x_0(t) & , \quad t \in [t_0, t_0 + d_1] \\ x_1(t) & , \quad t \in [t_1, t_1 + d_1^1] \end{cases}$$

dersek, $x_0^1(\cdot) : [t_0, t_1{+}d_1^1] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $[t_0, t_1{+}d_1^1]$ aralığında $\dot{x}_0^1\ (t) \in F(t, x_0^1(t))$ D.I.'nin $x_0^1(t_0) = x_0$ koşulunu sağlayan çözümü olur. Teorem 3.1.1'e göre $\forall\ t \in [t_0, t_1 + d_1^1]$ için $\|x_0^1(t)\| \leq R$ dir. Buradan $x_0(\cdot) \in X(t_0, x_0)$ çözümü herhangi bir $[t_0, t_0 + d_*]$, $(t_0 + d_* < b\ )$ aralığında belirlenmiş ise, o zaman $x_0(\cdot)$ fonksiyonu $\dot{x}_0$ $(t) \in F(t, x_0(t))$, $x_0(t_0) = x_0$ Cauchy probleminin çözümü olmak üzere $[t_0{+}d_*, t_0{+} d_* + \alpha]$ aralığında devam ettirilebilecek biçimde bir $\alpha > 0$ sayısının varlığını elde ederiz. Bu durumda sonsuz tümevarım yöntemini kullanarak (bkz [42]), çözümün tüm $[t_0, b]$ aralığına devam ettirilmesinin mümkün olabileceğini söyleyebiliriz. Aynı şekilde $x_0(\cdot) \in X(t_0, x_0)$ çözümü $[a, t_0]$ aralığına yani solada devam ettirilebilir. Teorem kanıtlanır. ∎

3.2 Çözümler Kümesinin Kompaktlığı ve Kapalılığı

Bu kesimde $X(t_0, X_0)$ kümesinin , yani

$$\dot{x}\ (t) \in F(t, x(t))\ ,\ \ t \in [a, b] \tag{3.2.1}$$

$$x(t_0) \in X_0 \tag{3.2.2}$$

probleminin çözümler kümesinin kompaktlığı ve kapalılığı araştırılacaktır.

Teorem 3.2.1 *$X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme, $F(\cdot) : [a,b] \to KV(\mathbb{R}^n)$ üstten yarı sürekli küme değerli dönüşüm olsun. Eğer $\forall\ x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ çözümü $[a,b]$ aralığında tanımlanmış fonksiyon ise ve*

$$\|x(\cdot)\| = \max_{t\in[a,b]} \|x(t)\| \ \leq R \tag{3.2.3}$$

olacak şekilde $R > 0$ varsa bu durumda $X(t_0, X_0)$ kümesi kapalı ve kompakttır.

Uyarı 3.2.1 *Teorem 3.1.1 ve 3.1.2'ye göre, eğer (3.1.3) eşitsizliği sağlanıyorsa , o zaman $X(t_0, X_0)$ kümesi sınırlı ve $\forall\ x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ çözümü tüm $[a,b]$ aralığında belirlenmiş fonksiyondur.*

Kanıt. Şimdi, $\max\ \{\|f\| : f \in F(t,x)\ ,\ (t,x) \in [a,b] \times B(0,R)\} = K$ olsun. Keyfi $x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ alalım. O zaman $\forall\ t \in [a,b]$ için

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}\ (\tau)d\tau$$

olacak şekilde $x_0 \in X_0$ vardır. $\forall\ t_1, t_2 \in [a,b]$ için

$$x(t_1) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}\ (\tau)d\tau\ \ ,\ \ x(t_2) = x_0 + \int_{t_0}^{t_2} \dot{x}\ (\tau)d\tau$$

dur. Buradan

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}\ (\tau)d\tau \tag{3.2.4}$$

olur. (3.2.4)'den

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{x}\ (\tau)\|\, d\tau \tag{3.2.5}$$

$\forall\ x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ için $\|x(\cdot)\| \leq R$ olduğundan, $\forall\ x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ için

$$\max\ \{\|f\| : f \in F(t, x(t))\ ,\ t \in [a,b]\} \leq K \tag{3.2.6}$$

olur. $x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ ve hemen hemen her $\tau \in [a,b]$ için

$$\dot{x}(\tau) \in F(\tau, x(\tau))$$

olduğundan, (3.2.6)'dan hemen hemen her $\tau \in [a,b]$ için

$$\left\|\dot{x}(\tau)\right\| \leq K \tag{3.2.7}$$

olur. Bu durumda (3.2.5) ve (3.2.7)'den

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \leq K \cdot |t_2 - t_1| \tag{3.2.8}$$

olur. $x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ keyfi çözüm olduğundan (3.2.8)'den $x(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ çözümlerinin aynı K sabiti ile Lipschitz koşulunu sağladığını elde ederiz. Buradan ise $x(\cdot)$ çözümlerinin eş sürekliliği elde edilir. (3.2.3) koşuluna göre $X(t_0, X_0)$ kümesi sınırlıdır. O zaman Askoli teoremine göre (bkz [53]) $X(t_0, X_0)$ kümesi prekompakt küme olur. Yani $\forall\ k = 1, 2, \cdots$ için $x_k(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ olmak üzere $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinden yakınsak alt dizi seçilebilir.

Şimdi $X(t_0, X_0)$ kümesinin kapalı olduğunu gösterelim. $\forall\ k = 1, 2, \cdots$ için $x_k(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ ve $[a,b]$ aralığında $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ düzgün yakınsak olsun.$x_k(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları (3.2.1) D.I.'nin çözümleri olduğundan, $\forall\ k = 1, 2, \cdots$ için $\delta_k > 0$, $k \to \infty$ iken $\delta_k \to 0^+$olmak üzere $x_k(\cdot)$ fonksiyonları (3.2.1) D.I.'nin δ_k-çözümleridir. Burada $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ ve $\delta_k \to 0^+$ olduğundan, Önerme 2.2.2'ye göre $x_*(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu (3.2.1) D.I.'nin çözümüdür.

Şimdi $x_*(t_0) \in X_0$ olduğunu gösterelim. $\forall\, k$ için $x_k(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ olduğundan, $\forall\ k$ için

$$x_k(t_0) \in X_0 \tag{3.2.9}$$

dır. $k \to \infty$ iken $x_k(t_0) \to x_*(t_0)$, X_0 kompakt küme olduğundan, (3.2.9)'dan $x_*(t_0) \in X_0$ olur. Yani $x_*(\cdot) \in X(t_0, X_0)$ dır.

$X(t_0, X_0)$ kümesi kapalı ve bikompakt olduğundan kompakt olur. Teorem kanıtlanır. ∎

Şimdi $X(t;t_0,X_0)$ erişim kümelerinin ve $H(t_0,X_0)$ integral tünelinin kompaktlığını inceleyelim.

Teorem 3.2.2 *Teorem 3.2.1.'in tüm koşulları sağlansın. Bu durumda $H(t_0,X_0)$ integral tüneli ve $\forall\ t \in [a,b]$ için $X(t;t_0,X_0)$ erişim kümeleri kompakt kümelerdir.*

Kanıt. Keyfi $(t,x) \in H(t_0,X_0)$ alalım. O zaman $x(t) = x$ olan bir $x(\cdot) \in X(t_0,X_0)$ vardır. $\|x(t)\| \le R$, $t \in [a,b]$ olduğundan $\|(t,x)\| \le |t| + \|x\| = |t| + \|x(t)\| \le r + R$, $r = \max\{|a|,|b|\}$ dir. Yani, $H(t_0,X_0)$ kümesi sınırlıdır. Şimdi $H(t_0,X_0)$ kümesinin kapalı olduğunu gösterelim. $\forall\ k = 1,2,\cdots$ için $(t_k,x_k) \in H(t_0,X_0)$ olmak üzere $\{(t_k,x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisini alalım ve $k \to \infty$ iken $(t_k,x_k) \to (t_*,x_*)$ olsun.$(t_*,x_*) \in H(t_0,X_0)$ olduğunu gösterelim. $(t_k,x_k) \in H(t_0,X_0)$ olduğundan $x_k(t_k) = x_k$ olacak biçimde bir $x_k(\cdot) \in X(t_0,X_0)$ vardır. $X(t_0,X_0)$ kompakt küme olduğundan, genelliği bozmadan $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ ve $x_*(\cdot) \in X(t_0,X_0)$ olduğunu varsayabiliriz. O zaman $t_k \to t_*$, $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$, $x_k(\cdot)$ $(k = 1,2,\cdots)$ fonksiyonları sürekli ve $x_k(t_k) = x_k$ olduğundan dolayı, $k \to \infty$ iken limit alırsak, $x_*(t_*) = x_*$ olur. $x_*(\cdot) \in X(t_0,X_0)$ olduğundan $(t_*,x_*) = (t_*,x_*(t_*)) \in H(t_0,X_0)$ olur. $H(t_0,X_0)$ kümesinin kapalı olduğu kanıtlanmış olur. $H(t_0,X_0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan kompakt olur.

Keyfi $t_* \in [a,b]$ alalım ve $X(t_*;t_0,X_0)$ kümesinin kompakt olduğunu gösterelim. Teorem 3.2.1'deki (3.2.3) koşuluna göre $X(t_*;t_0,X_0)$ kümesi sınırlıdır. Şimdi $X(t_*;t_0,X_0)$ kümesinin kapalı olduğunu gösterelim. $\forall\ k$ için $x_k \in X(t_*;t_0,X_0)$ olmak üzere $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi alalım ve $k \to \infty$ iken $x_k \to x_*$ olduğunu kabul edelim. $x_* \in X(t_*;t_0,X_0)$ olduğunu gösterelim. $x_k \in X(t_*;t_0,X_0)$ olduğundan $x_k(t_*) = x_k$ olacak şekilde $x_k(\cdot) \in X(t_0,X_0)$ vardır. Teorem 3.2.1'e göre $X(t_0,X_0)$ kompakt kümedir ve genelliği bozmadan $k \to \infty$ iken $x_k(\cdot) \to x_*(\cdot)$ ve $x_*(\cdot) \in X(t_0,X_0)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_k(t_*) = x_k$ $(k = 1,2,\cdots)$ eşitliğinde $k \to \infty$ iken limit alırsak $x_*(t_*) = x_*$ ve böylece $x_* \in X(t_*;t_0,X_0)$ olur. Yani $X(t_*;t_0,X_0)$ kapalı kümedir. $X(t_*;t_0,X_0) \subset \mathbb{R}^n$ kapalı ve sınırlı olduğundan kompakt olur. Teorem kanıtlanır. ■

Eğer Teorem 3.2.1 ve 3.2.2'de $F(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ üstten yarı sürekli küme değerli dönüşüm ise, yani $(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ için $F(t,x)$ konveks değilse, o zaman $X(t_0, X_0)$, $X(t; t_0, X_0)$, $H(t_0, X_0)$ kümeleri kapalı olmayabilir. Aşağıda buna bir örnek verilmiştir.

Örnek 3.2.1 *Aşağıdaki dinamik sisteme bakalım.*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y^2 + u^2 , \\ \dot{y} &= u \quad , \quad |u| \leq 1 \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

$t \in [0,1]$, $X_0 = \{(0,0)\}$ *olsun. Bu durumda*

$$F(t,x,y) = \{(f,g) \in \mathbb{R}^2 : (f,g) = (-y^2 + u^2, u) \ , \ u \in [-1,1]\} \tag{3.2.11}$$

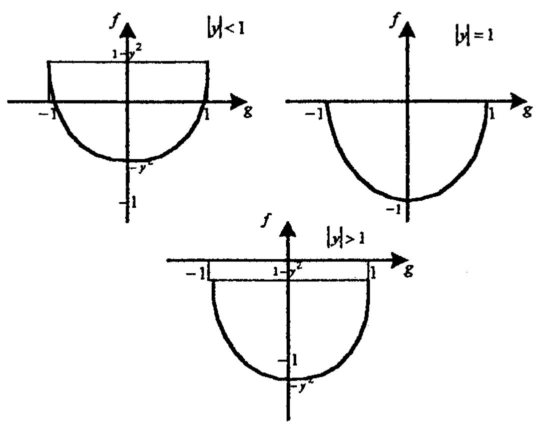
ve (3.2.10) dinamik sistemi

$$(\dot{x}\ (t), \dot{y}\ (t)) \in F(t, x(t), y(t)) \ , \ x(0) = 0 \ , \ y(0) = 0 \ , \ t \in [0,1] \tag{3.2.12}$$

D.I.'ne denktir. Açıktır ki , $\forall\ (t,x,y)$ *için* $F(t,x,y)$ *kümesi*

$$f = -y^2 + g^2 \ , \ |g| \leq 1$$

parabolünün bir kısmıdır (Şekil 3.2.1) ve $F(t,x,y)$ *kümesi kompakttır, ancak konveks değildir.*



Şekil 3.2.1:. $|y| < 1$, $|y| = 1$ *ve* $|y| > 1$ *için* $F(t,x,y)$ *kümesi*

$\forall\ (x(\cdot), y(\cdot)) \in X(0,0)$ *için*

$$\max_{t\in[0,1]} |x(t)| \leq 1 \quad , \quad \max_{t\in[0,1]} |y(t)| \leq 2 \tag{3.2.13}$$

olduğunu yani $X(0,0)$ *çözümler kümesinin sınırlı olduğunu gösterelim.* $(x(\cdot), y(\cdot)) \in X(0,0)$ *olduğundan ,* $\forall\ t \in [0,1]$ *için*

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau \quad , \quad x(t) = -\int_0^t y^2(\tau)d\tau + \int_0^t u^2(\tau)d\tau$$

$|u(t)| \leq 1$ *olacak şekilde ölçülebilir* $u(\cdot)$ *fonksiyonu vardır.* $\forall\ \tau \in [0,1]$ *için* $|u(\tau)| \leq 1$ *olduğundan ,* $\forall\ t \in [0,1]$ *için*

$$|y(t)| \leq \int_0^t |u(\tau)|\, d\tau \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \int_0^t u^2(\tau)d\tau \leq 1$$

olur. O zaman $\forall\ t \in [0,1]$ *için*

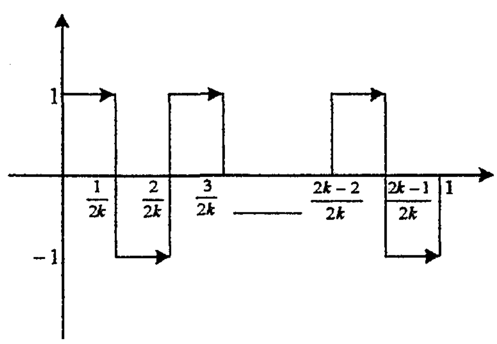
$$|x(t)| \leq \int_0^t y^2(\tau)d\tau \quad + 1 \leq 2$$

olur. Yani (3.2.13) doğrudur, dolayısıyla $X(0,0)$ *çözümler kümesi sınırlıdır.*

Şimdi $k = 1, 2, \cdots$ *için* $[0,1]$ *aralığının* $0, \frac{1}{2k}, \frac{2}{2k}, \cdots, \frac{2k-1}{2k}, 1$ *bölüntüsünü alalım ve*

$$u_k(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \in [\frac{2i}{2k}, \frac{2i+1}{2k}) \\ -1 & , \quad t \in [\frac{2i+1}{2k}, \frac{2i+2}{2k}) \end{cases} \qquad i = 0, 1, \cdots, k-1 \tag{3.2.14}$$

olsun.



