SABİT NOKTA TEORİDE STANDART OLMAYAN METODLAR

EMRAH AKYAR

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

HAZİRAN-1998

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SABİT NOKTA TEORİDE STANDART OLMAYAN METODLAR

EMRAH AKYAR

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Orhan ÖZER

1998, Sayfa 62

Bu çalışma, genişlemeyen dönüşümler için sabit noktaların varlığına ilişkin son yıllarda yapılan ve çeşitli kaynaklarda yeralan bazı önemli sonuçların, standart olmayan kanıt yöntemleriyle verilen bazı sabit nokta teoremlerinin derlenmesi niteliğinde bir çalışmadır.

Çalışma üç bölümden oluşmuştur. İlk bölümde, ultra çarpım tekniklerine hazırlık olması amacıyla, ilgili ön bilgiler ve önemli teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde ise, sabit nokta teori genel olarak ele alınmış ve bir takım geometrik özelliklerle olan ilişkileri verilmiştir.

Son bölümde ise, ultra çarpım teknikleri yardımıyla elde edilen bazı sabit nokta teoremleri verilerek, bu konuda ilk çalışmaları yapmış olan Maurey' in bazı önemli teoremleri sıralanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Genişlemeyen Dönüşüm, Sabit Nokta Özelliği, Ultra Çarpım

ABSTRACT
Master of Science Thesis

NONSTANDART METHODS
in FIXED POINT THEORY

EMRAH AKYAR

Anadolu University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Mathematics Program

Supervisor: Prof. Orhan ÖZER

1998, Page 62

This thesis is an exposition on the work done in recent years about the existence of nonexpansive mappings and about some results took place in various literature given with nonstandard proof.

This work consists of three chapters. In the first chapter, in order to aim ultraproduct techniques some preparations are done and some important theorems are given.

In the second chapter, the fixed point theory in general is considered and its relation with some geometric properties are given.

In the last chapter, some fixed point theorems which are obtained by ultraproduct techniques are given and some important theorems of Maurey, who is the pioneer of theory, are listed.

Keywords: Nonexpansive Mappings, Fixed Point Property, Ultra Products

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\emptyset$	:	Boş küme
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Gerçel sayılar kümesi
ℓ^p	:	$\{x = (\xi_i) : \sum_{i=1}^{\infty} \lvert\xi_i\rvert^p < \infty, 1 \leq p < \infty\}$
ℓ^∞	:	$\{x = (\xi_i) : \sum_{i=1}^{\infty} \lvert\xi_i\rvert < \infty\}$
c	:	Yakınsak diziler uzayı
c_0	:	0 a yakınsayan diziler uzayı
$\mathfrak{L}(X, Y)$	:	X den Y ye tanımlı sınırlı doğrusal fonksiyonlar uzayı
$\mathrm{Fix}(T)$	:	T dönüşümünün sabit noktaları kümesi
X^*	:	X uzayının dual (eşlek) uzayı
$\mathrm{conv}(K)$	:	K kümesinin konveks zarfı
${}^w\overline{A}$	:	A kümesinin zayıf kapanışı
$B(x, r)$	:	x merkezli r yarıçaplı kapalı top
$\text{çap}(A)$	:	$\sup\{\lVert x - y\rVert : x, y \in A\}$, A kümesinin çapı
$R(A)$	:	A kümesinin Chebyshev yarıçapı
$C(A)$	:	A kümesinin Chebyshev merkezi
$\varepsilon_0(X)$	:	X uzayının düzgün dışbükeylik karakteristiği
$wk - \lim, \xrightarrow{w}$	:	Zayıf yakınsama
$\ell^\infty(X_i)$	:	$\{(x_i)_{i\in I} : \lVert(x_i)\rVert = \sup\{\lVert x_i\rVert_{X_i} : i \in I\} < \infty\}$
$C[a, b]$	:	$[a, b]$ aralığından $\mathbb{R}$ ye tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
$\alpha(K)$	:	K kümesinin Kuratowski kompaktsızlık ölçüsü
$(X)_{\mathcal{U}}$	:	X uzayının ultra kuvveti
$d(X, Y)$	:	X ve Y Banach uzayları arasındaki Banach-Mazur uzaklığı

1 ÖNBİLGİLER

Bu bölümde, ileriki bölümlerde gerekli olabileceği kadarıyla bazı genel bilgiler verilecektir. Metrik uzaylar ve topolojik uzaylar ile ilgili temel kavramların ise bilindiği kabul edilmektedir.

1.1 Schauder Tabanları

Tanım 1.1.1. *X bir Banach uzayı olsun. Eğer her $x \in X$ için*

$$x = \lim_n \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

olacak şekilde bir tek (a_n) skalerler dizisi varsa, (e_n) dizisine X için bir Schauder tabanı ya da kısaca taban denir.

Kolayca görülebileceği gibi X in bir tabanı doğrusal bağımsızdır. Ayrıca her tabanın doğurduğu alt uzay X içinde yoğundur; yani (e_n) X in bir tabanı ise (e_n) nin her sonlu doğrusal bileşimlerinden oluşan

$$\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k e_k : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$$

alt uzayının X içinde yoğun olduğunu görmek kolaydır.

Gerçekten de

$$M = span\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k e_k : a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\}$$

olsun. Keyfi bir $x \in X$ öğesi için $x \in \overline{M}$ olduğunu göstermeliyiz. (e_n), X in tabanı olduğundan $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ biçiminde tek türlü olarak yazılabilir.

Şimdi

$$\begin{aligned}
p_1 &= a_1 e_1 \\
p_2 &= a_1 e_1 + a_2 e_2 \\
&\vdots \\
p_n &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

dizisini oluşturalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \in M$ dir. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} p_n = x$ olduğundan $x \in \overline{M}$ olur. O halde $\overline{M} = X$ yani M, X içerisinde yoğundur.

Buradan bir Schauder tabanına sahip her Banach uzayının ayrılabilir olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek 1.1.2. *$e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ şeklinde n. bileşeni 1, diğer bileşenleri 0 olan (e_n) dizisi $1 \le p < \infty$ olmak üzere, ℓ^p ve c_0 için bir tabandır. Gerçekten de verilen her $x = (\xi_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \in \ell^p$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$ olduğundan,*

$$||x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k||^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p$$

$n \to \infty$ için $\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p \to 0$ olur. Aynı şekilde (e_n) dizisinin c_0 için de bir taban olduğu görülür.

Tanım 1.1.3. *X bir Banach uzayı olsun. Eğer X içerisindeki (e_n) dizisi, $\overline{span}(e_n)$ için bir taban ise (e_n) dizisine temel dizi (basic sequence) adı verilir.*

Eğer $\overline{span}(e_n) = X$ ise (e_n) temel dizisi ile (e_n) tabanı aynı şeyi ifade eder. İleriki kesimlerde (e_n) temel dizisinin normalleştirilmiş, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $||e_n|| = 1$ olduğunu kabul edeceğiz.

Verilen bir Banach uzayı için bir (Schauder) tabanının var olup olmadığı sorusu çok önemlidir. Schauder tabanına sahip her Banach uzayının ayrılabilir olduğunu gördük. Buradan ℓ^∞ un bir tabana sahip olamayacağını söyleyebiliriz. Ancak bunun tersi doğru olmak zorunda değildir, yani her ayrılabilir Banach uzayının bir tabanı olmak zorunda değildir. Buna karşın sonlu boyutlu olmayan her Banach uzayı bir temel dizi içerir (bakınız [7]).

Banach uzayının bir tabana sahip olduğu bilindiğinde akla gelen bir diğer soruda bu tabanın tek olup olmadığıdır. Bu sorunun cevabını vermeden önce iki tabanın denkliğini tanımlayalım.

Tanım 1.1.4. *(x_n) ve (y_n) X Banach uzayının iki tabanı olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ serisinin yakınsak olması ise, (x_n) ve (y_n) tabanlarına denk denir.*

Teorem 1.1.5. *X, bir Schauder tabanına sahip sonlu boyutlu olmayan bir Banach uzayı ise X içerisinde birbirine denk olmayan, normalleştirilmiş, sayılamaz çoklukta taban mevcuttur.*

Kanıt. Bakınız [7]. □

Tanım 1.1.6. *X bir Banach uzayı ve (e_n), X içerisinde bir temel dizi olsun. (a_n) skalerler dizisi ve $p_1 < p_2 < \ldots$ artan tam sayılar dizisi olmak üzere, $u_m = \sum_{n=p_m+1}^{p_{m+1}} a_n e_n$ biçimindeki sıfırdan farklı vektörlerden oluşan (u_m) dizisine blok temel dizi (block basic squence) adı verilir.*

Eğer $n_1 < n_2$ için $u = \sum_{i=n_1}^{n_2} a_i e_i$ ise u vektörüne, (e_n) temel dizisi için bir blok adını vereceğiz. Ayrıca her $x = \sum_n a_n e_n$ için

$$\mathrm{supp} x = \{n : a_n \neq 0\}$$

şeklinde tanımlı kümeye x in dayanağı adı verilir.

Teorem 1.1.7. *X bir Banach uzayı olsun. (e_n) dizisinin X içerisinde bir temel dizi olması için gerek ve yeter koşul her n ve p pozitif tam sayısına ve (a_n) skaler dizisine karşılık*

$$||\sum_{i=1}^{n} a_i e_i|| \leq c||\sum_{i=1}^{n+p} a_i e_i||$$

olacak şekilde $c > 0$ sayısının olmasıdır.

Kanıt. Bakınız [7]. □

Teorem 1.1.7 deki eşitsizliği sağlayan en küçük c sayısına (e_n) nin taban sabiti (basis constant) adı verilir. Eğer (e_n) nin taban sabiti 1 ise $(||\sum_i a_i e_i||)_{i=1}^{n}$ monoton artan dizi olur. Bu durumda (e_n) ye monoton taban adı verilir.

Tanım 1.1.8. *(e_n), X uzayı içerisinde bir temel dizi ve $X_0 = span(e_n)$ olsun. (e_n) üzerindeki doğal izdüşüm; F, $\mathbb{N}$ nin boş kümeden farklı alt kümesi olmak üzere,*

$$P_F : X_0 \to X_0$$
$$P_F(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i) = \sum_{i \in F} a_i e_i$$

şeklinde tanımlanır.

Kolayca görülebileceği gibi P_F, $\overline{\text{span}_{n\in F}}(e_n)$ üzerinde doğrusal izdüşümdür.

Böylece teorem 1.1.7, (e_n) nin temel dizi olması için gerek ve yeter koşul $(P_{[0,n]})$ izdüşümlerinin düzgün sınırlı olmasıdır şeklinde yeniden ifade edilebilir. $[0, n]$ ile 0 ve n arasındaki tamsayılar temsil edilmektedir. Gösterimde kolaylık olması bakımından $P_{[0,n]}$ yerine P_n gösterimini kullanacağız.

Böylece (e_n) nin taban sabiti $c = \sup_n ||P_n||$ şeklinde yazılabilir.

Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $||P_n|| = ||I - P_n|| = 1$ ise (e_n) temel dizisine bimonoton adı verilir.

Bir Banach uzayının Schauder tabanının varlığı bize bu uzayın yapısı hakkında yeterli bilgi vermez. Eğer bir Banach uzayının yapısı hakkında daha fazla bilgiye ihtiyaç varsa, tabanlar çeşitli özellikleri ile birlikte incelenir. Bu özelliklerden küçülen tabanlar ile sınırlı tam tabanlar, dual ve yansımalı uzaylar başlığı altında incelenecektir. Çok kullanışlı bir diğer özellik de koşulsuz (unconditional) tabanlardır.

Koşulsuz tabanın tanımını vermeden önce aşağıdaki önerme ile birlikte koşulsuz yakınsaklığın tanımını yapalım.

Önerme 1.1.9. *(x_n), X Banach uzayında bir dizi ise aşağıdaki ifadeler denktir.*

i. Tam sayıların her π permutasyonu için, $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ yakınsaktır.

ii. Her $n_1 < n_2 < \ldots$ seçilişi için, $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n_i}$ yakınsaktır.

iii. Her $\theta_n = \mp 1$ seçilişi için, $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ yakınsaktır.

iv. Her $\varepsilon > 0$ ve $\min\{i \in \sigma\} > n$ olacak şekildeki sonlu σ kümesi için $||\sum_{i\in\sigma} x_i|| < \varepsilon$ olacak şekilde n tam sayısı vardır.

Yukarıdaki önermenin koşullarından birini (dolayısı ile tümünü) sağlayan, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisine koşulsuz yakınsak (unconditionally convergent) denir.

Tanım 1.1.10. *(e_n), X uzayının Schauder tabanı olsun. Eğer her $x = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n) \in X$ için $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ serisi koşulsuz yakınsak ise (e_n) ye X Banach uzayının koşulsuz tabanı adı verilir.*

Tanım 1.1.11. *(e_n) bir temel dizi olsun. Eğer her $\sum_i a_i e_i$ yakınsak serisi ve her kesin artan (n_i) tamsayılar dizisi için, $\sum_i a_i e_i$ serisi yakınsak ve*

$$||\sum_i a_i e_i|| = ||\sum_i a_i e_{n_i}||$$

ise (e_n) temel dizisine genişleyen (spreading) adı verilir.

Düzgün sınırlılık prensibini kullanarak, $\theta_i = \mp 1$ olmak üzere her $\sum_i a_i e_i$ yakınsak serisi için $\sum_i a_i \theta_i e_i$ yakınsak ve

$$||\sum a_i \theta_i e_i|| \leq \lambda ||\sum a_i e_i||$$

olacak şekilde $\lambda \geq 1$ sabiti varsa, (e_n) in bir koşulsuz taban olduğu kanıtlanabilir. Yukarıdaki eşitsizliği sağlayan enküçük λ sabitine (e_n) in koşulsuzluk taban sabiti denir.

Teorem 1.1.12. *X koşulsuz Schauder tabanına sahip bir alt uzay ise X, c_0 veya ℓ^1 uzaylarına izomorf bir alt uzay içermeksizin, yansımalı bir uzaydır.*

Tanım 1.1.13. *X bir Banach uzayı olsun. Eğer her $x \in X$ öğesi her n için $(e_n) \in X_n$ olmak üzere, $x = \sum_n e_n$ olarak bir tek şekilde temsil edilebiliyorsa, X in kapalı alt uzaylarından oluşan (X_n) dizisine X in Schauder ayrışımı (Schauder decomposition) denir.*

Eğer her n için boy$X_n = 1$ ise Schauder ayrışımının Schauder tabanından bir farkı yoktur. Her n için boy$X_n < \infty$ olduğu durumlarda ayrışımların uygulamada çok önemli rolleri vardır.

1.2 Dual ve Yansımalı Uzaylar

X ve Y Banach uzayları, $\mathfrak{L}(X,Y)$ de X uzayından Y uzayına tanımlı tüm sınırlı (sürekli) doğrusal operatorlerin uzayını göstersin. $T \in \mathfrak{L}(X,Y)$ için,

$$\begin{aligned} ||T|| &= \sup\{||Tx||/||x|| : x \in X, x \neq 0\} \\ &= \sup\{||Tx|| : x \in X, ||x|| = 1\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa, $(\mathfrak{L}(X,Y),||.||)$ uzayı bir Banach uzayı olur. $X^* = \mathfrak{L}(X,\mathbb{R})$ uzayına X uzayının dual uzayı denir. X^* uzayının elemanlarına ise sürekli doğrusal fonksiyoneller denir. $x^* \in X^*$ ve $x \in X$ için $x^*(x)$ yerine daha kullanışlı olan $x^*(x) =< x, x^* >$ gösterimi kullanılır. $X^{**} = \mathfrak{L}(X^*,\mathbb{R})$ uzayına ise X uzayının ikinci dual uzayı denir. Eğer $x \in X$ sabit ise $< x, x^* >$, X^* üzerinde sürekli doğrusal bir fonksiyonel tanımlar. Böylece $x \in X$ doğal bir şekilde X^{**} ın x^{**} gibi bir elemanı ile ilişkilendirilmiş olur. $x \mapsto x^{**}$ dönüşümüne X in X^{**} içerisine doğal gömülmesi denir. Bu gömme dönüşümü daima doğrusal izometridir. Eğer bu dönüşüm aynı zamanda örten ise X e yansımalı uzay denir ve $X = X^{**}$ şeklinde gösterilir.

Şimdi temel diziler ile dual uzaylar arasındaki ilişkileri inceleyelim. Genelliği bozmaksızın Schauder tabanlı Banach uzayları ile, daha doğrusu bir temel dizi tarafından doğurulan alt uzaylarla çalışacağız.

Tanım 1.2.1. *(e_n), X uzayı için bir Schauder tabanı olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için X üzerindeki e_n^* sınırlı fonksiyoneli*

$$e_n^*(\sum_i a_i e_i) = a_n$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan (e_n^*) fonksiyonelleri (e_n) tabanı ile ilişkilendirilmiş biortogonal fonksiyoneller adı verilen

$$e_n^*(e_m) = \delta_n^m$$

ile karakterize edilir.

c, (e_n) nin taban sabiti olmak üzere, $||e_n^*|| \leq 2c$ olduğunu görmek kolaydır. Gerçekten, (P_n) (e_n) ile ilişkilendirilen doğal izdüşümler ise, her $n < m$ tamsayıları için

$$P_n^*(\sum_{i\leq m} a_i e_i^*) = \sum_{i\leq n} a_i e_i$$

olur. Buradan teorem 1.1.7 yardımıyla (e_n^*), X^* içerisinde taban sabiti c olan bir temel dizi olur. Bununla birlikte genelde (e_n^*), X^* ın Schauder tabanı olmak zorunda değildir. Gerçekten de ℓ^1 uzayının duali olan ℓ^∞ ayrılabilir uzay olmadığından bir tabana sahip değildir.

Tanım 1.2.2. *(e_n), X uzayının bir Schauder tabanı olsun. Eğer (e_n^*) da X^* uzayının bir Schauder tabanı ise (e_n) Schauder tabanına küçülen (shrinking) adı verilir.*

Küçülen Schauder tabanına örnek olarak, c_0 uzayının bilinen tabanını alabiliriz. Ancak ℓ^1 uzayının bilinen tabanı küçülen Schauder tabanı değildir.

Tanım 1.2.3. *(e_n), X Banach uzayının bir Schauder tabanı olsun. Eğer*

$$\sup_n \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| < \infty$$

koşulunu sağlayan her (a_n) skalerler dizisi için, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ serisi yakınsak ise (e_n) tabanına X için bir sınırlı tam taban (boundedly complete basis) adı verilir.

Açıktır ki, c_0 ın bilinen tabanı sınırlı tam değildir.

Teorem 1.2.4. *(e_n), X Banach uzayının bir küçülen Schauder tabanı ise X^{**} uzayı,*

$$\sup_n \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm skaler diziler uzayı ile özdeşleştirilebilir. Bu özdeşleştirme,

$$x^{**} \leftrightarrow (x^{**}(e_0^*), x^{**}(e_1^*), \ldots)$$

şeklindedir. Ayrıca x^{**} elemanının normu $\sup_n \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|$ ye denktir.

Açıklamalar 1.2.5. *Eğer X, (e_n) Schauder tabanına sahip ise X in yansımalı olması için gerek ve yeter koşul (e_n) nin küçülen ve sınırlı tam olmasıdır.*

Önerme 1.2.6. *(e_n), X Banach uzayının (e_n^*) biortogonal sistemi ile ilişkilendirilen normalleştirilmiş Schauder tabanı olsun. (x_k) dizisi, $k \to \infty$ için $e_n^*(x_k) \to 0$ olacak şekilde sınırlı bir dizi yani (x_k) dizisinin katsayıları 0 a noktasal olarak yakınsasın. Bu durumda,*

$$\lim \|x_{k_i} - u\| = 0$$

olacak şekilde (x_k) nın (x_{k_i}) alt dizisi ile (e_n) ardışık blocks (u_i) dizisi vardır.

1.3 Zayıf ve Zayıf* Topolojiler

$x^* \in X^*$ için $p_{x^*}(x) = | < x, x^* > |$, X üzerinde bir yarı normdur. $\{p_{x^*} : x^* \in X^*\}$ yarı normlar ailesinin X üzerinde doğurduğu topolojiye X üzerindeki zayıf topoloji denir ve bu topoloji "wk" ya da $\sigma(X, X^*)$ şeklinde gösterilir.

X^* üzerindeki zayıf* topoloji ise "wk^*" ya da $\sigma(X^*, X)$ şeklinde gösterilir ve yine $p_x(x^*) = | < x, x^* > |$ olmak üzere $\{p_x : x \in X\}$ yarı normlar ailesi ile tanımlanır.

O halde $U \subset X$ kümesinin zayıf açık olması için gerek ve yeter koşul her $x_0 \in U$ için

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{x \in X : | < x - x_0, x_k^* > | < \varepsilon\} \subseteq U$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ ve $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ olmasıdır.

X in zayıf topolojisine göre açık olan her küme, X in orjinal topolojisine görede açıktır; ancak bunun tersi doğru olmayabilir.

X içerisindeki bir $\{x_i\}$ ağının x_0 a zayıf yakınsaması için gerek ve yeter koşul ise her $x^* \in X^*$ için $< x_i, x^* > \to < x_0, x^* >$ olmasıdır.

Ayrıca X üzerindeki zayıf topoloji, X^* ın her elemanının sürekli olduğu en kaba topolojidir.

