GENİŞLEMEYEN FONKSİYONLAR İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

NİLAY OYA TORUN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Eylül - 1998

Nilay.....Oya.....TORUN.......' ın Yüksek..Lisans.tezi olarak hazırladığı ..Genişlemeyen.......Fonksiyonlar....İçin.....Bazı....Sabit.....Nokta.. ..Teoremleri..başlıklı tez ..30.-09.-1998.......tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Lisansüstü Öğretim Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye (Tez Danışmanı) : Prof...Dr.......Orhan......ÖZER.......

Üye : Prof..Dr.......Şahin....KOÇAK...........

Üye : Yrd..Doç..Dr.....Mahmut......KOÇAK.....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .07.10.1998.tarih ve ..15/1.........sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Orhan ÖZER
Fen Bilimleri Enstitüsü
Müdürü
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENİŞLEMEYEN FONKSİYONLAR İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

NİLAY OYA TORUN

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Orhan ÖZER
1998, Sayfa 46

Fizik, kimya, biyoloji ve ekonomi bilim dallarında birçok soru doğrusal olmayan problemlerin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Örneğin; difüzyon, plastik maddelerin davranışları, sıvıların yüzey dalgaları, kimyasal reaksiyonlar, üretim metotlarının modernize edilmesi, kalp krizlerini önlemek amacıyla kalp içerisindeki elektrik potansiyelinde meydana gelen değişimin önceden tespit edilmesi vb. gibi birçok alanda doğrusal olmayan denklemler kullanılmaktadır.

Bu çalışmada, uygulama alanı bu kadar geniş olan doğrusal olmayan fonksiyonların sabit noktaları hakkında bazı bilgiler sunulmaya çalışılmıştır. Esas olarak; bir X Banach uzayı'nın kapalı sınırlı konveks bir K altkümesinden kendi üzerine tanımlı her genişlemeyen dönüşümünün sabit noktalarının varlığı hakkında neler bilindiği gösterilmeye çalışılmıştır.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

FIXED POINT THEOREMS FOR NONEXPANSIVE MAPPING

NİLAY OYA TORUN

Anadolu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Program

Supervisor : Assoc.Prof.Dr.Orhan ÖZER
1998, Page 46

Many questions in physics, chemistry, biology and economics lead to nonlinear problems. For example, in many fields diffusion, processes behavior of plastic materials, surface waves of fluids , chemical reactions, modeling and optemizing production processes, study of the electrical potential variation in the heart through measurements on the body surface to prevent heart attacks, nonlinear differantial and integral equations come into existence.

In this work, some basic ideas about the nonlinear differantial and integral equations having such a wide application field had been examined. In particular , we try to show what is currently known about the following central question in a Banach space X and a nonempty, bounded, closed, convex subset K of X , what further assumptions on K guarantee the existence of fixed points for every nonexpansive self mapping of K.

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Verilen bir $T:A\rightarrow A$ dönüşümü için

$$Tx=x$$

denkleminin her x çözümü T'nin bir sabit noktası olarak adlandırılır. Sabit nokta teoremleri sabit noktaların varlığını garanti eden teoremlerdir. Elbette her dönüşümün sabit noktası olmayabilir. Örneğin, düzlemde sıfır olmayan bir vektör ile bir öteleme dönüşümünün hiçbir sabit noktası yoktur. Sabit nokta teoremleri denklem çözümlerinin varlığının ispatında önemli bir rol oynamaktadır çünkü F, bir Banach uzayı üzerinde bir operatör olmak üzere, $F(x)=0$ şeklindeki her denklem

$$x=x+F(x)$$

biçiminde bir sabit nokta denklemi olarak yazılabilir.

Sabit nokta teorinin 1912 yılında Brouwer ile başladığı kabul edilmektedir. Brouwer, $\mathbb{R}^n$ in kapalı birim yuvarından, yine aynı birim yuvar üzerine tanımlanan herhangi bir sürekli dönüşümün en az bir sabit noktasının varlığını göstermiştir. Brouwer sabit nokta teoreminin temelinde, $\mathbb{R}^n$ deki kapalı birim topun kompakt ve konveks olması vardır.

Analizde en sık karşılaştığımız sabit nokta teoremi Banach sabit nokta teoremidir. Bu teoremin ortaya çıkışı Euler ve Cauchy'nin

$$x'(t)=f(t,x(t)), \quad x(t_0)=y_0 \tag{1}$$

diferansiyel denkleminin bir çözümünün varlığına ve tekliğine dair çalışmalarına dayanır.

Banach sabit nokta teoremi, k-büzülme operatörlerinin temel kullanımı olan ardışık yaklaşım metotlarının bir genellemesidir. Banach sabit nokta teoreminin asıl önemi şu şekilde özetlenebilir;

a)Bir ardışık yaklaşım metodunun yakınsaklığı k-büzülme ile ifade edilebilir,

b)Hata hesabının doğruluğu $k<1$ sabitinin büyüklüğüne bağlıdır,

c)Lineer operatör denklemleri için k-büzülme, spektral yarıçapın 1'den küçük olduğunu ifade eder.

J.Schauder, 1930 yılında Brouwer teoremini genelleştirmiştir. Schauder sabit nokta teoremi kompakt operatörlerin temel kullanımı olan kompaktlık metotlarının bir genellemesidir.

f, Lipschitz sürekli iken Picard-Lindelöf teoremi (1)'de verilen denklemin tek çözümünün varlığını garantiler. f sadece sürekli iken Peano teoremi (1)'de verilen denklemin varlığını ispatlar fakat tekliği hakkında bir şey söylemez.

Bu tanımlamalara göre aşağıdaki bağıntılar geçerlidir;

Banach sabit nokta teoremi $\Rightarrow$ Picard-Lindelöf teoremi

Schauder sabit nokta teoremi $\Rightarrow$ Peano teoremi

1.1 Önbilgiler

Tanım 1.1.1 (X,d) bir metrik uzay olmak üzere

$T:M\subset X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. $\forall$ x,y$\in$M ve $0\leq k<1$ için

$d(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$ ise T'ye **k-büzülme,** k=1 ise T'ye **genişlemeyen(nonexpansive),** $0\leq k<\infty$ için ise T'ye **Lipschitz sürekli** denir. Eğer $\forall$ x,y$\in$M ve $x \neq y$ için $d(Tx,Ty) < d(x,y)$ ise T'ye **büzülme** adı verilir.
Yukarıdaki tanıma göre aşağıdaki gerektirmeler vardır.

k-büzülme $\Rightarrow$ büzülme $\Rightarrow$ genişlemeyen $\Rightarrow$ Lipchitz sürekli

Analizde en sık karşılaştığımız sabit nokta teoremlerinin başında Banach sabit nokta teoremi gelir. Bu teorem çok sık karşılaştığımız iterasyon metotlarının incelenmesini sağlamak için temel teorik bir araçtır.

