

**HİPERBOLİK UZAYDA
MAKSİMUM HACİMLİ SİMPEKSLER
VE DÜZGÜNLÜK**

Ali DENİZ
Yüksek Lisans Tezi

Haziran - 2001

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAYI

Ali Deniz'in "Hiperbolik Uzayda Maksimum Hacimli Simpleksler ve Düzgünlük" başlıklı Matematik Anabilim Dalındaki, YÜKSEK LİSANS tezi ~~16.7.2001~~ tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	:Yard. Doç.Dr. Andrei RATIU	
Üye	:Prof.Dr. Şahin KOÇAK	
Üye	:Doç.Dr. Hüseyin AZCAN	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ~~17.07.2001~~ tarih ve ...~~24/3~~..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ÖNSÖZ

Hiperbolik geometri Lobachevsky, Bolyai ve Gauss'un birbirlerinden bağımsız olarak yaptıkları çalışmalarla başladı. Lobachevsky hiperbolik bölgelerin hacimlerini hesaplarken, şimdi kendi adını taşıyan

$$H(\theta) = - \int_0^{\theta} \log |2 \sin x| dx$$

fonksiyonunu keşfetti.

Hiperbolik geometrinin anlaşılması klasik modellerin gelişmesine olanak sağladı. Beltrami hiperbolik uzayın noktalarını yarı kürenin iç noktalarıyla özdeşleyerek, "yarıküre modeli"ni oluşturdu. Bu yarı küreyi disk üzerine dik izdüşürerek, daha sonra Klein ile popüler olan projektif disk modelini verdi. Diğer taraftan bu yarı küreyi disk üzerine stereografik bir şekilde izdüşürerek konformal disk modelini elde etti. (Bkz. [1]). Son olarak küre yüzeyinde yansıma dönüşümü kullanarak üst yarı uzay modelini verdi. Poincaré, Beltrami'nin üst yarı uzay modelinden yararlanarak, hiperbolik düzlemde yön koruyan izometrilere grubunun, şimdi genel olarak $PSL_2\mathbb{R}$ olarak bilinen, gerçel katsayılı ve determinanı +1 olan

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

kesirsel dönüşümlerin grubuna eşit olduğunu gösterdi.

Lobachevsky'den beri bilinen gerçeklerden biri maksimum hacme sahip ideal dörtyüzlünün, düzgün ideal dörtyüzlü oluşuydu. (Bkz. Teorem 3.2.3) Bu sonuç Mostow rigidity teoreminin Gromov-Thurston tarafından yapılan kanıtının temelini teşkil etmiştir. Daha sonra Thurston, maksimum hacme sahip ideal n -simpleksin düzgün ve ideal n -simpleks olduğunu iddia etti. Bir kaç yıl sonra Haagerup ve Munkholm, hacmi veren bir fonksiyonun konkavlığını kullanarak bu iddiayı ispatladılar. (Bkz. [12]).

Benzer şekilde, bu tezde "Hiperbolik uzay \mathbb{H}^3 'te hiperbolik altıyüzlü, sekizyüzlü, onikiyüzlü ve yirmiyüzlünün hacimlerinin maksimum değeri nedir?" sorusunun

cevabı araştırılmıştır. Kullanılan temel araçlar Möbius dönüşümleri ve Lobachevsky fonksiyonudur.

Birinci bölümde hiperbolik geometrinin temel kavramları ve bazı modelleri yer almaktadır. Ayrıca bu bölümde hiperbolik izometrilere grubunun Möbius dönüşümleri grubuna eşit olduğunun ayrıntılı ispatı verilmiştir.

İkinci bölümde, iki boyutlu hiperbolik uzayda tüm hiperbolik üçgenler arasında alanı maksimum olan üçgenlerin ideal üçgenler olduğu ve bir ideal üçgenin alanının π 'ye eşit olduğu gösterilmiştir. (Bkz. [8]).

Üçüncü bölümde dörtyüzlü, altıyüzlü, sekizyüzlü, onikiyüzlü, yirmiyüzlü gibi bazı ideal düzgün çokyüzlülerin hacimlerini hesaplanmış, ayrıca bu çokyüzlülerin hacimlerinin maksimum olabilmeleri için düzgün ve ideal olmaları gerektiği gösterilmiştir.

Son olarak, dördüncü bölümde ise Haagerup ve Munkholm tarafından ispatlanan " n -boyutlu hiperbolik uzayda bir simpleksin hacminin maksimum olması için gerek ve yeter koşul düzgün ve ideal olmasıdır" teoreminin kanıtı verilmiştir.

TEŐEKKÖR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen Yard.Doç.Dr. Andrei RATIU'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

4. n-BOYUTLU HİPERBOLİK UZAYDA MAKSİMUM HACİMLİ	
SİMPEKS	74
4.1 Teorem 4.0.1 'in Kanıtı	74
4.2 Teorem 4.0.1'in Kanıtının Sonu	86
KAYNAKLAR	89

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
1.1 P düzleminde $\phi_{k-1}(e_k)$ noktasının yansıması	6
1.2 Küre yüzeyinde yansıma (inversion)	7
1.3 x ve y noktalarının durumları	17
1.4 Birim disk içinde α , β ve γ eğrileri	29
1.5 Lobachevsky fonksiyonunun grafiği	31
2.1 Hiperbolik üçgenin standart duruma getirilmesi	34
2.2 Bir köşesi ideal hiperbolik üçgen	36
2.3 Hiperbolik Üçgen	37
2.4 Poincaré disk modelinde ideal üçgenin bölünmesi	38
3.1 Bazı düzgün hiperbolik çokyüzlüler	40
3.2 S ve T yüzleri arasındaki dihedral açı	41
3.3 İdeal dörtyüzlüde karşılıklı dihedral açılar eşittir	42
3.4 Üst yarı uzayda $S_{\alpha,\beta}$ tetrahedronu	43
3.5 Üst yarı uzay modelinde ideal dörtyüzlü	46
3.6 Orijinin içeride olması durumunda Δ 'nın dik üçgenlere bölünmesi . .	47
3.7 Orijinin Δ 'nın kenarlarından birinin üzerinde olması durumu	47
3.8 Orijinin Δ 'nın dışında olması durumu	48
3.9 Hiperbolik düzgün ideal n -gen piramit	50
3.10 Hiperbolik ideal $\Sigma_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}$ piramidi	51
3.11 Hiperbolik düzgün ideal altıyüzlü	54
3.12 Hiperbolik düzgün sekizyüzlünün parçalara ayrılması	55
3.13 Onikiyüzlünün parçalara ayrılması ve $\zeta_{\alpha,\beta}$	56
3.14 Yirmiyüzlünün ağırlık merkezine göre bölme yöntemiyle bölünmesi . .	58
3.15 Poincaré disk modelinde $\Omega_{\alpha,\beta}$ prizması	60

3.16 Üst yarı uzay modelinde $\Omega_{\alpha,\beta}$ prizması ve n eşit dilime ayrılması . . .	61
3.17 f fonksiyonunun grafiği	64
3.18 Sekizyüzlünün parçalara ayrılması	66
3.19 Öklidyen altıyüzlü ve hiperbolik altıyüzlünün dihedral açılarının adlandırılması	69
3.20 Öklidyen yirmiyüzlü ve hiperbolik yirmiyüzlünün dihedral açılarının adlandırılması	72

SİMGELER DİZİNİ

$d_{\mathbb{H}}(x, y)$: x ve y noktaları arasındaki hiperbolik uzaklık
\mathbb{B}^n	: n -boyutlu hiperbolik uzayın Poincaré disk modeli
\mathbb{D}^n	: n -boyutlu hiperbolik uzayın projektif disk modeli
\mathbb{E}^n	: n -boyutlu öklidyen uzay
$\hat{\mathbb{E}}^n$: n -boyutlu öklidyen uzayın tek nokta kompaktlaması
\mathbb{H}^n	: n -boyutlu hiperbolik uzay
\mathbb{U}^n	: n -boyutlu hiperbolik uzayın üst yarı uzay modeli
ds_h^2	: Hiperbolik Riemann metriği
$P(v, t)$: \mathbb{E}^n 'de $\{x \in \mathbb{E}^n \mid v \cdot x = t\}$ şeklinde tanımlı hiperdüzlem
$S(a, r)$: a merkezli r yarıçaplı küre
$I_{c,r}$: c merkezli r yarıçaplı kürede yansıma dönüşümü
$\widetilde{Möb}(\hat{\mathbb{E}}^n)$: \mathbb{E}^n 'in genel Möbius dönüşümleri grubu
$Möb(\mathbb{E}^n)$: \mathbb{E}^n 'de yön koruyan Möbius dönüşümleri grubu
$\widetilde{Möb}(\mathbb{U}^n)$: Üst yarı uzay modelinde genel Möbius dönüşümleri grubu
$Möb(\mathbb{U}^n)$: Üst yarı uzay modelinde yön koruyan Möbius dönüşümleri grubu
$I\text{som}(\mathbb{U}^n)$: Üst yarı uzayın izometrilere grubu
$[a, b, c, d]$: $\hat{\mathbb{E}}^n$ 'de a, b, c, d noktalarının çifte oranı
II	: Lobachevsky fonksiyonu
$S_{\alpha,\beta}$: Üç dihedral açısı $\frac{\pi}{2}$, diğer üçü α, β ve $\frac{\pi}{2} - \alpha$ olan hiperbolik dört yüzlü
$\Omega_{\alpha,\beta}$: Dihedral açıları α, β olan hiperbolik prizma
$\Omega[n]$: n -boyutlu hiperbolik ideal simpleks
$\Omega_o[n]$: n -boyutlu hiperbolik düzgün ideal simpleks
$\sigma[n]$: n -boyutlu öklidyen simpleks
$\sigma_o[n]$: n -boyutlu düzgün öklidyen simpleks
$\Delta[n]$: Standart simpleks
$T_{\alpha,\beta,\gamma}$: Dihedral açıları α, β, γ olan ideal dört yüzlü

olmak üzere, $F_*(v)$, $F(\alpha)$ eğrisinin başlangıç hız vektörüdür. Yani $F_*(v)$ türev dönüşümü, bir $p \in X$ noktasının tanjant uzayı $T_p(X)$ 'den, $F(p)$ noktasının tanjant uzayı $T_{F(p)}(Y)$ 'ye bir doğrusal dönüşümdür.

$F : X \rightarrow Y$ türevlenebilir bir dönüşüm ve ds_Y^2 , Y üzerinde bir Riemann metriği olsun. Bu durumda ds_Y^2 metriğinin X üzerine F ile geri çekilmesi (pull-back) $F^*ds_Y^2$, $\forall p \in X$ ve $\forall v, w \in T_p(X)$ için

$$(F^*ds_Y^2)(v, w) = ds_Y^2(F_*(v), F_*(w))$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.2 X ve Y sırasıyla ds_X^2 ve ds_Y^2 metrikleriyle verilen iki Riemann manifoldu olsunlar. $f : X \rightarrow Y$ birebir, örten, türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer X 'in her noktasındaki tanjant uzayı için

1.

$$f^*(ds_Y^2) = ds_X^2$$

oluyorsa f fonksiyonuna X ve Y arasında bir **izometri** denir.

2. $k : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$f^*(ds_Y^2) = kds_X^2$$

oluyorsa f fonksiyonuna bir **konformal dönüşüm** denir.

\mathcal{U} , \mathbb{E}^n 'in açık bir alt kümesi ve $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{E}^n$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $\phi'(x)$ ile, bir $x \in \mathcal{U}$ noktasında ϕ 'nin kısmi türevlerinin oluşturduğu $(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x))$ matrisini gösterelim. Bu durumda $\forall x \in \mathcal{U}$ için

- $\phi'(x)$ ortogonal matris ise ϕ öklidyen bir izometridir.
- $k(x)\phi'(x)$ ortogonal matris olacak şekilde $k : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu varsa ϕ konformal dönüşümdür.

elde ederiz. Bu ise ρ 'nin konformal olması demektir. ■

Burada $P(v, t)$ hiperdüzleminin \mathbb{E}^{n-1} 'e dik olması durumunu inceleyelim. Bu durumda $v_n = 0$ 'dır. $x \in \mathbb{U}^n$, (yani $x_n > 0$) ise, $\rho(x)$ 'in n . bileşeni

$$\rho_n(x) = y_n = x_n + 2(t - v \cdot x)v_n = x_n > 0$$

olduğundan ρ yansımasını $\rho : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$ olarak kısıtlayabiliriz.

\mathbb{E}^n 'de ve \mathbb{U}^n 'de eğriler arasındaki açı tanımları aynı şekilde yapıldığından $P(v, t)$ hiperdüzleminin \mathbb{E}^{n-1} 'e dik olması durumunda $\rho : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$ yansıma dönüşümü konformaldir.

Önerme 1.1.3 $P(v, t)$ hiperdüzlemi \mathbb{E}^{n-1} 'e dik olmak üzere $\rho : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$

$$\rho(x) = x + 2(t - v \cdot x)v$$

şeklinde verilen yansıma dönüşümü hiperbolik izometridir.

Kanıt. $P(v, t)$ hiperdüzlemi \mathbb{E}^{n-1} 'e dik olduğundan $v_n = 0$ 'dır. Ve bu durumda (1.1) eşitliğinde $\rho_n(x) = y_n = x_n$ olduğu görülür. ρ aynı zamanda öklidyen izometri olduğundan

$$\begin{aligned} \rho^*(ds_n^2) &= \frac{1}{y_n^2} (dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2) \\ &= \frac{1}{x_n^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2) \\ &= ds_h^2 \end{aligned}$$

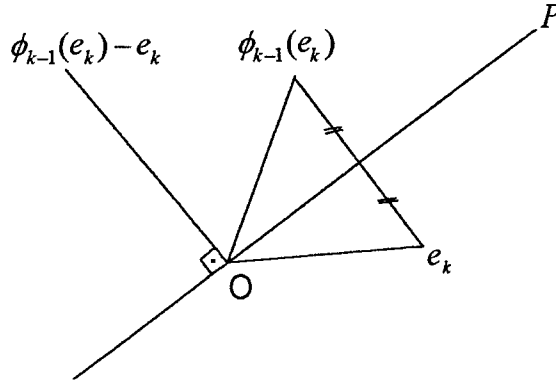
elde edilir. Böylece ρ üst yarı uzay modeli için bir izometridir. ■

Teorem 1.1.4 \mathbb{E}^n 'deki her izometri, en fazla $(n + 1)$ tane yansıma dönüşümünün bileşkesidir.

Kanıt. ϕ , \mathbb{E}^n 'in bir izometrisi ve $v_0 = \phi(0)$ olsun. Eğer $v_0 = 0$ ise ρ_0 birim dönüşüm, aksi takdirde $P(\frac{v_0}{|v_0|}, \frac{|v_0|}{2})$ hiperdüzleminde yansıma dönüşümü olsun. Böylece $\rho_0(v_0) = 0$ ve $\rho_0\phi(0) = 0$ elde edilir. \mathbb{E}^n 'de izometrilere A ortogonal

matris olmak üzere, $a + A(x)$ şeklinde olduğundan ve $\rho_0 \phi(0) = 0$ olduğundan $\rho_0 \phi$ izometrisi ortogonal dönüşüm olmalıdır. (Bkz. [2]).

Varsayalım ki ϕ_{k-1} dönüşümü, e_1, e_2, \dots, e_{k-1} vektörlerini sabit bırakan bir ortogonal dönüşüm olsun. $v_k = \phi_{k-1}(e_k) - e_k$ diyelim. Eğer $v_k = 0$ ise ρ_k birim dönüşüm, diğer durumlarda $P(\frac{v_k}{|v_k|}, 0)$ hiperdüzleminde yansıma dönüşümü olsun. Böylece $\rho_k \phi_{k-1}$ dönüşümü e_k 'yı sabit bırakır. Şekil 1.1. Ayrıca $j = 1, 2, \dots, k-1$ için



Şekil 1.1: P düzleminde $\phi_{k-1}(e_k)$ noktasının yansıması

$$\begin{aligned}
 v_k \cdot e_j &= (\phi_{k-1}(e_k) - e_k) \cdot e_j \\
 &= \phi_{k-1}(e_k) \cdot e_j \\
 &= \phi_{k-1}(e_k) \cdot \phi_{k-1}(e_j) \\
 &= e_k \cdot e_j \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

olduğundan e_1, e_2, \dots, e_{k-1} vektörleri P hiperdüzleminin içindedirler. Böylece ρ_k yansıması ile sabit kalırlar. Bu durumda $\rho_k \phi_{k-1}$ dönüşümü e_1, e_2, \dots, e_k 'yı sabit bırakmış olur. Tümevarım ile ρ_i birim dönüşüm veya hiperdüzlemlerde yansıma olmak üzere $\rho_n \rho_{n-1} \dots \rho_0 \phi$ dönüşümü $0, e_1, e_2, \dots, e_n$ vektörlerini sabit bırakacak şekilde $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n$ dönüşümleri vardır. Böylece $\rho_n \rho_{n-1} \dots \rho_0 \phi$ birim dönüşümdür ve ρ_i 'lerin tersleri kendileri olduğundan

$$\phi = \rho_n \rho_{n-1} \dots \rho_0$$

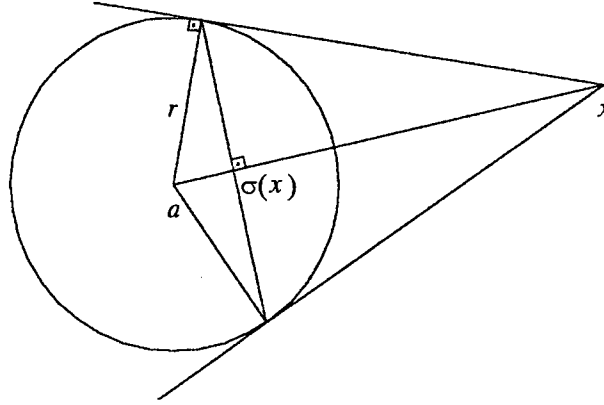
elde edilir. ■

Küre Yüzeyinde Yansımalar (inversions)

\mathbb{E}^n 'de bir küre $a \in \mathbb{E}^n$ noktası merkez ve $r \in \mathbb{R}$ yarıçap uzunluğu olmak üzere

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{E}^n \mid |x - a| = r\}$$

olarak tanımlanır. Bir noktanın $\sigma : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ küre yüzeyinde yansıma dönüşümü altındaki görüntüsü o noktayı kürenin merkezine birleştiren doğru parçası üzerindedir. Böylece $\sigma(x) = a + s(x - a)$ olur. Burada s , $|\sigma(x) - a| |x - a| = r^2$ olacak şekildeki pozitif bir reel sayıdır. Böylece küre yüzeyinde yansıma dönüşümü için



Şekil 1.2: Küre yüzeyinde yansıma (inversion)

$$\sigma(x) = a + \frac{r^2}{|x - a|^2}(x - a)$$

ifadesini elde ederiz. Bu dönüşüm kürenin içini dışına, dışını da içine çevirir. $\sigma(x)$ noktası için $|\sigma(x) - a| |x - a| = r^2$ koşulunu sağlayan nokta x olduğundan $\sigma^2(x) = x$ olur. Diğer taraftan yansımanın sabit noktaları ise küre üzerindeki noktalardır.

Önerme 1.1.5 \mathbb{E}^n 'de $S(a, r)$ küresinde yansıma dönüşümü konformaldır.

Kanıt. $S(a, r)$ küresinde yansıma dönüşümünü, $\phi(x) = \frac{1}{r}(x - a)$ öklidyen benzerlik dönüşümü ile $S(0, 1)$ küresinde yansıma dönüşümünün bileşkesi şeklinde yazabiliriz. Öklidyen benzerlik dönüşümleri konformal dönüşümler olduklarından ispatı

$S(0, r)$ küresi için yapmamız yeterlidir. $S(0, 1)$ küresinde yansıma dönüşümü

$$\sigma(x) = \frac{1}{|x|^2}x$$

ile verilir. Bu durumda türev dönüşümü

$$\sigma'(x) = \frac{1}{|x|^2} \left(\delta_{i,j} - 2 \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right)$$

olur. Burada $Q = \frac{x_i x_j}{|x|^2}$ diyerek

$$\sigma'(x) = \frac{1}{|x|^2} (I - 2Q)$$

yazabiliriz. $I - 2Q$ ortogonal matris olduğundan σ 'nin konformal olduğu gösterilmiş olur. ■

Küre yüzeyinde yansıma dönüşümü için, küre merkezinin \mathbb{E}^{n-1} 'de olması durumunu inceleyelim. Bu durumda kürenin merkezi $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 0)$ şeklindeki bir noktadır. Üst yarı uzaydaki bir x noktası için, $x_n > 0$ olduğundan $\sigma(x)$ 'in n . bileşeni

$$\sigma_n(x) = \frac{r^2}{|x - a|^2} x_n > 0$$

olur. Böylece küre yüzeyinde yansıma dönüşümünü $\sigma : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$ şeklinde kısıtlayabiliriz. Bu durumda \mathbb{U}^n ve \mathbb{E}^n 'de açılımları aynı şekilde yapıldığından dolayı merkezi \mathbb{E}^{n-1} 'de olan küre yüzeyinde yansıma dönüşümleri \mathbb{U}^n 'de de konformal dönüşümlerdir.

Teorem 1.1.6 *Üst yarı uzay modeli \mathbb{U}^n 'de, merkezi \mathbb{E}^{n-1} 'de bulunan $S(a, r)$ kürelerinde yansıma dönüşümleri izometridir.*

Kanıt. $S(a, r)$ küresinde yansıma dönüşümünü, $\phi(x) = \frac{1}{r}(x-a)$ öklidyen benzerlik dönüşümü ile $S(0, 1)$ küresinde yansıma dönüşümünün bileşkesi şeklinde yazabiliriz. a noktası \mathbb{E}^{n-1} 'de olduğundan, Önerme 1.1.1 gereğince, ϕ dönüşümü üst yarı uzay için bir izometridir. Bu durumda ispatı $S(0, 1)$ küresinde yansıma dönüşümü için yapmamız yeterlidir. Birim kürede yansıma dönüşümü

$$\sigma(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

şeklindedir. Kolaylık açısından $y = \sigma(x)$ ile gösterelim. Böylece

$$\sigma^*(ds_h^2) = \frac{1}{y_n^2} (dy_1^2 + dy_2^2 + \dots + dy_n^2)$$

olur. Buradan $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere y_i 'nin diferansiyelini alarak,

$$dy_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\delta_{i,j}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_j}{|x|^4} \right) dx_j$$

ve buradan da

$$dy_i^2 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\delta_{i,j}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_j}{|x|^4} \right)^2 dx_j^2 + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^n \left(\frac{\delta_{i,j}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_j}{|x|^4} \right) \left(\frac{\delta_{i,k}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_k}{|x|^4} \right) dx_j dx_k$$

elde ederiz. Burada $1, 2, \dots, n$ sayıları içinden sabit bir a sayısı seçelim. $i = 1, 2, \dots, n$ için dy_i^2 ifadelerindeki, dx_a^2 içeren terimlerin toplamlarını hesaplayalım. Böylece

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|x|^4} \left(1 + \frac{4x_a^4}{|x|^4} - \frac{4x_a^2}{|x|^2} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq a}}^n \frac{4x_i^2 x_a^2}{|x|^4} \right) dx_a^2 \\ &= \frac{1}{|x|^4} \left(1 - \frac{4x_a^2}{|x|^2} + \sum_{i=1}^n \frac{4x_i^2 x_a^2}{|x|^4} \right) dx_a^2 \\ &= \frac{1}{|x|^4} \left(1 - \frac{4x_a^2}{|x|^2} \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{|x|^2} \right) \right) dx_a^2 \\ &= \frac{1}{|x|^4} dx_a^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Yine $1, 2, \dots, n$ sayıları içinden sabit kalacak şekilde a, b ($a \neq b$) sayılarını seçelim. $i = 1, 2, \dots, n$ için dy_i^2 ifadelerindeki $dx_a dx_b$ içeren terimlerin toplamını hesaplayalım. Herbir i için dy_i^2 ifadesinde $dx_a dx_b$ içeren terimler $j = a, k = b$ için

$$2 \left(\frac{\delta_{i,a}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_a}{|x|^4} \right) \left(\frac{\delta_{i,b}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_b}{|x|^4} \right) dx_a dx_b$$

olur. Burada $i = a$ için $dx_a dx_b$ içeren terimlerin toplamı

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_a^2}{|x|^4} \right) \left(-\frac{2x_a x_b}{|x|^4} \right) dx_a dx_b \\ &= \frac{2}{|x|^4} \left(-\frac{2x_a x_b}{|x|^2} + \frac{4x_a^3 x_b}{|x|^4} \right) dx_a dx_b \end{aligned}$$

ve $i = b$ için $dx_a dx_b$ içeren terimlerin toplamı

$$\begin{aligned} & 2 \left(-\frac{2x_a x_b}{|x|^4} \right) \left(\frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_b^2}{|x|^4} \right) dx_a dx_b \\ &= \frac{2}{|x|^4} \left(-\frac{2x_a x_b}{|x|^2} + \frac{4x_a x_b^3}{|x|^4} \right) dx_a dx_b \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Buradan bütün $dx_a dx_b$ içeren terimlerin toplamı

$$\begin{aligned} & \frac{2}{|x|^4} \left(-\frac{4x_a x_b}{|x|^2} + \frac{4x_a^3 x_b}{|x|^4} + \frac{4x_a x_b^3}{|x|^4} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq a \text{ ve } i \neq b}}^n \frac{4x_i^2 x_a x_b}{|x|^4} \right) dx_a dx_b \\ &= \frac{2}{|x|^4} \left(-\frac{4x_a x_b}{|x|^2} + \sum_{i=1}^n \frac{4x_i^2 x_a x_b}{|x|^4} \right) dx_a dx_b \\ &= \frac{2}{|x|^4} \left(-\frac{4x_a x_b}{|x|^2} \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{|x|^2} \right) \right) dx_a dx_b \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak buluruz. Böylece

$$dy_1^2 + dy_2^2 + \dots + dy_n^2 = \frac{1}{|x|^4} (dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2)$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\frac{1}{y_n^2} = \frac{1}{\frac{1}{|x|^4} x_n^2} = \frac{|x|^4}{x_n^2}$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned} \sigma^*(ds_h^2) &= \frac{1}{y_n^2} (dy_1^2 + dy_2^2 + \dots + dy_n^2) \\ &= \frac{|x|^4}{x_n^2} \frac{1}{|x|^4} (dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2) \\ &= \frac{1}{x_n^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2) \\ &= ds_h^2 \end{aligned}$$

olur. Bu ise σ 'nun üst yarı uzay modeli için bir izometri olması demektir. ■

1.2 Möbius Dönüşümleri

n boyutlu öklidyen uzay \mathbb{E}^n 'e ∞ noktasını ekleyerek $\hat{\mathbb{E}}^n = \mathbb{E}^n \cup \{\infty\}$ tek nokta kompaktlaşmasını alalım. $\hat{\mathbb{E}}^n$ 'de bir küre, $S(a, r)$ küresi veya $\hat{P}(v, t) = P(v, t) \cup \{\infty\}$ genişletilmiş hiperdüzlemdir. Bundan sonraki kısımlarda $\hat{\mathbb{E}}^n$ 'de bir küreden bahsettiğimiz zaman, $S(a, r)$ küresi veya $\hat{P}(v, t) = P(v, t) \cup \{\infty\}$ genişletilmiş hiperdüzlemini kastetmiş olacağız. Böylece $\hat{\mathbb{E}}^n$ 'deki bir kürede yansıma dönüşümü de $S(a, r)$ küresi veya $P(v, t)$ hiperdüzleminde yansıma dönüşümü olacaktır.