Şimdi kanıtlarına girmeksizin zayıf ve zayıf* topolojilerin ileride sıkca kullanacağımız bazı iyi bilinen özelliklerini sıralayalım:

i. X uzayının K konveks alt kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul K nin zayıf kapalı olmasıdır.

ii. Eğer K, X uzayının zayıf kompakt alt kümesi ise $\overline{conv}(K)$ da zayıf kompakttır.

iii. (Alaoglu Teoremi) X^* uzayındaki $B(0,1)$ birim topu zayıf* topolojiye göre kompakttır.

iv. X uzayı yansımalı ise X içerisindeki her top zayıf topolojiye göre kompakttır.

v. X uzayının herhangi A alt kümesi için aşağıdakiler denktir.

a) A içindeki her (x_n) dizisinin zayıf yakınsak olan alt dizisi vardır.

b) A içindeki her (x_n) dizisinin zayıf yığılma noktası vardır.

c) A nın zayıf kapanışı ${}^{w}\overline{A}$ zayıf kompaktır.

vi. X^* dual uzayının K alt kümesinin zayıf* kapalı olması için gerek ve yeter koşul her $r > 0$ için $\{x^* \in K : ||x^*|| \leq r\}$ kümesinin zayıf* kapalı olmasıdır.

vii. X uzayı ayrılabilir uzay ve K, X^* ın konveks alt kümesi ise K nın zayıf* kapalı olması için gerek ve yeter koşul K nın zayıf* dizisel kapalı olmasıdır.

viii. X Banach uzayının yansımalı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki denk ifadelerin geçerli olmasıdır.

a) X^* yansımalıdır.

b) $B(0,1)$, X^* içerisinde zayıf kompakttır.

c) X içindeki her sınırlı dizinin zayıf yakınsak alt dizisi vardır.

d) Her $x^* \in X^*$ için $x^*(x) = ||x^*||$ olacak şekilde $x \in B(0,1)$ vardır.

e) X in herhangi sınırlı, kapalı, konveks K alt kümesi ve her $x^* \in X^*$ için $x^*(x) = \sup\{x^*(y) : y \in K\}$ olacak şekilde $x \in K$ vardır.

f) X uzayının boş kümeden farklı, sınırlı, kapalı ve konveks alt kümelerinden oluşan herhangi bir azalan (K_n) dizisi için $\cap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$ olmasıdır.

ix. X bir Banach uzayı ve (e_n) de X in bir tabanı olsun. X in yansımalı olması için gerekli ve yeterli koşul (e_n) tabanının küçülen ve sınırlı tam olmasıdır.

1.4 Süzgeçler

Bu bölümde süzgeçler ve ultra süzgeçler tanımlanarak, ultra süzgeçler yardımıyla elde edilen bazı önemli sonuçlar verilecektir.

Tanım 1.4.1. *I boş kümeden farklı bir küme olsun. I üzerinde bir $\mathcal{F}$ süzgeci diye, I nın boş kümeden farklı alt kümelerinden oluşan ve aşağıdaki iki özelliği sağlayan, bir $\mathcal{F}$ küme ailesine denir.*

i. $A, B \in \mathcal{F}$ *ise* $A \cap B \in \mathcal{F}$;

ii. $A \in \mathcal{F}$ *ve* $A \subset B$ *ise* $B \in \mathcal{F}$.

Yukarıdaki tanımdan da görüldüğü gibi I nın kendisi I üzerindeki herhangi bir süzgecin elemanıdır. Aşağıdaki örnekler ileride sıkça kullanacağımız süzgeçlerden bazılarıdır.

Örnek 1.4.2. *Sabit bir* $i \in I$ *için* $\mathcal{F}_i = \{A \subset I : i \in A\}$ *şeklinde tanımlanan* $\mathcal{F}_i$, I *üzerinde bir süzgeçtir.* $\mathcal{F}_i$ *ye aşikar süzgeç adı verilir. Açıkca görülmektedir ki,* $\mathcal{F}_i$ *nin aşikar süzgeç olması için gerek ve yeter koşul* $\emptyset \notin \mathcal{F}_i$ *ve* $\{i\} \in \mathcal{F}_i$ *olacak şekilde* $i \in I$ *olmasıdır.*

Örnek 1.4.3. $\mathcal{F} = \{A \subset I : I \setminus A$ *sonlu* $\}$ *şeklinde tanımlanan* $\mathcal{F}$ *de* I *üzerinde bir süzgeçtir.* $\mathcal{F}$ *ye Frechet süzgeci denir.*

Örnek 1.4.4. I *bir topolojik uzay,* $i \in I$ *ve* $\mathcal{F}_i = \{V : V, i$ *nin bir komşuluğudur*$\}$ *ise* $\mathcal{F}_i$, i *ye karşılık gelen süzgeçtir (komşuluklar süzgeci).*

Örnek 1.4.5. $(I, \leq)$ *sıralı bir küme ve* $\forall i, j \in I$ *için* $\exists k \in I \ni i \leq k, j \leq k$ *yani* I *kümesi yukarı doğru yönlendirilmiş (upward directed) olsun.* $\mathcal{F} = \{B \subset I : \exists i_0 \in I \ni \forall i \geq i_0$ *için* $i \in B\}$ *ailesi* I *üzerinde bir süzgeç belirtir.*

Aşağıdaki önermenin doğruluğu kolayca görülür.

Önerme 1.4.6. I *herhangi bir küme ve* $\mathcal{B} \subset 2^I$ *kesişim altında değişmez olsun.*

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}) = \{A \subset I : \exists B \in \mathcal{B} \ni B \subset A\}$$

ailesini tanımlayalım. $\mathcal{F}(\mathcal{B})$, I *üzerinde bir süzgeçtir. Ayrıca* $\mathcal{B}$ *yi içeren her süzgeç* $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ *yi de içermek zorundadır.*

Eğer $\mathcal{F}$, I üzerinde bir süzgeç ve $\emptyset \in \mathcal{F}$ ise $\mathcal{F} = 2^I$ dır. Bu durumda $\mathcal{F}$ ye has olmayan süzgeç denir.

I üzerindeki her süzgeç I yı içereceğinden, I üzerindeki herhangi süzgeçler ailesinin arakesiti boş kümeden farklıdır ve kolayca görülebileceği gibi I üzerinde bir süzgeçdir. Fakat aynı sonucu, yukarı doğru yönlendirilmiş kümeler hariç, birleşim için söyleyemeyiz.

I üzerindeki has olmayan süzgeçler dışındaki tüm süzgeçlerin kümesini $\mathcal{P}$ ile gösterelim.

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{F} : \mathcal{F}, I \text{ üzerinde bir süzgeç ve } \mathcal{F} \neq 2^I\}$$

$\mathcal{P}$ kapsama bağıntısına göre kısmen sıralı bir kümedir. Ayrıca $\mathcal{P}$ nin artan her zincirinin bir üst sınırı vardır. O halde, Zorn Teoremine göre $\mathcal{P}$ nin bir maximal elemanı vardır. Başka bir deyişle, $\exists \mathcal{F} \in \mathcal{P} \ni \mathcal{D} \in \mathcal{P}$ ve $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ ise $\mathcal{F} = \mathcal{D}$ dir

Tanım 1.4.7. *$\mathcal{P}$ nin maksimal elemanlarına I üzerinde ultra süzgeç adı verilir.*

Maksimal elemanların varlıklarını Zorn Teoremi yardımı ile bilmemize karşın, bu elemanları belirlemek genelde kolay değildir. Bu yüzden bir süzgecin ultra süzgeç olup olmadığını belirlemek için aşağıdaki önermelerden yararlanacağız.

Önerme 1.4.8. *I üzerindeki bir $\mathcal{U}$ süzgecinin ultra süzgeç olması için gerek ve yeter koşul $\forall A \subset I$ için A ya da $I \setminus A$ nın $\mathcal{U}$ nun elemanı olmasıdır.*

Kanıt. $\Leftarrow$: $\mathcal{U}$ süzgeci yukarıdaki koşulları sağlasın, $\mathcal{F}$ de I üzerinde bir süzgeç ve $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}, \mathcal{U} \neq \mathcal{F}$ olsun. Yani $\mathcal{U}$ maksimal olmasın. O zaman $A \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{U}$ alalım. $\mathcal{U}$ yukarıdaki koşulları sağladığından $I \setminus A \in \mathcal{U}$ olur. $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ olduğundan A ve $I \setminus A$, $\mathcal{F}$ nin elemanıdır. $\mathcal{F}$ süzgeç olduğundan, $\emptyset = A \cap (I \setminus A) \in \mathcal{F}$ dir. $\emptyset \in \mathcal{F}$ olduğundan $\mathcal{F} = 2^I$ olur. O halde $\mathcal{U}$ maksimaldir, yani ultra süzgeçtir.

$\Rightarrow$: $\mathcal{U}$, I üzerinde bir ultra süzgeç ve $A \subset I$ olsun. $I \setminus A \notin \mathcal{U}$ olduğunu kabul edelim. $A \in \mathcal{U}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\mathcal{B} = \{A \cap B : B \in \mathcal{U}\}$$

ailesini alalım. $\mathcal{F}(\mathcal{B})$, bir önceki önermede olduğu gibi, I üzerinde $\mathcal{B}$ tarafından üretilen bir süzgeç ve $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}(\mathcal{B})$ dir. Eğer $B \in \mathcal{U}$ ise $A \cap B \in \mathcal{B} \subset \mathcal{F}(\mathcal{B})$ dolayısı ile $B \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$ olur. $\mathcal{U} = \mathcal{F}(\mathcal{B})$ olduğunu göstererek kanıtı tamamlayalım. $I - A \notin \mathcal{U}$ olduğundan $\emptyset \notin \mathcal{B}$ dir, buradan $\emptyset \notin \mathcal{F}(\mathcal{B})$ ve $\mathcal{U}$ nun maksimal olması $\mathcal{U} = \mathcal{F}(\mathcal{B})$ olmasını gerektirir. O halde $A \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$ olduğundan kanıt tamamlanır. □

Açıklamalar 1.4.9.

1. *Zorn Lemma yı kullanarak I üzerindeki herhangi bir süzgeci ultra süzgece genişletebiliriz.*

2. *I üzerindeki herhangi bir aşikar süzgeç aynı zamanda bir ultra süzgeçtir.*

Önerme 1.4.10. *$\mathcal{U}$, I üzerinde bir ultra süzgeç olsun. Herbir $I_i \subset I$ olmak üzere, $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n \in \mathcal{U}$ ise bazı k lar için $I_k \in \mathcal{U}$ dır.*

Kanıt. Tersine herbir $k = 1, 2, \ldots n$ için $I_k \notin \mathcal{U}$ olduğunu kabul edelim. O zaman bir önceki önermeye göre $I \setminus I_k \in \mathcal{U}$ olur. Buradan

$$\emptyset = \bigcap_{1 \leq k \leq n} (I \setminus I_k) \cap (\bigcup_k I_k) \in \mathcal{U}$$

olur. Bu ise $\mathcal{U}$ nun ultra süzgeç olması ile çelişir. □

Bu önerme yardımıyla ultra süzgeçlerin bir başka özelliğini de verebiliriz.

Önerme 1.4.11. *I üzerindeki $\mathcal{U}$ ultra süzgecinin aşikar süzgeç olması için gerek ve yeter koşul en az bir A sonlu kümesi için $A \in \mathcal{U}$ olmasıdır.*

Kanıt. $\Leftarrow$: A kümesi olarak, $A = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ alalım. Önceki önermede $I_1 = \{i_1\}$,$I_2 = \{i_2\}$, ... ,$I_n = \{i_n\}$ alacak olursak enaz bir k için $I_k = \{i_k\} \in \mathcal{U}$ olur ve böylece $\mathcal{U} = \mathcal{F}_{i_k}$ olur. Kanıtın diğer yönü ise aşikar süzgeç tanımından görülür. □

Ultra süzgeçleri genelde $\mathbb{N}$ üzerinde alacağız. Bu durumda karşımıza ultra süzgeçlerin bazı önemli özellikleri çıkar.

Önerme 1.4.12. *$\mathbb{N}$ üzerindeki aşikar olmayan her $\mathcal{U}$ ultra süzgeci sayılabilir tam değildir, yani herbir $A_n \in \mathcal{U}$ ve $\bigcap_n A_n = \emptyset$ olacak şekilde bir (A_n) dizisi vardır.*

Kanıt. $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\mathcal{U}$ aşikar olmayan süzgeç olduğundan $n \notin A_n$ ve $A_n \in \mathcal{U}$ olacak şekilde bir (A_n) dizisi vardır. Gerçekten $A_n = \mathbb{N} \setminus \{n\}$ olarak alabiliriz. Açıktırki $\bigcap_n A_n = \emptyset$ dur. □

1.5 Süzgeçler Üzerinde Limitler

Bu bölümde Hausdorff topolojik uzayları ile çalışacağız. Süzgeçlere ve ultra süzgeçlere bağlı olarak topolojik uzaylar üzerinde yakınsaklığı tanımladıktan sonra bazı önemli sonuçlar üzerinde duracağız.

Tanım 1.5.1. *$(x_i)_{i\in I}$, X in I kümesi tarafından damgalanan elemanlarının bir kolleksiyonu olsun. $\mathcal{F}$ de I üzerinde bir süzgeç ve $x \in X$ olsun. Eğer x in herhangi bir V komşuluğu için $\{i \in I : x_i \in V\} \in \mathcal{F}$ oluyorsa, (x_i) kolleksiyonuna $\mathcal{F}$ üzerinde $x \in X$ e yakınsar denir. Bu limit*

$$\lim_{i,\mathcal{F}} x_i \text{ ya da } \lim_{\mathcal{F}} x_i$$

şeklinde gösterilir.

Eğer $\mathcal{F}$ has olmayan bir süzgeç değil ise $\mathcal{F}$ üzerindeki limit tektir. Bu iddiayı kanıtlamak için $(x_i)_{i\in I}$ kolleksiyonunun $\mathcal{F}$ üzerinden x_0 ve x_0' gibi iki farklı noktaya yakınsadığını kabul edelim. X Hausdorff uzay olduğundan x_0 ve x_0' noktalarının $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V komşulukları vardır. Süzgeçler üzerinde limit tanımını kullanırsak, $A = \{i \in I : x_i \in U\} \in \mathcal{F}$ ve $B = \{i \in I : x_i \in V\} \in \mathcal{F}$ dir. Ancak $A \cap B = \emptyset$ olduğundan iki farklı limit noktası olamaz.

Eğer C, X in kapalı bir alt kümesi ve $\{x_i\} \subset C$ ise $\lim_{\mathcal{F}} x_i$ C ye aittir. Eğer $\lim_{\mathcal{F}} x_i = x_0 \notin C$ ise yine yukarıda yaptığımıza benzer olarak, C nin kapalılığından x_0 ın $C \cap U = \emptyset$ olacak şekilde U komşuluğu vardır. $\{i \in I : x_i \in U\} = \emptyset$ olduğundan $x_0 \in C$ olmak zorundadır.

Aşikar süzgeç tanımından kolayca görülebileceği gibi eğer $\mathcal{F}_{i_0}$, i_0 tarafından üretilen aşikar süzgeç ise $\lim_{\mathcal{F}_{i_0}} x_i = x_{i_0}$ dır.

Önerme 1.5.2. *$\mathcal{U}$, $\mathbb{N}$ üzerinde aşikar olmayan ultra süzgeç ve (x_n) de X topolojik uzayında x noktasına yakınsayan bir dizi olsun. Bu takdirde (x_n), $\mathcal{U}$ süzgecine göre x e yakınsar, yani $\lim_{\mathcal{U}} x_n = x$ olur.*

Kanıt. V, $x \in X$ in herhangi bir komşuluğu olsun. $\lim x_n = x$ olduğundan $\{i : x_i \notin V\}$ kümesi sonludur. Daha önce kanıtladığımız önerme 1.4.8 ve önerme 1.4.11

kullanacak olursak, $\mathcal{U}$ aşikar olmayan süzgeç olduğundan yukarıdaki sonlu küme $\mathcal{U}$ nun elemanı olamaz. $\mathcal{U}$ ultra süzgeç olduğundan bu kümenin tümleyeni $\mathcal{U}$ nun elemanı olmak zorundadır. O halde $\{i : x_i \in V\} \in \mathcal{U}$ olur. □

Açıklamalar 1.5.3. *X bir metrik uzay olsun. Eğer $\mathcal{U}$ aşikar olmayan ultra süzgeç ve $\lim_{\mathcal{U}} x_n = x$ ise (x_n) in X topolojik uzayına göre x e yakınsayan bir alt dizisi vardır.*

Aşağıdaki teorem ultra süzgeçlerin kompaktlığı karakterize ettiğini göstermesi bakımından önemlidir.

Teorem 1.5.4. *K bir Hausdorff topolojik uzay olsun. K nın kompakt olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $(x_i)_{i\in I} \subset K$ kolleksiyonunun I üzerindeki herhangi bir $\mathcal{U}$ ultra süzgecinde yakınsak olmasıdır.*

Kanıt. $\Rightarrow$: K kompakt bir küme olsun. $(x_i)_{i\in I} \subset K$ ve $\mathcal{U}$, I üzerinde bir ultra süzgeç olsun. Kabul edelim ki $(x_i)_{i\in I}$ hiçbir $x \in K$ noktasına yakınsamasın. O zaman herbir $x \in K$ için $\exists V_x \in \mathcal{N}_x \ni \{i \in I : x_i \in V_x\} \notin \mathcal{U}$. Ayrıca $K \subset \bigcup_{x\in K} V_x$ ve K kompakt olduğundan, $\exists V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n} \ni K \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{y_j}$ dir. Bu ise $I = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ olmasını gerektirir. Burada $I_j = \{i \in I : x_i \in V_{y_j}\}$ dir. $I \in \mathcal{U}$ olduğuna göre daha önceden kanıtladığımız önerme 1.4.10 yardımı ile $\exists 1 \leq k \leq n$ için $I_k \in \mathcal{U}$ olmak zorundadır. Bu ise I_j lerin seçilişi ile çelişir. O halde $(x_i)_{i\in I}$ $\mathcal{U}$ üzerinde yakınsaktır.
$\Leftarrow$: Verilen her $(x_i)_{i\in I} \subset K$ kolleksiyonu I üzerindeki herhangi bir $\mathcal{U}$ ultra süzgecine göre yakınsak olsun. $(F_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$, K nın sonlu arakesit özelliğine sahip kapalı alt kümelerinin ailesi olsun. $\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$ olduğunu göstereceğiz. $I = \{A \subset \Gamma : A \text{ sonlu }\}$ kümesini alalım ve $x_A \in \bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ olsun. $[A,\infty) := \{B \in I : A \subset B\}$ olmak üzere, $\mathcal{B} = \{[A,\infty) : A \in I\} \subset 2^I$ yı alalım. $[A,\infty) \cap [A',\infty) = [A \cup A',\infty)$ olduğundan $\mathcal{B}$ kesişim altında değişmez kalır. O halde önceki kesimde olduğu gibi $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ süzgecini tanımlayabiliriz. $\emptyset \notin \mathcal{B}$ olduğundan $\mathcal{F}(\mathcal{B})$, I üzerinde has olmayan süzgeç değildir. $\mathcal{U}$, I üzerinde $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ yi kapsayan bir ultra süzgeç olsun. K üzerindeki varsayımımızdan $\lim_{A,\mathcal{U}} x_A = x$ vardır. Kanıtımızı x in her F_α nın elemanı olduğunu göstererek tamamlayalım. Bunun için tersine enaz bir α' için $x \notin F_{\alpha'}$ olduğunu kabul

edelim. O zaman $\exists V_x \in \mathcal{N}_x \ni V_x \cap F_{\alpha'} = \emptyset$ olur. Ancak $\lim_{\mathcal{U}} x_A = x$ olduğundan $I_x = \{A \in I : x_A \in V_x\} \in \mathcal{U}$. Ayrıca $[\{\alpha'\}, \infty) \in \mathcal{B} \subset \mathcal{F}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{U}$ olduğundan $[\{\alpha'\}, \infty) \in \mathcal{U}$ olur. Herhangi $A \in I_x \cap [\{\alpha'\}, \infty)$ için $x_A \in V_x$ ve $x_A \in \bigcap_{\gamma \in A} F_\gamma \subset F_{\alpha'}$ olur. Bu ise $V_x \cap F_{\alpha'} = \emptyset$ olması ile çelişir. O halde $I_x \cap [\{\alpha'\}, \infty) = \emptyset \in \mathcal{U}$ olur. Bu sonuç $\mathcal{U}$ nun ultra süzgeç olması ile çelişir. □

Doğrusal topolojik uzaylar içinde limit tanımlayabileceğimizden dolayı, bu kavramın doğrusal yapıyla ilişkisini araştırmak gerekir. Aşağıda verilen ve doğrulukları kolayca görülebilecek iki önerme bu ilişkiyi vermektedir.

Önerme 1.5.5. *X doğrusal topolojik uzay ve $\mathcal{U}$, I üzerinde bir ultra süzgeç olsun. $(x_i)_{i \in I}$ ve $(y_i)_{i \in I}$, X in iki alt kolleksiyonu ve $\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$, $\lim_{\mathcal{U}} y_i = y$ ise*

$$\lim_{\mathcal{U}}(x_i + y_i) = x + y \quad ve \quad \lim_{\mathcal{U}} \alpha x_i = \alpha x$$

dir.

Kanıt. $\lim_{\mathcal{U}}(x_i + y_i) = x + y$ olduğunu görmek için, $x + y$ nin keyfi bir W komşuluğunu alalım. Doğrusal topolojik uzaylarda toplamın sürekliliğinden, $U + V \subseteq W$ olacak şekilde x in bir U, y nin de bir V komşuluğu vardır.

$\lim_{\mathcal{U}} x_i = x \Rightarrow \{i \in I : x_i \in U\} \in \mathcal{U}$ ve

$\lim_{\mathcal{U}} y_i = y \Rightarrow \{i \in I : y_i \in V\} \in \mathcal{U}$ dir.