Teorem 1.1.2 (Banach Sabit Nokta Teoremi (1922)).

i. $T:M\subset X\rightarrow M$ bir fonksiyon,

ii. M, (X,d) tam metrik uzayının boş kümeden farklı kapalı alt kümesi,

iii. T, k-büzülme yani; $\forall$ x,y $\in$M ve sabit $0 \leq k < 1$ için $d(Tx,Ty) \leq k\, d(x,y)$

ise aşağıdaki ifadeler doğrudur, (2)

a. Tx=x olacak şekilde bir tek x$\in$M vardır.

b. $x_0 \in M$ herhangi bir başlangıç noktası olmak üzere $x_{n+1}= Tx_n$ şeklinde oluşturulan (x_n) dizisi x$\in$M sabit noktasına yakınsar.

c. $\forall$n=0,1,2,... için öncelikli hata tahmini

$$d(x_n,x)\leq k^n(1-k)^{-1}d(x_0,x_1) \tag{3}$$

sonraki hata tahmini,

$$d(x_{n+1},x)\leq k(k-1)^{-1}d(x_n,x_{n+1}) \tag{4}$$

olur.

d. $\forall n$=0,1,2,... için yakınsama hızı,

$$d(x_{n+1},x)\leq kd(x_n,x) \tag{5}$$

Kanıt:

a. T'nin bir tek sabit noktası olduğunu gösterelim. M'de $x_0 \in M$ ve $n=1,2,...$ için $x_n = Tx_{n-1}$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi oluşturalım. Bu dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim;

$$d(x_n, x_{n+m}) \le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m})$$

$$\le k^n d(x_0, x_1) + k^{n+1} d(x_0, x_1) + \ \ldots + k^{n+m-1} d(x_0, x_1)$$

$$= k^n d(x_0, x_1)(1 + k + \ldots + k^{m-1})$$

$$= k^n d(x_0, x_1) \frac{1-k^m}{1-k}$$

$$\le \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

$0 \le k < 1$ olduğundan (x_n) dizisi bir Cauchy dizisi olur.

(X,d) metrik uzayı tam ve M, (X,d) metrik uzayının kapalı bir alt kümesi olduğundan (x_n) dizisi yakınsaktır ve $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde bir $x \in M$ vardır. $x_0 \in M$, $T(M) \subseteq M$ ve T sürekli olduğundan $x_{n+1} = Tx_n \rightarrow Tx$, limitin tekliğinden $Tx=x$ olur. x T nin sabit noktasıdır.

Kabul edelim ki T nin iki sabit noktası olsun. $x \neq y$ iken $Tx = x$ ve $Ty = y$ olsun.

$d(x,y) = d(Tx,Ty) \le k\, d(x,y) \Rightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

olduğundan T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır. Böylece (a) ve (b) kanıtlanmış olur.

c. $m \rightarrow \infty$ alınarak hata tahmini;

$$d(x_{n+1}, x_{n+m+1}) \le d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+m}, x_{n+m+1})$$

$$\le (k + k^2 + \ldots + k^m) d(x_n, x_{n+1})$$

$$\le \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n+1})$$

Yani,

$$d(x_{n+1},x) \le \frac{k}{1-k} d(x_n,x_{n+1})$$

ve

$$\lim_{m\to\infty} d(x_n,x_{n+m}) \le \lim_{m\to\infty} k^n d(x_0,x_1)\frac{1-k^m}{1-k}$$

$$d(x_n,x) \le \frac{k^n}{1-k} d(x_0,x_1)$$

olarak bulunur.

d. Yakınsama hızı

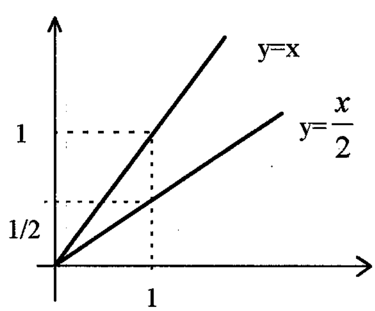
$$d(x_{n+1},x) = d(Tx_n,Tx) \le kd(x_n,x)$$

$$d(x_{n+1},x) \le kd(x_n,x)$$

olduğu görülür. □

1.1.3 Karşıt Örnekler

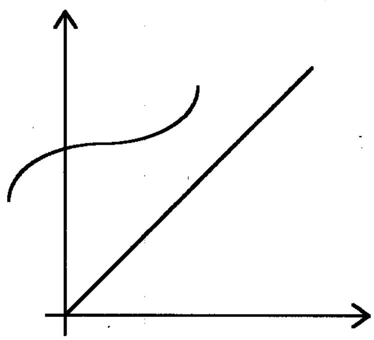
1- M= (0,1) ve T: M→M olmak üzere Tx= $\frac{x}{2}$, xεM fonksiyonunun sabit noktası yoktur.



Şekil 1

M kümesi kapalı değildir ve x=0 sabit noktası da kümenin elemanı olmadığından T' nin sabit noktası yoktur. (Şekil 1)

2- M=IR ve T: M → M olmak üzere Tx= $\frac{\pi}{2}$ +x - arctan(x) ,x∈M fonksiyonunun sabit noktası yoktur.



Şekil 2

T büzülmedir fakat k büzülme değildir. Çünkü Tx' in türevi

$$T'x = 1 - \frac{1}{(1+x^2)} \quad \text{dır}.$$

Ortalama değer teoremini uygularsak

$$|Tx - Ty| \leq \left|1 - \frac{1}{1+\xi^2}\right| |x-y| \ \langle\ |x-y| \qquad \forall\ x,y \in \mathbb{R}$$

olur.

Şekilden de görüldüğü gibi Tx=x denklemi çözülemez. Aslında, boştan farklı kompakt kümelerden kendi üzerine yani, T: M→M büzülme dönüşümlerinin bir tek sabit noktası vardır fakat burada M=IR kompakt olmadığından sabit noktası yoktur.

