151726

KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SELEKTÖRLERİ VE PARAMETRELENDİRİLMESİ

Ayşe FİDAN

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

HAZİRAN-2000

Son bölümde ise küme değerli dönüşümler için iki parametrelendirilme verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Küme Değerli Dönüşümler, Alttan ve Üstten Yarı Süreklilik, Selektörler, Parametrelendirme

ABSTRACT

Master of Science Thesis

SELECTIONS AND PARAMETRIZATION FOR SET-VALUED MAPS

AYŞE FİDAN

Anadolu University

Graduate School of Natural And Applied Sciences

Mathematics Program

Supervisor: Doç. Dr. Mahide Küçük

2000, Page 70

This study is a collection study that includes the existence of continuous and Lipschitz selections for set-valued maps and the problem of parametrization for set-valued maps.

This study is composed of four parts. In the first part, basic definitions and theorems and properties of convex sets and functions are given.

In the second parts, the existence of continuous selections of upper and lover semicontinuous set-valued maps is searched. At the end of this part continuity property of minimal selections of set-valued maps is given.

In the third part, Steiner point of convex and compact sets is defined, with the help of this definition the existence of Lipschitz selections of closed and convex valued Lipschitz set-valued maps is searched. Furthermore, existence of Caratheodory selections which is often used in control theory is proved.

In the final part, two parametrizations for set-valued maps are given.

Key Words: Set-Valued Maps, Upper and Lover Semicontinuity, Selections, Parametrizations.

ÖNSÖZ

Son yıllarda matematikte küme değerli analiz olarak adlandırılan bir bölüm ortaya çıkmaktadır. Klasik analizde araştırılan fonksiyonların tek değerliliği ve birçok problem için ayrıca diferansiyellenebilir olması gerekmektedir. Kontrol teorinin, diferansiyel oyun teorisinin, matematik modelleştirmenin bazı problemleri araştırılırken, tek değerli olmayan fonksiyonlarla karşılaşılabilir. Yani ortaya öyle dönüşümler çıkabilir ki, bağımsız değişkenin her değerine bir küme karşılık gelebilir. Bu tür fonksiyonlara küme değerli dönüşüm ve matematiğin küme değerli dönüşümlerin özelliklerini araştıran bölümüne küme değerli analiz denir.

Küme değerli analiz kontrol teorinin bazı problemlerinin araştırılmasında doğal bir araç olduğundan bir gelişme içindedir ([12], [17], [19], [20], [29], [32], [33]). Son yıllarda küme değerli analiz matematiğin çağdaş bir bölümüne yönelmiştir ve optimizasyon teorisi, kontrol teorisi, diferansiyel içerme teorisi, matematik modelleştirme gibi alanlarında geniş bir uygulama bulmuştur ([2], [3], [6], [11], [13], [15], [16], [22], [23], [35]). Küme değerli analizin çeşitli problemleri üzerine çok sayıda araştırmalar ve monografiler yayınlanmıştır ([4], [14], [15], [24], [31]).

Bazı durumlarda küme değerli dönüşümlerle uğraşmak yerine onları tek değerli dönüşümlerle ilişkilendirerek kullanmak daha uygun olur. Bu ilişkilendirme iki yolla yapılabilir:

1. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ selektörü bulunabilir; yani

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \text{ için } f(x) \in F(x)$$

koşulunu sağlayan f tek değerli dönüşümü bulunabilir.

2. U kontrol veya parametre uzayı olmak üzere

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \text{ için } F(x) = \{f(u,x)\}_{u \in U}$$

koşulunu sağlayacak biçimde bir $f : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu bulunabilir.

Biz f selektörünün veya (U, f) parametrelendirmesinin F'in süreklilik, Lipschitzlik gibi özelliklerini sağlaması durumunu araştıracağız.

Ayrıca kontrol teoriye uygulamaları düşünerek F ve f'in ölçülebilir bir şekilde zamana bağımlı olduğu durumu da inceleyeceğiz.

Çalışmada araştırılan konulardan biri küme değerli dönüşümlerin sürekli veya Lipschitz selektörlerinin varlığı problemidir. Bu selektörler mümkün olan her zaman yapıcı bir şekilde elde edilmelidir. En doğal yapıcı yol minimal selektör (yani; minimal normlu f selektörü) kullanımına varmaktır. Ancak bu yöntem yarı sürekli dönüşümler için sürekliliği koruyamaz. Bu yöntem sadece kapalı konveks görüntülü sürekli dönüşümler için sürekliliği koruyabilir. Böyle bir selektör ayrıca Caratheodory dönüşümler için Caratheodory'dir.

Küme değerli dönüşüm Lipschitz sürekli ise beklentimizin tersine onun minimal selektörü Lipschitz olmayabilir. Konveks görüntülü Lipschitz küme değerli dönüşümler için Lipschitz selektörü elde etmenin farklı yolları vardır. Akla ilk gelen küme değerli dönüşümlerin Barycentric selektörüdür. Fakat bu yapı uygulama açısından oldukça zordur.

Öte yandan Steiner noktası tanımına bağlı selektör iyi özelliklere sahiptir. Örneğin küme değerli dönüşümün ölçülebilirliğini, sürekliliğini, Lipschitzliğini korur.

Sınırlı olmayan küme değerli dönüşümlere değinmek için Intersection lemma kanıtlanmıştır. Bu konveks küme ile kapalı konveks küme arasındaki ilişkiyi kurmamızı mümkün kılar. Bu lemmayı kullanarak kapalı konveks değerli Lipschitz küme değerli dönüşümler için yapıcı bir yolla Lipschitz selektörü elde edilir.

Diğer bir konu küme değerli dönüşümlerin parametrelendirilmesidir. Küme değerli dönüşümlerin parametrelendirilmesi kontrol teorinin uygulamalarında önemli bir yer tutar. Diferansiyel içerme formunda verilen kontrol veya belirsiz dinamik sistemlerin bazı problemlerinin çözümü parametrelendirme yardımı ile kolaylaştırılabilir ([1], [4], [14], [18], [26], [30]). Bu çalışmada konveks kapalı (aynı zamanda konveks kompakt) değerli Caratheodory ve ölçülebilir küme değerli dönüşümlerin uygun olarak Caratheodory ve ölçülebilir/Lipschitz parametrelendirmesinin mümkün olduğu araştırılmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen Doç.Dr. Mahide KÜÇÜK'e, Doç.Dr. Halik HÜSEYNOV'a, Prof.Dr. Yalçın KÜÇÜK'e ve Arş.Gör. Emrah AKYAR'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\emptyset$	:	Boş küme
$B(x,r)$	:	x merkezli r yarıçaplı kapalı top
$co(A)$	:	A kümesinin konveks zarfı
$c(A,\cdot)$	:	A kümesinin support fonksiyonu
$d(x,A)$	:	x noktasının A kümesine uzaklığı
$\alpha(A,B)$	:	A ile B kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık
$\partial f(x_0)$	:	f fonksiyonunun x_0 noktasındaki subdiferansiyeli
$f_\lambda(\cdot)$	:	f fonksiyonunun Moreau-Yosida yaklaşımı
$\nabla f(x_0)$	:	f fonksiyonunun x_0 noktasındaki graident vektörü
$Graph\ F(\cdot)$	:	F küme değerli dönüşümünün grafiği
$\prod_F(\cdot)$	:	İzdüşüm dönüşümü
$m(F(\cdot))$	:	F küme değerli dönüşümünün minimal dönüşümü
$s_n(K)$	:	K kümesinin Steiner noktası

1 ÖNBİLGİLER

Bu bölümde ileriki bölümlerde gerekli olacak bazı genel bilgiler verilecektir.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

$\mathbb{R}^k$ k-boyutlu Euclidean uzayı olmak üzere

$x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$, $y = (y_1, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k$ için $\langle x, y \rangle$ ile x ve y vektörlerinin iç çarpımını göstereceğiz ve

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$$

olarak tanımlayacağız.

$x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ vektörü için $\|x\|$ ile x vektörünün Euclidean normunu göstereceğiz ve

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

olarak tanımlayacağız.

$A \subset \mathbb{R}^k$, $C \subset \mathbb{R}^k$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$A + C = \{x + y : x \in A, y \in C\}$$
$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$$

$x \in \mathbb{R}^k$, $A \subset \mathbb{R}^k$ için x noktası ile A kümesi arasındaki uzaklığı $d(x, A)$ ile göstereceğiz ve

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

olarak tanımlayacağız.

$A \subset \mathbb{R}^k$, $C \subset \mathbb{R}^k$ için A ile C kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı $\alpha(A, C)$ ile göstereceğiz ve

$$\alpha(A, C) = \max\left\{ \sup_{a \in A} d(a, C), \ \sup_{c \in C} d(c, A) \right\}$$

olarak tanımlayacağız.

B ile merkezi orijinde olan birim küreyi göstereceğiz, yani

$$B = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| \leq 1\}$$

TANIM 1.1.1. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ ile $\mathbb{R}^m$ uzayında verilmiş her bir $x \in \mathbb{R}^m$ noktası için $F(x)$ değeri $\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı bir alt kümesi olan dönüşümü göstereceğiz. O zaman $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ 'e küme değerli dönüşüm denir.

Eğer $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünde $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F(x) \subset \mathbb{R}^n$ kapalı küme oluyorsa $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne kapalı değerli küme değerli dönüşüm denir.

Eğer $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünde $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F(x) \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme ise $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne kompakt değerli küme değerli dönüşüm denir.

Eğer $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünde $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F(x) \subset \mathbb{R}^n$ konveks küme ise $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne konveks değerli küme değerli dönüşüm denir.

Şimdi küme değerli dönüşümün üstten yarı sürekliliğinin tanımını verelim.

TANIM 1.1.2. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşüm, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ olsun. $F(x_0)$ kümesinin her $\mathcal{N}(F(x_0))$ komşuluğu için x_o noktasının

$$\forall x \in \mathcal{N}(x_0) \text{ için } F(x) \subset \mathcal{N}(F(x_0)) \tag{1.1.1}$$

koşulu sağlayan en az bir $\mathcal{N}(x_0)$ komşuluğu varsa $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne x_0 noktasında üstten yarı süreklidir denir.

ÖNERME 1.1.1. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü kompakt değerli (yani $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F(x) \subset \mathbb{R}^n$ kümesi kompakt) olsun. Bu durumda $\|x - x_0\| < \delta(\varepsilon, x_0)$ iken

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B \tag{1.1.2}$$

koşulunu sağlayan $\exists\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ varsa $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne x_0 noktasında üstten yarı süreklidir denir (Burada $B = \{y \in \mathbb{R}^m : \|y\| \leq 1\}$).

Eğer $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü kompakt değerli değil ise o zaman (1.1.2) koşulu sağlanır fakat (1.1.1) koşulu sağlanmayabilir. Bunu bir örnekle gösterelim.

ÖRNEK 1.1.1. $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$F(x) = \left\{(f_1, f_2) \in \mathbb{R}^2 : \ f_1 = x\right\}$$

olmak üzere $F(\cdot) : \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}^2$ küme değerli dönüşümüne bakalım. Açıktır ki $x = 0$ noktasında $\varepsilon = \delta$ olduğunda (1.1.2) koşulu sağlanır.

Buna karşın $F(0)$ kümesinin $\mathcal{N}(F(0)) = \left\{(f_1, f_2) : \ |f_2| < \frac{1}{|f_1|}\right\}$ komşuluğunu aldığımızda (1.1.1) koşulunu sağlayan $\mathcal{N}(0)$ komşuluğu bulunamaz.

Şimdi küme değerli dönüşümlerin alttan yarı sürekliliğinin tanımını verelim.

TANIM 1.1.3. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşüm, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ olsun. Her $y_0 \in F(x_0)$ ve y_0 noktasının her $\mathcal{N}(y_0)$ komşuluğu için x_0 noktasının

$$\forall x \in \mathcal{N}(x_0) \text{ için } F(x) \cap \mathcal{N}(y_0) \neq \emptyset$$

koşulunu sağlayan en az bir $\mathcal{N}(x_0)$ açık komşuluğu varsa o zaman $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne x_0 noktasında alttan yarı süreklidir denir.

Alttan yarı sürekli dönüşümlerin bir karakterizasyonu aşağıda verilmiştir.

ÖNERME 1.1.2. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşüm, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ olsun. $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü x_0 noktasında alttan yarı süreklidir $\Leftrightarrow$ $n \to \infty$ iken $x_n \to x_0$ olacak şekildeki her $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve $y_0 \in F(x_0)$ için $y_n \in F(x_n)$ olmak üzere $n \to \infty$ iken $y_n \to y_0$ olan bir $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi seçilebilir.

Kanıt. $\Rightarrow$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $n \to \infty$ iken $x_n \to x_0$ olan bir dizi ve $y_0 \in F(x_0)$ olsun.

$$r_n = (d(y_0), F(x_n))$$

olan (r_n) dizisini alalım. Bu dizi için iki durum söz konusudur.

i) $n \to \infty$ iken $r_n \to 0$ dır.

ii) (r_n) dizisinin $k \to \infty$ iken $r_{n_k} \to \alpha_* > 0$ olan bir (r_{n_k}) alt dizisi vardır.

Birinci durumda; $r_n = d(y_0, F(y_n)) = \inf_{y \in F(x_n)} \|y - y_0\|$ olur. $\varepsilon_n \downarrow 0$, $\forall n$ için $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ ve $n \to \infty$ iken $\varepsilon_n \to 0$ olan diziyi alalım. İnfimum tanımına göre $\exists y_n \in F(x_n)$ vardır öyle ki $\|y_n - y_0\| < r_n + \varepsilon_n$ olur. O zaman $n \to \infty$ iken $r_n \to 0$ ve $\varepsilon_n \to 0$ olduğundan $y_n \in F(x_n)$ olmak üzere $y_n \to y_0$ olur.

İkinci durumda; $r_k^* = r_{n_k}$, $x_k^* = x_{n_k}$ olsun. O zaman $k \to \infty$ iken $x_k^* \to x_0$, $r_k^* \to \alpha_*$ olur. Dolayısıyla $\exists K_1 > 0$ vardır öyle ki $\forall K \geq K_1$ için $r_k^* > \frac{\alpha_*}{2}$ olur. Buradan $\forall K \geq K_1$ için $r_k^* = d(y_0, F(x_k)) > \frac{\alpha_*}{2}$ olur. O halde

$$\forall K \geq K_1 \text{ için } B\left(y_0, \frac{\alpha_*}{2}\right) \cap F(x_k) = \emptyset$$

bulunur. $\mathcal{N}(y_0) = B\left(y_0, \frac{\alpha_*}{4}\right)$ alalım. Hipotez gereği $\exists \mathcal{N}(x_0)$ vardır öyleki

$$\forall x \in \mathcal{N}(x_0) \text{ için } B\left(y_0, \frac{\alpha_*}{4}\right) \cap F(x) \neq \emptyset$$

olur. $k \to \infty$ iken $x_k \to x_0$ olduğundan $\forall K \geq K_2$ için $x_k \in \mathcal{N}(x_0)$ olan $\exists K_2 > 0$ vardır. O zaman

$$\forall K \geq K_2 \text{ için } B\left(y_0, \frac{\alpha_*}{4}\right) \cap F(x_k) \neq \emptyset$$

olur. $K_* = \max\{K_1, K_2\}$ dersek, $\forall K \geq K_*$ için aynı zamanda

$$B\left(y_0, \frac{\alpha_*}{2}\right) \cap F(x_k) = \emptyset \text{ ve } B\left(y_0, \frac{\alpha_*}{4}\right) \cap F(x_k) \neq \emptyset$$

olur. Bu ise çelişkidir. Yani ikinci durum gerçekleşemez.

$\Leftarrow$: Kabul edelim ki $F(\cdot)$ x_0 noktasında alttan yarı sürekli olmasın. Yani; $\exists y_0 \in F(x_0)$ için $\exists \mathcal{N}(y_0)$ var olsun öyle ki $\forall \mathcal{N}(x_0)$ için $\bar{x} \in \mathcal{N}(x_0)$ iken

$$F(\bar{x}) \cap \mathcal{N}(y_0) = \emptyset$$

olsun. $\mathcal{N}(x_0) = B\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ alalım. O zaman $\forall n$ için $x_n \in B\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ vardır öyle ki

$$F(x_n) \cap \mathcal{N}(y_0) = \emptyset$$

olur. $\mathcal{N}(y_0)$, y_0'ın açık komşuluğu olduğundan $B(y_0, \varepsilon_*) \subset \mathcal{N}(y_0)$ olan $\exists \varepsilon_* > 0$ vardır. O zaman $\forall n$ için

$$F(x_n) \cap B(y_0, \varepsilon_*) = \emptyset$$

olur. $\forall n$ için $x_n \in B\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ olduğundan $n \to \infty$ iken $x_n \to x_0$ olur. O zaman $\forall n$ için

$$d(y_0, F(x_n)) > \frac{\varepsilon_*}{2}$$

elde edilir. $y_0 \in F(x_0)$, $n \to \infty$ iken $x_n \to x_0$ olduğundan $y_n \in F(x_n)$ olmak üzere $y_n \to y_0$ olan hiçbir (y_n) dizisi bulunamaz. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani $F(\cdot)$ x_0 noktasında alttan yarı sürekli olur.

Eğer $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü kompakt değerli ise o zaman aşağıdaki önerme doğru olur.

ÖNERME 1.1.3. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ değerleri kompakt küme değerli dönüşüm, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ olsun. $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü x_0 noktasında alttan yarı süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için

$$\text{Her } \|x - x_0\| \leq \delta(\varepsilon, x_0) \text{ için } F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon B \tag{1.1.3}$$

koşulunu sağlayan en az bir $\delta(\varepsilon, x_0)$ vardır.

Şimdi $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $x_0 \in \mathbb{R}^m$ noktasında sürekliliğinin tanımını verelim.

TANIM 1.1.4. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü eğer x_0 noktasında hem alttan yarı sürekli hem de üstten yarı sürekli ise o zaman $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü x_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 1.1.4, Önerme 1.1.1 ve Önerme 1.1.3'den aşağıdaki önermenin doğruluğu görülebilir.

ÖNERME 1.1.4. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ değerleri kompakt küme değerli dönüşüm, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ olsun. $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün x_0 noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için $\|x - x_0\| < \delta(\varepsilon, x_0)$ iken

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B \quad \text{ve} \quad F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon B \tag{1.1.4}$$

koşullarını sağlayan en az bir $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ vardır. (1.1.4)'deki kapsamlar $\alpha(F(x), F(x_0)) \leq \varepsilon$ eşitsizliği ile denktir. Burada $\alpha(F(x), F(x_0))$, $F(x)$ ve $F(x_0)$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığıdır.

$F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün grafiği $Graph\, F(\cdot)$

$$Graph\, F(\cdot) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : y \in F(x)\}$$

ile tanımlıdır.

Aşağıdaki önerme küme değerli dönüşümler için üstten yarı süreklilikle onun grafiğinin kapalılığı arasındaki ilişkiyi vermektedir.

ÖNERME 1.1.5. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ değerleri kapalı üstten yarı sürekli küme değerli dönüşüm olsun. $i \to \infty$ iken $x_i \to x_0$ ve $\xi_i \in F(x_i)$ olmak üzere $\xi_i \to \xi_0$ olan $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizileri için $\xi_0 \in F(x_0)$'dır. (Yani kapalı değerli üstten yarı sürekli küme değerli dönüşümün grafiği kapalıdır.)

Tersine; $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ kompakt değerli küme değerli dönüşüm, x_0 noktasının komşuluğunda sınırlı ise (yani; $\exists \varepsilon > 0$ için $K \geq 0 \ni \forall x \in S_\varepsilon(x_0)$ için $\|F(x)\| < K$ oluyorsa, $\xi_i \in F(x_i)$ olmak üzere $\forall x_i \to x_0$, $\forall \xi_i \to \xi_0$ için $\xi_0 \in F(x_0)$) $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü x_0 noktasında üstten yarı süreklidir. Burada $\|F(x)\| = \max\{\|f\| : f \in F(x)\}$ dir.

Kompakt değerli küme değerli dönüşümler için kompakt kümelerin görüntüleri de kompakt olur.

ÖNERME 1.1.6. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ değerleri kompakt küme değerli dönüşümü üstten yarı sürekli, $A \subset \mathbb{R}^m$ kompakt alt küme olsun. O zaman $F(A)$, $\mathbb{R}^n$'de kompakt kümedir.

Burada $F(A)$, A kümesinin $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü altındaki görüntüsüdür ve

$$F(A) = \bigcup_{a \in A} F(a)$$

dır.

Sıradaki önerme, üstten yarı sürekli küme değerli dönüşümlerin bileşkesinin de üstten yarı sürekli olduğunu gösterir.

ÖNERME 1.1.7. $F_1 : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$, $F_2 : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^p$ küme değerli dönüşümleri verilsin. Eğer F_1 ve F_2 üstten yarı sürekli (sürekli) ise o zaman $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için

$$F(x) = F_2(F_1(x)) = \bigcup_{y \in F_1(x)} F_2(y)$$

olarak tanımlanan $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^p$ bileşke küme değerli dönüşümü de üstten yarı sürekli (sürekli) olur.

ÖNERME 1.1.8. $F, F_1, F_2 : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ kompakt değerli küme değerli dönüşümleri üstten yarı sürekli (sürekli) ve $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. O zaman

$$F_1(\cdot) + F_2(\cdot), \quad f(\cdot)F(\cdot), \quad F_1(\cdot) \cup F_2(\cdot)$$

üstten yarı sürekli (sürekli) küme değerli dönüşümler olur.