Şekil 3.2.2: $u_k(.)$*'nın grafiği*

$(x_k(\cdot), y_k(\cdot)) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *ile*

$$\begin{aligned} \dot{x}_k\ (t) &= -y_k(t)^2 + u_k(t)^2 \quad , \quad x_k(0) = 0 \qquad (3.2.15) \\ \dot{y}_k\ (t) &= u_k(t) \quad , \quad y_k(0) = 0 \end{aligned}$$

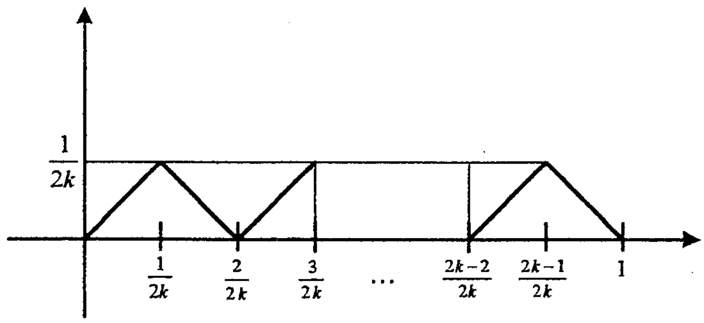
Cauchy probleminin çözümünü gösterelim.(3.2.11) ve (3.2.15)'e göre, $(\dot{x}_k\ (t), \dot{y}_k\ (t)) \in F(t, x_k(t), y_k(t))$ *dir. (3.2.15)'e göre* $\forall\ t \in [0,1]$ *için*

$$y_k(t) = \int_0^t u_k(\tau) d\tau$$

olur. O zaman (3.2.14)'den $\forall\ t \in [0,1]$ *için*

$$y_k(t) = \begin{cases} t - \frac{2i}{2k} & , \quad t \in [\frac{2i}{2k}, \frac{2i+1}{2k}) \\ -t + \frac{2i+2}{2k} & , \quad t \in [\frac{2i+1}{2k}, \frac{2i+2}{2k}) \end{cases} , \ i = 0, 1, \cdots, k-1$$

olur. (Şekil 3.2.3)



Şekil 3.2.3 $y_k(.)$*'nın grafiği*

O halde $\forall\ t \in [0,1]$ *için*

$$0 \le y_k(t) \le \frac{1}{2k} \qquad (3.2.16)$$

olur. (3.2.14)'e göre , $\forall\ t \in [0,1]$ *için* $u_k(t)^2 = 1$ *dir. O zaman (3.2.14)'den*

$$\dot{x}_k\ (t) = -y_k(t)^2 + 1 \ , \ x_k(0) = 0 \qquad (3.2.17)$$

(3.2.16)'dan $\forall\ t \in [0,1]$ *için* $-\frac{1}{4k^2} \le -y_k(t)^2 \le 0$ *dır. O zaman (3.2.17)'den hemen hemen her* $t \in [0,1]$ *için*

$$1 - \frac{1}{4k^2} \le \dot{x}_k\ (t) \le 1 \qquad (3.2.18)$$

Bu durumda $x_k(0) = 0$ *olduğundan* $\forall\, t \in [0,1]$ *için*

$$(1 - \frac{1}{4k^2}) \cdot t \le x_k(t) \le t$$

olur. O halde $t = 1$ *olurken*

$$1 - \frac{1}{4k^2} \le x_k(1) \le 1 \qquad (3.2.19)$$

olur. *(3.2.16) ve (3.2.19)'dan* $k \to \infty$ *iken* $(1, x_k(1), y_k(1)) \to (1,1,0)$ *dır. Yani* $(1,0)$ *noktası* $X(1;0,0)$ *erişim kümesinin limit noktasıdır.*

Şimdi $(1,0)$ *noktasının* $X(1;0,0)$ *kümesinde, yani (3.2.12) D.I.'nin* $t = 1$ *zamanındaki erişim kümesinde olmadığını gösterelim.*

$\forall\, t \in [0,1]$ *için* $|u(t)| \le 1$ *olmak üzere ölçülebilir* $u(\cdot)$ *fonksiyonunu alalım. O zaman (3.2.10)'a göre* $\forall\, t \in [0,1]$ *için*

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$$

$$x(t) = -\int_0^t \left(\int_0^\tau u(s)ds\right)^2 d\tau \; + \int_0^t u^2(\tau)d\tau$$

ve

$$x(1) = -\int_0^1 \left(\int_0^\tau u(s)ds\right)^2 d\tau \; + \int_0^1 u^2(\tau)d\tau$$

$$y(1) = \int_0^1 u(\tau)d\tau$$

olur. Şimdi tersini varsayalım, yani $(1,0) \in X(1;0,0)$ *olsun. O zaman* $\forall\, t \in [0,1]$ *için*

$$\int_0^1 u_*(\tau)d\tau = 0 \;\; , \; -\int_0^1 \left(\int_0^\tau u_*(s)ds\right)^2 d\tau \; + \int_0^1 u_*^2(\tau)d\tau = 1 \qquad (3.2.20)$$

$|u_*(t)| \leq 1$ *olmak üzere ölçülebilir* $u_*(\cdot)$ *fonksiyonu vardır. O zaman (3.2.20)'den*

$$\int_0^1 \left[u_*^2(\tau) - \left(\int_0^\tau u_*(s)ds \right)^2 \right] d\tau = 1 \tag{3.2.21}$$

$\forall\ \tau \in [0,1]$ *için* $|u_*(\tau)| \leq 1$, $\left(\int_0^\tau u_*(s)ds \right)^2 \geq 0$ *olduğundan (3.2.21)'nin sağlanması için* $\forall\ \tau \in [0,1]$ *için* $u_*(\tau) = 1$ *ve* $\int_0^\tau u_*(s)ds = 0$ *olması gerekir. Bu ise olamaz. Yani (3.2.21)'i sağlayacak* $\forall\ t \in [0,1]$ *için* $|u_*(t)| \leq 1$ *olacak fonksiyon bulunamaz. Yani* $(1,0) \notin X(1;0,0)$ *dır.*

Böylece , $X(1;0,0)$ *erişim kümesinin kapalı olmadığını gösterdik.*

Örnek 3.2.2 $(t,x) \to F(t,x)$ *k.d.d.'ü konveks değerli olmadığı durumda* $X(t_0,x_0)$ *çözümler kümesinin kapalı olmadığını görelim.* $\forall\ (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ *için*

$$F(t,x) = \{-1,1\} \quad x_0 = \{0\}$$

olduğunu kabul edelim. Açıktır ki $\forall\ (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ *için* $F(t,x)$ *kompakttır,* $(t,x) \to F(t,x)$ *k.d.d.'ü süreklidir. Keyfi* $x(\cdot) \in X(0,0)$ *alalım. O zaman hemen hemen her* $t \in [0,1]$ *için* $\dot{x}\ (t) \in F(t,x) = \{-1,1\}$ *olduğundan* $-1 \leq \dot{x}\ (t) \leq 1$ *dir. Buradan keyfi* $t \in [0,1]$ *için* $-1 \leq x \leq 1$ *olur. Yani* $X(0,0)$ *kümesi sınırlıdır.*

$\forall\ t \in [0,1]$ *için* $X(t;0,0) = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq t\}$, $H(0,0) = \{(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R} : |x| \leq t\}$ *ve* $\forall\ t \in [0,1]$ *için* $X(t;0,0)$ *erişim kümelerinin* $\mathbb{R}$ *'de kompakt olduğu,* $H(0,0)$ *integral tünelinin* $\mathbb{R}^2$*'de kompakt olduğu kolayca gösterilebilir.*

Şimdi çözümler kümesinin kapalı olmadığını görelim. $k > 0$ *sayısı ve* $[0,1]$ *aralığının* $0, \frac{1}{2k}, \frac{2}{2k}, \cdots, \frac{2k-1}{2k}, 1$ *bölüntüsünü alalım.*

$$\dot{x}_k\ (t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \in [\frac{2i}{2k}, \frac{2i+1}{2k}) \\ -1 & , \quad t \in [\frac{2i+1}{2k}, \frac{2i+2}{2k}) \end{cases} \quad i = 0,1,\cdots,k-1 \tag{3.2.22}$$

olsun. Açıktır ki hemen hemen her $t \in [0,1]$ *için* $\dot{x}_k\ (t) \in F(t, x_k(t))$, *yani* $x_k(\cdot) \in X(0,0)$ *dır. (3.2.22)'den*

$$x_k(t) = \begin{cases} t - \frac{2i}{2k} & , \quad t \in [\frac{2i}{2k}, \frac{2i+1}{2k}) \\ -t + \frac{2i+2}{2k} & , \quad t \in [\frac{2i+1}{2k}, \frac{2i+2}{2k}) \end{cases}, \ i = 0,1,\cdots,k-1 \tag{3.2.23}$$

elde ederiz. (3.2.23)'den $\forall\ t \in [0,1]$ *için*

$$0 \leq x_k(t) \leq \frac{1}{2k} \tag{3.2.24}$$

bulunur. $k \to \infty$ *iken* $x_k(\cdot) \to 0$ *düzgün yakınsak olur. Ancak* $x_*(\cdot) = 0$ *fonksiyonu için* $x_*(\cdot) \notin X(0,0)$ *dır. Yani* $X(0,0)$ *çözümler kümesi kapalı değildir.*

D.I.'nin çözümlerini karakterize edecek bir teorem sunalım.

Teorem 3.2.3 $t_0 \in [a,b]$, $F(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to KV(\mathbb{R}^n)$ *üstten yarı sürekli k.d.d. olsun. Teorem 3.1.1.'deki (3.1.3) eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim.* $\forall\ k = 1, 2, \cdots$ *için* $x_k(\cdot) \in X(t_0, x_k)$ *ve* $k \to \infty$ *iken* $x_k \to x_*$ *olsun.*

O zaman $\{x_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ *dizisinin* $[a,b]$ *aralığında düzgün yakınsak* $\{x_{k_i}(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ *alt dizisi var ve* $x_*(\cdot) = \lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i}(\cdot)$ *için* $x_*(\cdot) \in X(\ t_0, x_*)$ *olur.*

Kanıt. $k \to \infty$ iken $x_k \to x_*$ olduğundan $\forall\ k \geq K_*$ için $x_k \in B(x_*,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_*\| \leq 1\}$ olan $K_* > 0$ vardır. O zaman $\forall\ k \geq K_*$ için $x_k(\cdot) \in X(\ t_0, B(x_*,1))$ olur. $B(x_*,1) \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme olduğundan Teorem 3.2.1.'e göre $X(\ t_0, B(x_*,1)) \subset C([a,b], \mathbb{R}^n)$ kümesi kompakt kümedir. Bu durumda $\forall\ k \geq K_*$ için $x_k(\cdot) \in X(\ t_0, B(x_*,1))$ olduğundan $\{x_k(\cdot)\}_{k=K_*}^{\infty}$ dizisinin yakınsak $\{x_{k_i}(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ alt dizisi seçilebilir. $\lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i}(\cdot) = x_*(\cdot)$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla $X(t_0, B(x_*,1))$ kümesinin kompaktlığından $x_*(\cdot) \in X(t_0, B(x_*,1))$ olur.

Şimdi $x_*(\cdot) \in X(t_0, x_*)$ olduğunu gösterelim. Gerçekten $\forall\ i$ için $x_{k_i}(\cdot) \in X(t_0, x_{k_i})$ olduğundan , $\forall\ i$ için $x_{k_i}(t_0) = x_{k_i}$ dir. Öte yandan, $i \to \infty$ iken $x_{k_i}(\cdot) \to x_*(\cdot)$, $x_{k_i} \to x_*$ olduğundan, $x_*(t_0) = x_*$ olur. Yani, $x_*(\cdot) \in X(\ t_0, x_*)$ 'dır. Teorem kanıtlanır. ∎

3.3 Çözümlerin Yerel Özellikleri

Bundan önceki bölümde belirli koşullar altında

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\in F(t, x(t)) \quad , \quad t \in [a, b] \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Cauchy probleminin çözümünün varlığını gösterdik. Bu kesimde de çözümün t_0 noktasının yakın komşuluğunda özelliklerini araştıralım.

Teorem 3.3.1 *$t_0 \in (a, b)$, $F(\cdot) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to KV(\mathbb{R}^n)$ üstten yarı sürekli k.d.d., $d_* > 0$, $d^* > 0$ olmak üzere $x_*(\cdot) : [t_0 - d_*, t_0 + d^*] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu (3.3.1) Cauchy probleminin çözümü olsun. O zaman*

$$x_*(t_0 + \delta_k) = x_0 + \delta_k \cdot f_* + \delta_k \cdot s_k \tag{3.3.2}$$

$$x_*(t_0 - h_k) = x_0 - h_k \cdot f^* + \delta_k \cdot v_k \tag{3.3.3}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde $f_* \in F(t_0, x_0)$, $f^* \in F(t_0, x_0)$, $k \to \infty$ iken $\|s_k\| \to 0$, $\|v_k\| \to 0$ olan ve $k \to \infty$ iken $\delta_k \to 0^+$ ve $h_k \to 0^+$ olan $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizileri vardır.

Kanıt. Önce (3.3.2) eşitliğini kanıtlayalım. $x_*(\cdot) : [t_0 - d_*, t_0 + d^*] \to \mathbb{R}^n$ (3.3.1) Cauchy probleminin çözümü olduğundan mutlak süreklidir ve $x_*(t_0) = x_0$ dır. $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0 - d_*, t_0 + d^*]$ aralığında sürekli olduğundan

$$\max_{t \in [t_0 - d_*, t_0 + d^*]} \|x_*(t)\| \leq r \tag{3.3.4}$$

olacak şekilde $r > 0$ vardır.