3- T: M→N , M= [0,1] , N=[2,3] ise T fonksiyonunun sabit noktası yoktur.

T dönüşümü, T: M→M olmadığı için sabit noktası yoktur.

4- M=∅ , T: M→M sabit noktası yoktur.

M boş küme olduğundan sabit noktası yoktur.

1.2 Banach Sabit Nokta Teoreminin Önemi

Banach sabit nokta teoreminin önemi sekiz ana başlık altında toplanabilir . Bunlar ;

a. Çözümün varlığı,

b. Çözümün tekliği ,

c. Küçük farklılıklar altında çözümün değişmezliği ,

d. Yakınsak yaklaşım metodunun varlığı ,

e. Öncelikli hata tahmini ,

f. Sonraki hata tahmini ,

g. Yakınsama hızı saptanması ,

h. Yaklaşım metodunun değişmezliği .

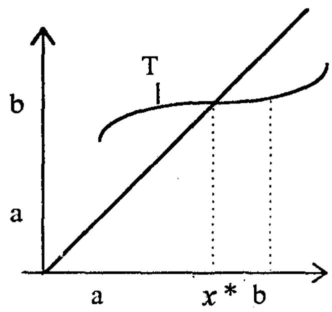
1.3 Banach Teoreminin Lineer Olmayan Denklemlere Uygulanması

$$x \in [a,b] \quad \text{için} \quad x = Tx \tag{7}$$

denklemini

$$x_0 \in [a,b],\ n=0,1,2 \quad \text{için} \quad x_{n+1} = T(x_n) \tag{8}$$

yineleme yöntemi ile birlikte ele alalım. Denklemin çözümü olan x^*, y=x doğrusu ile T nin grafiğinin kesim noktasıdır.(Şekil 3)



Şekil 3

Kabul edelim ki

i. $-\infty < a < b < \infty$ için T: $[a,b] \to [a,b]$

ii. $\forall$ x,y $\in [a,b]$ ve $0 \leq$ k <1 için $|T(x) - T(y)| \leq k|x - y|$ olsun. (7) denkleminin bir tek x çözümü olduğunu gösterelim. Ayrıca

Öncelikli hata tahmini;

$$|x_n - x| \leq k^n (1-k)^{-1} |x_1 - x_0| \tag{9}$$

Sonraki hata tahmini;

$$|x_{n+1} - x| \leq k(1-k)^{-1} |x_{n+1} - x_n| \tag{10}$$

Lineer yakınsama;

$$|x_{n+1} - x| \leq k|x_n - x| \tag{11}$$

koşulları sağlanır. Buradan keyfi $x_0 \in [a,b]$ başlangıç noktası için n $\to \infty$ iken $x_n \to x$ dir .Çünkü Banach sabit nokta teoreminde (Teorem 1.1.2 de), X=IR, M=[a,b], d(x,y)=$|x-y|$ olarak alırsak teoremin koşulları sağlanır.

Tanım 1.3.1 Bir çok uygulamada T, ek bir p parametresine bağlıdır. Tx = x denklemini parametreye bağlı yazacak olursak $x_p \in$ M, P; parametreler uzayı olmak üzere p$\in$ P

$$T_p x_p = x_p \tag{12}$$

olur.

Önerme 1.3.2 Aşağıdaki koşullar sağlansın;

i. P; parametreler uzayı diye adlandırılan bir metrik uzay,

ii.$\forall$p$\in$ P için T_p Banach teoreminin koşullarını sağlasın ancak büzülmedeki k sayısı p'den bağımsız olsun,

iii.Sabit bir $p_0 \in$ P ve $\forall$ x $\in$ M için

$$\lim_{p\to p_0} T_p x = T_{p_0} x$$

ise $\forall$ p$\in$ P için (12) denklemin bir tek x_p çözümü vardır ve

$$\lim_{p\to p_0} x_p = x_{p_0}$$

olur.

Kanıt:

x_p denklemin bir çözümü olsun .Teorem 1.1.2 de verildiği gibi

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p_0}) &= d(T_p x_p, T_{p_0} x_{p_0}) \\ &\leq d(T_p x_p, T_p x_{p_0}) + d(T_p x_{p_0}, T_{p_0} x_{p_0}) \\ &\leq k d(x_p, x_{p_0}) + d(T_p x_{p_0}, T_{p_0} x_{p_0}) \end{aligned}$$

ve buradan p $\to p_0$ için;

$$d(x_p, x_{p_0}) \leq (1-k)^{-1} d(T_p x_{p_0}, T_{p_0} x_{p_0}) \to 0$$

olduğundan $\lim_{p\to p_0} x_p = x_{p_0}$ dır. □

1.4 Örnekler

1. X= $V_m(IR^m)$ vektör uzayı olsun. X uzayı üzerinde tanımlı

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x^i - y^i| \ : i=1,2,...,m\ \} \tag{13}$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{m} |x^i - y^i| \tag{14}$$

denk metrikleri ile X uzayı bir tam metrik uzaydır.

i=1,2,...,m olmak üzere m-bilinmeyenli m denklemden oluşan homojen olmayan

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^i x^j = y^i \tag{i}$$

denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sisteminin matris gösterimi;

$$Ax=y \tag{ii}$$

olur. Burada A; $m \times m$ tipinde $\left[a_j^i\right]$, x ve y ise $m \times 1$ tipinde $\left[x^j\right]$ ve $\left[y^i\right]$ matrisleridir.

(ii) denkleminin bir çözümünü bulma problemi X ten X e aşağıdaki gibi tanımlı S_y dönüşümünün bir sabit noktasını bulma problemine eşdeğerdir.

$$S_y(x) = (I-A)x + y = Bx + y \tag{iii}$$

Bu denklemde I, $m \times m$ lik birim matris ve B =I-A = $\left[b_j^i\right]$ olarak tanımlı matrislerdir.

Bir $x \in X$ in (ii) denkleminin çözümü olması için gerek ve yeter koşul $x \in X$ in S_y nin sabit noktası olmasıdır. Eğer (X, d_∞) [veya (X, d_1)] tam metrik uzayında bir k-büzülme ise Banach sabit nokta teoremine göre S_y nin bir tek sabit noktası vardır. Dolayısıyla (ii) denkleminin bir tek çözümü vardır.