$\mathcal{U}$ süzgeç olduğundan,

$$\{i \in I : x_i \in U\} \cap \{i \in I : y_i \in V\} \in \mathcal{U}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \{i \in I : x_i \in U\} \cap \{i \in I : y_i \in V\} \in \mathcal{U} &\subseteq \{i \in I : x_i + y_i \in U + V\} \\ &\subseteq \{i \in I : x_i + y_i \in W\} \end{aligned}$$

olduğundan $\{i \in I : x_i + y_i \in W\} \in \mathcal{U}$ olur. O halde $\lim_{\mathcal{U}}(x_i + y_i) = x + y$ dir. Benzer şekilde $\lim_{\mathcal{U}}(\alpha x_i) = \alpha x_i$ olduğu da gösterilebilir. □

Önerme 1.5.6. *X ve Y Hausdorff topolojik uzaylar ve $\mathcal{U}$ da I üzerinde herhangi bir ultra süzgeç olsun. f, X den Y ye sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $(x_i)_{i \in I} \subset X$ ve $\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$ varsa, $\lim_{\mathcal{U}} f(x_i)$ vardır ve $\lim_{\mathcal{U}} f(x_i) = f(x)$ dir.*

Kanıt. W, Y uzayında $f(x)$ in keyfi bir komşuluğu olsun. f sürekli bir fonksiyon olduğundan X içerisinde x in $f(U) \subseteq W$ olacak şekilde bir U komşuluğu vardır. Ayrıca $\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$ olduğundan, bu U komşuluğu için $\{i \in I : x_i \in U\} \in \mathcal{U}$ dur. Buradan

$$\{i \in I : x_i \in U\} \subseteq \{i \in I : f(x_i) \in W\}$$

olduğu düşünülürse $\{i \in I : f(x_i) \in W\} \in \mathcal{U}$ elde edilir. O halde $\lim_{\mathcal{U}} f(x_i) = f(x)$ dir. □

1.6 Ağlar

Bu bölümde ağların ve ultra ağların temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 1.6.1. *Boş kümeden farklı bir $\mathcal{D}$ kümesi üzerinde $\geq$ ile gösterilen bağıntı,*

i. $m, n, p \in \mathcal{D} \ni m \geq n$ *ve* $n \geq p \Rightarrow m \geq p$ *;*

ii. $m \in \mathcal{D} \Rightarrow m \geq m$*;*

iii. $m, n \in \mathcal{D}$ *ise* $\exists p \in \mathcal{D} \ni p \geq m$ *ve* $p \geq n$

özelliklerini sağlıyorsa, $\geq$ bağıntısına $\mathcal{D}$ kümesini yönlendiriyor, $(\mathcal{D}, \geq)$ ikilisine de yönlendirilmiş küme denir. Yukarıdaki özelliklere ek olarak, $\forall m, n \in \mathcal{D}$ için ya $m \geq n$ ya da $n \geq m$ oluyorsa, $(\mathcal{D}, \geq)$ ikilisine doğrusal yönlendirilmiş küme denir.

Tanım 1.6.2. *$\mathcal{D}$ yönlendirilmiş bir küme ve S herhangi bir küme olsun. Bir $x : \mathcal{D} \to S$ fonksiyonuna S içinde bir ağ adı verilir. Ağları göstermek için $\{x_n : n \in \mathcal{D}\}$ gösterimini kullanacağız. Burada x_n gösteriminin anlamı $x(n)$ dir.*

S kümesi içinde bir $\{x_n : n \in \mathcal{D}\}$ ağı ile bir $G \subset S$ kümesi verilsin. $\exists n_0 \in \mathcal{D} \ni n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in G$ ise $\{x_n : n \in \mathcal{D}\}$ ağına sonunda G kümesi içinde kalıyor (eventually in G) denir. Herhangi bir $n \in \mathcal{D}$ için $\exists m \in \mathcal{D}, m \geq n$ iken $x_m \in G$ ise $\{x_n : n \in \mathcal{D}\}$ ağına sıkça G içindedir (frequently in G) denir.

Eğer $\{x_n : n \in \mathcal{D}\}$ ağı sıkça G içinde bulunuyor ve $\mathcal{E} = \{n \in \mathcal{D} : x_n \in G\}$ dersek, $\mathcal{E}$ şu özelliğe sahiptir: herhangi bir $n \in \mathcal{D}$ için $\exists m \in \mathcal{E} \ni m \geq n$ dir. $\mathcal{D}$ nin *bu şekildeki kümelerine cofinal adı verilir. $\mathcal{D}$ nin herbir cofinal alt kümesi de $\geq$ ile yönlendirilmiş bir kümedir.*

Tanım 1.6.3. *S bir Hausdorff topolojik uzay ve $p \in S$ olsun. p nin her komşuluğu için $\{x_n : n \in \mathcal{D}\}$ ağı sonunda p nin komşuluğu içerisinde kalıyorsa, $\{x_n : n \in \mathcal{D}\}$ ağı $p \in S$ noktasına yakınsıyor denir. Bu durum $\lim_{n \in \mathcal{D}} x_n = p$ şeklinde gösterilir.*

Limit noktasının tek olduğunu gösterelim. Kabul edelimki, $\lim_{n \in \mathcal{D}} x_n = p_1$, $\lim_{n \in \mathcal{D}} x_n = p_2$ ve $p_1 \neq p_2$ olsun. S Hausdorff uzay olduğundan. $\exists V_{p_1} \in \mathcal{N}_{p_1}$, $V_{p_2} \in \mathcal{N}_{p_2} \ni V_{p_1} \cap V_{p_2} = \emptyset$, ayrıca $\{x_n : n \in \mathcal{D}\}$ ağı sonunda hem V_{p_1} hemde V_{p_2} içinde kaldığından $\exists m_1, m_2 \in \mathcal{D} \ni x_{m_1} \in V_{p_1}$ ve $x_{m_2} \in V_{p_2}$ olur.$\mathcal{D}$ yönlendirilmiş bir küme olduğundan $exists m_3 \in \mathcal{D} \ni m_1 \leq m_3,\ m_2 \leq m_3$ olur. Böylece $x_{m_3} \in V_{p_1} \cap V_{p_2}$ elde edilir. Bu ise $V_{p_1} \cap V_{p_2} = \emptyset$ olması ile çelişir. O halde limit noktası varsa tektir.

Tanım 1.6.4. *$\{z_n : n \in \mathcal{D}\}$ ağının $\{z_n : n \in \mathcal{E}\}$ ağının bir alt ağı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ fonksiyonunun var olmasıdır.*

i. $z_n = x_{\varphi(n)}$

ii. $\forall m \in \mathcal{E}$ *için* $\exists n \in \mathcal{D} \ni p \geq n \Rightarrow \varphi(p) \geq m$

Tanım 1.6.5. *$\{x_n : n \in \mathcal{D}\}$, X içerisinde bir ağ olsun. $\forall G \subset X$ için, G kümesi ya da G kümesinin tümleyeni sonunda $\{x_n : n \in \mathcal{D}\}$ ağını içeriyorsa, $\{x_n : n \in \mathcal{D}\}$ ağına ultra ağ adı verilir.*

Teorem 1.6.6. *X bir Hausdorff topolojik uzay, $(x_n)_{n \in \mathcal{D}}$ de X içerisinde bir ağ ise, $(x_n)_{n \in \mathcal{D}}$ ağının ultra ağ olan bir alt ağı vardır.*

Kanıt. $(x_n)_{n \in \mathcal{D}}$, X içerisinde bir ağ olsun.

$$\mathcal{F} = \{G \subset \mathcal{D} : \{n : n \in \mathcal{D}\} \text{ kümesi sonunda } G \text{ içerisinde kalsın. }\}$$

kümesini tanımlayalım. $\mathcal{D} \in \mathcal{F}$ olduğundan, $\mathcal{F}$ boş kümeden farklıdır. Ayrıca $\mathcal{F}$ nin $\mathcal{D}$ üzerinde bir süzgeç olduğunu görmek de kolaydır. O halde $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ olacak şekilde bir $\mathcal{U}$ ultra süzgeci vardır. Aşağıdaki gibi bir $\mathfrak{U}$ kümesi tanımlayacak olursak,

$$\mathfrak{U} = \{(n, F) : n \in F \text{ ve } F \in \mathcal{U}\}$$

$\mathfrak{U}$ kümesi, $(n, F) \geq (m, G) \Rightarrow F \subset G$ şeklinde tanımlanan $\geq$ bağıntısı ile yönlendirilmiş bir kümedir. $\varphi : \mathfrak{U} \to \mathcal{D}$, $\varphi(n, F) = n$ şeklinde bir φ fonksiyonu tanımlayalım. İddamız $(x_{\varphi(n,F)})_{(n,F)\in\mathfrak{U}}$ ağı $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}}$ ağının bir alt ağıdır ve $(x_{\varphi(n,F)})_{(n,F)\in\mathfrak{U}}$ bir ultra ağdır. Şimdi iddamızı kanıtlayalım. Bunun için $m \in \mathcal{D}$ olsun ve $A = \{n \in \mathcal{D} : n \geq m\}$ alırsak, $A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ ve $m \in A$ olduğundan $(m, A) \in \mathfrak{U}$ olur. Şimdi eğer $(p, G) \geq (m, A)$ ise $G \subset A$ buradan $p \in G$ dolayısı ile $p \in A$ yani $p \geq m$ olur. Buradan $\varphi(p, G) \geq m$ elde edilir. Bu ise $\{x_{\varphi(n,F)} : (n, F) \in \mathfrak{U}\}$ ağı, $\{x_n : n \in \mathcal{D}\}$ nin bir alt ağı olması demektir. $\mathcal{U}$ nun maksimal olması bu ağın ultra ağ olmasını gerektirir. □

Teorem 1.6.7. *X Hausdorff topolojik uzay olsun.*

$$\begin{aligned} X \textit{ Kompakt } &\Leftrightarrow X \textit{ içerisindeki her ağın bir yığılma noktası vardır} \\ &\Leftrightarrow X \textit{ içindeki her ultra ağ yakınsaktır.} \end{aligned}$$

Kanıt. $\Rightarrow$: X kompakt ve $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}}$ X içinde bir ağ olsun. $\forall\alpha \in \mathcal{D}$ için $F_\alpha = \overline{\{x_{\alpha'} | \alpha \leq \alpha'\}}$ diyelim. $\{F_\alpha | \alpha \in \mathcal{D}\}$ kapalı kümelerin sonlu arakesit özelliğine sahip bir ailesidir. Çünkü F_{α_1} ve F_{α_2} için $\exists\alpha_3 \in \mathcal{D} \ni \alpha_1 \leq \alpha_3, \quad \alpha_2 \leq \alpha_3$ olur. Böylece $F_{\alpha_3} \subset F_{\alpha_1}, F_{\alpha_3} \subset F_{\alpha_2}$ yani $F_{\alpha_3} \subset F_{\alpha_1} \cap F_{\alpha_2}$ dir. X kompakt olduğundan $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{D}} F_\alpha \neq \emptyset$. Şimdi $x \in \bigcap_{\alpha\in\mathcal{D}} F_\alpha$ olsun x in $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}}$ ağının bir yığılma noktası olduğunu görelim. Eğer x, $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}}$ ağının bir yığılma noktası değilse

$$\exists U \in \mathcal{N}_x \text{ ve } \exists\alpha_0 \in \mathcal{D} \text{ için}$$

$$U \cap \{x_{\alpha'} | \alpha_0 \leq \alpha'\} = \emptyset$$

olur. Bu durumda $x \notin \overline{\{x_{\alpha'} | \alpha \leq \alpha'\}} = F_{\alpha_0}$ olur. Bu sonuç $x \in \bigcap_{\alpha\in\mathcal{D}} F_\alpha$ oluşuyla çelişir.

$\Leftarrow$: X içindeki her ağın en az bir yığılma noktası var olsun. Bu durumda X in kompakt olduğunu gösterelim. $\mathcal{F}$ ile X içinde sonlu arakesit özelliğine sahip kapalı kümelerin bir ailesini gösterelim. $\cap_{F\in\mathcal{F}}F \neq \emptyset$ olduğunu görmek istiyoruz. $\mathcal{F}$ içindeki kümelerin oluşturduğu sonlu $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ alt kümeleri ailesine $\mathcal{D}$ diyelim. $\mathcal{D}$ üzerinde $\alpha = \{F_1, F_2, \dots, F_k\} \in \mathcal{D}$ ve $\alpha' = \{F_1', F_2', \dots, F_l'\} \in \mathcal{D}$ için

$$\alpha \leq \alpha' \Leftrightarrow F_1' \cap F_2' \cap \dots \cap F_l' \subset F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_k$$

şeklinde bir sıralama tanımlayalım. Bu sıralama ile $\mathcal{D}$ yönlendirilmiş bir kümedir. Şimdi $\forall\alpha = \{F_1, F_2, \dots, F_k\} \in \mathcal{D}$ için $\exists x_\alpha \in \cap_{i=1}^k F_i$ seçersek, X içinde damgalayan kümesi $\mathcal{D}$ olan bir ağ oluşturmuş oluruz. Varsayıma göre $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}}$ ağının x gibi bir yığılma noktası vardır. Kanıtı tamamlamak için $x \in \cap_{F\in\mathcal{F}}F$ olduğunu göstermek yetecektir. $F_0 \in \mathcal{F}$ olsun. $\alpha_0 = \{F_0\} \in \mathcal{D}$ dir. $\forall U \in \mathcal{N}_x$ için

$$\exists\alpha = \{F_1, F_2, \dots, F_k\} \in \mathcal{D} \ni \alpha \geq \alpha_0 \text{ ve } x_\alpha \in U \text{ olur.}$$

$x_\alpha \in \cap_{i=1}^k F_i \subset F_0$ (çünkü $\alpha \geq \alpha_0$) olduğundan $x_\alpha in F_0$, yani $U \cap F_0 \neq \emptyset$ dir. F_0 kapalı olduğundan $x \in F_0$ ve böylece $x \in \cap_{F\in\mathcal{F}}F$ olur; Yani $\cap_{F\in F}F \neq \emptyset$.

Bir ultra ağ yığılma noktasına yakınsar. Gerçekten $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{D}}$ bir ultra ağ x de bu ağın bir yığılma noktası olsun. $U in \mathcal{N}_x$ için $\exists\alpha_0 \in \mathcal{D} \ni \alpha_0 \leq \alpha$ olacak şekilde her $x_\alpha \in U$ ya da $x_a lpha \in X \setminus U$ (yani (x_α) ağının en az bir kuyruğu ya U içindedir ya da $X \setminus U$ içinde) x yığılma noktası olduğundan ikinci durum olamaz. Bir başka deyişle (x_α) ultra ağı sıkça U içinde ise sonunda U içinde kalmak zorundadır. Diğer taraftan her ağın bir ultra alt ağı vardır. O halde

$$X \text{ kompakt} \Leftrightarrow X \text{ içindeki her ultra ağ yakınsak}$$

□

Ağlar ve Süzgeçler Arasındaki İlişkiler

Teorem 1.6.6 ve teorem 1.6.7 nin kanıtlarında da kullandığımız gibi ağlar ve süzgeçler arasında çok yakın ilişkiler vardır. Her ağ bir süzgeç, her süzgeçde bir ağ tanımlar.

(x_λ) , X içerisinde bir ağ olsun.

$$B_{\lambda_0} = \{x_\lambda | \lambda \geq \lambda_0\}, \lambda_0 \in \Delta$$

kümeleri (x_λ) tarafından üretilen süzgeç tabanıdır.

Aynı şekilde $\mathcal{F}$, X üzerinde bir süzgeç olsun.

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \{(x, F) | x \in F \in \mathcal{F}\}$$

olsun. $\Delta_{\mathcal{F}}$ kümesi $(x_1, F_1) \leq (x_2, F_2) \Leftrightarrow F_2 \subset F_1$ bağıntısı ile yönlendirilmiş bir kümedir. Buna göre, $\mathcal{P} : \Delta_{\mathcal{F}} \to X$, $\mathcal{P}(x, F) = x$, X içinde bir ağ tanımlar.

2 ULTRA ÇARPIMLAR

Ultra çarpım kavramı, ilk olarak model teoride çok temel bir metod olarak kullanılmaya başlanmış ve daha sonra da matematiğin cebir ve kümeler teorisi gibi, diğer dallarında da sıkça kullanılmaya başlanmıştır. Ultra çarpımların Banach uzaylarına uygulanması ise Heinrich ile olmuştur [4]. Bu kesimde, ileriki kesimlerde sıkça kullanacağımız bu kavrama genel bir giriş yaparak, temel özelliklerini inceleyeceğiz.

2.1 Kümeler Teorisinde Ultra Çarpım

$(A_i)_{i\in I}$ bir kümeler ailesi, $\mathcal{U}$ da I üzerinde bir ultra süzgeç olsun. $\prod_{i\in I} A_i$ ile

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f | f : I \to \cup_{i\in I} A_i \text{ ve } \forall i (i \in I \Rightarrow f(i) \in A_i\}$$

ya da $i \in I$ için $f(i) = a_i \in A_i$ olmak üzere, $f = (a_i)$ çakıştırmasını yaparsak,

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i) | \forall i \in I \text{ için } a_i \in A_i\}$$

şeklinde tanımlanan $(A_i)_{i\in I}$ kümelerinin kartezyen çarpımını gösterelim. $\prod_{i\in I} A_i$ üzerinde aşağıdaki şekilde $\sim_{\mathcal{U}}$ bağıntısı tanımlayalım.

$$(a_i) \sim_{\mathcal{U}} (b_i) \Leftrightarrow \{i : a_i = b_i\} \in \mathcal{U}$$

$\sim_{\mathcal{U}}$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu görelim. $(a_i) \in \prod_{i\in I} A_i$ alalım. $\{i : a_i = a_i\} = I \in \mathcal{U}$ olduğundan $(a_i) \sim_{\mathcal{U}} (a_i)$ olur. $(a_i), (b_i) \in \prod_{i\in I} A_i$ olsun. $(a_i) \sim_{\mathcal{U}} (b_i) \Rightarrow \{i : a_i = b_i\} = \{i : b_i = a_i\} \in \mathcal{U}$ olduğundan $(b_i) \sim_{\mathcal{U}} (a_i)$ olur. $(a_i), (b_i), (c_i) \in \prod_{i\in I} A_i$ ve $(a_i) \sim_{\mathcal{U}} (b_i)$, $(b_i) \sim_{\mathcal{U}} (c_i)$ olsun.

$$(a_i) \sim_{\mathcal{U}} (b_i) \Rightarrow I_1 = \{i : a_i = b_i\} \in \mathcal{U}$$

$$(b_i) \sim_{\mathcal{U}} (c_i) \Rightarrow I_2 = \{i : b_i = c_i\} \in \mathcal{U}$$

$\mathcal{U}$ süzgeç olduğundan $I_1 \cap I_2 \in \mathcal{U}$ olur. Buradan da $I_1 \cap I_2 \subseteq \{i : a_i = c_i\} \in \mathcal{U}$ olur.

Tanım 2.1.1. *$(A_i)_{i\in I}$ ailesinin ultraçarpımı diye, $\prod_{i\in I} A_i$ nin $\sim_{\mathcal{U}}$ ile bölüm kümesine denir ve $(A_i)_{\mathcal{U}}$ şeklinde gösterilir. Eğer $\forall i \in I$ için$A_i = A$ ise $(A_i)_{\mathcal{U}} = (A)_{\mathcal{U}}$*

ya A nın ultra kuvveti denir. Ayrıca $\forall i \in I$ *için*$A_i \subset B_i$ *ise açıkca görüleceği gibi* $(A_i)_{\mathcal{U}} \subset (B_i)_{\mathcal{U}}$ *olur.*

Önerme 2.1.2. *Eğer* $(A_i)_{i\in I}$ *ve* $(B_i)_{i\in I}$ *kümelerin iki ailesi ise aşağıdakiler doğrudur.*

1. $(A_i)_{\mathcal{U}} \cup (B_i)_{\mathcal{U}} = (A_i \cup B_i)_{\mathcal{U}}$
2. $(A_i)_{\mathcal{U}} \cap (B_i)_{\mathcal{U}} = (A_i \cap B_i)_{\mathcal{U}}$
3. $(A_i)_{\mathcal{U}} - (B_i)_{\mathcal{U}} = (A_i - B_i)_{\mathcal{U}}$

Kanıt. Kanıtlar birbirine benzer olduğundan sadece ilkinin kanıtını yapalım.

$$\begin{aligned} \widetilde{x} \in (A_i)_{\mathcal{U}} \cup (B_i)_{\mathcal{U}} \text{ olsun.} \quad & \Rightarrow (x_i) \in \textstyle\prod_{i\in I} A_i \text{ veya } (x_i) \in \prod_{i\in I} B_i \\ & \Rightarrow \forall i \in I \text{ için } x_i \in A_i \text{ veya } \forall i \in I \text{ için } x_i \in B_i \\ & \Rightarrow \forall i \in I \text{ için } x_i \in A_i \cup B_i \\ & \Rightarrow (x_i) \in \textstyle\prod_{i\in I}(A_i \cup B_i) \\ & \Rightarrow \widetilde{x} = [(x_i)] \in (A_i \cup B_i)_{\mathcal{U}} \end{aligned}$$

Buradan $(A_i)_{\mathcal{U}} \cup (B_i)_{\mathcal{U}} \subset (A_i \cup B_i)_{\mathcal{U}}$ olur.