$$\max \{\|f\| : f \in F(t, x) \ , \ (t, x) \in [t_0 - d_*, t_0 + d^*] \times B(0, r)\} = M \tag{3.3.5}$$

diyelim.$\forall\ t \in [t_0, t_0 + d^*]$ için

$$x_*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}_*(\tau) d\tau \tag{3.3.6}$$

dur. Hemen hemen her $\tau \in [t_0, t_0 + d^*]$ için $\dot{x}_* (\tau) \in F(\tau, x_*(\tau))$ olduğundan (3.3.4) ve (3.3.5)'den hemen hemen her $\tau \in [t_0, t_0 + d^*]$ için $\|\dot{x}_* (\tau)\| \leq M$ olur. O halde (3.3.6)'dan $\forall\, t \in [t_0, t_0 + d^*]$ için

$$\|x_*(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^{t} \|\dot{x}_* (\tau)\| d\tau \leq M(t - t_0) \tag{3.3.7}$$

dır. $i \to \infty$ iken $\varepsilon_i \to 0^+$ olacak şekilde $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi alalım. $(t, x) \to F\ (t, x)$ k.d.d.'ü üstten yarı sürekli olduğundan $\varepsilon_i > 0$ ve $0 < t - t_0 < \delta_i^1$, $\|x - x_0\| \leq \delta_i^1$ için

$$F(t, x) \subset F(t_0, x_0) + \varepsilon_i B \tag{3.3.8}$$

olacak biçimde $\exists\ \delta_i^1$ vardır. $\delta_i^* = \min\ \{\delta_i^1, \frac{\delta_i^1}{M}, \frac{1}{i}, d^*\}$ olsun. O zaman (3.3.7)'ye göre $\forall\, t \in [t_0, t_0 + \delta_i^*]$ için

$$\|x_*(t) - x_0\| \leq \delta_i^1$$

olur. Bu durumda (3.3.8)'den $\forall\, t \in [t_0, t_0 + \delta_i^*]$ için

$$F(t, x_*(t)) \subset F(t_0, x_0) + \varepsilon_i B \tag{3.3.9}$$

olur. $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0 - d_*, t_0 + d^*]$ aralığında (3.3.1) Cauchy probleminin çözümü olduğundan , hemen hemen her $t \in [t_0 - d_*, t_0 + d^*]$ için $\dot{x}_* (t) \in F(t, x_*(t))$ dir. O zaman (3.3.9)'dan hemen hemen her $t \in [t_0, t_0 + \delta_i^*]$ için

$$\dot{x}_* (t) \in F(t_0, x_0) + \varepsilon_i B \tag{3.3.10}$$

olur. $F(t_0, x_0) + \varepsilon_i B \subset \mathbb{R}^n$ konveks kompakt küme olduğundan Önerme 1.1.1'e göre

$$\frac{1}{\delta_i^*} \int_{t_0}^{t_0+\delta_i^*} \dot{x}_* (t) dt \in F(t_0, x_0) + \varepsilon_i B$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} [x_*(t_0 + \delta_i^*) - x_*(t_0)]\ \frac{1}{\delta_i^*} &\in F(t_0, x_0) + \varepsilon_i B \\ x_*(t_0 + \delta_i^*) &\in x_0 + \delta_i^*\ F(t_0, x_0) + \delta_i^* \varepsilon_i B \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

olur. O halde , $\forall\ i = 1, 2, \cdots$ için

$$x_*(t_0 + \delta_i^*) = x_0 + \delta_i^* \cdot\ f_i + \delta_i^*\ \varepsilon_i\ b_i^* \tag{3.3.12}$$

eşitliğini sağlayan $f_i \in F(t_0, x_0)$, $b_i^* \in B$ vardır. $\forall\ i$ için $f_i \in F(t_0, x_0)$, $F(t_0, x_0)$ kompakt küme olduğundan $\{\ f_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisinin yakınsak $\{\ f_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. Kabul edelim ki $k \to \infty$ iken $f_{i_k} \to f_*$ olsun. Bu durumda $f_* \in F(t_0, x_0)$ ve (3.3.12)'den $\forall\ k$ için

$$x_*(t_0 + \delta_{i_k}^*) = x_0 + \delta_{i_k}^* f_* + \delta_{i_k}^*[(\ f_{i_k} - f_*) + \varepsilon_{i_k} b_{i_k}] \tag{3.3.13}$$

dır. $\delta_k = \delta_{i_k}^*$, $s_k = (\ f_{i_k} - f_*) + \varepsilon_{i_k} b_{i_k}$ olsun. $\delta_k < \frac{1}{i_k}$ olduğundan, $k \to \infty$ iken $\delta_k \to 0^+$ olur. $k \to \infty$ iken $f_{i_k} \to f_*$, $\varepsilon_{i_k} \to 0$ ve $\|b_{i_k}\| \leq 1$ olduğundan $k \to \infty$ iken $\|s_k\| = \|(\ f_{i_k} - f_*) + \varepsilon_{i_k} b_{i_k}\| \to 0$ olur. Bu durumda (3.3.12)'den

$$x_*(t_0 + \delta_k) = x_0 + \delta_k \cdot\ f_* + \delta_k \cdot\ s_k$$

olur. Burada $f_* \in F(t_0, x_0)$, $k \to \infty$ iken ise $\delta_k \to 0^+$, $\|s_k\| \to 0$ olur. (3.3.2) eşitliği kanıtlanır. (3.3.3) eşitliği benzer olarak kanıtlanır. Teoremin kanıtı biter. ∎

4 KONVEKS DEĞERLİ OLMAYAN DİFERANSİYEL İÇERMELER İÇİN CAUCHY PROBLEMİ VE DİFERANSİYEL İÇERMENİN İNTEGRAL TÜNELİNİN BİR ÖZELLİĞİ

Bu bölümde sağ tarafı yerel sınırlı küme değerli dönüşüm olan diferansiyel içermelerin regülarizasyonunu, sağ tarafı konveks değerli olmayan küme değerli dönüşüm olan diferansiyel içermelerin çözümlerinin varlığını ve diferansiyel içermenin integral tüneline ait bir özelliği inceleyeceğiz.

4.1 Sağ Tarafı Yerel Sınırlı Küme Değerli Dönüşüm Olan Diferansiyel İçermelerin Regülarizasyonu

Bu kesimde sağ tarafı değişenlere göre sadece yerel sınırlı olan diferansiyel denklemler ve D.I.'ler için Cauchy probleminin çözümünün nasıl belirlendiğini araştıracağız. Eğer diferansiyel denklemin sağ tarafı değişenlere göre sürekli değilse veya D.I.'in sağ tarafı değişenlere göre üstten yarı sürekli değilse, o zaman bu tür diferansiyel denklemler veya D.I.'ler için Cauchy probleminin çözümü olmayabilir.

Örnek 4.1.1

$$\dot{x}\,(t) = \begin{cases} -1 & , \quad x \geq 0 \\ 1 & , \quad x < 0 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

diferansiyel denkleminin $x(0) = 0$ *koşulunu sağlayan çözümü yoktur. Ayrıca, eğer* $F(\cdot) : \mathbb{R} \to K(\mathbb{R})$ *k.d.d'ü*

$$F(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x > 0 \\ \{-2, 2\} & , \quad x = 0 \\ 1 & , \quad x < 0 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

gibi tanımlanırsa, o zaman $\dot{x}\,(t) \in F(x(t))$ *D.I.'nin* $x(0) = 0$ *koşulunu sağlayan çözümü yoktur.*

Sağ tarafı süreksiz diferansiyel denklemler ve sağ tarafı üstten yarı sürekli olmayan D.I.'ler için Cauchy probleminin çözümlerini tanımlamadan önce, yerel sınırlı k.d.d.'ün ve fonksiyonun tanımını sunalım.

Tanım 4.1.1 $F(\cdot) : \mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^n)$ *k.d.d. olsun. Eğer* $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}^m$, $\exists\ \varepsilon(x_0) > 0$ *için*

$$\sup \{\|f\| : f \in F(x)\ ,\ x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))\} < M(x_0)$$

olacak şekilde $\exists\ M(x_0) > 0$ *varsa* $F(\cdot)$ *k.d.d.'ne* $\mathbb{R}^m$*'de yerel sınırlı denir.*

Tanım 4.1.2 $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *olsun. Eğer* $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}^m$, $\exists\ \varepsilon(x_0) > 0$ *için*

$$\sup \{\|f(x)\| : x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))\} < M(x_0)$$

olacak şekilde $\exists\ M(x_0)$ *varsa* $f(\cdot)$ *fonksiyonuna* $\mathbb{R}^m$*'de yerel sınırlı denir.*

Sağ tarafı yerel sınırlı olan k.d.d.'ler için Cauchy probleminin çözümünü incelemeden önce, yerel sınırlı k.d.d.'lerin üstten yarı sürekli olması için bir yeter koşul sunalım.

Önerme 4.1.1 [10,38] $F(\cdot) : \mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^n)$ *yerel sınırlı,*

$$gr\ F(\cdot) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : y \in F(x)\}$$

kapalı olsun. O zaman $F(\cdot)$ *k.d.d. 'ü üstten yarı süreklidir.*

Şimdi $F(\cdot) : \mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^n)$ yerel sınırlı olmak üzere

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$$
$$x(t_0) = x_0$$

Cauchy problemine bakalım.

$(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ için

$$F^{(\delta)}(t, x) = co\ \{f \in F(\tau, y) : (\tau, y) \in B((t, x), \delta)\} \tag{4.1.2}$$

$$F_*(t, x) = \bigcap_{\delta > 0} F^{(\delta)}(t, x) \tag{4.1.3}$$

olsun. Burada $B((t, x), \delta) = \{(\tau, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \|(\tau, y) - (t, x)\| \leq \delta\}$ dır.

Tanım 4.1.3 *$(t,x) \to F(t,x)$ k.d.d. 'ü verildiğinde, (4.1.2) ve (4.1.3) ile belirlenen $(t,x) \to F_*(t,x)$ k.d.d.'ne $(t,x) \to F(t,x)$ k.d.d. 'ünün regülarizasyonu denir.*

Şimdi (4.1.2) ve (4.1.3) ile tanımlanmış $(t,x) \to F_*(t,x)$ k.d.d.'nün özelliklerini gösteren teoremi verelim.

Teorem 4.1.1 *$F(\cdot) : \mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^n)$ yerel sınırlı k.d.d. olsun. Bu durumda (4.1.3) ile belirlenmiş $(t,x) \to F_*(t,x)$ k.d.d.'ü için aşağıdakiler doğrudur.*

a) $\forall\ (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ *için* $F(t,x) \subset F_*(t,x)$

b) $\forall\ (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ *için* $F_*(t,x) \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt konveks kümedir, yani* $F_*(\cdot) : \mathbb{R}^m \to KV(\mathbb{R}^n)$ *dir.*

c) $(t,x) \to F_*(t,x)$ *k.d.d.'ü* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$*'de yerel sınırlıdır.*

d) $(t,x) \to F_*(t,x)$ *k.d.d.'ü* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$*'de üstten yarı süreklidir.*

Kanıt. a) Keyfi $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ alalım. O zaman (4.1.2)'den $\forall\ \delta > 0$ için

$$F(t,x) \subset F^{(\delta)}(t,x)$$

Buradan da $F(t,x) \subset \bigcap\limits_{\delta>0} F^{(\delta)}(t,x) = F_*(t,x)$ olur.

b) , c) Keyfi $(t_*,x_*) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ alalım ve sabitleyelim. $\delta_1 > \delta_2$ iken $B((t_*,x_*),\delta_2) \subset B((t_*,x_*),\delta_1)$ olduğundan

$$F^{(\delta_2)}(t_*,x_*) \subset F^{(\delta_1)}(t_*,x_*) \tag{4.1.4}$$

olur. $F(\cdot)$ k.d.d.'ü yerel sınırlı olduğundan $\varepsilon > 0$ ve $\forall\ (\tau,y) \in B((t_*,x_*),\varepsilon)$ için

$$\sup\{\|f\| : f \in F(\tau,y)\} \le M \tag{4.1.5}$$

olacak şekilde $M > 0$ vardır. O zaman (4.1.5)'den $\forall\ (\tau,y) \in B((t_*,x_*),\varepsilon)$ için

$$F(\tau,y) \subset B(0,M) \tag{4.1.6}$$

olur. $B(0,M)$ konveks küme olduğundan $\forall\ (\tau,y) \in B((t_*,x_*),\varepsilon)$ için

$$co\,\{f : f \in F(\tau,y),\ (\tau,y) \in B((t_*,x_*),\varepsilon)\} \subset B(0,M) \tag{4.1.7}$$

olur. Buradan da $\forall\, \delta \in (0, \varepsilon]$ için $F^{(\delta)}(t_*, x_*) \subset B(0, M)$ olur ve (4.1.3), (4.1.4)'den $F_*(t_*, x_*) \subset B(0, M)$ elde ederiz. Dolayısıyla $F_*(t_*, x_*)$ kümesi sınırlı olur.

$F_*(t_*, x_*)$ kümesi, kapalı konveks $F^{(\delta)}(t_*, x_*)$ ve $\delta_1 > \delta_2$ iken (4.1.4)'ü sağlayan kümelerin kesişimi olduğundan, $F_*(t_*, x_*)$ kümesi konveks ve kapalıdır.

$F_*(t_*, x_*)$ kümesi aynı zamanda sınırlı olduğundan, bu küme konveks ve kompakt olur.

Şimdi, $(t, x) \to F_*(t, x)$ k.d.d.'nün yerel sınırlı olduğunu gösterelim.

$(t, x) \in B((t_*, x_*), \frac{\varepsilon}{4})$ alalım. O zaman

$$B((t, x), \frac{\varepsilon}{4}) \subset B((t_*, x_*), \varepsilon) \tag{4.1.8}$$

olur.Bu durumda (4.1.7) ve (4.1.8)'den $\forall\ (\tau, y) \in B((t, x), \frac{\varepsilon}{4})$ için

$$F(\tau, y) \subset B(0, M)$$

dir ve böylece $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{4}]$ için

$$F^{(\delta)}(t, x) = co\ \{f : f \in F(\tau, y),\ (\tau, y) \in B((t, x), \delta)\} \subset B(0, M) \tag{4.1.9}$$

olur. $\forall\ \delta_1 > \delta_2$ için $F^{(\delta_1)}(t, x) \subset F^{(\delta_2)}(t, x)$ olduğundan,

$$\bigcap_{\delta>0} F^{(\delta)}(t, x) = \bigcap_{\delta\in(0,\frac{\varepsilon}{4}]} F^{(\delta)}(t, x)$$

olur ve bu durumda (4.1.9)'dan

$$F_*(t, x) = \bigcap_{\delta>0} F^{(\delta)}(t, x) \subset B(0, M)$$

elde ederiz. $(t_*, x_*) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ için $(t, x) \in B((t_*, x_*), \frac{\varepsilon}{4})$ olurken $F_*(t, x) \subset B(0, M)$, yani

$$\sup\ \{\|f\| : f \in F_*(t, x), (t, x) \in B((t_*, x_*), \frac{\varepsilon}{4})\} \leq M$$

olur. Sonuç olarak $(t_*, x_*) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ keyfi sabitlenmiş nokta olduğundan $F_*(\cdot)$ k.d.d.'nün yerel sınırlı olduğu elde edilir.

d) Şimdi $F(\cdot) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m \rightarrow KV(\mathbb{R}^n)$ k.d.d.'nün üstten yarı sürekli olduğunu gösterelim. $F(\cdot)$ k.d.d.'ü yerel sınırlı olduğundan, $F(\cdot)$ k.d.d.'ünün grafiğinin yani

$$gr\ F_*(\cdot) = \{(t,x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : y \in F_*(t,x)\}$$

kümesinin kapalı olduğunu gösterirsek, Önerme 4.1.1.'den $F_*(\cdot)$ k.d.d.'nün üstten yarı sürekliliğini elde ederiz.

Şimdi $gr\ F_*(\cdot)$'in kapalı küme olduğunu gösterelim. $\forall\, k = 1,2,\cdots$ için $(t_k, x_k, y_k) \in gr\ F_*(\cdot)$ ve $k \rightarrow \infty$ iken $(t_k,x_k,y_k) \rightarrow (t_*,x_*,y_*)$ olsun. O zaman $\forall\, k = 1,2,\cdots$ için $y_k \in F_*(t_k,x_k)$ olur. (4.1.2) ve (4.1.3)'e göre $\forall\, k = 1,2,\cdots$ ve $\delta > 0$ için

$$y_k \in F^\delta(t_k,x_k) = co\,\{f : f \in F(\tau,y),\ (\tau,y) \in B((t_k,x_k),\delta)\} \tag{4.1.10}$$

olur. $k \rightarrow \infty$ iken $\delta_k \rightarrow 0^+$ olacak şekilde $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ dizisi alalım. O zaman (4.1.10)'dan

$$y_k \in co\,\{f : f \in F(\tau,y),(\tau,y) \in B((t_k,x_k),\delta_k)\} \tag{4.1.11}$$

olur.Şimdi de

$$B((t_k,x_k),\delta_k) \subset B((t_*,x_*),\delta_k + \tau_k) \tag{4.1.12}$$

olduğunu göstermeye çalışalım. $\|(t_k,x_k) - (t_*,x_*)\| = \tau_k$ olsun. $k \rightarrow \infty$ iken $(t_k,x_k) \rightarrow (t_*,x_*)$ olduğundan, $k \rightarrow \infty$ iken $\tau_k \rightarrow 0^+$ olur. Keyfi $z \in B((t_k,x_k),\delta_k)$ alalım. O zaman

$$\|z - (t_*,x_*)\| \leq \|z - (t_k,x_k)\| + \|(t_k,x_k) - (t_*,x_*)\| \leq \delta_k + \tau_k$$

olur. Yani $z \in B((t_*,x_*),\delta_k+\tau_k)$ dir. $h_k = \delta_k + \tau_k$ olsun. O zaman $k \rightarrow \infty$ iken $h_k \rightarrow 0^+$ olur ve (4.1.11) ve (4.1.12)'den $\forall\, k = 1,2,\cdots$ için

$$y_k \in co\,\{f : f \in F(\tau,y),\ (\tau,y) \in B((t_*,x_*),h_k)\}$$

olur. O halde, $\forall\, k = 1,2,\cdots$ için

$$y_k \in F^{(h_k)}(t_*,x_*) \tag{4.1.13}$$

olur. $\forall\ \delta_1 < \delta_2$ için $F^{(\delta_1)}(t_*, x_*) \subset F^{(\delta_2)}(t_*, x_*)$, $k \to \infty$ iken $y_k \to y_*$, $h_k \to 0$ olduğundan , (4.1.13) 'den

$$y_* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F^{(h_k)}(t_*, x_*) \tag{4.1.14}$$

olduğunu elde ederiz.