Tanım 1.3 $\hat{\mathbb{E}}^n$ 'deki kürelerde yansıma dönüşümlerinin sonlu sayıda bileşkesi alınarak oluşturulan dönüşümlere Möbius dönüşümleri denir. $\hat{\mathbb{E}}^n$ için Möbius dönüşümlerini $\widetilde{Möb}(\hat{\mathbb{E}}^n)$ ile göstereceğiz. $\widetilde{Möb}(\hat{\mathbb{E}}^n)$ 'nin çift sayıda yansıma dönüşümlerinin bileşkeleri ile oluşturulan altkümesini de $Möb(\hat{\mathbb{E}}^n)$ ile göstereceğiz.

$\hat{\mathbb{E}}^n$ 'deki kürelerde yansıma dönüşümlerinin oluşturduğu $\widetilde{Möb}(\hat{\mathbb{E}}^n)$ kümesi, bileşke işlemiyle bir grup formundadır. Gerçekten $\widetilde{Möb}(\hat{\mathbb{E}}^n)$, tanımından dolayı bileşke işlemine göre kapalıdır. Diğer taraftan genel olarak fonksiyonlar bileşke işlemine göre birleşmeli olduğundan $\widetilde{Möb}(\hat{\mathbb{E}}^n)$ 'de bileşke işlemine göre birleşmelidir. $\hat{P}(v, t)$ ve $S(a, r)$ kürelerinde yansıma dönüşümlerinin kendileriyle bileşkelerinin birim dönüşüm olduğunu görmüştük. O halde $I \in \widetilde{Möb}(\hat{\mathbb{E}}^n)$ olur. Yani bu dönüşümlerin tersleri kendileridir. Herhangi bir $m \in \widetilde{Möb}(\hat{\mathbb{E}}^n)$ elemanının tersi $1 \leq i \leq k$ için m_i , $\hat{P}(v, t)$ veya $S(a, r)$ kürelerinde yansıma dönüşümleri olmak üzere $m = m_1 \circ m_2 \circ \dots \circ m_k$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda $m^{-1} = m_k^{-1} \circ m_{k-1}^{-1} \circ \dots \circ m_1^{-1}$ olur. Böylece $\widetilde{Möb}(\hat{\mathbb{E}}^n)$ bileşke işlemiyle bir gruptur. $Möb(\hat{\mathbb{E}}^n)$, $\widetilde{Möb}(\hat{\mathbb{E}}^n)$ 'nin yön koruyan elemanlarının oluşturduğu altgruptur.

Tanım 1.4 \mathbb{U}^n için Möbius dönüşümleri, $\hat{\mathbb{E}}^n$ 'de $\hat{\mathbb{E}}^{n-1}$ 'e dik olan yarı kürelerde yansıma dönüşümlerinin sonlu sayıda bileşkeleri alınarak oluşturulan dönüşümler olarak tanımlanırlar. Bu tür dönüşümlerin oluşturduğu kümeyi $\widetilde{Möb}(\mathbb{U}^n)$ olarak göstereceğiz. $\widetilde{Möb}(\mathbb{U}^n)$ 'nin çift sayıda yansıma dönüşümlerinin bileşkeleri ile oluşturulan altkümesini de $Möb(\mathbb{U}^n)$ ile göstereceğiz.

$\widetilde{Möb}(\mathbb{U}^n)$ de bileşke işlemiyle bir grup formundadır ve $\widetilde{Möb}(\mathbb{U}^n) \subset \widetilde{Möb}(\widehat{\mathbb{E}}^n)$ olduğu açıktır. \mathbb{E}^{n-1} 'e dik olan $\hat{P}(v, t)$ ve $S(a, r)$ kürelerinde yansımalar \mathbb{U}^n için izometri ve konformal dönüşüm olduklarından, $\widetilde{Möb}(\mathbb{U}^n)$ 'in herbir elemanı da \mathbb{U}^n için izometri ve konformal dönüşümdür. Böylece \mathbb{U}^n 'in bütün izometrilerini $Isom(\mathbb{U}^n)$ ile gösterecek olursak

$$\widetilde{Möb}(\mathbb{U}^n) \subset Isom(\mathbb{U}^n)$$

yazabiliriz. \mathbb{U}^n 'de yön koruyan izometrileri de $Isom_+(\mathbb{U}^n)$ ile göstereceğiz.

Sonuç 1.2.1 *Üst yarı uzayı sabit bırakan öklidyen izometrilere aynı zamanda $\widetilde{Möb}(\mathbb{U}^n)$ 'in elemanıdır.*

Kanıt. Üst yarı uzayı sabit bırakan ϕ öklidyen izometrisi için $\phi(e_n)$ ve e_n vektörleri aynı yönlüdür. Böylece Teorem 1.1.4 ile ϕ 'yi \mathbb{E}^{n-1} 'e dik olan yansıma dönüşümlerinin bileşkesi olarak yazabiliriz. Böylece $\phi \in \widetilde{Möb}(\mathbb{U}^n)$ olur. ■

Çifte Oran (Cross Ratio)

$\widehat{\mathbb{E}}^n$ 'de, $a, b, c, d \in \mathbb{E}^n$ ($a \neq d, b \neq c$) noktalarının çifte oranı

$$[a, b, c, d] = \frac{|a - c|}{|a - d|} : \frac{|b - c|}{|b - d|}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $a, b, c, d = \infty$ ise bu oran sırasıyla

$$\frac{|b - d|}{|b - c|}, \frac{|a - c|}{|a - d|}, \frac{|b - d|}{|a - d|}, \frac{|a - c|}{|b - c|}$$

hallerine döndürür. Burada \mathbb{E}^n için $|\cdot|$ fonksiyonu sürekli olduğundan çifte oran da dört değişkenli sürekli bir fonksiyondur. (Bkz. [2], [3], [6]).

Önerme 1.2.2 *Çifte oran Möbius dönüşümleri altında korunur.*

Kanıt. ζ bir Möbius dönüşümü olsun. Bu durumda ζ , $\widehat{\mathbb{E}}^n$ 'deki kürelerde yansıma dönüşümlerinin bileşkesi olarak yazılabilir. Böylece ζ 'i, $\widehat{\mathbb{E}}^n$ 'deki bir kürede yansıma dönüşümü varsayabiliriz. Benzerlik dönüşümleri $|\phi(x) - \phi(y)| = k|x - y|$

koşulunu sağladıklarından dolayı çifte oranı korurlar. Böylece ζ , $S(a, r)$ küre yüzeyinde yansıma dönüşümü ise $S(0, 1)$ olarak varsayabiliriz. Bu durumda

$$\zeta(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

olur.

$$\begin{aligned} |\zeta(x) - \zeta(y)| &= \left| \frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2} \right| \\ &= \left(\frac{1}{|x|^2} - \frac{2x \cdot y}{|x|^2 |y|^2} + \frac{1}{|y|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{|x - y|}{|x| |y|} \end{aligned}$$

eşitliğini kullanarak $u, v, x, y \neq \infty$ ve sıfırdan farklı noktaları için

$$[\zeta(u), \zeta(v), \zeta(x), \zeta(y)] = [u, v, x, y]$$

elde ederiz.

Eğer ζ , $P(v, t)$ yansıma dönüşümü ise aynı zamanda öklidyen izometridir ve böylece

$$|\zeta(x) - \zeta(y)| = |x - y|$$

olur. Buradan ζ 'nin çifte oranı koruduğu görülür.

Çifte oran u, v, x, y 'nin sürekli fonksiyonu olduğundan bu noktalardan birinin 0 veya ∞ olması durumunda da korunur. Böylece $u, v, x, y \in \hat{\mathbb{E}}^n$ için

$$[\zeta(u), \zeta(v), \zeta(x), \zeta(y)] = [u, v, x, y]$$

elde edilir. ■

Sonuç 1.2.3 $\widetilde{Möb}(\mathbb{U}^n)$ 'in elemanları da çifte oranı korurlar.

Teorem 1.2.4 Eğer ϕ Möbius dönüşümü ∞ noktasını sabit bırakıyorsa, öklidyen benzerlik dönüşümüdür.

Kanıt. $\phi(\infty) = \infty$ ise, 0 ve ∞ noktaları $\gamma(x) = \phi(x) - \phi(0)$ Möbius dönüşümü altında sabittir, yani $\gamma(0) = 0$ ve $\gamma(\infty) = \infty$ eşitlikleri vardır. O halde $\lambda > 0$ ve M ortogonal matris olmak üzere $\gamma(x) = \lambda Mx$ olduğunu göstermeye çalışalım.

Öncelikle $[\gamma(x), \gamma(y), 0, \infty] = [x, y, 0, \infty]$ olduğundan

$$\frac{|\gamma(x)|}{|\gamma(y)|} = \frac{|x|}{|y|}$$

elde ederiz. Böylece $\forall x \in \hat{\mathbb{E}}^n$ için $\frac{|\gamma(x)|}{|x|} = \lambda > 0$ sabittir. Aynı şekilde $[\gamma(x), 0, \gamma(y), \infty] = [x, 0, y, \infty]$ olduğundan

$$\frac{|\gamma(x) - \gamma(y)|}{|\gamma(y)|} = \frac{|x - y|}{|y|}$$

elde ederiz. Bu eşitlikten $|y| |\gamma(x) - \gamma(y)| = \lambda |y| |x - y|$ ve buradan da

$$|\gamma(x) - \gamma(y)|^2 = \lambda^2 |x - y|^2$$

buluruz. Bu ise

$$\gamma(x) \cdot \gamma(y) = \lambda^2 (x \cdot y)$$

olması demektir. Bu son eşitlikten $\frac{\gamma(x)}{\lambda}$ dönüşümünün ortogonal olduğunu anlarız. Bu dönüşümü M ortogonal matrisi ile gösterelim. Böylece $\lambda > 0$ olmak üzere

$$\gamma(x) = \lambda Mx$$

biçiminde yazılabiliriz. Buradan da

$$\phi(x) = \phi(0) + \lambda Mx$$

elde ederiz. Bu ise ϕ 'nin öklidyen benzerlik dönüşümü olması demektir. ■

Poincaré Genişlemesi

\mathbb{E}^n 'de, \mathbb{E}^{n-1} ile $\mathbb{E}^{n-1} \times \{0\}$ düzleminin eşleşmesiyle $x \in \mathbb{E}^{n-1}$ noktasına $\tilde{x} = (x, 0)$ noktası karşılık gelir. Buna göre $\hat{\mathbb{E}}^{n-1}$ 'deki bir ϕ Möbius dönüşümünü, $\hat{\mathbb{E}}^n$ 'deki bir $\tilde{\phi}$ Möbius dönüşümüne tek türlü bir şekilde genişletebiliriz.

Eğer ϕ , $\hat{\mathbb{E}}^{n-1}$ 'de $\hat{P}(a, t)$ küresinde yansıma ise, $\tilde{\phi}$, $\hat{\mathbb{E}}^n$ 'de $\hat{P}(\tilde{a}, t)$ küresinde yansıma dönüşümüdür. Eğer ϕ , $\hat{\mathbb{E}}^{n-1}$ 'de $S(a, r)$ küresinde yansıma ise, $\tilde{\phi}$, $\hat{\mathbb{E}}^n$ 'de $S(\tilde{a}, r)$

küresinde yansıma dönüşümüdür. Açık olarak $\tilde{\phi}$ bir Möbius dönüşümüdür. Ayrıca her iki durumda da $\forall x \in \mathbb{E}^{n-1}$ için

$$\tilde{\phi}(x) = (\phi(x), 0)$$

olur. Böylece $\tilde{\phi}$, $\hat{\mathbb{E}}^{n-1}$ 'i sabit bırakır. Aynı şekilde $\hat{P}(\tilde{a}, t)$ ve $S(\tilde{a}, r)$ küreleri \mathbb{E}^{n-1} 'e dik olduğundan, $\tilde{\phi}$ dönüşümü, \mathbb{U}^n 'i de sabit bırakır.

ϕ , $\hat{\mathbb{E}}^{n-1}$ 'de herhangi bir Möbius dönüşümü olsun. Böylece σ_i 'ler \mathbb{E}^{n-1} 'de yansıma dönüşümleri olmak üzere

$$\phi = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_m$$

şeklinde yazabiliriz. Bu durumda da $\tilde{\phi}$ 'yi

$$\tilde{\phi} = \tilde{\sigma}_1 \circ \tilde{\sigma}_2 \circ \dots \circ \tilde{\sigma}_m$$

şeklinde tanımlayarak ϕ 'yi $\tilde{\phi}$ Möbius dönüşümüne genişletmiş oluruz. Burada $\tilde{\sigma}_i$ 'lerin herbiri \mathbb{U}^n 'i de sabit bıraktığından $\tilde{\phi}$ 'de \mathbb{U}^n 'i sabit bırakır. Bu genişlemenin ϕ 'nin yazımından bağımsız olduğunu görelim. $\tilde{\phi}_1$ ve $\tilde{\phi}_2$, ϕ 'nin farklı iki yazımından elde edilen genişleme dönüşümleri olsunlar. Böylece $\tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2^{-1}$ dönüşümü $\hat{\mathbb{E}}^{n-1}$ 'in her noktasını ve \mathbb{U}^n 'i sabit bırakır. Buradan

$$\tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2^{-1}(\infty) = \infty$$

olması gerektiği görülmüştür. Teorem 1.2.4 ile $\tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2^{-1}$ bir öklidyen benzerlik dönüşümüdür. $\tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2^{-1}$ altında $\hat{\mathbb{E}}^{n-1}$ 'in her noktası sabit olduğundan $\tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2^{-1}(0) = 0$ ve $i = 1, 2, \dots, n-1$ için

$$\tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2^{-1}(e_i) = e_i$$

olmalıdır. Böylece $\tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2^{-1}$ bir ortogonal dönüşümdür. Buradan $\tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2^{-1}(e_n) = \pm e_n$ 'dir. $\tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2^{-1}$ dönüşümü \mathbb{U}^n 'i de sabit bıraktığından

$$\tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2^{-1}(e_n) = e_n$$

elde edilir. Bu ise $\tilde{\phi}_1 \circ \tilde{\phi}_2^{-1}$ 'in birim dönüşüm olması demektir. Buradan

$$\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_2$$

elde edilir. Böylece $\tilde{\phi}$ genişlemesinin ϕ 'nin yazımından bağımsız olduğunu gösterdik. Yani $\tilde{\phi}$ genişlemesi ϕ 'ye göre tek türlü belirlidir. $\tilde{\phi}$ dönüşümüne ϕ 'nin **Poincaré genişlemesi** diyeceğiz. Burada, $\tilde{\sigma}_i$ 'ler \mathbb{E}^{n-1} 'e dik yansıma dönüşümleri olduğundan $\tilde{\phi}$ 'nin \mathbb{U}^n 'e kısıtlanmış $\widetilde{M\ddot{o}b}(\mathbb{U}^n)$ grubunun elemanıdır.

1.3 Üst Yarı Uzayda Doğrular ve Uzaklık

Bu bölümün başında da belirttiğimiz gibi $ds_n^2 = \frac{1}{x_n^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2)$ Riemann metriği ile doğrudan iki nokta arasındaki uzaklığı hesaplayamayız. $x, y \in \mathbb{U}^n$ olmak üzere $F[x, y]$, x ve y noktalarını birleştiren tüm parçalı diferansiyellenebilir eğrilerin ailesi olsun. Bu durumda x ve y arasındaki uzaklık

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = \inf \left\{ \int_{\gamma} ds_n \mid \gamma \in F[x, y] \right\}$$

ile verilir. Burada infimum değerini veren eğri, x ve y noktaları arasındaki jeodezik doğru olarak alınır. Bu bölümde hiperbolik uzayın üst yarı uzay modelinde, $\int_{\gamma} ds_n$ integralini minimum yapan eğrilerin, \mathbb{E}^{n-1} 'e dik olan öklidyen doğrular ve \mathbb{E}^{n-1} 'e dik olan öklidyen çemberler olduğunu göreceğiz. Bu tip eğrilerin \mathbb{U}^n ile kesişimini alarak, üst yarı uzay modelinde doğruların, \mathbb{E}^{n-1} 'e dik olan öklidyen yarı doğrular ve \mathbb{E}^{n-1} 'e dik olan öklidyen yarı çemberler olduğunu göreceğiz. Burada bir öklidyen yarı doğrunun \mathbb{E}^{n-1} 'e dik olması demek, x_n -eksenine öklidyen anlamda paralel olması demektir. Aynı şekilde bir öklidyen yarı çemberin \mathbb{E}^{n-1} 'e dik olması demek, \mathbb{E}^{n-1} 'i kestiği noktadaki teğetinin x_n -eksenine öklidyen anlamda paralel olması demektir.

Teorem 1.3.1 $x, y \in \mathbb{U}^n$ noktaları arasındaki, hiperbolik anlamda en kısa eğri, bu noktaları birleştiren \mathbb{E}^{n-1} 'e dik öklidyen yarı doğrular ve yarı çemberlerdir. Bu eğrilerin $\hat{\mathbb{E}}^{n-1}$ 'i kestiği noktalar u, v olmak üzere, x ve y noktaları arasındaki hiperbolik

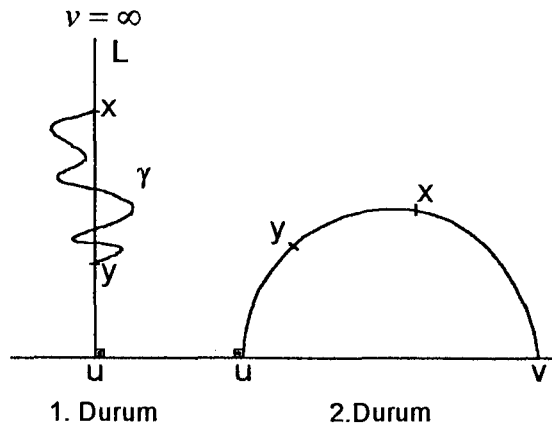
uzaklık

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = |\ln [x, y, u, v]|$$

formülü ile verilir.

Kanıt. İspatı iki durumda inceleyelim:

- 1-) x ve y noktaları, \mathbb{E}^{n-1} 'e dik öklidyen yarı doğru üzerinde ise,
- 2-) x ve y noktaları, \mathbb{E}^{n-1} 'e dik öklidyen yarı doğru üzerinde değil ise



Şekil 1.3: x ve y noktalarının durumları

1.Durum: x ve y noktalarını üzerinde bulunduran, \mathbb{E}^{n-1} 'e dik öklidyen yarı doğruyu L ile gösterelim. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere $i = 1, 2, \dots, n-1$ için $x_i = y_i$ 'dir. $x_n > y_n$ olsun. Bu durumda L doğrusunun $\hat{\mathbb{E}}^{n-1}$ 'i kestiği noktalar $u = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$ ve $v = \infty$ noktalarıdır. L yarı doğrusunun x ve y noktalarını birleştiren kısmını $L_{y,x}$ ile gösterelim. $y_n \leq t \leq x_n$ olmak üzere $L_{y,x}$ 'i $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$ ile parametrize edebiliriz. Böylece $L_{y,x}$ 'in uzunluğu

$$\int_{L_{y,x}} ds_h = \int_{y_n}^{x_n} \frac{dt}{t} = \ln \left(\frac{x_n}{y_n} \right)$$

olarak bulunur. Diğer taraftan $\gamma \in F[x, y]$, x ve y noktalarını birleştiren başka bir eğri olsun. γ için iki durum vardır: Birincisi γ 'nın L üzerinde olması durumu, ikincisi ise L üzerinde olmaması durumudur. İlk önce γ 'nın L üzerinde olması

durumunu ele alalım. Bu durumda $a \leq t \leq b$, $\gamma_n(b) = x_n$ ve $\gamma_n(a) = y_n$ olmak üzere γ eğrisi

$$\gamma(t) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \gamma_n(t))$$

şeklindedir. $\int_{\gamma} ds_n$ integralini küçültürsek

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} ds_n &= \int_a^b \left| \frac{\gamma'_n(t)}{\gamma_n(t)} \right| dt \geq \left| \int_a^b \frac{\gamma'_n(t)}{\gamma_n(t)} dt \right| \\ &\geq \int_a^b \frac{\gamma'_n(t)}{\gamma_n(t)} dt \\ &= \ln\left(\frac{\gamma_n(b)}{\gamma_n(a)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x_n}{y_n}\right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$\int_{L_{y,x}} ds_n \leq \int_{\gamma} ds_n$$

olur.

Şimdi γ 'nın L üzerinde olmaması durumunu ele alalım. γ eğrisi $a \leq t \leq b$ olmak üzere $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ şeklinde parametrize edilmiş olsun. Burada $\gamma(a) = y$ ve $\gamma(b) = x$ 'tir. γ 'nın uzunluğu

$$\int_{\gamma} ds_n = \int_a^b \frac{1}{\gamma_n(t)} [(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2 + \dots + (\gamma'_n(t))^2]^{\frac{1}{2}} dt$$

olarak verilir. Bu ifade de $i = 1, 2, \dots, n-1$ olmak üzere bazı i 'ler için $(\gamma'_i(t))^2 > 0$ olmalıdır. Böylece bu terimleri atarak ifadeyi küçültebiliriz. Böylece

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} ds_n &> \int_a^b \frac{\gamma'_n(t)}{\gamma_n(t)} dt \\ &= \ln(\gamma_n(b)) - \ln(\gamma_n(a)) \\ &= \ln\left(\frac{x_n}{y_n}\right) \\ &= \int_{L_{y,x}} ds_n \end{aligned}$$

elde ederiz.

Böylece x ve y noktalarının \mathbb{E}^{n-1} 'e dik öklidyen yarı doğru üzerinde olmaları durumunda, bu noktaları birleştiren en kısa eğrinin bu öklidyen yarı doğru olduğunu ispatlamış olduk. L 'nin $\hat{\mathbb{E}}^{n-1}$ 'i kestiği noktalar u ve v olmak üzere x, y noktaları arasındaki uzaklığı

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = \ln \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = |\ln [x, y, 0, \infty]| = |\ln [x, y, u, v]|$$

olarak yazabiliriz.

2.Durum: x ve y noktaları \mathbb{E}^{n-1} 'e dik öklidyen yarı doğru üzerinde olmasınlar. x, y noktalarından geçen, \mathbb{E}^{n-1} 'e dik öklidyen yarı çemberi C , \mathbb{E}^{n-1} 'i kestiği noktaları u ve v ile gösterelim. C 'nin, üst yarı uzay modeli için izometri olan $S(v, |v - u|)$ küresinde yansıma dönüşümü σ altındaki görüntüsü \mathbb{E}^{n-1} 'e dik olan öklidyen bir yarı doğrudur. Ayrıca $\sigma(u) = u$ ve $\sigma(v) = \infty$ olur. 1.Durumdan dolayı $\sigma(x)$ ve $\sigma(y)$ noktalarını birleştiren en kısa eğri, bu noktalardan geçen \mathbb{E}^{n-1} 'e dik olan öklidyen bir yarı doğrudur. Böylece x ve y noktalarını birleştiren en kısa eğri \mathbb{E}^{n-1} 'e dik öklidyen yarı çemberdir. x ve y arasındaki uzaklık ise

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(x, y) &= d(\sigma(x), \sigma(y)) \\ &= |\ln [\sigma(x), \sigma(y), 0, \infty]| \\ &= |\ln [\sigma(x), \sigma(y), \sigma(u), \sigma(v)]| \end{aligned}$$

olarak bulunur. Çifte oran Möbius dönüşümleri altında değişmediğinden

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = |\ln [x, y, u, v]|$$

olur. ■

Teorem 1.3.1 ile üst yarı uzayda verilen iki noktayı birleştiren en kısa yolun \mathbb{E}^{n-1} 'e dik öklidyen yarı doğrular ve yarı çemberler olduğunu gördük. Böylece bu tip eğriler iki nokta arasındaki hiperbolik doğrulardır. Gerçekten de üst yarı uzayda ayrıncı x ve y noktalarından geçen tek bir hiperbolik doğru vardır. Eğer verilen noktalar $x = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_n)$ ve $y = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, y_n)$ şeklinde ise bu

hiperbolik doğru \mathbb{E}^{n-1} 'e dik öklidyen yarı doğrudur. Eğer bu iki nokta \mathbb{E}^{n-1} 'e dik öklidyen yarı doğru üzerinde değil ise onları birleştiren hiperbolik doğruyu şu şekilde oluşturabiliriz. x ve y noktalarından geçen öklidyen doğru parçasını alalım. Bu öklidyen doğru parçasının orta dikmesinin \mathbb{E}^{n-1} 'i kestiği noktaya c diyelim. c 'yi merkez kabul eden ve x, y noktalarından geçen öklidyen çemberin üst yarı uzayda kalan kısmı aradığımız hiperbolik doğrudur.

Teorem 1.3.1'in kantonundan dolayı aşağıdaki önermeyi hemen yazabiliriz.

Önerme 1.3.2 x, y, z noktaları \mathbb{U}^n 'de birbirinden farklı üç nokta olsunlar. Bu durumda

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) = d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z)$$

olabilmesi için gerek ve yeter koşul y 'nin x ve z 'yi birleştiren hiperbolik doğru parçası üzerinde olmasıdır.

Önerme 1.3.3 \mathbb{U}^n 'de izometrilere hiperbolik doğruları hiperbolik doğrulara götürürler.

Kanıt. f \mathbb{U}^n 'in bir izometrisi olsun. x ve z , \mathbb{U}^n 'de iki ayrı nokta olsun ve bu iki noktayı birleştiren hiperbolik doğru parçasını ℓ_{xz} ile gösterelim. y 'de ℓ_{xz} üzerinde bir nokta olsun. Böylece Önerme 1.3.2 ile

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) = d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z)$$

elde ederiz. f bir hiperbolik izometri olduğundan

$$d_{\mathbb{H}}(f(x), f(z)) = d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y)) + d_{\mathbb{H}}(f(y), f(z))$$

olur. Burada yine Önerme 1.3.2 ile $f(y)$ noktası $f(x)$ ve $f(z)$ noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçası $\ell_{f(x)f(z)}$ üzerindedir. Böylece

$$f(\ell_{xz}) = \ell_{f(x)f(z)}$$

elde edilir. Bir hiperbolik doğru, kesişimleri boş olmayan hiperbolik doğru parçalarının birleşimi şeklinde ifade edilebileceğinden f , hiperbolik doğruları hiperbolik doğrulara götürür. ■

Önerme 1.3.4 \mathbb{U}^n 'de x, y ve u, v iki ayrık nokta çifti verilsin. Bu durumda x, y noktalarını u, v noktalarına götüren bir Möbius dönüşümü olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(u, v)$$

olmasıdır.