$\widetilde{x} \in (A_i \cup B_i)_{\mathcal{U}}$ olsun. $I_A \cup I_B = I$ olacak şekilde $I_A = \{i : x_i \in A_i\}$ ve $I_B = \{i : x_i \in B_i\}$ kümeleri alalım. Önerme 1.4.10 den, $I = I_A \cup I_B \in \mathcal{U}$ olduğundan ya $I_A \in \mathcal{U}$ ya da $I_B \in \mathcal{U}$ olmak zorundadır. $I_A \in \mathcal{U}$ olduğunu kabul edelim.

$$(a_i) = \begin{cases} x_i & , \ i \in I_A \\ a_i \in A_i \text{ keyfi} & , \ i \notin I_A \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. (a_i) nin tanımlanışından $(a_i) \sim_{\mathcal{U}} (x_i)$, buradan $(\widetilde{a_i})_{\mathcal{U}} = \widetilde{x}$ olur. Buradan da $\widetilde{x} \in (A_i)_{\mathcal{U}}$ bulunur. O halde $(A_i \cup B_i)_{\mathcal{U}} \subseteq (A_i)_{\mathcal{U}} \cup (B_i)_{\mathcal{U}}$ elde edilir. Böylece $(A_i \cup B_i)_{\mathcal{U}} = (A_i)_{\mathcal{U}} \cup (B_i)_{\mathcal{U}}$ olur. □

2.2 Banach Uzaylarının Ultra Çarpımı

$(X_i)_{i\in I}$ Banach uzaylarının bir ailesi olsun. $\ell^\infty(X_i)$ ile $\prod_i X_i$ nin sınırlı (X_i) ailelerinden oluşan Banach uzayını gösterelim. Yani

$$\ell^\infty(X_i) = \{(x_i)_{i\in I} : ||(x_i)|| = \sup\{||x_i||_{X_i} : i \in I\} < \infty\}.$$

$\ell^\infty(X_i)$ üzerinde $||(x_i)||_\infty = sup_i||x_i||_{X_i}$ şeklinde bir norm tanımlayalım. Öte yandan eğer $\mathcal{U}$, I üzerinde bir ultra süzgeç ise (X_i) ailesinin sınırlı oluşu nedeniyle Teorem 1.5.4 e göre $\lim_{\mathcal{U}}||x_i||_{X_i}$ vardır. O halde $\ell^\infty(X_i)$ üzerinde $\mathcal{N}((x_i)) = \lim_{\mathcal{U}}||x_i||_{X_i}$ şeklinde bir yarı norm tanımlayabiliriz. Bu yarı normun çekirdeği ise Çek$\mathcal{N}$ = $\{(x_i) \in \ell^\infty(X_i) : \mathcal{N}((x_i)) = 0\}$ şeklinde olacaktır.

Önerme 2.2.1. *Çek$\mathcal{N}$, $\ell^\infty(X_i)$ nin kapalı alt uzayıdır.*

Kanıt. Altuzay özelliklerini, ultra süzgeçler üzerinde limitlerin özelliklerinden faydalanarak görmek kolaydır. Çek$\mathcal{N}$ nin kapalı olduğunu görmek için tam olduğunu görmek yeterlidir. Bunun için $\ell^\infty(X_i)$ içinden $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(x_i^n)_{i\in I} \in$ Çek$\mathcal{N}$ olacak şekilde bir Cauchy dizisi alalım. $\ell^\infty(X_i)$ tam uzay olduğundan $((x_i^n)_i)_{\mathbb{N}}$, $(x_i) \in \ell^\infty(X_i)$ gibi bir noktaya yakınsar. Şimdi $\varepsilon > 0$ olmak üzere, $J_\varepsilon = \{n : ||(x_i^n) - (x_i)||_\infty \leq \varepsilon\}$ kümesi boş kümeden farklıdır. Herhangi $n \in J_\varepsilon$ ve $i \in I$ için $||x_i^n - x_i||_{X_i} \leq \varepsilon$ dur. Buradan $\lim_{\mathcal{U}}||x_i||_{X_i} \leq \lim_{\mathcal{U}}||x_i^n||_{X_i} + \varepsilon$, yani $(x_i^n) \in$ Çek $\mathcal{N}$ olur. Böylece $\lim_{\mathcal{U}}||x_i||_{X_i} < \varepsilon$ elde edilir ve kanıt tamamlanmış olur. □

Tanım 2.2.2. *$\mathcal{U}$, I üzerinde bir ultra süzgeç olsun. $(X_i)_{i\in I}$, Banach uzayları ailesi olmak üzere, Banach uzaylarının ultraçarpımı diye $\ell^\infty(X_i)/$Çek$\mathcal{N}$ bölüm uzayına denir ve $(X_i)_{\mathcal{U}}$ ile gösterilir. Eğer her $i \in I$ için $X_i = X$ ise $(X_i)_{\mathcal{U}} = (X)_{\mathcal{U}}$ ya X in ultra kuvveti denir. $(X_i)_{\mathcal{U}}$ üzerinde bölüm normu*

$$||(\widetilde{x}_i)||_{(X_i)_{\mathcal{U}}} = inf\{||x_i + y_i||_\infty : (y_i) \in \text{ Çek } \mathcal{N}\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(\widetilde{x}_i)$, (x_i) nin denklik sınıfını temsil etmektedir.

Önerme 2.2.3. *$(X_i)_{\mathcal{U}}$ üzerindeki bölüm normu herhangi $(\widetilde{x}_i) \in (X_i)_{\mathcal{U}}$ için*

$$||\widetilde{x}_i||_{(X_i)_{\mathcal{U}}} = \lim_{\mathcal{U}}||x_i||_{X_i}$$

koşulunu sağlar.

Kanıt. $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_i) \in (X_i)_{\mathcal{U}}$ ise $\widetilde{x} = \{(x_i + y_i) \in \ell^\infty(X_i) : (y_i) \in$ Çek $\mathcal{N}\}$ şeklindedir. Buradan herhangi bir $(y_i) \in$ Çek $\mathcal{N}$ için

$$\lim_{\mathcal{U}}||x_i + y_i||_{X_i} = \lim_{\mathcal{U}}||x_i||_{X_i} \leq ||(x_i + y_i)||_\infty$$

olur. Bu ise $\lim_{\mathcal{U}} ||x_i||_{X_i} \leq ||\widetilde{x}||_{(X_i)_{\mathcal{U}}}$ olmasını gerektirir.

Şimdi eşitsizliğin diğer yönünü görmeye çalışalım.

$$I_\varepsilon = \{i \in I : ||x_i||_{X_i} \leq \lim_{\mathcal{U}} ||x_i||_{X_i} + \varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0)$$

kümesini tanımlayalım. $\mathcal{U}$ üzerindeki limitin tanımından $I_\varepsilon \in \mathcal{U}$ olur. (y_i) öğesini

$$y_i = \begin{cases} -x_i, & i \notin I_\varepsilon \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. O zaman $\lim_{\mathcal{U}} ||y_i|| = 0$ olur. Çünkü $V_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ için $I_\varepsilon = \{i | y_i = 0 \in V_\varepsilon\} \in \mathcal{U}$ dur. Böylece $(x_i + y_i)$, $\widetilde{x}$ nın denklik sınıfında olur. Fakat $||(x_i+y_i)||_\infty = \sup_{i \in I_\varepsilon} ||x_i||_{X_i}$ olduğundan $||(x_i+y_i)||_\infty \leq \lim_{\mathcal{U}} ||x_i||_{X_i} + \varepsilon$ elde edilir. Böylece

$$||\widetilde{x}||_{(X_i)_{\mathcal{U}}} \leq ||(x_i + y_i)||_\infty \leq \lim_{\mathcal{U}} ||x_i||_{X_i} + \varepsilon,.$$

ε keyfi olduğundan $||\widetilde{x}||_{(X_i)_{\mathcal{U}}} \leq \lim_{\mathcal{U}} ||x_i||_{X_i}$ olur. Her iki eşitsizlikten de

$$||\widetilde{x}_i||_{(X_i)_{\mathcal{U}}} = \lim_{\mathcal{U}} ||x_i||_{X_i} \text{ elde edilir.}$$

□

Açıklamalar 2.2.4. *Yukarıdaki önerme çok büyük önem taşımaktadır. Çünkü bu önermeye göre, normlar türünden ifade edilen ve her X_i için geçerli olan bir özellik $(X_i)_{\mathcal{U}}$ içinde geçerlidir.*

Örneğin bir Banach uzayının Hilbert uzayı olması için gerek ve yeter koşul normun paralel kenar kuralı dediğimiz,

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

eşitliği sağlamasıdır. Buna göre herbir X_i uzayı Hilbert uzayı ise $(X_i)_{\mathcal{U}}$ da Hilbert uzayı olur. Gerçekten de $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in (X_i)_{\mathcal{U}}$ olsun.

$$\begin{aligned} ||\widetilde{x} + \widetilde{y}||^2_{(X_i)_{\mathcal{U}}} + ||\widetilde{x} - \widetilde{y}||^2_{(X_i)_{\mathcal{U}}} &= \lim_U ||x_i + y_i||^2_{X_i} + \lim_U ||x_i - y_i||^2_{X_i} \\ &= \lim_{\mathcal{U}}(||x_i + y_i||^2_{X_i} + ||x_i - y_i||^2_{X_i}) \\ &= 2\lim_{\mathcal{U}}(||x_i||^2_{X_i} + ||y_i||^2_{X_i}) \\ &= 2(||\widetilde{x}||^2_{(X_i)_{\mathcal{U}}} + ||\widetilde{y}||^2_{(X_i)_{\mathcal{U}}}) \textit{ dır.} \end{aligned}$$

$\mathcal{U}$, bir $i_0 \in I$ ile doğrulan ultra süzgeç ise $\lim_{\mathcal{U}} x_i = x_{i_0}$ *olduğundan* $\|\widetilde{(x_i)}\|_{(X_i)_{\mathcal{U}}} = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|_{X_i} = \|x_{i_0}\|_{X_{i_0}}$ *olur, yani* $(X_i)_{\mathcal{U}}$ *ile* X_{i_0} *izometrik olarak çakışırlar.*

Eğer her $i \in I$ *için* $X_i = X$ *ise* X*,* $(X)_{\mathcal{U}}$ *içerisine izometrik olarak gömülebilir.* $(x, x, \ldots)$ *in* $(X)_{\mathcal{U}}$ *içerisindeki denklik sınıfını alalım.*

$$||\widetilde{(x, x, \ldots)}||_{(X)_{\mathcal{U}}} = \lim_{\mathcal{U}} ||x|| = ||x||$$

olur. Bu ise X *uzayını* $(X)_{\mathcal{U}}$ *nun bir alt uzayı olarak görebileceğimiz anlamına gelir.*

2.3 Sonlu Temsil Edilebilirlik

Tanım 2.3.1. *X ve Y Banach uzayları olsun.* $T : X \to Y$ *dönüşümü,* $0 < \varepsilon < 1$ *ve* $\forall x \in X$ *için*

$$(1 - \varepsilon)||x|| \leq ||Tx|| \leq (1 + \varepsilon)||x||$$

koşulunu sağlıyorsa, T *ye* ε*-izometri adı verilir.*

Tanım 2.3.2. *X ve Y Banach uzayları olsunlar. X in Y içerisinde sonlu temsil edilebilir olması için gerek ve yeter koşul her* $0 < \varepsilon < 1$ *ve X uzayının her sonlu boyutlu* X_0 *alt uzayı için,* Y *nin aşağıdaki koşulları sağlayan sonlu boyutlu* Y_0 *alt uzayının olmasıdır.*

i. *boy*(X_0) $=$*boy*(Y_0)

ii. X_0 *ile* Y_0 *arasında* ε*-izometri vardır.*

Eğer X *ile* Y *arasında bir* ε*-izometri varsa,* $||T||||T^{-1}|| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ *olacak şekilde* $T : X \to Y$ *izomorfizmi vardır.*

$\forall x \in X$ *için* $(1 - \varepsilon)||x|| \leq ||Tx|| \leq (1 + \varepsilon)||x||$ *ise* T *birebirdir. Gerçekten de,* $Tx = Ty$ *ise* $T(x - y) = 0$ *dolayısı ile,*

$$(1 - \varepsilon)||x - y|| \leq ||T(x - y)|| \leq (1 + \varepsilon)||x - y||$$

veya

$$(1 - \varepsilon)||x - y|| \leq 0 \leq (1 + \varepsilon)||x - y||, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

olduğundan bu eşitsizlik ancak $||x-y|| = 0$ *için geçerli olur. O halde* $x = y$ *dir. Böylece* T *birebir olur.*

Yine $\forall x \in X$ *için,*

$$(1-\varepsilon)||x|| \leq ||Tx|| \leq (1+\varepsilon)||x|| \qquad \textit{ise}$$

$||Tx|| \leq (1+\varepsilon)||x|| \Rightarrow ||T|| \leq (1+\varepsilon)$ *olur.* $(1-\varepsilon)||x|| \leq ||Tx||$ *olduğundan da* $||T^{-1}|| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$ *dur. Gerçekten de* $Tx = y$ *ise,* $T^{-1}y = x$ *dır. Böylece* $||T^{-1}y|| = ||x||$ *veya*

$$(1-\varepsilon)||T^{-1}y|| = (1-\varepsilon)||x|| \leq ||Tx|| = ||y||$$

yani,

$$||T^{-1}y|| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}||y||$$

dir. Böylece

$$||T^{-1}|| \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \ \textit{olur.}$$

Sonuç olarak,

$$||T||||T^{-1}|| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

elde edilir.

Tanım 2.3.3. *X ve Y Banach uzayları olsunlar. X ile Y arasındaki Banach-Mazur uzaklığı* $d(X,Y)$ *ile gösterilir ve*

$$d(X,Y) = inf\{||T||||T^{-1}|| : T : X \to Y \ \ \textit{izomorfizm}\ \}$$

şeklinde tanımlanır. X ile Y izomorf olmadığı zaman $d(X,Y) = \infty$ *olur.*

O halde X ile Y arasında ε-izometri olması için gerek ve yeter koşul $d(X,Y) < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ olmasıdır. Buradan X, Y içerisinde sonlu temsil edilebilir ise herhangi $0 < \eta < 1$ ve X in keyfi sonlu boyutlu alt uzayı X_0 için Y nin sonlu boyutlu Y_0 gibi bir alt uzayı vardır öyleki, boy(X_0) =boy(Y_0) ve $d(X_0, Y_0) \leq 1+\eta$ dır.

Banach uzayları için sonlu temsil edilebilirlik özelliğinin bazı iyi bilinen sonuçlarını kanıtlarına girmeden sıralayacak olursak [3],

i. ℓ^2 uzayı sonlu boyutlu olmayan her Banach uzayı içerisinde sonlu temsil edilebilir. (Dvoreszky Teoremi)

ii. Her hangi bir X Banach uzayının ikinci duali X^{**}, X içerisinde sonlu temsil edilebilir.

iii. Her Banach uzayı c_0 içerisinde sonlu temsil edilebilir.

Aşağıdaki teorem sonlu temsil edilebilirlik ile ultra kuvvetler arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 2.3.4. *$(X_k)_{k\in I}$ Banach uzayları ailesi ve $\mathcal{U}$, I üzerinde aşikar olmayan ultra süzgeç olsun. $\widetilde{M}$, $(X_k)_{\mathcal{U}}$ nun sonlu boyutlu alt uzayı ise, herhangi $0<\varepsilon<1$ için $\exists I_\varepsilon \in \mathcal{U} \ni \forall k \in I_\varepsilon$ için X_k nın $d(\widetilde{M}, M_k) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ olacak şekilde M_k sonlu boyutlu alt uzayı vardır.*

Kanıt. $(\widetilde{x}_i)_{1\leq i\leq n}$, $\widetilde{M}$ nın birim taban vektörleri olsun. $\widetilde{x}_i$ nın bir $(x_i^k)_{k\in I}$ temsilcisini $\forall k$ için $||x_i^k||_{X_k} \leq 2$ olacak şekilde seçelim. X_k nın $M_k = span_{1\leq i\leq n}(x_i^k)$ şeklinde tanımlanan sonlu boyutlu M_k alt uzayını alalım. Şimdi $\forall k \in I$ için

$$T_k : \widetilde{M} \to M_k$$

$$T_k(\sum_{i=1}^n a_i\widetilde{x}_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^k$$

şeklinde T_k dönüşümü tanımlayalım.

$$\alpha = sup\{\sum |a_i| : ||\sum_{i=1}^n a_i\widetilde{x}_i||_{(X_k)_{\mathcal{U}}} \leq 1\}$$

alırsak, $||\widetilde{x}||_{(X_k)_{\mathcal{U}}} = ||\sum_{i=1}^n a_i\widetilde{x}_i||_{(X_k)_{\mathcal{U}}} \leq 1$ için

$$||T_k\widetilde{x}||_{X_k} = ||T_k(\sum_{i=1}^n a_i\widetilde{x}_i)||_{X_k} = ||\sum_{i=1}^n a_i x_i^k||_{X_k} \leq \sum_{i=1}^n |a_i|||x_i^k||_{X_k} \leq 2\alpha$$

olduğundan $||T_k|| \leq 2\alpha$ olur. $0<\varepsilon<1$ ve $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$ olmak üzere,

$$I_{\widetilde{x}} = \{k \in I : (1-\frac{\varepsilon}{2})||\widetilde{x}|| \leq ||T_k(\widetilde{x})||_{X_k} \leq ||\widetilde{x}||\}$$

şeklinde verilen $I_{\widetilde{x}} \in \mathcal{U}$ olur. $\delta = \frac{\varepsilon}{2\alpha}$ alalım $\widetilde{M}$, $(X_k)_{\mathcal{U}}$ nun sonlu boyutlu alt uzayı olduğundan $\widetilde{M}$ nın birim küresi içinde sonlu δ ağı $(\widetilde{y}_j)_{j \leq M}$ vardır. Buradan $||\widetilde{x}|| = 1$ olacak şekilde $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$ için $\exists j,\ 1 \leq j \leq m \ni ||\widetilde{x} - \widetilde{y}_j|| \leq \delta$ olur. Öte yandan,

$$I_0 = \bigcap_{1 \leq j \leq m} I_{\widetilde{y}_i} \in \mathcal{U}$$

ve herhangi $k \in I_0$ ve $||\widetilde{x}|| = 1$ olacak şekilde $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$ için

$$\forall j,\ 1 \leq j \leq m \text{ için } ||T_k\widetilde{y}_j|| - ||T_k(\widetilde{x} - \widetilde{y}_j)|| \leq ||T_k\widetilde{x}|| \leq ||T_k(\widetilde{x} - \widetilde{y}_j)|| + ||T_k\widetilde{y}_j||$$

Buradan $(\widetilde{y}_j)_{j \leq m}$ δ-ağ ve $k \in I_0$ için

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} - 2\alpha\delta \leq ||T_k\widetilde{x}|| \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2} + 2\alpha\delta$$

Bu ise T_k nın birebir ve

$$d(\widetilde{M}, M_k) \leq ||T_k||||T_k^{-1}|| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

olmasını gerektirir. □

Aşağıdaki teorem X içerisinde sonlu temsil edilebilir bir uzayın X in ultra kuvvetinin bir alt uzayı olduğunu ifade eder.

Teorem 2.3.5. *X ve Y Banach uzayları ve Y, X içerisinde sonlu temsil edilebilir ise, I üzerinde öyle bir $\mathcal{U}$ ultra süzgeci vardır ki; Y, $(X)_{\mathcal{U}}$ nun bir alt uzayına izometrik olarak izomorfdur.*

Kanıt. Y sonlu boyutlu iken, Y nin $(X)_{\mathcal{U}}$ nun bir alt uzayına izometrik olarak izomorf olduğunu görmek kolaydır [4].

Y nin sonlu boyutlu olmadığını kabul edelim. I diye; M, Y nin sonlu alt uzayı ve $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere (M, ε) tipindeki ikililerin kümesine diyelim. I içerisinde bir sıralama bağıntısı,

$$(M, \varepsilon) \prec (M', \varepsilon') \Leftrightarrow M \subset M' \text{ ve } \varepsilon' \leq \varepsilon$$

şeklinde tanımlansın. Bu sıralama bağıntısına göre, I içerisindeki herhangi iki $(M, \varepsilon), (M', \varepsilon')$ öğesi için,

$\inf\{(M,\varepsilon),(M',\varepsilon')\} = (M \cap M', \max\{\varepsilon,\varepsilon'\})$ ve

$\sup\{(M,\varepsilon),(M',\varepsilon')\} = (dz(M \cup M'), \min\{\varepsilon,\varepsilon'\})$ olduğundan $(I,\prec)$ bir örgü olur.

Şimdi

$$\mathcal{B} = \{B(i_0) \subset I : B(i_0) = \{i \in I : i_0 \prec i\}\}$$

olsun. I, örgü yapısına sahip olduğundan $\mathcal{B}$ sonlu arakesit özelliğine sahip olur. Gerçekten de

$B(i_0), B(i_1), \ldots, B(i_n) \in \mathcal{B}$ olsun.

$i_0 = (M_0,\varepsilon_0), i_1 = (M_1,\varepsilon_1), \ldots, i_n = (M_n,\varepsilon_n)$ ise $dz(M_0 \cup M_1 \cup \ldots \cup M_n) = M$, $\varepsilon = \inf\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$ dersek $B(i) \subseteq \cap_{k=1}^{n} B(i_k)$ olur. Yani $\mathcal{B}$ ailesi sonlu arakesit özelliğine sahiptir. Bu nedenle

$\mathcal{F}(\mathcal{B}) = \{S \in 2^I : \exists i_0 \in I \ni B(i_0) \subset S\}$ ailesi bir süzgeçtir. Y sonlu boyutlu olmadığından, $i \in I$ için $B(i) \neq \emptyset$ yani $\emptyset \notin \mathcal{F}(\mathcal{B})$ dir.

$\mathcal{U}$, $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ yi içeren bir ultra süzgeç olsun. Y, X içersinde sonlu temsil edilebilir olduğundan, $\forall i = (M_i,\varepsilon_i) \in I$ için X in sonlu boyutlu X_i alt uzayı üzerine $T_i : M_i \to X_i \subset X$ ε_i-izometrisi vardır.