Şimdi

$$\bigcap_{\delta>0} F^{(\delta)}(t_*, x_*) = \bigcap_{k=1}^{\infty} F^{(h_k)}(t_*, x_*) \tag{4.1.15}$$

olduğunu gösterelim. Açıktır ki

$$\bigcap_{\delta>0} F^{(\delta)}(t_*, x_*) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} F^{(h_k)}(t_*, x_*) \tag{4.1.16}$$

dir.

Şimdi

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F^{(h_k)}(t_*, x_*) \subset \bigcap_{\delta>0} F^{(\delta)}(t_*, x_*) \tag{4.1.17}$$

olduğunu gösterelim. $f_* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F^{(h_k)}(t_*, x_*)$ alalım. O zaman $\forall\ k = 1, 2, \cdots$ için

$$f_* \in F^{(h_k)}(t_*, x_*) \tag{4.1.18}$$

dir. $f_* \in \bigcap_{\delta>0} F^{(\delta)}(t_*, x_*)$ olduğunu gösterelim. Kabuledelim ki $f_* \notin \bigcap_{\delta>0} F^{(\delta)}(t_*, x_*)$ olsun. O zaman $\forall\ \delta \in (0, \delta_*]$ için

$$f_* \notin F^{(\delta)}(t_*, x_*) \tag{4.1.19}$$

olacak şekilde $\exists\ \delta_*$ vardır. $k \to \infty$ iken $h_k \to 0^+$ olduğundan $\forall\ k \geq k_*$ için $0 < h_k < \frac{\delta_*}{2}$ olacak şekilde $k_* > 0$ vardır. O zaman (4.1.19)'dan $\forall\ k \geq k_*$ için

$$f_* \notin F^{(h_k)}(t_*, x_*) \tag{4.1.20}$$

olur. Bu (4.1.18) ve (4.1.20) çelişir, yani kabulümüz doğru değildir ve $f_* \in \bigcap_{\delta>0} F^{(\delta)}(t_*, x_*)$ dır. $f_* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F^{(h_k)}(t_*, x_*)$ keyfi eleman olduğundan (4.1.17) doğrudur. (4.1.16) ve (4.1.17)'den (4.1.15)'i elde ederiz. (4.1.14) ve (4.1.15)'den

$$y_* \in \bigcap_{\delta>0} F^{(\delta)}(t_*, x_*) = F_*(t_*, x_*) \text{ ve } (t_*, x_*, y_*) \in gr\ F_*(\cdot)$$

olur. Böylece $gr\ F_*(\cdot)$ kümesinin kapalı olduğunu göstermiş oluruz. Teorem kanıtlanır. ■

Şimdi, $F(\cdot) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ üstten yarı sürekli olurken, (4.1.2) ve (4.1.3) ile belirlenmiş regülarizasyonun $\forall\ (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ için $F(t,x)$ kümesini nasıl değiştireceğini araştıralım.

Teorem 4.1.2 *$F(\cdot) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ üstten yarı sürekli k.d.d., $\forall\ (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ için $F_*(t,x)$ kümesi (4.1.2) ve (4.1.3) ile belirlensin. O zaman $\forall\ (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ için $F_*(t,x) = co\ F(t,x)$ dir.*

Kanıt. Önce $F(\cdot) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ k.d.d.'nün yerel sınırlı olduğunu gösterelim. Keyfi $(t_*, x_*) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ ve $\varepsilon = 1$ alalım. O zaman,$\forall\ (t,x) \in B((t_*, x_*), \delta_*)$ için

$$F(t,x) \subset F(t_*, x_*) + B \tag{4.1.21}$$

olacak biçimde $\delta_* = \delta_*(1)$ vardır. $F(t_*, x_*) \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme olduğundan $\max\ \{\|f\| : f \in F(t_*, x_*)\} \leq M < +\infty$ olan $M > 0$ vardır. O zaman (4.1.21)'den

$$\max\ \{\|f\| : f \in F(t,x)\ ,\ (t,x) \in B((t_*, x_*), \varepsilon)\} \leq M + 1$$

olur. Böylece $F(\cdot)$ k.d.d.'nün yerel sınırlı olduğunu göstermiş oluruz. Bu durumda $\forall\ (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ için (4.1.2) ve (4.1.3) ile belirlenmiş $F_*(t,x)$ kümesi kompakt ve konvekstir.

Yine keyfi $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ alalım ve sabitleyelim. O zaman Teorem 4.1.1'e göre

$$F(t,x) \subset F_*(t,x)$$

olur. $F_*(t,x)$ konveks ve kompakt olduğundan

$$co\ F(t,x) \subset F_*(t,x) \tag{4.1.22}$$

olur. Şimdi

$$F_*(t,x) \subset co\ F(t,x) \tag{4.1.23}$$

olduğunu gösterelim.

$\forall\ \varepsilon > 0$ için $F(\cdot)$ k.d.d.'ü üstten yarı sürekli olduğundan, $\forall\ \varepsilon > 0$ ve $\forall(\tau, y) \in B((t,x),\delta_*)$ için

$$F(\tau, y) \subset F(t,x) + \varepsilon B$$

olacak biçimde $\delta_* = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır. Buradan

$$F^{(\delta_*)}(t,x) = co\ \{f : f \in F(\tau, y)\ ,\ (\tau, y) \in B((t,x),\delta_*)\} \subset co\ (F(t,x) + \varepsilon B)$$

olur. $co\ (F(t,x) + \varepsilon B) = co\ F(t,x) + \varepsilon B$ olduğundan

$$F^{(\delta_*)}(t,x) \subset co\ F(t,x) + \varepsilon B \tag{4.1.24}$$

elde ederiz. $\forall\ \delta_1 < \delta_2$ için $F^{(\delta_1)}(t,x) \subset F^{(\delta_2)}(t,x)$ olduğundan (4.1.24)'den , $\forall\ \delta \in (0, \delta_*)$ için

$$F^{(\delta)}(t,x) \subset co\ F(t,x) + \varepsilon B \tag{4.1.25}$$

ve ayrıca $\bigcap\limits_{\delta>0} F^{(\delta)}(t,x) = \bigcap\limits_{\delta\in(0,\delta_*]} F^{(\delta)}(t,x)$ dir. Bu durumda, (4.1.25)'den

$$F_*(t,x) = \bigcap_{\delta>0} F^{(\delta)}(t,x) = \bigcap_{\delta\in(0,\delta_*]} F^{(\delta)}(t,x) \subset co\ F(t,x) + \varepsilon B \tag{4.1.26}$$

olur. $\varepsilon > 0$ keyfi sayı olduğundan (4.1.26)'dan (4.1.23) elde edilir. (4.1.22) ve (4.1.23)'den teorem kanıtlanır. ■

Bu teoremden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.1.1 *$F(\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to KV(\mathbb{R}^n)$ üstten yarı sürekli k.d.d., $\forall\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ için $F_*(t,x)$ kümesi (4.1.2) ve (4.1.3) ile belirlensin. O zaman $\forall\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ için $F(t,x) = F_*(t,x)$ olur.*

Bu sonuca göre, eğer k.d.d. kompakt konveks değerli ve üstten yarı sürekli ise, o zaman (4.1.2) ve (4.1.3) regülarizasyonu k.d.d.'ü değiştirmez.

Varsayalım $F(\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to K(\mathbb{R}^n)$ k.d.d.'nde $\forall\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ için $F(t,x) = \{f(t,x)\}$, yani $F(\cdot)$ k.d.d.'ü tek değerli olsun. O zaman (4.1.2) ve (4.1.3) regülarizasyonu

$$F^{(\delta)}(t,x) = co\ \{f(\tau,y) : (\tau,y) \in B((t,x),\delta)\} \tag{4.1.27}$$

$$F_*(t,x) = \bigcap_{\delta>0} F^{(\delta)}(t,x) \tag{4.1.28}$$

şeklinde olur.

Sonuç 4.1.2 $F(\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to KV(\mathbb{R}^n)$ *k.d.d'ünde* $\forall\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *için* $F(t,x) = \{f(t,x)\}$, $f(\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *yerel sınırlı bir fonksiyon olsun. O zaman (4.1.27) ve (4.1.28) ile belirlenmiş* $(t,x) \to F_*(t,x)$ *k.d.d.'ü için*

a) $\forall\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *için* $f(t,x) \in F_*(t,x)$ *dir.*

b) $\forall\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *için* $F_*(t,x) \subset \mathbb{R}^n$ *konveks kompakt kümedir.*

c) $(t,x) \to F_*(t,x)$ *k.d.d.'ü üstten yarı süreklidir.*

d) $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *noktasında* $f(\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *fonksiyonu sürekli ise* $F_*(t,x) = \{f(t,x)\}$ *dir.*

Şimdi sağ tarafı yerel sınırlı $F(\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ k.d.d.'ü olan $\dot{x}\ (t) \in F(t,x(t))$ D.I.'si için

$$\dot{x}\ (t) \in F(t,x(t))\ ,\ t \in [a,b]$$
$$x(t_0) = x_0$$

Cauchy problemine bakalım. Örnek 4.1.1.'de gördüğümüz gibi (4.1.29) probleminin çözümü olmayabilir. Bu tür Cauchy problemlerinin çözümünü tanımlamak için, önce $F(\cdot)$ k.d.d.'ünün (4.1.2) ve (4.1.3) regülarizasyonu yapılır ve (4.1.29) Cauchy problemi

$$\dot{x}\ (t) \in F_*(t,x(t))\ ,\ t \in [a,b]$$
$$x(t_0) = x_0$$

Cauchy problemi ile değiştirilir. Burada $\forall\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ için $F_*(t,x)$ kümesi (4.1.2) ve (4.1.3) ile belirlenir.

O halde, $F_*(\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to KV(\mathbb{R}^n)$ üstten yarı sürekli k.d.d. olur ve Teorem 3.1.2'ye göre (4.1.30) Cauchy probleminin çözümü vardır. Bazı durumlarda (4.1.30) Cauchy probleminin çözümüne (4.1.29) Cauchy probleminin çözümü denir.

Şimdi Örnek 4.1.1'e dönelim. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ için

$$F(x) = \begin{cases} -1 & , \ x > 0 \\ \{-2, 2\} & , \ x = 0 \\ 1 & , \ x < 0 \end{cases} \tag{4.1.31}$$

olmak üzere

$$\dot{x}\,(t) \in F(x(t))\ ,\ t \in [0,1]$$
$$x(0) = 0$$

Cauchhy problemine bakalım. (4.1.31) ile belirlenmiş $F(\cdot)$ k.d.d.'ünün (4.1.2) (4.1.3) regülarizasyonu $\forall\, x \in \mathbb{R}$ için

$$F_*(x) = \begin{cases} -1 & , \ x > 0 \\ [-2, 2] & , \ x = 0 \\ 1 & , \ x < 0 \end{cases}$$

olur. Bu durumda $x(t) = 0$, ($t \in [0,1]$) fonksiyonu

$$\dot{x}\,(t) \in F_*(x(t))\ ,\ t \in [0,1]$$
$$x(0) = 0$$

Cauchy probleminin çözümü olur.

Aynı şekilde sağ tarafı yerel sınırlı fonksiyonlar olan diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin çözümünü tanımlayalım.

$f(\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ yerel sınırlı fonksiyon olmak üzere

$$\dot{x}\,(t) = f(t, x(t))$$
$$x(t_0) = x_0$$

Cauchy problemine bakalım. Bu durumda yerel sınırlı $f(\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun (4.1.27) (4.1.28) regülarizasyonunu yaparız ve (4.1.33) Cauchy problemini

$$\dot{x}\,(t) \in F_*(t, x(t))$$
$$x(t_0) = x_0$$

Cauchy problemi ile değiştiririz. $\forall\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ için $F_*(t,x)$ kümesi (4.1.27) (4.1.28) ile bulunur. O halde Sonuç 4.1.2'ye göre (4.1.34) Cauchy probleminin çözümü vardır ve bazı durumlarda (4.1.34) Cachy probleminin çözümüne (4.1.33) probleminin çözümü denir.

Şimdi yine Örnek 4.1.1.'e dönelim ve

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \ x \geq 0 \\ 1 & , \ x < 0 \end{cases} \quad , t \in [0,1]$$

olmak üzere

$$\dot{x}\ (t) = f(x)$$
$$x(0) = 0\ ,\ t \in [0,1]$$

Cauchy problemine bakalım. Bu problemin çözümü yoktur. $f(\cdot)$ fonksiyonunun (4.1.27) (4.1.28) regülarizasyonu

$$F_*(x) = \begin{cases} -1 & , \ x > 0 \\ [-1,1] & , \ x = 0 \\ 1 & , \ x < 0 \end{cases} \tag{4.1.36}$$

olmak üzere $F_*(\cdot) : \mathbb{R} \to KV(\mathbb{R})$ k.d.d.'ü olur. O zaman $\forall\ x \in \mathbb{R}$ için $F_*(x)$ kümesi (4.1.36) ile tanımlanmak üzere

$$\dot{x}\ (t) \in F_*(x(t))$$
$$x(0) = 0\ ,\ t \in [0,1]$$

Cauchy probleminin çözümü vardır ve bu $\forall\ t \in [0,1]$ için $x(t) = 0$ fonksiyonudur.

4.2 Sağ Tarafı Konveks Değerli Olmayan Küme Değerli Dönüşüm Olan Diferansiyel İçermelerin Çözümlerinin Varlığı

Şimdiye kadar sağ tarafı konveks değerli k.d.d.'ler olan D.I.'in çözümlerinin varlığını inceledik. Üçüncü bölümde Örnek 3.2.2'de D.I.'nin sağ tarafı konveks değerli k.d.d. olmadıkça, çözümler kümesinin kapalı olmadığını gördük. Ayrıca ikinci bölümde Örnek 2.3.1'de sağ tarafı kompakt değerli, üstten yarı sürekli k.d.d. olan D.I. için

Cauchy probleminin çözümünün olmadığını gördük. Bu kesimde, sağ tarafı sadece kompakt değerli k.d.d. olan D.I.'ler için Cauchy probleminin çözümünün varlığını inceleyeceğiz.