Kanıt. Möbius dönüşümleri hiperbolik izometri olduğundan, x, y noktalarını u, v noktalarına götüren bir Möbius dönüşümü varsa $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(u, v)$ olacağı açıktır.

Tersine $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(u, v) = k$ olsun. x ve y noktalarını sırasıyla $(0, 0, \dots, 0, 1)$ ve $(0, 0, \dots, 0, e^k)$ noktalarına götüren bir ϕ_1 Möbius dönüşümü bulmamız yeterlidir. Çünkü aynı şekilde u ve v 'yi de aynı noktalara götüren bir ϕ_2 Möbius dönüşümü bulunabilir. Böylece aradığımız Möbius dönüşümü $\phi_2^{-1}\phi_1$ olur.

x ve y noktalarını sırasıyla $(0, 0, \dots, 0, 1)$ ve $(0, 0, \dots, 0, e^k)$ noktalarına götürme işlemini iki durumda inceleyelim. 1.Durumda x ve y noktaları x_n -ekseni üzerinde olsun. $x = (0, 0, \dots, 0, x_n)$ ve $y = (0, 0, \dots, 0, y_n)$ diyelim. $y_n > x_n$ olsun. Eğer $y_n < x_n$ ise $S(0, y_n)$ küresinde yansıma dönüşümü ile istenilen durum elde edilir. Burada x ve y arasındaki uzaklık

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = \ln\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$$

'dir. $\varphi(x) = \frac{x}{x_n}$ öklidyen benzerlik dönüşümü ile $\varphi(x) = (0, 0, \dots, 0, 1)$ ve

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= (0, 0, \dots, 0, \frac{y_n}{x_n}) \\ &= (0, 0, \dots, 0, e^k)\end{aligned}$$

elde edilir.

2.Durumda x ve y noktaları \mathbb{E}^{n-1} 'e dik bir çember üzerinde olsun. Bu çemberin \mathbb{E}^{n-1} 'i kestiği noktaları p ve q olarak adlandıralım. Daha sonra $S(q, |q - p|)$ küresinde yansıma dönüşümü ile \mathbb{E}^{n-1} 'e dik öklidyen yarı doğrusu üzerine gönderelim. Sonra da $\psi(x) = x - p$ ötelemesi ile x ve y noktalarını x_n -ekseni üzerine taşıyalım. Böylece 1.Durumu elde etmiş oluruz. ■

Teorem 1.3.5 $\widetilde{M\ddot{o}b}(\mathbb{U}^n) = Isom(\mathbb{U}^n)$

Kanıt. $\widetilde{M\ddot{o}b}(\mathbb{U}^n) \subset Isom(\mathbb{U}^n)$ olduğundan dolayı diğer yöndeki kapsamayı göstermemiz yeterlidir.

$f \in Isom(\mathbb{U}^n)$, yani hiperbolik izometri olsun. x ve y , x_n -ekseni üzerinde birbirinden farklı iki nokta olsun. Böylece $f(x) \neq f(y)$ noktaları arasındaki hiperbolik uzaklık

$$d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y)) = d_{\mathbb{H}}(x, y)$$

olur. Önerme 1.3.4, $f(x), f(y)$ noktalarını x, y noktalarına götüren $\gamma \in \widetilde{M\ddot{o}b}(\mathbb{U}^n)$ elemanın varlığını garanti eder. Böylece $\gamma \circ f(x) = x$ ve $\gamma \circ f(y) = y$ olur. $\gamma \in \widetilde{M\ddot{o}b}(\mathbb{U}^n)$ ve f bir hiperbolik izometri olduğundan $\gamma \circ f$ dönüşümü de bir hiperbolik izometridir. Hiperbolik izometrilere hiperbolik doğruları hiperbolik doğrulara götürdüğünden, x ve y noktalarını birleştiren hiperbolik doğru olan x_n -ekseni, $\gamma \circ f$ izometrisi altında $\gamma \circ f(x) = x$ ve $\gamma \circ f(y) = y$ noktalarını birleştiren hiperbolik doğruya, yani kendisine döndürür. x_n -ekseni üzerindeki bir z noktası x ve y noktalarına uzaklıklarıyla tek türlü belirlidir. $\gamma \circ f$ izometrisi altında x ve y sabit olduğundan z 'de sabittir. Yani $\gamma \circ f$ dönüşümü x_n -ekseninin her noktasını sabit bırakır.

$S(0, r)$ küresi x_n -eksenine diktir ve x_n eksteni üzerindeki belirli iki noktaya uzaklıkları eşit olan noktaların oluşturduğu kümedir. Böylece $\gamma \circ f$ izometrisi altında $S(0, r)$ küresi de sabit kalır. Şimdi x_n -ekseni üzerinde olmayan bir ω noktası alalım. $S(0, |\omega|)$ küresi $\gamma \circ f$ izometrisi altında sabit kaldığından $\gamma \circ f(\omega)$ yine $S(0, |\omega|)$ üzerindedir. Bu ise $|\gamma \circ f(\omega)| = |\omega|$ olması demektir. Yani $\gamma \circ f$ üst yarı uzayı sabit bırakan bir *öklidyen* izometridir. Böylece Sonuç(1.2.1)'den dolayı $\gamma \circ f \in \widetilde{M\ddot{o}b}(\mathbb{U}^n)$ olur. $\gamma \circ f = \phi$ diyebiliriz.

$$f = \gamma^{-1} \circ \phi \in \widetilde{M\ddot{o}b}(\mathbb{U}^n)$$

elde ederiz. ■

Sonuç 1.3.6 $M\ddot{o}b(\mathbb{U}^n) = Isom_+(\mathbb{U}^n)$

Tanım 1.5 \bar{U}^n üst yarı uzayın $\hat{\mathbb{E}}^n$ 'deki kapanışı olmak üzere, $\partial\bar{U}^n$ kümesinin elemanlarına *ideal nokta* denir.

Açık olarak U^n 'in ideal noktaları $\hat{\mathbb{E}}^{n-1}$ 'in noktalarıdır. U^n 'deki bir noktanın, bir ideal noktaya hiperbolik uzaklığı sonsuzdur. U^n 'in izometrilere, yani Möbius dönüşümleri ideal noktaları ideal noktalara dönüştürürler.

Kürelerin Korunması

$\hat{\mathbb{E}}^n$ 'de $S(a, r)$ veya $\hat{P}(a, t)$ küreleri sırasıyla

$$|x|^2 - 2a \cdot x + |a|^2 - r^2 = 0$$

ve

$$-2a \cdot x + 2t = 0$$

şeklinde tanımlanırlar. Bu iki ifadeyi $|a|^2 > a_0 a_{n+1}$ olmak üzere

$$a_0 |x|^2 - 2a \cdot x + a_{n+1} = 0$$

şeklinde ortak bir ifadeyle yazabiliriz. Tersine \mathbb{R}^{n+2} 'de $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ olmak üzere $|a|^2 > a_0 a_{n+1}$ koşulunu sağlayan bir $(a_0, a_1, \dots, a_{n+1})$ vektörü, $\hat{\mathbb{E}}^n$ 'de

$$a_0 |x|^2 - 2a \cdot x + a_{n+1} = 0$$

koşulunu sağlayan bir Σ küresi tanımlar. Eğer $a_0 \neq 0$ ise

$$\Sigma = S \left(\frac{a}{a_0}, \frac{(|a|^2 - a_0 a_{n+1})^{\frac{1}{2}}}{|a_0|} \right)$$

eğer $a_0 = 0$ ise

$$\Sigma = \hat{P} \left(\frac{a}{|a|}, \frac{a_{n+1}}{2|a|} \right)$$

olur. Burada $(a_0, a_1, \dots, a_{n+1})$, Σ 'nin katsayı vektörü olarak tanımlanır.

Teorem 1.3.7 ϕ , $\hat{\mathbb{E}}^n$ 'de bir Möbius dönüşümü ve Σ 'de bir küre olsun. Bu durumda $\phi(\Sigma)$ 'de $\hat{\mathbb{E}}^n$ 'de bir küredir.

Kanıt. ϕ , $\hat{\mathbb{E}}^n$ 'de bir Möbius dönüşümü olduğundan, yansıma dönüşümlerinin bileşkesidir. Bu durumda ϕ 'yi, $\hat{\mathbb{E}}^n$ 'de bir yansıma dönüşümü olarak varsayabiliriz. Açık olarak öklidyen benzerlik dönüşümleri küreleri kürelere götürürler. $S(a, r)$ küresinde yansıma dönüşümünü $\psi(x) = \frac{1}{r}(x - a)$ öklidyen benzerlik dönüşümü ile $S(0, 1)$ küresinde yansıma dönüşümünün bileşkesi şeklinde yazabiliriz. Böylece ϕ 'yi $S(0, 1)$ küresinde yansıma dönüşümü olarak varsayabiliriz. Bu durumda

$$\phi(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

olur. $(a_0, a_1, \dots, a_{n+1})$ vektörü Σ 'nın katsayı vektörü olsun. Böylece Σ ,

$$a_0 |x|^2 - 2a \cdot x + a_{n+1} = 0$$

denklemini sağlar. $y = \phi(x)$ diyelim. Böylece y

$$a_0 - 2a \cdot y + a_{n+1} |y|^2 = 0$$

denklemini sağlar. Bu ise yeni bir küre denklemdir. Yani ϕ dönüşümü ile Σ küresinin görüntüsü bir Σ' küresidir. Benzer şekilde ϕ dönüşümü ile Σ' küresinin görüntüsü de Σ küresidir ■

Üst Yarı Uzayda Hacim Elemanı

n -boyutlu Riemann manifoldu üzerindeki Riemann metriği genel olarak

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j$$

formundadır. Bu durumda hacim elemanı

$$dV = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 1.3.8 *Üst yarı uzay için hacim elemanı*

$$dV = \frac{1}{x_n^n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

'dir.

Kanıt. Üst yarı uzayda Riemann metriği

$$ds_h^2 = \frac{1}{x_n^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2)$$

olduğundan, (g_{ij}) fonksiyonlarının oluşturduğu $n \times n$ 'lik matrisin determinanı

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{x_n^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_n^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{x_n^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{x_n^{2n}} \end{aligned}$$

olararak bulunur. Böylece

$$dV = \frac{1}{x_n^n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

olur. ■

1.4 Hiperbolik Uzayın Diğer Modelleri

Konformal Disk Model

Hiperbolik uzayın modellerinden biri de, birim disk içinde tanımlanan konformal disk modeldir. Bu modeli \mathbb{B}^n ile göstereceğiz. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ vektörleri \mathbb{E}^n 'in standart taban vektörleri olmak üzere konformal disk modeli, üst yarı uzaydan birim diske tanımlanan,

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{B}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}| < 1\} \\ g(\mathbf{x}) &= \frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{e}_n|^2} (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{n-1}, 1 + |\mathbf{x}|^2) \quad (x_n > 0) \end{aligned}$$

dönüşümü kullanarak elde edebiliriz. Bu durumda üst yarı uzaydaki Riemann metriğinden yararlanarak bu modelde Riemann metriğini $r^2 = \sum_i x_i^2$ olmak üzere

$$ds_h^2 = \frac{4}{(1 - r^2)^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2)$$

olarak buluruz. Konformal disk modelde doğrular, üst yarı uzay modelindeki doğruların g dönüşümü altındaki görüntüsüdür. Böylece iki noktayı birleştiren doğru, bu iki noktadan geçen ve S^{n-1} 'e dik olan çemberin disk içinde kalan kısmıdır. \mathbb{B}^n 'in ideal noktaları ise S^{n-1} 'in noktalarıdır.

Konformal disk modelin izometrilere, $\varphi \in \widetilde{Möb}(\mathbb{U}^n)$ olmak üzere $\phi = g \circ \varphi \circ g^{-1}$ şeklindeki dönüşümlerden oluşurlar. Bu tip dönüşümlerin kümesi de bileşke işlemiyle bir grup formundadır. Bu grubu da $\widetilde{Möb}(\mathbb{B}^n)$ ile göstereceğiz. Ayrıca konformal disk modelde hacim elemanı

$$dV = \frac{2^n}{(1-r^2)^n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

olarak bulunur.

Projektif Disk Modeli

Projektif disk modeli de yine birim disk içinde verilen bir modeldir. Bu yüzden Projektif disk modelini, konformal disk modelden elde etmek daha kolay görünmektedir. Projektif disk modelini \mathbb{D}^n ile göstereceğiz. Projektif disk modelini,

$$p : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$$

$$p(\mathbf{x}) = \frac{2\mathbf{x}}{1+|\mathbf{x}|^2} \quad |\mathbf{x}| < 1$$

dönüşümü ile konformal disk modelden elde edilebilir. Ayrıca bu dönüşüm $\partial\mathbb{B}^n$ üzerine, $\forall \mathbf{x} \in S^{n-1}$ için $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ alınarak sürekli bir şekilde genişletilebilir. p dönüşümü vasıtasıyla, \mathbb{B}^n üzerindeki Riemann metriğinden yararlanarak, $r^2 = \sum_i x_i^2$ olmak üzere \mathbb{D}^n üzerinde,

$$ds_h^2 = \frac{1}{(1-r^2)} \sum_i dx_i^2 + \frac{1}{(1-r^2)^2} \sum_{i,j} x_i x_j dx_i dx_j$$

Riemann metriğini elde ederiz. Projektif disk modelinde de ideal noktalar S^{n-1} üzerindeki noktalardır.

Projektif disk modelinin avantajı burada doğruların öklidyen doğruların birim disk içinde kalan kısımları olmasıdır. Ayrıca projektif disk modelinde izometrilere, ϕ dönüşümü \mathbb{B}^n 'in bir izometrisi olmak üzere $p \circ \varphi \circ p^{-1}$ şeklindeki dönüşümlerden

oluşurlar. Bu modelde hacim elemanı da

$$dV = \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

olarak verilir.

Buraya kadar olan kısımda hiperbolik uzayı ve modellerini tanıtmaya çalıştık. Şimdi ise üç boyutlu hiperbolik uzayda politopların hacimlerinin hesaplanmasında sıkça kullanılacak olan Lobachevsky fonksiyonunu vereceğiz.

1.5 Lobachevsky Fonksiyonu

Üç Boyutlu hiperbolik uzay \mathbb{H}^3 'de hacim hesabında önemli rolü olan Lobachevsky fonksiyonunu $Jl : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$Jl(\theta) = - \int_0^\theta \log |2 \sin x| dx$$
$$Jl(0) = 0$$

şeklinde tanımlıyoruz. Burada $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ için integral has olmayan integrale döndürür. Şimdi Jl 'nin iyi tanımlılığına ilişkin teoremi verelim.

Teorem 1.5.1 $Jl, \forall \theta \in \mathbb{R}$ için iyi tanımlı, sürekli, periyodik ve periyodu π olan bir fonksiyondur.

Kamt. $\omega [1, \infty)$ kapalı aralığının tümleyeninde bir kompleks sayı olsun. Bu durumda $1 - \omega$ 'de $(-\infty, 0]$ kapalı aralığının tümleyeninde bir kompleks sayı olur. Böylece $1 - \omega$ 'nin argümentini $\arg(1 - \omega) \in (-\pi, \pi)$ olacak şekilde tanımlayabiliriz. Böylece

$$\log(1 - \omega) = \log |1 - \omega| + i \cdot \arg(1 - \omega)$$

formülü ile tanımlı $\log(1 - \omega)$ fonksiyonu $[1, \infty)$ aralığının tümleyeninde analitik olarak tanımlanmış olur. Şimdi $0 < \theta < \pi$ iken

$$\log(1 - e^{2i\theta}) = \log(2 \sin \theta) + i(\theta - \frac{\pi}{2})$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} 1 - e^{2i\theta} &= 1 - (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ &= 1 - ((\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2i \sin \theta \cos \theta) \\ &= 2 \sin^2 \theta - 2i \sin \theta \cos \theta \\ &= 2 \sin \theta (\sin \theta - i \cos \theta) \\ &= 2 \sin \theta (\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) + i \sin(\theta - \frac{\pi}{2})) \end{aligned} \quad (1.2)$$

bu eşitliği log fonksiyonunda yazarsak

$$\log(1 - e^{2i\theta}) = \log(2 \sin \theta) + i(\theta - \frac{\pi}{2})$$

elde ederiz.

$$\phi(\omega) = \frac{-\log(1 - \omega)}{\omega}$$

formülü ile tanımlı ϕ fonksiyonunu gözönüne alalım. (Bkz [2]).

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \phi(\omega) = 0$$

olduğundan $\omega = 0$ 'daki singülarite kaldırılabilir. $-\log(1 - \omega)$ 'nin kuvvet serisi açılımından

$$-\log(1 - \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{n}, \quad |\omega| < 1$$

yazabiliriz. Buradan da

$$\phi(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{n-1}}{n}, \quad |\omega| < 1$$

elde ederiz. $\phi(\omega)$ fonksiyonu $|\omega| < 1$ yakınsaklık diski içinde analitiktir. Analitik devam (analytic continuation) ile $[1, \infty)$ kapalı aralığının tümleyeninde de analitiktir. Dilogaritma fonksiyonu $[1, \infty)$ kapalı aralığının tümleyeninde

$$\psi(z) = \int_0^z \phi(\omega) d\omega$$

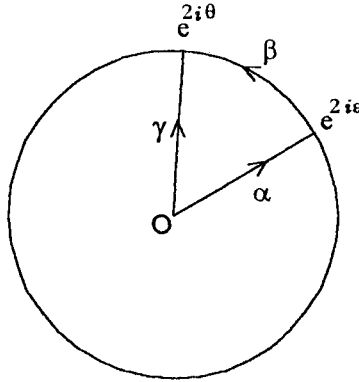
şeklinde tanımlanır. $\phi(\omega)$ fonksiyonunun $|\omega| < 1$ yakınsaklık diski içinde terim terime integre edersek

$$\psi(z) = \int_0^z \phi(\omega) d\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, |z| < 1$$

elde ederiz. $|z| < 1$ diski içinde $\frac{z^n}{n^2} < \frac{1}{n^2}$ olduğundan ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ serisi düzgün yakınsaktır. Böylece $|z| \leq 1$ kapalı diski üzerinde ψ fonksiyonunu

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, |z| \leq 1$$

şeklinde tanımlayabiliriz. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ serisi $|z| \leq 1$ kapalı diski üzerinde düzgün yakınsak olduğundan $\psi(z)$ fonksiyonu $|z| \leq 1$ için süreklidir. ε ve θ , $0 < \varepsilon < \theta < \pi$ koşulunu sağlayan reel sayılar olsunlar.



Şekil 1.4: Birim disk içinde α , β ve γ eğrileri

Şekil 1.4'deki gibi α, β, γ eğrilerini gözöntüne alalım. $\phi(\omega)$ fonksiyonu $[1, \infty)$ kapalı aralığının tümleyeninde analitik olduğundan

$$\int_{\alpha} \phi(\omega) d\omega + \int_{\beta} \phi(\omega) d\omega = \int_{\gamma} \phi(\omega) d\omega$$

yazabiliriz. Böylece

$$\int_{\beta} \phi(\omega) d\omega = \psi(e^{2i\theta}) - \psi(e^{2i\varepsilon})$$

olur. Burada $\omega = e^{2it}$ diyecek olursak $d\omega = 2ie^{2it}dt$ buradan da $\frac{d\omega}{\omega} = 2idt$ elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \int_{\beta} \phi(\omega) d\omega &= \int_{\beta} \frac{-\log(1-\omega)}{\omega} d\omega \\ &= - \int_{\varepsilon}^{\theta} \log(1 - e^{2it}) 2idt \\ &= - \int_{\varepsilon}^{\theta} \left[\log(2 \sin t) + i\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \right] 2idt \\ &= \left[t^2 - \pi t \right]_{\varepsilon}^{\theta} - 2i \int_{\varepsilon}^{\theta} \log(2 \sin t) dt \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece

$$-2i \int_{\varepsilon}^{\theta} \log(2 \sin t) dt = \psi(e^{2i\theta}) - \psi(e^{2i\varepsilon}) + \left[\pi t - t^2 \right]_{\varepsilon}^{\theta}$$

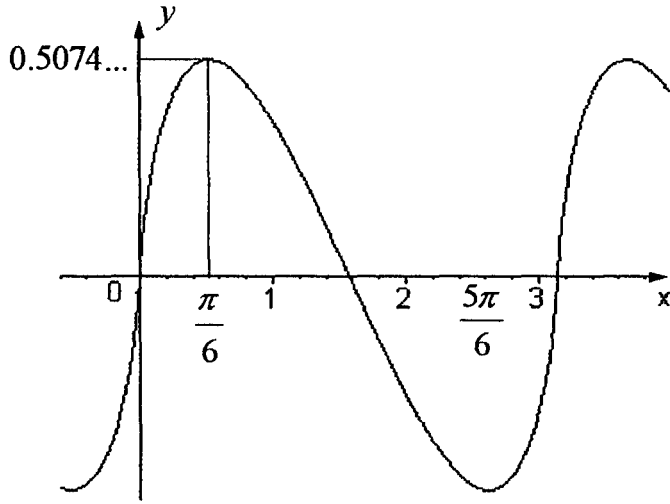
olur. ψ fonksiyonu $|z| \leq 1$ kapalı diski üzerinde sürekli olduğundan

$$\int_0^{\theta} \log(2 \sin t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\theta} \log(2 \sin t) dt$$

has olmayan integrali yakınsaktır. Böylece $Jl(\theta)$ fonksiyonu $0 < \theta < \pi$ için iyi tanımlı olur ve

$$2iJl(\theta) = \psi(e^{2i\theta}) - \psi(1) + \pi\theta - \theta^2$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlikten $\theta \rightarrow \pi$ için $Jl(\pi) = 0$ olarak bulunur. Buradan da $2iJl(\theta) = \psi(e^{2i\theta}) - \psi(1) + \pi\theta - \theta^2$ formülünün $0 \leq \theta \leq \pi$ için sağlandığı görülür. Böylece Jl fonksiyonu bu aralıkta süreklidir. $Jl(\pi) = Jl(0) = 0$ ve $-\log|2 \sin(\theta)|$ periyodik ve periyodu π olduğundan Jl fonksiyonu da periyodik ve periyodu π 'dir. Böylece $Jl(\theta)$ fonksiyonunun $\forall \theta \in \mathbb{R}$ için iyi tanımlı ve sürekli olduğu görülür. ■



Şekil 1.5: Lobachevsky fonksiyonunun grafiği

Yardımcı Teorem 1.5.2 JI fonksiyonu tek fonksiyondur ve

$$JI(n\theta) = n \sum_{k=0}^{n-1} JI\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (1.3)$$

özelliğini sağlar.

Kanıt. Önce JI fonksiyonunun tek olduğunu görelim.

$$JI(-\theta) = - \int_0^{-\theta} \log |2 \sin x| dx$$

ifadesinde $x = -u$ değişken değişimi yaparsak $dx = -du$ olur. Böylece

$$JI(-\theta) = - \int_0^{-\theta} \log |2 \sin x| dx = \int_0^{\theta} \log |2 \sin u| du = \int_0^{\theta} \log |2 \sin x| dx = -JI(\theta)$$

elde ederiz.

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - e^{-\frac{2\pi ik}{n}} \right)$$

eşitliğinde z yerine e^{2ix} yazalım. Bu ifadenin normunu alırsak

$$|e^{2inx} - 1| = \prod_{k=0}^{n-1} |e^{2ix}| \left| 1 - e^{-2ix - \frac{2\pi ik}{n}} \right|$$

ifadesinde $t = x + \frac{k\pi}{n}$ dersek

$$1 - e^{-2ix - \frac{2\pi ik}{n}} = 1 - e^{-2it}$$

olur. Böylece

$$|1 - e^{-2it}|^2 = 4 \sin^2 t$$

yani

$$\left|1 - e^{-2ix - \frac{2\pi ik}{n}}\right| = \left|2 \sin \left(x + \frac{k\pi}{n}\right)\right|$$

elde ederiz. $|e^{2ix}| = 1$ ve (1.2) 'den dolayı $|1 - e^{2inx}| = |2 \sin(nx)|$ olduğundan

$$\begin{aligned} |1 - e^{2inx}| &= \prod_{k=0}^{n-1} \left|1 - e^{-2ix - \frac{2\pi ik}{n}}\right| \\ |2 \sin(nx)| &= \prod_{k=0}^{n-1} \left|2 \sin \left(x + \frac{k\pi}{n}\right)\right| \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu son eşitlikte her iki tarafın logaritmasını alırsak

$$\log |2 \sin(nx)| = \sum_{k=0}^{n-1} \log \left|2 \sin \left(x + \frac{k\pi}{n}\right)\right|$$

eşitliğini elde ederiz. Her iki tarafın integralini alarak

$$\int_0^\theta \log |2 \sin(nx)| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^\theta \log \left|2 \sin \left(x + \frac{k\pi}{n}\right)\right| dx \right)$$

elde ederiz. Sol taraftaki integralde $u = nx$ sağ taraftaki integrallerde de $u = x + \frac{k\pi}{n}$ değişken değişimi yaparak

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_0^{n\theta} \log |2 \sin(u)| du &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\theta + \frac{k\pi}{n}} \log |2 \sin(u)| du \right) \\ \frac{JI(n\theta)}{n} &= \sum_{k=0}^{n-1} JI \left(\theta + \frac{k\pi}{n} \right) - \sum_{k=0}^{n-1} JI \left(\frac{k\pi}{n} \right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitlik $n = 2$ için

$$\frac{JI(2\theta)}{2} = JI(\theta) + JI\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - JI(0) - JI\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

haline gelir. Jl fonksiyonunun periyodu π olduğundan

$$Jl\left(\frac{n-k}{n}\pi\right) = Jl\left(\pi - \frac{k}{n}\pi\right) = -Jl\left(\frac{k}{n}\pi\right)$$

elde ederiz. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{n-1} Jl\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0$$

olur. Böylece aradığımız

$$\frac{Jl(n\theta)}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} Jl\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

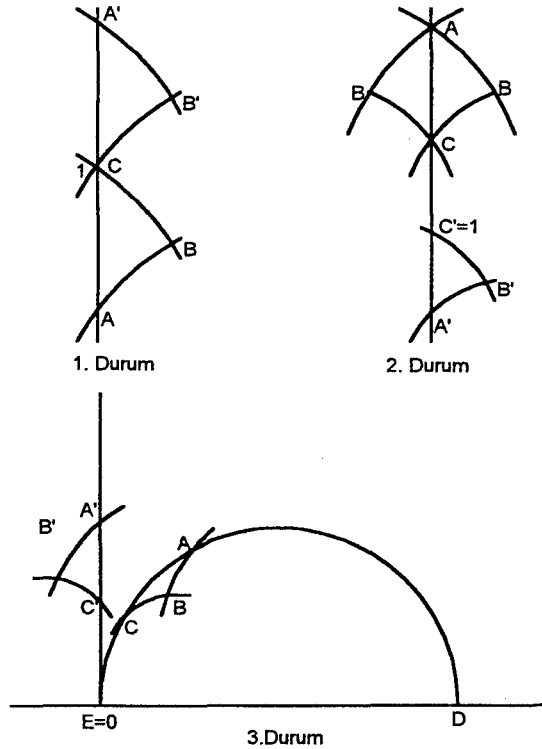
eşitliğini elde ederiz. ■

2 Hiperbolik Üçgenin Alanı

Bu bölümde hiperbolik düzlemde verilen bir üçgenin alanını hesaplayacağız. Daha sonra hiperbolik üçgenin maksimum hacme sahip olabilmesi için koşulları araştıracağız. Bu incelemeyi yapmak için de üst yarı düzlem modelini kullanacağız.