$J : Y \to (X_i)_{\mathcal{U}}$, $\quad J(y) = \widetilde{(y_i)}$ şeklinde tanımlanan J dönüşümünü ele alalım.

$$\text{Burada} \begin{cases} y_i = T_i(y) & , \quad y \in M_i \\ y_i = 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

J dönüşümü doğrusal bir izometri olur. Önce J nin doğrusal bir dönüşüm olduğunu görelim.$y, y' \in Y$ ve $0 < \varepsilon_0 < 1$ sabit sayısı için $i_y = (span(y),\varepsilon_0)$ ve $i_{y'} = (span(y'),\varepsilon_0)$ olsun. $I_{y,y'} = B(i_y) \cap B(i_{y'}) \in \mathcal{U}$ olur.

Şimdi $i \in I_{y,y'}$ için $i = (M_i,\varepsilon_i)$ ise $span(y) \subseteq M_i$, $\varepsilon_i \leq \varepsilon_0$ ve $span(y') \subseteq M_i'$, $\varepsilon_i \leq \varepsilon_0$ olduğundan

$(J(y))_i = T_i(y)$ ve $(J(y'))_i = T_i(y')$ olur. T_i doğrusal dönüşüm olduğundan herhangi iki α, β skaler sayısı için,

$$(J(\alpha y + \beta y'))_i = \alpha(J(y))_i + \beta(J(y'))_i \text{ dir}$$

$I_{y,y'} \in \mathcal{U}$ olduğundan,

$$J(\alpha y + \beta y') = \alpha J(y) + \beta J(y')$$

olur.

$I_{y,y'} = B(i_y) \cap B(i_{y'}) \in \mathcal{U}$ herhangi $i \in I_{y,y'}$ için $(J(y))_i = T_i(y)$ ve $(J(y'))_i = T_i(y')$ olduğunu biliyoruz. T_i nin lineer olmasından herhangi α, β skalerleri için

$$(J(\alpha y + \beta y'))_i = \alpha(J(y))_i + \beta(J(y'))_i$$

$I_{y,y'} \in \mathcal{U}$ olduğundan,

$$J(\alpha y + \beta y') = \alpha J(y) + \beta J(y')$$

olur. Kanıtı tamamlamak için J nin izometri olduğunu göstermemiz gerekir.

$0 < \varepsilon < 1$ ve $y \in Y$ alalım. $i_0 = (span(y), \varepsilon)$ ise $B(i_0) \in \mathcal{U}$ ve herhangi $i = (M_i, \varepsilon_i) \in B(i_0)$ için

$$(1-\varepsilon_i)||y||_Y \leq ||T_i(y)||_X \leq (1+\varepsilon_i)||y||_Y$$

$\varepsilon_i \leq \varepsilon$ olduğunda yukarıdaki eşitsizlik

$$(1-\varepsilon)||y||_Y \leq ||T_i(y)||_X = ||(J(y))_i|| \leq (1+\varepsilon)||y||_Y$$

şekline dönüşür. Bu eşitsizlik her i için doğru olduğundan

$$(1-\varepsilon)||y||_Y \leq \lim_{\mathcal{U}} ||(J(y))_i||_X \leq (1+\varepsilon)||y||_Y$$

elde edilir. Bu ise herhangi $0 < \varepsilon < 1$ için J nin ε-izometri olduğunu gösterir. □

Sonlu temsil edilebilirlik geçişkenlik özelliği olan bir bağıntıdır, bu nedenle X in bir ultra kuvvetinin herhangi bir alt uzayı X içerisinde sonlu temsil edilebilir.

2.4 Süper Özellikler

Bu bölümde Banach uzaylarının sonlu boyutlu alt uzayları tarafından belirlenen özelliklerini inceleyecegiz.

Tanım 2.4.1. *X Banach uzayı üzerinde bir "$\mathcal{P}$" özelliği tanımlanmış olsun. Eğer X içerisinde sonlu temsil edilebilir her Banach uzayıda "$\mathcal{P}$" özelliğine sahip ise X uzayına "süper $\mathcal{P}$" özelliğine sahiptir denir.*

Örneğin bir X Banach uzayının süper yansımalı olması için gerek ve yeter koşul X içerisinde sonlu temsil edilebilen her Banach uzayının yansımalı olmasıdır.

Eğer bir uzay kalıtımsal "$\mathcal{P}$" özelliğine sahip ise, yani bu uzayın sahip olduğu "$\mathcal{P}$" özelliğine herhangi bir alt uzayıda "$\mathcal{P}$" özelliğine sahipse, açıklama 2.2.4 den faydalanarak bir X Banach uzayının "süper $\mathcal{P}$" özelliğine sahip olması için X in her ulta kuvvetinin "$\mathcal{P}$" özelliğine sahip olması gerektiğini söyleyebiliriz.

Tanım 2.4.2. *X bir Banach uzayı olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta(\varepsilon) > 0 \ni \forall x, y \in X$,*

$$||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1, ||x-y|| \geq \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2}||x+y|| \leq 1-\delta(\varepsilon)$$

ise X Banach uzayına düzgün dışbükey denir.

Eğer $\forall x, y \in X$

$$||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1, ||x-y|| > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}||x+y|| < 1$$

ise X Banach uzayına kesin dışbükey denir.

Tanımlardan da açıkca görüleceği gibi düzgün dışbükey uzaylar aynı zamanda kesin dışbükey uzaylardır. Daha genel söylemek gerekirse, X Banach uzayının kesin dışbükey olması için gerek ve yeter koşul $\delta(2) = 1$ in düzgün dışbükeylik tanımını sağlamasıdır.

Örnek 2.4.3. *X bir Hilbert uzayı olsun. O halde parelel kenar kuralı olarak bilinen eşitlik geçerlidir, yani, $\forall x, y \in X$ için*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) \text{ dir.}$$

O halde,

$$||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1 \text{ ve } ||x-y|| \geq \varepsilon > 0 \text{ ise}$$

$$||x+y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) - ||x-y||^2 \leq 4 - \varepsilon^2$$

olur. Buradan $||x+y|| < 2$ ya da, $\frac{||x+y||}{2} < 1$ elde edilir. O halde her Hilbert uzayı kesin dışbükey olur. Aynı zamanda,

$$1 - \frac{||x+y||}{2} \geq 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \geq \frac{\varepsilon^2}{8} = \delta$$

alınırsa her Hilbert uzayı düzgün dışbükey olur.

Örnek 2.4.4. *ℓ_2^∞ yani $||(x,y)|| = \max\{|x|, |y|\}$ normu ile $\mathbb{R}^2$ kesin dışbükey değildir. $x = (1,1)$ ve $y = (1,-1)$ olarak alacak olursak, yukarıdaki norma göre $||x|| = 1$, $||y|| = 1$, $||x-y|| = ||(1,1)-(1,-1)|| = ||(0,2)|| = 2 > 0$ olur. Ancak,*

$$\frac{||x+y||}{2} = \frac{1}{2}||(1,1)+(1,-1)|| = \frac{1}{2}||(2,0)|| = 1 \not< 1$$

olduğundan kesin dışbükey değildir.

Tanım 2.4.5. *X Banach uzayının dışbükeylik modülü,*

$\delta_X : [0,2] \to [0,1]$

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\{1 - \frac{||x+y||}{2} : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1, ||x-y|| \geq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlanır.

X Banach uzayının düzgün dışbükeylik karakteristiği ise,

$$\varepsilon_0(X) = \sup\{\varepsilon : \delta_X(\varepsilon) = 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

O halde X Banach uzayının düzgün dışbükey olması için gerek ve yeter koşul $\forall\varepsilon > 0$ için $\delta_X(\varepsilon) > 0$ olmasıdır. Aşağıdaki teorem ile X Banach uzayı ile X in ultra kuvvetinin dışbükeylik modülü arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Teorem 2.4.6. *X bir Banach uzayı ve $\mathcal{U}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir ultra süzgeç olsun. Bu taktirde,*

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ için } \delta_X(\varepsilon) = \delta_{X_\mathcal{U}}(\varepsilon) \text{ olur.}$$

Kanıt. $\varepsilon > 0$ sabit olsun. Açıklama 2.2.4 de de değindiğimiz gibi $(X)_\mathcal{U}$, X i alt uzay olarak içerdiğinden,

$$\delta_{(X)_\mathcal{U}}(\varepsilon) \leq \delta_X(\varepsilon)$$

olur. Şimdi $||\widetilde{x}|| \leq 1$, $||\widetilde{y}|| \leq 1$, $||\widetilde{x} - \widetilde{y}|| \leq \varepsilon$ ve $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in (X)_\mathcal{U}$ olsun. Ultra süzgeçler üzerinde limit tanımını kullanarak, sabit bir $0 < t < 1$ ve her $n \in I$ için $||x_n|| \leq 1$, $||y_n|| \leq 1$, $||x_n - y_n|| \geq t\varepsilon$ olacak şekilde $\widetilde{x}$ ve $\widetilde{y}$ nın (x_n) ve (y_n) temsilcileri ile $I \in \mathcal{U}$

kümesi bulabiliriz. $\delta_X(\varepsilon)$ tanımını kullanırsak, $\forall n \in I$ için $\frac{1}{2}||x_n + y_n|| \leq 1 - \delta_X(t\varepsilon)$ elde ederiz. Buradan, $\frac{1}{2}||\widetilde{x} + \widetilde{y}|| \leq 1 - \delta_X(t\varepsilon)$ olur. Böylece $\forall t \in (0,1)$ için

$$\delta_X(t\varepsilon) \leq \delta_{(X)_{\mathcal{U}}}(\varepsilon)$$

elde edilir. δ nın sürekliliğini kullanırsak,

$$\delta_X(\varepsilon) \leq \delta_{(X)_{\mathcal{U}}}(\varepsilon)$$

bulunur. □

Teorem 2.4.7. *X bir Banach uzayı, $\mathcal{U}$ da $\mathbb{N}$ üzerinde aşikar olmayan ultra süzgeç ise aşağıdaki ifadeler denktir.*

i. $(X)_{\mathcal{U}}$ kesin dışbükey;

ii. $(X)_{\mathcal{U}}$ düzgün dışbükey;

iii. X düzgün dışbükey.

Kanıt. Her düzgün dışbükey uzay aynı zamanda kesin dışbükey olduğundan, *(ii.)* $\Rightarrow$ *(i.)* görülmüş olur. Teorem 2.4.6 den $\delta_X(\varepsilon) = \delta_{(X)_{\mathcal{U}}}(\varepsilon)$ olduğundan, *(ii.)* $\Rightarrow$ *(iii.)* ve *(iii.)* $\Rightarrow$ *(ii.)* elde edilir. O halde kanıtı tamamlamak için *(i.)* $\Rightarrow$ *(iii.)* olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki, $(X)_{\mathcal{U}}$ kesin dışbükey ve X düzgün dışbükey olmasın. O zaman $n \to \infty$ için $||x_n + y_n|| \to 2$ ve $||x_n - y_n|| \geq \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı ve X içerisindeki birim top tarafından içerilen (x_n) ve (y_n) dizileri vardır. $\widetilde{x} = \widetilde{(x_n)}, \widetilde{y} = \widetilde{(y_n)} \in (X)_{\mathcal{U}}$ olsun. Buradan,

$$||\widetilde{x}|| \leq 1, \quad ||\widetilde{y}|| \leq 1, \quad ||\widetilde{x} - \widetilde{y}|| \geq \varepsilon, \text{ ve } ||\widetilde{x} + \widetilde{y}|| = 2$$

dir. Bu ise $(X)_{\mathcal{U}}$ nun kesin dışbükey olması ile çelişir. □

Teorem 2.4.7 den süper kesin dışbükeylik özelliğinin düzgün dışbükeylik özelliğine eş değer olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi James tarafından bulunan ve ileride Banach uzaylarında normal yapılar kesiminde değineceğimiz bir özelliği inceleyelim.

Tanım 2.4.8. *X bir Banach uzayı olsun. Eğer $||x|| \leq 1$, $||y|| \leq 1$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için,*

$$\frac{||x+y||}{2} \geq 1-\delta \text{ ve } \frac{||x-y||}{2} \geq 1-\delta$$

eşitsizliklerinden sadece birini gerçekleyen bir $\delta > 0$ sayısı varsa, X Banach uzayına düzgün karesel değildir (uniformly nonsquare) denir. Yani,

$$\frac{||x-y||}{2} \geq 1-\delta \Rightarrow \frac{||x+y||}{2} \leq 1-\delta.$$

Kolayca doğrulanabileceği gibi eğer $\varepsilon_0(X) < 2$ ise X Banach uzayı düzgün karesel değildir. Buradan düzgün karesel olmama özelliğinin bir süper özellik olduğunu söyleyebiliriz.

2.5 Operatörlerin Ultraçarpımı

$(X_i)_{i\in I}$ ve $(Y_i)_{i\in I}$, I tarafından damgalanan Banach uzayları aileleri olsunlar. $\mathcal{U}$, I üzerinde bir ultra süzgeç olmak üzere, $(X_i)_\mathcal{U}$ ve $(Y_i)_\mathcal{U}$ bu ailelerin ultra çarpımları olsun. $\forall i \in I$ için $T_i : D_i \subset X_i \to Y_i$ operatörler ailesini alalım. $(D_i)_{i\in I}$ ailesi yardımıyla aşağıdaki şekilde tanımlı, $\widetilde{D} = (D_i)_\mathcal{U} \subset (X_i)_\mathcal{U}$ oluşturabiliriz.

$$\widetilde{D} = \{\widetilde{d} \in (X_i)_\mathcal{U} : (d_i),\ \widetilde{d} \text{ nın bir temsilcisi ise } \forall i \in I \text{ için } d_i \in D_i\}$$

Aşağıdaki önerme $\widetilde{D}$ nin (D_i) ailesinden kalıtsal olarak aldığı bazı özellikleri göstermektedir.

Önerme 2.5.1. *Aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

i. $\forall i \in I$ için D_i konveks ise $\widetilde{D}$ da konvekstir.

ii. $\forall i \in I$ için D_i kapalı ise $\widetilde{D}$ da kapalıdır.

iii. $\forall i \in I$ için D_i sınırlı ise $\widetilde{D}$ da sınırlıdır. Ayrıca çap$(\widetilde{D}) = \lim_\mathcal{U}$ çap(D_i) dir.

Tanım 2.5.2. *$(T_i)_{i\in I}$, $(D_i)_{i\in I}$ üzerinde tanımlı operatörler ailesi olsun. $(T_i)_{i\in I}$ operatörlerinin $\widetilde{D} = (D_i)_\mathcal{U}$ üzerinde ultra çarpımı,*

$$\widetilde{T} = (T_i)_\mathcal{U} : (X_i)_\mathcal{U} \to (Y_i)_\mathcal{U}$$

$$\widetilde{T}(\widetilde{d}) = (\widetilde{T_i(d_i)})$$

şeklinde tanımlanır. $\forall (d_i), (d'_i) \in D_i$ *için* $\lim_{\mathcal{U}} ||d_i - d'_i|| = 0$ *ise* $\lim_{\mathcal{U}} ||T_i d_i - T_i d'_i|| = 0$ *olduğundan yukarıdaki fonksiyon iyi tanımlıdır.*

$\forall i \in I$ *için* $T_i = T$ *ise* $\widetilde{T}$ *ya* T *operatörünün ultra kuvveti denir.*

Aşağıdaki önerme T_i operatörlerinin doğrusal olduğunda T_i operatörlerinin ultra çarpımının da doğrusal olduğunu göstermektedir.

Önerme 2.5.3. $(T_i)_{i \in I}$, $\sup_{i \in I} ||T_i|| < \infty$ *koşulunu sağlayan sınırlı doğrusal dönüşümler ise* $\widetilde{T} = (T_i)_{\mathcal{U}}$, *sınırlı doğrusal dönüşümdür ve* $||\widetilde{T}|| = \lim_{\mathcal{U}} ||T_i||$ *dir.*

Kanıt. $\widetilde{T}$ sınırlı doğrusal operatör ise $||\widetilde{T}|| \leq \lim_{\mathcal{U}} ||T_i||$ olduğu açıktır. $\lim_{\mathcal{U}} ||T_i|| \leq ||\widetilde{T}||$ olduğunu görelim. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $i \in I$ için,

$$(1 - \varepsilon)||T_i|| \leq ||T_i(x_i)||$$

olacak şekilde $x_i \in X_i$ birim vektörleri bulabiliriz. $\widetilde{x} = \widetilde{(x_i)} \in (X_i)_{\mathcal{U}}$ olsun. Buradan $||\widetilde{x}|| = 1$ ve

$$(1 - \varepsilon) \lim_{\mathcal{U}} ||T_i|| \leq \lim_{\mathcal{U}} ||T_i x_i|| = ||\widetilde{T}\widetilde{x}||$$

olur. Böylece $(1 - \varepsilon) \lim_{\mathcal{U}} ||T_i|| \leq ||\widetilde{T}||$ elde edilmiş olur. ε keyfi olduğundan $\lim_{U} ||T_i|| \leq ||\widetilde{T}||$ elde edilir. □

Önerme 2.5.3 nin yardımıyla X ile X^* arasındaki bir ilişkiyi görmeye çalışalım. X bir Banach uzayı ve X^*, X in dual uzayı olsun. $(x_i^*)_{i \in I} \in X^*$ sınırlı doğrusal fonksiyonelleri alalım. Önerme 2.5.3 den $\widetilde{x}^* = \widetilde{x_i^*} \in (X)_{\mathcal{U}}$ sınırlı doğrusal fonksiyoneller tanımlayabiliriz. Acaba $(X)^*_{\mathcal{U}}$ uzayının tüm elemanlarını bu şekilde elde edebilir miyiz? Ya da başka bir şekilde söylemek gerekirse,

$$(X^*)_{\mathcal{U}} \stackrel{?}{=} (X)^*_{\mathcal{U}}$$

Neyazık ki bu sorunun cevabı hayırdır. Gerçekten X süper yansımalı olmayan, yansımalı bir uzay ise, X içerisinde sonlu temsil edilebilen ve yansımalı olmayan bir Banach uzayı var demektir. Bu ise X in yansımalı olmayan $(X)_{\mathcal{U}}$ ultra kuvveti olduğu anlamına gelir. O halde genelde $(X^*)_{\mathcal{U}} = (X)^*_{\mathcal{U}}$ olmak zorunda değildir.

3 SABİT NOKTA TEORİYE GİRİŞ

Bu bölümde sabit nokta teorinin temel tanımları verilerek, sabit nokta teorinin tarihsel süreci genel bir biçimde ele alınacaktır. İlk olarak sabit noktanın tanımı yapılacak olursa,

X bir küme ve T de X den X e herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa bu x noktasına T nin bir sabit noktası denir. Diğer bir deyişle T nin sabit noktası

$$Tx = x \quad (x \in X)$$

denkleminin çözümüdür.

Sabit nokta teori, bir T fonksiyonun sabit noktasının varlığı için T ve X üzerindeki koşulları inceleyen bir daldır.

İleriki kesimlerin hemen hemen tümünde X bir Banach uzayı olarak kabul edilecektir.

3.1 Temel Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 3.1.1. *(X, d) bir metrik uzay ve $T : M \subset X \to X$ dönüşümü verilsin. $\forall x, y \in M$ ve $0 \leq k < 1$ için $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ ise T ye k-büzülme, $k = 1$ ise T ye genişlemeyen (nonexpansive), $0 \leq k < \infty$ için ise T ye Lipschitz sürekli denir. Eğer $\forall x, y \in M$ ve $x \neq y$ için $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ ise T ye büzülme adı verilir.*

Yukarıdaki tanıma göre T için aşağıdaki gerektirmeler vardır.

$$\text{k-büzülme} \Rightarrow \text{büzülme} \Rightarrow \text{genişlemeyen} \Rightarrow \text{Lipschitz sürekli}$$

T k-büzülme olduğunda, analizde belkide en sık karşılaştığımız sabit nokta teoremi olan Banach sabit nokta teoremi karşımıza çıkar. Bu teoremin orjini, Euler ve Cauchy nin $\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$ diferansiyel denkleminin çözümünün, varlığına ve tekliğine dair çalışmalarına dayanır. Banach sabit nokta teoremi analizin çeşitli dallarında karşımıza çıkan varlık ve teklik toremlerinin bir kaynağı olarak oldukça önemli bir teoremdir.

Teorem 3.1.2 (Banach Sabit Nokta Teoremi (1922)).

i. $T : M \subset X \to M$ *bir fonksiyon,*

ii. M, (X,d) *tam metrik uzayının boş kümeden farklı kapalı alt kümesi,*

iii. T *k-büzülme yani,* $\forall x, y \in M$ *ve sabit* $0 \leq k < 1$ *için* $d(Tx, Ty) < kd(x,y)$

ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a. $Tx = x$ *olacak şekilde bir tek* $x \in M$ *vardır.*

b. $x_0 \in M$ *herhangi bir başlangıç noktası olmak üzere,* $x_{n+1} = Tx_n$ *şeklinde oluşturulan* (x_n) *dizisi* $x \in M$ *sabit noktasına yakınsar.*

c. $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$ *için öncelikli hata tahmini,*

$$d(x_n, x) \leq k^n (1-k)^{-1} d(x_0, x_1)$$

ve sonraki hata tahmini ise,

$$d(x_{n+1}, x) \leq k(k-1)^{-1} d(x_n, x_{n+1}) \text{ olur.}$$

d. $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$ *için yakınsama hızı,*

$$d(x_{n+1}, x) \leq kd(x_n, x)$$

Kanıt. Bakınız [2], [5], [8]. □

Sabit nokta teorinin 1912 yılında Brouwer ile başladığı kabul edilmektedir. Brouwer, $\mathbb{R}^n$ in kapalı birim yuvarından, yine aynı kapalı birim yuvar üzerine tanımlanan herhangi bir sürekli dönüşümün en az bir sabit noktasının varlığını göstermiştir. Brouwer sabit nokta teoreminin temelinde, $\mathbb{R}^n$ deki kapalı birim topun kompakt ve dışbükey olması vardır. J. Schauder, 1930 yılında bu teoremi genelleştirmiştir.