İlk olarak (X, d_∞) uzayında araştıralım:

$x_1 = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^m)$, $x_2 = (x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^m)$ ve $y_1 = S_y(x_1)$, $y_2 = S_y(x_2)$ olsun. O zaman;

$$d_\infty(y_1,y_2)=\max_i\left|y_1^i-y_2^i\right|=\max_i\left|\sum_{j=1}^{m}b_j^i(x_1^j-x_2^j)\right|$$
$$\le \max_i\sum_{j=1}\left|b_j^i\right|\left|x_1^j-x_2^j\right|$$
$$\le (\max_i\sum_{j=1}^{m}\left|b_j^i\right|)(\max_j\left|x_1^j-x_2^j\right|)$$
$$=\lambda_\infty d_\infty(x_1,x_2)$$

Burada $\lambda_\infty=\max_i\sum_{j=1}^{m}\left|b_j^i\right|$ dir. Yani λ_∞, B matrisinin her bir satır elemanlarının mutlak değerli toplamlarının maksimumudur. Eğer $\lambda_\infty<1$ ise S_y, (X, d_∞) metrik uzayında bir k-büzülme dolayısıyla $\bar{x}$ gibi bir tek sabit noktası olacaktır. Şimdi bu $\bar{x}$ noktasına yaklaşımı inceleyelim.

Eğer x_0,X içinde herhangi bir nokta ve (x_n) de X de n=1,2,... için $x_n=S_y(x_{n-1})$ şeklinde yinelemeli biçimde tanımlı bir dizi ise $(x_n)\to\bar{x}$ ve $d_\infty(\bar{x},x_n)\le\frac{\lambda_\infty^n}{1-\lambda_\infty}d_\infty(x_1,x_0)$ dır. Diğer taraftan , her i=1,2,...,m için $\left|\bar{x}^i-x_n^i\right|\le d_\infty(\bar{x},x_n)$ olduğundan x_n ile $\bar{x}$ ye yaklaşıldığında her bir bileşendeki hata $\frac{\lambda_\infty^n}{1-\lambda_\infty}d_\infty(x_1,x_0)$ ı geçemez.

(X, d_1) uzayında ise ;

$$d_1(y_1,y_2)=\sum_{i=1}^{m}\left|y_1^i-y_2^i\right|=\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{m}b_j^i(x_1^j-x_2^j)\right|$$
$$\le\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left|b_j^i\right|\left|x_1^j-x_2^j\right|$$
$$\le(\max_j\sum_{i=1}^{m}\left|b_j^i\right|)(\sum_{j=1}^{m}\left|x_1^j-x_2^j\right|)$$
$$=\lambda_1 d_1(x_1,x_2)$$

Burada $\lambda_1=\max_j\sum_{i=1}^{m}\left|b_j^i\right|$ dir . Yani λ_1, B matrisinin her bir sütunundaki elemanların mutlak değerleri toplamlarının maksimumudur. Eğer $\lambda_1<1$ ise S_y k-büzülmedir dolayısı ile $\bar{x}$ gibi bir tek sabit noktası vardır.

Yine $\bar{x}$ ye yakınsayacak olan (x_n) dizisi , herhangi bir $x_0 \in X$ için yinelemeli olarak $x_n = S_y(x_{n-1})$ ile tanımlanır. Böylece $d_1(\bar{x}, x_n) \leq \frac{\lambda_1^n}{1-\lambda_1} d_1(x_1, x_0)$ olur. $\bar{x}$ ye (x_n) ile yaklaşırken her bir bileşendeki hata $\frac{\lambda_1^n}{1-\lambda_1} d_1(x_1, x_0)$ ı geçemez; çünkü i=1,2,...,m için $\left|\bar{x}^i - x_n^i\right| \leq d_1(\bar{x}, x_n)$ dir.

Eğer A simetrik matris, yani $a_j^i = a_i^j$ (i,j=1,2,...,m) ise o zaman açıktır ki, $\lambda_\infty = \lambda_1$ dir ; fakat A simetrik değilse $\lambda_\infty ve \lambda_1$ eşit olmayabilirler. Eğer $\lambda_\infty, \lambda_1$ den biri 1'den küçükse S_y nin tek bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta homojen olmayan doğrusal denklem sisteminin tek çözümüdür. Teorik olarak varlığı kanıtlanan bu çözüm , ardışık yaklaşımlarla istenildiği kadar küçük hata payı ile bulunabilir.

2. Banach sabit nokta teoreminin başka bir uygulaması olarak

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = p \tag{15}$$

başlangıç değer problemini $[t_0 - c, t_0 + c]$ aralığında göz önüne alalım . Geometrik olarak yukarıdaki denklemin anlamı; diferansiyel denklemi sağlayan ve (t_0, p_0) noktasından geçen eğrinin denkleminin aranmasıdır. Bu denklemi integral denklemi olarak da yazabiliriz.(şekil 4)

$$x(t) = p + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))d(s), \quad \forall t \in [t_0 - c, t_0 + c] \tag{16}$$

Eğer f sürekli ise bu iki denklem birbirine denk olur. Yani x fonksiyonunun diferansiyel denklemin başlangıç koşulunu sağlayan bir çözümü olması için gerekli ve yeterli koşul integral denkleminin çözümü olmasıdır.

Verilen t_0, p_0 reel sayıları ve

$$Q_b = \{(t,x) \in IR^2 : \left|t - t_0\right| \leq a, \left|x - p_0\right| \leq b\} \qquad \text{(a,b>0 sb)}$$

dikdörtgeni için $f: Q_b \to IR$ sürekli ve $\forall (t,x),(t,y) \in Q_b$ için,

$$\left|f(t,x) - f(t,y)\right| \leq L\left|x - y\right| \tag{17}$$

$$L \geq 0, k > 0 \quad \text{sabit olmak üzere} \quad \left|f(t,x)\right| < k \tag{18}$$

ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a. $c = \min(a, \frac{b}{k})$ ve $p = p_0$ olmak üzere (16) olarak verdiğimiz integral denkleminin $[t_0 - c, t_0 + c]$ aralığında x (.) gibi bir tek çözümü vardır. Bu çözüm aynı zamanda başlangıç değer probleminin aynı aralık üzerindeki çözümüdür.

b. n=0,1,... ve $x_0(t) \equiv p_0$ olmak üzere $x_{n+1}(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds$ iterasyon dizisi x (.) çözümüne yakınsar.

c. 0<d<c olacak şekilde bir d sayısı seçelim İntegral denkleminin $[t_0 - d, t_0 + d]$ aralığında $x_p(.)$ gibi bir tek sürekli çözümü vardır. p' ler p_0'ın küçük komşuluklarının elemanı olmak üzere ; $[t_0 - d, t_0 + d]$ aralığında p→ p_0 iken $x_p(t)$, $x_{p_0}(t)$ ye düzgün yakınsar.