Tanım 2.1 Üçü aynı hiperbolik doğru üzerinde olmayan A, B, C noktalarının hiperbolik doğrularla birleştirilmesiyle oluşan şekle hiperbolik üçgen denir. Eğer A, B, C noktaları sırasıyla $s > 0, k > 1$ olmak üzere $(0, k), (s, t), (0, 1)$ koordinatlarına sahipler oluşun üçgene standart durumdadır diyelim. (Bkz. [8])

Önerme 2.0.1 Üst yarı düzlemdeki her hiperbolik üçgen izometrilere standart duruma getirilebilir.



Şekil 2.1: Hiperbolik üçgenin standart duruma getirilmesi

Kanıt. Bu önermeyi üç durumda ispatlayacağız. Birinci durumda ΔABC hiperbolik üçgeninin köşeleri $C = (0, 1)$, $s > 0$ olmak üzere $B = (s, t)$ ve $k < 1$ olmak

üzere $A = (0, k)$ şeklinde olsun. Bu durumda ΔABC hiperbolik üçgeni $I_{O,1}$ çemberde yansıma dönüşümü ile standart duruma döndürür.

İkinci durumda ΔABC hiperbolik üçgeninin köşelerinin ikisi y -ekseni üzerinde $A = (0, a)$ ve $C = (0, c)$ noktaları olsun. Eğer $s < 0$ ise y -ekseninde yansıma yaparak $s > 0$ elde ederiz. Böylece $B = (s, t)$ köşesi için $s > 0$ varsayabiliriz. Bu durumda $I_{O,\sqrt{c}}$ inversiyonu uygularsak

$$\begin{aligned} |OC||OC'| &= R^2 \\ c|OC'| &= (\sqrt{c})^2 \\ |OC'| &= 1 \end{aligned}$$

buluruz. Böylece ΔABC hiperbolik üçgenini standart duruma veya birinci durumdaki hiperbolik üçgene dönüştürmüştür.

Son olarak ΔABC keyfi bir hiperbolik üçgen olsun. AC kenarının x -eksenini kestiği noktaları D ve E olarak adlandıralım. Şekil 2.1. Yatay ötelemeler üst yarı düzlem modeli için izometri olduğundan $E = O$ orijin olarak alabiliriz.

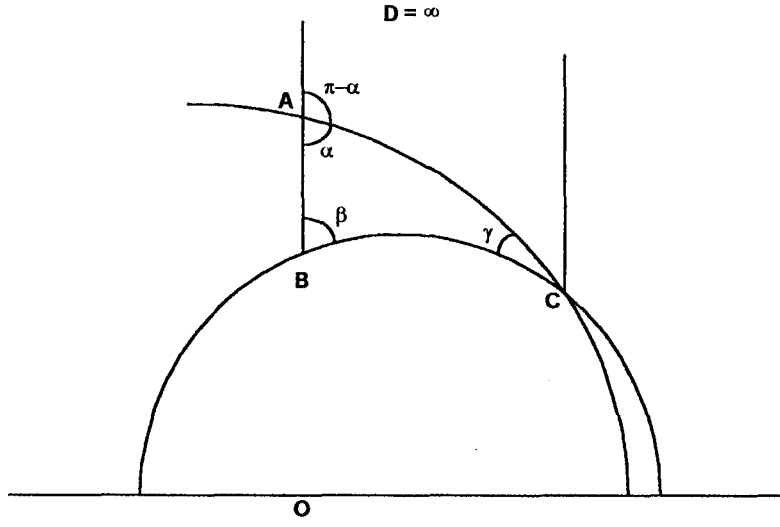
Bu durumda $D = (d, 0)$ olur ve $I_{D,d}$ yansıması ile A ve C noktalarından geçen hiperbolik doğruyu y -eksenine gönderebiliriz. Böylece standart olan veya ilk iki durumdan birine uyan bir hiperbolik üçgen elde etmiş oluruz. Böylece üst yarı düzlem modelinde verilen herhangi bir hiperbolik üçgen bu modelin izometreleriyle standart duruma getirilmiş olur. ■

Yardımcı Teorem 2.0.2 *Bir köşesi ideal olan hiperbolik üçgenin alanı diğer iki köşesindeki açılar α, β olmak üzere $\pi - \alpha - \beta$ 'dir.*

Kanıt. Bu hiperbolik üçgenin ideal köşesini A , açısı β olan köşeyi B , diğer köşeyi C olarak adlandıralım. Burada genelliği bozmadan $A = \infty$, BC kenarını da O merkezli r yarıçaplı hiperbolik doğru üzerinde alabiliriz. Şekil 2.2.

Bu durumda OB 'nin x -ekseni ile yaptığı açı β , OC 'nin x -ekseni ile yaptığı açı ise $\pi - \alpha$ olur. Böylece ΔABC hiperbolik üçgeninin hiperbolik alanı

$$HA(\Delta ABC) = \int_{r \cos(\pi - \alpha)}^{r \cos \beta} \int_{\sqrt{r^2 - x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx$$



Şekil 2.3: Hiperbolik Üçgen

üçgenleri Yardımcı Teorem 2.0.2 'de hesapladığımız türden hiperbolik üçgenlerdir. Böylece ΔABC hiperbolik üçgeninin alanı

$$HA(\Delta ABC) = HA(\Delta DBC) - HA(\Delta DAC)$$

olur. Burada DAC açısı $\pi - \alpha$ 'dır. \angle açısını göstermek üzere

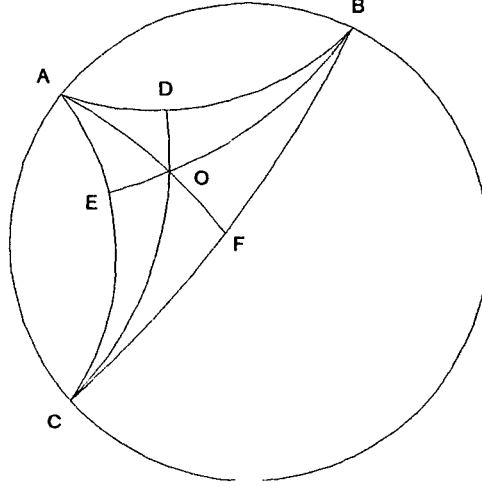
$$\begin{aligned} HA(\Delta ABC) &= \pi - \beta - \angle DCB - (\pi - (\pi - \alpha) - \angle DCA) \\ &= \pi - \beta - \gamma - \angle DCA - (\pi - (\pi - \alpha) - \angle DCA) \\ &= \pi - \beta - \gamma - \angle DCA - \alpha + \angle DCA \\ &= \pi - \alpha - \beta - \gamma \end{aligned}$$

elde ederiz. ■

Sonuç 2.0.4 *İdeal hiperbolik üçgenin alanı π 'dir.*

Kanıt. ΔABC ideal hiperbolik üçgeni verilsin. Bu hiperbolik üçgenin iç bölgesinde bir O noktası alalım. Bu O noktası ile A, B, C noktalarından geçen hiperbolik doğruları çizelim ve kenarları kestikleri noktaları sırasıyla F, E, D olarak adlandıralım. Burada O noktasında keşisen hiperbolik doğrular arasındaki açılar

toplamı 2π 'dir. Diğer taraftan $\angle ADC + \angle BDC = \pi$, $\angle AEB + \angle BEC = \pi$ ve $\angle AFC + \angle AFB = \pi$ eşitlikleri vardır. Şekil 2.4. Böylece ΔABC hiperbolik üç-



Şekil 2.4: Poincaré disk modelinde ideal üçgenin bölünmesi

geninin alanı, Teorem 2.0.2 kullanılarak

$$HA(\Delta ABC) = 6\pi - 2\pi - \pi - \pi - \pi = \pi$$

elde edilir. ■

Sonuç 2.0.5 *Bir hiperbolik üçgenin maksimum alana sahip olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul ideal hiperbolik üçgen olmasıdır.*

Kanıt. Herhangi bir hiperbolik üçgen bir ideal hiperbolik üçgen tarafından içerilir. O halde maksimum hacimli hiperbolik üçgen ideal olmalıdır. Diğer taraftan bütün ideal hiperbolik üçgenlerin alanları π olduğundan, ideal üçgenler maksimum alana sahiptir. ■

3 Bazı Hiperbolik İdeal Politopların Hacimleri

Bu bölümde hiperbolik düzgün, ideal dörtyüzlü (tetrahedron), altıyüzlü (hexahedron), sekizyüzlü (octahedron), onikiyüzlü (dodecahedron), yirmiyüzlü (icosahedron), gibi bazı politopların hacimlerini hesaplayacağız. Ayrıca hacimlerinin maksimum olması için gerek ve yeter koşulun düzgün ve ideal olmaları olduğunu göstereceğiz.

Tanım 3.1 X, \mathbb{E}^n veya \mathbb{H}^n olmak üzere, X içinde bir politop, sonlu sayıda noktanın konveks zarfı olarak tanımlanır. Bu sonlu sayıdaki noktalar da P politopunun köşelerini oluştururlar. \mathbb{H}^n 'deki bir P politopunun bir ideal noktası, \bar{P} , P 'nin \mathbb{E}^n 'deki kapanışı olmak üzere $\bar{P} \cap \partial\mathbb{H}^n$ kümesinin bir noktasıdır. Bütün köşeleri ideal olan politopa da ideal politop denir.

Tanım 3.2 X, \mathbb{E}^n veya \mathbb{H}^n olmak üzere, X içinde köşeleri v_1, v_2, \dots, v_k olan bir politopun ağırlık merkezi

$$c = \begin{cases} \frac{(v_1+v_2+\dots+v_k)}{k} & \text{eğer } X = \mathbb{E}^n \\ \frac{(v_1+v_2+\dots+v_k)/k}{|(v_1+v_2+\dots+v_k)/k|} & \text{eğer } X = \mathbb{H}^n \end{cases}$$

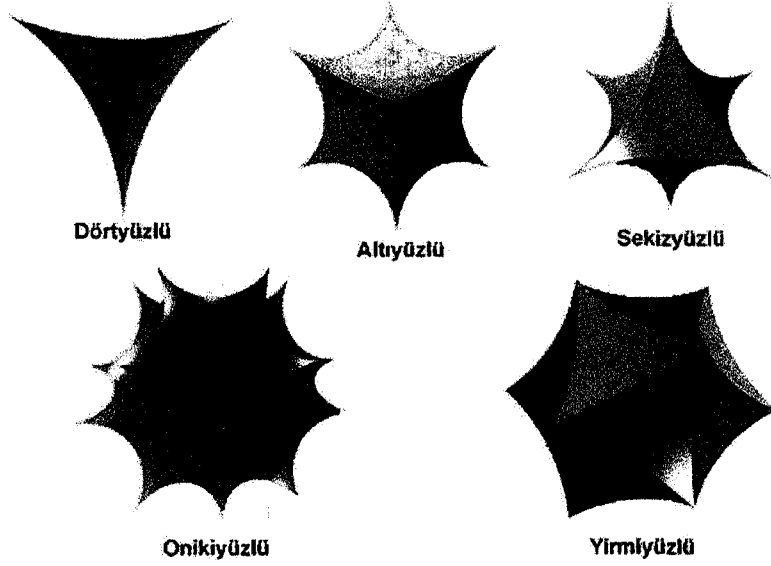
olarak tanımlanır.

Bir politop köşe noktalarının konveks zarfı olduğundan ağırlık merkezi c noktasında içerir.

3.1 Dihedral Açılar

P, \mathbb{H}^3 'te bir politop olsun. P 'nin S ve T yüzlerinin bitişik olması demek $S \cap T$ 'nin hem S 'nin hem de T 'nin kenarı olması demektir.

S ve T \mathbb{H}^3 'teki P politopunun yüzleri olsunlar. Biz S ve T arasındaki $\theta(S, T)$ olarak göstereceğimiz dihedral açığı tanımlayacağız. Öncelikle $S = T$ olması durumunda $\theta(S, T) = \pi$ olarak tanımlıyoruz. Eğer S ve T ayrık ise, yani P 'nin bitişik olmayan yüzleri iseler $\theta(S, T) = 0$ diyeceğiz. S ve T 'nin bitişik olması durumuna ise $\langle S \rangle$ ve $\langle T \rangle$, sırasıyla S ve T 'yi içinde bulandıran hiperbolik düzlemler



Şekil 3.1: Bazı düzgün hiperbolik çokyüzlüler

olmak üzere \mathbb{H}^3 'ü dört bölgeye ayırırlar. Bu dört bölgeden bir tanesi P 'yi içinde bulundurur. x , $S \cap T$ içindeki herhangi bir nokta $\lambda, \mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3$

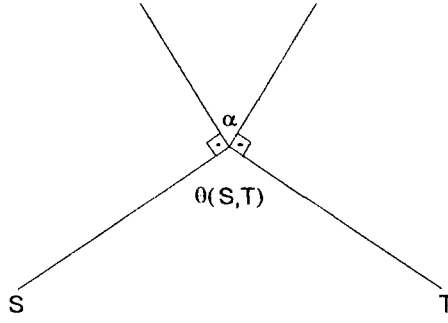
1. $\lambda(0) = x = \mu(0)$
2. λ ve μ sırasıyla $\langle S \rangle$ ve $\langle T \rangle$ 'ye normal
3. $\lambda'(0)$ ve $\mu'(0)$ \mathbb{H}^3 'nin P 'yi içeren yarı uzayından çıkan vektörler

olacak şekilde jeodezikler olsunlar. α ise λ ve μ arasındaki açı olsun. Açık olarak α , x 'in seçiminden bağımsızdır. Bu durumda P 'nin S ve T arasındaki dihedral açısı $\theta(S, T) = \pi - \alpha$ olarak tanımlanır. Şekil 3.2.

Teorem 3.1.1 \mathbb{H}^3 'te bir ideal dörtyüzlüde karşılıklı dihedral açılar eşittir. Ayrıca bir köşesindeki dihedral açılar α, β, γ olmak üzere $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ 'dir

Kanıt. Öncelikle $\hat{\mathbb{C}} \approx \hat{\mathbb{E}}^2$ 'de a, b, c, d noktalarının çifte oranının

$$(a, b; c, d) = \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}$$



Şekil 3.2: S ve T yüzleri arasındaki dihedral açı

şeklinde tanımlandığını belirtelim. Bu oran, a noktasının, b, c, d noktalarını sırasıyla $1, 0, \infty$ noktalarına götüren Möbius dönüşümü altında görüntüsünü verir.

S, \mathbb{H}^3 'te köşeleri A, B, C, D olan ideal dörtyüzlü olsun. S 'yi üst yarı uzay modeline gönderelim. Köşe noktalarının görüntüleri ise sırasıyla $a, b, c, d \in \hat{\mathbb{E}}^2$ olsun. S 'yi, $\hat{\mathbb{E}}^2$ 'deki

$$\varphi(z) = (z, b; c, d) = \frac{z - c}{z - d} : \frac{b - c}{b - d}$$

Möbius dönüşümünün Poincaré genişlemesi $\tilde{\varphi}$ ile resmedelim. Böylece $\tilde{\varphi}(b) = 1$, $\tilde{\varphi}(c) = 0$, $\tilde{\varphi}(d) = \infty$ olur. $\tilde{\varphi}(a) = a'$ diyelim. Çifte oran, Möbius dönüşümleri altında invariant kaldığından

$$(a, b; c, d) = (\tilde{\varphi}(a), \tilde{\varphi}(b); \tilde{\varphi}(c), \tilde{\varphi}(d)) = (a', 1; 0, \infty) = a'$$

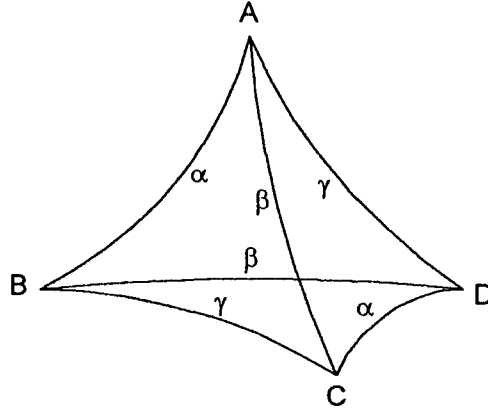
olur. Bu durumda S dörtyüzlüsünde DC kenarı üzerindeki dihedral açı $\arg((a', 1; 0, \infty)) = \arg(a')$ olur. Aynı şekilde S 'yi

$$\phi(z) = (z, c; b, a) = \frac{z - b}{z - a} : \frac{c - b}{c - a}$$

Möbius dönüşümünün Poincaré genişlemesi $\tilde{\phi}$ ile resmedelim. Böylece $\tilde{\phi}(a) = \infty$, $\tilde{\phi}(b) = 0$, $\tilde{\phi}(c) = 1$ elde ederiz. $\tilde{\phi}(d) = d'$ diyelim. Yine çifte oran Möbius dönüşümleri altında invariant kaldığından

$$(a, b; c, d) = (\tilde{\phi}(a), \tilde{\phi}(b); \tilde{\phi}(c), \tilde{\phi}(d)) = (\infty, 0; 1, d') = d'$$

elde ederiz. Böylece $a' = d'$ olmalıdır. Bu durumda da AB kenarı üzerindeki dihedral açı $\arg(\infty, 0; 1, d') = \arg(d') = \arg(a')$ olur. Bu ise DC kenarı üzerindeki dihedral açı ile onun karşısındaki AB kenarı üzerindeki dihedral açının eşit olması demektir. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ olduğunu görmek için de S 'yi bir köşesi ∞ 'a gidecek şekilde üst yarı uzay modeline gönderelim. Bu durumda taban öklidyen üçgen formunda olduğundan buradaki dihedral açıların toplamı π 'dir. Böylece $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ elde edilir. ■



Şekil 3.3: İdeal dörtyüzlüde karşılıklı dihedral açılar eşittir

3.2 İdeal Dörtyüzlünün Hacmi

Öncelikle daha genel olarak bir köşesi ideal olan, üç dihedral açısı dik ve diğer üçü ise $\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha, \beta$ olan hiperbolik dörtyüzlünün hacmini hesaplayalım. Bu dörtyüzlüyü $S_{\alpha, \beta}$ ile göstereyim.

Teorem 3.2.1 $S_{\alpha, \beta}$ dörtyüzlüsünün hacmi

$$V(S_{\alpha, \beta}) = \frac{1}{4} \left[JI(\alpha + \beta) + JI(\alpha - \beta) + 2JI\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right]$$

dir.

elde ederiz. Burada $u = \sqrt{1 - x^2}$ dersek

$$\begin{aligned}
 V(S_{\alpha,\beta}) &= \int_0^{\cos \beta} \int_0^{x \tan \alpha} \frac{1}{2(u^2 - y^2)} dy dx \\
 &= \int_0^{\cos \beta} \frac{1}{4u} \log \left| \frac{u + x \tan \alpha}{u - x \tan \alpha} \right| dx \\
 &= \int_0^{\cos \beta} \frac{1}{4u} \log \left| \frac{u \cos \alpha + x \tan \alpha}{u \cos \alpha - x \tan \alpha} \right| dx
 \end{aligned}$$

elde ederiz. $x = \cos \theta$ diyelim. Bu durumda $u = \sin \theta$ ve $\frac{dx}{u} = -d\theta$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}
 V(S_{\alpha,\beta}) &= -\frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} \log \left| \frac{2 \sin(\theta + \alpha)}{2 \sin(\theta - \alpha)} \right| d\theta \\
 &= -\frac{1}{4} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} \log |2 \sin(\theta + \alpha)| d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} \log |2 \sin(\theta - \alpha)| d\theta \right]
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada ilk integralde $x = \theta + \alpha$ ikinci integralde $x = \theta - \alpha$ değişken değişimi yaparsak

$$\begin{aligned}
 V(S_{\alpha,\beta}) &= -\frac{1}{4} \left[\int_{\frac{\pi}{2} + \alpha}^{\beta + \alpha} \log |2 \sin x| dx - \int_{\frac{\pi}{2} - \alpha}^{\beta - \alpha} \log |2 \sin x| dx \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[\mathcal{J}(\beta + \alpha) - \mathcal{J}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \mathcal{J}(\beta - \alpha) + \mathcal{J}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right]
 \end{aligned}$$

olur. Buradan da $-\mathcal{J}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \mathcal{J}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ve $-\mathcal{J}(\beta - \alpha) = \mathcal{J}(\alpha - \beta)$ olduğundan

$$V(S_{\alpha,\beta}) = \frac{1}{4} \left[\mathcal{J}(\alpha + \beta) + \mathcal{J}(\alpha - \beta) + 2\mathcal{J}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right]$$

buluruz. ■

Şimdi $S_{\alpha,\beta}$ 'nın iki ideal köşesi olduğunu varsayalım. Bu durumda Δ 'nın xy düzlemindeki $(\cos \beta, \cos \beta \tan \alpha)$ köşesi birim çember üzerinde olacaktır. Buradan

$$\cos^2 \beta + \cos^2 \beta \tan^2 \alpha = 1$$

ve buradan da $\tan^2 \alpha = \tan^2 \beta$ elde ederiz. Bu ise $\alpha = \beta$ olması demektir. Böylece önceki teoremden dolayı $S_{\alpha,\alpha}$ 'nın hacmi

$$V(S_{\alpha,\alpha}) = \frac{1}{4} \left[J(2\alpha) + 2J\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right]$$

haline dönüştür. $J(2\alpha) = 2J(\alpha) + 2J\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ olduğundan

$$\begin{aligned} V(S_{\alpha,\alpha}) &= \frac{1}{4} \left[2J(\alpha) + 2J\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + 2J\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} J(\alpha) + \frac{1}{4} \left[2J\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + 2J\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} J(\alpha) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Sonuç 3.2.2 $S_{\alpha,\alpha}$ dörtyüzlüsünün hacmi $\frac{1}{2} J(\alpha)$ 'dir.

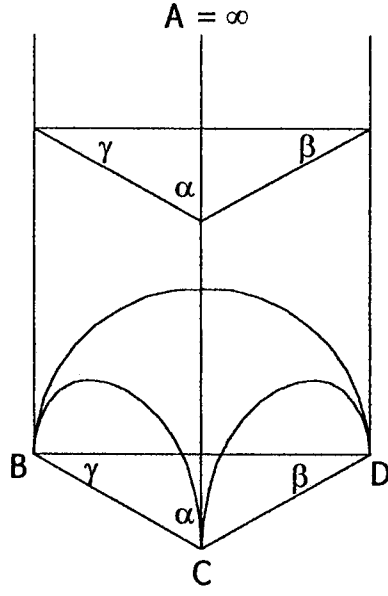
Teorem 3.2.3 Dihedral açıları α, β, γ olan $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ ideal dörtyüzlünün hacmi

$$V(T_{\alpha,\beta,\gamma}) = J(\alpha) + J(\beta) + J(\gamma)$$

dir.

Kanıt. Genelliği bozmadan $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ 'nın köşelerinden birini ∞ 'da diğerlerini birim küre yüzeyinde varsayabiliriz. $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ 'nın xy -düzlemine dikey izdüşümü Δ , köşeleri birim çember üzerinde olan bir üçgendir. Burada göz önüne almamız gereken üç durum vardır: Orijinin (1) Δ 'nın içinde olması, (2) Δ 'nın içinde olması, (3) Δ 'nın içinde olması.

1. Orijinin Δ 'nın içinde olması durumunda orijini kenarların orta noktaları ile birleştirelim. Merkezden kirişe çizilen doğru parçası kirişi iki eşit parçaya ayırdığından kirişe diktir. Diğer taraftan aynı dikmeye komşu olan iki dik üçgen benzerdir. Çevre açısı gördüğü yayın ölçüsünün yarısı olduğundan orijin etrafındaki açılar Şekil 3.6'da görüldüğü gibi olur. Dörtyüzlünün, elde



Şekil 3.5: Üst yarı uzay modelinde ideal dörtyüzlü

ettiğimiz altı dik üçgenin herbiri üzerindeki kısmı $S_{\theta, \theta}$ formundadır. Sonuç 3.2.2'yi kullanarak

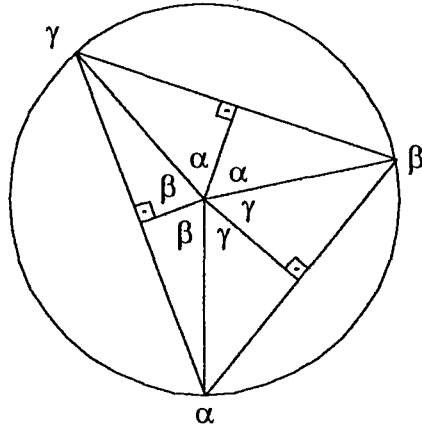
$$\begin{aligned} V(T_{\alpha, \beta, \gamma}) &= 2 \left[\frac{1}{2} J(\alpha) + \frac{1}{2} J(\beta) + \frac{1}{2} J(\gamma) \right] \\ &= J(\alpha) + J(\beta) + J(\gamma) \end{aligned}$$

elde ederiz.