Teorem 3.1.3 (Brouwer Sabit Nokta Teoremi (1912)). $n \geq 1$ *olmak üzere* M, $\mathbb{R}^n$ *in boş kümeden farklı, dışbükey, kompakt alt kümesi olsun. Eğer* $f : M \to M$ *sürekli fonksiyon ise* f *nin bir sabit noktası vardır.*

Kanıt. Bakınız [5], [8]. □

Teorem 3.1.4 (Schauder Sabit Nokta Teoremi (1930)). *M, X Banach uzayının boş kümeden farklı, kapalı, sınırlı, dışbükey alt kümesi ve $T : M \to M$ kompakt operatör ise T nin bir sabit noktası vardır.*

Kanıt. Bakınız [5], [8]. □

3.2 Genişlemeyen Dönüşümler ve Sabit Nokta Teori

T nin k-büzülme olduğu durumlarda sabit nokta var ve tek olmasına karşın, $k = 1$ durumunda yani genişlemeyen dönüşümler için durum çok daha farklıdır. Bu durumda T nin birden fazla sabit noktası olabileceği gibi, T nin sabit noktaları kümesi (Fix(T)) boş küme de olabilir. Ayrıca teorem 3.1.2 de tanımlanan (x_n) dizisi sabit noktaların hiç birisine yakınsayamayabilir.

O halde hangi koşullar altında verilen bir X Banach uzayının boş kümeden farklı, kapalı, sınırlı, dışbükey K alt kümesinin, her $T : K \to K$ genişlemeyen dönüşümü için sabit noktası vardır? İlerideki kesimlerde bu sorunun yanıtını arayacağız.

Tanım 3.2.1. *X bir Banach uzayı ve K de X in sınırlı, kapalı, dışbükey alt kümesi olsun. Eğer her $T : K \to K$ genişlemeyen dönüşümünün sabit noktaları kümesi boş kümeden farklı ise ($Fix(T) \neq \emptyset$) K kümesine sabit nokta özelliğine sahiptir denir. Eğer X Banach uzayının boş kümeden farklı, sınırlı, dışbükey ve kapalı her alt kümesi sabit nokta özelliğine sahip ise X Banach uzayına sabit nokta özelliğine sahiptir denir.*

X bir Banach uzayı ve C de X in boş kümeden farklı, zayıf kompakt, dışbükey alt kümesi olsun. C nin sabit nokta özelliğine sahip olmadığını düşünelim. Bu durumda,

$$T : C \to C, Fix(T) = \emptyset$$

olacak şekilde genişlemeyen dönüşümü mevcuttur.

$$\mathcal{F} = \{K \subset C : K \neq \emptyset, \text{ kapalı, dışbükey ve } T \text{ altında değişmez yani, } TK \subset K\}$$

kümesini tanımlayalım. $C \in \mathcal{F}$ olduğundan, $\mathcal{F}$ boş kümeden farklıdır. Ayrıca, C zayıf kompakt olduğundan, $\mathcal{F}$ nin elemanlarından oluşan herhangi bir azalan zincirin arakesiti boş kümeden farklı ve bu arakesit $\mathcal{F}$ ye aittir. O halde Zorn teoremi bize $\mathcal{F}$ nin minimal elemanının varlığını garanti eder.

Tanım 3.2.2. *$\mathcal{F}$ nin minimal elemanı olan K dışbükey kümesine T için minimaldir denir.*

Dikkat edilecek olursa, eğer K kümesi T için minimal ise birden fazla nokta bulundurmak zorundadır. Aksi halde T dönüşümünün sabit noktası olurdu ki, bu da T nin seçilişi ile çelişirdi.

Bundan sonraki kesimlerin tümünde K kümesi T için minimal olarak kabul edilecektir.

Şimdi minimal kümelerin bazı önemli özelliklerini inceleyelim.

Önerme 3.2.3. $\overline{conv}(TK) = K$ *dır.*

Kanıt. $K_0 = \overline{conv}(TK)$ olsun. $TK \subset K$ olduğundan K_0, K nın boş kümeden farklı kapalı dışbükey alt kümesidir. Buradan, $TK_0 \subset TK \subset K_0$ yani, K_0 T altında değişmez kalır. O halde $K_0 \in \mathcal{F}$ dir. K minimal olduğundan $K = K_0$ olur. □

Tanım 3.2.4. *X bir topolojik uzay, $f : X \to \mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun. $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $h < f(x_0)$ için x_0 ın, her $x \in V$ için $h < f(x)$ olacak şekilde bir V komşuluğu varsa, f ye x_0 noktasında alt yarı sürekli fonksiyon denir. Eğer f fonksiyonu her $x_0 \in X$ noktasında alt yarı sürekli ise f fonksiyonuna alt yarı sürekli fonksiyon adı verilir.*

Örnek 3.2.5. *Eğer f fonksiyonu bir x_0 noktasında yerel minimuma sahip ise f alt yarı sürekli fonksiyon olur. Gerçekten de x_0 noktası f fonksiyonunun yerel minimum noktası olduğundan x_0 noktasının, her $x \in V$ için $f(x_0) \leq f(x)$ olacak şekilde bir V komşuluğu vardır.*

Tanım 3.2.6. *X bir Banach uzayı ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ ve $t \in (0,1)$ için*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

ise f ye konveks fonksiyon denir.

Önerme 3.2.7. *$f : K \to \mathbb{R}_+$ alt yarı sürekli konveks fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in K$ için $f(Tx) \leq f(x)$ ise f sabit fonksiyondur.*

Kanıt. $x_0 \in K$ olsun ve $K_0 = \{x \in K : f(x) \leq f(x_0)\}$ kümesini tanımlayalım. f, alt yarı sürekli konveks fonksiyon olduğundan K_0, K nın kapalı, dışbükey alt kümesi olur. f üzerindeki koşulumuz ve $x_0 \in K_0$ olması, K_0 ın T altında değişmez olmasını gerektirir. K minimal olduğundan $K = K_0$ olur. Buradan $\forall x \in K$ için $f(x) \leq f(x_0)$ elde edilir. Ancak x_0 keyfi olduğundan f sabit fonksiyon olmak zorundadır. □

Yukarıdaki iki önermeyi birleştirecek olursak, minimal kümelerin önemli, diğer bir özelliğini elde ederiz. Daha çok Karlovitz Teoremi olarak bilinen bu teorem, Karlovitz den bağımsız olarak Goebel ve Khamsi tarafından da kanıtlanmıştır [2].

Teorem 3.2.8. *Eğer K minimal ise $\forall x \in K$ için,*

$$\sup_{y \in K} ||x - y|| = çap(K)$$

olur. Yukarıdaki koşulu sağlayan kümelere diametral küme adı verilir.

Kanıt. $f : K \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sup\{||x - y|| : y \in K\}$ fonksiyonunu tanımlayalım. K içerisindeki $(x_n) \to x \in K$ dizisi için,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \sup\{\|x_n - y\| : y \in K\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup\{\|x_n - x + x - y\| : y \in K\} \\
&\leq \sup\{\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| + \|x - y\| : y \in K\} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

olduğundan f fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur. Aynı şekilde, her $x, y \in K$ ve $t \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned}
f(tx + (1-t)y) &= \sup\{\|tx + (1-t)y - z\| : z \in K\} \\
&= \sup\{\|tx + (1-t)y - z + tz - tz\| : z \in K\} \\
&= \sup\{\|t(x - z) + (1-t)(y - z)\| : z \in K\} \\
&\leq t\sup\{\|(x - z)\| : z \in K\} + (1-t)\sup\{\|(y - z)\| : z \in K\} \\
&= tf(x) + (1-t)f(y)
\end{aligned}$$

olduğundan f fonksiyonu konveks bir fonksiyondur. $B(x,r)$, x merkezli r yarıçaplı kapalı topu göstermek üzere $x \in K$ ise $K \subset B(x, f(x))$ olur. T genişlemeyen dönüşüm olduğundan $TK \subset B(Tx, f(x))$ olur. önerme 3.2.3 den $K = \overline{convTK} \subset B(Tx, f(x))$ olur. Bu ise $f(Tx) \leq f(x)$ olmasını gerektirir. f, önerme 3.2.7 deki koşulları sağladığından f sabit fonksiyondur. Yani, $\forall x \in K$ için $f(x) = f$ olur. Böylece, $\sup\{||x-y|| : x, y \in K\} =$ çap$K$, buradan da $f =$ çap$K$ elde edilir. □

Minimal kümelerin diğer özelliklerini ise kanıtlarına girmeksizin [2] sıralayalım.

Önerme 3.2.9. *Eğer K zayıf kompakt bir küme ise K, herbirinin çapı K nin çapından daha küçük olan sonlu tane küme tarafından örtülemez.*

Önerme 3.2.10. *Eğer K zayıf kompakt bir küme ise K, çapları K nin çapından daha küçük olan sonlu tane açık top tarafından örtülemez. Bu ifadeyi, tanımını ileriki kesimlerde vereceğimiz (tanım 3.3.28) kompaktsızlık ölçüsünü kullanarak; eğer K kümesi minimal ise*

$$\alpha(K) = \text{çap}(K)$$

dır şeklinde de ifade edebiliriz.

3.3 Banach Uzaylarında Normal Yapı

Sabit nokta teorinin tarihsel süreci içerisinde sabit nokta özelliğine denk olan "geometrik" bir özelliğin varlığı araştırılmıştır. Bu kesimde bu geometrik özelliklerden normal yapıyı inceleyerek, normal yapının sabit nokta özelliği ile olan ilişkisini belirleyeceğiz.

X bir Banach uzayı, A da X in herhangi bir sınırlı bir alt kümesi olsun. $\forall x \in A$ için aşağıdakileri tanımlayabiliriz.

$r(x, A) = \sup\{||x-y|| : y \in A\}$;

$R(A) = \inf\{r(x, A) : x \in A\}$;

$\delta(A) = \sup\{r(x, A) : x \in A\} =$ çap(A);

$C(A) = \{x \in A : R(A) = r(x, A)\}$.

Pozitif $R(A)$ sayısına A nın Chebyshev yarıçapı, $C(A)$ ya ise Chebyshev merkezi denir. Yukarıdaki tanımlardan herhangi $x \in A$ için

$R(A) \leq r(x, A) \leq \delta(A)$ olduğu görülür.

Tanım 3.3.1. $\sup_{x \in A} ||x_0 - x|| = çap(A)$ *koşulunu sağlayan* $x_0 \in A$ *noktasına diametral nokta adı verilir.*

O halde $r(x, A) = \delta(A)$ ise $x \in A$ noktası diametral nokta olur. Tüm noktaları diametral nokta olan kümelere diametral küme adı verilir. Buradan bir A kümesinin diametral küme olması için gerekli ve yeterli koşulun $C(A) = A$ ya da ona denk olan $R(A) = \delta(A)$ olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek 3.3.2. $C[0,1]$ *uzayının* $M = \{x \in C[0,1] : 0 = x(0) \leq x(t) \leq x(1) = 1\}$ *şeklinde tanımlı kapalı sınırlı dışbükey alt kümesini alalım.* $C[0,1]$ *üzerinde* $||x||_0 = \max_{0 \leq t \leq 1}\{|x(t)|\}$ *ve* $||x||_1 = ||x||_0 + (\int_0^1 (x(t))^2 dt)^{\frac{1}{2}}$ *normlarını tanımlayalım.* $||.||_0$ *normuna göre* $R(M) = çap(M) = 1$ *olduğundan* M *kümesi diametral bir kümedir. Fakat* $||.||_1$ *normuna göre* $çap(M) = 2$, $R(M) = \frac{3}{2}$ *ve* M *nin hiçbir diametral noktası yoktur. İlk norma göre* $C(M) = M$ *iken ikinci norma göre* $C(M) = \emptyset$ *olur.*

Tanım 3.3.3. *X bir Banach uzayı ve K, X in dışbükey alt kümesi olsun. K nın en az iki öğesi olan her S sınırlı dışbükey alt kümesi diametral olmayan bir nokta bulunduruyorsa K ya normal yapıya sahiptir denir. Eğer X Banach uzayının her dışbükey alt kümesi normal yapıya sahip ise X e normal yapıya sahiptir denir.*

Eğer K kümesi normal yapıya sahip ise çap$(S) > 0$ olan herhangi bir $S \subset K$ dışbükey kümesi için $\sup_{y \in S} ||x - y|| <$ çap(S) olacak şekilde $x \in S$ noktası vardır. Yani S kümesi merkezi S içerisinde ve yarıçapı çap(S) den küçük olan bir top tarafından kapsanır.

Aşağıdaki teorem normal yapı ile sabit nokta özelliği arasındaki bağlantıyı göstermektedir.

Teorem 3.3.4. *X bir Banach uzayı C de X in normal yapıya sahip, boş kümeden farklı, zayıf kompakt alt kümesi ise C sabit nokta özelliğine sahiptir.*

Kanıt. C nin sabit nokta özelliğine sahip olmadığını düşünelim. Bu durumda teorem 3.2.8 den C nin diametral dışbükey alt kümesi vardır. Bu ise C nin normal yapıya sahip olması ile çelişir. O halde C sabit nokta özelliğine sahip olmak zorundadır. □

Banach uzaylarının sabit nokta özelliğine sahip olmayan sınırlı, kapalı, dışbükey alt kümelerini bulabiliriz. O halde T nin genişlemeyen bir dönüşüm olmasının yanında K üzerinde bazı koşullara ihtiyacımız vardır. Aşağıdaki örnek üzerinde teorem 3.3.4 de yer alan zayıf kompaktlık argümanının rolünü inceleyelim.

Örnek 3.3.5. *K, c_0 uzayında birim top olsun. Zayıf topolojiler bölümünde değindiğimiz (viii.) özellikten, c_0 uzayı yansımalı olmadığı için K kümesi zayıf kompakt değildir. $T : K \to K$, $\forall (x_i) \in K$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ olmak üzere, $T(x_1, x_2, \dots) = (1, t_1 x_1, t_2 x_2, \dots)$ dönüşümünü tanımlayalım. T nin K dan K ya büzülme dönüşümü olduğu açıktır. Ayrıca, $\forall t \in [0,1]$ için $T(tx + (1-t)y) = tTx + (1-t)Ty$ olduğundan T doğrusal dönüşümdür. Şimdi T nin $x = (x_1, x_2, \dots) \in K$ gibi bir sabit noktası olduğunu kabul edelim. O zaman,*

$$x_1 = 1, x_2 = t_1 x_1, x_3 = t_2 x_2 = t_1 t_2, \dots, x_{n+1} = t_1 t_2 \dots t_n$$

olur. Buradan

$$x_{n+1} = \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{1}{2^{i+1}}) > 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i+1}} > \frac{1}{2}$$

elde edilir. O halde $n \to \infty$ için $x_n \not\to 0$ buradan $x \notin c_0$ olur. Bu ise x in seçilişi ile çelişir.

K, X Banach uzayının boş kümeden farklı, sınırlı, kapalı, dışbükey bir alt kümesi olsun. $T : K \to K$ genişlemeyen dönüşüm olmak üzere, sabit bir $z \in K$ ve $\varepsilon \in (0,1)$ için

$$T_\varepsilon(x) = \varepsilon z + (1 - \varepsilon) T(x)$$

şeklinde T_ε dönüşümü tanımlayalım

$\forall x, y \in K$ için

$$\begin{aligned} ||T_\varepsilon x - T_\varepsilon y|| &= ||\varepsilon z + (1-\varepsilon)T(x) - \varepsilon z - (1-\varepsilon)T(y)|| \\ &\leq (1-\varepsilon)||Tx - Ty|| \\ &\leq (1-\varepsilon)||x-y|| \end{aligned}$$

olduğundan T_ε büzülme dönüşümüdür. Banach sabit nokta teoremine göre T_ε dönüşümünün $x_\varepsilon \in K$ gibi bir sabit noktası vardır.

$$\begin{aligned} ||x_\varepsilon - Tx_\varepsilon|| &= ||\varepsilon z + (1-\varepsilon)Tx_\varepsilon - Tx_\varepsilon|| \\ &= \varepsilon||z - Tx_\varepsilon|| \\ &\leq \varepsilon \text{ çap}(K) \end{aligned}$$

$\varepsilon \to 0$ için $\inf\{||x - Tx|| : x \in K\} = 0$ elde ederiz. (Ancak T nin genişlemeyen dönüşüm olmadığı durumlarda genelde $\inf\{||x - Tx|| : x \in K\} > 0$ dır.) O halde T genişlemeyen dönüşümünün hemen hemen sabit nokta (almost fixed points) diyebileceğimiz bazı noktaları vardır. Buna bağlı olarak aşağıdaki tanımı yapabiliriz.

Tanım 3.3.6. $\lim_{n\to\infty} ||x_n - T(x_n)|| = 0$ *koşulunu sağlayan* (x_n) *dizisine yaklaşık sabit nokta dizisi (approximate fixed point sequence) adı verilir.*

T nin genişlemeyen dönüşüm olduğu durumlarda yukarıdaki yöntemle K içerisinde her zaman bir yaklaşık sabit nokta dizisi bulabiliriz.

Önerme 3.3.7. *K, T için minimal bir küme olsun. (x_n), K içerisinde bir yaklaşık sabit nokta dizisi ise $\forall x \in K$ için*

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = \delta(K) \textit{ olur.}$$

Kanıt. $\mathcal{U}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir ultra süzgeç olsun. $f(x) = \lim_{\mathcal{U}} ||x_n - x||$ dersek, (x_n) sınırlı bir dizi olduğundan $f : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu iyi tanımlıdır. Ayrıca f sürekli ve konveks bir fonksiyondur. (x_n), T için yaklaşık sabit nokta dizisi olduğundan, $\forall x \in K$ için $f(T(x)) \leq f(x)$ olur. O halde f fonksiyonu önerme 3.2.7 deki koşulları sağladığından sabit fonksiyon olmak zorundadır. $\forall x \in K$ için $f(x) = k$ olsun. K nın zayıf kompaktlığını kullanarak, (x_n) dizisinin $\mathcal{U}$ üzerinden zayıf limiti K

içerisindedir. $w - lim$ ile zayıf limiti göstermek üzere, $z = w - lim_{\mathcal{U}}(x_n) \in K$ olsun. Norm zayıf alt yarı sürekli fonksiyon olduğundan $\forall x \in K$ için $||z - x|| \leq \lim_{\mathcal{U}} ||x_n - x|| = k$ elde edilir. Önerme 3.2.8 den $k =$ çap(K) olur. Buradan $(||x_n - x||)$ in bir tek yığılma noktası olduğundan yakınsaktır. Böylece kanıt tamamlanmış olur. □

Banach uzayları üzerinde sabit nokta problemlerini Brouwer sabit nokta teoremi ile Banach sabit nokta teoremlerinin bir kombinasyonu olarak düşünebiliriz. Brouwer sabit nokta teoremindeki kompaktlık koşulunu kuvvetli topolojiye göre ele almıştık. Acaba sabit nokta teoremlerindeki koşulları farklı topolojilere genelleştirirsek örneğin dual Banach uzaylarında zayıf* topolojiyi kullanırsak aynı sonuçları elde edermiyiz? Bu durumda sabit nokta problemleri farklı topolojilere göre farklı durumlar sergilemektedir. Örneğin zayıf* topolojide zayıf*-kompakt, kapalı, dışbükey kümeler sabit nokta özelliğine sahip olmak zorunda değildir. Alspach ın oldukça fazla ayrıntı gerektiren örneği [6] zayıf*-kompakt, kapalı, dışbükey bir kümenin sabit nokta özelliğine sahip olmak zorunda olmadığını göstermektedir.

Tanım 3.3.8. *X bir Banach uzayı olsun. Eğer X in her zayıf kompakt, dışbükey bir alt kümesi normal yapıya sahip ise X Banach uzayına zayıf normal yapıya sahiptir denir.*

X^* dual Banach uzayı olsun. Eğer X^* in her zayıf-kompakt dışbükey alt kümesi normal yapıya sahip ise X^* dual Banach uzayına zayıf* normal yapıya sahiptir denir.*

Normal Yapı Özelliği ile Banach Uzayları

Bu kesimde fazla ayrıntıya girmeksizin Banach uzayları üzerinde bazı kavramları tanımlayarak, bu kavramların normal yapı ile ilişkisini kurmaya çalışacağız.

Tanım 3.3.9. *X bir Banach uzayı olsun. Eğer $0 < \alpha < 1$ ve X in boş kümeden farklı, sınırlı ve dışbükey her alt kümesi*

$$R(A) \leq \alpha\delta(A)$$

koşulunu sağlıyorsa, X e düzgün normal yapıya sahiptir denir.