Teorem 4.2.1 *$G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ açık küme $(t_0, x_0) \in G$, $F(\cdot) : G \to K(\mathbb{R}^n)$ sürekli k.d.d. olsun. O zaman $[t_0 - \alpha^*, t_0 + \alpha_*]$ aralığında*

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$$
$$x(t_0) = x_0$$

Cauchy probleminin çözümü olacak şekilde $\alpha^* > 0$, $\alpha_* > 0$ vardır.

Kanıt. Önce (4.2.1) probleminin $[t_0, t_0 + \alpha_*]$ ($\alpha_* > 0$) aralığında çözümünün varlığını gösterelim. $(t_0, x_0) \in G$, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ açık küme olduğundan

$$Z = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : 0 \leq t - t_0 \leq a \ , \ \|x - x_0\| \leq 2b\} \subset G \tag{4.2.2}$$

olan $a > 0$, $b > 0$ vardır. Z kompakt küme, $F(\cdot)$ sürekli k.d.d. olduğundan $\bigcup\limits_{(t,x) \in Z} F(t, x)$ kompakt kümedir.

$$M = \max \{\|f\| : f \in F(t, x), \ (t, x) \in Z\} + 1$$

olsun. O zaman $1 \leq M < +\infty$ olur.

$$\alpha_* = \min \{a, \frac{b}{M}\} \tag{4.2.3}$$

olsun. Açıktır ki, $\alpha_* > 0$ dır. Eğer $x(\cdot) : [t_0, t_0 + \alpha_*] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu M sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlıyorsa, yani $\forall \ t_1, \ t_2 \in [t_0, t_0 + \alpha_*]$ için

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq M \ |t_2 - t_1| \quad \text{ve} \quad x(t_0) = x_0$$

ise, o zaman

$$gr \ x(\cdot) \subset Z \tag{4.2.4}$$

dir. Bu durumda $\forall \ t \in [t_0, t_0 + \alpha_*]$ için $(t, x(t)) \in Z$ olur.

Gerçekten $\forall\, t \in [t_0, t_0+\alpha_*]$ için

$$\|x(t)-x_0\| = \|x(t)-x(t_0)\| \leq M\ |t-t_0| \leq M\ \alpha_* \leq M\ \frac{b}{M} = b \tag{4.2.5}$$

dir. $\alpha_* \leq a$ olduğundan (4.2.2) ve (4.2.5)'den (4.2.4)'ü elde ederiz.

Şimdi $[t_0, t_0+\alpha_*]$ aralığında (4.2.1) Cauchy probleminin çözümünün varlığını kanıtlayalım.

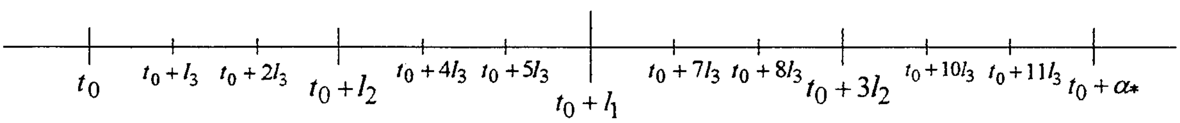
$\eta_k = \frac{1}{2k}$ ($k = 1, 2, \cdots$) olsun. $F(\cdot) : G \to K(\mathbb{R}^n)$ k.d.d.'ü $Z \subset G$ kompakt kümesinde sürekli, $K(\mathbb{R}^n)$-metrik uzay olduğundan ($K(\mathbb{R}^n)$ uzayında metrik $\alpha(\cdot,\cdot)$ Hausdorff uzaklığıdır) , $F(\cdot)$ k.d.d.'ü Z kompakt kümesinde düzgün sürekli olur. O zaman $\eta_k = \frac{1}{2^k}$ ve $|t-\tau| \leq \delta_k$, $|x-y| \leq M \cdot \delta_k$ için

$$\alpha(F(t,x), F(\tau,y)) \leq \eta_k \tag{4.2.6}$$

olacak şekilde $0 < \delta_k < \eta_k$ vardır.($(t,x),(\tau,y) \in Z$) Şimdi $l_1 \leq \delta_1$ olmak üzere l_1 sayısını $N_1 = \frac{\alpha_*}{l_1}$ doğal sayı olacak şekilde seçelim. $[t_0, t_0+\alpha_*]$ aralığının $t_{1,i} = t_0 + i \cdot l_1$, $i = 0, 1, \cdots, N_1$ noktaları ile $[t_{1,i}, t_{1,i+1})$ $i = 0, 1, \cdots, N_1 - 1$ bölüntülerini alalım.Şimdi $l_2 < \delta_2$ olmak üzere $l_2 > 0$ sayısını $N_2 = \frac{\alpha_*}{l_2} > 1$, $v_2 = \frac{l_1}{l_2} > 1$ doğal sayılar olacak şekilde seçelim. O zaman $t_{2,i} = t_0 + il_2$, $i = 0, 1, 2, \cdots, N_2$ noktaları $[t_0, t_0+\alpha_*]$ aralığının ikinci bölüntüsünün bölüntü noktaları olur. Bu durumda birinci bölüntünün $t_{1,i} = t_0 + il_1$, $i = 0, 1, 2, \cdots, N_1$ bölüntü noktaları, aynı zamanda ikinci bölüntününde bölüntü noktalarıdırlar.Böyle devam edilerek $[t_0, t_0+\alpha_*]$ aralığının m. bölüntüsü elde edilebilir.

Böylece $l_m \leq \delta_m$ olmak üzere l_m sayısı $N_m = \frac{\alpha_*}{l_m} > 1$, $v_m = \frac{l_{m-1}}{l_m} > 1$ doğal sayılar olacak şekilde seçilebilir. $t_{m,i} = t_0 + i\cdot\ l_m$, $i = 0, 1, \cdots, N_m$ noktaları $[t_0, t_0+\alpha_*]$ aralığının m. bölüntüsü için bölüntü noktalarıdır. Bu durumda $[t_0, t_0+\alpha_*]$ aralığının m. bölüntüsü $[t_{m,i}, t_{m,i+1})$, $i = 0, 1, \cdots, N_m - 1$ aralıkları olur ve $(m-1)$. bölüntünün $t_{m-1,i} = t_0 + il_{m-1}$, $i = 0, 1, 2, \cdots, N_{m-1}$ bölüntü noktaları aynı zamanda m. bölüntününde bölüntü noktaları olur.Böylece her m. bölüntü, $(m-1)$. bölüntünün bölüntü noktalarını içerdiğinden, m. bölüntünün bölüntü noktaları önceki bölüntülerin bir kısmında bölüntü noktaları olur. Eğer τ herhangi bir bölüntünün bölüntü noktası ise, $o(\tau)$ doğal sayısı ile τ noktasının bölüntü noktası olduğu ilk bölüntünün sıra numarasını göstereceğiz. Yani, τ noktası $o(\tau)$. bölüntünün bölüntü noktasıdır ve $\forall\ k < o(\tau)$ için τ k. bölüntünün bölüntü noktası değildir. τ herhangi bir bölüntünün bölüntü noktası iken, $o(\tau)$'ya τ'nun mertebesi diyeceğiz.

Açıktır ki, eğer τ noktası herhangi bir bölüntünün bölüntü noktası ve $o(\tau) > 1$ ise τ noktası $(o(\tau)-1)$. bölüntünün bölüntü noktası değildir. Bu durumda τ noktası $(o(\tau)-1)$. bölüntünün bir bölüntü aralığının içinde olur. Bu bölüntü aralığının 1. noktasını $s(\tau)$ ile gösterelim. O zaman $s(\tau)$ noktası $(o(\tau)-1)$. bölüntünün bölüntü noktası olur.



Şekil 4.2.1: $o(\tau)$ ve $s(\tau)$ hesabı örneği

$$\begin{array}{lll} o(t_0+l_2)=2 & o(t_0+5l_3)=3 & o(t_0+10l_3)=3 \\ s(t_0+l_2)=t_0 & s(t_0+5l_3)=t_0+l_2 & s(t_0+10l_3)=t_0+3l_2 \end{array}$$

Şimdi $[t_0, t_0+\alpha_*]$ aralığının 1. bölüntüsü için $x_1(t_0)=x_0$ olmak üzere $x_1(\cdot):[t_0,t_0+\alpha_*]\rightarrow \mathbb{R}^n$ Euler yaklaşımını yapalım. 1. bölüntünün her $[t_{1,i}, t_{1,i+1}) = [t_0+i\cdot l_1,\ t_0+(i+1)\cdot l_1)$ $(i=0,1,\cdots,N_1-1)$ aralığında

$$x_1(t) = x_1(t_{1,i}) + v_{1,i}(t-t_{1,i}) \tag{4.2.7}$$

olsun. Burada $v_{1,i}\in F(t_{1,i}, x_1(t_{1,i}))$ dir. (4.2.7)'den $\forall\ t\in[t_{1,i},t_{1,i+1})$ için $(i=0,1,\cdots,N_1-1)$ dir.

$$\dot{x}_1\ (t) = v_{1,i} \in F(t_{1,i}, x_1(t_{1,i})) \tag{4.2.8}$$

olur. Burada $t=t_{1,i}$ noktasında $(i=0,1,\cdots,N_1-1)$ $x_1(\cdot)$ fonksiyonunun sağ türevi düşünülür.

Teorem 2.3.1.'in kanıtına benzer olarak, $x_1(\cdot) : [t_0, t_0 + \alpha_*] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu M sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlar ve (4.2.4)'e göre

$$gr\ x_1(\cdot) \subset Z \tag{4.2.9}$$

olur. Bu durumda $\forall\, t \in [t_{1,i}, t_{1,i+1}) = [t_0 + i \cdot l_1, t_0 + (i+1) \cdot l_1)$ için $(i = 0, 1, \cdots, N_1 - 1)$

$$\begin{aligned} &0 \le t - t_{1,i} \le t_{1,i+1} - t_{1,i} = t_0 + (i+1)l_1 - t_0 - il_1 = l_1 \le \delta_1 \\ &\|x_1(t) - x_1(t_{1,i})\| \le M\ |t - t_{1,i}| \le M\ l_1 \le M\ \delta_1 \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

olduğunu elde ederiz. O halde (4.2.6) ve (4.2.10)'dan $\forall\ t \in [t_{1,i}, t_{1,i+1})$ için $(i = 0, 1, \cdots, N_1 - 1)$

$$\alpha(F(t_{1,i}, x_1(t_{1,i})), F(t, x_1(t))) \le \eta_1 \tag{4.2.11}$$

olur. O zaman (4.2.8) ve (4.2.11)'den $\forall\ t \in [t_{1,i}, t_{1,i+1})$ için $(i = 0, 1, \cdots, N_1 - 1)$

$$\begin{aligned} dist\ (\dot{x}_1\ (t), F(t, x_1(t)) &= dist\ (v_{1,i}, F(t, x_1(t)) \\ &\le \alpha(F(t_{1,i}, x_1(t_{1,i})), F(t, x_1(t))) \le \eta_1 \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

bulunur. Böyle devam ederek, $[t_0, t_0 + \alpha_*]$ aralığının m. bölüntüsü için Euler yaklaşımını belirleyelim. Biliyoruz ki, m. bölüntünün noktaları $t_{m,i} = t_0 + i \cdot l_m$, $i = 0, 1, \cdots, N_m$, $l_m < \delta_m$ ve $\frac{\alpha_*}{l_m} = N_m$ dir. m. bölüntü için $x_m(\cdot) : [t_0, t_0 + \alpha_*] \to \mathbb{R}^n$ Euler yaklaşımını $x_m(t_0) = x_0$ olmak üzere $t \in [t_{m,i}, t_{m,i+1})$ iken $(i = 0, 1, \cdots, N_m - 1)$

$$x_m(t) = x_m(t_{m,i}) + v_{m,i}(t - t_{m,i}) \tag{4.2.13}$$

gibi belirleyelim. Burada $v_{m,i} \in F(t_{m,i}, x_m(t_{m,i}))$ dir. (4.2.13)'den için $(i = 0, 1, \cdots, N_m - 1)$

$$\dot{x}_m\ (t) = v_{m,i} \in F(t_{m,i}, x_m(t_{m,i})) \tag{4.2.14}$$

olur. (4.2.14)'de $t = t_{m,i}$ iken $x_m(\cdot)$ fonksiyonunun sağ türevi düşünülür.

Yine Teorem 2.3.1.'in kanıtındaki gibi, $x_m(\cdot) : [t_0, t_0 + \alpha_*] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu M sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlar ve o zaman (4.2.4)'den

$$gr\ x_m(\cdot) \subset Z \tag{4.2.15}$$

olur. $x_m(\cdot)$ fonksiyonu M sabitiyle Lipschitz koşulunu sağladığından,$\forall\, t \in [t_{m,i}, t_{m,i+1})$ $= [t_0 + i \cdot l_m, t_0 + (i+1) \cdot l_m)$ için

$$0 \le t - t_{m,i} \le t_{m,i+1} - t_{m,i} \le t_0 + (i+1)l_m - t_0 - il_m = l_m \le \delta_m$$
$$\|x_m(t) - x_m(t_{m,i})\| \le M\,|t - t_{m,i}| \le M\; l_m \le M\; \delta_m$$

olur. O zaman (4.2.6) ve (4.2.16)'dan $\forall\, t \in [t_{m,i}, t_{m,i+1})$ için ($i = 0, 1, \cdots, N_m - 1$)

$$\alpha(F(t_{m,i}, x_m(t_{m,i})), F(t, x_m(t))) \le \eta_m \tag{4.2.17}$$

dir. Bu durumda (4.2.14) ve (4.2.17)'den $\forall t \in [t_{m,i}, t_{m,i+1})$ için ($i = 0, 1, \cdots, N_m - 1$)

$$\begin{aligned} dist\ (\dot{x}_m\ (t), F(t, x_m(t))) &= dist\ (v_{m,i}, F(t, x_m(t))) \\ &\le \alpha(F(t_{m,i}, x_m(t_{m,i})), F(t, x_m(t))) \le \eta_m \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

olur.

Şimdi (4.2.13)'de verilen $x_m(\cdot) : [t_0, t_0 + \alpha_*] \to \mathbb{R}^n$ Euler yaklaşımının aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde seçilebileceğini gösterelim.

$[t_0, t_0 + \alpha_*]$ aralığının m. bölüntüsünün keyfi t bölüntü noktası için

a) $x_m(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, t]$ aralığında sürekli, $x_m(t_0) = x_0$ ve m. bölüntünün $[t_0, t]$ aralığında olan bölüntü aralıklarında $\dot{x}_m\ (.)$ sabittir.

b) m. bölüntünün keyfi $\tau \in [t_0, t)$ bölüntü noktası için

$$\dot{x}_m\ (\tau) \in F(\tau,\ x_m(\tau))$$

dur.

c) m. bölüntünün keyfi $\tau \in [t_0, t)$ bölüntü noktası için

$$d(\dot{x}_m\ (\tau), \dot{x}_m\ (s(\tau))) \le \eta_{o(\tau)-1}$$

dir. ($o(\tau)$ ve $s(\tau)$ önceden tanımlanmış dönüşümlerdir.) Tümevarım yöntemi ile bu tür seçimin varlığını kanıtlayalım. m. bölüntünün 1. bölüntü noktası t_0'dır ve $[t_0, t_0]$ aralığında $x_m(t_0) = x_0$ dır. Bu durumda $[t_0, t_0)$ aralığında diğer bölüntü noktası yoktur.