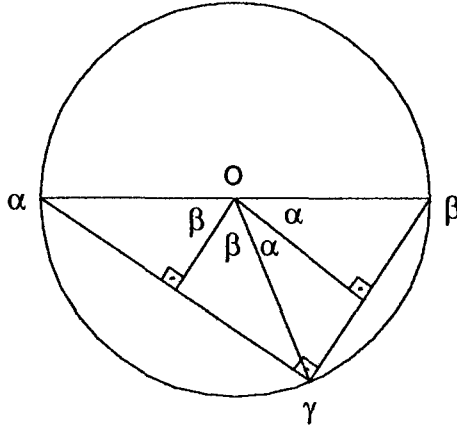
2. Orijinin Δ 'nın kenarlarından birinin üzerinde olması durumunda bu kenar çap olacağından karşısındaki açı $\frac{\pi}{2}$ olur. Yine orijin ile iki dik kenarın orta noktalarını birleştirirsek Şekil 3.7'de görüldüğü gibi dört dik üçgen elde ederiz. Yine birinci durumdaki gibi Sonuç 3.2.2'den

$$\begin{aligned} V(T_{\alpha, \beta, \gamma}) &= 2 \left[\frac{1}{2} J(\alpha) + \frac{1}{2} J(\beta) \right] \\ &= J(\alpha) + J(\beta) + J\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= J(\alpha) + J(\beta) + J(\gamma) \end{aligned}$$

elde ederiz.



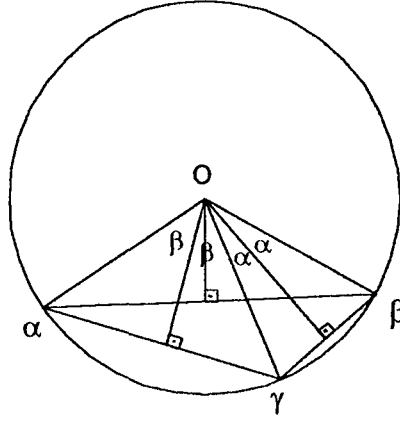
Şekil 3.6: Orijinin içeride olması durumunda Δ 'nın dik üçgenlere bölünmesi



Şekil 3.7: Orijinin Δ 'nın kenarlarından birinin üzerinde olması durumu

3. Son olarak orijinin Δ 'nın dışında olması durumunda açılardan bir tanesi geniş açıdır. Yine orijin ile kenarların orta noktalarını birleştirelim. Daha sonra orijin ve Δ 'nın köşelerinin birleştirilmesi ile Şekil 3.8'deki gibi dik üçgenler elde ederiz. Böylece aradığımız hacim

$$V(T_{\alpha,\beta,\gamma}) = 2 \left[\frac{1}{2} \mathcal{I}(\alpha) + \frac{1}{2} \mathcal{I}(\beta) - \frac{1}{2} \mathcal{I}(\alpha + \beta) \right]$$



Şekil 3.8: Orijinin Δ 'nın dışında olması durumu

olur. $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ olduğundan

$$\begin{aligned} V(T_{\alpha,\beta,\gamma}) &= 2 \left[\frac{1}{2} JI(\alpha) + \frac{1}{2} JI(\beta) - \frac{1}{2} JI(\pi - \gamma) \right] \\ &= JI(\alpha) + JI(\beta) + JI(\gamma) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece Teorem 3.2.3'ün ispatı bitmiş olur.

■

Teorem 3.2.4 \mathbb{H}^3 'te maksimum hacimli dörtyüzlü düzgün ideal dörtyüzlüdür.

Kanıt. \mathbb{H}^3 'te herhangi bir dörtyüzlü bir ideal dörtyüzlü tarafından içerileceğinden sadece ideal dörtyüzlü durumunu gözönünde bulunduralım. Bu durumda maksimum olmasını istediğimiz fonksiyon $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ve $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ olmak üzere

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = JI(\alpha) + JI(\beta) + JI(\gamma)$$

olacaktır. Diğer taraftan α, β, γ sayılarını \mathbb{R}^3 'te

$$D = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = \pi\}$$

kompakt kümesinin elemanı gibi düşünebiliriz. Bu durumda $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde yazabiliriz. f sürekli fonksiyonu D kompakt kümesi üzerinde maksimum değerine

sahiptir. α, β, γ 'dan en az birinin sıfır olması durumunda hacim fonksiyonu sıfır değerini alır. Örneğin $\alpha = 0$ ise $\beta + \gamma = \pi$ olur ve

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta, \gamma) &= \mathcal{H}(0) + \mathcal{H}(\beta) + \mathcal{H}(\gamma) \\ &= \mathcal{H}(\beta) + \mathcal{H}(\pi - \beta) \\ &= \mathcal{H}(\beta) - \mathcal{H}(\beta) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece fonksiyon maksimum değerini D 'nin iç noktalarında yani $\alpha, \beta, \gamma > 0$ olduğunda alacaktır. g fonksiyonunu

$$g(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

şeklinde tanımlayalım. Burada Lagrange çarpanları kuralı ile $grad(f) = \lambda grad(g)$ olacak şekilde λ skaleri vardır. Böylece

$$\begin{aligned} -\log(2 \sin \alpha) &= \lambda \\ -\log(2 \sin \beta) &= \lambda \\ -\log(2 \sin \gamma) &= \lambda \end{aligned}$$

elde edilir. Bu $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma$ olması demektir. Böylece α, β, γ için iki durum vardır.

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta = \gamma \\ \alpha &= \beta = \pi - \gamma \end{aligned}$$

Fakat $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ olması gerektiğinden ikinci durum olamaz. Böylece f fonksiyonunun maksimum olması için dihedral açıların üçüde eşit olmalıdır. Bunun anlamı dörtyüzlüğün düzgün dörtyüzlü olmasıdır. Böylece $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ olur. Bu durumda f fonksiyonunun maksimum değeri olarak

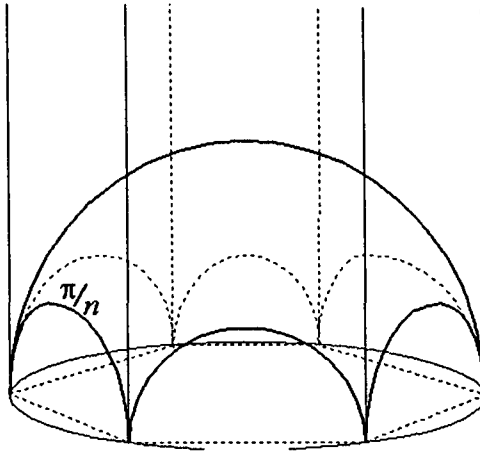
$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = 3\mathcal{H}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

bulunur. ■

İki köşesi ideal olan $S_{\alpha, \alpha}$ dörtyüzlüğün ve ideal dörtyüzlüğün hiperbolik hacimlerini diğer bazı politopların hacimlerini hesaplamada yapı taşı olarak kullanacağız.

3.3 İdeal Hiperbolik Piramitlerin Hacimleri

Öklidyen konveks n -gen piramit, tabanı aynı düzlemdeki n tane noktanın oluşturduğu konveks bir n -gen olan ve bu noktaların taban düzlemi içinde olmayan bir nokta ile birleştirilmesiyle oluşan politoptur. Aynı öklidyen durumdaki gibi hiperbolik n -gen piramit bu noktaların hiperbolik jeodezikler ile birleştirilmesiyle elde edilir. Hiperbolik n -gen piramidin düzgün olması ile taban şeklinin düzgün n -gen olması kastedilir. Şekil 3.9.



Şekil 3.9: Hiperbolik düzgün ideal n -gen piramit

Teorem 3.3.1 \mathbb{H}^3 'te düzgün ideal n -gen piramidin hacmi $nJ\left(\frac{\pi}{n}\right)$ 'dir.

Kanıt. İdeal düzgün n -gen piramidi tepe noktası ∞ 'a gidecek şekilde üst yarı uzay modeline gönderelim. Burada tabandaki n -geni n eşit üçgene bölelim Böylece n tane eşit hacimli ve üç ideal köşeli dörtyüzlü elde ederiz. Daha sonra her bir dörtyüzlü için ideal olmayan köşeden karşı kenara bir dikme inerek iki tane $S_{\alpha,\alpha}$ dörtyüzlüsü elde ederiz. Burada α açısı π/n ve $S_{\alpha,\alpha}$ dörtyüzlüsünün hacmi $\frac{1}{2}J(\alpha)$ olduğundan piramidin hacmi

$$\begin{aligned} V_{n\text{-genpiramid}} &= n \left[2 \frac{1}{2} J\left(\frac{\pi}{n}\right) \right] \\ &= nJ\left(\frac{\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

bulunur. ■

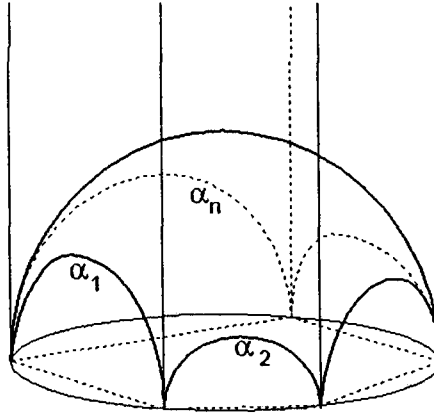
Şimdi daha genel olarak taban şekli düzgün olmayan ideal n -gen piramidin hacmini hesaplayalım. Üçgen formunda olan yan yüzlerin taban yüzeyi ile yaptığı dihedral açıları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ile, oluşan bu politopu da $\Sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ ile gösterelim. Bu durumda aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.3.2 $\Sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ n -gen piramidinin dihedral açıları toplamı $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \pi$ 'dir ve hacmi

$$V(\Sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}) = \sum_{i=1}^n JI(\alpha_i)$$

dir.

Teoremi tümevarımla ispatlayacağız. $n = 3$ durumunda teorem ideal dört yüzlü durumuna döndürür ve bu durumda da dihedral açıların toplamının π hacmin de $JI(\alpha_1) + JI(\alpha_2) + JI(\alpha_3)$ olduğunu biliyoruz. Şimdi teoremin $k - 1$ için doğru



Şekil 3.10: Hiperbolik ideal $\Sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ piramidi

olduğunu varsayalım ve $n = k$ durumunu inceleyelim. $\Sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ 'nın tabanındaki k -geni, iki köşesini birleştirerek bir $(k - 1)$ -gen ve bir üçgene ayıralım. Üçgen tarafındaki iki dihedral açı α_1, α_2 diğerleride $\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n$ olsun. Bu durumda ∞ 'daki nokta ile birlikte oluşturdukları piramitleri düşünelim. Burada üçgen tarafında yeni oluşan dihedral açığı β dersek $(k - 1)$ -gen tarafında oluşan dihedral açı $\pi - \beta$ olur.

Böylece $n = 3$ durumundan $\left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i\right) + \beta = \pi$ ve $n = k - 1$ tümevarım hipotezinden $\left(\sum_{i=3}^k \alpha_i\right) + \pi - \beta = \pi$ olur. Böylece $\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right) + \beta + \pi - \beta = 2\pi$ ve buradan da $\sum_{i=1}^k \alpha_i = \pi$ elde edilir. Yine aynı şekilde $n = 3$ durumundan ve $n = k - 1$ için tümevarım hipotezinden dolayı

$$V(\Sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}) = \left(\sum_{i=1}^2 J(\alpha_i)\right) + J(\beta)$$

$$V(\Sigma_{\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_k, \pi - \beta}) = \left(\sum_{i=3}^k J(\alpha_i)\right) + J(\pi - \beta)$$

dir. Ve burada da Lobachevsky fonksiyonunun özelliğinden dolayı

$$J(\pi - \beta) = -J(\beta)$$

'dir ve böylece

$$V(\Sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}) = \sum_{i=1}^n J(\alpha_i)$$

elde edilir.

Yine ideal dörtyüzlüde olduğu gibi n -gen piramidin hacminin maksimum olabilmesi için dihedral açıların eşit olması gerekir. Bu da taban şeklinin düzgün n -gen olması demektir.

Teorem 3.3.3 \mathbb{H}^3 'te maksimum hacimli n -gen piramit taban şekli düzgün n -gen olan ideal n -gen piramittir.

Kanıt. Burada da maksimum olmasını istediğimiz hacim fonksiyonu

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = J(\alpha_1) + J(\alpha_2) + \dots + J(\alpha_n)$$

dir. Diğer taraftan dihedral açıların toplamı ile ilgili olarak

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \pi$$

olduğunu biliyoruz. Lagrange çarpanları kuralı ile $grad(f) = \lambda grad(g)$ olacak şekilde λ skaleri vardır. Böylece $(i = 1, 2, \dots, n)$ için $-\log(2 \sin \alpha_i) = \lambda$ elde edilir. Bu

eşitliklerden $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ için iki durum vardır: Ya $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ olmalıdır veya $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ olduğundan bazı i 'ler için $\alpha_i = \alpha$ iken bazıları için de $\alpha_i = \pi - \alpha$ olmalıdır. Fakat bu son durumda $\sum_{i=1}^n \alpha_i > \pi$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ olmalıdır. Bu da taban şeklinin düzgün n -gen olması demektir. ■

3.4 İdeal Düzgün Hiperbolik Politopların Hacimleri

Bu bölümde düzgün ve ideal olan altıyüzlü, sekizyüzlü, onikiyüzlü, yirmiyüzlü ile iki hiperbolik düzgün n -gen'in karşılıklı köşelerinin hiperbolik jeodeziklerle birleştirilmesi ile oluşan politopun hacmini hesaplayacağız.

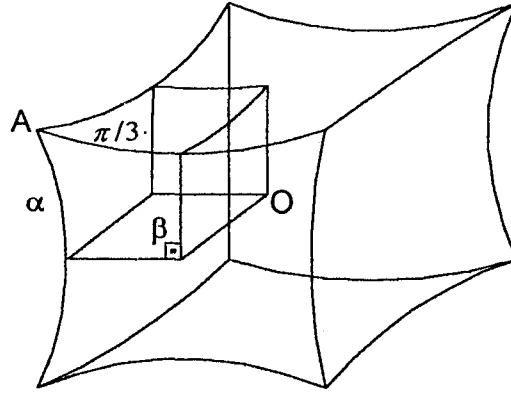
Şimdi bir düzgün politopu eşit parçalara ayırmak için bir yöntem verelim. Bu yöntemde politopun her bir köşesine bir parça karşılık gelir. Düzgün politopun verilen bir köşesi için, bu köşeye komşu olan yüzlerin ağırlık merkezlerini ve bu köşede birleşen kenarların orta noktalarını alalım. Bu noktalara politopun ağırlık merkezinide ekleyerek oluşturduğumuz noktalar kümesinin konveks zarfını alalım. Elde ettiğimiz bu konveks küme politopun verilen köşeye karşılık gelen parçasıdır. Bu işlemi politopun her köşesi için yaparsak politopu köşe sayısı kadar eşit parçaya ayırmış oluruz. Hiperbolik ideal düzgün politopların hacimlerinin hesaplanmasında sıkça kullanılacağımız bu yöntemi "ağırlık merkezine göre bölme" (barycentric subdivision) olarak adlandıralım.

Teorem 3.4.1 *Hiperbolik ideal düzgün altıyüzlünün hacmi*

$$V(\text{altıyüzlü}) = 10J\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

dir.

Kanıt. Hiperbolik ideal düzgün altıyüzlüyü ağırlık merkezine göre bölme yöntemiyle parçalarsak sekiz tane eşit hacimli ve bir köşesi ideal olan altıyüzlü elde ederiz. Şekil (3.11). Bu altıyüzlüyü A ideal köşesi noktası ∞ olacak şekilde üst yarı uzay modeline gönderelim. Böylece $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere, altı tane $S_{\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}}$ dör-



Şekil 3.11: Hiperbolik düzgün ideal altıyüzlü

tyüzlü elde ederiz. Teorem 3.2.1'i kullanarak her bir $S_{\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}}$ dörtyüzlünün hacmini

$$\begin{aligned} V(S_{\alpha, \beta}) &= \frac{1}{4} \left[\mathcal{H}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\mathcal{H}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\mathcal{H}\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2\mathcal{H}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \end{aligned}$$

olarak buluruz. Buradan ideal düzgün altıyüzlünün hacmi

$$\begin{aligned} V(\text{altıyüzlü}) &= 8 \cdot \frac{1}{4} \left[\mathcal{H}\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2\mathcal{H}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \\ &= 12 \left[\mathcal{H}\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2\mathcal{H}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \end{aligned}$$

olur. Lobachevsky fonksiyonunu tek ve periyodu π olan bir fonksiyon olduğundan $\mathcal{H}\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \mathcal{H}\left(\pi - \frac{7\pi}{12}\right) = -\mathcal{H}\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ elde ederiz. Yine Lobachevsky fonksiyonunun $\forall n \in \mathbb{Z}$ için sağladığı $\mathcal{H}(n\theta) = n \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{H}\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$ eşitliğinde $n = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{12}$ alırsak

$$\mathcal{H}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \left[\mathcal{H}\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathcal{H}\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] \quad (3.1)$$

elde ederiz. Aynı özelliği $n = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{6}$ için kullanırsak $\frac{3}{2}\mathcal{H}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ elde ederiz.

Böylece

$$\begin{aligned} V(\text{altıyüzlü}) &= 12 \left[-\mathcal{H}\left(\frac{7\pi}{12}\right) - \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2\mathcal{H}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \\ &= 12 \left[-\frac{1}{2}\mathcal{H}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{4}{3}\mathcal{H}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= 10\mathcal{H}\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

olarak buluruz. ■

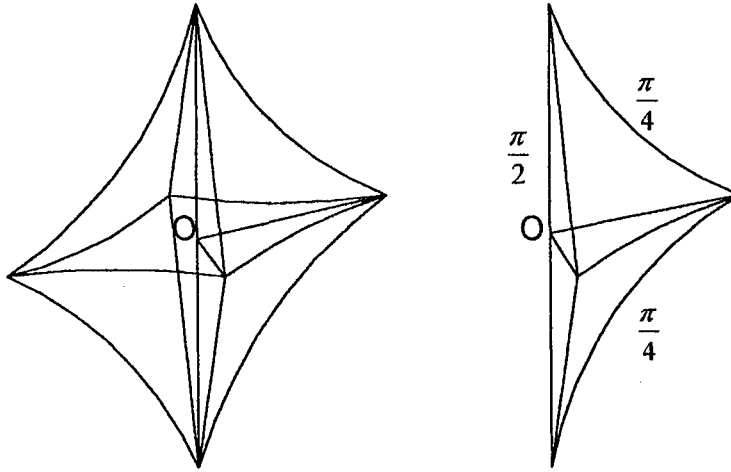
Uyarı 3.4.2 *Hiperbolik düzgün ideal altıyüzlünün hacmi beş tane düzgün ideal dörtyüzlüye parçalanarak da hesaplanabilir. Bu durumda hacim*

$$\begin{aligned} V(\text{altyüzlü}) &= 5.3.JI\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 15.\frac{2}{3}.JI\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 10JI\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.4.3 \mathbb{H}^3 'te düzgün ideal sekizyüzlünün hacmi $8JI\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 'tür.

Kanıt. Düzgün ideal sekizyüzlüyü Şekil 3.12'deki gibi iki orta dörtgenin bulunduğu iki düzlem ile dört eşit ideal dörtyüzlüye ayıralım. Böylece herbir parçanın hacmi aynı olur. Ayrıca herbir ideal dörtyüzlüde dihedral açılar $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ olur. Böylece



Şekil 3.12: Hiperbolik düzgün sekizyüzlünün parçalara ayrılması

sekizyüzlünün hacmi

$$\begin{aligned} V(\text{sekizyüzlü}) &= 4 \left[JI\left(\frac{\pi}{2}\right) + JI\left(\frac{\pi}{4}\right) + JI\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] \\ &= 8JI\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

bulunur. ■

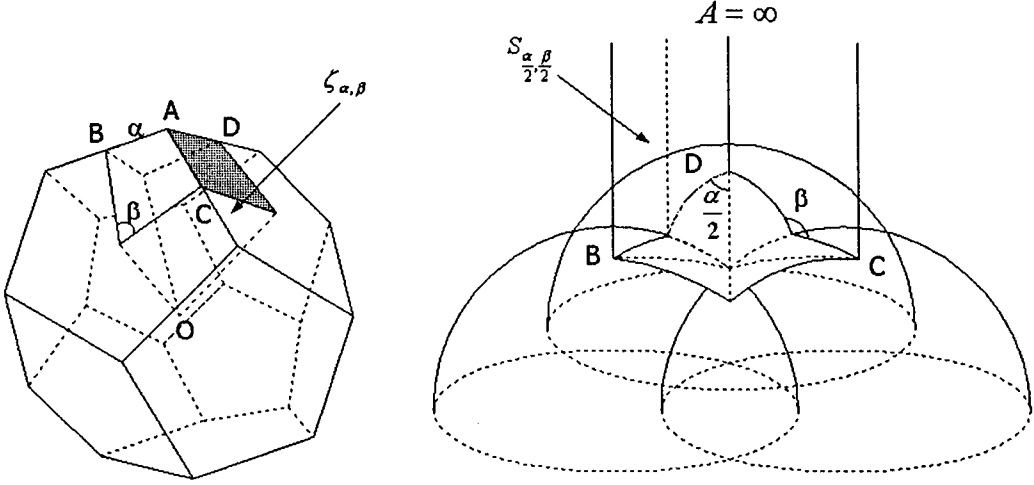
Şimdi de ideal düzgülün onikiyüzlü ve ideal düzgülün yirmiyüzlünün hacimlerini hesaplayalım.

Teorem 3.4.4 *Hiperbolik ideal düzgülün onikiyüzlünün hacmi*

$$V(\text{onikiyüzlü}) = 30 \left[\mathcal{H}\left(\frac{11\pi}{30}\right) - \mathcal{H}\left(\frac{\pi}{30}\right) + 2\mathcal{H}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

dır.

Kanıt. İdeal düzgülün onikiyüzlüyü ağırlık merkezine göre bölme yöntemiyle parçalarsak 20 eşit parçaya ayırmış oluruz. Herbir parçada onikiyüzlünün yüzlerinin arasındaki dihedral açı α , kenarların orta noktalarının yüzlerin ağırlık merkezleriyle birleştirilmesiyle oluşan düzlemler arasındaki açı da β olsun. Burada oluşan parçayı $\zeta_{\alpha,\beta}$ ile gösterelim. Şekil 3.13.



Şekil 3.13: Onikiyüzlünün parçalara ayrılması ve $\zeta_{\alpha,\beta}$

$\zeta_{\alpha,\beta}$ 'nın hacmini hesaplamak için üst yarı uzay modeline gönderelim. Böylece $\zeta_{\alpha,\beta}$ için dihedral açılarının üçü $\frac{\pi}{2}$ diğeri üçü ise $\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}(\pi - \alpha), \frac{\beta}{2}$ olan altı tane $S_{\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}}$ dörtyüzlüsü elde ederiz. $S_{\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}}$ 'nın hacmini bulmak için α ve β açılarını hesaplayalım. $\zeta_{\alpha,\beta}$ 'nın A köşesini ∞ 'a gönderdiğimizde taban öklidyen eşkenar üçgen formunda

olduğundan $\alpha = \frac{\pi}{3}$ olur. Diğer taraftan $\zeta_{\alpha,\beta}$ 'yı onikiyüzlütün bir yüzünü beş eşit parçaya ayırarak elde ettiğimiz için $\beta = \frac{2\pi}{5}$ olur. Bu durumda Teorem 3.2.1 ile

$$\begin{aligned} V(S_{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{5}}) &= \frac{1}{4} \left[J\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{5}\right) + J\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{5}\right) + 2J\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[J\left(\frac{11\pi}{30}\right) - J\left(\frac{\pi}{30}\right) + 2J\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \end{aligned}$$

elde ederiz. $\zeta_{\alpha,\beta}$ altı tane $S_{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{5}}$ den oluştuğundan

$$V(\zeta_{\alpha,\beta}) = \frac{3}{2} \left[J\left(\frac{11\pi}{30}\right) - J\left(\frac{\pi}{30}\right) + 2J\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

olur. Onikiyüzlüde ise 20 tane $\zeta_{\alpha,\beta}$ bulunduğundan

$$V(\text{onikiyüzlü}) = 30 \left[J\left(\frac{11\pi}{30}\right) - J\left(\frac{\pi}{30}\right) + 2J\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

olarak bulunur. ■

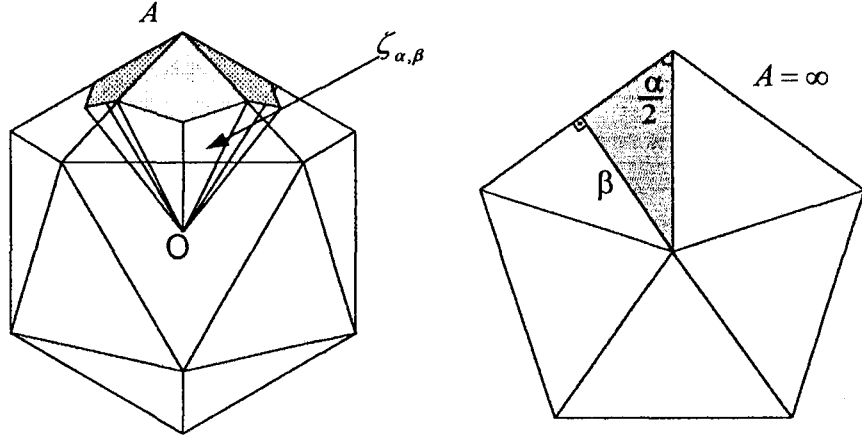
Onikiyüzlüdekine benzer bir yolla ideal düzgün yirmiyüzlütün hacmini de hesaplayabiliriz.

Teorem 3.4.5 *Hiperbolik ideal düzgün yirmiyüzlünün hacmi*

$$V(\text{Yirmiyüzlü}) = 25J\left(\frac{\pi}{5}\right) + 5J\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

dır.