Kanıt: Bakınız [1] □

3. $k:[a,b] \times [a,b] \to IR$ sürekli bir fonksiyon ve φ $\in C[a,b]$ olsun. $\lambda \in IR$ olmak üzere , f bilinmeyen fonksiyonuna göre,

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x,y) f(y) dy + \varphi(x)$$

tipindeki bir denkleme , **ikinci türden bir Fredholm integral denklemi** denir. Gösterelim ki , bazı λ lar için bu denklemin bir tek f $\in C[a,b]$ çözümü vardır. Bunun için T: $C[a,b] \to C[a,b]$

f → T(f)

fonksiyonunu

$$\mathrm{T(f)}(x) = \lambda \int_a^b k(x,y) f(y) dy + \varphi(x)$$

olarak tanımlayalım. Açıktır ki, yukarıdaki integral denkleminin tek bir çözümünün varlığını göstermek T nin tek bir sabit noktasının varlığını göstermeye denktir. O halde, bazı λ lar için T nin $C[a,b]$ tam metrik uzayı üzerinde bir büzülme dönüşümü olduğunu göstermeliyiz. Şimdi f, g $\in C[a,b]$ için

$$\|T(f) - T(g)\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} \{|T(f)(x) - T(f)(y)|\}$$

$$= \sup_{x \in [a,b]} \left\{\left|\lambda \int_a^b k(x,y) f(y) dy + \varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,y) g(y) dy - \varphi(x)\right|\right\}$$

$$= \sup_{x\in[a,b]} \left\{\left|\lambda\int_a^b k(x,y)(f(y)-g(y))dy\right|\right\}$$

$$\le \sup_{x\in[a,b]} \{|\lambda|\int_a^b |k(x,y)||f(y)-g(y)|dy\}$$

$$\le \{|\lambda|\int_a^b M\|f-g\|_\infty dy\} = |\lambda|M\|f-g\|_\infty (b-a)$$

Burada, M= $\sup_{x,y\in[a,b]} \{|k(x,y)|\}$ dır. O halde f,g $\in C[a,b]$ için

$$\|T(f)-T(g)\|_\infty \le |\lambda|M(b-a)\|f-g\|_\infty$$

eşitsizliği elde edilir. Öyleyse eğer $|\lambda|M(b-a)<1$ olacak şekilde λ yı seçersek, T bir büzülme dönüşümüdür , dolayısıyla Banach sabit nokta teoremi koşulları sağlanmış olur ve T nin tek bir sabit noktasının varlığını garanti eder. Bu sabit nokta da verilen integral denklemin tek çözümü olan bir f $\in C[a,b]$ fonksiyonu olur.

Şimdi (M,d) tam metrik uzay ve $f:M\to M$ fonksiyonu için f^n bir büzülme dönüşümü ise , f nin tek sabit noktasının varlığını gösterelim ve bir örnek verelim.

Bir n doğal sayısı için $f^n:M\to M$ büzülme dönüşümü ise , f^n nin tek bir sabit noktası , diyelim ki x ,vardır. O zaman

$$d(f(x),x) = d(f(f^n(x)),f^n(x)) = d(f^n(f(x)),f^n(x))$$
$$\le \alpha d(f(x),x),$$

$\alpha<1$ olduğundan d (f(x),x)=0, yani f(x)=x çıkar.(Burada α f^n in büzülme katsayısı)

4.Fredholm integral denklemine benzer olarak, **Volterra integral denklemi**

$$f(x) = \lambda\int_a^x k(x,y)f(y)dy + \varphi(x)$$

gözönüne alalım. Bu denklemin $[a,b]$ içinde tek bir çözümünün varlığını gösterelim. Şimdi T: $C[a,b]\to C[a,b]$ fonksiyonunu

$$T(f)(x) = \lambda\int_a^x k(x,y)f(y)dy + \varphi(x)$$

ile tanımlayalım. T nin tek bir çözümünün varlığını göstermek yetecektir. Bunun için $f_1,f_2 \in C[a,b]$ olsun.

$$\left|T(f_1)(x) - T(f_2)(x)\right| = \left|\lambda\int_a^x k(x,y)f_1(y)dy + \varphi(x) - \lambda\int_a^x k(x,y)f_2(y)dy - \varphi(x)\right|$$

$$= \left|\lambda\int_a^b k(x,y)(f_1(y) - f_2(y))dy\right|$$

$$\le |\lambda|\int_a^x |k(x,y)||f_1(y) - f_2(y)|dy$$

$$\le |\lambda|\int_a^x M\|f_1 - f_2\|_\infty dy = |\lambda| M\|f_1 - f_2\|_\infty (x-a)$$

Şimdi

$$\left|T^2(f_1)(x) - T^2(f_2)(x)\right| = \left|T(T(f_1))(x) - T(T(f_2))(x)\right|$$

$$= \left|\lambda\int_a^x k(x,y)T(f_1)(y)dy + \varphi(x) - \lambda\int_a^x k(x,y)T(f_2)(y)dy - \varphi(x)\right|$$

$$= \left|\lambda\int_a^b k(x,y)(T(f_1)(y) - T(f_2)(y))dy\right|$$

$$\le |\lambda|\int_a^x |k(x,y)||T(f_1)(y) - T(f_2)(y)|dy$$

$$\le |\lambda|\int_a^x M|\lambda| M\|f_1 - f_2\|_\infty (y-a)dy$$

$$= |\lambda|^2 M^2\|f_1 - f_2\|_\infty \int_a^x (y-a)dy = |\lambda|^2 M^2 \|f_1 - f_2\|_\infty \frac{(x-a)^2}{2}$$

$$=|\lambda M|^2 \|f_1 - f_2\|_\infty \frac{(x-a)^2}{2}$$

ve böylece tümevarımla

$$|T^n(f_1)(x) - T^n(f_2)(x)| \leq |\lambda M|^n \|f_1 - f_2\|_\infty \frac{(x-a)^n}{n!}$$

elde edilir. Böylece λ parametresinin herhangi bir değeri ve n in yeterince büyük değerleri için , $|\lambda M|^n (b-a)^n / n! \to 0$ olduğundan,T^n bir büzülme dönüşümü olur.