Şimdi $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için üstten ve alttan yarı süreklilik tanımını verelim.

TANIM 1.1.5. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ olsun. Eğer

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

oluyorsa $f(x)$ fonksiyonuna x_0 noktasında alttan yarı sürekli denir. Eğer

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

oluyorsa $f(x)$ fonksiyonuna x_0 noktasında üstten yarı sürekli denir.

Eğer $\forall x \in A \subset \mathbb{R}^m$ için $f(x)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli (üstten yarı sürekli) ise, o zaman $f(x)$ fonksiyonuna A kümesinde alttan yarı sürekli (üstten yarı sürekli) denir.

r-Lipschitz ve lokal Lipschitz küme değerli dönüşümlerin tanımını verelim.

TANIM 1.1.6. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşüm olsun.

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m \text{ için } \alpha\left(F(x_1), F(x_2)\right) \leq r \cdot ||x_1 - x_2||$$

olacak şekilde $r > 0$ sayısı varsa $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne r-Lipschitz denir.

TANIM 1.1.7. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşüm olsun. Eğer $\forall D \subset \mathbb{R}^m$ sınırlı kümesi için

$$\forall x_1, x_2 \in D \text{ için } \alpha\left(F(x_1), F(x_2)\right) \leq \lambda(D) \ ||x_1 - x_2||$$

koşulunu sağlayan $\exists \lambda(D) > 0$ sayısı varsa $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümüne lokal Lipschitz denir.

Şimdi küme değerli analizde kullanılan marjinal fonksiyonun tanımını ve onun özelliklerini verelim.

TANIM 1.1.8. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşüm, $f : Graph\, F(\cdot) \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun.

$$g(x) = \sup_{y \in F(x)} f(x, y)$$

olarak tanımlanan $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonuna marjinal fonksiyon denir.

Aşağıdaki teorem marjinal fonksiyonun alttan ve üstten yarı sürekliliğini verir.

TEOREM 1.1.1. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşüm ve $f : Graph\, F(\cdot) \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun.

1) Eğer $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü ve $f(\cdot)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise o zaman $g(\cdot)$ marjinal fonksiyonu alttan yarı süreklidir.

2) Eğer $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü ve $f(\cdot)$ fonksiyonu üstten yarı sürekli ve $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F(x) \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme ise o zaman $g(\cdot)$ marjinal fonksiyonu üstten yarı süreklidir.

Şimdi $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ve $-f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının supremum ve infimumları arasındaki bağlantıyı gösterelim.

ÖNERME 1.1.9. $f(\cdot):\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ve $A \subset \mathbb{R}^m$ için

$$\inf_{x\in A} f(x) = -\sup_{x\in A} -f(x)$$

dir.

Kanıt. Kabul edelimki $\inf_{x\in A} f(x) = \alpha$ olsun. Eğer $\alpha = -\infty$ ise $\forall N > 0$ için $\exists x_N \in A$ vardır öyle ki $f(x_N) < -N$ olur. O zaman $-f(x_N) > N$ olur. Buradan $\sup_{x\in A} -f(x) = +\infty$. Yani

$$\inf_{x\in A} f(x) = -\sup_{x\in A} -f(x) = -\infty$$

olur. Eğer $\inf_{x\in A} f(x) = \alpha$ ve $\alpha > -\infty$ ise o zaman $\forall x \in A$ için $f(x) \geq \alpha$, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists x_\varepsilon \in A$ vardır öyle ki $f(x_\varepsilon) < \alpha + \varepsilon$ olur. Buradan $\forall x \in A$ için $-f(x) < -\alpha$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists x_\varepsilon \in A$ vardır öyle ki $-f(x_\varepsilon) < -\alpha - \varepsilon$ olur. Bu ise $\sup_{x\in A} -f(x) = -\alpha$ anlamına gelir. O zaman $\alpha = -\sup_{x\in A} -f(x)$ olur. Böylece $\inf_{x\in A} f(x) = -\sup_{x\in A} -f(x)$ olur.

ÖNERME 1.1.10. $f(\cdot):\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0 \in \mathbb{R}^m$ noktasında üstten yarı sürekli (alttan yarı sürekli) olsun. O zaman $-f(x):\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fonksiyonu x_0 noktasında alttan yarı sürekli (üstten yarı sürekli) olur.

TEOREM 1.1.2. $f(\cdot):\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu için

$$Graph\, f(\cdot) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : y = f(x)\}$$

kapalı ve $\bigcup_{x\in\mathbb{R}^m} f(x)$ sınırlı küme ise $f(\cdot):\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyon olur.

Kanıt. $\forall x_* \in \mathbb{R}^m$ için $k \to \infty$ iken $\forall x_k \to x_*$ olan dizisini alalım. Bu durumda $(x_k, f(x_k)) \in Graph\, f(\cdot)$ olur. Dolayısıyla $\forall k = 1,2...$ için $f(x_{k_i}) \in \bigcup_{x\in\mathbb{R}^m} f(x)$ dir. $\bigcup_{x\in\mathbb{R}^m} f(x)$ sınırlı küme olduğundan $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin yakınsak bir $\{f(x_{k_i})\}_{i=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. Kabul edelim ki $i \to \infty$ iken $f(x_{k_i}) \to y_*$ olsun. O zaman $\forall i = 1,2...$ için $(x_{k_i}, f(x_{k_i})) \in Graph\, f(\cdot)$ olur ve $i \to \infty$ iken $(x_{k_i}, f(x_{k_i})) \to (x_*, y_*)$ olur. $Graph\, f(\cdot)$ kapalı olduğundan $(x_*, y_*) \in Graph\, f(\cdot)$ 'dir. $f(\cdot)$ tek değerli fonksiyon olduğu için $y_* = f(x_*)$ dır. Yani; $i \to \infty$ iken $(x_{k_i}, f(x_{k_i})) \to (x_*, f(x_*))$ olur. O halde $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin keyfi yakınsak $\{(x_{k_i}, f(x_{k_i}))\}_{i=1}^{\infty}$ alt dizisi için $i \to \infty$ iken $(x_{k_i}, f(x_{k_i})) \to (x_*, f(x_*))$

olur. $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=1}^{\infty}$ sınırlı olduğundan $k \to \infty$ iken $(x_k, f(x_k)) \to (x_*, f(x_*))$ olur. Aksi taktirde $f\left(x_{k_j}\right) \to z_* \neq f(x_*)$ olan en az bir yakınsak alt dizisi bulunurdu. Oysa yakınsak her alt dizinin yakınsadığı nokta $f(x_*)$ olmalıdır.

Böylece $x_k \to x_*$ iken $f(x_k) \to f(x_*)$ olur. Yani $f(\cdot)$ fonksiyonu x_* noktasında süreklidir. x_* noktası keyfi olduğundan $f(\cdot)$ fonksiyonu sürekli olur.

UYARI. Eğer $\bigcup_{x \in \mathbb{R}^m} f(x)$ kümesi sınırlı olmazsa, o zaman yukarıdaki önerme doğru olmaz. Bunu bir örnekle açıklayalım:

ÖRNEK 1.1.2.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$Graph\, f(\cdot) = \left\{ \left(x, \frac{1}{|x|}\right) \mid x \neq 0 \right\} \cup \{(0,1)\}$$

kümesi kapalıdır. Fakat $\bigcup_{x \in \mathbb{R}^m} f(x) = (0, \infty)$ kümesi sınırlı değildir. $f(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli değildir.

1.2 Konveks Kümelerin ve Fonksiyonların Bazı Özellikleri

Bu kesime konveks kümenin tanımını vererek başlayalım.

TANIM 1.2.1. $K \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer $\forall x, y \in K$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in K$$

oluyorsa, K kümesine konveks küme denir.

Eğer bir küme konveks ise bu kümenin keyfi iki noktası için bu noktaları birleştiren aralığında bu kümenin alt kümesi olacağı açıktır.

Keyfi bir $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için coA ile bu kümenin kapalı konveks zarfını gösteririz. coA kümesi A kümesini içeren en küçük kapalı konveks kümedir.

$F \subset \mathbb{R}^n$ ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $\Pi_F(x)$ kümesini

$$\Pi_F(x) = \{f \in F : \|f - x\| = d(x, F)\}$$

olarak tanımlayalım.

ÖNERME 1.2.1. $F \subset \mathbb{R}^n$ konveks, kapalı küme olsun. Bu durumda $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $\Pi_F(x)$ kümesi tek elemanlıdır.

Kanıt. $x \in F$ için $\Pi_F(x) = \{x\}$ olur. Kabul edelim ki $x \notin F$ ve $x_1 \neq x_2$ olan en az bir $x_1, x_2 \in \Pi_F(x)$ var olsun. O zaman $\|x - x_1\| = \|x - x_2\| = d$ ve $d > 0$ olur.

$x_1, x_2 \in F$ ve F konveks olduğundan

$$x_* = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \in F$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned} \|x - x_*\| &= \left\|x - (\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2)\right\| = \left\|\tfrac{1}{2}(x - x_1) + \tfrac{1}{2}(x - x_2)\right\| \\ &= \tfrac{1}{2}\left\|(x - x_1) + (x - x_2)\right\| \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \|x - x_*\|^2 &= \tfrac{1}{4}\left\langle (x - x_1) + (x - x_2)\ ,\ (x - x_1) + (x - x_2)\right\rangle \\ &= \tfrac{1}{4}\left[\langle x - x_1, x - x_1\rangle + 2\langle x - x_1, x - x_2\rangle + \langle x - x_2, x - x_2\rangle\right] \\ &= \tfrac{1}{4}\left[\|x - x_1\|^2 + \|x - x_2\|^2 + 2\langle x - x_1, x - x_2\rangle\right] \end{aligned}$$

olur.

$\langle x - x_1, x - x_2\rangle \leq \|x - x_1\|\,\|x - x_2\|$ ifadesinde $x - x_1 \neq 0$, $x - x_2 \neq 0$ iken eşitlik durumu $\lambda > 0$ için $(x - x_1) = \lambda(x - x_2)$ olduğu zaman söz konusudur.

Burada $\|x - x_1\| = \|x - x_2\|$ ve $x_1 \neq x_2$ olduğu için $(x - x_1) = \lambda(x - x_2)$ olamaz. O zaman

$$\langle x - x_1, x - x_2\rangle < \|x - x_1\|\,\|x - x_2\|$$

olur. Böylece

$$\|x - x_*\|^2 < \frac{1}{4}\left[d^2 + d^2 + 2 \cdot d \cdot d\right] = d^2$$

bulunur. Buradan

$$\|x - x_*\| < d$$

olur. $x_* \in F$ olduğundan $d(x, F) < d$ 'dir. Bu ise $d(x, F) = d$ olması ile çelişir. Kanıt biter.

Şimdi de $\mathbb{R}^n$ uzayında verilmiş kümenin support fonksiyonunu tanımlayalım.

TANIM 1.2.2. $F \subset \mathbb{R}^n$ kümesi ve $p \in \mathbb{R}^n$ için F kümesinin $c(F, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ support fonksiyonu

$$c(F, p) = \sup_{x \in F} \langle x, p \rangle$$

olarak tanımlanır.

Aşağıda support fonksiyonun bazı özellikleri verilmiştir.

1. $c(F, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu homogen fonksiyondur. Yani, $\forall \lambda \geq 0$ ve $\forall p \in \mathbb{R}^n$ için $c(F, \lambda p) = \lambda c(F, p)$ dir.

2. $c(F, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yarı toplamsaldır. Yani, $\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$ için $c(F, p_1 + p_2) \leq c(F, p_1) + c(F, p_2)$ dir.

Üstten (alttan) yarı sürekli küme değerli dönüşümlerin support fonksiyonunun üstten (alttan) yarı süreklilik ile ilişkisine bakalım.

ÖNERME 1.2.2. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ kompakt konveks değerli küme değerli dönüşümü x_0 noktasında üstten yarı sürekli (alttan yarı sürekli) dir$\Leftrightarrow$ $\forall p \in \mathbb{R}^n$ için $c(F(x), p)$ support fonksiyonu

$$\lim_{x \to x_0} \sup c(F(x), p) \leq c(F(x_0), p) \tag{1.2.1}$$

$$\left(\lim_{x \to x_0} \inf c(F(x), p) \geq c(F(x_0), p) \right) \tag{1.2.2}$$

koşulunu sağlar.

Eğer $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ kompakt değerli küme değerli dönüşüm ve $c(F(x), p)$ support fonkiyonu (2.1) ((2.2)) koşulunu sağlarsa $coF(x)$ üstten yarı sürekli (alttan yarı sürekli) olur.

Eğer $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F(x) \subset \mathbb{R}^n$ konveks ise o zaman $F(x)$ fonksiyonu üstten yarı sürekli (alttan yarı sürekli) olur.

Aşağıda konveks fonksiyonun tanımı verilmiştir.

TANIM 1.2.3. $\forall x_1 \in \mathbb{R}^m$, $\forall x_2 \in \mathbb{R}^m$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

koşulunu sağlayan $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Şimdi vereceğimiz teorem konveks fonksiyonların sürekliliğini karakterize eder.

TEOREM 1.2.1. $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise $\forall x_0 \in \mathbb{R}^m$ için $f(\cdot)$ fonksiyonu süreklidir [32].

Konveks fonksiyon diferansiyellenebilir olmayabilir. Aşağıda konveks fonksiyonun subdiferansiyelinin tanımı verilmiştir.

TANIM 1.2.4. $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve $x_0 \in \mathbb{R}^m$ olsun.

$$\partial f(x_0) = \{p \in \mathbb{R}^n : f(x) - f(x_0) \geq \langle p, x - x_0 \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^m\}$$

kümesine $f(\cdot)$ fonksiyonunun subdiferansiyeli denir [32].

ÖNERME 1.2.3. $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. O zaman $\forall x_0 \in \mathbb{R}^m$ için $\partial f(x_0)$ boş olmayan, konveks, kapalı, sınırlı kümedir [32].

ÖNERME 1.2.4. $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konveks ve $x_0 \in \mathbb{R}^m$ noktasında diferansiyellenebilir ise, o zaman

$$\partial f(x_0) = \nabla \partial f(x_0)$$

olur. Burada $\nabla \partial f(x_0) = \left\{ \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \right\}$ olarak tanımlıdır.

ÖNERME 1.2.5. $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. O zaman $x \to \partial f(x) : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ küme değerli fonksiyonu üstten yarı süreklidir.

Şimdi marjinal fonksiyonun subdiferansiyeli konusunda aşağıdaki teoremi verelim.

TEOREM 1.2.2. $G \subset \mathbb{R}^k$ kompakt bir küme, $\varphi(\cdot) : \mathbb{R}^m \times G \to \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $\varphi(x, \cdot)$ sürekli, $\forall y \in G$ için $\varphi(\cdot, y)$ konveks fonksiyon ve $f(x) = \max_{y \in G} \varphi(x, y)$ olsun. O zaman $\forall x_0 \in \mathbb{R}^m$ için $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun subdiferansiyeli vardır ve

$$\partial f(x_0) = co\{\partial \varphi(x_0, y) : y \in G(x_0)\}$$

olur. Burada $G(x_0) = \left\{ y_0 \in G : \varphi(x_0, y_0) = \max_{y \in G} \varphi(x_0, y) \right\}$ ve $\partial \varphi(x_0, y)$ sabitlenmiş her $y \in G$ için $x \to \varphi(\cdot, y)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki subdiferansiyelidir [16].

Bu teoremden aşağıdaki sonucu çıkartabiliriz.

SONUÇ 1.2.1. $K \subset \mathbb{R}^n$ konveks, kompakt küme, $p \in \mathbb{R}^n$

$$c(K, p) = \max_{x \in K} \langle p, x \rangle$$

olsun. O zaman

$$\partial c(K, p) = \{x_* \in K : \langle p, x_* \rangle = c(K, p)\}$$

olur.

$f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. $\forall \lambda > 0$ için

$$f_\lambda(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^m} \left[f(y) + \frac{1}{2\lambda} \|y - x\|^2 \right] \tag{1.2.3}$$

olarak tanımlanmış $f_\lambda(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $f(\cdot)$ fonksiyonunun *Moreau-Yosido yaklaşımı* denir. Bu tür tanımlanmış $f_\lambda(\cdot)$ fonksiyonu için aşağıdaki teoremler doğrudur.

TEOREM 1.2.3. $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon, $\lambda > 0$, $f_\lambda(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(\cdot)$ fonksiyonunun Moreau-Yosida yaklaşımı olsun. O zaman her bir $x \in \mathbb{R}^m$ için

$$f_\lambda(x) = f(J_\lambda x) + \frac{1}{2\lambda}\|J_\lambda x - x\|^2 \tag{1.2.4}$$

olan tek $J_\lambda x$ vardır. Bu $J_\lambda x$ için

$$(\forall y \in \mathbb{R}^m) \quad \frac{1}{\lambda}\langle J_\lambda x - x, J_\lambda x - y\rangle + f(J_\lambda x) - f(y) \leq 0 \tag{1.2.5}$$

koşulu sağlanır. Tersine eğer $J_\lambda x \in \mathbb{R}^m$ (1.2.5) eşitsizliğini sağlarsa, o zaman $J_\lambda x$ vektörü (1.2.4) eşitliğini sağlayan tek vektördür [5].

TEOREM 1.2.4. $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu, $\lambda > 0$ için $f_\lambda(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(\cdot)$ fonksiyonunun Moreau-Yosida yaklaşımı, her bir $x \in \mathbb{R}^m$ için $J_\lambda x$ (1.2.4) eşitsizliğini sağlayan vektör olsun.

O zaman $f_\lambda(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konveks, diferansiyellenebilir fonksiyondur ve

$$\nabla f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}(x - J_\lambda x) \in \partial f(J_\lambda x)$$

olur. Burada $\nabla f_\lambda(x) = \left\{\frac{\partial f_\lambda(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_\lambda(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_\lambda(x)}{\partial x_n}\right\}$; $\partial f(J_\lambda x)$ $f(\cdot)$ fonksiyonunun $J_\lambda x$ noktasındaki subdiferansiyelidir. Ayrıca $\lambda \to \infty$ iken

$$f_\lambda(x) \to f(x), \quad J_\lambda x \to x$$

olur [5].

Şimdi değerlerini konveks kapalı kümeden alan fonksiyonun integralini karakterize eden bir önerme sunalım.

ÖNERME 1.2.6. $E \subset \mathbb{R}^m$ ölçülebilir, $C \subset \mathbb{R}^n$ konveks kapalı küme, $f(\cdot) : E \to C$ integrallenebilir bir fonksiyon, μ $\mathbb{R}^m$'de verilmiş pozitif ölçüm, $0 < \mu(E) < +\infty$ olsun. O zaman

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E f(\omega)\,\mu(d\omega) \in C$$

olur [37].

Kanıt. Kabul edelim ki

$$a = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f(\omega)\, \mu(d\omega) \notin C$$

olsun. C konveks, kapalı küme, $a \notin C$ olduğundan $\exists \alpha > 0$ vardır öyle ki $B(a, \alpha) \cap C = \emptyset$ olur. Burada $B(a, \alpha) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - a\| \leq \alpha\}$ dir. O zaman konveks kesişmeyen kümelerin ayırma teoremine göre $\exists l \in \mathbb{R}^n$ $(l \neq 0)$ vektörü vardır öyle ki

$$\forall y \in B(a, \alpha) \text{ ve } \forall z \in C \text{ için } \langle l, y \rangle \leq \langle l, z \rangle$$

olur. $B(a, \alpha) = \{a + \alpha \cdot \xi : \|\xi\| \leq 1\}$ ve $\forall \omega \in E$ için $f(\omega) \in C$ olduğundan

$$\forall \omega \in E \text{ için } \max_{\|\xi\| \leq 1} \langle l, a + \alpha \cdot \xi \rangle \leq \langle l, f(\omega) \rangle$$

olur. $\max\limits_{\|\xi\| \leq 1} \langle l, \xi \rangle = \|l\|$ olduğundan

$$\forall \omega \in E \text{ için } \langle l, a \rangle + \alpha \cdot \|l\| \leq \langle l, f(\omega) \rangle$$

olur. Bu eşitsizliği E üzerine integrallersek

$$\begin{aligned} (\langle l, a \rangle + \alpha \cdot \|l\|) \cdot \mu(E) &\leq \int_E \langle l, f(\omega) \rangle \mu(\omega) = \left\langle l, \int_E f(\omega)\, \mu(d\omega) \right\rangle \\ &= \langle l, \mu(E) \cdot a \rangle = \mu(E) \cdot \langle l, a \rangle \end{aligned}$$

olur. $\mu(E) > 0$ olduğundan

$$\langle l, a \rangle + \alpha \cdot \|l\| \leq \langle l, a \rangle$$

ve

$$\alpha \cdot \|l\| \leq 0$$

olur. $\alpha > 0$, $\|l\| > 0$ olduğundan son eşitsizlik doğru olmaz. O zaman kabulümüz yanlıştır, yani

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f(\omega)\, \mu(d\omega) \in C$$

olur.

2 SÜREKLİ SELEKTÖRLER

Bu bölümde alttan ve üstten yarı sürekli küme değerli dönüşümlerin sürekli selektörlerinin varlığı araştırılmıştır. Konveks, kompakt değerli üstten yarı sürekli küme değerli dönüşümlerin sürekli selektörlerinin olmayabileceği, ancak konveks değerli üstten yarı sürekli küme değerli dönüşümlerin ε-yaklaşık sürekli selektörlerinin varlığı kanıtlanmıştır. Son kesimde küme değerli dönüşümlerin minimal selektörlerinin süreklilik özelliği araştırılmıştır.