Kanıt. Hiperbolik düzgün yirmiyüzlüti de ağırlık merkezine göre bölme yöntemiyle parçalayalım. Bu durumda birbirine eşit 12 parça elde ederiz. Herbir parçada yirmiyüzlütün yüzleri arasındaki dihedral açığı α , kenarların orta noktalarının yüzlerin ağırlık merkezleriyle birleştirilmesiyle oluşan düzlemler arasındaki açığı da β olarak adlandıralım. Ve oluşan parçayı da $\zeta_{\alpha,\beta}$ ile gösterelim. $\zeta_{\alpha,\beta}$ 'nın hacminin hesaplamak için üst yarı uzay modeline gönderelim. Böylece tabanı bir beşgen formunda olan bir koni elde ederiz. Bu beşgenin merkezinden köşelere ve kenarların orta noktalarına doğrular çizerek 10 tane $S_{\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}}$ dörtyüzlüsü elde ederiz. Burada koninin tabanı beşgen formunda olduğundan $\alpha = \frac{3\pi}{5}$ olur. Diğer taraftan



Şekil 3.14: Yirmiyüzlütün ağırlık merkezine göre bölme yöntemiyle bölünmesi

$\zeta_{\alpha,\beta}$ 'yı icosehedronun bir yüzünü üç eşit parçaya ayırarak elde ettiğimiz için $\beta = \frac{2\pi}{3}$ olur. Böylece Teorem 3.2.1 ile $V(S_{\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}}) = V(S_{\frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{3}})$ hacmini

$$\begin{aligned} V(S_{\frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{3}}) &= \frac{1}{4} \left[\mathcal{J}\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{3}\right) + \mathcal{J}\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{3}\right) + 2\mathcal{J}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\mathcal{J}\left(\frac{19\pi}{30}\right) - \mathcal{J}\left(\frac{\pi}{30}\right) + 2\mathcal{J}\left(\frac{\pi}{5}\right) \right] \end{aligned}$$

olarak buluruz. Böylece $\zeta_{\alpha,\beta}$ 'nın hacmi

$$V(\zeta_{\alpha,\beta}) = \frac{5}{2} \left[\mathcal{J}\left(\frac{19\pi}{30}\right) - \mathcal{J}\left(\frac{\pi}{30}\right) + 2\mathcal{J}\left(\frac{\pi}{5}\right) \right]$$

olur. Buradan da ideal yirmiyüzlütün hacmi

$$\begin{aligned} V(\text{Yirmiyüzlütü}) &= 12 \cdot \frac{5}{2} \left[\mathcal{J}\left(\frac{19\pi}{30}\right) - \mathcal{J}\left(\frac{\pi}{30}\right) + 2\mathcal{J}\left(\frac{\pi}{5}\right) \right] \\ &= 30 \left[\mathcal{J}\left(\frac{19\pi}{30}\right) - \mathcal{J}\left(\frac{\pi}{30}\right) + 2\mathcal{J}\left(\frac{\pi}{5}\right) \right] \\ &= 30 \left[\mathcal{J}\left(\frac{19\pi}{30}\right) + \mathcal{J}\left(\frac{29\pi}{30}\right) + 2\mathcal{J}\left(\frac{\pi}{5}\right) \right] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\mathcal{J}(n\theta) = n \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{J}\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$ eşitliğinde $n = 3$ ve $\theta = \frac{3\pi}{10}$ alırsak

$$\mathcal{J}\left(\frac{19\pi}{30}\right) + \mathcal{J}\left(\frac{29\pi}{30}\right) = -\mathcal{J}\left(\frac{3\pi}{10}\right) - \frac{1}{3}\mathcal{J}\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

elde ederiz. Aynı eşitlikte $n = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{10}$ alırsak

$$J\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{2}J\left(\frac{\pi}{5}\right) + J\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

ve $n = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{5}$ alırsak

$$J\left(\frac{3\pi}{10}\right) = J\left(\frac{\pi}{5}\right) - \frac{1}{2}J\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

elde ederiz. Elde ettiklerimizi hacim fonksiyonunda yerine yazarsak

$$\begin{aligned} V(\text{Yirmiyüzlü}) &= 30 \left[J\left(\frac{19\pi}{30}\right) + J\left(\frac{29\pi}{30}\right) + 2J\left(\frac{\pi}{5}\right) \right] \\ &= -30J\left(\frac{3\pi}{10}\right) - 10J\left(\frac{\pi}{10}\right) + 60J\left(\frac{\pi}{5}\right) \\ &= -30J\left(\frac{3\pi}{10}\right) - 10J\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 55J\left(\frac{\pi}{5}\right) \\ &= -30J\left(\frac{\pi}{5}\right) + 15J\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 10J\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 55J\left(\frac{\pi}{5}\right) \\ &= 25J\left(\frac{\pi}{5}\right) + 5J\left(\frac{2\pi}{5}\right) \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. ■

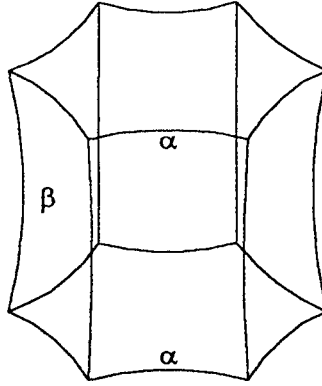
Şimdi ise iki hiperbolik düzgün n -genin birbirine karşılık gelen köşelerinin hiperbolik jeodeziklerle birleştirilmesiyle oluşan prizmanın hacmini hesaplayalım. Köşeleri birleştirilmesi işlemi simetrik bir şekilde yapıldığında yan yüzler arasındaki açı aynıdır. Bu açığı β ile gösterebiliriz. Burada yan yüzlerin düzlemsel n -genlerle yaptığı açılar da aynıdır. Bu açı da α olmak üzere oluşturduğumuz ideal politopu $\Omega_{\alpha,\beta}$ ile gösterebiliriz. Şekil 3.15.

Teorem 3.4.6 $\Omega_{\alpha,\beta}$ 'nin hacmi

$$V(\Omega_{\alpha,\beta}) = n \left[\left(2J\left(\frac{\beta}{2}\right) + J\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) + J\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right)\right) \right]$$

dir.

Kanıt. Burada $\Omega_{\alpha,\beta}$ 'nin düzlemsel n -genlerinden birinin iki komşu kenarı ile onlara komşu olan düşey kenar sonsuzda bir öklidyen üçgen formundadır. Böylece $2\alpha + \beta = \pi$ olur. Hacmini hesaplamak için $\Omega_{\alpha,\beta}$ 'yi üst yarı uzay modeline gönderebiliriz. $\Omega_{\alpha,\beta}$ 'yi Şekil 3.16'daki gibi n eşit dilime bölebiliriz. Bu parçaların herbirini



Şekil 3.15: Poincaré disk modelinde $\Omega_{\alpha,\beta}$ prizması

$\omega_{\alpha,\beta}$ ile gösterelim. $\omega_{\alpha,\beta}$ 'da küçük küre yüzeyinin oluşturduğu üçgen T_1 büyük küre yüzeyinin oluşturduğu üçgen de T_2 olsun. Bu üçgenler üzerinde kalan hacimlerde sırasıyla C_1 ve C_2 olsun. $d_p(z) = p.z$ ($p \in \mathbb{R}$) üst yarı uzay modeli için bir izometri olduğundan C_1 ve C_2 izometriktir. Böylece C_1 ve C_2 'nin hacimlerinde aynıdır. Böylece $\omega_{\alpha,\beta}$ 'nın hacmi $Q = (\omega_{\alpha,\beta} \cup C_2) - C_1$ kümesinin hacmine eşit olur. Q bir dörtgen üzerindeki sonsuz konidir. $\omega_{\alpha,\beta}$ 'nin yani Q 'nun hacmini hesaplamak için dihedral açıları hesaplayalım. Q 'nun yan yüzlerindeki dihedral açıları $\frac{\beta}{2}$ 'dir. Q 'nun ön yüzünün ile büyük küre yüzeyi ile yaptığı açı γ olmak üzere ön yüzdeki dihedral açı $\alpha + \gamma$ arka yüzdeki ise $\alpha - \gamma$ olur. $\Omega_{\alpha,\beta}$ düzgün n -genlerden oluşturulduğundan üst yarı uzay modelinde tabanı büyük küre yüzeyi olan bir düzgün n -gen piramit oluşur. Böylece $\gamma = \frac{\pi}{n}$ olur. Böylece Q 'nun hacmi

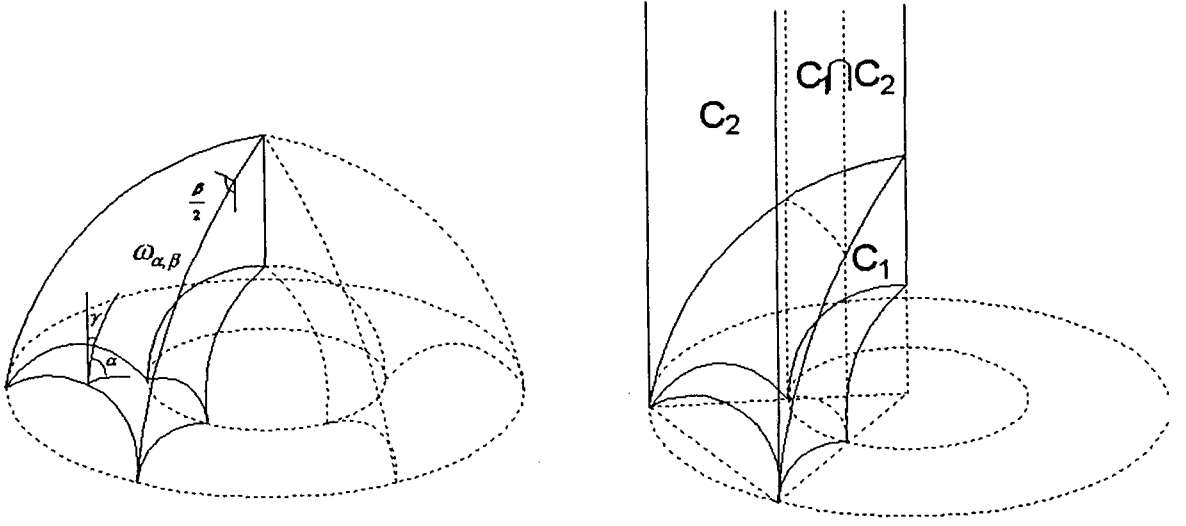
$$V(Q) = V(\omega_{\alpha,\beta}) = 2\mathcal{H}\left(\frac{\beta}{2}\right) + \mathcal{H}\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) + \mathcal{H}\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right)$$

olarak bulunur. $\Omega_{\alpha,\beta}$ içinde n tane $\omega_{\alpha,\beta}$ bulunduğundan hacim

$$V(\Omega_{\alpha,\beta}) = n \left[2\mathcal{H}\left(\frac{\beta}{2}\right) + \mathcal{H}\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) + \mathcal{H}\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right) \right]$$

olarak elde edilir. (Bkz. [11]). ■

Örnek 3.4.7 $\Omega_{\alpha,\beta}$ prizması $n = 4$ durumunda ideal düzgün altıyüzlü olacaktır. Burada yukarıdaki teoremi kullanalım. Önce α ve β dihedral açıları belirleyelim.



Şekil 3.16: Üst yarı uzay modelinde $\Omega_{\alpha, \beta}$ prizması ve n eşit dilime ayrılması

altıyüzlü için $\alpha = \beta$ ve $2\alpha + \beta = \pi$ olduğundan $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$ bulunur. Daha sonra bunları önceki teoremdeki hacim formülünde yerine yazarsak

$$V(\text{altıyüzlü}) = 4 \left[2J\left(\frac{\pi}{6}\right) + J\left(\frac{7\pi}{12}\right) + J\left(\frac{\pi}{12}\right) \right]$$

elde ederiz. (3.1) eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} V(\text{altıyüzlü}) &= 4 \left[2J\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}J\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= 10J\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da ideal düzgün altıyüzlü için daha önceden hesapladığımız hacim ile aynıdır.

Şimdi hesapladığımız hiperbolik hacimleri yaklaşık değerleriyle birlikte tablo

halinde yazalım.

<i>İDEAL</i>	<i>HACMİ</i>	YAKLAŞIK DEĞERİ
ÇOKYÜZLÜ		
Dörtüzlü	$3\mathcal{I}(\frac{\pi}{3})$	1.014941606...
Altıyüzlü	$10\mathcal{I}(\frac{\pi}{6})$	5.074708032...
Sekizyüzlü	$8\mathcal{I}(\frac{\pi}{4})$	3.663862377..
Onikiyüzlü	$30 [\mathcal{I}(\frac{11\pi}{30}) - \mathcal{I}(\frac{\pi}{30}) + 2\mathcal{I}(\frac{\pi}{3})]$	20.58019936...
Yirmiyüzlü	$25\mathcal{I}(\frac{\pi}{5}) + 5\mathcal{I}(\frac{2\pi}{5})$	13.52962820...
Düzgün n-gen Piramit	$n\mathcal{I}(\frac{\pi}{n})$	
n-gen prizma $(\Omega_{\alpha,\beta})$	$n [2\mathcal{I}(\frac{\beta}{2}) + \mathcal{I}(\alpha + \frac{\pi}{n}) + \mathcal{I}(\alpha - \frac{\pi}{n})]$	

3.5 İdeal Düzgün Hiperbolik Politopların Hacimlerinin Maksimalliği

Bu bölümde bir önceki bölümde hacimlerini hesapladığımız politopların hacimlerinin maksimum olabilmesi için ideal ve düzgün politoplar olması gerektiğini göstereceğiz.

Tanım 3.3 X herhangi bir küme ve G bir grup olsun. Eğer

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\rightarrow gx \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı ve

1. e , G 'nin birim elemanı olmak üzere $\forall x \in X$ için $ex = x$

2. $\forall g, h \in G$ ve $\forall x \in X$ için $g(hx) = (gh)x$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon varsa " G grubu X üzerine etki(hareket) eder" denir.

Tanım 3.4 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $a, b \in \mathbb{R}^n$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b)$$

koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir. (Bkz. [10]).

Teorem 3.5.1 \mathcal{D} , \mathbb{R}^n 'in kompakt, konveks bir altkümesi olsun. G grubu \mathbb{R}^n üzerinde etki eden ve \mathcal{D} 'yi invaryant bırakan bir grup olsun. (Yani $\forall g \in G$ için $g(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ olsun). Varsayalım ki tek türlü belirli bir $x_o \in \mathcal{D}$ için $g(x_o) = x_o$ olsun. Bu durumda $\forall g \in G$ için $f(g(x)) = f(x)$ koşulunu sağlayan ve \mathcal{D} kümesi üzerinde konkav olan $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\max_{x \in \mathcal{D}} \{f(x)\} = f(x_o)$$

olur.

Kanıt. Öncelikle sürekli bir fonksiyon kompakt bir küme üzerinde maksimum değerini alacağından f sürekli fonksiyonu da \mathcal{D} kompakt kümesi üzerinde maksimum değerini alır. Varsayalım ki x_o 'dan farklı bir $y \in \mathcal{D}$ noktasında f fonksiyonu maksimum değerini alsın ve bir $g_o \in G$ için $g_o(y) \neq y$ olsun. f fonksiyonunu y ve $g_o(y)$ noktalarını birleştiren doğru parçası üzerine kısıtlayalım. f fonksiyonu $\forall g \in G$ için $f(g(x)) = f(x)$ koşulunu sağladığı için $f(g_o(y)) = f(y)$ olur. f , \mathcal{D} üzerinde konkav fonksiyon olduğundan $\lambda \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} f(\lambda y + (1 - \lambda)g_o(y)) &\geq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(g_o(y)) \\ &= \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(y) \\ &= f(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani f fonksiyonu y ve $g_o(y)$ noktalarını birleştiren doğru parçası üzerinde y 'deki değerinden büyük değerler almaktadır. Bu ise y 'nin maksimum nokta olması ile çelişir. O halde f fonksiyonun maksimum değerini aldığı nokta G grubunun hareketi altında değişmemelidir. x_o noktası \mathcal{D} kümesi üzerinde bu özelliği sağlayan tek nokta olduğundan

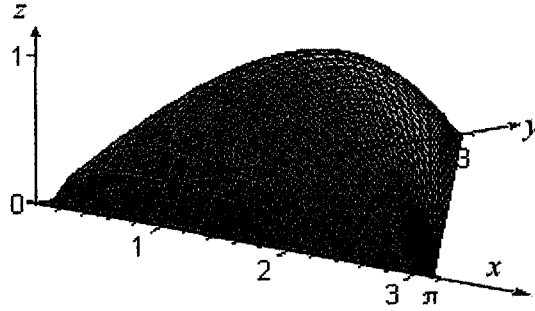
$$\max_{x \in \mathcal{D}} \{f(x)\} = f(x_o)$$

olmalıdır. ■

Yardımcı Teorem 3.5.2 $f : [0, \pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(\alpha, \beta) = J(\alpha) + J(\beta) + J(\pi - (\alpha + \beta))$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $0 \leq \alpha + \beta \leq \pi$ koşulunu sağlayan altküme üzerinde konkav fonksiyondur.



Şekil 3.17: f fonksiyonunun grafiği

Kanıt. f fonksiyonunun Hessian matrisini hesaplayalım. Burada Lobachevsky fonksiyonunu $[0, \pi]$ aralığında incelediğimiz için ve bu aralıkta $\sin x \geq 0$ olduğundan $-\log|2 \sin x| = -\log(2 \sin x)$ olur. Böylece f fonksiyonunun birinci kısmi türevleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \alpha} &= -\log(2 \sin \alpha) + \log(2 \sin(\pi - (\alpha + \beta))) \\ \frac{\partial f}{\partial \beta} &= -\log(2 \sin \beta) + \log(2 \sin(\pi - (\alpha + \beta)))\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan ikinci kısmi türevler ise

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} &= -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos(\pi - (\alpha + \beta))}{\sin(\pi - (\alpha + \beta))} = -\cot \alpha + \cot(\alpha + \beta) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} &= -\frac{\cos \beta}{\sin \beta} - \frac{\cos(\pi - (\alpha + \beta))}{\sin(\pi - (\alpha + \beta))} = -\cot \beta + \cot(\alpha + \beta) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} &= -\frac{\cos(\pi - (\alpha + \beta))}{\sin(\pi - (\alpha + \beta))} = \cot(\alpha + \beta) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \alpha} &= -\frac{\cos(\pi - (\alpha + \beta))}{\sin(\pi - (\alpha + \beta))} = \cot(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. İkinci kısmi türevler $[0, \pi] \times [0, \pi]$ kümesi üzerinde sürekli fonksiyonlardır. Burada

$$\cot a - \cot b = \frac{\sin(b - a)}{\sin a \cdot \sin b}$$

olduğundan Hessian matrisi

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{\sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)} & \cot(\alpha + \beta) \\ \cot(\alpha + \beta) & -\frac{\sin \alpha}{\sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece

$$|H| = \frac{1 - \cos^2(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} = 1$$

elde edilir. $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in [0, \pi]$ olduğundan $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = -\frac{\sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)} < 0$ olur. $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} < 0$ ve $|H| > 0$ olduğundan Hessian matrisi negatif tanımlıdır. f fonksiyonu ikinci dereceden sürekli kısmi türevlere sahip olduğundan ve Hessian matrisi negatif tanımlı olduğundan konkav fonksiyondur. $(\alpha, \beta) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$ ve $\pi - (\alpha + \beta) \in [0, \pi]$ olmak üzere f fonksiyonunun konkav olduğu Şekil 3.17'deki grafikten de görülebilir.

■

Teorem 3.5.3 \mathbb{H}^3 'te maksimum hacimli sekizyüzlü düzgün ideal sekizyüzlüdür.

Kanıt. Öncelikle her sekizyüzlü bir ideal sekizyüzlü tarafından içerilir. Dolayısıyla maksimum hacimli sekizyüzlü bir ideal sekizyüzlü olmalıdır. Böylece teoremin kanıtında sadece ideal sekizyüzlüleri ele almamız yeterlidir.

Bütün hiperbolik ideal sekizyüzlülerin kümesini \mathcal{P} ile gösterelim. Herhangi bir P ideal sekizyüzlü verilsin. P 'nin köşelerini A', B', C', D', E', F' olarak adlandıralım. Daha sonra P 'yi A' köşesi, ∞ 'a gidecek şekilde üst yarı uzay modeline gönderelim. P 'nin dihedral açıların Şekil 3.18 'deki gibi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}$ olarak adlandıralım. Böylece verilen herhangi bir P sekizyüzlüsüne, $[0, \pi] \times [0, \pi] \times \dots \times [0, \pi]$ konveks kompakt kümesinin

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$$

$$\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = \pi$$

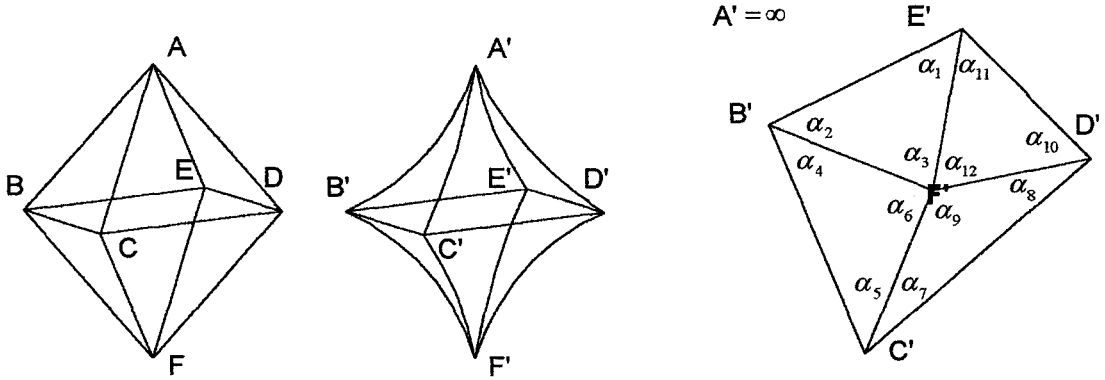
$$\alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 = \pi$$

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12} = \pi$$

ve

$$\alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_9 + \alpha_{12} = 2\pi$$

koşullarını sağlayan \mathcal{D} doğrusal alt uzayından bir nokta karşılık getirmiş oluruz. Burada \mathcal{D} 'nin kendisi de kompakt ve konveks bir kümedir.



Şekil 3.18: Sekizyüzlütün parçalara ayrılması

$P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ sekizyüzlülerine \mathcal{D} kümesinden aynı nokta karşılık geliyorsa " P_1 ve P_2 bağıntılıdır" diyelim ve bu bağıntıyı \sim ile gösterelim. Açık olarak \sim bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre oluşan denklik sınıfları kümesini $\Theta = \mathcal{P} / \sim$ ile gösterelim. Böylece Θ 'daki herbir denklik sınıfına \mathcal{D} 'de bir tek nokta, aynı şekilde \mathcal{D} 'deki herbir noktaya da Θ 'da bir tek denklik sınıfı karşılık gelir.

Böylece herhangi $\bar{P} \in \Theta$ sınıfındaki ideal sekizyüzlülerin hacimleri, dihedral açılar yukarıdaki gibi tanımlanmak üzere

$$V = \mathcal{H}(\alpha_1) + \mathcal{H}(\alpha_2) + \dots + \mathcal{H}(\alpha_{12})$$

olarak verilir.

Öklidyen düzgün sekizyüzlütün tam simetri grubunu \mathcal{G} ile gösterelim. Ve \mathcal{G} 'nin Θ üzerindeki etkisini gözönüne alalım. Θ 'den bir \bar{P} sınıfı verilsin ve P 'de bu sınıfın bir temsilci elemanı olsun. Öklidyen düzgün sekizyüzlütün köşeleri ile P 'nin köşelerini Şekil 3.18'deki gibi sabit bir şekilde eşleyelim. \mathcal{G} grubunun bir g elemanı P

sekizyüzlüsünün köşelerini, dolayısıyla da dihedral açılarının yerlerini değiştirecektir. Böylece oluşan bu yeni ideal sekizyüzlüye $g(P) = P'$ diyecek olursak, P ve P' 'nin hacimleri de aynı olacaktır. Yani

$$V(P) = V(g(P))$$

olacaktır. Θ ile \mathcal{D} arasında birebir ve örten bir eşleme olduğundan \mathcal{G} 'nin Θ üzerindeki etkisini \mathcal{D} üzerinde de düşünebiliriz. Böylece bir $g \in \mathcal{G}$, \mathcal{D} kümesinde P 'ye karşılık gelen noktayı P' sekizyüzlüsüne karşılık gelen noktaya dönüştürür. Açık olarak \mathcal{D} kümesi \mathcal{G} gurubunun etkisi altında sabit kalacaktır.

Şimdi \mathcal{D} kümesinde \mathcal{G} 'nin etkisi altında sabit kalan bir tek x_o noktasının olduğunu gösterelim. Öklidyen düzgün sekizyüzlünün AF ekseninde saat yönünde $\frac{\pi}{2}$ radyanlık yaptığı dönmeye karşılık P 'nin dihedral açıları

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\rightarrow \alpha_4 & \alpha_4 &\rightarrow \alpha_7 & \alpha_7 &\rightarrow \alpha_{10} & \alpha_{10} &\rightarrow \alpha_1 \\ \alpha_2 &\rightarrow \alpha_5 & \alpha_5 &\rightarrow \alpha_8 & \alpha_8 &\rightarrow \alpha_{11} & \alpha_{11} &\rightarrow \alpha_2 \\ \alpha_3 &\rightarrow \alpha_6 & \alpha_6 &\rightarrow \alpha_9 & \alpha_9 &\rightarrow \alpha_{12} & \alpha_{12} &\rightarrow \alpha_3 \end{aligned}$$

şeklinde değişir. O halde \mathcal{D} tanım kümesinde \mathcal{G} 'nin hareketi altında invaryant kalan nokta için

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_4 = \alpha_7 = \alpha_{10} \\ \alpha_2 &= \alpha_5 = \alpha_8 = \alpha_{11} \\ \alpha_3 &= \alpha_6 = \alpha_9 = \alpha_{12} \end{aligned}$$

olmalıdır. $\alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_9 + \alpha_{12} = 2\pi$ olduğundan $\alpha_3 = \alpha_6 = \alpha_9 = \alpha_{12} = \frac{\pi}{2}$ elde edilir. Diğer taraftan ACE düzleminde yansıma ile $\alpha_1 = \alpha_{11}$ elde edilir. Böylece $\alpha_4 = \alpha_7 = \alpha_{10} = \alpha_1 = \alpha_{11} = \alpha_2 = \alpha_5 = \alpha_8 = \frac{\pi}{4}$ elde edilir. Böylece \mathcal{D} tanım kümesinde \mathcal{G} grubunun hareketi altında invaryant kalan tek nokta $x_o = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ noktasıdır. Böylece bu noktaya karşılık gelen sekizyüzlünün bütün dihedral açıları $\frac{\pi}{2}$ olur, yani düzgün sekizyüzlüdür.

Sekizyüzlünün hacim fonksiyonunu $i = 0, 1, 2, 3$ için $\alpha_{3i+1} + \alpha_{3i+2} + \alpha_{3i+3} = \pi$ ve f fonksiyonu Yardımcı Teorem 3.5.2'deki gibi tanımlı olmak üzere

$$\begin{aligned} V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}) &= JI(\alpha_1) + JI(\alpha_2) + \dots + JI(\alpha_{12}) \\ &= f(\alpha_1, \alpha_2) + f(\alpha_4, \alpha_5) + f(\alpha_7, \alpha_8) + f(\alpha_{10}, \alpha_{11}) \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Yardımcı Teorem 3.5.2'den dolayı f konkav, dolayısıyla da V konkavdır. Böylece Teorem 3.5.1'in koşulları sağlanmış olur. Bu durumda x_0 noktası V hacim fonksiyonunun maksimum noktasıdır. O halde \mathbb{H}^3 'te maksimum hacimli sekizyüzlü düzgün ideal sekizyüzlüdür. ■

Teorem 3.5.4 \mathbb{H}^3 'te maksimum hacimli altıyüzlü düzgün ideal altıyüzlüdür.