1.5 Brouwer Sabit Nokta Teoremi

Tanım 1.5.1 X bir topolojik uzay ve $M \subseteq X$ olmak üzere. Her $x \in M$ için $\Gamma(x) = x$ olacak şekilde bir $\Gamma : X \to M$ sürekli dönüşümü varsa, Γ ye bir barınav fonksiyonu (retraction) denir.Bu durumda M kümesine de X in barınavı (retractı) denir.

Örnek 1.5.2 X= $\mathbb{R}^n$, R>0 ve M={x $\in$X : $\|x\| \leq R$ }olmak üzere M, X in barınavıdır. Bir barınav fonksiyonunu şu şekilde tanımlayabiliriz,

$$\Gamma(x) = \begin{cases} x & \|x\| \leq R \\ \dfrac{Rx}{\|x\|} & \|x\| \geq R \end{cases} \tag{19}$$

Belki de sabit nokta teorisinde en önemli sonuç Brouwer in ünlü teoremidir. Bu sonuç Brouwer tarafından 1912 de yayınlanmıştır H. Poincare tarafından 1886 da biliniyordu. Poincare teoremi 1904 de de P. Bohl tarafından tekrar ortaya atılmıştır.

Teorem 1.5.3 X bir topolojik uzay olmak üzere, X sabit nokta özelliğine sahip ve X_1, X in herhangi bir barınavı (retraktı) ise X_1 de sabit nokta özelliğine sahiptir.

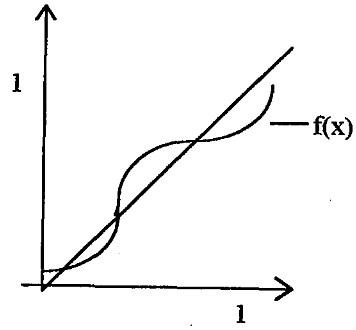
Kanıt : Bakınız [2]. □

Teorem 1.5.4 (Brouwer Sabit Nokta Teoremi) n≥ 1 olmak üzere M, $\mathbb{R}^n$ nin boş kümeden farklı, konveks ,kompakt bir alt kümesi olsun, eğer f:M→M sürekli bir fonksiyon ise f nin bir sabit noktası vardır.

Kanıt: Bakınız[1],[2],[6],[7]. □

Örnek 1.5.5 f :[0,1] →[0,1]sürekli bir fonksiyon olsun. f nin grafiği Şekil 4 de gösterildiği gibi olmak üzere f nin grafiğinin y=x ile kesiştiği noktalar sabit noktalardır. Görüldüğü gibi sabit nokta tek olmak zorunda değildir. Bu özel durum için Brouwer sabit nokta teoreminin bir ispatını yapabiliriz.

$g(x)=f(x)-x$ olsun. O zaman $g(0)\geq 0$ ve $g(1)\leq 0$ dır. Aradeğer teoreminden $g(x)=0$ olacak şekilde $x\in[0,1]$ vardır. Buradan da $f(x)=x$ dir.



Şekil 4

1.6 Kompakt Operatörler

Kompakt operatörler doğrusal olmayan fonksiyonel analizde çok önemli rol oynarlar. IR^n de süreklilik yardımıyla elde edilen bir çok sonuç süreklilik yerine kompakt kelimesi kullanılarak Banach uzaylara taşınabilir.

Tanım 1.6.1 X ve Y Banach uzaylar olmak üzere $T:D(T)\subseteq X\rightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer T sürekli, T; sınırlı kümeleri göreli kompakt kümelere götürüyorsa T ye **kompakt operatör** denir.

Örnek 1.6.2 Sonlu boyutlu Banach uzaylarda D(T) tanım kümesi kapalı ise sürekli ve kompakt operatörler aynıdır.

$T:D(T)\subseteq X\rightarrow Y$ sürekli, $M\subseteq D(T)$ olsun. M sınırlı ise $\overline{M}$ kompakttır. $M\subset\overline{M}$ kompakt ise $T(\overline{M})$kompakt bir kümedir. $T(M)\subseteq T(\overline{M})\subseteq\overline{T(M)}$ dir .T (M), kapanışı kompakt kümenin içinde kaldığından göreli kompakttır.

1.7 Schauder Sabit Nokta Teoremi

Banach sabit nokta teoreminin ispatında metrik uzayların basit özellikleri kullanılmasına karşın "n-boyutlu uzayda kapalı toptan sınırı üzerine, sınırı noktasal olarak sabit bırakan sürekli fonksiyon yoktur " (negatif retrakt prensibi) teoreminin kanıtı çok kolay değildir. Fakat bu teorem kanıtlandıktan sonra Brouwer sabit nokta teoreminin kanıtı kolaylaşır; yaklaşım yöntemiyle de Schauder sabit nokta teoremi kanıtlanır. Böyle bir yöntemde kompakt operatörler önemli rol oynar. Bu teorem ilk olarak Brouwer sabit nokta teoremi olarak ispatlanmış daha sonra yaklaşım işlemleri Schauder sabit nokta teoremini oluşturmuştur.

Teorem 1.7.1 (Mazur Teoremi) X Banach uzayının M alt kümesi göreli kompakt ise M nin konveks zarfi co (M) de göreli kompaktır. Buna göre M nin kapalı konveks zarfi kompaktır.

Teorem 1.7.2 M , X Banach uzayının, boş olmayan, kompakt , konveks alt kümesi ; T :M→M sürekli ise T nin sabit noktası vardır.

Kanıt : Bakınız [1]. □

Teorem 1.7.3(Schauder Sabit Nokta teoremi (1930)) M, X Banach uzayının boştan farklı , kapalı, sınırlı , konveks alt kümesi olsun. T :M→M kompakt operatör ise T nin sabit noktası vardır.

Kanıt :A = $\overline{co}(T(M))$ olsun. Buna göre A⊂M olduğundan A kompakt ve konveks olur .Ayrıca T(A)⊆ A dır. Bu koşullar dahilinde T:A → A dönüşümünün teorem 1.7.2 ye göre sabit noktası vardır. Dolayısıyla bu sabit nokta T dönüşümünün M deki sabit noktasıdır. □

1.8 Peano Teoremi

Bundan önceki bölümlerde (15) olarak verdiğimiz başlangıç değer problemini ele alacak olursak bu teoremde f nin sadece sürekli olması yeterlidir. Bu teorem (15) denkleminin varlığını ispatlar fakat çözümün tekliği hakkında birşey söylemez.