Kabul edelim ki $x_m(\cdot)$ fonksiyonu $t_* \in [t_0, t)$, $(t_* > t_0)$ bölüntü noktasına kadar a-c deki gibi seçilsin. $o(t_*)$ ve $s(t_*)$'ın tanımına göre, t_* noktası $o(t_*)$. bölüntünün bölüntü noktasıdır, $(o(t_*)-1)$. bölüntünün bölüntü noktası değildir. Aynı zamanda $s(t_*)$ noktası $(o(t_*)-1)$. bölüntünün bölüntü noktasıdır ve t_*'ı içeren bölüntü aralığının başlangıç noktasıdır. O zaman

$$t_* - s(t_*) < l_{o(t_*)-1} < \delta_{o(t_*)-1} \tag{4.2.19}$$

olur. $x_m(\cdot)$ fonksiyonu M sabitiyle Lipschitz koşulunu sağladığından (4.2.19)'dan

$$\|x_m(t_*) - x_m(s(t_*))\| \leq M\ l_{o(t_*)-1} \leq M\delta_{o(t_*)-1} \tag{4.2.20}$$

olur. O halde (4.2.6), (4.2.19) ve (4.2.20)'den

$$\alpha(F(t_*, x_m(t_*)), F(s(t_*), x_m(s(t_*))) \leq \eta_{o(t_*)-1} \tag{4.2.21}$$

olur. $o(t_*) - 1 < m$, $s(t_*)$ noktası $(o(t_*) - 1)$. bölüntünün bölüntü noktası olduğundan $s(t_*) < t_*$ ve $s(t_*)$ noktası m. bölüntünün bölüntü noktasıdır. O zaman Euler yaklaşımının tanımı (4.2.13) veya (b)'den

$$\dot{x}_m\ (s(t_*)) \in F(s(t_*), x_m(s(t_*)))$$

olur. Bu durumda (4.2.21)'e göre

$$\left\|v - \dot{x}_m\ (s(t_*))\right\| \leq \eta_{o(t_*)-1} \tag{4.2.22}$$

olacak biçimde $v \in F(t_*, x_m(t_*))$ vardır. Şimdi $[t_*, t_* + l_m)$ aralığında $x_m(\cdot)$ Euler yaklaşımını

$$x_m(t) = x_m(t_*) + (t - t_*) \cdot v \tag{4.2.23}$$

şeklinde tanımlayalım. (4.2.22) ve (4.2.23)'den

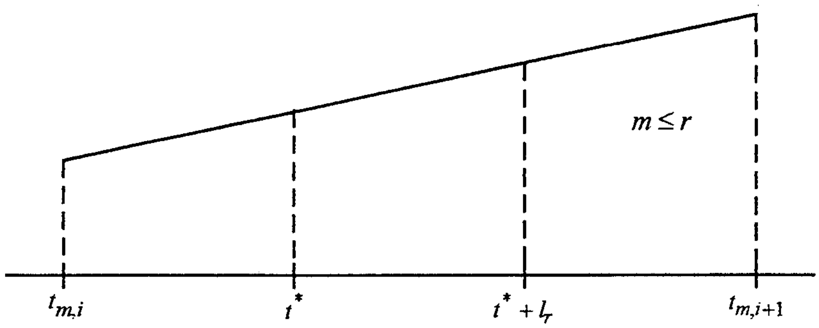
$$d(\dot{x}_m\ (t_*), \dot{x}_m\ (s(t_*))) \leq \eta_{o(t_*)-1} \tag{4.2.24}$$

elde ederiz. O zaman $x_m(.)$ Euler yaklaşımı m. bölüntünün t_* bölüntü noktası için a-c koşullarını sağladığından (4.2.23) ve (4.2.24)'e göre $x_m(.)$ Euler yaklaşımı m. bölüntünün $t_* + l_m$ bölüntü noktası da a-c koşullarını sağlar.

Şimdi tümevarım yöntemine göre t noktası m. bölüntünün bölüntü noktası olmak üzere $x_m(\cdot)$ Euler yaklaşımı a-c'yi sağlayacak şekilde seçilebilir. Somut olarak, $t_0 + \alpha_* = t_0 + N_m \cdot l_m$ noktası m. bölüntünün bölüntü noktası olduğundan $t = t_0 + \alpha_*$ olurken, $x_m(\cdot)$ Euler yaklaşımı a-c'yi sağlayacak şekilde seçilebilir.

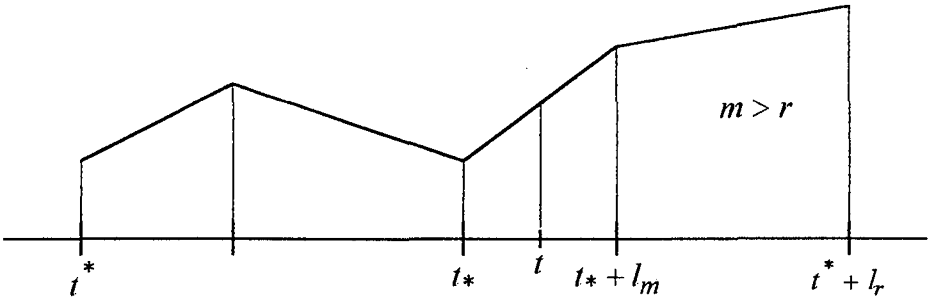
Şimdi a-c koşullarını sağlayan $\dot{x}_m(\cdot) : [t_0, t_0 + \alpha_*] \to \mathbb{R}^n$ foksiyonunun r. bölüntünün $J = [t^*, t^* + l_r)$ aralığındaki osilasyonunu hesaplayalım. Burada t^* r. bölüntünün bölüntü noktasıdır.

Eğer $r \geq m$ ise r. bölüntünün $J = [t^*, t^* + l_r)$ aralığı m. bölüntünün bir $[t_{m,i}, t_{m,i+1}]$ ($i = 0, 1, \cdots, N_{m-1}$) bölüntü aralığı içinde olur. Bu durumda (4.2.13)'e göre $J = [t^*, t^* + l_r)$ aralığında $\dot{x}_m(\cdot)$ fonksiyonu sabittir. O halde $J = [t^*, t^* + l_r)$ aralığında $\dot{x}_m(\cdot)$ fonksiyonunun osilasyonu sıfır olur.



Şekil 4.2.2: $x_m(t)$, $t \in [t_{m,i}, t_{m,i+1}]$

Şimdi $m > r$ durumuna bakalım. $t_*' \in J = [t^*, t^* + l_r)$ bir bölüntü noktası olsun. O zaman $o(t_*') \geq o(t^*)$ olur. $o(t_*') = o(t^*)$ ise $t_*' = t^*$ olur. Ayrıca, eğer $k' = o(t_*') - o(t^*) > 0$ ise $s(t_*') \in J$ olur. $s^0(t_*') = t_*'$, $s^1(t_*') = s(t_*')$, $s^2(t_*') = s(s^1(t_*'))$ v.s. $s^p(t_*') = s(s^{p-1}(t_*'))$ diyelim. O zaman $s^{k'}(t_*') = t^*$ ve $\forall\, p = 0, 1, \cdots, k'$ için $s^p(t_*') \in J$ olur. $t \in J$ alalım ve sabitleyelim.Kabul edelim ki $[t_*, t_* + l_m)$ aralığı t noktasını içeren m. bölüntünün bölüntü aralığı olsun. O zaman t_* noktası m. bölüntünün bölüntü noktası olur.



Şekil 4.2.3: $x_m(t)$, $t \in [t_*, t_* + l_m)$

Yine (4.2.13)'den $t \in [t_*, t_* + l_m)$ olduğundan $\dot{x}_m(t) = \dot{x}_m(t_*)$ ve

$$
\begin{aligned}
d(\dot{x}_m(t_*), \dot{x}_m(t^*)) &\leq d(\dot{x}_m(t_*), \dot{x}_m(s(t_*))) \\
&+ d(\dot{x}_m(s(t_*)), \dot{x}_m(s^2(t_*))) + \cdots + d(\dot{x}_m(s^{k-l}(t_*)), \dot{x}_m(s^k(t_*)))
\end{aligned} \tag{4.2.26}
$$

olur. Burada $k = o(t_*) - o(t^*)$ dır. (4.2.24)'den,

$$
\begin{aligned}
d(\dot{x}_m(t_*), \dot{x}_m(s(t_*))) &\leq \eta_{o(t_*)-1} \\
d(\dot{x}_m(s(t_*)), \dot{x}_m(s^2(t_*))) &\leq \eta_{o(t_*)-2} \\
&\vdots \\
d(\dot{x}_m(s^{k-1}(t_*)), \dot{x}_m(s^k(t_*))) &\leq \eta_{(t_*)-k} = \eta_r
\end{aligned} \tag{4.2.27}
$$

olur. $\dot{x}_m(t) = \dot{x}_m(t_*)$, $s^k(t_*) = t^*$, $\eta_k = 2^{-k}$ olduğundan (4.2.26) ve (4.2.27)'den

$$
d(\dot{x}_m(t), \dot{x}_m(t^*)) = d(\dot{x}_m(t_*), \dot{x}_m(t^*)) \leq \sum_{k=r}^{o(t_*)-1} \eta_k \leq \sum_{k=r}^{\infty} \eta_k = \sum_{k=r}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2^{r-1}}
$$

olur. Yani $\forall\, t \in J$ için

$$
d(\dot{x}_m(t), \dot{x}_m(t^*)) \leq \frac{1}{2^{r-1}} \tag{4.2.28}
$$

olur. Bu durumda (4.2.28)'den $\forall\, \tau_1, \tau_2 \in J$ için

$$
\begin{aligned}
d(\dot{x}_m(\tau_1), \dot{x}_m(\tau_2)) &\leq d(\dot{x}_m(\tau_1), \dot{x}_m(t^*)) + d(\dot{x}_m(\tau_2), \dot{x}_m(t^*)) \\
&\leq \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{2^{r-1}} = \frac{1}{2^{r-2}}
\end{aligned} \tag{4.2.29}
$$

(4.2.29) m'ye bağlı değildir.

Şimdi $\dot{x}_m\ (\cdot) : [t_0, t_0 + \alpha_*] \to \mathbb{R}^n$ $(m = 1, 2, \cdots)$ fonksiyonlarının aynı osilasyonlu olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ alalım. $\frac{1}{2^{r_*-2}} < \varepsilon$ olacak şekilde $r_* \in \mathbb{N}$ seçelim. O zaman (4.2.29)'dan $[t_0, t_0 + \alpha_*]$ aralığının r_*-ıncı bölüntüsünün keyfi J aralığında $\forall\ \tau_1, \tau_2 \in J$ ve $m = 1, 2, \cdots$ için

$$|\tau_1 - \tau_2| < l_{r_*} < \delta_{r_*} < \eta_{r_*} = \frac{1}{2^{r_*}}$$
$$d(\dot{x}_m\ (\tau_1), \dot{x}_m\ (\tau_2)) \le \frac{1}{2^{r_*-2}} < \varepsilon$$

olur. Yani $\dot{x}_m\ (\cdot)$ fonksiyonları $[t_0, t_0 + \alpha_*]$ aralığında aynı osilasyonludurlar. (4.2.15)'den $x_m(\cdot) : [t_0, t_0 + \alpha_*] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları için

$$gr\ x_m(\cdot) \in Z \tag{4.2.31}$$

olur. Yani $x_m(\cdot)$ fonksiyonları $[t_0, t_0 + \alpha_*]$ aralığında düzgün sınırlıdır. m. bölüntünün $\forall$ $[t_{m,i}, t_{m,i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \cdots N_m - 1$ aralığı , $\forall\ t \in [t_{m,i}, t_{m,i+1})$ için

$$\dot{x}_m\ (t) = v_{m,i} \in F(t_{m,i}, x_m(t_{m,i}))$$

olduğundan $\forall\ m = 1, 2, \cdots$ ve $t \in [t_0, t_0 + \alpha_*]$ için

$$\left\|\dot{x}_m\ (t)\right\| \le M \tag{4.2.32}$$

olur.

$x_m(\cdot) : [t_0, t_0 + \alpha_*] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları M sabiti ile Lipschitz koşulunu sağladığı için bu fonksiyonlar eş süreklidir. $Z \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ kompakt küme olduğundan (4.2.31)'den $x_m(\cdot)$ fonksiyonları düzgün sınırlıdırlar. Aynı şekilde $\dot{x}_m\ (\cdot) : [t_0, t_0 + \alpha_*] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları (4.2.32)'ye göre düzgün sınırlıdır ve (4.2.30)'a göre aynı osilasyonludurlar. O zaman Arzela-Askoli teoremine (bkz [53]) ve Teorem(1.1.2)'ye göre (genelliği bozmadan) $m \to \infty$ iken $[t_0, t_0 + \alpha_*]$ aralığında $x_m(\cdot) \to x_*(\cdot)$, $\dot{x}_m\ (\cdot) \to v_*(\cdot)$ düzgün yakınsak ve $\forall\ t \in [t_0, t_0 + \alpha_*]$ için

$$x_*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_*(\tau)d\tau \tag{4.2.33}$$

olacak şekilde sürekli $x_*(\cdot) : [t_0, t_0 + \alpha_*] \to \mathbb{R}^n$, integrallenebilir $v_*(\cdot) : [t_0, t_0 + \alpha_*] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları vardır. ($x_m(\cdot)$ fonksiyonları mutlak sürekli olduğundan, $\dot{x}_m\ (\cdot)$

fonksiyonları integrallenebilirdirler) (4.2.33)'den hemen hemen her $t \in [t_0, t_0 + \alpha_*]$ için $\dot{x}_* \ (t) = v_*(t)$ olur. $x_m(\cdot)$ fonksiyonları M sabitiyle Lipschitz koşulunu sağladığından $[t_0, t_0 + \alpha_*]$ aralığında $m \to \infty$ iken $x_*(\cdot)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğundan, $x_*(\cdot)$ fonksiyonuda M sabitiyle Lipschitz koşulunu sağlar. O zaman $x_*(\cdot) : [t_0, t_0 + \alpha_*] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu mutlak sürekli olur.

$\forall\ m = 1, 2, \cdots$ için $x_m(t_0) = x_0$, $gr\ \ x_m(\cdot) \subset Z$, $m \to \infty$ iken $[t_0, t_0 + \alpha_*]$ aralığında düzgün olarak $x_m(\cdot) \to x_*(\cdot)$, $Z \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ kompakt olduğundan,

$$x_*(t_0) = x_0 \quad , gr\ x_*(\cdot) \subset Z \tag{4.2.34}$$

olur.