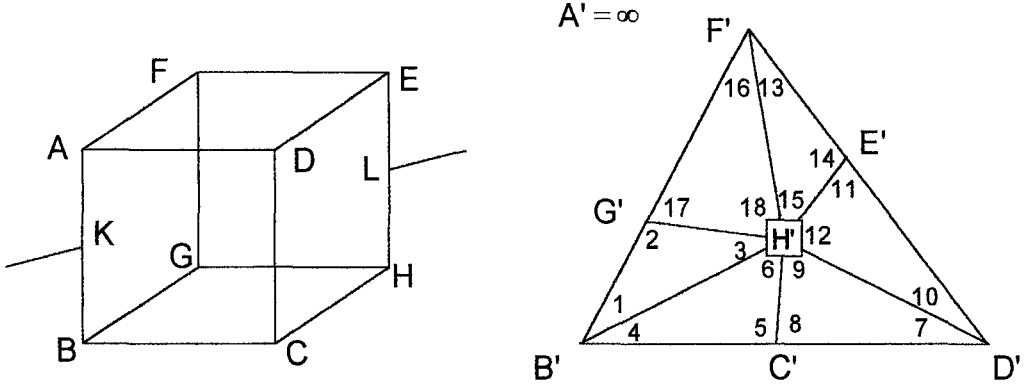
Kanıt. Her hiperbolik altıyüzlü bir ideal altıyüzlü tarafından içerileceğinden maksimum hacimli altıyüzlü ideal altıyüzlü olacaktır. Bu durumda kanıtta sadece ideal altıyüzlüleri ele almamız yeterlidir.

Bütün hiperbolik ideal altıyüzlülerin kümesini \mathcal{P} ile gösterelim. Herhangi bir P ideal altıyüzlüsü verilsin. P 'nin köşelerini $A', B', C', D', E', F', G', H'$ olarak adlandıralım. Daha sonra P 'yi A' köşesi, ∞ 'a gidecek şekilde üst yarı uzay modeline gönderelim. P 'nin dihedral açılarını Şekil 3.19'daki gibi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{18}$ olarak adlandıralım. Böylece verilen herhangi bir P altıyüzlüsüne, $[0, \pi] \times [0, \pi] \times \dots \times [0, \pi]$ 18 kere konveks kompakt kümesinin

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_7 + \alpha_{10} + \alpha_{13} + \alpha_{16} &= \pi \\ \alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_9 + \alpha_{12} + \alpha_{15} + \alpha_{18} &= 2\pi \\ \alpha_2 + \alpha_{17} &= \pi \\ \alpha_5 + \alpha_8 &= \pi \\ \alpha_{11} + \alpha_{14} &= \pi \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan \mathcal{D} kompakt, konveks doğrusal alt uzayından bir nokta karşılık getirmiş oluruz. Eğer \mathcal{P} 'den verilen iki altıyüzlüye \mathcal{D} kümesinde aynı nokta karşılık

geliyorsa, bu iki altıyüzlüye bağıntılıdır diyelim. \mathcal{P} 'yi bu denklik bağıntısının oluşturduğu denklik sınıflarına bölelim. Bu denklik sınıflarının kümesini de Θ ile göstereyim.



Şekil 3.19: Öklidyen altıyüzlü ve hiperbolik altıyüzlünün dihedral açılarının adlandırılması

Sekizyüzlü durumundaki gibi, öklidyen düzgün altıyüzlünün tam simetri grubu \mathcal{G} 'nin, Θ üzerine, dolayısıyla da \mathcal{D} üzerine etkisini ele alalım. Öklidyen düzgün altıyüzlünün AH ekseninde saatin tersi yönünde $\frac{2\pi}{3}$ radyanlık dönmesiyle P 'nin dihedral açıları

$$\alpha_1 \rightarrow \alpha_7 \rightarrow \alpha_{13} \rightarrow \alpha_1$$

$$\alpha_4 \rightarrow \alpha_{10} \rightarrow \alpha_{16} \rightarrow \alpha_4$$

$$\alpha_5 \rightarrow \alpha_{11} \rightarrow \alpha_{17} \rightarrow \alpha_5$$

$$\alpha_8 \rightarrow \alpha_{14} \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha_8$$

$$\alpha_3 \rightarrow \alpha_6 \rightarrow \alpha_9 \rightarrow \alpha_{12} \rightarrow \alpha_{15} \rightarrow \alpha_{18} \rightarrow \alpha_3$$

şeklinde değişir. Bu durumda \mathcal{G} 'nin hareketi altında sabit kalan bir nokta için

$$\alpha_1 = \alpha_7 = \alpha_{13}$$

$$\alpha_4 = \alpha_{10} = \alpha_{16}$$

$$\alpha_5 = \alpha_{11} = \alpha_{17}$$

$$\alpha_8 = \alpha_{14} = \alpha_2$$

$$\alpha_3 = \alpha_6 = \alpha_9 = \alpha_{12} = \alpha_{15} = \alpha_{18}$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Yukarıdaki eşitliklerden

$$\alpha_3 = \alpha_6 = \alpha_9 = \alpha_{12} = \alpha_{15} = \alpha_{18} = \frac{\pi}{3}$$

elde edilir. Diğer taraftan öklidyen düzgün altıyüzlünün $ABEH$ düzleminde yansıması ile $\alpha_1 \rightarrow \alpha_4$ ve $\alpha_5 \rightarrow \alpha_2$ değişimleri meydana gelir. Böylece \mathcal{D} kümesinde \mathcal{G} grubu altında sabit kalan nokta için

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_4 = \alpha_7 = \alpha_{10} = \alpha_{13} = \alpha_{16} = \frac{\pi}{6} \\ \alpha_2 &= \alpha_5 = \alpha_8 = \alpha_{11} = \alpha_{14} = \alpha_{17} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece bu koşulları sağlayan noktayı $x_o = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{18})$ ile gösterelim. x_o noktasına karşılık gelen altıyüzlünün her bir kenarı üzerindeki dihedral açısı $\frac{\pi}{3}$ olacaktır. Bu da hiperbolik altıyüzlünün düzgün altıyüzlü olması demektir. Bu nokta \mathcal{G} 'nin diğer elemanlarıyla da sabit kalacaktır.

Altıyüzlünün hacim fonksiyonunu f fonksiyonu Yardımcı Teorem 3.5.2'deki gibi tanımlanmak üzere

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{18}) = \sum_{i=0}^5 f(\alpha_{3i+1}, \alpha_{3i+2})$$

olarak yazabiliriz. Yardımcı Teorem 3.5.2'den dolayı V fonksiyonu konkav fonksiyondur. Böylece Teorem 3.5.1'in koşulları sağlanmış olur. Bu durumda x_o noktası V hacim fonksiyonunun maksimum noktasıdır. O halde \mathbb{H}^3 'te maksimum hacimli altıyüzlü düzgün ideal altıyüzlüdür. ■

Teorem 3.5.5 \mathbb{H}^3 'te maksimum hacimli yirmiyüzlü düzgün ideal yirmiyüzlüdür.

Kanıt. Yine her hiperbolik yirmiyüzlü bir ideal yirmiyüzlü tarafından içerileceğinden maksimum hacimli yirmiyüzlü bir ideal yirmiyüzlü olacaktır. Bu durumda sadece ideal yirmiyüzlüleri ele alacağız.

Bütün hiperbolik ideal yirmiyüzlülerin kümesini \mathcal{P} ile gösterelim. Herhangi bir P ideal yirmiyüzlüsü verilsin. P 'nin köşelerini $A', B', C', D', E', F', G', H', I', J', K', L'$ olarak adlandıralım. Daha sonra P 'yi A' köşesi, ∞ 'a gidecek şekilde üst yarı uzay modeline gönderelim. P 'nin dihedral açılarını Şekil 3.20 'deki gibi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{45}$ olarak adlandıralım. Böylece verilen herhangi bir P yirmiyüzlüsüne,

$$[0, \pi] \times [0, \pi] \times \cdots \times [0, \pi]$$

45 kere

konveks kompakt kümesinin

$$\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_7 + \alpha_{10} + \alpha_{13} = 2\pi$$

$$\alpha_2 + \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{30} + \alpha_{31} = 2\pi$$

$$\alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_{18} + \alpha_{19} + \alpha_{34} = 2\pi$$

$$\alpha_6 + \alpha_8 + \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{37} = 2\pi$$

$$\alpha_9 + \alpha_{11} + \alpha_{24} + \alpha_{25} + \alpha_{40} = 2\pi$$

$$\alpha_{12} + \alpha_{14} + \alpha_{27} + \alpha_{28} + \alpha_{43} = 2\pi$$

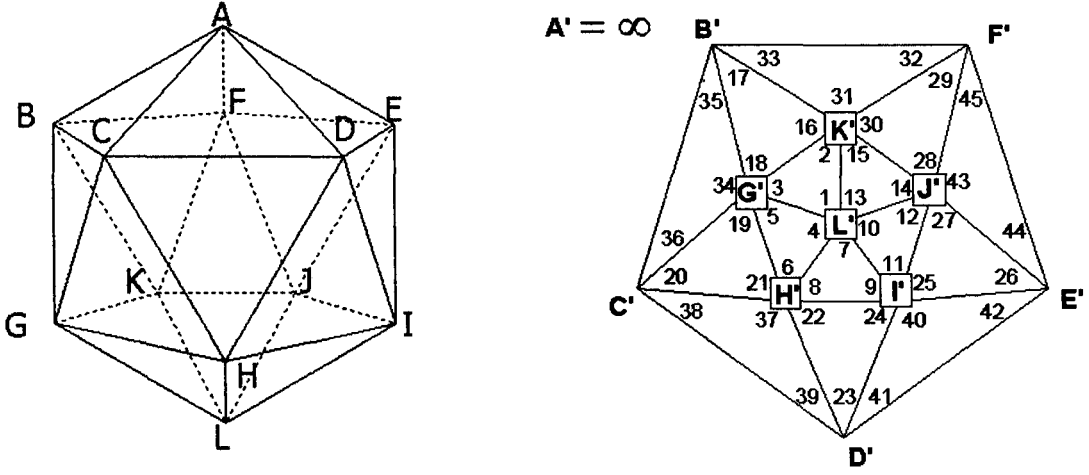
ve $i = 0, 1, \dots, 14$ olmak üzere

$$\alpha_{3i+1} + \alpha_{3i+2} + \alpha_{3i+3} = \pi$$

koşullarını sağlayan \mathcal{D} kompakt, konveks doğrusal alt uzayından bir nokta karşılık getirmiş oluruz. Eğer \mathcal{P} 'den verilen iki yirmi yüzlüye \mathcal{D} kümesinden aynı nokta karşılık geliyorsa bu iki yirmiyüzlüye bağıntılıdır diyelim ve bu denklik bağıntısının oluşturduğu denklik sınıfları kümesini Θ ile gösterelim.

Şimdi öklidyen düzgün yirmiyüzlünün tam simetri gurubu \mathcal{G} 'nin Θ üzerine, dolayısıyla da \mathcal{D} üzerine etkisini gözönüne alalım. Öklidyen düzgün yirmiyüzlünün AL ekseninde saat yönündeki $\frac{2\pi}{5}$ radyanlık dönmeye karşılık $i = 1, 2, 3, 16, 17, 18, 31, 32, 33$ değerleri için

$$\alpha_i \rightarrow \alpha_{i+3} \rightarrow \alpha_{i+6} \rightarrow \alpha_{i+9} \rightarrow \alpha_{i+12} \rightarrow \alpha_i$$



Şekil 3.20: Öklidyen yirmiyüzlü ve hiperbolik yirmiyüzlünün dihedral açılarının adlandırılması

değişmeleri meydana gelir. Böylece \mathcal{D} üzerinde \mathcal{G} grubunun hareketi altında sabit kalan bir nokta $i = 1, 2, 3, 16, 17, 18, 31, 32, 33$ değerleri için

$$\alpha_i = \alpha_{i+3} = \alpha_{i+6} = \alpha_{i+9} = \alpha_{i+12}$$

eşitliklerini sağlamalıdır. Böylece

$$\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_7 = \alpha_{10} = \alpha_{13} = \frac{2\pi}{5}$$

elde edilir. Diğer taraftan öklidyen düzğün yirmiyüzlünün $AEGL$ düzleminde yansması ile $\alpha_{35} = \alpha_{36}$, $\alpha_{11} = \alpha_{12}$, $\alpha_{16} = \alpha_{21}$ eşitlikleri bulunur. Böylece

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_8 = \alpha_9 = \alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{14} = \alpha_{15} = \frac{3\pi}{10}$$

elde edilir. Ayrıca öklidyen düzğün yirmiyüzlünün BI eksenindeki saatin ters yönünde $\frac{2\pi}{5}$ radyanlık dönmesiyle $B'C'$ üzerindeki dihedral açının $A'B'$ üzerindeki dihedral açığa eşit olması gerektiği görülmüştür. Böylece $B'C'$ üzerindeki dihedral açı $\frac{3\pi}{5}$ olur. Bu ise

$$\alpha_{31} = \alpha_{34} = \alpha_{37} = \alpha_{40} = \alpha_{43} = \frac{3\pi}{5}$$

demektir. Buradan

$$\begin{aligned}\alpha_{17} &= \alpha_{20} = \alpha_{23} = \alpha_{26} = \alpha_{29} = \frac{\pi}{5} \\ \alpha_{32} &= \alpha_{33} = \alpha_{35} = \alpha_{36} = \alpha_{38} = \frac{\pi}{5} \\ \alpha_{39} &= \alpha_{41} = \alpha_{42} = \alpha_{44} = \alpha_{45} = \frac{\pi}{5}\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. $\alpha_{17} = \frac{\pi}{5}$ ve $\alpha_{16} = \alpha_{18}$ olduğundan

$$\alpha_{16} = \alpha_{18} = \alpha_{19} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = \alpha_{24} = \alpha_{25} = \alpha_{27} = \alpha_{28} = \alpha_{30} = \frac{2\pi}{5}$$

olur. Bu durumda \mathcal{G} 'nin hareketi altında sabit kalan $x_o = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{45})$ noktası yukarıda elde ettiğimiz eşitlikleri sağlayan noktadır. Ve \mathcal{G} 'nin diğer elemanlarının etkileri altında da sabit kalır. Böylece bu noktaya karşılık gelen ideal hiperbolik yirmiyüzlünün herbir kenarı üzerindeki dihedral açısı $\frac{3\pi}{5}$ olur. Böylece elde edilen yirmiyüzlü düzgün ideal yirmiyüzlüdür.

Burada $i = 0, 1, \dots, 14$ olmak üzere $\alpha_{3i+1} + \alpha_{3i+2} + \alpha_{3i+3} = \pi$ olduğundan ideal yirmiyüzlünün hacim fonksiyonunu f fonksiyonu Yardımcı Teorem 3.5.2'de tanımlandığı gibi olmak üzere

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{45}) = \sum_{i=0}^{14} f(\alpha_{3i+1}, \alpha_{3i+2})$$

olarak yazabiliriz. Bu fonksiyon Yardımcı Teorem 3.5.2'den dolayı konkav fonksiyonların toplamıdır ve kendisi de konkavdır. Böylece Teorem 3.5.1'in koşulları sağlanmış olur. Bu durumda x_o noktası V hacim fonksiyonunun maksimum noktasıdır. O halde \mathbb{H}^3 'te maksimum hacimli yirmiyüzlü düzgün ideal yirmiyüzlüdür. ■

4 n-Boyutlu Hiperbolik Uzayda Maksimum Hacimli Simpleks

Bu bölümde Haagerup ve Munkholm'un n -boyutlu hiperbolik uzayda maksimum hacimli simpleksler üzerine yaptıkları çalışmayı inceleyeceğiz.

n -boyutlu hiperbolik uzay \mathbb{H}^n için $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ olmak üzere $ds_n^2 = \frac{4}{(1-r^2)^2} \sum_{i=1}^n (dx_i)^2$ Riemann metriği ile verilen

$$\mathbb{H}^n \approx \mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$$

konformal disk modeli göz önüne alalım.

\mathbb{H}^n 'deki bir n -simpleks $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ noktalarının konveks zarfıdır. v_0, v_1, \dots, v_n noktaları n -simpleksin köşelerini oluştururlar. Eğer bütün köşe noktaları S^{n-1} üzerinde, yani sonsuzda ise n -simplekse ideal n -simpleks denir. Bir simpleksin düzgün olması demek ise, köşe noktalarının herhangi bir permütasyonunun \mathbb{H}^n 'in izometrileriyle elde edilebiliyor olması demektir. \mathbb{H}^n 'in izometrileri $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ üzerine sürekli bir şekilde genişletilebildiğinden düzgünlük, ideal simpleksler için de anlamlı olmaktadır.

Teorem 4.0.1 $n \geq 2$ olmak üzere n -boyutlu hiperbolik uzayda bir simpleksin maksimum hacime sahip olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul düzgün ideal simpleks olmasıdır.

4.1 Teorem 4.0.1 'in Kanıtı

Herhangi bir n -simpleks bir ideal n -simpleks tarafından içerileceğinden maksimum hacimli n -simpleks ideal olacaktır. O halde ispatta sadece ideal simpleksleri ele almamız yeterlidir. Keyfi bir ideal hiperbolik n -simpleks için $\Omega[n]$, düzgün ideal hiperbolik n -simpleks için de $\Omega_o[n]$ gösterimlerini kullanacağız.

Projektif disk modelinde jeodezikler öklidyen doğrular olduğundan, $\Omega[n]$ Poincaré disk modelinde köşeleri S^{n-1} üzerindeki v_0, v_1, \dots, v_n noktaları olan n -simpleks olmak üzere $p(\Omega[n])$ köşeleri aynı noktalar olan öklidyen n -simpleks olur. Burada p

Poincaré disk modelinden projektif disk modeline, giriş bölümünde $p : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$

$$p(\mathbf{x}) = \frac{2\mathbf{x}}{1 + |\mathbf{x}|^2}, \quad |\mathbf{x}| < 1$$

şeklinde tanımladığımız dönüşümdür. Böylece $\Omega[n]$ 'in hacim formülü

$$V(\Omega[n]) = \int_{p(\Omega[n])} (1 - r^2)^{-\frac{n+1}{2}} dr \quad (4.1)$$

formülü ile verilir.

Üst yarı uzay modelinden, Poincaré disk modeline giriş bölümünde tanımladığımız g dönüşümünün tersini h ile gösterelim. Bu durumda $h : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$

$$h(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{e}_n|^2} (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{n-1}, 1 - |\mathbf{x}|^2), \quad (|\mathbf{x}| < 1)$$

olur. $\Omega[n]$ 'in köşeleri için $\mathbf{v}_0 = \mathbf{e}_n$ olarak genelliği bozmuş olmayız. Böylece $h(\mathbf{v}_0) = \infty$ olur. \mathbb{U}^n 'de öklidyen benzerlik dönüşümlerini kullanarak $h(\mathbf{v}_0) = \infty$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $h(\mathbf{v}_i) \in S^{n-2}$ noktalarına taşıyabiliriz. Böylece $\Omega[n]$ 'in köşelerinin $h(\mathbf{v}_0) = \infty$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $h(\mathbf{v}_i) \in S^{n-2}$ olduğunu varsayabiliriz.

\mathbb{R}^{n-1} 'de $h(\mathbf{v}_1), h(\mathbf{v}_2), \dots, h(\mathbf{v}_n)$ noktalarının oluşturduğu $(n-1)$ -simpleksi $\varepsilon(\Omega[n])$ ile gösterelim. Böylece $h(\Omega[n]) - \{\infty\}$ kümesi, $\varepsilon(\Omega[n]) \times [0, \infty)$ kümesinin birim disk dışında kalan noktaları olur. $\rho = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2)^{\frac{1}{2}}$ ve $d\rho = dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}$ diyelim. Böylece

$$\begin{aligned} V(\Omega[n]) &= \int_{\varepsilon(\Omega[n])} \left(\int_{\sqrt{1-\rho^2}}^{\infty} x^{-n} dx \right) d\rho \\ &= \frac{1}{n-1} \int_{\varepsilon(\Omega[n])} (1 - \rho^2)^{-\frac{(n-1)}{2}} d\rho \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde ederiz.

Yardımcı Teorem 4.1.1 $\Omega[n]$ 'in hiperbolik düzgün olması için gerek ve yeter koşul $\varepsilon(\Omega[n])$ 'in öklidyen düzgün olmasıdır.

Kanıt. Varsayalım ki $\Omega[n]$ hiperbolik düzgün n -simpleks olsun. $\varepsilon(\Omega[n])$ 'in öklidyen düzgün düzgün olduğunu göstermek için herhangi iki v, w köşesinin yerinin değişmesinin bir öklidyen izometri ile sağlanabileceğini göstermek yeterlidir. $\Omega[n]$ hiperbolik düzgün n -simpleks olduğundan v, w köşelerinin yerini değiştirip diğer köşeleri sabit bırakan bir m Möbius dönüşümü vardır. m Möbius dönüşümü ∞ 'u da sabit bıraktığından \mathbb{E}^{n-1} 'deki bir benzerlik dönüşümünün Poincaré genişlemesidir. Diğer taraftan m Möbius dönüşümü v, w doğru parçasını sabit bıraktığından genişleme sabiti 1 'dir. Böylece m bir öklidyen izometridir. (Bkz. [2]).

Tersine $\varepsilon(\Omega[n])$ öklidyen düzgün $(n-1)$ -simpleks olsun. $\Omega[n]$ 'in hiperbolik düzgün olduğunu göstermek için $\varepsilon(\Omega[n])$ 'in bir v köşesi ile ∞ 'un yerlerinin bir Möbius dönüşümü ile değiştirilebileceğini göstermek yeterlidir. $\varepsilon(\Omega[n])$ öklidyen düzgün olduğundan $w \neq v$ şeklindeki her köşesinin v 'den uzaklığı aynıdır. Bu uzaklığı r ile, \mathbb{E}^n 'deki $S(w, r)$ küresinde yansıma dönüşümünü de σ ile gösterelim. Bu durumda $\sigma(w) = \infty$ ve $\sigma(\infty) = w$ olur ve diğer köşeler sabit kalır. Böylece $\Omega[n]$ 'in iki köşesinin yerini değiştiren bir hiperbolik izometri bu köşeleri ∞ 'a götüren iki Möbius dönüşümünün bileşkesidir. O halde $\Omega[n]$ hiperbolik düzgündür. ■

Yardımcı Teorem 4.1.2 \mathbb{H}^n 'de izometrilere bağlı olarak bir tek düzgün ideal n -simpleks vardır.

Kanıt. $\Psi[n]$ ve $\Sigma[n]$ \mathbb{U}^n 'de iki hiperbolik düzgün ideal n -simpleks olsun. Önceki teoremden dolayı $\varepsilon(\Psi[n])$ ve $\varepsilon(\Sigma[n])$ öklidyen düzgün $(n-1)$ -simplekstirler. Böylece $\varepsilon(\Psi[n])$ 'i $\varepsilon(\Sigma[n])$ 'e dönüştüren bir benzerlik dönüşümü vardır. Bu dönüşüm $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\zeta(v) = \lambda v$ olsun. Bu durumda $\bar{\zeta}(v, t) = (\lambda v, \lambda t)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm $\Psi[n]$ ve $\Sigma[n]$ arasındaki hiperbolik izometridir. ■

(4.1) eşitliği $V(\Omega[n])$ hacmini n -boyutlu öklidyen simpleks üzerinden, (4.2) eşitliği ise $V(\Omega[n])$ 'i $(n-1)$ -boyutlu öklidyen simpleks üzerinde integraller olarak verirler. Bu ise \mathbb{H}^{n+1} 'deki ideal simplekslerin hacimlerinin \mathbb{H}^n 'deki ideal simplekslerin hacimleriyle karşılaştırılabilmesini sağlar.

Önerme 4.1.3 $n \geq 2$ için

$$\frac{n-1}{n^2} \leq \frac{V(\Omega_o[n+1])}{V(\Omega_o[n])} \leq \frac{1}{n} \quad (4.3)$$

eşitsizliği vardır.

Kanıt. $\sigma_o[n]$ köşeleri S^{n-1} üzerinde olan öklidyen düzgün n -simpleks olsun. Bu durumda $r = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ ve $d\mathbf{r} = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ olmak üzere aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını göstereceğiz.

$$\int_{\sigma_o[n]} (1-r^2)^{-\frac{n+1}{2}} d\mathbf{r} = V(\Omega_o[n]) \quad (4.4)$$

$$\int_{\sigma_o[n]} (1-r^2)^{-\frac{n}{2}} d\mathbf{r} = nV(\Omega_o[n+1]) \quad (4.5)$$

$$\int_{\sigma_o[n]} (1-r^2)^{-\frac{n-1}{2}} d\mathbf{r} = \frac{n-1}{n} V(\Omega_o[n]) \quad (4.6)$$

Bu eşitliklerin ispatlanması durumunda

$$\frac{n-1}{n} V(\Omega_o[n]) \leq nV(\Omega_o[n+1]) \leq V(\Omega_o[n])$$

eşitsizliğini ispatlamış oluruz. Gerçekten $1-r^2 < 1$ için

$$\begin{aligned} (1-r^2)^{\frac{n-1}{2}} &\geq (1-r^2)^{\frac{n}{2}} \geq (1-r^2)^{\frac{n+1}{2}} \\ \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{n-1}{2}}} &\leq \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{n}{2}}} \leq \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\ \int_{\sigma_o[n]} (1-r^2)^{-\frac{n-1}{2}} d\mathbf{r} &\leq \int_{\sigma_o[n]} (1-r^2)^{-\frac{n}{2}} d\mathbf{r} \leq \int_{\sigma_o[n]} (1-r^2)^{-\frac{n+1}{2}} d\mathbf{r} \end{aligned}$$

ve buradan da

$$\frac{n-1}{n} V(\Omega_o[n]) \leq nV(\Omega_o[n+1]) \leq V(\Omega_o[n])$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte her terimi $\frac{1}{nV(\Omega_o[n])}$ ile çarparsak

$$\frac{n-1}{n^2} \leq \frac{V(\Omega_o[n+1])}{V(\Omega_o[n])} \leq \frac{1}{n}$$

eşitsizliğini elde ederiz ki bu da (4.3) eşitsizliğidir.

\mathbb{H}^n 'deki düzgün, ideal simpleksler izometrik olduğundan $p(\Omega_o[n])$ 'i öklidyen düzgün olarak varsayabiliriz. Böylece (4.1) 'den (4.4) eşitliğini elde ederiz.

$$V(\Omega_o[n]) = \int_{p(\Omega_o[n])} (1-r^2)^{-\frac{n+1}{2}} d\mathbf{r} = \int_{\sigma_o[n]} (1-r^2)^{-\frac{n+1}{2}} d\mathbf{r}$$

Diğer taraftan $\Omega_o[n+1]$ 'in düzgün olması $\varepsilon(\Omega_o[n+1])$ 'in düzgün olması demek olduğundan (4.2) eşitliğini kullanarak

$$nV(\Omega_o[n+1]) = n \frac{1}{n} \int_{\varepsilon(\Omega_o[n+1])} (1-r^2)^{-\frac{n}{2}} d\mathbf{r} = \int_{\sigma_o[n]} (1-r^2)^{-\frac{n}{2}} d\mathbf{r}$$

eşitliğini yani (4.5) eşitliğini elde ederiz.