2.1 Alttan Yarı Sürekli Dönüşümlerin Sürekli Selektörleri

TANIM 2.1.1. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşüm olsun.

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \text{ için } f(x) \in F(x)$$

olan $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün bir selektörü denir.

Alttan yarı sürekli konveks değerli dönüşümlerin sürekli selektörlere sahip olduğunu ifade eden meşhur Michael teoremini kanıtlayacağız. Bu teoremin kanıtı için aşağıdaki önermeye ihtiyaç vardır. Önce bu önermede kullanacağımız birimin sürekli parçalanışının tanımını ve onunla ilgili teoremi verelim.

TANIM 2.1.2. $i = 1, 2, ..., l$ için $V_i \subset \mathbb{R}^n$ açık kümeler, $K \subset \mathbb{R}^n$ ve $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{l} V_i$ olsun. $i = 1, 2, ..., l$ için

$$\forall x \in K \text{ iken } \sum_{i=1}^{l} \alpha_i(x) = 1 \ , \ \alpha_i(x) \geq 0 \text{ ve } support(\alpha_i) \subset V_i$$

olacak şekilde $\alpha_i : K \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonları vardır. Burada $support(\alpha_i) = \{x \in K \ : \alpha_i(x) \neq 0\}$ dir. $i = 1, 2, ..., l$ için $\alpha_i(\cdot)$ sürekli fonksiyonlarına da K kümesinin V_i açık kümelerine göre birimin sürekli parçalanışı denir.

TEOREM 2.1.1. Eğer $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme ise, o zaman K kümesi için birimin sürekli bir parçalanışı vardır [1].

ÖNERME 2.1.1. $A \subset \mathbb{R}^m$ kompakt alt küme, $F : A \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ alttan yarı sürekli kapalı konveks değerli küme değerli dönüşüm olsun. O zaman $\forall$ $\varepsilon > 0$ ve $x \in A$ için

$$f_\varepsilon(x) \in B(F(x), \varepsilon)$$

olacak şekilde f_ε sürekli fonksiyonu vardır.

Kanıt. $F(\cdot)$ alttan yarı sürekli olduğundan, $\forall$ $x \in A$, $y_x \in F(x)$ ve $\mathcal{N}(y_x) = B(y_x, \varepsilon)$ için $\exists U_x$ açık komşuluğu vardır öyle ki

$$\forall\ z \in U_x \text{ için } B(y_x, \varepsilon) \cap F(z) \neq \emptyset$$

olur.

A kompakt olduğundan sonlu $\{U_{x_i}\}_{i \in I}$ ailesi ile A 'yı örtebiliriz. Burada $I = \{1, 2, ...r\}$ dır.

Birimin sürekli parçalanışını teoremine göre U_{x_i} dışında $a_i = 0$ ve

$$\forall\ x \in A \ \text{ için } \sum_{i=1}^{r} a_i(x) = 1$$

olacak şekilde $a_i : A \longrightarrow [0, 1]$ sürekli fonksiyonlarının $\{a_i\}_{i=1}^{r}$ ailesi vardır. Şimdi

$$f_\varepsilon(x) := \sum_{i=1}^{r} a_i(x) y_{x_i}$$

fonksiyonunu tanımlıyalım. a_i fonksiyonları sürekli olduğundan f_ε süreklidir.

$$I(x) := \{i = 1, 2, ..., r : a_i(x) > 0\}$$

olsun. $x \in A$ için $\sum_{i=1}^{r} a_i(x) = 1$ olduğundan $\forall x \in A$ için $I(x) \neq \emptyset$ olur.

$x \in A$, $i \in I(x)$ için $a_i(x) > 0$ olur. Keyfi $x^* \in A$ alıp sabitleyelim. O zaman $\forall i \in I(x^*)$ için $x \in U_{x_i}$ olur. Ayrıca $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü alttan yarı süreklidir. Dolayısıyla

$$\forall i \in I(x^*) \ \text{ için } \ B(y_{x_i}, \varepsilon) \cap F(x^*) \neq \emptyset$$

olur. Yani $\forall i \in I(x^*)$ için $y_{x_i} \in B(F(x^*), \varepsilon)$ olur. $B(F(x^*), \varepsilon)$ konveks küme ve $\forall i \notin I(x)$ için $a_i(x) = 0$ olduğundan y_{x_i}'nin konveks kombinasyonu da buraya ait olmalıdır. Yani

$$\sum_{i=1}^{r} a_i(x^*) y_{x_i^*} \in B(F(x^*), \varepsilon)$$

olur. $f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i(x^*) y_{x_i^*}$ ve $x^* \in A$ keyfi olduğundan

$$f_\varepsilon(x) \in B(F(x), \varepsilon)$$

olur. Kanıt biter. Şimdi Michael teoremini kanıtlayabiliriz.

TEOREM 2.1.2. (Michael Teoremi) $A \subset \mathbb{R}^m$ kompakt küme, $F : A \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ kapalı konveks değerli alttan yarı sürekli küme değerli dönüşüm olsun. O zaman $F(\cdot)$'in sürekli bir selektörü vardır [27] [28].

Kanıt. Önce,

$$\begin{cases} (i)\ \forall x \in A \ \text{ için } d(u_k(x), F(x)) < 2^{-(k+3)} \\ (ii)\ \forall x \in A \ \text{ için } \|u_k(x) - u_{k-1}(x)\| < 2^{-(k+1)} \end{cases} \tag{2.1.1}$$

koşullarına uyan $u_k : A \longrightarrow R^n$, $k = 1, 2, \ldots$ sürekli fonksiyonların dizisini tümevarımla kuralım.

· $k = 1$ için $\varepsilon = \frac{1}{16}$ alırsak

$$d(u_1(x), F(x)) < \frac{1}{16}$$

olacak şekilde bir $u_1(x)$ sürekli fonksiyonu vardır.

· k için böyle bir fonksiyon kurduğumuzu kabul edelim. $k + 1$ için bu tür fonksiyonu kuralım. Bunun için

$$\forall x \in A \ \text{ için } \ F_{k+1}(x) = F(x) \cap intB\left(u_k(x), 2^{-(k+3)}\right)$$

olacak şekilde $F_{k+1}(\cdot)$ küme değerli dönüşümünü tanımlayalım.

$F_{k+1}(x)$ konvekstir ve boştan farklıdır. Ayrıca F_{k+1} küme değerli dönüşümü alttan yarı süreklidir: Gerçekten; $p \in \mathbb{N}$ için $x_p \longrightarrow x$ ve $y \in F_{k+1}(x)$ için $F(\cdot)$ alttan yarı sürekli olduğundan $y_p \longrightarrow y$ olacak şekilde $y_p \in F(x_p)$ vardır. $y \in F_{k+1}(x)$ olduğundan $y \in intB\left(u_k(x), 2^{-(k+3)}\right)$ olur. O zaman

$$\|y - u_k(x)\| = \alpha < 2^{-(k+3)}$$

olur. $\varepsilon = 2^{-(k+3)} - \alpha$ olarak alalım. $\varepsilon > 0$ ve $p \to \infty$ olduğunda $x_p \to x$, $y_p \to y$ olur. $u_k(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyon olduğu için $\varepsilon > 0$ iken $p(\varepsilon) > 0$ sayısı $p > p(\varepsilon)$ olduğunda

$$||y_p - y|| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad ||u_k(x_p) - u_k(x)|| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde vardır. O halde $p > p(\varepsilon)$ olduğunda

$$\begin{aligned} ||y_p - u_k(x_p)|| &\leq ||y_p - y|| + ||y - u_k(x)|| + ||u_k(x) - u_k(x_p)|| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} + \alpha = \varepsilon + \alpha = 2^{-k-3} \end{aligned}$$

olur. Yani $y_p \in intB\left(u_k(x_p), 2^{-(k+3)}\right)$ olur. Aynı zamanda $y_p \in F(x_p)$ olduğundan $y_p \in F_{k+1}(x_p)$ olur. Yani $F_{k+1}(\cdot) : A \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü alttan yarı sürekli olur.

Şimdi (i)'nin doğruluğunu görmeye çalışalım. $F_{k+1}(\cdot)$ alttan yarı sürekli olduğundan Önerme 2.1.1'e göre sürekli $u_{k+1}(x) \in B(F_{k+1}(x), 2^{-(k+4)})$ fonksiyonu bulunur. O zaman $\forall x \in A$ için

$$d(u_{k+1}(x), F_{k+1}(x)) < 2^{-(k+4)}$$

olur. $\forall x \in A$ için $F_{k+1}(x) \subset F(x)$ olduğundan

$$d(u_{k+1}(x), F(x)) < 2^{-(k+4)}$$

olduğu görülür.

Şimdi de ikinci koşulun doğruluğunu görelim. $d(u_{k+1}(x), F_{k+1}(x)) < 2^{-(k+4)}$ ve $F_{k+1}(x) = F(x) \cap intB\left(u_k(x), 2^{-(k+3)}\right)$ olduğundan

$$d(u_{k+1}(x), intB\left(u_k(x), 2^{-(k+3)}\right)) < 2^{-(k+4)}$$

olur. Buradan

$$\|u_{k+1}(x) - u_k(x)\| < 2^{-(k+4)} + 2^{-(k+3)} < 2^{-(k+2)}$$

olur. Böylece ikinci koşul sağlanmış olur.

(2.1.1)'den $\forall x \in A$ için $d(u_k(x), F(x)) < 2^{-(k+3)}$ olmak üzere $C(A, \mathbb{R}^n)$ uzayında $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu görülür.

Burada $C(A,\mathbb{R}^n)$, $A \subset \mathbb{R}^m$ kompakt kümesinde verilmiş sürekli fonksiyonlar uzayıdır ve $z(\cdot) \in C(A,\mathbb{R}^n)$, $y(\cdot) \in C(A,\mathbb{R}^n)$ için $\|z(\cdot) - y(\cdot)\|_{C(A,\mathbb{R}^n)} = \max\limits_{x \in A} \|z(x) - y(x)\|_{\mathbb{R}^n}$ dir. $C(A,\mathbb{R}^n)$ uzayı tam uzay olduğundan $u_k(\cdot) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonları $k \rightarrow \infty$ olduğu zaman düzgün olarak sürekli bir $u_*(\cdot) \in C(A,\mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna yakınsar. O zaman (2.1.1)(i) eşitsizliğinden ve $F(x)$ kümesinin kapalı olmasından dolayı $\forall x \in A$ için $u_*(x) \in F(x)$ olur. O zaman $u_*(\cdot) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $F(\cdot) : A \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ küme değerli dönüşümünün sürekli selektörü olur. Böylece teoremin kanıtı tamamlanır.

SONUÇ 2.1.1. $A \subset \mathbb{R}^m$ kompakt küme, $F : A \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ kapalı konveks değerli alttan yarı sürekli küme değerli dönüşüm, $K \subset A$ ve $\varphi(\cdot) : K \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\forall x \in K \quad \text{için} \quad \varphi(x) \in F(x)$$

olan sürekli selektör olsun. O zaman $\varphi(\cdot)$, $F(\cdot)$'in A kümesinde tanımlanmış sürekli bir selektörüne genişletilebilir. Yani $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü A kümesinde

$$\forall x \in K \quad \text{için} \ \varphi(x) = f(x)$$

ile tanımlı sürekli bir $f(\cdot)$ sürekli selektörüne sahiptir.

Özel olarak bu $\forall \bar{x} \in A$, $\forall \, \bar{y} \in F(\bar{x})$ için $f(\bar{x}) = \bar{y}$ olmak üzere $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sürekli bir $f(\cdot)$ selektörünün varlığını gösterir.

Kanıt. Önce $K \subset A$ kümesinin kompakt olduğunu varsayalım ve

$$G(x) = \begin{cases} F(x) & x \in A \setminus K \\ \{\varphi(x)\} & x \in K \end{cases}$$

küme değerli dönüşümünü tanımlayalım. $G(\cdot) : A \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün alttan yarı sürekli olduğunu gösterelim. $\forall x_* \in A$, $y_* \in G(x_*)$ ve $m \rightarrow \infty$ iken $x_m \rightarrow x_*$ olan diziyi alalım.

Burada $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi için üç durum söz konusudur:

i) $\exists M > 0$ var öyle ki $\forall m > M$ için $x_m \in K$

ii) $\exists M > 0$ var öyle ki $\forall m > M$ için $x_m \in A \setminus K$

iii) $\forall M > 0$ için $x_{m_1} \in K$ ve $x_{m_2} \in A \setminus K$ olan $\exists m_1 > M$, $\exists m_2 > M$ vardır.

Birinci durumda $\forall m > M$ için $x_m \in K$, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme, $m \to \infty$ iken $x_m \to x_*$ olduğu için $x_* \in K$ olur. O zaman $\forall m > M$ için $G(x_m) = \{\varphi(x_m)\}$ ve $G(x_*) = \{\varphi(x_*)\}$ olduğundan $y_* = \varphi(x_*)$ olur. $m \to \infty$ iken $\varphi(x_m) \to \varphi(x_*) = y_*$ olduğu için $\varphi(x_m) \in G(x_m)$ olmak üzere $m \to \infty$ iken $\varphi(x_m) \to \varphi(x_*) = y_*$ dizi olur.

İkinci durumda $\forall m > M$ için $G(x_m) = F(x_m)$ olur. Çünkü $\forall m > M$ için $x_m \in A \setminus K$ dir. $G(x_*) \subset F(x_*)$ olduğu için $y_* \in F(x_*)$ olur. O zaman $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü alttan yarı sürekli olduğu için $y_m \to y_*$ olacak şekilde $\exists y_m \in F(x_m) = G(x_m)$ dizisi vardır.

Üçüncü durumda K kompakt küme, $\forall M > 0$ için $m > M$ olmak üzere $x_m \in K$ bulunduğundan ve $x_m \to x_*$ olduğundan $x_* \in K$ olduğunu anlarız. O zaman $G(x_*) = \{\varphi(x_*)\}$ ve $y_* = \varphi(x_*)$ olur. $\mathbb{N}_1 = \{m \in \mathbb{N} : x_m \in A \setminus K\}$ kümesini tanımlayalım. O zaman $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}_1}$ dizisi için $i \to \infty$ iken $x_i \to x_*$ olur. $i \in \mathbb{N}_1$ olduğunda $G(x_i) = F(x_i)$. $x \rightsquigarrow F(x)$ küme değerli dönüşüm alttan yarı sürekli ve $y_* = \varphi(x_*) \in F(x_*)$ olduğu için $i \to \infty$ iken $y_i \to y_* = \varphi(x_*)$ olan $\exists y_i \in F(x_i)$ dizisi vardır. Şimdi $m = 1, 2...$ için

$$z_m = \begin{cases} \varphi(x_m) & m \notin \mathbb{N}_1 \\ y_m & m \in \mathbb{N}_1 \end{cases}$$

tanımlayalım. O zaman $z_m \in G(x_m)$, $\forall m = 1, 2...$ için $m \to \infty$ iken $z_m \to \varphi(x_*) = G(x_*)$ olur. Dolayısıyla $x \rightsquigarrow G(x)$ küme değerli dönüşümü $\forall x_* \in A$ noktasında alttan yarı sürekli olur.

Eğer $K \subset A$ kümesi kompakt değil ise, o zaman $K_* = cl\, K$ kümesi kompakt olur. $\forall x \in K_* \setminus K$ için $\varphi_*(x) = \lim\limits_{y \to x, y \in K} \varphi(y)$ tanımlayalım. K_* kümesi kompakt olduğu için $\varphi_*(\cdot) : K_* \to \mathbb{R}^n$ ($\forall x \in K$ için $\varphi_*(x) = \varphi(x)$) sürekli fonksiyonunun A kümesi üzerine genişletilmişi vardır. Yani, öyle bir $\psi(\cdot) : A \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonu vardır öyle ki, $\forall x \in K_*$ için $\psi(x) = \varphi_*(x)$ olur. $\forall x \in K$ için $\varphi_*(x) = \varphi(x)$ olduğundan $\forall x \in K$ için $\psi(x) = \varphi(x)$ olur. Kanıt biter.

2.2 Üstten Yarı Sürekli Dönüşümlerin Selektörleri

Üstten yarı sürekli küme değerli dönüşümler kapalı ve konveks değerli olduğunda genellikle sürekli selektörlere sahip değildir. Aşağıdaki örnek bu konuyu açıklamaktadır:

ÖRNEK 2.2.1. $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$F(x) = \begin{cases} \{-1\} & , x < 0 \\ [-1, 1] & , x = 0 \\ \{1\} & , x > 0 \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $F(\cdot) : \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ küme değerli dönüşümü üstten yarı süreklidir fakat alttan yarı sürekli değildir. $F(\cdot)$'in $\mathbb{R}$'de tanımlı herhangi bir sürekli $f(\cdot)$ selektörü bulunamaz.

Üstten yarı sürekli dönüşümlerin sürekli selektörleri her zaman bulunamıyabilir; bunun için üstten yarı sürekli dönüşümlerin sürekli yaklaşık selektörlerinin varlığını inceleyeceğiz.

TANIM 2.2.1. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşüm olsun. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu verilsin. $f(\cdot)$'in grafiği $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün grafiğinin ε komşuluğunda ise, yani

$$\varepsilon > 0 \text{ için } Graph\, f(\cdot) \subset B(Graph\, F(\cdot), \varepsilon)$$

ise $f(\cdot)$'e $F(\cdot)$'in ε yaklaşık selektörü denir.

Şimdi üstten yarı sürekli dönüşümlerin sürekli yaklaşık selektörlerinin varlığını gösteren Cellina teoremini ifade edelim.

TEOREM 2.2.1. $A \subset \mathbb{R}^m$ kompakt alt küme, $F : A \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ üstten yarı sürekli, konveks değerli küme değerli dönüşüm olsun.

O zaman $\forall\, \varepsilon > 0$ için

$$Graph\, f_\varepsilon(\cdot) \subset B(Graph\, F(\cdot), \varepsilon)$$

ve $\forall\, x \in A$ için $f_\varepsilon(x) \in co\left(\bigcup_{x \in A + \varepsilon B} F(x)\right)$ olan $\exists\, f_\varepsilon : A \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz fonksiyonu vardır [9] [10].

Kanıt. $\varepsilon > 0$ olsun. $F(\cdot)$ üstten yarı sürekli olduğundan $\forall\, x \in A$ için $\exists 0 < \delta_\varepsilon < 2\varepsilon$ vardır öyle ki

$$\forall\, y \in B(x, \delta_x) \text{ için } F(y) \subset F(x) + \frac{\varepsilon}{2} B$$

olur. $\{intB(x, \frac{\delta_x}{4})\}_{x \in A}$ yuvarlarının ailesi A'yı örter. A kompakt olduğundan $I = \{1, 2, ..., k\}$ sonlu kümesi vardır öyle ki $\{intB\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{4}\right)\}_{i \in I}$ sonlu ailesi de A'yı örter.

$$\delta_i = \delta_{x_i}$$

diyelim. Birimin Lipschitz parçalanışına göre $\forall i \in I$ için $intB\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{4}\right)$ dışında $a_i(x) = 0$ ve $\forall\, x \in A$ için $\sum\limits_{i \in I} a_i(x) = 1$ olacak şekilde $a_i : A \longrightarrow [0,1]$ Lipschitz fonksiyonlarının bir ailesi vardır.

$\forall i \in I$ için $y_i \in F\left(intB\left(x_i, \frac{\delta_i}{4}\right)\right)$ alalım ve

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i \in I} a_i(x)\, y_i$$

olacak şekilde $f_\varepsilon : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunu tanımlayalım. $a_i(\cdot) : A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları Lipschitz olduğundan $f_\varepsilon(\cdot)$ Lipschitz olur. Ayrıca $y_i \in F\left(intB\left(x_i, \frac{\delta_i}{4}\right)\right)$ ve $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} intB\left(x_i, \frac{\delta_i}{4}\right)$ ve y_i'lerin konveks kombinasyonu $f_\varepsilon(x)$ olduğundan $\forall x \in A$ için $f_\varepsilon(x) \in coF\left(A + \frac{\delta_*}{2} B\right)$ olur. Burada $\delta_* = \max\limits_{i \in I} \delta_i$, $F(E) = \bigcup\limits_{x \in E} F(x)$ dir. $\forall x \in A$ için $0 < \delta_x < 2\varepsilon$ olduğundan $\delta_* < 2\varepsilon$ olur. O zaman $f_\varepsilon(x) \in coF(A + \varepsilon B)$. yani $f_\varepsilon(x) \in co \bigcup\limits_{x \in A + \varepsilon B} F(x)$ olur.

Acaba $f_\varepsilon(\cdot)$ istenilen yaklaşım mıdır? Yani, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$Graph\, f_\varepsilon(\cdot) \subset B\left(Graph\, F(\cdot), \varepsilon\right)$$

olur mu? Bunun için $x \in A$ seçelim.

$$I(x) := \{i \in I : a_i(x) \neq 0\}$$

indeks ailesini tanımlayalım.