Şimdi $t \in [t_0, t_0 + \alpha_*)$ seçelim öyle ki, $x_*(\cdot)$ fonksiyonu t noktasında türevlenebilir olsun. $x_*(\cdot)$ fonksiyonu $[t_0, t_0 + \alpha_*]$ aralığında mutlak sürekli olduğundan, $[t_0, t_0 + \alpha_*]$ aralığında hemen hemen türevlenebilir olur. Bu seçim hemen hemen her $t \in [t_0, t_0 + \alpha_*]$ için mümkündür. Bu durumda (4.2.33)'den $\dot{x}_* \ (t) = v_*(t)$ ve $m \to \infty$ iken $\dot{x}_m \ (t) \to \dot{x}_* \ (t)$ olduğundan $m \to \infty$ iken $d(\dot{x}_m \ (t), v_*(t)) \to 0$ olur.

m. bölüntünün t noktasını içeren aralık bölüntünün 1. noktasını $t_{p(m)}$ ile gösterelim, yani $t \in [t_{p(m)}, t_{p(m)} + l_m)$ olsun. $\forall\ m$ için $l_m \leq \eta_m = 2^{-m}$ olduğundan $m \to \infty$ iken $t_{p(m)} \to t$ olur. O zaman

$$\begin{aligned} & d(v_*(t), F(t, x_*(t))) \leq d(v_*(t), \dot{x}_m \ (t)) + d(\dot{x}_m \ (t), \dot{x}_m \ (t_{p(m)})) \\ & + d(\dot{x}_m \ (t_{p(m)}), F(t_{p(m)}, x_m(t_{p(m)})))) \\ & + \alpha(F(t_{p(m)}, x_m(t_{p(m)})), F(t, x_m(t)) + \alpha(F(t, x_m(t)), F(t, x_*(t))) \end{aligned} \tag{4.2.35}$$

olur. Keyfi $\varepsilon > 0$ alalım. $m \to \infty$ iken $\dot{x}_m \ (t) \to v_*(t)$ olduğundan $\forall\ m > m_1$ için

$$d(v_*(t), \dot{x}_m \ (t)) \leq \varepsilon \tag{4.2.36}$$

olacak biçimde $m_1 > 0$ vardır. $t \in [t_{p(m)}, t_{p(m)} + l_m]$ olduğundan, (4.2.13)'den $\forall\ m = 1, 2, \cdots$ için $\dot{x}_m \ (t) = \dot{x}_m \ (t_{p(m)})$ ve

$$d(\dot{x}_m \ (t), \dot{x}_m \ (t_{p(m)})) = 0 \tag{4.2.37}$$

olur.(4.2.14)'den $\dot{x}_m \ (t_{p(m)}) \in F(t_{p(m)}, x_m(t_{p(m)}))$ olduğundan

$$d(\dot{x}_m \ (t_{p(m)}), F(t_{p(m)}, x_m(t_{p(m)}))) = 0 \tag{4.2.38}$$

olur. $m \to \infty$ iken $t_{p(m)} \to t$, $x_m(\cdot)$ fonksiyonları ($m = 1, 2, \cdots$) sürekli, $x_m(\cdot) \to x_*(\cdot)$, $F(\cdot)$ k.d.d.'ü sürekli olduğundan $\forall\ m > m_2$ için

$$\alpha(F(t_{p(m)}, x_m(t_{p(m)})), F(t, x_m(t))) < \varepsilon \tag{4.2.39}$$

olan $m_2 > 0$ vardır. Yine $m \to \infty$ iken $x_m(t) \to x_*(t)$, $F(\cdot)$ k.d.d.'ü sürekli olduğundan $\forall\ m \geq m_3$ için

$$\alpha(F(t, x_m(t)), F(t, x_*(t))) \leq \varepsilon \tag{4.2.40}$$

olan $m_3 > 0$ vardır. $m_* = \max\{m_1, m_2, m_3\}$ olsun. O zaman (4.2.35)-(4.2.40)'dan $\forall\ m > m_*$ için

$$d(v_*(t), F(t, x_*(t))) \leq 3\ \varepsilon \tag{4.2.41}$$

olur. (4.2.41)'den $\forall\ \varepsilon > 0$ için

$$d(v_*(t), F(t, x_*(t))) \leq 3\ \varepsilon$$

olur. $\varepsilon > 0$ keyfi, $F(t, x_*(t))$ kümesi kompakt olduğundan,

$$d(v_*(t), F(t, x_*(t))) = 0$$

yani

$$v_*(t) \in F(t, x_*(t))$$

olur. $\dot{x}_*\ (t) = v_*(t)$ olduğundan

$$\dot{x}_*\ (t) \in F(t, x_*(t)) \tag{4.2.42}$$

elde ederiz. $x_*(\cdot)$ fonksiyonu mutlak sürekli olduğundan $[t_0, t_0 + \alpha_*]$ aralığında hemen hemen türevlenebilirdir. O zaman (4.2.42) içermesi hemen hemen $t \in [t_0, t_0 + \alpha_*]$ için doğrudur. $x_*(t) = x_0$ olduğundan, bu durumda $x_*(\cdot) : [t_0, t_0 + \alpha_*] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun (4.2.1) Cauchy probleminin çözümü olduğunu elde ederiz.Teorem kanıtlanmış olur. ■

4.3 Diferansiyel İçermenin İntegral Tünelinin Bir Özelliği

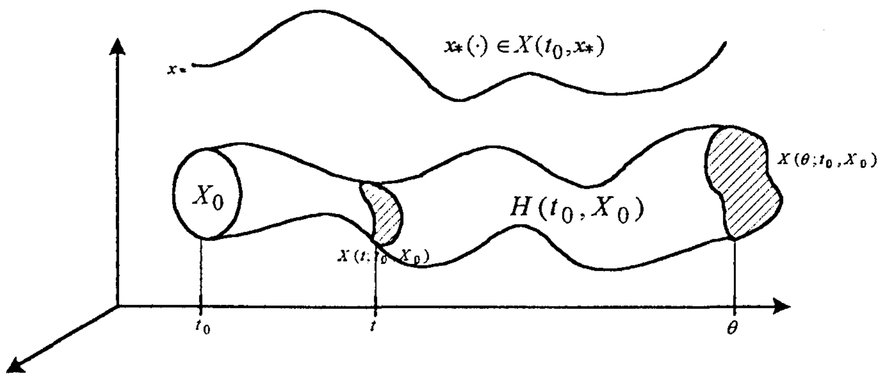
Bu kesimde $x_* \notin X_0$ noktası için $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ iken

$$x_*(t) \notin X(t; t_0, X_0) \qquad (4.3.1)$$

olacak biçimde $\exists\ x_*(\cdot) \in X(t_0, x_*)$ olup olmadığı problemini araştıracağız. Açıktır ki (4.3.1)

$$gr\ x_*(\cdot) \cap H(t_0, X_0) = \emptyset \qquad (4.3.2)$$

koşuluna denktir.



Şekil 4.3.1:$H(t_0, X_0)$ ve $x_*(\cdot)$

Şimdi

$$\dot{x}\ (t) \in F(t, x(t))$$
$$x(t_0) \in X_0\ ,\ t \in [t_0, \theta]$$

Cauchy problemini inceleyelim. $X(t_0, X_0)$ ile (4.3.3) probleminin çözümler kümesini,

$$X(t; t_0, X_0) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(\cdot) \in X(t_0, X_0)\}$$
$$H(t_0, X_0) = \{(t, x) \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^n : x \in X(t; t_0, X_0)\}$$

ile $\dot{x}\ (t) \in F(t, x(t))$ D.I.'nin t anında (t_0, X_0) başlangıç kümesindeki erişim kümesini ve (t_0, X_0) başlangıç kümesi için integral tünelini göstermiştik.

Bu problemi $F(t,x) = A(t)x + P(t)$ şeklinde olduğunda araştıracağız. Yani

$$\dot{x}\,(t) \in A(t)x(t) + P(t)$$
$$x(t_0) \in X_0 \ , \ \ t \in [t_0, \theta]$$

Cauchy problemini inceleyeceğiz. Burada $\forall\ t \in [t_0,\theta]$ için $A(t)$ $n \times n$'lik matris $t \to P(t)$ k.d.d.'dür. Yine (4.3.4) Cauchy probleminin çözümler kümesini $X(t_0, X_0)$, t zamanında (t_0, X_0) başlangıç kümesindeki erişim kümesini $X(t; t_0, X_0)$ ile integral tünelini $H(t_0, X_0)$ ile gösterelim.

Teorem 4.3.1 *$t \to A(t)$ fonksiyonu $[t_0,\theta]$ aralığında sürekli $n{\times}n$'lik matris fonksiyon, $P(\cdot) : [t_0,\theta] \to KV(\mathbb{R}^n)$ sürekli k.d.d., $X_0 \in KV(\mathbb{R}^n)$ ve $x_* \notin X_0$ olsun. O zaman $\forall\ t \in [t_0,\theta]$ için*

$$x_*(t) \notin X(t; t_0, X_0)$$

olacak biçimde $x_*(\cdot) \in X(t_0, x_*)$ vardır. (veya gr $x_*(\cdot) \cap H(t_0, X_0) = \emptyset$)

Kanıt. $t \to \Phi(t,t_0)$ fonksiyonu $n \times n$'lik matris fonksiyon olmak üzere (yani $\forall\ t \in [t_0,\theta]$ için $\Phi(t,t_0)$ $n \times n$'lik matristir.)

$$\frac{d\Phi(t,t_0)}{dt} = -\Phi(t,t_0)A(t)$$
$$\Phi(t_0,t_0) = E$$

Cauchy probleminin çözümü olsun. Burada E $n \times n$'lik birim matristir. [46] 'ya göre, $\forall\ t \in [t_0,\theta]$ için det $\Phi(t,t_0) \neq 0$ ve $\Phi(t,t_0)$ matrisinin $\Phi^{-1}(t,t_0)$ tersi vardır. (Yani, $\Phi(t,t_0) \cdot \Phi^{-1}(t,t_0) = E$ dir.)

Şimdi

$$y(t) = \Phi(t,t_0) \cdot x(t) \qquad (4.3.6)$$

değişimini yapalım. Burada hemen hemen her $t \in [t_0,\theta]$ için $\dot{x}\,(t) \in A(t)x(t) + P(t)$ dir. O zaman (4.3.5) ve (4.3.6)'dan

$$\dot{y}\,(t) = \dot{\Phi}\,(t,t_0) \cdot x(t) + \Phi(t,t_0)\,\dot{x}\,(t)$$
$$= -\Phi(t,t_0)\,A(t)x(t) + \Phi(t,t_0)\,\dot{x}\,(t)$$

olur. (4.3.4)'e göre $\dot{x}\,(t) \in A(t)x(t)+P(t)$ dir. Bu durumda $\dot{y}\,(t) \in -\Phi(t,t_0)\ A(t)x(t)+ \Phi(t,t_0)\ A(t)x(t) + \Phi(t,t_0)P(t) = \Phi(t,t_0)P(t)$, $\Phi(t,t_0)P(t) = P_*(t)$ dersek

$$\dot{y}\,(t) \in P_*(t) \tag{4.3.7}$$

olur. $P(\cdot) : [t_0,\theta] \to KV(\mathbb{R}^n)$ sürekli k.d.d., $t \to \Phi(t,t_0)$ sürekli $n \times n$'lik matris fonksiyon olduğundan, $P_*(\cdot) : [t_0,\theta] \to KV(\mathbb{R}^n)$ sürekli k.d.d. olur. $\Phi(t_0,t_0) = E$ olduğundan, (4.3.6)'ya göre $y(t_0) = \Phi(t_0,t_0) \cdot x(t_0) = E \cdot x(t_0) = x(t_0)$ olur.Bu durumda, (4.3.7)'den (4.3.4) Cauchy problemi (4.3.6) değişiminden sonra

$$\begin{gathered} \dot{y}\,(t) \in P_*(t) \\ y(t_0) \in X_0 \end{gathered}$$

Cauchy problemi gibi yazılır. (4.3.8) Cauchy probleminin çözümler kümesini $Y(t_0,X_0)$ ile gösterelim ve

$$\begin{gathered} Y(t;t_0,X_0) = \{y(t) \in \mathbb{R}^n : y(\cdot) \in Y(t_0,X_0)\} \\ V(t_0,X_0) = \{(t,y) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n : y \in Y(t;t_0,X_0) \end{gathered}$$

olsun. O zaman $\Phi(t_0,t_0) = E$ olduğundan, $\Phi(t_0,t_0)\ X_0 = X_0$ olur ve (4.3.6)'dan $\forall\, x(\cdot) \in X(t_0,X_0)$ için $y(\cdot) = \Phi(\cdot,t_0)\cdot x(\cdot) \in Y(t_0,X_0)$ ve tersine, $\forall\, y(\cdot) \in Y(t;t_0,X_0)$ için $x(\cdot) = \Phi^{-1}(t,t_0) \cdot y(\cdot) \in X(t_0,X_0)$ elde ederiz. Aynı şekilde

$$\begin{gathered} Y(t;t_0,X_0) = \Phi(t,t_0) \cdot X(t;t_0,X_0) \\ V(t_0,X_0) = \{(t,\Phi(t,t_0) \cdot x) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n : x \in X(t;t_0,X_0)\} \end{gathered}$$

olur. Yine $\Phi(t_0,t_0) = E$ olduğundan $\Phi(t_0,t_0) \cdot x_* = x_*$, $\forall\ x(\cdot) \in X(t_0,x_*)$ için $y(\cdot) = \Phi(\cdot,t_0) \cdot x(\cdot) \in Y(t_0,x_*)$ ve $\forall\ y(\cdot) \in Y(t_0,x_*)$ için $x(\cdot) = \Phi^{-1}(t,t_0) \cdot y(\cdot) \in X(t_0,x_*)$ olur. O zaman buradan ve (4.3.9)'dan, $x_*(\cdot) \in X(t_0,x_*)$ için

$$x_*(t) \notin X(t;t_0,X_0)\ ,\ t \in [t_0,\theta]$$

ise $y_*(\cdot) = \Phi(\cdot,t_0) \cdot x_*(\cdot) \in Y(t_0,x_*)$

$$y_*(t) \notin Y(t;t_0,X_0)\ ,\ t \in [t_0,\theta]$$

olur ve tersine $y_*(\cdot) \in Y(t_0,x_*)$ için

$$y_*(t) \notin Y(t;t_0,X_0)\ ,\ t \in [t_0,\theta]$$

ise $x_*(\cdot) = \Phi^{-1}(\cdot, t_0) \cdot y_*(\cdot) \in X(t_0, x_*)$ için

$$x_*(t) \notin X(t; t_0, X_0) \ , \ t \in [t_0, \theta]$$

olur. Buna göre $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için

$$y_*(t) \notin Y(t; t_0, X_0)$$

olacak şekilde $y_*(\cdot) \in Y(t_0, x_*)$ ın varolduğunu gösterelim. $P_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to KV(\mathbb{R}^n)$ k.d.d.'ünün $[t_0, \theta]$ aralığında integrali aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\int_{t_0}^{\theta} P_*(\tau)d\tau = \left\{ \begin{array}{l} \int_{t_0}^{\theta} P(\tau)d\tau : \text{Hemen hemen } \ \tau \in [t_0, \theta] \ \text{ için } P(\tau) \in P_*(\tau) \\ \text{ve } P(\cdot) \text{ fonksiyonu } [t_0, \theta] \text{ aralığında integrallenebilirdir.} \end{array} \right\}$$

$P_*(\cdot) : [t_0, \theta] \to KV(\mathbb{R}^n)$ sürekli k.d.d. olduğundan [6] 'ya göre $\int_{t_0}^{\theta} P_*(\tau)d\tau$ konveks ve kompakt kümedir.

$$P = \int_{t_0}^{\theta} P_*(\tau)d\tau$$

diyelim. O zaman

$$Y(\theta; t_0, x_*) = x_* + P \ , \ Y(\theta; t_0, X_0) = X_0 + P$$

olur. $P \subset \mathbb{R}^n$, $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt konveks kümeler olduğundan $x_* + P$ ve $X_0 + P$ kümeleri $\mathbb{R}^n$ uzayında konveks ve kompakt kümelerdir. $x_* \notin X_0$ olduğundan

$$x_* + P \not\subset X_0 + P \tag{4.3.10}$$

olduğunu kanıtlayalım. Tersini varsayalım $x_* + P \subset X_0 + P$ olsun. O zaman $\forall\ s \in S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ için

$$\max_{p \in P} \langle s, x_* + p \rangle \leq \max_{x \in X_0,\ p \in P} \langle s, x + p \rangle \tag{4.3.11}$$

olur. Öteyandan,

$$\max_{p \in P} \langle s, x_* + p \rangle = \langle s, x_* \rangle + \max_{p \in P} \langle s, p \rangle$$

ve

$$\max_{x \in X_0,\, p \in P} \langle s, x+p \rangle \leq \max_{x \in X_0} \langle s, x \rangle + \max_{p \in P} \langle s, p \rangle$$

olduğundan (4.3.11)'den $\forall\ s \in S$ için

$$\langle s, x_* \rangle \leq \max_{x \in X_0} \langle s, x \rangle$$

olur. Bu durumda X_0 kompakt konveks küme olduğundan (4.3.12)'den (bkz [10]) $x_* \in X_0$ olduğunu elde ederiz.