Önerme 3.3.10. *Düzgün dışbükey her Banach uzayı normal yapıya sahiptir.*

Kanıt. A, düzgün dışbükey bir Banach uzayının keyfi, sınırlı, dışbükey bir alt kümesi olsun. çap$(A) = d > 0$ olduğunu kabul edelim. $\exists u, v \in A \ni ||u - v|| \geq \frac{d}{2}$. $\forall x \in A$ için

$$||x - u|| \leq d, ||x - v|| \leq d \text{ ve } ||(x - u) + (x - v)|| \geq \frac{d}{2} \text{ dir.}$$

Uzay düzgün dışbükey olduğundan,

$$\frac{1}{2}||(x - u) + (x - v)|| \leq d[1 - \delta(\frac{1}{2})] \text{ dir}$$

$w = \frac{u+v}{2} \in A$ alacak olursak, $||x - w|| \leq d[1 - \delta(\frac{1}{2})]$ elde ederiz. $r = d[1 - \delta(\frac{1}{2})] < d$ dersek, $B(w, r) \subset A$ olur. O halde uzay normal yapıya sahiptir. □

Banach uzayının düzgün normal yapıya sahip olması bu uzayın yansımalı olmasını gerektirdiği halde [2] düzgün normal yapının süper-yansımalılığı gerektirip gerektirmediği halen cevaplanamamış bir problemdir. Bununla birlikte yansımalı Banach uzaylarının normal yapıya sahip olduğu düşünülmekteydi. James bu iddiayı ℓ^2 üzerinde

$$||x||_\beta = \max\{||x||_{\ell^2}, \beta||x||_\infty\} \quad x \in \ell^2, \quad \beta > 0$$

normu yardımıyla $X_\beta = (\ell^2, ||.||_\beta)$ Banach uzayını tanımlayarak $X_{\sqrt{2}}$ için bu iddanın doğru olmadığını kanıtlamıştır. Daha sonra bu uzay üzerinde yapılan araştırmalar ile X_β uzayının normal yapıya sahip olması için gerek ve yeter koşulun $\beta < \sqrt{2}$ olduğu kanıtlanmıştır. Bu çalışmalar esnasında asimtotik normal yapı kavramı ortaya çıkmıştır.

Tanım 3.3.11. *X bir Banach uzayı olsun. Eğer X ın sınırlı, dışbükey, kapalı ve çap$(A) > 0$ koşulunu sağlayan her A alt kümesi ve $n \to \infty$ iken $||x_n - x_{n+1}|| \to 0$ koşulunu sağlayan her (x_n) dizisi için*

$$\liminf_{n \to \infty} ||x_n - x|| < \text{ çap}(A)$$

olacak şekilde $x \in A$ noktası varsa, X e asimtotik normal yapıya sahiptir denir.

Baillon ve Schönberg X_β uzayının asimtotik normal yapıya sahip olması için gerekli ve yeterli koşulun $\beta < 2$ olması olduğunu kanıtlamışlardır. Buradan asimtotik normal yapı, normal yapıyı gerektirmemesine karşın bu ifadenin tersi doğrudur.

Yine Baillon ve Schönberg 1981 yılında asimtotik normal yapıya sahip her yansımalı Banach uzayının sabit nokta özelliğine olduğunu kanıtlamıştır.

Tanım 3.3.12. *X bir Banach uzayı ve $(x_n) \in X$ sınırlı bir dizi olsun. Eğer $çap(x_n) > 0$ ve*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, conv(x_k)_{k=1}^n) = çap(x_n)$$

ise (x_n) dizisine diametral dizi adı verilir.

Örnek 3.3.13. *(e_n), standart taban vektörleri $c, c_0, \ell^1, \ell^\infty$ uzayları içerisinde diametrik dizidir. Gerçekten de c, yakınsak diziler uzayı sup normu ile bir Banach uzayıdır. Bu norm ile (e_n) dizisi sınırlı ve $çap(e_n) = 1 > 0$ dır. Şimdi*

$$\lim_{n\to\infty} d(e_{n+1}, conv(e_k)_{k=1}^n) = 1$$

olduğunu görmeliyiz. Eğer $x \in conv(e_k)_{k=1}^n$ ise $x = \sum_{k=1}^n a_k e_k$, $\sum_{k=1}^n a_k = 1$ ve $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ ya da $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots)$, $\sum_{k=1}^n a_k = 1$ ve $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ şeklinde yazılabilir. Buna göre her $n \in \mathbb{N}$ için $d(e_{n+1}, conv(e_k)_{k=1}^n) = 1$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} d(e_{n+1}, conv(e_k)_{k=1}^n) = 1$$

olur. Benzer şekilde (e_n) dizisinin c_0, ℓ^1, ℓ^∞ uzayları içerisinde de diametrik dizi olduğu görülebilir.

Teorem 3.3.14. *$A \subset X$ kümesinin normal yapıya sahip olması için gerekli ve yeter koşul A kümesinin diametral bir diziye sahip olmamasıdır.*

Kanıt. A kümesi normal yapıya sahip olsun ve kabul edelimki A kümesinin (x_n) gibi bir diametral dizisi olsun. C ile (x_n) dizisinin konveks zarfını gösterelim. C kümesinin normal yapıya sahip olmadığını gösterirsek, bu sonuç A kümesinin normal yapıya sahip olması ile çelişeceğinden kanıtın bu yönünü tamamlamış oluruz. Eğer $x \in C$ ise $\exists m \in \mathbb{N}$ için $x \in conv(x_k)_{k=1}^{m}$ ve $n \geq m$ için $x \in conv(x_k)_{k=1}^{n}$ Buradan

$$\text{çap}(C) \geq ||x - x_{n+1}|| \geq d(x_{n+1}, conv(x_k)_{k=1}^{n})$$

Bu ise herhangi bir $x \in C$ için

$$\sup\{||x-y|| : y \in C\} = \text{çap}(C)$$

olması demektir.

Tersine A kümesinin çap$(H) = d > 0$ ve her noktası diametral nokta olan H gibi dışbükey bir alt kümesi olsun. H nin diametral bir dizi bulundurduğunu göstermeliyiz. $0 < \varepsilon < d$ ve $||x_1 - x_2|| > d - \varepsilon$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in H$ noktaları seçebiliriz. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noktalarının önceden seçildiğini kabul ederek

$$||\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - x_{n+1}|| > d - \frac{\varepsilon}{n^2}$$

olacak şekilde x_{n+1} noktası seçelim. Şimdi bu şekilde oluşturulan (x_n) dizisinin diametrik dizi olduğunu görelim. $t_k > 0$ ve $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$ olmak üzere $x = \sum_{k=1}^{n} t_k x_k$ olsun. $t = \max\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ alırsak, kolayca doğrulanabilecek olan

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{nt}x + \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{n} - \frac{t_k}{nt})x_k \in conv\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} d - \tfrac{\varepsilon}{n^2} < ||\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k - x_{n+1}|| &\leq \tfrac{1}{nt}||x - x_{n+1}|| + \textstyle\sum_{k=1}^{n}(\tfrac{1}{n} - \tfrac{t_k}{nt})||x_k - x_{n+1}|| \\ &\leq \tfrac{1}{nt}||x - x_{n+1}|| + (1 - \tfrac{1}{nt}) \end{aligned}$$

ve böylece $||x - x_n|| > d - \frac{\varepsilon t}{n} \geq d - \frac{\varepsilon}{n}$ bu ise

$$\lim d(x_{n+1}, conv\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = d$$

demektir. O halde (x_n) dizisi diametrik bir dizidir. $\square$

Teorem 3.3.14 yardımı ile Banach uzaylarının herhangi dışbükey kompakt alt kümelerinin normal yapıya sahip olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek 3.3.15. *$c, c_0, \ell^1, \ell^\infty, C[0,1]$ uzayları normal yapıya sahip değildir. Gerçekte, $\{e_n\}$ standart taban vektörleri, $c, c_0, \ell^1, \ell^\infty$ uzayları içinde diametrik dizidir. $C[0,1]$ içerisinde $K = \{x = x(t) \in C[0,1] : 0 \leq x(t) \leq 1, x(0) = 0$ ve $x(1) = 1\}$ sınırlı, dışbükey ve kapalı kümesini alalım. Açıkca görüldüğü gibi çap$(K) = 1$ dir. Keyfi bir $x \in K$ için verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $0 < t < \delta$ iken $x(t) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulabiliriz. $t \geq \frac{\delta}{2}$ için $y(t) = 1$ olacak şekilde $y \in K$ fonksiyonu seçersek, $||x - y|| \geq 1 - \varepsilon$ olur. O halde x diametrik bir nokta olur. x, K nin keyfi bir noktası olduğundan K her noktası diametrik bir nokta olan bir küme olur.*

Tanım 3.3.16. *X bir Banach uzayı olsun. $z \in X$ ve $||z|| = 1$ olmak üzere z yönündeki düzgün dışbükeylik modulü δ, $\varepsilon \in [0,2)$ için;*

$$\delta(z,\varepsilon) = \inf\{1 - ||\frac{x+y}{2}|| : ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1 \text{ ve } ||x-y|| \geq \varepsilon \text{ için } x - y = \alpha z\}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer daima $\delta(z,\varepsilon) > 0$ ise X e her yönden düzgün dışbükey (uniformly convex in every direction) denir.

Önerme 3.3.17. *Her yönden düzgün dışbükey bir Banach uzayı normal yapıya sahiptir.*

Kanıt. Her yönden düzgün dışbükey bir Banach uzayının herhangi sınırlı dışbükey A alt kümesinin diametral olmayan nokta içerdiğini göstermemiz yeterlidir. çap$(A) = d > 0$ olsun. $x, y \in A$ ve $x \neq y$ alalım. Bu durumda $u = \frac{x+y}{2}$ gibi diametral olmayan bir nokta vardır. Aksi taktirde $||u - v_n|| \to d$ olacak şekilde $(v_n) \in A$ dizisi bulabiliriz. Buradan,

$$||x - v_n|| \leq d, \quad ||y - v_n|| \leq d, \quad ||(x - v_n + y - v_n)/2|| \to d$$

Buradan $x = y$ elde edilir. □

Önceki kesimlerde X Banach uzayının düzgün dışbükeylik modülü $\delta(\varepsilon)$ u

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\{1 - \frac{||x+y||}{2} : ||x|| \leq 1, \quad ||y|| \leq 1 \text{ ve } ||x-y|| \geq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlamıştık.

Tanım 3.3.18. *X Banach uzayının düzgün dışbükeylik karakteristiği ε_0,*

$$\varepsilon_0(X) = \sup\{\varepsilon : \delta_X(\varepsilon) = 0\}$$

şeklinde tanımlanır. $\varepsilon_0(X) = 0$ için X Banach uzayına düzgün dışbükey, $\varepsilon_0(X) < 2$ ise X e düzgün karesel olmayan Banach uzayı denir.

James $\varepsilon_0(X) < 2$ olduğunda X uzayının süper-yansımalı olduğunu kanıtlamıştır. $\varepsilon_0(X) < 1$ durumunda ise aşağıdaki önerme ile karşılaşırız.

Önerme 3.3.19. *$\varepsilon_0(X) < 1$ ise X in herhangi sınırlı, kapalı, dışbükey alt kümesi C ise*

$$\sup\{||x - y|| : y \in C\} \leq (1 - \delta_X(1))çap(C)$$

olacak şekilde $x \in C$ vardır.

O halde x diametral olmayan bir noktadır. Buradan $\varepsilon_0(X) < 1$ ise X uzayı düzgün normal yapıya sahiptir diyebiliriz.

Tanım 3.3.20. *X bir Banach uzayı olsun. X in düzgünlük modülü (modulus of smoothness) ρ_X, $\forall\zeta > 0$ için*

$$\rho_X(\zeta) = \sup\{\frac{1}{2}[||x + \zeta y|| + ||x - \zeta y|| - 2] : ||x|| \leq 1, \quad ||y|| \leq 1\}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer

$$\rho'_X(0) = \lim_{\zeta \to 0} \frac{\rho_X(\zeta)}{\zeta} = 0$$

ise X uzayına uniformly smooth adı verilir.

Tanım 3.3.21. *X bir Banach uzayı olsun. X uzayının k-düzgün dışbükeylik modülü (modulus of k-uniform convexity) δ_X^k, $\forall\varepsilon \in (0,2)$ için*

$$\delta_X^k(\varepsilon) = \inf\{1 - \frac{||x_1 + x_2 + \cdots + x_k + 1||}{k+1} : ||x_i|| \leq 1 \ ve \ V(x_1, \ldots, x_{k+1}) > \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$V(x_i) = \sup\{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \ldots & f_1(x_{k+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_k(x_1) & f_k(x_2) & \ldots & f_k(x_{k+1}) \end{vmatrix} : f_i \in X^*, \quad ||f_i|| \leq 1\} \quad dir.$$

$\forall\varepsilon \in (0,2)$ *için* $\delta_X^k(\varepsilon) > 0$ *ise* X *Banach uzayına k-düzgün dışbükey adı verilir.* X *uzayının k-düzgün dışbükeylik karakteristiği*

$$\varepsilon_0^k = \sup\{\varepsilon : \delta_X^k(\varepsilon) = 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.3.22. X *bir Banach uzayı ve* $\exists k \in \mathbb{N}$ *için* $\varepsilon_0^k(X) < 1$ *ise* X *Banach uzayı düzgün normal yapıya sahiptir.*

Tanım 3.3.23. X *bir Banach uzayı olsun. Eğer* $\forall\varepsilon > 0$ *için* $\exists\delta > 0 \quad \ni (x_n) \in B(0,1)$ *ve* $\inf\{||x_n - x_m|| : n \neq m\} \geq \varepsilon \Rightarrow (conv(x_n) \cap B(0,1-\delta) \neq \emptyset$ *ise* X *Banach uzayına yakın düzgün dışbükey (nearly uniformly convex) adı verilir.*

Önerme 3.3.24. *Her yakın düzgün dışbükey Banach uzayı normal yapıya sahiptir.*

Tanım 3.3.25. X *bir Banach uzayı olsun. Eğer her* $(x_n) \xrightarrow{w} w$ *dizisi ve* $x \neq w$ *için*

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - w|| < \lim_{n\to\infty} \inf ||x_n - x||$$

sağlanıyorsa X *Banach uzayına Opial koşulunu sağlar denir.*

Aşağıdaki önerme Opial koşulu ile normal yapının bağlantısını göstermektedir.

Önerme 3.3.26. *Opial koşulunu sağlayan yansımalı her Banach uzayı normal yapıya sahiptir.*

Kanıt. Bakiniz [3] □

Teorem 3.3.27. X *Opial koşulunu sağlayan bir Banach uzayı ve* K, X *in zayıf-kompakt, dışbükey alt kümesi olsun.* $T : K \to K$ *genişlemeyen dönüşüm ise* $I - T$, K *üzerinde demi-closed operatör yani,*
$(u_n) \xrightarrow{w} u$ *ve* $(u_n - Tu_n) \to w \quad$ *ise* $u - Tu = w$ *dır.*

Tanım 3.3.28. X *bir Banach uzayı ve* A, X *in sınırlı alt kümesi olsun.* A *kümesinin Kuratowski kompaktsızlık ölçüsü (measure of noncompactness)* α,

$$\alpha(A) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \text{ kümesi çapı } \varepsilon \text{ dan küçük olan sonlu tane küme ile örtülebilir}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.3.29. *X, $\mathbb{K}$ üzerinde bir Banach uzayı ve $M, M_1, \ldots, M_n$ ve N X uzayının sınırlı alt kümeleri ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

i. $\alpha(\emptyset) = 0$.

ii. $\alpha(M) = 0 \Leftrightarrow M$ *göreli kompakt.*

iii. $0 \leq \alpha(M) \leq$ *çap*(M).

iv. $M \subseteq N \Rightarrow \alpha(M) \leq \alpha(N)$.

v. $\alpha(M+N) \leq \alpha(M) + \alpha(N)$.

vi. $\forall \beta \in K$ *için* $\alpha(\beta M) = |\beta| \alpha(M)$.

vii. $\alpha(M) = \alpha(\overline{M})$

viii. $\alpha(\sup_{i=1}^{n} M_i) = \max\{\alpha(M_1), \ldots, \alpha(M_n)\}$.

ix. $\alpha(M) = \alpha(conv(M)) = \alpha(\overline{conv}(M))$.

Kanıt. İlk dört tanenin kanıtı tanımdan kolayca görülebileceğinden v. nin kanıtını yapalım. $M_1, M_2, \ldots, M_m$ M nin bir örtüsü ve $N_1, N_2, \ldots, N_n$ de N nin bir örtüsü ise tüm $M_i + N_j$ lerde $M + N$ nin bir örtüsü olur. çap$(M_i + N_j) \leq$ çap(M_i) + çap(N_j) olduğundan istenilen sonuç elde edilmiş olur. Yine aynı şekilde çap$(\beta N) = |\beta|$çap(N) olduğundan *(vi.)* nin kanıtıda yapılmış olur. Şimdi *(vii.)* nin kanıtını yapalım. $M \subseteq \overline{M}$ olduğundan iv. den dolayı $\alpha(M) \leq \alpha(\overline{M})$ olur. Tersine, $M \subseteq \cup_i M_i$ ise $\overline{M} \subseteq \cup_i \overline{M}$ buradan çap$(M_i) =$ çap$(\overline{M_i})$ böylece $\alpha(\overline{M}) \leq \alpha(M)$ elde edilir. *(viii.)* nin kanıtını yapmak için $M = \cup_i M_i$ ve $a = \max\{\alpha(M_1), \ldots, \alpha(M_n)\}$ olsun. $M_i \subseteq M$ olduğundan iv. yardımı ile $\alpha(M_i) \leq \alpha(M)$ ya da $a \leq \alpha(M)$ olur. Tersine $\alpha(M) \leq a$ olduğunu görmeliyiz. $\forall \varepsilon > 0$ ve her M_i için M_i nin çap$(M_{ij}) \leq \alpha(M) + \varepsilon \leq a + \varepsilon$ olacak şekilde $M_{i1}, \ldots, M_{im}$ örtüsü vardır. Tüm M_{ij} ler birlikte M nin örtüsü olduğundan $\alpha(M) \leq a + \varepsilon$ olur. $\varepsilon \to 0$ için $\alpha(M) \leq a$ elde edilir. ix. nin kanıtı oldukça ayrıntı gerektirmektedir. Kanıtı [8] de bulabilirsiniz. □

Tanım 3.3.30. *X bir Banach uzayı olsun. X uzayının kompakt olmayan dışbükeylik modülü (modulus of noncompact convexity), her* $\varepsilon \in (0,2)$ *için*

$$\begin{aligned}\Delta_X(\varepsilon) &= \inf\{1 - \inf_{x\in A}||x|| : A \textit{ kümesi birim topun} \\ &\qquad \alpha(A) \geq \varepsilon \textit{ koşulunu sağlayan dışbükey alt kümesi}\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. X uzayının kompakt olmayan dışbükeylik karakteristiği (characteristic of noncompact convexity) ε_1 *ise*

$$\varepsilon_1(X) = \sup\{\varepsilon : \delta_X(\varepsilon) = 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.3.31. *X Banach uzayı* $\varepsilon_1(X) < 1$ *koşulunu sağlıyorsa X yansımalıdır ve normal yapıya sahiptir.*

Kanıt. Bakınız [2]. □

Metrik Uzaylarda Normal Yapı

Tanım 3.3.32. (M,d) *bir metrik uzay olsun. M nin boş kümeden farklı alt kümelerinden oluşan* $\mathcal{F}$ *ailesi kesişim altında değişmez kalıyorsa,* $\mathcal{F}$ *ye dışbükey yapı (convexity structure) adı verilir.* $\mathcal{F}$ *nin elemanlarına ise dışbükey adı verilir.*

M nin ve kapalı topların dışbükey olduğunu yani M nin ve kapalı topların $\mathcal{F}$ nin elemanı olduğunu kabul edeceğiz. $A \subset M$ ise $\mathcal{F}_A = \{C \in \mathcal{F} : A \subset C\}$ olmak üzere, $conv(A) = \cup\{C : C \in \mathcal{F}_A\}$ dır.

Tanım 3.3.33. $\mathcal{F}$ *nin elemanlarından oluşan herhangi* $(C_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ *ailesi sonlu arakesit özelliğine sahip ise* $\mathcal{F}$ *ye kompakt denir.*

Eğer her sınırlı ve $çap(A) > 0$ *koşulunu sağlayan* $A \in \mathcal{F}$ *kümesi için* $\sup\{d(x,y) : y \in A\} < çap(A)$ *olacak şekilde* $x \in A$ *noktası varsa* $\mathcal{F}$ *ye normal, A kümesinden bağımsız olarak bazı* $c \in (0,1)$ *için* $\sup\{d(x,y) : y \in A\} \leq c\ çap(A)$ *olacak şekilde* $x \in A$ *varsa* $\mathcal{F}$ *ye düzgün normal denir.*

Teorem 3.3.34. (M,d) *metrik uzayı,* $\mathcal{F}$ *kompakt ve normal dışbükey yapısına sahip ise her* $T : M \to M$ *genişlemeyen dönüşümünün bir sabit noktası vardır.*

3.4 Ultra Çarpımlar İçin Temel Sonuçlar

Önceki kesimlerde, genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarınının varlığını garantileyen Zorn Teoremi gibi, geometrik olmayan kavramları sıkça kullandık. Sabit nokta teorinin son yıllardaki gelişimi, bu kavramların daha da fazla kullanılmasına, daha soyut ve karmaşık teknikler kullanılmasını gerektiren bir şekle dönüşmesine neden olmuştur. Bu teknikleri ilk kullanan matematikçiler Maurey, 1981 ve diğerleri (Lin, 1985; Khamsi, 1987; Belluce ve Kirk, 1985) dir. Bu matematikçilerin fikirlerinin temelinde ultra süzgeçler ve ultra çarpım teknikleri vardır. Banach uzayları için ultra çarpımların bir uygulaması ilk olarak 1980 yılında Heinrich tarafından verilmiştir [4].

Bu kesimde daha önce tanımlayıp, bazı özelliklerini incelediğimiz ultra çarpımlar konusunun sabit nokta teori ile olan ilişkisini araştıracağız.