$\forall\, i \in I(x)$ için $a_i(x) \neq 0$ ve *support* $a_i \subset intB\left(x_i, \frac{\delta_i}{4}\right)$ olduğundan $\forall i \in I(x)$ için $x \in intB\left(x_i, \frac{\delta_i}{4}\right)$ olur. Burada *support* $a_i = \{x \in A : a_i(x) \neq 0\}$ dir. O zaman $\forall i, j \in I(x)$ için

$$d(x_i, x_j) \leq d(x, x_i) + d(x, x_j) \leq \frac{(\delta_i + \delta_j)}{4}$$

olur. $k \in I(x)$'i $\delta_k = \max\limits_{i \in I(x)} \delta_i$ olacak şekilde alalım.O zaman son eşitsizlikten

$$\begin{aligned} \forall i \in I(x) \text{ için } d(x_i, x_k) &\leq d(x_i, x) + d(x, x_k) \\ &< \tfrac{\delta_i}{4} + \tfrac{\delta_k}{4} < \tfrac{\delta_k}{2} \end{aligned}$$

olur. Böylece $\forall i \in I(x)$ için $x_i \in B\left(x_k, \frac{\delta_k}{2}\right)$ olur. O halde $\forall i \in I(x)$ için $B\left(x_i, \frac{\delta_i}{4}\right) \subset B(x_k, \delta_k)$ dır. O zaman $\forall i \in I(x)$ için

$$F\left(B\left(x_i, \frac{\delta_i}{4}\right)\right) \subset F\left(B(x_k, \delta_k)\right.$$

olur. $\forall y \in B(x, \delta_x)$ için $F(y) \subset F(x) + \frac{\varepsilon}{2}B$ olduğundan $\forall i \in I(x)$ için

$$F\left(B\left(x_i, \frac{\delta_i}{4}\right)\right) \subset F\left(B(x_k, \delta_k) \subset F(x_k) + \frac{\varepsilon}{2}B\right.$$

olacaktır. $\forall i \in I(x)$ için $y_i \in F\left(B\left(x_i, \frac{\delta_i}{4}\right)\right)$ olduğundan $\forall i \in I(x)$ için $y_i \in F(x_k) + \frac{\varepsilon}{2}B$ olur.

$f(x) = \sum\limits_{i \in I} a_i(x) y_i = \sum\limits_{i \in I(x)} a_i(x) y_i$; $\sum\limits_{i \in I} a_i(x) = \sum\limits_{i \in I(x)} a_i(x) = 1$ ve $F(x_k) + \frac{\varepsilon}{2}B$ konveks küme olduğundan

$$f_\varepsilon(x) \in F(x_k) + \frac{\varepsilon}{2}B$$

olur.

Şimdi

$$\|z_k - f_\varepsilon(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekildeki $z_k \in F(x_k)$ alalım. O zaman $(x_k, z_k) \in Graph\, F(\cdot)$ olur. Buradan $x \in A$ için $0 < \delta_x < 2\varepsilon$ olduğundan $\delta_k = \delta_{x_k} < \frac{\varepsilon}{2}$ olur ve

$$\begin{aligned} d\left((x, f_\varepsilon(x)), (x_k, z_k)\right) &\leq d(x, x_k) + \|z_k - f_\varepsilon(x)\| \\ &< \tfrac{\delta_k}{4} + \tfrac{\varepsilon}{2} < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Böylece $Graph\, f_\varepsilon(\cdot) \subset B(Graph\, F(\cdot), \varepsilon)$ olur. Çünkü $(x, f_\varepsilon(x)) \in Graph\, f_\varepsilon(\cdot)$ için $(x, f_\varepsilon(x)) \in B(Graph\, F(\cdot), \varepsilon)$ olan $\exists (x_k, z_k) \in Graph\, F(\cdot)$ vardır. $x \in A$ keyfi olduğundan kanıt biter.

2.3 Minimal Selektörler

$F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşüm olsun.

$$m(F(x)) := \left\{ u \in F(x) : \|u\| = \inf_{y \in F(x)} \|y\| \right\} \tag{2.3.1}$$

olarak minimal dönüşümü tanımlayalım.

Eğer $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F(x)$ kapalı ve konveks bir küme ise o zaman Önerme 1.2.1'e göre minimal dönüşüm tek değerlidir ve bu durum minimal selektör olarak isimlendirilir.

Doğal olarak ortaya çıkan soru "Minimal selektörün süreklilik özelliği var mıdır?" sorusudur.

Aşağıda $F(\cdot)$ sürekli ve kompakt konveks değerli ise minimal selektörün sürekli olduğunu kanıtlayacağız.

Kompakt ve konveks değerler aldığında $F(\cdot)$'in üstten yarı sürekliliği (veya alttan yarı sürekliliği) aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi minimal selektörün sürekliği için yeterli değildir.

ÖRNEK 2.3.1. $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$F(x) := \begin{cases} \{2\} & x \neq 0 \\ [1,2] & x = 0 \end{cases}$$

olmak üzere $F(\cdot) : \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ küme değerli dönüşümünü düşünelim. $F(\cdot)$ dönüşümü konveks kompakt değerli üstten yarı süreklidir. O zaman

$$m(F(x)) = \begin{cases} \{2\} & , x \neq 0 \\ \{1\} & , x = 0 \end{cases}$$

olur. Açıkca görüldüğü gibi $m(F(x))$ sıfırda sürekli değildir.

ÖRNEK 2.3.2. $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$F(x) := \begin{cases} [0,1] & x \neq 0 \\ \{1\} & x = 0 \end{cases}$$

olmak üzere $F(\cdot) : \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ küme değerli dönüşümünü düşünelim. $F(\cdot)$ dönüşümü kompakt konveks değerli ve alttan yarı süreklidir. Fakat $F(\cdot)$ 'in minimal selektörü

$$m(F(x)) = \begin{cases} \{1\} & ,x = 0 \\ \{0\} & ,x \neq 0 \end{cases}$$

sıfırda sürekli değildir.

Biz, $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün sürekli minimal selektörlerinin varlığını araştıracağız. Önce uzaklık ve norm fonksiyonlarının süreklilik özelliklerini inceleyelim.

ÖNERME 2.3.1. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşüm ve

$$||F(x)|| = \sup_{y \in F(x)} ||y||$$

olsun. Ozaman

1. $F(\cdot)$ alttan yarı sürekli (üstten yarı sürekli) ise $x \to d(0, F(x))$ fonksiyonu üstten yarı sürekli (alttan yarı sürekli) olur.

2. $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü alttan yarı sürekli (üstten yarı sürekli) ve $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F(x)$ sınırlı ise, o zaman $x \to ||F(x)||$ fonksiyonu alttan yarı sürekli (üstten yarı sürekli) olur.

3. $F(\cdot)$ sürekli ise $d(0, F(\cdot))$ sürekli ve ek olarak $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F(x)$ sınırlı ise $||F(\cdot)||$ sürekli olur.

4. $F(\cdot)$ c-Lipschitz ise $d(0, F(\cdot))$ c-Lipschitz , ek olarak $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F(x)$ sınırlı ise $||F(\cdot)||$ c-Lipschitz olur (c-Lipschitz c-sabiti ile Lipschitz anlamında kullanılmıştır).

Kanıt. **1.** $x \to d(0, F(x))$ fonksiyonunun alttan ve üstten yarı sürekliliğini inceleyelim. Kabul edelim ki $F(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü alttan yarı sürekli olsun. O zaman Önerme 1.1.9'a göre $d(0, F(x)) = \inf_{f \in F(x)} \|f\| = -\sup_{f \in F(x)} -\|f\|$ olur. $-\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyon, $F(\cdot)$ alttan yarı sürekli küme değerli dönüşüm olduğu için $x \to \sup_{f \in F(x)} -\|f\|$ fonksiyonu

Teorem 1.1.1'e göre alttan yarı sürekli olur. O zaman Önerme 1.1.9'a göre $d(0, F(x)) = -\sup_{f \in F(x)} - \|f\|$ fonksiyonu üstten yarı sürekli olur.

Kabul edelim ki $F(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü üstten yarı sürekli olsun. $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ alalım ve sabitleyelim. $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü üstten yarı sürekli olduğu için $\bar{x}$ noktasının $\exists \mathcal{N}_\varepsilon$ komşuluğu vardır öyle ki $\forall x \in \mathcal{N}_\varepsilon$ için

$$F(x) \subset F(\bar{x}) + \varepsilon B$$

olur. O zaman $\forall x \in \mathcal{N}_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} d(0, F(x)) &= \inf_{f \in F(x)} \|f\| \\ &\geq \inf_{f \in F(\bar{x}), b \in B} \|f + \varepsilon b\| \\ &\geq \inf_{f \in F(\bar{x}), b \in B} [\|f\| - \varepsilon \|b\|] \\ &= \inf_{f \in F(\bar{x})} \|f\| + \inf_{b \in B} -\varepsilon \|b\| \\ &= d(0, F(\bar{x})) - \sup_{b \in B} \varepsilon \|b\| \\ &= d(0, F(\bar{x})) - \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Yani, $\forall \varepsilon > 0$ için $\bar{x}$ noktasının $\exists \mathcal{N}_\varepsilon$ komşuluğu vardır öyle ki $\forall x \in \mathcal{N}_\varepsilon$ için

$$d(0, F(x)) \geq d(0, F(\bar{x})) - \varepsilon$$

olur. Buradan

$$\liminf_{x \to \bar{x}} d(0, F(x)) \geq d(0, F(\bar{x}))$$

olur. Bu ise $x \to d(0, F(x))$ fonksiyonunun $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ noktasında alttan yarı sürekli olması anlamına gelir. $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ keyfi olduğundan $x \to d(0, F(x))$ fonksiyonu alttan yarı sürekli olur.

2. $\|F(x)\| = \sup_{f \in F(x)} \|f\|$, $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olduğu için Teorem 1.1.1'e göre $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünü alttan yarı sürekli olduğunda $x \to \|F(x)\| : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun alttan yarı sürekliliği

anlaşılır. Eğer $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü üstten yarı sürekli ve $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F(x)$ sınırlı küme ise o zaman Teorem 1.1.1'den $x \to \|F(x)\| : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu üstten yarı süreklidir.

3. Eğer $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü sürekli ise, o zaman aynı zamanda alttan ve üstten yarı süreklidir. O zaman **(1)**'e göre $x \to d(0, F(x))$ fonksiyonu hem alttan hemde üstten yarı sürekli olur. Yani $x \to d(0, F(x))$ fonksiyonu sürekli olur.

Eğer $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü sürekli ve $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F(x)$ sınırlı ise, o zaman **(2)**'ye göre $x \to \|F(x)\|$ fonksiyonu hem alttan yarı sürekli hemde üstten yarı sürekli olur. Yani $x \to \|F(x)\|$ fonksiyonu sürekli olur.

4. Eğer $F(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü c-sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlarsa. o zaman $\forall x_1 \in \mathbb{R}^m$, $\forall x_2 \in \mathbb{R}^m$ için

$$\max\left\{\sup_{f\in F(x_1)} d(f, F(x_2)), \sup_{\varphi\in F(x_2)} d(\varphi, F(x_1))\right\} \leq c\,\|x_1 - x_2\|$$

olur. Buradan

$$\forall f \in F(x_1) \text{ için } d(f, F(x_2)) \leq c\,\|x_1 - x_2\| \tag{2.3.2}$$

$$\forall \varphi \in F(x_2) \text{ için } d(\varphi, F(x_1)) \leq c\,\|x_1 - x_2\| \tag{2.3.3}$$

olur. Şimdi $d(0, F(x_2)) - d(0, F(x_1))$ farkına bakalım. Kabul edelim ki $d(0, F(x_1)) = \alpha \geq 0$; yani $\inf\limits_{f\in F(x_1)} \|f\| = \alpha$ olsun. O zaman $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists f_\varepsilon \in F(x_1)$ vardır öyle ki

$$\|f_\varepsilon\| < \alpha + \varepsilon$$

olur. $\alpha = d\,(0, F\,(x_1))$ olduğundan

$$d(0, F(x_1)) > \|f_\varepsilon\| - \varepsilon \tag{2.3.4}$$

olur. $f_\varepsilon \in F(x_1)$ olduğu için (2.3.2)'den

$$d(f_\varepsilon, F(x_2)) = \inf_{\varphi\in F(x_2)} \|f_\varepsilon - \varphi\| \leq c\,\|x_1 - x_2\|$$

olur. O zaman $\varepsilon > 0$ için $\exists \varphi_\varepsilon \in F(x_2)$ vardır öyle ki

$$\|f_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\| < c\,\|x_1 - x_2\| + \varepsilon \tag{2.3.5}$$

olur. $\varphi_\varepsilon \in F(x_2)$ olduğundan

$$d(0, F(x_2)) = \inf_{\varphi \in F(x_2)} \|\varphi\| \leq \|\varphi_\varepsilon\| \tag{2.3.6}$$

olur. (2.3.4), (2.3.5) ve (2.3.6) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} d(0, F(x_2)) - d(0, F(x_1)) &\leq \|\varphi_\varepsilon\| - \|f_\varepsilon\| + \varepsilon \\ &\leq \|\varphi_\varepsilon - f_\varepsilon\| + \varepsilon \\ &< c\,\|x_2 - x_1\| + 2\varepsilon \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

olur. Benzer şekilde

$$d(0, F(x_1)) - d(0, F(x_2)) < c\,\|x_2 - x_1\| + 2\varepsilon \tag{2.3.8}$$

olur. (2.3.7) ve (2.3.8) eşitsizliklerinden

$$|d(0, F(x_2)) - d(0, F(x_1))| < c\,\|x_2 - x_1\| + 2\varepsilon$$

bulunur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan

$$|d(0, F(x_2)) - d(0, F(x_1))| \leq c\,\|x_2 - x_1\|$$

olur. Bu ise $x \longrightarrow d(0, F(x)) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun c-sabiti ile Lipschitz olması anlamına gelir.

Şimdi kabul edelim ki $F(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü c-sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlayan ve $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F(x) \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı küme olan bir dönüşüm olsun. O zaman $x \longrightarrow \|F(x)\| : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun da c-sabiti ile Lipschitz koşulunu sağladığını gösterelim.

$\forall x_1 \in \mathbb{R}^m, \forall x_2 \in \mathbb{R}^m$ için $\|F(x_2)\| - \|F(x_1)\|$ farkına bakalım. $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F(x)$ sınırlı küme olduğundan $\|F(x_2)\| < +\infty$ ve $\|F(x_1)\| < +\infty$ olur. Kabul edelim ki $\|F(x_2)\| = \alpha$ olsun. O zaman $\alpha < +\infty$ olur ve $\sup_{\varphi \in F(x_2)} \|\varphi\| = \alpha$ olur. Buradan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \varphi_\varepsilon \in F(x_2)$ vardır öyle ki $\|\varphi_\varepsilon\| > \alpha - \varepsilon$ dır. Yani,

$\alpha < \|\varphi_\varepsilon\| + \varepsilon$ olur. $\alpha = \|F(x_2)\|$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \varphi_\varepsilon \in F(x_2)$ vardır öyle ki

$$\|F(x_2)\| < \|\varphi_\varepsilon\| + \varepsilon \tag{2.3.9}$$

olur. $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü c-sabiti ile Lipschitz olduğundan (2.3.2) ve (2.3.3) eşitsizliklerini sağlar. O zaman $\varphi_\varepsilon \in F(x_2)$ olduğundan (2.3.3)'den

$$d(\varphi_\varepsilon, F(x_1)) \leq c\,\|x_1 - x_2\|$$

yani

$$\inf_{f \in F(x_1)} \|\varphi_\varepsilon - f\| \leq c\,\|x_1 - x_2\|$$

olur. O zaman $\varepsilon > 0$ için $\exists f_\varepsilon \in F(x_1)$ vardır öyle ki

$$\|\varphi_\varepsilon - f_\varepsilon\| < c\,\|x_1 - x_2\| + \varepsilon \tag{2.3.10}$$

olur. $f_\varepsilon \in F(x_1)$ olduğundan $\|f_\varepsilon\| \leq \|F(x_1)\|$ ve

$$-\|F(x_1)\| \leq -\|f_\varepsilon\| \tag{2.3.11}$$

olur. O zaman (2.3.9), (2.3.10), (2.3.11) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \|F(x_2)\| - \|F(x_1)\| &< \|\varphi_\varepsilon\| + \varepsilon - \|f_\varepsilon\| \\ &\leq \|\varphi_\varepsilon - f_\varepsilon\| + \varepsilon \\ &< c\,\|x_1 - x_2\| + 2\varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$\|F(x_2)\| - \|F(x_1)\| < c\,\|x_2 - x_1\| + 2\varepsilon \tag{2.3.12}$$

olur. Benzer şekilde

$$\|F(x_1)\| - \|F(x_2)\| < c\,\|x_1 - x_2\| + 2\varepsilon \tag{2.3.13}$$

olur. (2.3.12) ve (2.3.13) eşitsizliklerinden $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\big|\|F(x_1)\| - \|F(x_2)\|\big| < c\,\|x_1 - x_2\| + 2\varepsilon \tag{2.3.14}$$

bulunur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan (2.3.14)'den dolayı

$$|\|F(x_1)\| - \|F(x_2)\|| \leq c\,\|x_1 - x_2\|$$

olur. Bu ise $x \longrightarrow \|F(x)\| : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun c-sabiti ile Lipschitz olması demektir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Şimdi minimal selektörün sürekliliğini gösteren teoremi ifade edelim.

TEOREM 2.3.1. $F : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ grafiği kapalı alttan yarı sürekli küme değerli dönüşüm olsun. O zaman $m(F(\cdot)) : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün grafiği kapalıdır.

Ek olarak eğer $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F(x)$ konveks küme, $\bigcup_{x\in\mathbb{R}^m} m(F(x))$ sınırlı küme ise, minimal selektör süreklidir [4].

Kanıt. $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün grafiği kapalı olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F(x)$ kapalı olur. $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F(x)$ kapalı olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $m(F(x)) \neq \emptyset$ dur. $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $m(F(x)) \neq \emptyset$ olduğu için $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $\|m(F(x))\| = d(0, F(x))$ olur. $F(\cdot)$ alttan yarı sürekli olduğundan Önerme 2.3.1'e göre $x \longrightarrow d(0, F(x)) = \|m(F(x))\|$ dönüşümü üstten yarı süreklidir. Bunun sonucunda

$$x \rightsquigarrow B(0, \|m(F(x))\|)$$

küme değerli dönüşümünün grafiği kapalıdır. Gerçekten, $k = 1, 2..$ için $(x_k, y_k) \in Graph\,(B(0, ||m(F(\cdot))||))$ alalım öyle ki $k \longrightarrow \infty$ iken $(x_k, y_k) \longrightarrow (x_*, y_*)$ olsun. $(x_*, y_*) \in Graph\,(B(0, ||m(F(\cdot))||))$ olduğunu gösterelim.

$\forall k = 1, 2...$ için $(x_k, y_k) \in Graph\,(B(0, ||m(F(\cdot))||))$ olduğundan

$$\|y_k\| \leq ||m(F(x_k))|| \tag{2.3.15}$$

olur. $x \longrightarrow ||m(F(x_k))||$ fonksiyonu üstten yarı sürekli olduğundan

$$\lim_{x\longrightarrow x_*} \sup ||m(F(x_k))|| \leq ||m(F(x_*))||$$

olur. $k \to \infty$ iken $x_k \to x_*$, $y_k \to y_*$ olduğundan (2.3.15)'e göre

$$\|y_*\| = \lim_{k\to\infty} \|y_k\| \leq \lim_{k\to\infty} \sup \|m(F(x_k))\| \leq \lim_{x\to x_*} \sup \|m\,(F\,(x))\| \leq \|m(F(x_*))\|$$

ve $y_* \in B(0, \|m(F(x_*))\|)$ olur. O halde

$$(x_*, y_*) \in Graph\, B(0, \|m(F(\cdot))\|)$$

olur. Yani $Graph\,(\,B(0, \|m(F(\cdot))\|))$ kapalı kümedir. $Graph\,(F\,(\cdot))$'nin kapalı küme olduğunu biliyoruz. Bu durumda

$$Graph\, F(\cdot) \cap B(0, \|m(F(\cdot))\|) \;= Graph\, F(\cdot) \cap Graph\, B(0, \|m(F(\cdot))\|)$$

olduğundan

$$x \rightsquigarrow F(x) \cap B(0, \|m(F(x))\|)$$

dönüşümünün grafiği kapalıdır.

$$m(F(x)) = F(x) \cap B(0, \|m(F(x))\|)$$

olduğundan $Graph\; m(F(x))$ kapalıdır.

$F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü kapalı, konveks değerli olduğu zaman Önerme 1.2.1'e göre $m(F(x))$ kümesi tek değerlidir. Yani $m(F(x)) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tek değerli fonksiyondur. $\bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^m} m(F(x))$ sınırlı, $Graph\;(m(F(\cdot))$ kapalı olduğu için Teorem 1.1.2'ye göre $m(F(\cdot)) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu sürekli olur.

Bu teoremden kapalı, konveks değerli küme değerli sürekli dönüşümlerin minimal selektörünün sürekli olduğu elde edilir.

SONUÇ 2.3.1. $F\,(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ kapalı konveks değerli, sürekli küme değerli dönüşüm olsun. Yani $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F(x) \subset \mathbb{R}^n$ kapalı, konveks küme, $x \to F(x)$ küme değerli dönüşümü sürekli olsun. O zaman minimal selektör süreklidir.