(4.6) eşitliğini kanıtlamak için $|\mathbf{r}| < 1$ olmak üzere

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (1-r^2)^{-\frac{n-1}{2}} \mathbf{r}$$

şeklinde tanımlanan vektör alanına Gauss diverjans formülünü uygulayalım. Böylece \mathbf{n} , $\sigma_o[n]$ 'in sınırı olan $\partial\sigma_o[n]$ 'e normal olan vektör olmak üzere

$$\int_{\sigma_o[n]} \text{div}(\mathbf{V}(\mathbf{r})) d\mathbf{r} = \int_{\partial\sigma_o[n]} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (4.7)$$

eşitliğini elde ederiz. Önce bu eşitliğin sol tarafını hesaplayalım. Burada $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ vektör alanının diverjansı

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{V}(\mathbf{r})) &= \text{div} \left(\frac{\mathbf{r}}{(1-r^2)^{\frac{n-1}{2}}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{(1-\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{n-1}{2}}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{(1-\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{n-1}{2}}} + \frac{(n-1)x_i^2}{(1-\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{n+1}{2}}} \right) \\ &= (1-r^2)^{-\frac{n-1}{2}} + (n-1)(1-r^2)^{-\frac{n+1}{2}} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Basitlik açısından

$$\varphi_n(\alpha) = \int_{\sigma_o[n]} (1-r^2)^{-\alpha} d\mathbf{r}$$

diyecek olursak (4.7) eşitliğinin sol tarafı

$$\int_{\sigma_o[n]} \text{div}(\mathbf{V}(\mathbf{r}))d\mathbf{r} = \varphi_n\left(\frac{n-1}{2}\right) + (n-1)\varphi_n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

haline döndür. Şimdi (4.7) eşitliğinin sağ tarafını hesaplayalım. $\partial\sigma_o[n]$, $(n+1)$ tane düzgün $(n-1)$ -simpleks içerir. Bunları $i = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere $\partial_i\sigma_o[n]$ ile gösterelim. Herbir $i = 0, 1, \dots, n$ için \mathbf{v}_i , $\partial_i\sigma_o[n]$ $(n-1)$ -simpleksinin karşısında kalan köşe olsun. 0 , $\partial\sigma_o[n]$ simpleksinin ağırlık merkezi olduğundan, ağırlık merkezinin tanımına göre $\sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i = 0$ olmalıdır. Böylece $\forall j = 0, 1, \dots, n$ için $\sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j \cdot \sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i = 0$ elde edilir. $\partial\sigma_o[n]$ öklidyen düzgün n -simpleks olduğundan $i \neq j$ için $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ çarpımı i ve j 'den bağımsızdır. Böylece

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0, i \neq j}^n \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \right) + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i &= 0 \\ n(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $i \neq j$ için $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \frac{-1}{n}$ elde ederiz. \mathbf{r} konum vektörü $\partial_i\sigma_o[n]$ üzerinde iken $t_i = 0$ ve $\sum_{j=0}^n t_j = 1$ olmak üzere

$$\mathbf{r} = \sum_{j=0}^n t_j \mathbf{v}_j$$

olacak şekilde $t_0, t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ katsayıları vardır. Bu durumda

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r} \cdot (-\mathbf{v}_i) = - \sum_{j=0}^n t_j \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{n}$$

bulunur. \mathbf{a}_i ve ρ_n ile $\partial_i\sigma_o[n]$ $(n-1)$ -simpleksinin bulunduğu $(n-2)$ -boyutlu kürenin merkezini ve yarıçapını gösterelim. Böylece \mathbf{a}_i , \mathbf{v}_i 'nin reel bir katı olarak yazılabilir. $\mathbf{a}_i \cdot (-\mathbf{v}_i) = \frac{1}{n}$ olduğundan $\mathbf{a}_i = \frac{-\mathbf{v}_i}{n}$ elde ederiz. Burada 0 , \mathbf{a}_i ve \mathbf{v}_i 'den farklı bir \mathbf{v}_j köşesi birlikte bir dik üçgen oluştururlar ve buradan

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}_i|^2 + \rho_n^2 &= 1 \\ \left| \frac{-\mathbf{v}_i}{n} \right|^2 + \rho_n^2 &= 1 \end{aligned}$$

ve buradan da $\rho_n = (1 - \frac{1}{n^2})^{1/2}$ bulunur. \mathbf{a}_i noktasının $\mathbf{r} \in \partial_i \sigma_o[n]$ 'e uzaklığı ρ olmak üzere

$$\begin{aligned}\rho_n^2 &= 1 - \frac{1}{n^2} \\ \rho^2 &= r^2 - \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

eşitliklerinden $1 - r^2 = \rho_n^2 - \rho^2$ elde edilir. Böylece (4.7) formülünde eşitliğin sağ tarafı

$$\begin{aligned}\int_{\partial \sigma_o[n]} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{\partial \sigma_o[n]} (1 - r^2)^{-\frac{n-1}{2}} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{n} \int_{\partial_i \sigma_o[n]} (\rho_n^2 - \rho^2)^{-\frac{n-1}{2}} dS_i \\ &= \frac{n+1}{n} \int_{\partial_0 \sigma_o[n]} (\rho_n^2 - \rho^2)^{-\frac{n-1}{2}} dS_o\end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\partial_0 \sigma_o[n]$ ile $\rho_n \cdot (\sigma_o[n-1])$ izometrik olduğundan $\rho = \rho_n s$ için $ds = dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n} \int_{\partial_0 \sigma_o[n]} (\rho_n^2 - \rho^2)^{-\frac{n-1}{2}} dS_o &= \frac{n+1}{n} \int_{\sigma_o[n-1]} (\rho_n^2 - \rho_n^2 s^2)^{-\frac{n-1}{2}} \cdot \rho_n^{n-1} ds \\ &= \frac{n+1}{n} \int_{\sigma_o[n-1]} (1 - s^2)^{-\frac{n-1}{2}} ds \\ &= \frac{n+1}{n} \varphi_{n-1} \left(\frac{n-1}{2} \right)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\varphi_n \left(\frac{n-1}{2} \right) + (n-1) \varphi_n \left(\frac{n+1}{2} \right) = \frac{n+1}{n} \varphi_{n-1} \left(\frac{n-1}{2} \right) \quad (4.8)$$

eşitliğini göstermiş olduk. (4.4) eşitliği ile $\varphi_n \left(\frac{n+1}{2} \right) = V(\Omega_o[n])$ ve (4.5) eşitliği ile

$\varphi_{n-1}\left(\frac{n-1}{2}\right) = (n-1)V(\Omega_o[n])$ elde ederiz. Bunları (4.8) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\varphi_n\left(\frac{n-1}{2}\right) &= \frac{n+1}{n}(n-1)V(\Omega_o[n]) - (n-1)V(\Omega_o[n]) \\ \int_{\sigma_o[n]} (1-r^2)^{-\frac{n-1}{2}} d\mathbf{r} &= \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n} - \frac{n(n-1)}{n}\right) V(\Omega_o[n]) \\ \int_{\sigma_o[n]} (1-r^2)^{-\frac{n-1}{2}} d\mathbf{r} &= \frac{(n-1)}{n} V(\Omega_o[n])\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise (4.6) eşitliğidir. Böylece $n \geq 2$ için

$$\frac{n-1}{n^2} \leq \frac{V(\Omega_o[n+1])}{V(\Omega_o[n])} \leq \frac{1}{n}$$

olduğu gösterilmiş olur. ■

Yardımcı Teorem 4.1.4 $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve konkav fonksiyon olsun. $\sigma[n]$ ile köşeleri S^{n-1} üzerinde bulunan herhangi bir öklidyen n -simpleksi, bu simpleksin ağırlık merkezini de \mathbf{c} ile gösterelim. $c = |\mathbf{c}|$ olsun. Böylece her iki integral de sonlu olmak üzere

$$V(\sigma[n])^{-1} \int_{\sigma[n]} f(1-r^2) d\mathbf{r} \leq V(\sigma_o[n])^{-1} \int_{\sigma_o[n]} f[(1-c^2)(1-r^2)] d\mathbf{r} \quad (4.9)$$

eşitsizliği geçerlidir. Üstelik f kesin konkav bir fonksiyon ise eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $\sigma[n]$ 'in düzgün olmasıdır.

Kanıt. Eşitsizliğin sol tarafını A , sağ tarafını ise B ile gösterelim. $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ noktaları $\sigma[n]$ 'in köşeleri olsun. Standart n -simpleks

$$\Delta[n] = \left\{ (t_0, t_1, \dots, t_n) \mid t_i \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\} \subseteq \mathbb{E}^{n+1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada h ,

$$\begin{aligned}h &: \Delta[n] \rightarrow \sigma[n] \\ h(t_0, t_1, \dots, t_n) &= \sum_{i=0}^n t_i \mathbf{v}_i\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan homeomorfizm olsun. $\int_{\sigma[n]} V(\sigma[n])^{-1} d\mathbf{r} = 1$ olduğundan, h^*, h homeomorfizminin tersi olmak üzere $\Delta[n]$ üzerinde $h^*(V(\sigma[n])^{-1} d\mathbf{r})$ ile elde edilen ölçümü μ ile gösterelim. Bu durumda $\int_{\Delta[n]} d\mu = \mu(\Delta[n]) = 1$ olur. Böylece A ifadesi

$$A = V(\sigma[n])^{-1} \int_{\sigma[n]} f(1 - r^2) d\mathbf{r} = \int_{\Delta[n]} f \left(1 - \left| \sum_i t_i \mathbf{v}_i \right|^2 \right) d\mu$$

haline dönüşür. μ ölçümü, $\pi, 0, 1, \dots, n$ sayılarının herhangi bir permütasyonu olmak üzere $t_i \rightarrow t_{\pi(i)}$ dönüşümü altında değişmeyeceğinden

$$A = \int_{\Delta[n]} f \left(1 - \left| \sum_i t_{\pi(i)} \mathbf{v}_i \right|^2 \right) d\mu$$

elde ederiz. Burada $0, 1, \dots, n$ sayıları için yazılabilecek tüm π permütasyonları üzerinden ortalama alma işlemini E ile gösterelim. Böylece

$$A = E \left(\int_{\Delta[n]} f \left(1 - \left| \sum_i t_{\pi(i)} \mathbf{v}_i \right|^2 \right) d\mu \right)$$

yazabiliriz. f konkav fonksiyon olduğundan

$$A \leq \int_{\Delta[n]} f \left(E \left(1 - \left| \sum_i t_{\pi(i)} \mathbf{v}_i \right|^2 \right) \right) d\mu \quad (4.10)$$

olur. Bu son ifadedeki $E \left(1 - \left| \sum_i t_{\pi(i)} \mathbf{v}_i \right|^2 \right)$ ortalamasını hesaplamak için aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayalım.

$$\left| \sum_i t_{\pi(i)} \mathbf{v}_i \right|^2 = \sum_{i \neq j} t_{\pi(i)} t_{\pi(j)} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j + \sum_i t_i^2 \quad (4.11)$$

$$E(t_{\pi(i)} t_{\pi(j)}) = \frac{1}{n(n+1)} \left(1 - \sum_i t_i^2 \right) \quad i \neq j \quad (4.12)$$

$$\sum_{i \neq j} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = (n+1)^2 c^2 - (n+1) \quad (4.13)$$

Öncelikle (4.11) 'i gösterelim.

$$\begin{aligned}
\left| \sum_i t_{\pi(i)} \mathbf{v}_i \right|^2 &= \left| t_{\pi(0)} \mathbf{v}_0 + t_{\pi(1)} \mathbf{v}_1 + \cdots + t_{\pi(n)} \mathbf{v}_n \right|^2 \\
&= \sum_{i \neq j} t_{\pi(i)} t_{\pi(j)} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j + \sum_i t_{\pi(i)}^2 |\mathbf{v}_i|^2 \\
&= \sum_{i \neq j} t_{\pi(i)} t_{\pi(j)} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j + \sum_i t_i^2
\end{aligned}$$

(4.12) eşitliğini göstermek için öncelikle $i \neq j$ olmak üzere

$$\sum_{i,j} t_i t_j = \sum_i \sum_j t_i t_j = \sum_i t_i \sum_j t_j = \sum_i t_i = 1$$

olduğunu söyleyelim. $i, j = 0, 1, \dots, n$ sayıları için $i \neq j$ koşulunun sağlandığı $n(n+1)$ durum vardır. Bu durumda ortalama

$$\begin{aligned}
E(t_{\pi(i)} t_{\pi(j)}) &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i \neq j} t_i t_j \\
&= \frac{1}{n(n+1)} \left(\sum_{i,j} t_i t_j - \sum_i t_i^2 \right) \\
&= \frac{1}{n(n+1)} \left(1 - \sum_i t_i^2 \right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Son olarak (4.13) eşitliğini göstermek için önce bir politopun ağırlık merkezi $\mathbf{c} = \frac{\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n}{n+1}$ ve $c^2 = |\mathbf{c}|^2 = \frac{|\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n|^2}{(n+1)^2}$ olduğunu hatırlatalım.

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j &= \left| \sum_i \mathbf{v}_i \right|^2 - \sum_i |\mathbf{v}_i|^2 \\
&= (n+1)^2 \cdot \frac{|\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n|^2}{(n+1)^2} - \sum_i |\mathbf{v}_i|^2 \\
&= (n+1)^2 c^2 - (n+1)
\end{aligned}$$

$E \left(1 - \left| \sum_i t_{\pi(i)} \mathbf{v}_i \right|^2 \right)$ ifadesinde (4.11), (4.12) ve (4.13) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
E \left(1 - \left| \sum_i t_{\pi(i)} \mathbf{v}_i \right|^2 \right) &= E \left(1 - \sum_{i \neq j} t_{\pi(i)} t_{\pi(j)} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j - \sum_i t_i^2 \right) \\
&= \left(1 - \sum_i t_i^2 \right) - E \left(\sum_{i \neq j} t_{\pi(i)} t_{\pi(j)} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \right) \\
&= \left(1 - \sum_i t_i^2 \right) - \left(\sum_{i \neq j} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \right) E (t_{\pi(i)} t_{\pi(j)}) \\
&= \left(1 - \sum_i t_i^2 \right) - ((n+1)^2 c^2 - (n+1)) \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i \neq j} t_i t_j \\
&= \left(1 - \sum_i t_i^2 \right) \left(1 + \frac{1 - nc^2 - c^2}{n} \right) \\
&= \left(1 - \sum_i t_i^2 \right) \left(\frac{(n+1)(1-c^2)}{n} \right) \\
&= \frac{n+1}{n} (1-c^2) \left(1 - \sum_i t_i^2 \right)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned}
A &\leq \int_{\Delta[n]} f \left(E \left(1 - \left| \sum_i t_{\pi(i)} \mathbf{v}_i \right|^2 \right) \right) d\mu \\
&= \int_{\Delta[n]} f \left(\frac{n+1}{n} (1-c^2) \left(1 - \sum_i t_i^2 \right) \right) d\mu \quad (4.14)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Eğer $\sigma[n]$ düzgün simpleks ise, (4.14) ifadesinin sol tarafını, $i \neq j$ için $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = -\frac{1}{n}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\Delta[n]} f \left(1 - \left| \sum_i t_i \mathbf{v}_i \right|^2 \right) d\mu = \int_{\Delta[n]} f \left(1 - \sum_{i \neq j} t_i t_j \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j - \sum_i t_i^2 \right) d\mu \\
&= \int_{\Delta[n]} f \left(1 - \sum_i t_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i \neq j} t_i t_j \right) d\mu \\
&= \int_{\Delta[n]} f \left(\left(\frac{n+1}{n} \right) \left(1 - \sum_i t_i^2 \right) \right) d\mu \quad (4.15)
\end{aligned}$$

buluruz. $\sigma[n]$ köşeleri S^{n-1} üzerinde olan düzgün n -simpleks olduğundan $c = 0$ 'dir. Böylece ifadenin sağ tarafını da

$$\int_{\Delta[n]} f \left(\left(\frac{n+1}{n} \right) \left(1 - \sum_i t_i^2 \right) \right) d\mu$$

olarak buluruz. Yani $\sigma[n]$ 'in düzgün simpleks olması durumunda (4.14) ifadesinde eşitlik vardır.

Şimdi de (4.9) ifadesinde eşitliğin sağ tarafı B 'yi hesaplayalım. (4.15) ifadesini $\sigma_o[n]$ 'e ve $g(x) = f((1-c^2)x)$ fonksiyonuna uygulayalım. Burada f konkav fonksiyon olduğundan g 'de konkav fonksiyondur. Böylece

$$\begin{aligned} B &= V(\sigma_o[n])^{-1} \int_{\sigma_o[n]} f[(1-c^2)(1-r^2)] dr \\ &= V(\sigma_o[n])^{-1} \int_{\sigma_o[n]} g(1-r^2) dr \\ &= \int_{\Delta[n]} g \left(\left(\frac{n+1}{n} \right) \left(1 - \sum_i t_i^2 \right) \right) d\mu \\ &= \int_{\Delta[n]} f \left(\left(\frac{n+1}{n} \right) (1-c^2) \left(1 - \sum_i t_i^2 \right) \right) d\mu \end{aligned}$$

olur. Buradan $A \leq B$ olduğu görülmüş olur. Daha önce $\sigma[n]$ 'in düzgün simpleks olması durumunda (4.14) ifadesinde eşitliğin sağlandığını göstermiştik. O halde f fonksiyonunun kesin konkav olması durumunda (4.9) ifadesinde eşitlik varsa $\sigma[n]$ 'in düzgün simpleks olduğunu gösterelim. (4.9) ifadesinde eşitlik olması (4.14) ifadesinde eşitlik olması demektir. Böylece $E \left(1 - \left| \sum_i t_{\pi(i)} \mathbf{v}_i \right|^2 \right) = \left(\frac{n+1}{n} \right) (1-c^2) \left(1 - \sum_i t_i^2 \right)$ olduğundan (4.10) ifadesinde de eşitlik vardır. Böylece

$$A = \int_{\Delta[n]} f \left(1 - \left| \sum_i t_i \mathbf{v}_i \right|^2 \right) d\mu = \int_{\Delta[n]} f \left(E \left(1 - \left| \sum_i t_{\pi(i)} \mathbf{v}_i \right|^2 \right) \right) d\mu$$

elde edilir. Bu eşitliğin olabilmesi için $\forall (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \Delta[n]$ ve $\forall \pi$ permütasyonu için

$$\left| \sum_i t_i \mathbf{v}_i \right|^2 = \left| \sum_i t_{\pi(i)} \mathbf{v}_i \right|^2$$

olmalıdır. Burada özel olarak $(t_0, t_1, \dots, t_n) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$ alırsak

$$\left| \frac{1}{2} \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_1 \right| = \left| \frac{1}{2} \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \mathbf{v}_j \right|, i \neq j$$

$$|\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j|, i \neq j$$

elde ederiz. $i \neq j$ için \mathbf{v}_i ve \mathbf{v}_j 'ye paralelkenar kuralını uygularsak

$$|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|^2 + |\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j|^2 = 2(|\mathbf{v}_i|^2 + |\mathbf{v}_j|^2) = 4$$

$$|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|^2 = 4 - |\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j|^2$$

elde ederiz. $i \neq j$ için $|\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j|$ olduğundan

$$|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|, i \neq j$$

elde ederiz. Bu ise $\sigma[n]$ 'in öklidyen düzgün simpleks olması demektir. ■

4.2 Teorem 4.0.1'in Kanıtının Sonu

Teorem 4.0.1'in $n = 2$ ve $n = 3$ durumlarında doğru olduğunu biliyoruz. Şimdi teoremin bir $n \geq 3$ doğal sayısı için doğru olduğunu kabul edelim ve $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$K_n = \frac{nV(\Omega_o[n+1])}{V(\Omega_o[n])}$$

ve $t \in (0, 1]$ olmak üzere

$$f(t) = t^{-\frac{n}{2}} - K_n t^{-\frac{n+1}{2}}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyonun konkavlığını incelemek için ikinci türevini alalım. Böylece

$$f'(t) = -\frac{n}{2} t^{-\frac{n+2}{2}} - \frac{n+1}{2} K_n t^{-\frac{n+3}{2}}$$

$$f''(t) = -\frac{n(n+2)}{4} t^{-\frac{n+4}{2}} - \frac{(n+1)(n+3)}{4} K_n t^{-\frac{n+5}{2}}$$

$$= \frac{t^{-\frac{n+5}{2}}}{4} \left(n(n+2)t^{\frac{1}{2}} - (n+1)(n+3)K_n \right)$$

elde ederiz. Burada $t^{-\frac{n+5}{2}} > 0$ olduğundan

$$f''(t) < 0 \iff n(n+2)t^{\frac{1}{2}} - (n+1)(n+3)K_n < 0$$

olur. Burada

$$n(n+2)t^{\frac{1}{2}} - (n+1)(n+3)K_n \leq n(n+2) - (n+1)(n+3)K_n$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizliğin sağ tarafının sıfırdan küçük olduğunu göstermek için

$$\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} < K_n$$

olduğunu gösterelim. Önerme 4.1.3'ü kullanarak

$$\frac{n-1}{n} \leq K_n \leq 1$$

elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned} K_n - \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} &\geq \frac{n-1}{n} - \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} \\ &= \frac{n(n-1) - 3}{n(n+1)(n+3)} \end{aligned}$$

elde edilir ve $n \geq 3$ için $n(n-1) > 3$ 'tür. Böylece $K_n - \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} > 0$ 'dır. Böylece f fonksiyonu kesin konkav fonksiyondur.

Şimdi bu f kesin konkav fonksiyonuna ve $\sigma[n]$ öklidyen n -simpleksine Yardımcı Teorem 4.1.4'ü uygulayalım.

$$\begin{aligned} V(\sigma[n])^{-1} \int_{\sigma[n]} f(1-r^2) d\mathbf{r} &\leq V(\sigma_o[n])^{-1} \int_{\sigma_o[n]} f[(1-c^2)(1-r^2)] d\mathbf{r} \\ \frac{V(\sigma_o[n])}{V(\sigma[n])} \int_{\sigma[n]} f(1-r^2) d\mathbf{r} &\leq \int_{\sigma_o[n]} f[(1-c^2)(1-r^2)] d\mathbf{r} \end{aligned}$$

öklidyen simpleksler için $V(\sigma_o[n]) \geq V(\sigma[n])$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_{\sigma[n]} f(1-r^2) d\mathbf{r} &\leq \int_{\sigma_o[n]} f[(1-c^2)(1-r^2)] d\mathbf{r} \\ \int_{\sigma[n]=\varepsilon(\Omega[n+1])} (1-r^2)^{-\frac{n}{2}} d\mathbf{r} - K_n \int_{\sigma[n]=p(\Omega[n])} (1-r^2)^{-\frac{n+1}{2}} d\mathbf{r} &\leq \int_{\sigma_o[n]} f[(1-c^2)(1-r^2)] d\mathbf{r} \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada (4.1) ve (4.2)'yi kullanarak

$$nV(\Omega[n+1]) - K_n V(\Omega[n]) \leq \int_{\sigma_o[n]} f[(1-c^2)(1-r^2)] d\mathbf{r}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliğin sağ tarafını hesaplırsak

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_o[n]} f[(1-c^2)(1-r^2)] d\mathbf{r} &= \int_{\sigma_o[n]} (1-c^2)^{-\frac{n}{2}} (1-r^2)^{-\frac{n}{2}} - K_n (1-c^2)^{-\frac{n+1}{2}} (1-r^2)^{-\frac{n+1}{2}} d\mathbf{r} \\ &= (1-c^2)^{-\frac{n}{2}} nV(\Omega_o[n+1]) - K_n (1-c^2)^{-\frac{n+1}{2}} V(\Omega_o[n]) \\ &\leq (1-c^2)^{-\frac{n}{2}} (nV(\Omega_o[n+1]) - K_n V(\Omega_o[n])) \\ &= 0 \end{aligned}$$

buluruz. Bu ise $nV(\Omega[n+1]) - K_n V(\Omega[n]) \leq 0$ demektir. Burada tümevarım hipotezini kullanarak

$$\begin{aligned} nV(\Omega[n+1]) &\leq K_n V(\Omega[n]) \leq K_n V(\Omega_o[n]) = nV(\Omega_o[n+1]) \\ V(\Omega[n+1]) &\leq V(\Omega_o[n+1]) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise maksimum hacimli hiperbolik $(n+1)$ -simpleksin düzgün ve ideal olması demektir.

Uyarı 4.2.1 Haagerup ve Munkholm n -boyutlu simpleksin maksimalliği üzerine yaptıkları çalışmada $\Omega_o[n]$ ve $\sigma_o[n]$ sırasıyla hiperbolik ve öklidyen düzgün n -simpleksler olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(\Omega_o[n])}{V(\sigma_o[n])} = \sqrt{e}$$

olduğunu gösterdiler. Burada $\sigma_o[n]$ öklidyen simpleksinin kenar uzunluğu

$$\left(2 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

olduğundan

$$V(\sigma_o[n]) = \frac{\sqrt{n+1}}{n!} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$$

bulunur. Ve buradan da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\Omega_o[n]) = \frac{\sqrt{n}}{n!} \sqrt{e}$$

bulunur.

KAYNAKLAR

1. MILNOR, J., Hyperbolic Geometry: The First 150 Years, Bull. Amer. Math. Soc., 6, 9-24, 1982.
2. RATCLIFFE, J. G., Foundations of Hyperbolic Manifolds, Graduate Texts in Math. 149, Springer, New York, 1994.
3. AHLFORS, L. V., Möbius Transformations in Several Dimensions, Ordway Professorship Lectures in Math., Univ. of Minesota, 1981.
4. O'NEILL, B., Elementary Differential Geometry, N.Y. Academic Press, New York, 1966.
5. ANDERSON, J. W., Hyperbolic Geometry, Springer Undergraduate Math. Series, London, 1999.
6. AHLFORS, L. V., Complex Analysis, 3 nd. Ed., McGraw Hill, New York, 1979.
7. STILLWELL, J., Geometry of Surfaces, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1992.
8. STAHL, S., The Poincaré Half Plane, Jones and Barlett, Boston, 1993.
9. BENEDETTI, R. and PETRONIO, C., Lectures on Hyperbolic Geometry, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
10. ROBERTS, A. W. and VARBERG, D. E., Convex Functions, Academic Press, New York, 1973.
11. THURSTON, W. P., The Geometry and Topology of Three-Manifolds, Lecture Notes, Princeton Univ., Princeton, 1979.
12. HAAGERUP, U. and MUNKHOLM, H. J., Simplices of Maximal Volume in Hyperbolic n -Space, Acta Math., 147, 1-11, 1981.