Önerme 1.8.1 Verilen t_0, y_0 gerçel sayıları için a,b sabit sayılar olmak üzere

$$Q_b = \{(t,x) \in IR^2 : |t - t_0| \le a, |x - x_0| \le b\}$$

olarak tanımlanmak üzere , f : Q_b→ IR sürekli ve sınırlı bir fonksiyon ∀ (t,x) ∈ Q_b, k>0 sabit sayısı için $|f(t,x)| \le k$, $c = \min\left\{a, \frac{b}{k}\right\}$ olsun. Bu koşullar altında (15) de verilen başlangıç değer probleminin $[t_0 - c, t_0 + c]$ aralığında sürekli diferansiyellenebilir çözümü vardır.

Kanıt : X = C$[t_0 - c, t_0 + c]$, M= $\{x \in X : \|x - y_0\| \le b\}$ ve $\|x\| = \max_{t_0 - c \le t \le t_0 + c} |x(t)|$ olmak üzere başlangıç değer teoreminin integral gösterimi

$$x(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \tag{20}$$

operatör denklemi olarak gösterimi

x∈M ⊆ X olmak üzere x=Tx

olduğunu biliyoruz. M kümesi X içinde kapalı , konveks ve sınırlıdır. T(M)⊆M ve T operatörü kompakt olduğundan teorem gereği x=Tx olacak şekilde x∈ M noktası vardır.

1.9 Genelleştirilmiş Picard-Lindelöf Teoremi

x: $[t_0 - c, t_0 + c]$→Y Banach uzayına tanımlı bir fonksiyon olsun.

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad x(t_0) = y_0 \in Y \tag{21}$$

Başlangıç değer problemini ele alalım. X, x: $[t_0 - c, t_0 + c] \to$Y olarak tanımlı bütün sürekli fonksiyonların uzayı olsun. Y üzerindeki norm $\|.\|$ olmak üzere X üzerindeki normu

$$\|x\|_X = \max_{t \in [t_0 - c, t_0 + c]} \|x(t)\|$$

olarak seçelim. Bu durumda 1.4 Örneklerde 2. örnek olarak verilen Picard-Lindelöf teoreminin ifadesinde yer alan $|.|$ in yerini heryerde $\|.\|$ alır. $(X, \|.\|_X)$ bir Banach uzayıdır,bu kolaylıkla gösterilebilir. Eğer C$[t_0 - c, t_0 + c]$ yerine X Banach uzayı alınırsa ve 2. Örnekteki M topu yerine M$= \{x \in X : \|x - x_0\|_X \le b\}$ topu alınırsa, bu koşullar altında aşağıdaki Genelleştirilmiş Picard-Lindelöf Teoremini elde ederiz.

Teorem 1.9.1 (Genelleştirilmiş Picard Lindelöf Teoremi)

$t_0 \in IR, y_0 \in Y$ için $Q_b = \{(t,y) \in R \times Y : |t - t_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$ a,b>0 sabit sayılar olmak üzere f : $Q_b \to$ Y sürekli ve $\forall$ (t,x),(t,y) $\in Q_b$ için

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le L\|x - y\|$$

L $\ge$0 , K >0 sabit gerçel sayılar olmak üzere $\|f(t,y)\| < K$ olsun. o<c<a ve Kc < b koşulunu sağlayan c sayısı seçelim. Bu koşullar altında aşağıdaki ifadeler doğrudur;

i. (21) başlangıç değer probleminin $[t_0 - c, t_0 + c]$ aralığında sürekli diferansiyellenebilen bir tek çözümü vardır.

ii. $x_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \quad x_0(t) \equiv y_0$ (*)

şeklinde oluşturulan x_n dizisi n$\to\infty$ için $[t_0 - c, t_0 + c]$ aralığında (*) denkleminin x(.) çözümüne düzgün yakınsar.

iii. x(.) çözümü C ($[t_0 - c, t_0 + c]$, Y) üzerindeki norma ve başlangıç değeri olan y $_0$ a bağlıdır.

Sonuç 1.9.2 a sabit bir reel sayı ve a>0 için $Q = [t_0 - c, t_0 + c] \times Y$ olsun. f :Q $\to$Y sürekli ve $\forall$ (t,x), (t,y) $\in$ Q için $\|f(t,x) - f(t,y)\| \le L\|x - y\|$, L$\ge$0 olsun. Bu takdirde (21) başlangıç değer probleminin $[t_0 - c, t_0 + c]$ aralığında $\forall$ $y_0 \in Y$ başlangıç değeri için sürekli diferansiyellenebilir çözümü vardır.

Sonuç 1.9.3 Y Banach uzay ve $f: IR \times Y \to$ Y aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun.

a. f ; $IR \times Y$ de sürekli ve Y ye göre de yerel Lipschitz sürekli olsun yani ,

$\forall (t_0, y_0) \in IR \times Y$ için a,b>0 ve L$\geq$ 0 sayıları vardır ve $|t - t_0| \leq$ a $\|x - y_0\| \leq$b ve $\|y - y_0\| \leq$b için

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|$$

olur.

b. 21) başlangıç değer probleminin bir x(.) çözümünün her t için $\|f(t,x(t))\| < K$ olacak şekilde bir K sabiti vardır.

Bunlara göre , her $y_0 \in$ Y başlangıç değeri için (21) başlangıç değer probleminin sürekli diferansiyellenebilir bir x(.) çözümü vardır.

Kanıt : Bakınız [1]. □

1.10 Genelleştirilmiş Peano Teoremi

X : $[t_0 - c, t_0 + c] \to$Y Banach uzay olmak üzere

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad x(t_0) = y_0 \tag{22}$$

başlangıç değer problemini tekrar ele alalım .Genelleştirilmiş Picard-Lindelöf teoreminden farklı olarak f kompakt olmalı fakat Lipschitz süreklilik koşuluna gerek yoktur.

Teorem 1.10.1 $t_0 \in$ R,$y_0 \in$ Y ve 0< a , b<∞ sabit noktaları için

$$Q_b = \{(t,y) \in R \times Y : |t - t_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\}$$

olmak üzere f : $Q_b \to$ Y kompakt bir fonksiyon ve her (t,y)$\in$ Q_b için $\|f(t,y)\| < K$, K> 0 olsun. $c = \min\left\{a, \frac{b}{k}\right\}$ alacak olursak (22) denkleminin $[t_0 - c, t_0 + c]$ aralığında sürekli diferansiyellenebilir bir çözümü vardır.