C, X Banach uzayının boş kümeden farklı, dışbükey, zayıf kompakt alt kümesi olsun. C nin sabit nokta özelliğine sahip olmadığını düşünelim. O halde $\text{Fix}(T) = \emptyset$ olacak şekilde enaz bir $T : C \to C$ genişlemeyen dönüşümü vardır. Önceki kesimlerde olduğu gibi K, T için minimal bir küme olsun. $\mathcal{U}$, $\mathbb{N}$ üzerinde aşikar olmayan ultra süzgeç olmak üzere X in $(X)_{\mathcal{U}}$ ultra kuvveti için de benzer şekilde $\widetilde{K}$ kümesi ve $\widetilde{T}$ dönüşümü tanımlayabiliriz.

$$\begin{aligned}\widetilde{K} = \; & \{\widetilde{x} \in (X)_{\mathcal{U}} : \text{ her } n \geq 0 \text{ için} \\ & \widetilde{x} \text{ nın } x_n \in K \text{ olacak şekilde } (x_n) \text{ temsilcisi vardır } \}\end{aligned}$$

ve

$$\text{Her } \widetilde{x} \in \widetilde{K} \text{ için } \widetilde{T}\widetilde{x} = \widetilde{(Tx_n)}.$$

olsun. $\widetilde{K}$, $(X)_{\mathcal{U}}$ nun sınırlı, kapalı, dışbükey ve $\widetilde{T}$ altında değişmez kalan alt kümesidir. Ancak $\widetilde{K}$, $\widetilde{T}$ için minimal değildir. Gerçekten de T için K içerisinde her zaman bir sabit nokta yaklaşık dizisinin varlığını önceki kesimlerde kanıtlamıştık yani, $n \to \infty$ için $||x_n - Tx_n|| \to 0$ olacak şekilde K içerisinde bir (x_n) dizisi vardı. Şimdi $\widetilde{x} = \widetilde{(x_n)}$ olarak tanımlarsak, $\widetilde{x} \in \widetilde{K}$ ve $\widetilde{T}\widetilde{x} = \widetilde{x}$ dir. Bu ise $\widetilde{x} \in \text{Fix}(\widetilde{T})$ ya da $\text{Fix}(\widetilde{T}) \neq \emptyset$ demektir. Öyleyse $\widetilde{K}$, $\widetilde{T}$ için minimal bir küme olamaz. Ayrıca $\widetilde{x} = \widetilde{(x_n)} \in \text{Fix}(\widetilde{T})$ ise (x_n) dizisinin T için bir sabit nokta yaklaşık dizisi olan (x'_n)

alt dizisi vardır. Öte yandan eğer $x \in K$, $\widetilde{x} \in \widetilde{K}$ ve $\widetilde{x} \in$ Fix$(\widetilde{T})$ olduğunu kabul edecek olursak, önerme 3.2.8 den

$$||\widetilde{x} - x||_{(X)_{\mathcal{U}}} = \text{çap}(K)$$

elde ederiz.

$\widetilde{K}$ nın bazı özelliklerini aşağıdaki teorem ile özetleyebiliriz.

Teorem 3.4.1. *Aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

i. $çap(\widetilde{K}) = çap(K) = çap(Fix(\widetilde{T}))$.

ii. K, $\widetilde{K}$ *ve* $Fix(\widetilde{T})$ *kümeleri diametrik kümelerdir.*

iii. $Fix(\widetilde{T})$ *kümesi metriksel olarak dışbükeydir yani, her* $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in Fix(\widetilde{T})$ *ve* $0 \leq \alpha \leq 1$ *için*

$$||\widetilde{x} - \widetilde{z}|| = (1 - \alpha)||\widetilde{x} - \widetilde{y}||$$

ve

$$||\widetilde{y} - \widetilde{z}|| = \alpha||\widetilde{x} - \widetilde{y}||$$

olacak şekilde $\widetilde{z} \in Fix(\widetilde{T})$ *vardır.*

iv. $(\widetilde{w}_n)$ $\widetilde{K}$ *içerisinde* $\widetilde{T}$ *için bir sabit nokta yaklaşık dizisi ise her* $x \in K$ *için*

$$\lim_{n \to \infty} ||\widetilde{w}_n - x|| = çap(K)$$

olur.

Kanıt. *i.* ve *ii.* seçeneklerinin kanıtı kolayca görülebileceği için, önce *iii.* nin kanıtını yapalım.

Fix(T) kümesi kapalı bir küme olduğundan, keyfi $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in$ Fix$(\widetilde{T})$ için

$$||\widetilde{x} - \widetilde{z}|| = ||\widetilde{y} - \widetilde{z}|| = \frac{1}{2}||\widetilde{x} - \widetilde{y}||$$

olacak şekilde $\widetilde{z} \in$ Fix$(\widetilde{T})$ nın varlığını kanıtlamak yeterli olacaktır. $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_n)$ ve $\widetilde{y} = (\widetilde{y}_n)$ alırsak, $n \in \mathbb{N}$ sabit ve

$\delta_n = \max\{\|x_n - T(x_n)\|, \|y - T(y_n)\|\}$

$\varepsilon_n = \min\{\frac{1}{2}, \sqrt{\delta_n}\}$

$d_n = \frac{1}{2}\|x_n - y_n\|$ ve

$\eta_n = \frac{(1-\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}\delta_n$ olsun.

$$K_n = \{z \in K : \max\{\|x_n - z\|, \|y_n - z\|\} \leq d_n + \eta_n\}$$

kümesini alalım. $\frac{x_n+y_n}{2} \in K$ olduğu açıktır. Buradan K_n, K nın boş kümeden farklı, kapalı, dışbükey alt kümesi olur. Şimdi her $z \in K$ için

$$T_n(z) = (1-\varepsilon_n)T(z) + \varepsilon_n\frac{(x_n+y_n)}{2}$$

dönüşümünü tanımlayalım. K_n kümesi T altında değişmezdir. Gerçektende $z \in K$ ise

$$x_n - T_n(z) = (1-\varepsilon_n)(x_n - t(z)) + \varepsilon_n\frac{(x_n+y_n)}{2}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} x_n - T_n(z) &= (1-\varepsilon_n)(\|x_n - T(x_n)\| + \|T(x_n) - T(z)\|) \\ &\quad +\tfrac{1}{2}\varepsilon_n\|x_n - y_n\| \\ &\leq (1-\varepsilon_n)(\delta_n + d_n + \eta_n) + \varepsilon_n d_n \\ &= d_n + (1-\varepsilon_n)\delta_n + (1-\varepsilon_n)\eta_n \\ &= d_n + \varepsilon_n\eta_n + (1-\varepsilon_n)\eta_n = d_n + \eta_n \end{aligned}$$

ve yine benzer olarak, $\|y_n - T_n(z)\| \leq d_n + \eta_n$ bulunur. Öte yandan T_n dönüşümü bir büzülme dönüşümü olduğundan, T_n dönüşümünün K_n içerisinde z_n gibi bir tek sabit noktası vardır. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için,

$\|x_n - z_n\| \leq d_n + \eta_n$,

$\|y_n - z_n\| \leq d_n + \eta_n$ ve

$\|z_n - T(x_n)\| \leq \varepsilon_n$ çap(K) olur.

$\widetilde{x}$ ve $\widetilde{y}$ Fix$(\widetilde{T})$ nin elemanı olduğundan, $\lim_{\mathcal{U}}\delta_n = 0$ dır. Öyleyse $\lim_{\mathcal{U}}\varepsilon_n = 0$ ve $\lim_{\mathcal{U}}\eta_n = 0$ olmak zorundadır. Böylece $\widetilde{z} = (\widetilde{z}_n)$ istenilen eşitliği sağlar ve $\widetilde{z} \in$ Fix$(\widetilde{T})$ dır.

Şimdi *iv* seçeneğinin kanıtını yapalım. Bunun için çap(K) nın $(\|\widetilde{w}_n - x\|)$ dizisinin bir tek yığılma noktası olduğunu göstermek yeterlidir. Genelliği kaybetmeksizin $\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{w}_n - x\| = d$ olsun. Bir önceki seçeneğin kanıtına benzer olarak, $\delta_n = \|\widetilde{w}_n - \widetilde{T}\widetilde{w}_n\|$ ve (ε_k), $\lim_{k\to\infty} = 0$ koşulunu sağlasın. Eğer $\widetilde{w}_n = \widetilde{(w_m^n)}$ ise

$$A_k = \{m \in \mathbb{N} : \|\widetilde{w_m^n} - x\| < d + 2\varepsilon_k \text{ ve } \|\widetilde{w_m^n} - T(\widetilde{w_m^n}\| \leq \varepsilon_k + \delta_n\}$$

kümesi yeterince büyük n ler için $\mathcal{U}$ nun elemanıdır. $\mathcal{U}$ aşikar olmayan ultra süzgeç olduğundan, her $k \in \mathbb{N}$ için

$\|w_{m(k)}^{n(k)} - x\| \leq d + 2\varepsilon_k$ ve

$\|w_{m(k)}^{n(k)} - T(w_{m(k)}^{n(k)})\| \leq \varepsilon_k + \delta_n(k)$ olacak şekilde $(n(k))$ ve $(m(k))$ kesin artan tamsayı dizileri bulabiliriz. $(w_{m(k)}^{n(k)})$, T için bir sabit nokta yaklaşık dizisi olduğundan, önerme 3.3.7 dan çap$(K) \leq d$ olur. □

Aşağıdaki önerme az önce kanıtlanan teoremin basit bir sonucudur.

Önerme 3.4.2. *$\widetilde{W}$ kümesi, $\widetilde{K}$ kümesinin $\widetilde{T}$ dönüşümü altında değişmez kalan, boş kümeden farklı, dışbükey ve kapalı bir alt kümesi ise,*

her $x \in K$ için

$$\sup\{\|x - \widetilde{w}\| : \widetilde{w} \in \widetilde{W}\} = \text{çap}(K) \text{ dir.}$$

Kanıt. $\widetilde{(w_n)}$, $\widetilde{W}$ içerisinde $\widetilde{T}$ için bir sabit nokta yaklaşık dizisi olsun. Teorem 3.4.1 *(iv.)* yardımıyla her $x \in K$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{w_n} - x\| = \text{çap}(K)$$

olduğunu biliyoruz bu ise bize kanıtlamak istediğimiz

$$\sup\{\|x - \widetilde{w}\| : \widetilde{w} \in \widetilde{W}\} = \text{çap}(K)$$

eşitliğini getirir. □

Şimdi ultra çarpım teknikleri kullanılarak, yeni sabit nokta teoremlerinin nasıl edelebileceğini gösterelim. Önce ultra çarpım tekniklerini kullanarak Banach uzaylarında Scahauder tabanların da yararlanarak elde edilen bazı önemli sonuçları görelim. Ön bilgiler kesiminde ele aldığımız (e_n) Schauder tabanını aşağıdaki sabitlerle ele alalım.

$\mu = \sup\{\|u - v\| : u$ ve v, (e_n) tabanı için farklı bloklar ve $\|u + v\| \leq 1\}$

$c_1 = \sup\{\|I - P_n\| : P_n$, $(1, n)$ üzerindeki doğal izdüşüm fonksiyonu$\}$

$c_2 = \sup\{\|I - P_F\| : F$, $\mathbb{N}$ içinde keyfi bir aralık$\}$

$c = \sup\{\|P_n\| : P_n$, $[1, n]$ üzerindeki doğal izdüşüm fonksiyonu$\}$

Tanımları kullanarak μ, c_1, c_2, c katsayılarının sonlu sayılar olduğunu görmek kolaydır.

Aşağıdaki teorem bu katsayılar yardımıyla Schauder tabanları ve sabit nokta özelliği arasındaki bir ilişkiyi vermektedir.

Teorem 3.4.3. *X bir Banach uzayı, (e_n) de X uzayının*

$$c_1\mu + c + c_2 < 4$$

koşulunu sağlayan bir tabanı ise X uzayı sabit nokta özelliğine sahiptir.

Kanıt. Tersine, kabul edelim ki X uzayı sabit nokta özelliğine sahip olmasın. O zaman X in, en az bir tane boş kümeden farklı, zayıf kompakt, dışbükey C alt kümesi için $\mathrm{Fix}(T) = \emptyset$ olacak şekilde bir $T : C \to C$ genişlemeyen dönüşümü vardır. K kümesi de, bu T genişlemeyen dönüşümü için minimal bir küme olsun. $\text{Çap}(K) = 1$ olarak almamız genelliği bozmaz.

(x_n) dizisi de K içinde T için bir sabit nokta yaklaşık dizisi olsun. K zayıf kompakt olduğundan (x_n) dizisi zayıf yakınsak olur. Ayrıca sabit nokta özelliği öteleme altında değişmez kaldığından, $w - \lim(x_n) = 0$ olarak kabul edebiliriz. Önerme 1.2.6 yı kullanarak (x_n) dizisinin (x'_n) alt dizisi ve (F_n), $\mathbb{N}$ içindeki ayrık ardışık aralıklar olmak üzere (P_{F_n}) doğal izdüşümler dizisi vardır öyleki (P_{F_n}) dizisi,

$$\lim_{n\to\infty} \|P_{F_n}(x'_n) - x'_n\| = 0 \tag{1}$$

koşulunu sağlar. Gösterimde kısalık sağlamak amacıyla P_{F_n} yerine P_n gösterimini kullanırsak, (F_n) in özelliklerinden yararlanarak,

$$n \neq m \text{ için } P_n \circ P_m = 0 \text{ ve} \tag{2}$$

$$\text{her } x \in X \text{ için } \lim_{n\to\infty} \|P_n(x)\| = 0 \tag{3}$$

olduğunu görebiliriz.

Son olarak, önerme 3.3.7 yi kullanarak,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 1 \tag{4}$$

olarak kabul edebiliriz.

Şimdi $\mathcal{U}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir ultra süzgeç ve $(X)_{\mathcal{U}}$ da X in ultra kuvveti olsun. Önceki kesimlerde olduğu gibi $\widetilde{K}$ ve $\widetilde{T}$ tanımlansın. $\widetilde{K}$ nın $\widetilde{x} = \widetilde{(x_n)}$ ve $\widetilde{y} = \widetilde{(x_{n+1})}$ elemanlarını alalım. (x_n) dizisinin seçilişinden $\widetilde{x}$ ve $\widetilde{y} \in \operatorname{Fix}(\widetilde{T})$ olur.

$\hat{P}_n$ ile P_n ile ilişkilendirilen tam izdüşümleri gösterelim yani P_n, F_n aralığı üzerine bir izdüşüm ise $\hat{P}_n$, $[1, \max F_n]$ üzerine bir izdüşümdür. $Q_n = I - \hat{P}_n$ olmak üzere,

$$\widetilde{P} = (P_n)_{\mathcal{U}} \text{ ve } \widetilde{Q} = (Q_n)_{\mathcal{U}}$$

dönüşümlerini tanımlayalım. (1), (2) ve (3) ifadelerinden yararlanarak her $x \in X$ için

$$\widetilde{P}(\widetilde{x}) = \widetilde{x},\ \widetilde{Q}(\widetilde{y}) = \widetilde{y},\ \widetilde{P}(\widetilde{y}) = \widetilde{Q}(\widetilde{x}) = \widetilde{P}(x) = \widetilde{Q}(x) = 0 \tag{5}$$

elde edilir. Ayrıca (4) yardımıyla

$$\|x + y\| = \|\widetilde{P}\widetilde{x} + \widetilde{Q}\widetilde{y}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|P_n(x_n) + Q_n(x_{n+1})\|$$

yazabiliriz. Fakat

$$\|P_n(x_n) + Q_n(x_{n+1})\| \leq \mu \|P_n(x_n) - Q_n(x_{n+1})\|$$

olduğundan,

$$\|\widetilde{x} + \widetilde{y}\| \leq \mu \|\widetilde{P}\widetilde{x} - \widetilde{Q}\widetilde{y}\| = \mu \|\widetilde{x} - \widetilde{y}\| = \mu \tag{6}$$

$\widetilde{P}$ ve $\widetilde{Q}$ nun tanımını kullanırsak I, $\widetilde{x}$ in birim dönüşümü olmak üzere,

$$\|\widetilde{P} + \widetilde{Q}\| \leq c_1,\ \|I - \widetilde{P}\| \leq c_2, \text{ ve } \|I - \widetilde{Q}\| \leq c$$

bulunur.

Şimdi

$$\widetilde{W} = \{\widetilde{w} \in \widetilde{K} : \exists x \in K \ni \|\widetilde{w} - x\| \leq \frac{\mu}{2}; \|\widetilde{w} - \widetilde{x}\| \leq \frac{1}{2}; \text{ ve } \|\widetilde{w} - \widetilde{y}\| \leq \frac{1}{2}\}.$$

kümesini tanımlayalım. $\widetilde{W}$ kümesi, $\widetilde{K}$ kümesinin kapalı ve dışbükey bir alt kümesidir. (6) dan dolayı $\frac{\widetilde{x}+\widetilde{y}}{2} \in \widetilde{W}$ dir. $x \in K$ ve $\widetilde{x}$ ve $\widetilde{y} \in$ Fix(T) olduğunda $\widetilde{T}x = Tx \in K$ olduğundan $\widetilde{W}$ nin $\widetilde{T}$ altında değişmez kalır.

Şimdi $\widetilde{w} \in \widetilde{W}$ ve x de K nin $\|\widetilde{w} - x\| \leq \frac{\mu}{2}$ koşulunu sağlayan bir elemanı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} 2\widetilde{w} &= (\widetilde{P} + \widetilde{Q})\widetilde{w} + (I - \widetilde{P})\widetilde{w} + (I - \widetilde{Q})\widetilde{w} \\ &= (\widetilde{P} + \widetilde{Q})(\widetilde{w} - x) + (I - \widetilde{P})(\widetilde{w} - \widetilde{x}) + (I - \widetilde{Q})(\widetilde{w} - \widetilde{y}) \end{aligned}$$

ve böylece,

$$\begin{aligned} 2\|\widetilde{w}\| &\leq \|\widetilde{P} + \widetilde{Q}\|\|\widetilde{w} - x\| + \|I - \widetilde{P})\|\|\widetilde{w} - \widetilde{x}\| + \|I - \widetilde{Q}\|\|\widetilde{w} - \widetilde{y}\| \\ &= c_1\tfrac{\mu}{2} + c_2\tfrac{1}{2} + c\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\sup\{\|\widetilde{w}\| : \widetilde{w} \in \widetilde{W}\} \leq \frac{(\mu c_1 + c_2 + c}{4}$$

bulunur. Şimdi önerme 3.4.2 kullanılacak olursa,

$$1 = \text{çap}(K) \leq \frac{1}{4}(\mu c_1 + c_2 + c)$$

bulunur ki bu bir çelişkidir.

O halde X uzayı sabit nokta özelliğine sahip olmak zorundadır. □

Bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 3.4.4. *X, koşulsuzluk taban sabiti 1 olan (e_n) koşulsuz Schauder tabanı ile birlikte bir Banach uzayı olsun. Bu durumda X uzayı sabit nokta özelliğine sahiptir.*

Kanıt. X uzayının koşulsuzluk taban sabiti 1 olduğundan c, c_1, c_2, μ sabitlerinin her birisi 1 e eşittir. O halde teorem 3.4.3 i kullanarak X uzayının sabit nokta özelliğine sahip olduğunu söyleyebiliriz. □

Teorem 3.4.3 ün kanıtında kullandığımız tekniklerin kullanıldığı benzer bir çok teorem daha vardır. Ancak kanıtlarının oldukça karışık ve uzun olması nedeniyle bu teoremlerden burada bahsetmek gereksiz olacaktır. Bu teoremler için [1] dan yararlanabilirsiniz.

Şimdi bu konunun başında da değindiğimiz gibi ultra çarpım tekniklerini ilk kullanan Maurey dir. Maurey L^1 sabit nokta özelliğine sahip olmamasına rağmen, L^1 in yansımalı alt uzaylarının sabit nokta özelliğine sahip olduğunu kanıtlamıştır. Şimdi Maurey in bazı teoremlerini kanıtlarına girmeden sıralayalım [1], [2].

Teorem 3.4.5. *$L^1[0,1]$ uzayının yansımalı alt uzaylarının sınırlı, kapalı, dışbükey alt kümeleri sabit nokta özelliğine sahiptir.*

Teorem 3.4.6. *Hardy uzayının zayıf kompakt ve dışbükey alt kümeleri sabit nokta özelliğine sahiptir.*

Teorem 3.4.7. *K, X süper yansımalı uzayının zayıf kompakt, dışbükey bir alt kümesi ve $T : K \to K$ bir izometri dönüşümü ise T nin K içerisinde bir sabit noktası vardır.*

Teorem 3.4.8. *c_0 Banach uzayı sabit nokta özelliğine sahiptir.*

KAYNAKLAR

[1] AKSOY, A. G., KHAMSI, M. A., *Nonstandard Methods in Fixed Point Theory.* Springer-Verlag, Newyork, 1990.

[2] GOEBEL, K., KIRK, W. A.,*Topics in Metric Fixed Point Theory.* Cambridge University Press, 1990.

[3] GULEVICH, N. M. *Fixed Points of Nonexpansive Mappings*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 79, No. 1, *755-816*, 1996.

[4] HEINRICH, S., *Ultraproduct in Banach Space Theory*, J. Reine and Ang. Mat. 313, *72-104*, 1980.

[5] ISTRATESCU V., I., *Fixed Point Theory.* D. Reidel Publishing Company, 1981.

[6] FADELL, E., FUORNIER G., *Lecture Notes in Mathematics Fixed Point Theory.* Springer-Verlag, Newyork, 1981.

[7] LINDENSTRAUSS, J., TZAFRIRI, L., *Classical Banach Spaces I.* Springer-Verlag, Newyork, 1977.

[8] ZEIDLER, E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I (Fixed Point Theorems)*, Springer-Verlag, Newyork, 1985.