Kanıt. $F\,(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü sürekli olduğundan Önerme 2.3.1'e göre $x \to d\,(0, F\,(x))$ fonksiyonu süreklidir. Keyfi $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ seçip sabitleyelim. O zaman $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $\|m\,(F\,(x))\| = d\,(0, F\,(x))$, $x \to$

$d(0, F(x))$ sürekli fonksiyon olduğundan $\varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ vardır öyle ki $\forall y \in B(\bar{x}, \delta)$ için

$$0 \leq \|m(F(y))\| \leq \|m(F(\bar{x}))\| + \varepsilon$$

dur. Buradan ise $\{\|m(F(y))\|\}_{y \in B(\bar{x}, \delta)}$ kümesinin sınırlı olması elde edilir. Burada

$$B(\bar{x}, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - \bar{x}\| \leq \delta\}$$

dır. Buradan ise $\{m(F(y))\}_{y \in B(\bar{x}, \delta)}$ kümesinin sınırlı oluşu elde edilir. O zaman Teorem 2.3.1'e göre $x \to m(F(x))$ dönüşümü $\bar{x}$ noktasında süreklidir. $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ keyfi olduğu için sonuç kanıtlanmış olur.

3 LİPSCHİTZ TİPİ SELEKTÖRLER

3.1 Konveks Kompakt Kümelerin Steiner Noktaları

Küme değerli dönüşümlerin Lipschitz selektörlerini kurmak ve Caratheodory küme değerli dönüşümleri parametrelendirmek için yeterince düzgün bir metotla $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt konveks kümesinin bir $s(K) \in K$ noktasının seçimine ihtiyaç duyarız. Bu kesime K kompakt konveks kümesi için bu tür seçimlerin işlemi ile başlıyoruz.

$K \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı konveks kompakt alt küme için Steiner noktasını (bazen *curvature centoid* olarak ta isimlendirilir) $s_n(K)$ ile gösterip

$$\begin{cases} s_1(K) = \frac{c(K,+1)}{2} - \frac{c(K,-1)}{2} & , n = 1 \\ s_n(K) = n \int\limits_{\Sigma^{n-1}} p \cdot c(K,p)\omega(dp) & , n \geq 2 \end{cases}$$

olarak tanımlayacağız [21]. Burada Σ^{n-1} $\mathbb{R}^n$ 'de birim kürenin yüzeyini gösterir, $c(K,\cdot)$ K'nin support fonksiyonudur ve ω $\omega(\Sigma^{n-1}) = 1$ koşulunu sağlayan Lebesgue ölçümle orantılı olarak Σ^{n-1}'de ölçümdür.

$c(K,p) = c(-K,-p)$ olduğundan $s_n(K) = -s_n(-K)$ olur. Aynı zamanda support fonksiyonu K'ya göre toplamsal olduğundan $s_n(K)$ dönüşümü doğrusaldır; yani

$$\forall\ K, L \subset R^n \text{ konveks, kompakt ve } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ için}$$
$$s_n(\lambda K + \mu L) = \lambda s_n(K) + \mu s_n(L)$$

dir.

Aynı zamanda $K = -K$ yani K simetrik ise $s_n(K) = 0$ olduğu açıktır.

Aşağıda $s_n(K) \in K$ olduğunu ve onun Hausdorff uzaklığa göre Lipschitz olduğunu göreceğiz.

Başka bir alternatif olarak, Steiner noktası K kompakt konveks kümesinin support fonksiyonunun subdiyeransiyeli kullanılarak tanımlanabilir. Eğer $K \subset \mathbb{R}^n$ konveks, kompakt küme ise bu kümenin $c(K,p) = \max\limits_{x \in K} \langle x, p \rangle$ support fonksiyonunun subdiferansiyeli

$$\partial c(K,p) = \{x \in K : \langle p, x \rangle = c(K,p)\}$$

olur.

$m(\partial c(K,p))$ olarak minimal normlu $\partial c(K,p)$ 'nin elemanlarını yani

$$m(\partial c(K,p)) = \left\{ u \in \partial c(K,p) : \|u\| = \min_{v \in \partial c(K,p)} \|v\| \right\}$$

yi göstereceğiz.

$c(K,\cdot)$ fonksiyonu sürekli olduğundan Teorem 0.1.3'e göre $\partial c(K,\cdot)$ subdiferansiyeli ölçülebilirdir.

$m(\partial c(K,p))$ $\partial c(K,p)$ üzerinde 0 'ın izdüşümü ve $\partial c(K,p)$ konveks kompakt küme olduğundan $m(\partial c(K,p))$ tek değerli dönüşümü de ölçülebilirdir (Sonuç 0.1.1). Bu yüzden aşağıda ifade edilen teorem anlamlıdır.

TEOREM 3.1.1. $\mathcal{K}$, $\mathbb{R}^n$ 'nin boştan farklı konveks kompakt alt kümelerinin bir ailesi olsun. O zaman

$$\forall K \in \mathcal{K} \text{ için } s_n(K) = \frac{1}{Vol(B^n)} \int_{B^n} m(\partial c(K,p))dp$$

dir. Burada $Vol(B^n)$, $B^n \subset \mathbb{R}^n$ olan n-boyutlu birim kürenin ölçümüdür.

Sonuç olarak, $\forall K \in \mathcal{K}$ için $s_n(K) \in K$ olur. Ayrıca

$$\forall K, L \in \mathcal{K} \text{ için } \|s_n(K) - s_n(L)\| \leq n \cdot \alpha(K,L)$$

dir. Yani $s_n(\cdot) : \mathcal{K} \to \mathbb{R}^n$ dönüşümü n sabiti ile Lipschitzdir [34].

Kanıt. Keyfi $K \subset \mathbb{R}^n$ alalım.

$\cdot$ $n = 1$ olduğu zaman $K \subset \mathbb{R}$ konveks, kompakt kümedir ve tanıma göre

$$s_1(K) = \frac{1}{2}c(K,+1) - \frac{1}{2}c(K,-1)$$

dir.

$$y = c(K,+1), \quad z = -c(K,-1)$$

olacak şekilde y, z alalım. $K \subset \mathbb{R}$ konveks, kompakt küme olduğundan

$$y = c(K,+1) = \max_{x \in K} 1 \cdot x = \max_{x \in K} x = x_*$$

ve $x_* \in K$ olur. O zaman $y \in K$ olur. Aynı şekilde $K \subset \mathbb{R}$ konveks, kompakt küme olduğundan

$$z = -c(K,-1) = -\max_{x\in K} -1 \cdot x = \min_{x \in K} x = x^*$$

ve $x^* \in K$ olur. O zaman $z \in K$ ve $z \leq y$ olur. Böylece $n = 1$ olduğu zaman

$$s_1(K) = \frac{1}{2}\left[c\left(K,+1\right) - c(K,-1)\right]$$

olduğundan $s_1(K) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, $y \in K$, $z \in K$ olur. $K \subset \mathbb{R}$ konveks küme iken

$$s_1(K) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \in K$$

olur.

Şimdi

$$\frac{1}{Vol(B_1)} \int_{B_1} m(\partial c\left(K,p\right))dp$$

integraline bakalım. $n = 1$ olduğundan $B^n = [-1,1]$, $Vol(B^n) = 2$ olur. $K \subset \mathbb{R}$, $c(K,+1) = y$, $-c(K,-1) = z$ olduğundan $\forall p \in (0,1]$ için $c(K,p) = p \cdot c(K,+1) = p \cdot y$ ve $\forall p \in [-1,0)$ için $c(K,p) = |p| \cdot c(K,-1) = -|p| \cdot z = p \cdot z$ olur. $p = 0$ için $c(K,0) = 0$ dır. O zaman

$$c(K,p) = \begin{cases} p \cdot y & ,p \in (0,1] \\ 0 & ,p = 0 \\ p \cdot z & ,p \in [-1,0) \end{cases}$$

ve $z \leq y$ olduğundan

$$\partial c(K,p) = \begin{cases} y & ,p \in (0,1] \\ [z,y] & ,p = 0 \\ z & ,p \in [-1,0) \end{cases}$$

olur. O halde

$$m(\partial c(K,p)) = \begin{cases} y & ,p \in (0,1] \\ z & ,p \in [-1,0] \end{cases}$$

dir. Böylece $K \subset \mathbb{R}$ konveks, kompakt kümesi için

$$\frac{1}{Vol(B^n)} \int_{B^n} m(\partial c\,(K,p))dp = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 ydp + \int_{-1}^0 zdp\right] = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$$

olur. $s_1(K) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ olduğundan

$$s_1(K) = \frac{1}{Vol(B^n)} \int_{B^n} m(\partial c\,(K,p))dp \tag{3.1.1}$$

olur.

Şimdi de $K \subset \mathbb{R}$, $L \subset \mathbb{R}$ konveks, kompakt kümeler olsun. $n = 1$ olduğunda $s_1(K) = \frac{1}{2}c(K,+1) - \frac{1}{2}c(K,-1)$, $s_1(L) = \frac{1}{2}c(L,+1) - \frac{1}{2}c(L,-1)$ olduğu için

$$|s_1(K) - s_1(L)| \leq \frac{1}{2}|c\,(K,+1) - c\,(L,+1)\,| + \frac{1}{2}|c\,(K,-1) - c\,(L,-1)\,| \tag{3.1.2}$$

olur.

$$\begin{aligned} c(K,+1) - c(L,+1) &= \max_{x\in K} x - \max_{w\in L} w = y + \min_{w\in L} -w = \min_{w\in L}(y-w) \\ &\leq d(y,L) \leq \sup_{x\in K} d(x,L) \leq \alpha\,(K,L) \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

olur.

$$\begin{aligned} c(L,+1) - c(K,+1) &= \max_{w\in L} w - \max_{x\in K} x = w_* + \min_{x\in K} -x = \min_{x\in K}(w_* - x) \\ &\leq d(w_*,K) \leq \sup_{w\in L} d(w,K) \leq \alpha(L,K) \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

olur. (3.1.3) ve (3.1.4)'den

$$|c(K,+1) - c(L,+1)| \leq \alpha(K,L) \tag{3.1.5}$$

olur. Benzer olarak

$$|c(K,-1) - c(L,-1)| \leq \alpha(K,L) \tag{3.1.6}$$

olur. O zaman (3.1.2), (3.1.5), (3.1.6)'dan

$$|s_1(K) - s_2(L)| \leq \alpha\,(K,L) \tag{3.1.7}$$

olur.

· $n \geq 2$ olduğunu kabul edelim. K konveks, kompakt kümesinin $c(K,\cdot):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ support fonksiyonunun

$$\lambda > 0 \text{ için } \; c_\lambda(K,p) = \min_{q\in\Sigma^{n-1}} \left[c(K,q) + \frac{1}{2\lambda}\|p-q\|^2 \right] \leq c(K,p) \qquad (3.1.8)$$

Moreau-Yosida yaklaşımı Teorem 1.2.4'e göre sürekli diferansiyellenebilir fonksiyondur ($p \in \Sigma^{n-1}$). O zaman Stoke's Teoremine göre

$$\int_{B^n} \nabla c_\lambda(K,p)dp = \int_{\Sigma^{n-1}} c_\lambda(K,p)\cdot p \cdot \mu(dp) \qquad (3.1.9)$$

olur. Burada B^n $\mathbb{R}^n$ uzayında birim küre, Σ^{n-1} birim kürenin yüzeyi; yani birim çember, μ birim çemberde verilmiş Lebesgue ölçümüdür. $p_* \in \mathbb{R}^n$, $f(\cdot):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ için $\nabla f(p_*)$.

$$\nabla f(p_*) = \left\{ \frac{\partial f(p_*)}{\partial p_1}, \frac{\partial f(p_*)}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial f(p_*)}{\partial p_n} \right\}$$

ile tanımlı gradient vektörüdür.

$\|K\|$'yı $\|K\| = \max_{x\in K}\|x\|$ ile tanımlıyalım. Aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu gösterelim:

$$p \in \Sigma^{n-1} \text{ için } \; -\|K\| \leq \inf_{p\in\Sigma^{n-1}} c(K,p) \leq c_\lambda(K,p) \leq \|K\| \qquad (3.1.10)$$

$c(K,p)$'nin tanımına göre

$$|c(K,p)| = \left| \max_{x\in K} \langle p,x\rangle \right| = \max_{x\in K} |\langle p,x\rangle| \leq \max_{x\in K} (\|p\|\cdot\|x\|)$$

dır. $p \in \Sigma^{n-1}$ olduğu için

$$\forall p \in \Sigma^{n-1} \text{ için } \; |c(K,p)| \leq \max_{x\in K}\|x\| = \|K\|$$

ve

$$\forall p \in \Sigma^{n-1} \text{ için } \; -\|K\| \leq c(K,p) \leq \|K\| \qquad (3.1.11)$$

olur. (3.1.8)'e göre $c_\lambda(K,p) \leq c(K,p)$ dir. O zaman (3.1.11)'den

$$\forall p \in \Sigma^{n-1} \text{ için } \; c_\lambda(K,p) \leq \|K\| \qquad (3.1.12)$$

olur. Öte yandan $\forall q \in \Sigma^{n-1}$ için $-\|K\| \leq c(K,q)$ olduğu için

$$-\|K\| \leq \inf_{q\in\Sigma^{n-1}} c(K,q) \tag{3.1.13}$$

olur. Şimdi $\inf_{p\in\Sigma^{n-1}} c(K,p) \leq c_\lambda(K,p)$ olduğunu gösterelim: $\forall\, p \in \Sigma^{n-1}$ ve $q \in \Sigma^{n-1}$ için

$$c(K,q) \leq c(K,q) + \frac{1}{2\lambda}\|p-q\|^2$$

doğru olduğundan

$$\inf_{q\in\Sigma^{n-1}} c(K,q) \leq \inf_{q\in\Sigma^{n-1}} \left[c(K,q) + \frac{1}{2\lambda}\|p-q\|^2\right] = c_\lambda(K,p) \tag{3.1.14}$$

olur. (3.1.12), (3.1.13), (3.1.14) eşitsizliklerinden (3.1.10) eşitsizliğinin gerçekliği görülür. Teorem 1.2.4'e göre $c_\lambda(K,\cdot)$ fonksiyonu $\lambda \to 0^+$ iken noktasal olarak $c(K,q)$ fonksiyonuna yakınsar. O zaman

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \int_{\Sigma^{n-1}} p\cdot c_\lambda(K,p)\mu(dp) = \int_{\Sigma^{n-1}} p\cdot c(K,p)\mu(dp) \tag{3.1.15}$$

olur. Diğer taraftan Teorem 1.2.3 ve Teorem 1.2.4'e göre

$$\nabla c_\lambda(K,p) \in \partial c(K,p_\lambda) \subset K$$

olur ve $\forall p \in B^n$ için $\lambda \to 0^+$ iken $\nabla c_\lambda(K,p) \to m(\partial c(K,p))$ olur. Burada $p_\lambda \in \Sigma^{n-1}$ ve

$$c(K,p_\lambda) + \frac{1}{2\lambda}\|p_\lambda - p\|^2 = \inf_{q\in\Sigma^{n-1}} \left[c(K,q) + \frac{1}{2\lambda}\|p-q\|^2\right]$$

koşulunu sağlayan elemanıdır. O zaman $\nabla c_\lambda(K,\cdot)$ fonksiyonu ölçülebilir ve $\|K\|$ ile sınırlı olduğundan

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \int_{B^n} \nabla c_\lambda(K,p)dp = \int_{B^n} m(\partial c(K,p))dp \tag{3.1.16}$$

olur. O zaman (3.1.9), (3.1.15), (3.1.16) eşitliklerinden

$$\int_{B^n} m(\partial c(K,p))dp = \int_{\Sigma^{n-1}} p\cdot c(K,p)\mu(dp)$$

olduğu elde edilir. $\omega(dp) = \frac{\mu(dp)}{\mu(\Sigma^{n-1})}$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\omega(\Sigma^{n-1}) = 1$ ve

$$\frac{1}{Vol(B^n)} \int\limits_{B^n} m(\partial c(K,p))dp = \frac{\omega(\Sigma^{n-1})}{Vol(B^n)} \int\limits_{\Sigma^{n-1}} p \cdot c(K,p)\omega(dp)$$

olur. $\omega(\Sigma^{n-1}) = n \cdot Vol(B^n)$ olduğu için (3.1.17)'den

$$\frac{1}{Vol(B^n)} \int\limits_{B^n} m(\partial c(K,p))dp = n \cdot \int\limits_{\Sigma^{n-1}} p \cdot c(K,p)\omega(dp) \tag{3.1.18}$$

olur. $s_n(K)$ tanımına göre

$$s_n(K) = n \cdot \int\limits_{\Sigma^{n-1}} p \cdot c(K,p)\omega(dp)$$

dır. O zaman (3.1.18)'den

$$s_n(K) = \frac{1}{Vol(B^n)} \int\limits_{B^n} m(\partial c(K,p))dp \tag{3.1.19}$$

olur. $\forall p \in B^n$ için $m(\partial c(K,p)) \in K$, $K \subset \mathbb{R}^n$ konveks kompakt küme olduğundan Önerme 1.2.6'e göre

$$\frac{1}{Vol(B^n)} \int\limits_{B^n} m(\partial c(K,p))dp \subset K \tag{3.1.20}$$

olur. (3.1.19), (3.1.20)'den $s_n(K) \in K$ olduğu görülür. Böylece teoremin birinci kısmı kanıtlanmış olur.

Şimdi $s_n(\cdot)$ fonksiyonunun n-sabiti ile Lipschitz koşulunu sağladığını gösterelim. $\forall K \in \mathcal{K}$ ve $\forall L \in \mathcal{K}$ konveks, kompakt kümelerini alalım. Keyfi $p \in \Sigma^{n-1}$ vektörünü alıp sabitleyelim. Kabul edelim ki $y_* \in L$

$$c(L,p) = \max_{y \in L} \langle p, y \rangle = \langle p, y_* \rangle \tag{3.1.21}$$

eşitliğini sağlasın. O zaman $\exists x_* \in K$ vardır öyle ki

$$\|x_* - y_*\| \leq \alpha(K,L) \tag{3.1.22}$$

ve

$$\langle p, x_* \rangle \leq \max_{x \in K} \langle p, x \rangle = c(K,p) \tag{3.1.23}$$

(3.1.21), (3.1.22), (3.1.23)'den

$$\begin{aligned} c(L,p) - c(K,p) &= \max_{y \in L} \langle p, y \rangle - \max_{x \in K} \langle p, x \rangle \\ &\leq \langle p, y_* \rangle - \langle p, x_* \rangle = \langle p, y_* - x_* \rangle \\ &\leq \|p\| \cdot \|y_* - x_*\| = \|y_* - x_*\| \\ &\leq \alpha(K, L) \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

olur. Benzer şekilde

$$c(K,p) - c(L,p) \leq \alpha(K, L) \tag{3.1.25}$$

olur. O zaman (3.1.24) ve (3.1.25)'den

$$|c(K,p) - c(L,p)| \leq \alpha(K, L)$$

olur. $s_n(K) = n \int_{\Sigma^{n-1}} p \cdot c(K,p)\omega(dp)$ ve $s_n(L) = n \int_{\Sigma^{n-1}} p \cdot c(L,p)\omega(dp)$, $\omega(\Sigma^{n-1}) = 1$ ve $p \in \Sigma^{n-1}$ olduğu için

$$\begin{aligned} ||s_n(K) - s_n(L)|| &\leq n \cdot \int_{\Sigma^{n-1}} \|p\,[c(K,p) - c(L,p)]\|\, w(dp) \\ &\leq n \cdot \int_{\Sigma^{n-1}} ||p|| \cdot |c(K,p) - c(L,p)|\, w(dp) \\ &\leq n \cdot \int_{\Sigma^{n-1}} \alpha(K,L)\, w(dp) \\ &= n \cdot \alpha(K,L) \cdot \omega(\Sigma^{n-1}) = n \cdot \alpha(K,L) \end{aligned}$$

yani

$$||s_n(K) - s_n(L)|| \leq n \cdot \alpha(K, L)$$

olur ve teoremin kanıtı tamamlanır.

3.2 Lipschitz Dönüşümlerin Lipschitz Selektörleri

Bu kesimde sınırlı olmayan kümelere değinmek için, herbir konveks, kapalı $K \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için Lipschitz olmak üzere bir $P(K) \subset K$ konveks kompakt kümesini oluşturan Intersection lemmayı vereceğiz. Bu bölümün sonunda kapalı konveks görüntülü küme değerli dönüşümlerin Lipschitz selektörlerinin varlığını araştıracağız.

Sınırsız kapalı konveks kümelerin Lipschitz selektörlerini elde etmek için aşağıdaki önermeye ihtiyacımız vardır.

ÖNERME 3.2.1.(Intersection Lemma) $\mathcal{K}$, $\mathbb{R}^n$ 'de herbiri boştan farklı, kapalı, konveks kümelerin bir ailesini göstersin. O zaman $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $K \subset \mathcal{K}$ için

$$P(y, K) := K \cap B(y, 2d(y, K))$$

olmak üzere $P(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathcal{K} \rightsquigarrow \mathcal{K}$ dönüşümü Lipschitzdir: $\forall K, L \in \mathcal{K}$ ve x, $y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\alpha\left(P(x, K), P(y, L)\right) \leq 5(\alpha(K, L) + ||x - y||)$$

olur [25] [30].

Kanıt. İlk olarak $x = y = 0$ olduğunda

$$\forall K, L \in \mathcal{K} \text{ için } \alpha(P(0, K), P(0, L)) \leq 5\alpha(K, L) \tag{3.2.1}$$

olduğunu gösterelim.