Bu ise $x_* \notin X_0$ olması ile çelişir. Yani (4.3.10) doğrudur. Şimdi $p_* \in x_* + P$ alalım öyle ki $p_* \notin X_0 + P$ olsun. Yani

$$p_* \in Y(\theta; t_0, x_*)\ ,\ p_* \notin Y(\theta; t_0, X_0) \tag{4.3.13}$$

olsun. $p_* \in Y(\theta; t_0, x_*)$ olduğundan $y_*(\theta) = p_*$ olan $y_*(\cdot) \in Y(t_0, X_*)$ vardır. Gösterelim ki $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için

$$y_*(t) \notin Y(t; t_0, X_0)$$

dir. Tersini varsayalım

$$y_*(t_*) \in Y(t_*; t_0, X_0)$$

olan $t_* \in [t_0, \theta)$ varolsun. $y_* = y_*(t_*)$ diyelim. O halde $(t_*,\ y_*) \in V(t_0, X_0)$ olur.O zaman $\forall\ t_* \in [t_0, \theta)$ için

$$Y(t; t_*, y_*) \subset Y(t; t_0, X_0) \tag{4.3.14}$$

elde ederiz.

Şimdi $\forall\ t \in [t_*, \theta]$ için $y_*^*(t) = y_*(t)$ olmak üzere $y_*^*(\cdot) : [t_*, \theta] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunu tanımlayalım. $y_*(\cdot) \in Y(t_0, X_0)$, $y_*^*(t_*) = y_* \in Y(t_*; t_0, X_0)$ olduğundan $y_*^*(\cdot) \in Y(t_*, y_*)$ olur. O zaman $y_*^*(\theta) \in Y(\theta; t_*, y_*)$ olur. $y_*^*(\theta) = y_*(\theta) = p_*$ olduğundan, $p_* \in Y(\theta; t_*, y_*)$ olur.(4.3.14)'den ise $p_* \in Y(\theta; t_0, X_0)$ olduğu elde edilir. Bu ise (4.3.13)'le yani $p_* \notin Y(\theta; t_0, X_0)$ ile çelişir. O zaman varsayımımız doğru değildir ve $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için

$$y_*(t) \notin Y(t; t_0, X_0)$$

dır. O halde, $x_*(\cdot) = \Phi^{-1}(\cdot, t_0) \cdot y_*(\cdot)$ için $x_*(\cdot) \in X(t_0, X_*)$ ve $\forall\ t \in [t_0, \theta]$ için $x_*(t) \notin X(t; t_0, X_0)$ olur.

Teorem kanıtlanır. ■

Teorem (4.3.1)'de X_0 konveks küme değilse teorem doğru değildir.

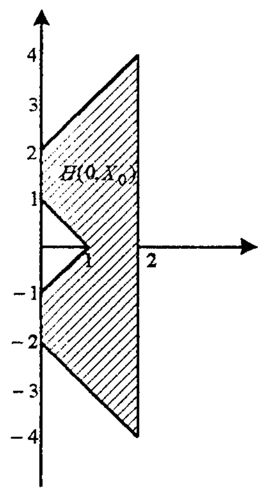
Örnek 4.3.1

$$\dot{x}\ (t) \in [-1, 1]$$
$$x(0) \in [-2, -1] \cup [1, 2]\ ,\ t \in [0, 2]$$

Cauchy problemine bakalım. Bu örnekte $X_0 = [-2, -1] \cup [1, 2]$ *ve konveks değildir. (4.3.15) problemi için* $H(0, 0)$ *integral tüneli*

$$\begin{aligned} &H(0, X_0) = \{(t, x) \in [0, 1) \times \mathbb{R} : x \in [-t-2, t-1] \cup [-t+1, t+2]\} \\ &\cup \{(t, x) \in [1, 2] \times\ \mathbb{R}\ : x \in [-t-2, t+2]\} \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

olur. (Şekil 4.3.2)

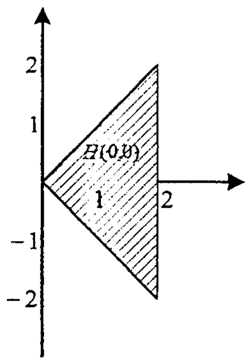


Şekil 4.3.2: $H(0, X_0)$

$x_* = 0$ *olsun. O zaman* $x_* = 0 \notin X_0$ *ve*

$$H(0, 0) = \{(t, x) \in [0, 2] \times \mathbb{R}\ : x \in [-t, t]\} \tag{4.3.17}$$

olur.



Şekil 4.3.3: $H(0,0)$

$Y(t;t_0,X_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : (t,x) \in H(t_0,X_0)\}$ *olduğundan, (4.3.16) ve(4.3.17)'den* $\forall\ t \in [1,2]$ *için*

$$Y(t;0,0) \subset Y(t;0,X_0) \tag{4.3.18}$$

olur. Bu durumda (4.3.18)'den $\forall\ t \in [0,2]$ *için* $y_*(t) \notin Y(t;0,X_0)$ *olacak* $y_*(\cdot) \in Y(0,X_0)$ *çözümü yoktur.*

Örnek 4.3.2

$$F(t,x) = \begin{cases} -1 & , \quad x > 0 \\ [-1,1] & , \quad x = 0 \qquad t \in [0,2] \\ 1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

üstten yarı sürekli k.d.d.'nü alalım. $X_0 = \{0\}$ *olmak üzere*

$$\dot{x}\ (t) \in F(t,x)$$
$$x(0) = 0$$

Cauchy probleminin tek bir çözümü vardır. Bu başlangıç koşulları için integral tünel $H(0,0) = \{(t,0) \mid t \in [0,2]\}$ *dir.*

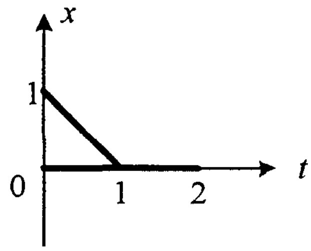
$x_* = 1$ *olmak üzere*

$$\dot{x}\ (t) \in F(t,x)$$
$$x(0) = 1$$

Cauchy probleminin çözümü

$$x(t) = \begin{cases} -t+1 & , \quad t \in [0,1] \\ 0 & , \quad t \in (1,2] \end{cases}$$

dir.Böylece 1 *noktasından sonraki çözümler aynıdır.*



Şekil 4.3.4: $H(0,0)$ *ve* $x(t)$*'nin grafiği*

KAYNAKLAR

[1] ANTOSIEWICZ, H.A. *Set valued mappings and differential equations,* in Advances in Differential and Integral equations Studies in Appl. Math. n.5. SIAM, Philadelphia 1969.

[2] AUBIN, J.-P., CELLINA, A. *Differential inclusions,* Springer-Verlag, Grunderlehen der math. Wiss, 264,1984.

[3] AUBIN, J.P. , CELLINA, J.P. *Viability Theory.* Boston, Birkhauser. 1992.

[4] AUBIN, J.P., FRANKOWSKA, H. *Heavy viable trajectories of controlled systems,* Annales del'Institut Henri-Poincare, Analyse Non Lineaire, 2, 371-395,1985.

[5] AUBIN, J.-P., FRANKOWSKA, H. *Set-valued analysis* .Boston, Birkhauser. 1990.

[6] AUMANN. R.J. *Integrals of set-valued functions.* J. Math. An. Appl. 12, 1-12, 1965.

[7] BLAGODATSKIKH, V.I. *Sufficent conditions of optimality for contingent equations,* in : Lecture Notes in Comp. Sc. 3, 319-328, 1973.

[8] BLAGODATSKIKH, V.I. *Sufficent optimality conditions for diferential Inclusions.* Izv. Akad. Nauk SSSR 38, 615-624 1974.

[9] BLAGODATSKIKH, V.I. *Theory of differential inclusions,* Part I, Editions of Moskow Univ. , Moskow. 1979.

[10] BLAGODATSKIKH, V.I. , FİLİPPOV, A.F. *Differential inclusions and optimal control.* Proc. Stealov Inst. Math. 169, 199-259, 1986

[11] BRESSAN, A. *On differential relations with lower semicontinuous right hand side.* J. Diff. Eq. , 37, 89-97, 1960.

[12] CASTAING, C. *Sur les equations differentielles multivoques.* C.R. Acad. Sc. Paris, 263, 63-66, 1966.

[13] CASTAING, C. , MOUSSAOUI, M. , SYAM, A. *Multivalued differential equations on closed convex sets in Banach spaces.* Set-Valued Analysis. 1, 4, 329-353, 1993.

[14] CELLINA, A. *Multivalued differential equations and ordinary differential equations.* SIAM J. Appl. Math. 18, 533-538, 1970.

[15] CHERNOUSKO, F.L. *State estimation of dynamic systems.* SRC Press. Boca Raton, Florida USA. 1994.

[16] CLARKE, F.H. *Generalized gradients and applications* . Trans. of A.M.S. 205, 247- 262, 1975.

[17] CLARKE, F.H. *The Euler- Lagrange differential inclusion.* J. Diff. Eq., 19, 80-90, 1975.

[18] CLARKE, F.H. *Optimal solutions to differential inclusions.* J. Opt. Th. Appl. 19, 469-478, 1976.

[19] CLARKE, F.H *The maximum principle under minimal hypotheses.* SIAM J. Contr. Opt. 14, 1078-1091, 1976.

[20] CLARKE, F.H , LEDYAEV, Yu.S. , STERN, R.J. , WOLENSKI, P.R. *Qualitative properties of differential inclusions: a survey.* J. of Dynamical and Control Systems. 1. , 1-48, 1995

[21] CRANDALL, M.G. *Differential equations on convex sets.* J. Math. Soc. Japan, 22, 443-455, 1970.

[22] CRANDALL, M.G. , LIONS, P.L. *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations.* Trans. Amer. Math. Soc. 277, 1-22, 1983.

[23] DAVY, J.L. *Properties of the solution set of generalized differential equation.* Bull. Austral. Math. Soc. 6, 379-398, 1972.

[24] DEIMLING, K. *Positive fixed points of weakly inward maps.* Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 12, 3, 223-226, 1988.

[25] DEIMLING, K. *Multivalued differential equations.* Walter de Gruyter. Berlin. 1992.

[26] FILIPPOV, A.F. *Differential equations with discontinuous right hand side.* Math. Sbornik 51, 99-128, 1960 (English Translation:Transl. Ann. Math. Soc. 42, 199-232, (1964))

[27] FILIPPOV, A.F. *Classical solutions of differential equations with multivalued right hand side.* Vestnik, Moskov. Univ. Ser. Mat. Mech. Astr. 22, 16-26, 1967 (English Translation: SIAM J. Control , 5 609- 621, (1967))

[28] FILIPPOV, A.F. *On the existence of solutions of multivalued diffferential equations.* Mat. , Zametki,10, 307-313, 1971.

[29] GUSEINOV, Kh.G. , SUBBOTIN A.I. & USHAKOV V.N. *Derivatives for multivalued mappings with applications to game theoretical problems of control.* Problems of Control and Information Theory, 14, 155-167, 1985.

[30] GUSEINOV, Kh.G. & USHAKOV V.N. *Strongly and weakly invariant sets with respect to a differential inclusion.* Soviet. Math. Dokl. , 38, 603-605, 1989.

[31] GUSEINOV, Kh.G. , MOISEYEV, A.N. & USHAKOV V.N. *On aproximation of reachable sets of control systems.* J. Appl. Math. Mech. 62, 179-187, 1998.

[32] HADDAD, G. *Monotone trajectories of differential inclusions with memory.* Isr. J. Math.,39, 83-100, 1981.

[33] HARTMAN, R. *Ordinary differential equations.* (2^{nd} ed) Birkhauser. 1982

[34] HENRY, Cl. *Differential equations with discontinuous right-hand side for planning procedures.* J. Econ. Theory, 4, 545-551, 1972.

[35] HENRY, Cl. *An existence theorem for a class of differential equations with multivalued right hand side.* J. Math. Anal. Appl. 41, 179-184, 1973.

[36] KELLY, W. *Periodic solutions of generalized differential equations.* SIAM J. Appl. Math. 30, 70-74, 1976.

[37] KRASOVSKII, N.N. , SUBBOTIN, A.I. *Game- theoretical control problems.* Springer, New York, 1988.

[38] KURATOWSKI, K. *Topologie.* Vols.1 Academic Press, New York, 1966

[39] KURZHANSKI, A.B. & VALYI, L. *Elipsoidal calculus for esimation and control.* Birkhauser, 1996.

[40] KURZWEİL, J. *Generalized ordinary differential equations.* Cheschosl. Math. J. 8, 3, 360-388, 307-445, 1958

[41] MARCHAUD, H. *Sur les champs de demi cones convesxes et leurs integrals,* Compos. Math. 1, 89-127, 1934.

[42] NATANSON, I.P. *Theory of real variable functions.* Nauka, Moskov (In Russian) 1974.

[43] OLECH, C. *Lexicographical order, range of integral and bang-bang principle,* Mathematical Theory of Control, Academic Press, New York, 35-45, 1967.

[44] PANASYUK, A.I. & PANASYUK, V.I. *An equation generated by a differential inclusion.* Mat. Zametki. 27, 429-437

[45] PAPAGEORGIOU, N.S. *Viability theorems for nonautonomous differential inclusions with nonconvex domain.* Math. Jap. 40, 67-77, 1994.

[46] PONTRYAGIN, L.S. *Ordinary differential equations.* Nauka, Moscow. 1974

[47] ROKAFELLER, R.T. *Convex analysis.* Princeton University Press. 1970

[48] SUBBOTIN, A.I. & TARASYEV, A.M. *Stability properties of the value function of a differential game and viscosity solutions of Hamilton -Jacobi equations.* Problems Contr. Inform. Theory. 14, 451-463, 1985.

[49] SUBBOTIN, A.I. *Discontinuous solutions of a Dirichlet-type boundary value problem for the first order partial differential equation.* J. Numer. Anal. Math. Modelling. 8, 145-164, 1993.

[50] SUBBOTIN, A.I. *Generalized solutions of first order partial differential equations .* The dynamical optimization perspective. Birkhauser, 1995.

[51] TALLOS, P. *Viability problems for nonautonomous differential inclusions.* SIAM J. on Contr. Optimiz. 29, 253-263, 1991.

[52] VINTER, R.B. *Is The costate variable the state derivative of the value function?* Proc. 25th IEEE Conf. Decis. and Contr., Athens , Dec. 10-12, 1986 New York , 3, 1988-1989, 1986.

[53] WARGA, J. *Optimal Control of Differential and Functional Equations. Academic Press. New York, 1972.*

[54] WAZEWSKI, T. *Sur une generalization de la notion des solution d'une equation au contingent.* Bull. Acad. Pol. Sc. 10, 11-15, 1962.

[55] WOLENSKI, P. *The exponential formula for the reachable set of Lipschitz differential inclusion.* SIAM J. on Contr. Optimiz. 28, 5, 1148-1161, 1990.

[56] ZAREMBA, S.C. *Sur les equations au paratingent ,* Bull. Sc. Math. 60, 139-160, 1936.