Eğer $\alpha(K, L) = +\infty$ ise (3.2.1)'in doğruluğu açıktır.

$\alpha(K, L) < +\infty$ olan $K, L \in \mathcal{K}$ alalım ve $\varepsilon := \alpha(K, L)$ olsun. Eğer $\varepsilon = 0$ ise $K = L$ olur ve (3.2.1) ifadesi doğru olur.

$\varepsilon > 0$ olduğunu kabul edelim ve keyfi $y \in P(0, L)$ alıp sabitleyelim. (3.2.1) eşitsizliğini kanıtlamak için

$$||x - y|| \leq 5\varepsilon \tag{3.2.2}$$

olacak şekilde $\exists x \in P(0, K)$ bulmalıyız. $y \in P(0, L) = L \cap B(0, 2d(0, L))$ olduğu için

$$\|y\| \leq 2d(0, L) \tag{3.2.3}$$

olur. Şimdi

$$d(0,L) \leq d(0,K) + \alpha(K,L) \tag{3.2.4}$$

olduğunu gösterelim. $K \subset \mathbb{R}^n$ kapalı, konveks küme olduğundan $\|x_*\| = d(0,K)$ olan $\exists x_* \in K$ vardır. O zaman $\exists y_* \in L$ vardır öyle ki $\|x_* - y_*\| \leq \alpha(K,L)$ için

$$\|y_*\| \leq \|y_* - x_*\| + \|x_*\| \tag{3.2.5}$$

olur. $y_* \in L$ olduğundan $\|y_*\| \geq d(0,L)$ dir. $\|x_*\| = d(0,K)$ ve $\|y_* - x_*\| \leq \alpha(K,L) = \varepsilon$ olduğundan (3.2.5) eşitsizliğine göre

$$d(0,L) \leq d(0,K) + \alpha(K,L) = d(0,K) + \varepsilon \tag{3.2.6}$$

olur. Böylece (3.2.4) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterdik. Şimdi (3.2.3) ve (3.2.6) eşitsizliklerinden

$$\|y\| \leq 2d(0,L) \leq 2d(0,K) + 2\varepsilon \tag{3.2.7}$$

olur. $\alpha(K,L) = \varepsilon$, $y \in L$ olduğundan

$$\|y - x_1\| \leq \varepsilon \tag{3.2.8}$$

olacak şekilde $x_1 \in K$ alalım. Eğer $\|x_1\| \leq 2d(0,K)$ ise $x_1 \in P(0,K)$ olur. $x := x_1$ olsun. O zaman $\|y - x\| = \|y - x_1\| \leq \varepsilon < 5\varepsilon$ olur. Eğer $\|x_1\| > 2d(0,K)$ ise

$$d(0,K) = \|x_2\|$$

olacak şekilde $x_2 \in K$ alalım. Eğer $x_2 = 0$ ise $x = 0$ kabul edelim. O zaman $x = 0 \in P(0,K)$, $d(0,K) = 0$ ve (3.2.7)'den $\|y - x\| = \|y\| \leq 2\varepsilon < 5\varepsilon$ elde edilir.

Şimdi

$$\|x_1\| > 2d(0,K), \qquad x_2 \neq 0$$

durumunu araştıralım.

$$\|x\| = 2d(0, K) \tag{3.2.9}$$

olacak şekilde $\exists x \, (\in [x_1, x_2])$'nin varlığını gösterelim. Burada $[x_1, x_2]$ x_1 ve x_2 noktalarını birleştiren aralıktır ve $[x_1, x_2] = \{\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \mid \lambda \in [0,1]\}$ ile tanımlıdır. Gerçekten; $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ sürekli dönüşümünü

$$\forall \lambda \in [0,1] \text{ için } \varphi(\lambda) = ||\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2||$$

olarak tanımlayalım. φ 'nin görüntüsü bağlantılı küme olduğundan ve

$$\varphi(0) = d(0, K) \text{ ve } \varphi(1) > 2d(0, K)$$

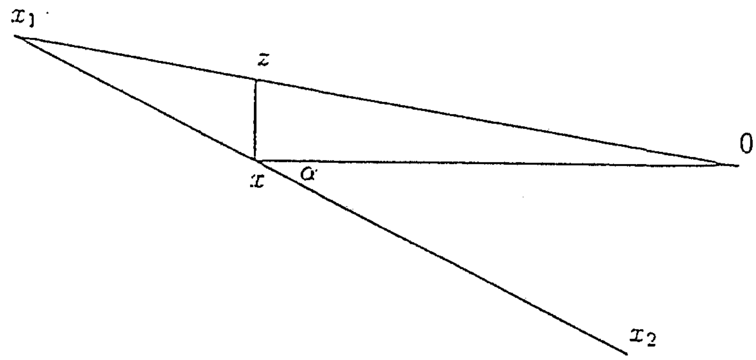
olduğundan $\varphi\left(\bar{\lambda}\right) = 2d(0, K)$ olacak şekilde $\exists \bar{\lambda} \in (0,1)$ vardır. $x := \bar{\lambda} x_1 + (1-\bar{\lambda}) x_2$ olsun. $x_1 \in K$, $x_2 \in K$, K konveks, kapalı küme olduğundan $x \in K$ dır. $\|x\| = \varphi(\bar{\lambda}) = 2d(0, K)$ olduğundan $x \in P(0, K)$ olur.

Şimdi aradığımız noktanın x olduğunu kanıtlayalım. Gerçekten, x_1'nin seçiminden

$$\begin{aligned} ||x - x_1|| &\geq ||x - y|| - ||y - x_1|| \\ &\geq ||x - y|| - \varepsilon \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

olur. Köşeleri $0, x, x_2$ olan bir üçgende x'in açısını α olarak gösterelim (Şekil 1).

Şekil 1



$\|x_2\| = d(0,K) \neq 0$, $\|x\| = 2d(0,K)$ olduğu için $\|x_2\| < \|x\|$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ ve

$$\sin\alpha \leq \frac{\|x_2\|}{\|x\|} = \frac{1}{2}, \quad \cos\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{3.2.11}$$

olur. Eğer $\alpha = 0$ ($n = 1$ olduğu durumda her zaman böyledir) ise

$$\|x_1\| = \|x\| + \|x - x_1\|$$

olur. O zaman buradan, (3.2.10)'dan ve (3.2.8)'den

$$\begin{aligned} \|y\| &\geq \|x_1\| - \|y - x_1\| \\ &\geq \|x\| + \|x_1 - x\| - \varepsilon \\ &\geq 2d(0,K) + \|x - y\| - 2\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|x - y\| \leq \|y\| - 2d(0,K) + 2\varepsilon$$

dir. (3.2.7)'ye göre $\|y\| - 2d(0,K) \leq 2\varepsilon$ olur. O zaman $x \in P(0,K)$ için

$$\|x - y\| \leq 4\varepsilon < 5\varepsilon$$

olur. Yani (3.2.2) eşitsizliği sağlanır.

Şimdi $\alpha > 0$ olduğunu kabul edelim ve köşeleri $0, x, x_1$ olan üçgeni düşünelim. O zaman x 'in açısı $\pi - \alpha > \frac{\pi}{2}$ olur. $z - x \perp x$ olacak şekilde $z \in (0, x_1)$ alalım. O zaman

$$\|z\| \geq \|x\| = 2d(0,K) \tag{3.2.12}$$

olur. z, x, x_1 noktalarının oluşturduğu üçgende x'in açısı $\pi - \alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ olur. x_1, z, x noktalarının oluşturduğu üçgende z'nin açısı β olsun. O zaman $\frac{\|x_1 - x\|}{\sin\beta} = \frac{\|z - x_1\|}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$ ve $\|x - x_1\| \leq \frac{\|z - x_1\|}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$ olur. Buradan ve (3.2.11)'den

$$\begin{aligned} \|z - x_1\| &\geq \|x - x_1\| \cdot \sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) \\ &= \|x - x_1\| \cdot \cos\alpha \geq \|x - x_1\| \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

elde edilir. $\|x_1\| = \|z\| + \|z - x_1\|$ olduğundan (3.2.12) ve (3.2.13)'den

$$\|x_1\| \geq 2d(0,K) + \frac{\sqrt{3}}{2}\|x - x_1\| \tag{3.2.14}$$

elde edilir. $\|y - x_1\| \leq \varepsilon = \alpha(K, L)$ olduğundan (3.2.10) ve (3.2.14) eşitsizliklerine göre

$$\begin{aligned} \|y\| &\geq \|x_1\| - \|y - x_1\| \\ &\geq 2d(0, K) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\|x - x_1\| - \varepsilon \\ &\geq 2d(0, K) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}(\|x - y\| - \varepsilon) - \varepsilon \end{aligned}$$

olur. (3.2.7)'ye göre $\|y\| \leq 2d(0, K) + 2\varepsilon$ dır. O zaman

$$2d(0, K) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\|x - y\| - \varepsilon) - \varepsilon \leq 2d(0, K) + 2\varepsilon$$

olur. Buradan $\frac{\sqrt{3}}{2}(\|x - y\| - \varepsilon) \leq 3\varepsilon$, $\|x - y\| - \varepsilon \leq \frac{6}{\sqrt{3}}\varepsilon < 4\varepsilon$ ve

$$x \in P(0, K) \text{ için } \|x - y\| \leq 5\varepsilon$$

olur. Yani (3.2.2) doğrudur. Böylece $x = 0,\ y = 0$ olurken (3.2.1)'in doğruluğu kanıtlanmış olur.

Şimdi herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ alalım.

$$\alpha(P(x, K), P(x, L)) = \alpha(P(0, K - x), P(0, L - x)) \tag{3.2.15}$$

olduğunu gösterelim. Önce

$$P(x, K) = P(0, K - x) + x$$

olduğunu gösterelim. $\forall f \in P(x, K)$ alalım. O zaman $f \in K$ ve $f \in B(x, 2d(x, K))$ olur. Buradan $f - x \in K - x$ ve $\|f - x\| \leq 2d(x, K) = 2d(0, K - x)$ olduğu görülür. Böylece $f - x \in K - x$ ve $f - x \in B(0, 2d(K - x))$ olur. Yani

$$f - x \in P(0, K - x) \quad \text{veya } f \in P(0, K - x) + x$$

dır. Benzer şekilde $\forall f \in P(0, K - x) + x$ için $f \in P(x, K)$ olduğu gösterilebilir. O zaman $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$P(x, K) = P(0, K - x) + x \text{ ve } P(x, L) = P(0, L - x) + x \tag{3.2.16}$$

olur. Hausdorff uzaklığının tanımına göre $\forall A \subset \mathbb{R}^n$, $C \subset \mathbb{R}^n$ ve $x \in \mathbb{R}$ için

$$\alpha(A + x, C + x) = \alpha(A, C) \tag{3.2.17}$$

olur. (3.2.16) ve (3.2.17)'den

$$\begin{aligned}\alpha\left(P\left(x,K\right),P\left(x,L\right)\right) &= \alpha\left(P\left(0,K-x\right)+x,P\left(0,L-x\right)+x\right)\\ &= \alpha\left(P\left(0,K-x\right),P\left(0,L-x\right)\right)\end{aligned}$$

olur. Yani (3.2.15) eşitsizliği doğrudur. O zaman (3.2.1) ve (3.2.15) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\alpha(P(x,K),P(y,L)) &\leq \alpha(P(x,K),P(x,L))+\alpha(P(x,L),P(y,L))\\ &\leq 5\alpha(K-x,L-x)+\alpha(B(x,2d(x,L)),B(y,2d(y,L))\\ &\leq 5\alpha(K,L)+||x-y||+2||x-y||\\ &= 5\alpha(K,L)+3||x-y||\end{aligned}$$

bulunur ve kanıt tamamlanır.

Konveks kompakt kümenin Steiner noktasının bulunması için yukarıda verilen yapının ve Intersection lemmanın iyi bir uygulaması Lipschtz küme değerli dönüşümler için Lipschitz koşulunu sağlayan selektörlerin bulunmasıdır:

TEOREM 3.2.1. $F(\cdot):\mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ konveks, kapalı değerli dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümü bir c-sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlasın. O zaman $F\left(\cdot\right)$ küme değerli dönüşümünün $5\cdot n\cdot c$ sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlayan $f\left(\cdot\right):\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ selektörü vardır.

Kanıt. $F\left(\cdot\right)$ küme değerli dönüşümünün c-sabiti ile Lipshitz koşulunu sağlamasının tanımını hatırlayalım.

Şimdi $G:\mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünü

$$\forall x\in\mathbb{R}^m \text{ için } G(x)=F(x)\cap B\left(0,2||m(F(x))||\right)$$

olacak şekilde tanımlayalım. Burada $m(F(x))=\{f\in F(x): \|f\|=d\left(0,F(x)\right)\}$ dir. O zaman $||m(F(x))||=d\left(0,F(x)\right)$ olur ve

$$G(x)=F(x)\cap B\left(0,2d\left(0,F(x)\right)\right)$$

bulunur. $\forall x\in\mathbb{R}^m$ için $G(x)\subset\mathbb{R}^n$ boştan farklı, konveks, kompakt kümedir. Önerme 3.2.1'de $P\left(y,K\right)$ kümesinin tanımına göre

$$G(x)=P\left(0,F\left(x\right)\right)$$

olur. Yine Önerme 3.2.1'e göre $G(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü Lipschitz koşulunu sağlar ve $\forall x_1 \in \mathbb{R}^m$, $\forall x_2 \in \mathbb{R}^m$ için

$$\begin{aligned} \alpha\left(G\left(x_1\right), G\left(x_2\right)\right) &= \alpha\left(P\left(0, F\left(x_1\right)\right), P\left(0, F\left(x_2\right)\right)\right) \\ &\leq 5 \cdot \alpha\left(F\left(x_1\right), F\left(x_2\right)\right) \\ &\leq 5 \cdot c \cdot \left\|x_1 - x_2\right\| \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

olur. Şimdi $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için

$$f(x) = s_n(G(x))$$

olmak üzere $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $s_n(G(x))$ $G(x)$ kümesinin Stenier noktasıdır. Teorem 3.1.1'e göre $f(x) = s_n(G(x)) \in G(x)$ ve $\forall x_1 \in \mathbb{R}^m$, $\forall x_2 \in \mathbb{R}^m$ için

$$\left\|f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right)\right\| \leq \left\|s_n\left(G\left(x_1\right)\right) - s_n\left(G\left(x_2\right)\right)\right\| \leq n \cdot \alpha\left(G\left(x_1\right), G\left(x_2\right)\right)$$

olur. O zaman (3.2.18)'den $\forall x_1 \in \mathbb{R}^m$, $\forall x_2 \in \mathbb{R}^m$ için

$$\left\|f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right)\right\| \leq 5 \cdot n \cdot c \cdot \left\|x_1 - x_2\right\|$$

olduğunu elde ederiz. Bu ise $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun $5 \cdot n \cdot c$-sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlaması anlamına gelir.

$\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $f(x) \in G(x)$, $G(x) \subset F(x)$ olduğundan $f(x) \in F(x)$ olur.

UYARI 1. $F(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü Hausdorff metriğinde sadece sürekli ise, yani her bir $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall x \in B(\bar{x}, \delta(\varepsilon, \bar{x}))$ iken $\alpha(F(x), F(\bar{x})) < \varepsilon$ olan $\exists \delta(\varepsilon, \bar{x}) > 0$ ise, o zaman Teorem 3.2.1'in kanıtında tanımlanan $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ selektörü yalnız sürekli olur.

UYARI 2. Sıradaki kesimde daha güçlü bir teorem kanıtlayacağız. Bu teoremden söyleyebiliriz ki, Lipschitz koşulunu sağlayan $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $\forall \bar{y} \in F(\bar{x})$ için $f(\bar{x}) = \bar{y}$ olacak şekilde ve Lipschitz koşulunu sağlayan $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ selektörü vardır.

3.3 Caratheodory Dönüşümlerin Selektörleri

Bundan sonra küme değerli dönüşümlerin ölçülebilirliğinden sözettiğimizde, onun Lebesgue anlamında ölçülebilirliğini düşüneceğiz.

$$F : [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$$

küme değerli dönüşümünü alalım ve Caratheodory küme değerli dönüşümünün tanımını verelim.

TANIM 3.3.1. $\forall t \in [a, b]$ için $C(t) \subset \mathbb{R}^m$ verilen bir küme olsun.

1-

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^m \text{ için } F(\cdot, x) \text{ ölçülebilir} \\ \forall t \in [a, b] \text{ için } F(t, \cdot)\ ,\ C(t)\text{'de sürekli} \end{cases}$$

ise $F(\cdot, \cdot)$ küme değerli dönüşümüne $\{C(t)\}_{t \in [a,b]}$ 'de Caratheodory küme değerli dönüşümü denir.

2- $\forall t \in [a, b]$ için $\exists k(t) \geq 0 \ni$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^m \text{ için } F(\cdot, x) \text{ ölçülebilir} \\ \forall t \in [a, b] \text{ için } F(t, \cdot)\ ,\ C(t) \text{ 'de } k(t)\text{-Lipschitz} \end{cases}$$

oluyorsa $F(\cdot, \cdot)$ küme değerli dönüşümüne $\{C(t)\}_{t \in [a,b]}$ ölçülebilir/Lipschitzdir denir.

Burada $\forall t \in [a, b]$ için $F(t, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün $C(t)$'de $k(t)$-Lipschitz olmasının ne anlama geldiğini açıklayalım.

Eğer her bir $t \in [a, b]$ ve $\forall x_1 \in C(t)$, $\forall x_2 \in C(t)$ için

$$\alpha\left(F(t, x_1), F(t, x_2)\right) \leq k(t) \|x_1 - x_2\|$$

ise, o zaman $F(t, \cdot)$ küme değerli dönüşümüne $C(t)$'de $k(t)$-Lipschitz denir.

TANIM 3.3.2. $F(\cdot, \cdot) : [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşüm olsun.

1- Eğer $f(t,x) \in F(t,x)$, $(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m$ selektörü için

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^m \text{ için } f(\cdot,x) \text{ ölçülebilir fonksiyon} \\ \forall t \in [a,b] \text{ için } f(t,\cdot) \text{ fonksiyonu } C(t)\text{'de sürekli} \end{cases}$$

ise, o zaman $f(\cdot,\cdot)$ selektörüne $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $\{C(t)\}_{t\in[a,b]}$ 'de Caratheodory selektörü denir.

2- Eğer $f(t,x) \in F(t,x)$, $(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m$ selektörü için

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^m \text{ için } f(\cdot,x) \text{ ölçülebilir fonksiyon} \\ \forall t \in [a,b] \text{ için } f(t,\cdot) \text{ fonksiyonu } C(t)\text{'de } k(t) - \text{Lipschitz} \end{cases}$$

ise, o zaman $f(\cdot,\cdot)$ selektörüne $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $\{C(t)\}_{t\in[a,b]}$ 'de ölçülebilir/Lipschitz selektörü denir.

$z : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ tek değerli dönüşüm ve

$$\text{hemen hemen her } t \in [a,b] \text{ için } \omega(t) \in F(t,z(t))$$

olmak üzere $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ olan ölçülebilir tek değerli dönüşüm olsun. Burada önceki bölümde kanıtlanan selektör sonucunu daha anlaşılır hale getireceğiz. Yani; $F(\cdot,\cdot)$ ölçülebilir/Lipschitz olduğunda

$$\text{hemen hemen her } t \in [a,b] \text{ için } w(t) = f(t,z(t))$$

olan $f(t,x) \in F(t,x)$ Caratheodory veya ölçülebilir/Lipschitz selektörün varlığını göstereceğiz.

TEOREM 3.3.1 (Caratheodory Selektörü) $F(\cdot,\cdot) : [a,b]\times\mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşüm, $\forall (t,x) \in [a,b]\times\mathbb{R}^m$ için $F(x) \subset \mathbb{R}^n$ kapalı, konveks küme, $z : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ tek değerli keyfi fonksiyon ve $\omega(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ölçülebilir fonksiyon olsun.

Eğer $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümü $\{C(t)\}_{t\in[a,b]}$ 'de Caratheodory ve

$$\text{hemen hemen her } t \in [a,b] \text{ için } \omega(t) \in F(t,z(t))$$

ise, o zaman $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $\{C(t)\}_{t\in[a,b]}$ üzerinde hemen hemen her $t \in [a,b]$ için $\omega(t) = f(t,z(t))$ olan $f(t,x) \in F(t,x)$ Caratheodory selektörü vardır [19].

Kanıt. $f(\cdot,\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $\forall (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m$ için $f(t,x) = \prod_{F(t,x)}(\omega(t))$ olarak tanımlayalım. Burada $\prod_{F(\cdot,\cdot)}(\cdot)$ izdüşüm dönüşümüdür, yani

$$\forall (t,x) \text{ için } \prod\nolimits_{F(t,x)}(\omega(t)) = \{f \in F(t,x) : d(\omega(t), F(t,x)) = \|\omega(t) - f\|\}$$

dir. Sonuç 0.1.1'den $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $f(\cdot,x)$ dönüşümü ölçülebilirdir. $(t,x) \to f(t,x)$ fonksiyonunun tanımına göre

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \{f \in F(t,x) : d(\omega(t), F(t,x)) = \|\omega(t) - f\|\} \\ &= \{f \in F(t,x) : \|f - \omega(t)\| = d(0, F(t,x) - \omega(t)\} \\ &= m(F(t,x) - \omega(t)) \end{aligned}$$

olur. $\forall (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m$ için $F(t,x)$ boştan farklı konveks, kapalı küme olduğundan, $m(F(t,x) - \omega(t))$, $(t,x) \to F(t,x) - \omega(t)$ küme değerli dönüşümünün minimal selektörüdür. $\forall t_* \in [a,b]$ için $F_*(x) = F(t_*,x) - \omega(t_*)$ ile gösterelim. O zaman $f(t_*,x) = m(F_*(x))$ olur. $x \to F_*(x)$ küme değerli dönüşümü sürekli, $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $F_*(x)$ boştan farklı konveks, kapalı küme olduğundan Sonuç 2.3.1'e göre $x \to m(F_*(x))$ minimal selektörü süreklidir. $f(t_*,x) = m(F_*(x))$, $t_* \in [a,b]$ keyfi olduğundan, keyfi kaydedilmiş $t \in [a,b]$ için $f(t,\cdot)$ fonksiyonu süreklidir. $z(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu ve $\forall t \in [a,b]$ için $f(t,z(t))$ 'nin tanımına göre

$$f(t,z(t)) = \{f \in F(t,z(t)) \mid d(\omega(t), F(t,z(t))) = \|\omega(t) - f\|\}$$

dir. Hemen hemen her $t \in [a,b]$ için $\omega(t) \in F(t,z(t))$ olduğundan, hemen hemen her $t \in [a,b]$ için $d(\omega(t), F(t,z(t))) = 0$ ve hemen hemen her $t \in [a,b]$ için $\omega(t) = f(t,z(t))$ dir.

Eğer $F(t,\cdot)$ küme değerli dönüşümü Lipschitz ise $f(\cdot,\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ selektörü x'e göre Lipschitz olarak seçilebilir:

TEOREM 3.3.2. (Ölçülebilir/Lipschitz Selektörü) Teorem 3.3.1'in tüm koşulları altında $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $\{C(t)\}_{t\in[a,b]}$'de ölçülebilir/Lipschitz olduğunu kabul edelim ve $k(t)$, $(t \in [a,b])$ uygun Lipschitz sabitini göstersin.

O zaman $\exists c > 0$ ve $\{C(t)\}_{t\in[a,b]}$ 'de $F(\cdot,\cdot)$ 'in bir $f(\cdot,\cdot)$ selektörü vardır öyle ki $f(t,\cdot)$ $C(t)$'de $ck(t)$-Lipschitzdir ve

$$\text{hemen hemen her } t \in [a,b] \text{ için } \omega(t) = f(t,z(t))$$

olur.

Ayrıca c sabiti, $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümünden bağımsızdır.

Kanıt. $P(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ küme değerli dönüşümü, Önerme 2.3.1'deki gibi tanımlanmış küme değerli dönüşüm olsun; yani $P(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ olmak üzere $\forall (y,K) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{K}$ için $P(y,K) = K \cap B(y, 2d(y,K))$ olsun. Burada $\mathcal{K}$, $\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı kapalı, konveks alt kümelerinin oluşturduğu uzaydır. $(t,x) \to P(\omega(t), F(t,x))$ küme değerli dönüşümüne bakalım. $P(\omega(t), F(t,x)) = F(t,x) \cap B(\omega(t), 2d(\omega(t), F(t,x)))$ dir.

$\forall t \in [a,b]$ ve $x \in \mathbb{R}^m$ için

$$f(t,x) = s_n(P(\omega(t)), F(t,x))$$

olmak üzere $f(\cdot,\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $s_n(P(\omega(t), F(t,x)))$, $P(\omega(t), F(t,x))$ kümesinin Steiner noktasıdır. $\omega(t) \in F(t,z(t))$ olduğundan hemen hemen her $t \in [a,b]$ için $d(\omega(t), F(t,z(t))) = 0$ ve $P(\cdot,\cdot)$ dönüşümünün tanımından hemen hemen her $t \in [a,b]$ için $P(\omega(t), F(t, z(t))) = F(t,z(t)) \cap B(\omega(t), 0) = \{\omega(t)\}$ olur. O zaman hemen hemen her $t \in [a,b]$ için $s_n(P(\omega(t), F(t,z(t)))) = \omega(t)$. $\forall (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m$ için $f(t,x) = s_n(P(\omega(t), F(t,x)))$ olduğundan hemen hemen her $t \in [a,b]$ için $\omega(t) = f(t,z(t))$ dir.

Teorem 3.1.1.'den $\forall (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m$ için $f(t,x) \in P(\omega(t), F(t,x))$ olduğu görülür. Buradan $\forall (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m$ için $f(t,x) \in F(t,x)$. $f(t,x) = s_n(P(\omega(t), F(t,x)))$, $x \to F(t,x)$ küme değerli dönüşümü $k(t)$ sabiti ile Lipschitz koşulunu sağladığından Teorem 3.1.1. ve Önerme 3.2.1'den $\forall t \in [a,b]$,

$x_1 \in C(t)$, $x_2 \in C(t)$ için

$$\begin{aligned}\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| &\leq \|s_n(P(\omega(t), F(t,x_1))) - s_n(P(\omega(t), F(t,x_2)))\| \\ &\leq n \cdot \alpha(P(\omega(t), F(t,x_1)), P(\omega(t), F(t,x_2))) \\ &\leq 5 \cdot n \cdot \alpha(F(t,x_1), F(t,x_2)) \\ &\leq 5 \cdot n \cdot k(t) \cdot \|x_1 - x_2\|\end{aligned}$$

olur. Eğer $c = 5 \cdot n$ olursa, o zaman $x \longrightarrow f(t,x)$ fonksiyonu $C(t)$'de $ck(t)$-sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlar ve $c = 5 \cdot n$ sabiti $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümüne bağlı değildir.

Şimdi $t \longrightarrow f(t,x)$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösterelim. $x \in \mathbb{R}^m$ alıp sabitleyelim. İlk olarak

$$t \longrightarrow \Phi(t,x) := P(\omega(t), F(t,x)) = F(t,x) \cap B(\omega(t), 2d(\omega(t), F(t,x)))$$

dönüşümünün ölçülebilir olduğunu gösterelim. $t \longrightarrow F(t,x)$ küme değerli dönüşümü ve $t \longrightarrow \omega(t)$ fonksiyonu ölçülebilir olduğundan

$$t \rightsquigarrow B(\omega(t), 2d(\omega(t), F(t,x))$$

dönüşümü Sonuç 0.1.1'e göre ölçülebilir olur. O zaman Teorem 0.1.2'e göre ölçülebilir iki dönüşümünün arakesitide ölçülebilirdir. Yani $t \longrightarrow \Phi(t,x) = P(\omega(t), F(t,x)) = F(t,x) \cap B(\omega(t), 2d(\omega(t), F(t,x)))$ küme değerli dönüşümü ölçülebilirdir.

Bundan dolayı Teorem 0.1.5'den $\forall p \in \Sigma^{n-1}$ için $c(\Phi(\cdot,x), p)$ support fonksiyonu ölçülebilirdir. Burada $\Sigma^{n-1} = \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| = 1\}$ dır. Steiner noktasının tanımına göre $n = 1$ olduğunda $f(\cdot,x) = s_1(\Phi(t,x)) = \frac{1}{2}c(\Phi(t,x), +1) - \frac{1}{2}c(\Phi(t,x), -1)$ olur. $t \longrightarrow c(\Phi(t,x), +1)$, $t \longrightarrow c(\Phi(t,x), -1)$ ölçülebilir fonksiyon oldukları için $t \longrightarrow f(t,x)$ fonksiyonuda ölçülebilirdir. $n \geq 2$ olduğu zaman, Steiner noktasının tanımına göre

$$f(t,x) = s_n(\Phi(t,x)) = n \cdot \int_{\Sigma^{n-1}} p \cdot c(\Phi(t,x), p)\omega(dp) \qquad (3.1.1)$$

$t \longrightarrow p \cdot c(\Phi(t,x), p)$ fonksiyonu ölçülebilir, $p \longrightarrow p \cdot c(\Phi(t,x), p)$ sürekli olduğundan $t \longrightarrow n \int_{\Sigma^{n-1}} p \cdot c(\Phi(t,x), p)\omega(dp)$ fonksiyonu ölçülebilir olur. O zaman (3.1.1)'den $t \longrightarrow f(t,x)$ fonksiyonu ölçülebilir fonksiyon olur.

4 KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN PARAMETRELENDİRİLMESİ

4.1 Caratheodory Parametrelendirilmesi

Bu kesimde kapalı konveks değerli Caratheodory küme değerli $F(\cdot,\cdot)$ dönüşümüşün bir Caratheodory parametrelendirilmesi olduğunu göstereceğiz.

$a < b$ iki reel sayı olmak üzere

$$F : [a,b] \times \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$$

küme değerli dönüşümüne bakalım.

TANIM 4.1.1. $\forall t \in [a,b]$ için $C(t) \subset \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^k$ olsun. Eğer

$$f(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^m \times U \to \mathbb{R}^n$$

fonksiyonu için

$$\begin{cases} i) \ \ \forall(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m \text{ için } F(t,x) = f(t,x,U) \\ ii) \ \ \forall(x,u) \in \mathbb{R}^m \times U \text{ için } f(\cdot,x,u) \text{ ölçülebilir} \\ iii) \ \forall(t,u) \in [a,b] \times U \text{ için } f(t,\cdot,u),\ C(t) \text{ 'de sürekli} \\ iv) \ \ \forall(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m \text{ için } f(t,x,\cdot) \text{ sürekli} \end{cases}$$

oluyorsa $f(\cdot)$ fonksiyonuna $\{C(t)\}_{t\in[a,b]}$'de $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümünün bir Caratheodory parametrelendirilmesi denir.

$||F(t,x)|| = \max_{y\in F(t,x)} ||y||$ ve $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ olarak tanımlandığını hatırlayalım.

TEOREM 4.1.1. (Caratheodory Parametrelendirilmesi) $F : [a,b] \times \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümde $\forall (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m$ için $F(t,x)$ konveks, kompakt küme olsun.

$F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümü $\{C(t)\}_{t\in[a,b]}$'de Caratheodory ise o zaman $U = B$ olmak üzere $\{C(t)\}_{t\in[a,b]}$'de $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $f(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^m \times B \to \mathbb{R}^n$ Caratheodory parametrelendirilmesi vardır ve $\forall t \in [a,b]$, $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in B$, $v \in B$ için

$$||f(t,x,u) - f(t,x,v)|| \leq c||F(t,x)||\ ||u-v||$$

olur. Burada c sabiti, $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümünden bağımsızdır.

Ayrıca eğer $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümü sürekli ise o zaman $f(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^m \times B \to \mathbb{R}^n$ parametrelendirilmesi de süreklidir.

Sonuç olarak; eğer $\forall (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m$ için $F(t,x)$ sadece kapalı (kompaktlığın yerine) küme ise o zaman $U = \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\{C(t)\}_{t\in[a,b]}$'de $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $f(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Caratheodory parametrelendirilmesi vardır ve $\forall t \in [a,b]$, $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ için

$$||f(t,x,u) - f(t,x,v)|| \leq c\ ||u-v||$$

olur [18].

Kanıt. İşaretlemeyi basitleştirmek için $M_x(t) := ||F(t,x)||$ alalım. $(t,x,u) \in [a,b]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ olsun. $M_x(t)u$ merkezli, $2d(M_x(t)u, F(t,x))$ yarıçaplı kümeyi $G(t,x,u)$ ile gösterelim. Yani,

$$G(t,x,u) = B(M_x(t)u, 2d(M_x(t)u, F(t,x)))$$

olsun. Bu durumda kaydedilmiş $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^n$ için $t \rightsquigarrow G(t,x,u)$ küme değerli dönüşümünün ölçülebilir olduğunu kanıtlayalım.

$M_x(\cdot) = ||F(\cdot,x)||$ fonksiyonu ölçülebilir olduğundan Sonuç 0.1.1'e göre $d(M_x(\cdot)u, F(\cdot,x))$ fonksiyonu ölçülebilirdir. Böylece, tekrar Sonuç 0.1.1 kullanılarak $G(\cdot,x,u)$ ölçülebilir olduğu söylenilebilir.

$\forall y \in \mathbb{R}^n$, $K \subset \mathcal{K}$ için $P(y,K) = K \cap B(y, 2d(y,K))$ olmak üzere $P(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathcal{K} \rightsquigarrow \mathcal{K}$ küme değerli dönüşümüne bakalım. Şimdi $\forall (t,x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ için

$$\Phi(t,x,u) := P(M_x(t)u, F(t,x)) = F(t,x) \cap B\left(M_x(t)u, 2d\left(M_x(t)u, F(t,x)\right)\right)$$

olmak üzere $(t,x,u) \rightsquigarrow \Phi(t,x,u) : [a,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümüne bakalım. $(t,x,u) \rightsquigarrow G(t,x,u)$ küme değerli dönüşümünün tanımından $\forall\, (t,x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ için

$$\Phi(t,x,u) = F(t,x) \cap G(t,x,u) \subset F(t,x)$$

olur. $G(\cdot,x,u)$ ve $F(\cdot,x)$ küme değerli dönüşümleri ölçülebilir olduğundan ve Teorem 0.1.2'den $t \rightsquigarrow \Phi(t,x,u)$ küme değerli dönüşümü ölçülebilirdir.

Şimdi $\forall\, (t,x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ için

$$f(t,x,u) = s_n(\Phi(t,x,u)) \tag{4.1.1}$$

olmak üzere $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $s_n(\Phi(t,x,u))$, $\Phi(t,x,u)$ kümesinin Steiner noktasıdır.

$t \rightsquigarrow \Phi(t,x,u)$ küme değerli dönüşümü ölçülebilir olduğundan, Teorem 0.1.5 göre $\forall p \in \Sigma^{n-1}$ için $t \longrightarrow c\,(\Phi(t,x,u),p)$ support fonksiyonu ölçülebilirdir. Burada $c\,(\Phi(t,x,u),p) = \max\limits_{y \in \Phi(t,x,u)} \langle p,y \rangle$ dir. O zaman Stenier noktasının tanımına göre $t \longrightarrow f(t,x,u)$ fonksiyonu ölçülebilir fonksiyondur.

Teorem 3.1.1'e göre

$$\begin{aligned} \|f(t,x,u) - f(t,y,v)\| &= \|s_n\,(\Phi(t,x,u)) - s_n\,(\Phi(t,x,v))\| \\ &\leq n \cdot \alpha\,(\Phi(t,x,u), \Phi(t,x,v)) \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

dir. Önerme 3.2.1'e göre

$$\begin{aligned} \alpha\,(\Phi(t,x,u), \Phi(t,x,v)) &= \alpha(P(M_x(t)u, F(t,x)), P(M_y(t)v, F(t,y))) \\ &\leq 5 \cdot \alpha\,(F(t,x), F(t,y)) + 5\,\|M_x(t)u - M_y(t)v\| \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

olur. (4.1.2) ve (4.1.3)'den $\forall\, (t,x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ve $\forall\, (t,y,v) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ için

$$\|f(t,x,u) - f(t,y,v)\| \leq 5 \cdot n\,[\alpha\,(F(t,x), F(t,y)) + \|M_x(t)u - M_y(t)v\|] \tag{4.1.4}$$

olur. O zaman (4.1.4)'e göre $\forall t \in [a,b]$, $x,y \in C(t)$, $u \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|f(t,x,u) - f(t,y,u)\| \leq 5 \cdot n\,[\alpha\,(F(t,x), F(t,y)) + \|M_x(t) - M_y(t)\|\,\|u\|] \tag{4.1.5}$$

olur. $(t,x) \rightsquigarrow F(t,x)$ küme değerli dönüşümü $\{C(t)\}_{t\in[a,b]}$ 'de Caratheodory olduğu için $\forall t \in [a,b]$ için $t \rightsquigarrow F(t,x)$ küme değerli dönüşümü ve $x \to M_x(t) = \|F(t,x)\|$ fonksiyonu süreklidir. O zaman (4.1.5)'den $\forall t \in [a,b]$ ve $u \in \mathbb{R}^n$ için $x \to f(t,x,u)$ fonksiyonu süreklidir.

Öte yandan $\forall t \in [a,b]$, $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^m$ için (4.1.4)'den

$$\|f(t,x,u) - f(t,x,v)\| \leq 5 \cdot n \cdot M_x(t) \|u - v\| = 5 \cdot n \cdot \|F(t,x)\| \|u - v\|$$

olur. Eğer $c = 5 \cdot n$ olursa ($c > 0$ sabiti $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümüne bağlı değil) , o zaman

$$\|f(t,x,u) - f(t,y,v)\| \leq c \cdot \|F(t,x)\| \|u - v\|$$

olur. Buradan teoremdeki eşitsizliğin doğruluğunu ve $\forall(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m$ için $u \to f(t,x,u)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu görmüş oluruz. Böylece $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun $\{C(t)\}_{t\in[a,b]}$'de Caratheodory olduğu kanıtlanır.

(4.1.4) ile belirlenmiş $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümünün parametrelendirilmesi olduğunu kanıtlamak için $U = B$ olmak üzere Tanım 4.1.1'de (i) koşulunun sağlandığını gösterelim. Yani $\forall(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m$ için

$$F(t,x) = \{f(t,x,u) : u \in B\}$$

olduğunu gösterelim. $t \in [a,b]$, $x \in \mathbb{R}^m$ ve $y \in F(t,x)$ alalım.

$$u := \begin{cases} \frac{y}{M_x(t)} & , M_x(t) \neq 0 \\ 0 & , d.d \end{cases}$$

ile tanımlayalım. O zaman

$$u \in B, \ M_x(t)u = y$$

olur. Eğer $M_x(t) = 0$ ise, o zaman $F(t,x) = \{0\}$ ve $u = 0 \in F(t,x)$ dir. $\Phi(t,x,u)$ kümesinin tanımından $\forall u \in B$ için

$$\begin{aligned} \Phi(t,x,u) &= P(M_x(t)u, F(t,x)) \\ &= F(t,x) \cap B(0, 2d(0, F(t,x))) \\ &= F(t,x) \cap \{0\} = \{0\} \end{aligned}$$

olur. Buradan $\forall u \in B$ için $f(t,x,u) = s_n(\Phi(t,x,u)) = s_n(0) = 0$ olduğu elde edilir.

Eğer $M_x(t) \neq 0$ ise, $M_x(t)u = y$ ve $y \in F(t,x)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\Phi(t,x,u) &= P(M_x(t)u, F(t,x)) \\ &= P(y, F(t,x)) \\ &= F(t,x) \cap \{y\} = y\end{aligned}$$

olur. $f(t,x,u) = s_n(\Phi(t,x,u))$ olduğundan

$$f(t,x,u) = y$$

olur. O halde $M_x(t) \neq 0$ ise, $\forall y \in F(t,x)$ için $f(t,x,u) = y$ olan $u = \frac{y}{M_x(t)} \in B$ vardır. Eğer $M_x(t) = 0$ ise, o zaman $F(t,x) = \{0\}$ ve $u \in B$ için $f(t,x,u) = 0$ olur. Buradan

$$F(t,x) \subset \{f(t,x,u) : u \in B\} \tag{4.1.6}$$

olur.

$\forall (t,x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ için $f(t,x,u) = s_n(\Phi(t,x,u))$ olduğundan Teorem 3.1.1'e göre $f(t,x,u) \in \Phi(t,x,u)$ olur. $\Phi(t,x,u) = F(t,x) \cap G(t,x,u) \subset F(t,x)$ olduğundan $\forall (t,x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ için $f(t,x,u) \in F(t,x)$ olur. O zaman

$$\{f(t,x,u) : u \in B\} \subset F(t,x) \tag{4.1.7}$$

olur. (4.1.6) ve (4.1.7)'den (i) koşulunun sağlandığı görülür.

Şimdi $F(\cdot,\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün sürekli olduğunu varsayalım. O zaman Önerme 2.3.1'e göre $M_x(t) = \|F(t,x)\| : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olur. $f(t,x,u) = s_n(\Phi(t,x,u))$ olduğundan Teorem 2.3.1'e göre

$$\begin{aligned}\|f(t,x,u) - f(\tau,y,v)\| &= \|s_n(\Phi(t,x,u)) - s_n(\Phi(\tau,y,v))\| \\ &\leq n \cdot \alpha(\Phi(t,x,u), \Phi(\tau,y,v))\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

olur. $\Phi(t,x,u) = F(t,x) \cap G(t,x,u) = F(t,x) \cap B(M_x(t)u, 2d(M_x(t)u, F(t,x))) = P((M_x(t)u, F(t,x))$ olduğundan Önerme 2.3.1'e göre

$$\begin{aligned} \alpha(\Phi(t,x,u), \Phi(\tau,y,v)) &= \alpha(P(M_x(t)u, F(t,x)), P(M_y(\tau)v, F(\tau,y))) \\ &\leq 5 \cdot \alpha(F(t,x), F(\tau,y)) + 5\|M_x(t)u - M_y(\tau)v\| \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

olur. Buradan, (4.1.8) ve (4.1.9)'den

$$\|f(t,x,u) - f(\tau,y,v)\| \leq 5 \cdot \alpha(F(t,x), F(\tau,y)) + 5\|M_x(t)u - M_y(\tau)v\| \tag{4.1.10}$$

olur. $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümü ve $(t,x) \to M_x(t)$ fonksiyonu sürekli oldukları için $(\tau,y,v) \to (t,x,u)$ iken $\alpha(F(t,x), F(\tau,y)) \to 0$, $\|M_x(t)u - M_y(\tau)v\| \to 0$ olur. O zaman (4.1.10)'dan $(\tau,y,v) \to (t,x,u)$ iken $\|f(t,x,u) - f(\tau,y,v)\| \to 0$ olur. Yani $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $f(\cdot)$ parametrelendirilmesi süreklidir.

Teoremin sonunu kanıtlamak için (yani eğer $\forall(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m$ için $F(t,x)$ kapalı, konveks küme ise) $U = \mathbb{R}^n$ ve $\forall(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m$ için $M_x(t) = 1$ olduğu varsayılarak üstteki kanıtı tekrarlamak yeterlidir.

4.2 Ölçülebilir/Lipschitz Parametrelendirilme

Bu kesimde eğer $F : [a,b] \times \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü $\{C(t)\}_{t\in[a,b]}$ 'de ölçülebilir/Lipschitz ise, o zaman önceki kesimde tanımlanan $f(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^m \times U \to \mathbb{R}^n$ Caratheodory parametrelendirilmesinin de $\{C(t)\}_{t\in[a,b]}$ 'de ölçülebilir/Lipschitz olduğunu göstereceğiz.

TEOREM 4.2.1. (Sınırsız Küme Değerli Dönüşümlerin Parametrelendirilmesi) $F : [a,b] \times \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümde $\forall(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m$ için $F(t,x)$ konveks, kapalı küme olsun. Kabul edelim ki $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümü $\{C(t)\}_{t\in[a,b]}$ 'de ölçülebilir/ Lipschitzdir ve $k(t)$ $t \in [a,b]$ için uygun Lipschitz sabiti olsun.

O zaman $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $U = \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\{C(t)\}_{t\in[a,b]}$'de $f(\cdot) : [a,b]\times\mathbb{R}^m\times U \to \mathbb{R}^n$ Caratheodory parametrelendirilmesi

$$\begin{cases} \forall (t,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \text{ için } f(t,\cdot,u) & C(t)\text{'de } ck(t)\text{-Lipschitz} \\ \forall (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m \text{ için } f(t,x,\cdot) & \mathbb{R}^n\text{'de } c\text{-Lipschitz} \end{cases}$$

olacak şekilde vardır. Burada c sabiti $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümüne bağlı değildir.

Ayrıca, eğer $F : [a,b] \times \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümü sürekli ise, o zaman $f(\cdot)$ parametrelendirilmesi de süreklidir [26] [30].

Kanıt. Teoremi kanıtlamak için, Teorem 4.1.1'nin kanıtında $\forall (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m$ için $M_x(t) = 1$ kabul ederek Teorem 4.1.1'in kanıtını olduğu gibi tekrarlamak yeteridir. O zaman $\forall (t,x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ için

$$\Phi(t,x,u) = F(t,x) \cap B(u, 2d(u, F(t,x)))$$

olur.

$$f(t,x,u) = s_n(\Phi(t,x,u))$$

olmak üzere (4.1.4)'e benzer olarak $\forall x \in C(t), y \in C(t)$ için

$$\|f(t,x,u) - f(t,y,u)\| \leq 5 \cdot n \cdot \alpha(F(t,x), F(t,y))$$

olur. $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümü $C(t)$'de $k(t)$-Lipschitz olduğundan

$$\|f(t,x,u) - f(t,y,u)\| \leq 5 \cdot n \cdot k(t) \|x - y\|$$

olur. $c = 5 \cdot n$ olursa, o zaman $f(\cdot)$ parametrelendirilmesinin $C(t)$'de $ck(t)$-Lipschitz olur ve c sabiti $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümünden bağımsızdır.

Yine de $\forall t \in [a,b]$, $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ için ($M_x(t) = 1$ olduğundan) (4.1.4)'e benzer olarak

$$\begin{aligned} \|f(t,x,u) - f(t,y,v)\| &\leq \|s_n(\Phi(t,x,u)) - s_n(\Phi(t,x,v))\| \\ &\leq n \cdot \alpha(\Phi(t,x,u), \Phi(t,x,v)) \\ &\leq 5 \cdot n \cdot [\alpha(F(t,x), F(t,x)) + \|u - v\|] \\ &= 5 \cdot n \cdot \|u - v\| \end{aligned}$$

elde ederiz. $c = 5 \cdot n$ olduğundan $\forall t \in [a,b]$, $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|f(t,x,u) - f(t,y,v)\| \leq c \cdot \|u - v\|$$

yani $\forall (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m$ için $f(t,x,\cdot)$ fonksiyonu c–Lipschitzdir.

Eğer $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümü sürekli ise Teorem 4.2.1'in koşulları altında $f(\cdot)$ parametrelendirilmesinin sürekli olması aynı Teorem 4.1.1'deki gibi kanıtlanır (Yine $U = \mathbb{R}^n$ ve $\forall (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m$ için $M_x(t) = 1$ alınır).

TEOREM 4.2.2. (Sınırlı Küme Değerli Dönüşümlerin Parametrelendirilmesi) Kabul edelim ki Teorem 4.2.1'in tüm koşulları sağlansın ve $\forall (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^m$ için $F(t,x) \subset \mathbb{R}^n$ kompakt küme olsun.

O zaman $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümünün $\{C(t)\}_{t\in[a,b]}$ 'de $f(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^m \times B \to \mathbb{R}^n$ (burada $B = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\| \leq 1\}$) Caratheodory parametrelendirilmesi

$$\begin{cases} \forall (t,u) \in [a,b] \times B^n \text{ için } f(t,\cdot,u) \text{ fonksiyonu } C(t)\text{'de } ck(t)\text{-Lipschitzdir.} \\ \forall t \in [a,b],\ \forall x \in \mathbb{R}^m,\ \forall u,v \in B \text{ için} \\ \|f(t,x,u) - f(t,x,v)\| \leq c\,\|F(t,x)\|\,\|u - v\| \end{cases}$$

olacak şekilde vardır. Burada c sabiti $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümünden bağımsızdır.

Ayrıca, eğer $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümü sürekli ise, $f(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^m \times B \to \mathbb{R}^n$ parametrelendirilmesi de süreklidir.

Kanıt. Teorem 4.1.1'deki gibi tanımlanmış $f(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^m \times B \to \mathbb{R}^n$ parametrelendirilmesine bakalım. O zaman Teorem 4.1.1'e göre $f(\cdot)$ fonksiyonu $\{C(t)\}_{t\in[a,b]}$ 'de $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümünün Caratheodory parametrelendirilmesidir ve (ii) koşulunu sağlar. Teorem 4.1.1'deki (4.1.4) eşitsizliği doğrudur, yani $\forall t \in [a,b]$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^m$, $\forall u,v \in B$ için

$$\|f(t,x,u) - f(t,y,v)\| \leq 5 \cdot n\,[\alpha(F(t,x), F(t,y)) + \|M_x(t)\,u - M_y(t)\,v\|] \tag{4.2.1}$$

olur. O zaman $\forall t \in [a,b]$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$, $\forall u \in B$ için

$$\|f(t,x,u) - f(t,y,u)\| \leq 5 \cdot n \left[\alpha\left(F(t,x), F(t,y)\right) + \|M_x(t)\, u - M_y(t)\, u\|\right] \tag{4.2.2}$$

olur. $F(t,\cdot)$ küme değerli dönüşümü $C(t)$'de $k(t)$-Lipschitz olduğundan

$$\alpha\left(F(t,x), F(t,y)\right) \leq k(t)\, \|x-y\| \tag{4.2.3}$$

olur. $F(t,\cdot)$ küme değerli dönüşümü $C(t)$'de $k(t)$-Lipschitz olduğundan, Önerme 2.3.1'e göre $x \to M_x(t)$ fonksiyonuda $C(t)$'de $k(t)$-Lipschitzdir, yani

$$|M_x(t) - M_y(t)| \leq k(t)\, \|x-y\|$$

olur. O zaman $u \in B$ olduğundan

$$\|M_x(t)\, u - M_y(t)\, u\| \leq |M_x(t) - M_y(t)|\, \|u\| \leq k(t)\, \|x-y\| \tag{4.2.4}$$

olur. (4.2.2), (4.2.3) ve (4.2.4) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \|f(t,x,u) - f(t,y,u)\| &\leq 5 \cdot n \left[k(t)\, \|x-y\| + k(t)\, \|x-y\|\right] \\ &= 10n \cdot k(t)\, \|x-y\| \end{aligned}$$

olur. Yani $f(t,\cdot,u)$ fonksiyonu $C(t)$'de $10 \cdot nk(t)$-Lipschitzdir.

Şimdi $\forall t \in [a,b]$, $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in B$, $v \in B$ için

$$\|f(t,x,u) - f(t,x,v)\| \leq c \cdot \|F(t,x)\| \cdot \|u-v\| \tag{4.2.5}$$

olduğunu gösterelim.(4.2.1) eşitsizliğinden $\forall t \in [a,b]$, $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in B$, $v \in B$ için

$$\begin{aligned} \|f(t,x,u) - f(t,x,v)\| &\leq 5n \cdot \|M_x(t)\, u - M_y(t)\, v\| \\ &= 5n \cdot M_x(t) \cdot \|u-v\| \\ &= 5n \cdot \|F(t,x)\| \cdot \|u-v\|. \end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz. $c = 5n$ olduğundan, buradan (4.2.5) eşitsizliğinin doğruluğu elde edilir.

$F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümü sürekli olursa, $f(\cdot)$ parametrelendirilmesinin sürekli olması aynı Teorem 4.1.1'deki gibi kanıtlanır.

0 EK

0.1 Ölçülebilir Küme Değerli Dönüşümler ve Özellikleri

Bu bölümde verilen tanım ve teoremler tam olarak [7] ve [36] 'da bulunabilir. $F(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümünün ölçülebilir olmasının tanımını verelim.

TANIM 0.1.1. Eğer keyfi açık $O \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için

$$F^{-1}(O) = \{x \in \mathbb{R}^m : F(x) \cap O \neq \emptyset\} \subset \mathbb{R}^m$$

kümesi Lebesgue ölçülebilir ise, o zaman $F(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümüne ölçülebilir küme değerli dönüşüm denir.

Şimdi $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun ölçülebilir olmasının tanımını verelim.

TANIM 0.1.2. Eğer keyfi açık $O \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için

$$f^{-}(O) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) \in O\} \subset \mathbb{R}^n$$

kümesi Lebesgue ölçülebilir ise, o zaman $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna ölçülebilirdir denir.

Aşağıdaki teorem, kapalı değerli ölçülebilir küme değerli dönüşümlerin ölçülebilir selektörünün varlığını gösterir.

TEOREM 0.1.1. $F(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ kapalı değerli ölçülebilir küme değerli dönüşüm olsun. O zaman $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün ölçülebilir $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ selektörü vardır([8] [36]).

Şimdi ölçülebilir küme değerli dönüşümlerin bazı özelliklerini gösterelim.

TEOREM 0.1.2. $F_i(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2, ..., N)$ ölçülebilir küme değerli dönüşümler olsunlar. O zaman $F_*(x) = \bigcup_{i=1}^{N} F_i(x)$, $F^*(x) = \bigcap_{i=1}^{N} F_i(x)$ gibi tanımlanan $F_*(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ ve $F^*(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme değerli dönüşümleri de ölçülebilirdir.

Şimdi genel halde Caratheodory küme değerli dönüşümünün ve Caratheodory fonksiyonunun tanımını verelim ve ters görüntü teoremini ifade edelim.

TANIM 0.1.3. $G(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ kapalı değerli küme değerli dönüşüm olsun. Eğer $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $\omega \rightsquigarrow G(\omega, x)$ küme değerli dönüşümü ölçülebilir, $\forall \omega \in \mathbb{R}^k$ için $x \rightsquigarrow G(\omega, x)$ küme değerli dönüşümü sürekli ise, o zaman $G(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümüne Caratheodory küme değerli dönüşümü denir.

$f(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer $\forall x \in \mathbb{R}^m$ için $\omega \to f(\omega, x)$ ölçülebilir, $\forall \omega \in \mathbb{R}^k$ için $x \to f(\omega, x)$ fonksiyonu sürekli ise, $f(\cdot,\cdot)$ fonksiyonuna Caratheodory fonksiyonu denir.

TEOREM 0.1.3. (Ters Görüntü) $F : \mathbb{R}^k \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$, $G : \mathbb{R}^k \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ kapalı değerli ölçülebilir küme değerli dönüşümler, $g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ Caratheodory fonksiyonu olsun. O zaman $\forall \omega \in \mathbb{R}^k$ için

$$H(\omega) = \{x \in F(\omega) \mid g(\omega, x) \in G(\omega)\}$$

gibi tanımlanış $H(\cdot) : \mathbb{R}^k \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ küme değerli dönüşümü ölçülebilirdir. Ek olarak eğer $\forall \omega \in \mathbb{R}^k$ için

$$g(\omega, F(\omega)) \cap G(\omega) \neq \emptyset$$

ise, o zaman $F(\cdot,\cdot)$ küme değerli dönüşümünün ölçülebilir $f(\cdot)$ selektörü $\forall \omega \in \mathbb{R}^k$ için $g(\omega, f(\omega)) \in G(\omega)$ olacak şekilde vardır.

Şimdi de marjinal fonksiyonun ölçülebilirliği hakkında ki teoremi sunalım.

TEOREM 0.1.4. $F : \mathbb{R}^k \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ kapalı değerli, ölçülebilir küme değerli dönüşüm, $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ Caratheodory fonksiyonu olsun. O zaman

$$\forall \omega \in \mathbb{R}^k \text{ için } \nu(\omega) = \inf_{x \in F(\omega)} f(\omega, x)$$

gibi belirlenen $\nu(\cdot) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ marjinal fonksiyonu ölçülebilirdir. Ek olarak $\forall \omega \in \mathbb{R}^k$ için $R(\omega) = \left\{ x \in F(\omega) \mid f(\omega, x) = \inf_{y \in F(\omega)} f(\omega, y) \right\}$ olarak belirlenen $R(\cdot) : \mathbb{R}^k \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ marjinal küme değerli dönüşümüde ölçülebilirdir.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

SONUÇ 0.1.1. $F : \mathbb{R}^k \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ kapalı değerli ölçülebilir küme değerli dönüşüm, $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, $\rho(\cdot) : \mathbb{R}^k \to [0, \infty)$ ölçülebilir fonksiyonlar olsunlar. O zaman aşağıdaki dönüşümler ölçülebilirdir.

(1) $\omega \rightsquigarrow B(f(\omega), \rho(\omega))$ küme değerli dönüşümü

(2) $\omega \to d(f(\omega), F(\omega))$ fonksiyonu

(3) $\omega \rightsquigarrow \prod_{F(\omega)} (f(\omega))$ küme değerli dönüşümü

(4) $F(\cdot)$ küme değerli dönüşümünün ölçülebilir $\forall \omega \in \mathbb{R}^k$ için $g(\omega) \in F(\omega)$ selektörü

$$\|f(\omega) - g(\omega)\| = d(f(\omega), F(\omega))$$

olacak şekilde vardır.

Burada

$$B(f(\omega), \rho(\omega)) = \left\{ y \in \mathbb{R}^k \mid \|y - f(\omega)\| \leq \rho(\omega) \right\}$$

$$d(f(\omega), F(\omega)) = \inf_{y \in F(\omega)} \|f(\omega) - y\|$$

ve

$$\prod_{F(\omega)} (f(\omega)) = \{ y \in F(\omega) \mid \|y - f(\omega)\| = d(f(\omega), F(\omega)) \}$$

dir.

Şimdi küme değerli dönüşümlerin ölçülebilirliği ile onun support fonksiyonu arasındaki bağlantıyı karakterize eden teoremi verelim.

TEOREM 0.1.5. $F : \mathbb{R}^k \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ kapalı değerli ölçülebilir küme değerli dönüşüm olsun. O zaman $\forall p \in \mathbb{R}^m$ için

$$\omega \to c(F(\omega), p) = \sup_{f \in F(\omega)} \langle f, p \rangle$$

support fonksiyonuda ölçülebilirdir.

Eğer ek olarak, $\forall \omega \in \mathbb{R}^k$ için $F(\omega)$ kümesi konveks ve sınırlı olursa, o zaman bu teoremin terside doğrudur.

KAYNAKLAR

[1] AUBIN J.-P. & CELLINA A. *Differential Inclusions.* Springer-Verlag, Grundlehren der math. Wiss. #264, 1984.

[2] AUBIN J.-P. & EKELAND I. *Applied Nonlinear Analysis.* Wiley-Interscience, 1984.

[3] AUBIN J.P. *Viability Theory.* Birkkauser, Boston, 1991.

[4] AUBIN J.P. & FRANKOWSKA H. *Set-Valued Analysis.* Birkkauser, Boston, 1990.

[5] AUBIN J.-P. *L'Analyse Non Lineaire Et Ses Motivations Economiques.* Masson, 1983.

[6] BLAGODATSKIKH V.I. & FILIPPOV A.F. *Differential Inclusions And Optimal Control.* Proc. of Steclov Math. Inst. of AS of USSR, 169, 194-252, 1985.

[7] CASTAING CH. & VALADIER M. *Convex Analysis And Measurable Multifunctions.* Springer-Verlag, Lecture Notes in Math. #580, 1977.

[8] CASTAING CH. *Sur Les Multi-Applicationmesurables.* Inf. Rech. Op., 1, 91-126, 1967.

[9] CELLINA A. *A Theorem On The Approximation Of Set-Valued Mappings.* Rend. Ac, Na. Lincei, 47, 429-433, 1969.

[10] CELLINA A. *Approximation Of Set-Valued Functions And Fixed Point Theorems.* Annali Mat. Pura. Appl., 82, 17-24, 1969.

[11] CESARI L. *Optimization-Theory And Applications.* Springer-Verlag, 1983.

[12] CLARKE F.H. *Generalized Gradients And Applications.* Trans. Am. Math. Soc., 205, 247-262, 1975.

[13] CLARKE F.H. *Optimization And Nonsmooth Analysis.* Wiley-Interscience, 1983.

[14] CLARKE F.H. & LEDYAYEV Yu. S. & STERN R.J. & WOLENSKI P.R. *Qualitative Properties Of Differential Inclusions a Survey.* J. of dynamical and control systems, 1, 1-48, 1995.

[15] DEIMLING K. *Nonlinear Functional Analysis.* Springer-Verlag, 1985.

[16] DEMIANOV V.F. & RUBINOV A.M. *On Quasidifferentiable Functionals.* Sov. Math. Dokl., 21, 14-17, 1980.

[17] EKELAND I. & TEMAM R. *Convex Analysis And Variational Problems.* North Holland, Amsterdam, 1976.

[18] EKELAND I. & VALADIER M. *Representation Of Set-Valued Mappings.* J. Mat. Anal. Appl., 35, 621-629, 1971.

[19] FILIPPOV A.F. *On Some Problems Of Optimal Control Theory.* Vestnik Moskowskogo Universiteta, Math. no.2, 25-32, 1958.

[20] FILIPPOV A.F. *On Certain Questions In The Theory Of Optimal Control.* SIAM J. Control, 1, 76-84, 1962.

[21] GRUNBAUM B. *Convex Polytopes.* J. Wiley-Intersciences, 1967.

[22] GUSEINOV H. G., SUBBOTIN A. I. & USHAKOV V. N. *Derivatives For Multivalued Mappings With Applications To Game Theoretical Problems Of Control.* Problems of Control and Information Theory, Vol.14, 155-167, 1985.

[23] HADDAD G. *Monotone Trajectories Of Differantial Inclusions With Memory.* Isr. J. Math., 39, 83-100, 1981.

[24] KURZHANSKII A.B. & VALYI L. *Ellipsoidal Calculus For Estimation And Control.* Bickkauser, Boston, 1996.

[25] LE DONNE A. & MARCHI M.V. *Representation Of Lipschitzean Compact Conveks Valued Mappings.* Rend. Acc. Naz. Lincei, 68, 278-280, 1980.

[26] LOJASIEWICZ S.Jr (to appear) *Parametrizations Of Conveks Sets.* J. Approx. Theory

[27] MICHAEL E. *Continuous Selections I.* Annals of Math., 63, 361-381, 1956.

[28] MICHAEL E. *Continuous Selections III.* Annals of Math., 65, 375-390, 1957.

[29] OLECH C. *Existence Theory In Optimal Control, In Control Theory And Topics In Functional Analysis.* International Atom. Energy. Agency, 291-328, 1976.

[30] ORNELAS A. *Parametrization Of Caratheodory Multifunctions.* SISSA, 1988.

[31] ROCKAFELLAR R.T. & WETS R. (in preparation) *Set-Valued Analysis And Subdifferential Calculus (Monograph).*

[32] ROCKAFELLAR R.T. *Convex Analysis.* Princeton University Press, 1970.

[33] ROCKAFELLAR R.T. *Directional Differentiability Of The Optimal Value Function In a Nonlinear Programming Problem.* Differentiability of Optimal Values, 213-226, 1987.

[34] SHEPARD G. C. *The Steiner Point Of a Convex Polytope.* Canad. J. Math., 18, 1294-1300, 1966.

[35] SUBBOTIN A.I. *Generalized Solutions Of First Order Partical Differential Equations, The Dynamical Optimization Perspektive.* Birckkauser, Boston, 1995.

[36] WAGNER D.M. *Survey Of Measurable Selection Theorems.* SIAM J. Contr. Opt., 15, 859-903, 1977.

[37] WARGA J. *Optimal Control Of Differential And Funstional Equations.* Academic Press, New York, 1972.