Kanıt : Bakınız [1]. □

2.GENİŞLEMEYEN OPERATÖRLER VE YİNELEMELİ YÖNTEMLER

X bir Banach uzayı, T: D(T) $\subseteq X \to X$ bir operatör olsun. k bir sabit olmak üzere, $\forall$ x,y $\in$D(T) için

$$\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|$$

eşitsizliği $0 \leq k < 1$ için geçerli ise T'ye **k-büzülme,** k=1 için geçerli ise T'ye **genişlemeyen dönüşüm** denir.

Öklid normu ile X=$\mathbb{R}^n$ için $\mathbb{R}^n$ de dönmeler ve dik izdüşümler genişlemeyen operatörlerin basit örnekleridir. $\mathbb{R}^2$ de θ açısı adar dönme yapan bir T dönüşümünün bir genişlemeyen operatör olduğunu gösterelim;

T:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bir dönüşüm, d bir metrik, x,y $\in\mathbb{R}^2$ olsun,

$x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$

$$T(x)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$T(y)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1 \\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\cos\theta - y_2\sin\theta \\ y_1\sin\theta + y_2\cos\theta\end{bmatrix}$$

olmak üzere;

$$d(T(x),T(y))=((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=(x_1\cos\theta - x_2\sin\theta - y_1\cos\theta + y_2\sin\theta)^2 + (x_1\sin\theta + x_2\cos\theta - y_1\sin\theta - y_2\cos\theta)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=[\ [\cos\theta(x_1 - y_1) - \sin\theta(x_2 - y_2)]^2 + [\cos\theta(x_2 - y_2) + \sin\theta(x_1 - y_1)]^2\ ]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\cos^2\theta(x_1 - y_1)^2 + \sin^2\theta(x_2 - y_2)^2 + \cos^2\theta(x_2 - y_2)^2 + \sin^2\theta(x_1 - y_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

=d(x , y)

olduğu görülür.

Bu bölümde, k-büzülme operatörleri için Banach sabit nokta teoreminin genişlemeyen operatörlere genişletme yolunu araştıracağız. Esas olarak aşağıdaki türde problemler üzerinde duracağız;

- sabit noktaların varlığı
- sabit nokta kümelerinin yapısı
- ardışık yaklaşımın yakınsaklığı

Bütün bunlar için dışbükeylik özelliği önemli bir rol oynayacaktır. Özellikle aşağıdaki türden kavramlar önemli olacaktır ;

- düzgün dışbükey Banach uzaylar
- yarıkapalı ve yarıkompakt operatörler

Genişlemeyen T:M $\to$M operatörlerine genel yaklaşımımız şu olacaktır: $k_n \to 1$ olmak üzere, T_n:M$\to$M k_n-büzülme operatörleriyle T ye yaklaşacağız.

Banach sabit nokta teoremine göre, T_n nin bir x_n sabit noktası olacaktır. I-T nin yarıkapalılığı (x_n) in T nin bir sabit noktasına yakınsadığını göstermek için kullanılacaktır. Ayrıca, yarıkompaklık yinelemeli yöntemin yakınsama kanıtında kullanılacaktır.

2.1 Düzgün Konveks Banach Uzaylar

Tanım 2.1.1 X bir Banach uzay olsun. Eğer her $\varepsilon \in (0,2]$ için x,y $\in$ X ve R$\rangle$0 olmak üzere,

$$\|x\| \le R,\ \|y\| \le R \quad \text{ve} \quad \|x-y\| \ge \varepsilon R \tag{23a}$$

olduğundan

$$\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\| \le (1-\delta(\varepsilon))R \tag{23b}$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) \in (0,1]$ sayısı varsa, X uzayına **düzgün dışbükey (uniformly convex) uzay** denir.

R=1 alınarak, bu tanım aşağıdaki biçime dönüştürülebilir:

$\forall\ \varepsilon \in (0,2]$ için $\|x\| \leq 1$., $\|y\| \leq 1$ ve $\|x-y\| \geq \varepsilon$ olduğunda $\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\| \leq (1-\delta(\varepsilon))$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon)$ sayısı varsa X Banach uzayına düzgün dışbükey uzay denir.

Eğer $\forall$ x,y $\in$X için $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, $\|x-y\| \rangle 0$ iken $\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\| \langle 1$ ise X Banach uzayına **kesin (strictly) dışbükey uzay** denir.

Bir başka söyleyişle , bir normlu X uzayında paralel olmayan vektörler için üçgen eşitsizliği kesin ise yani $\|x+y\| \langle \|x\| + \|y\|$ ise, X kesin dışbükey uzaydır. Bunu göstermeye çalışalım;

X kesin dışbükey$\Leftrightarrow$ X içinde paralel olmayan x,y vektörleri için üçgen eşitsizliği kesin olması ; yani $\|x+y\| \langle \|x\| + \|y\|$ olmasıdır.

$\Rightarrow$ X kesin dışbükey olsun. Kabul edelim ki, paralel olmayan x,y $\in$X vektörlerinin en az bir çifti için $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ olsun. x$\neq$0 ve $\|y\| - \|x\| \geq 0$ olduğunu kabul etmek bir sakınca yaratmaz. O zaman ,

$$2 \geq \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| = \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} - \frac{y}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|}\right\|$$

$$= \left\|\left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|}\right) - \left(\frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right)\right\|$$

$$\geq \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|}\right\| - \left\|\frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|$$

$$=\frac{1}{\|x\|}\left(\|x+y\|\right)-\frac{1}{\|x\|\|y\|}\left\|y\|y\|-y\|x\|\right\|$$

$$=\frac{1}{\|x\|}\left(\|x\|+\|y\|\right)-\frac{1}{\|x\|}\left(\|y\|-\|x\|\right)$$

$$=1+\frac{\|y\|}{\|x\|}-\frac{\|y\|}{\|x\|}+1=2$$

olur ve $\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|=2$ çıkar. Böylece $\frac{x}{\|x\|},\frac{y}{\|y\|}$ birim vektörleri için $\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|>0$ olduğu halde $\left\|\frac{\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}}{2}\right\|=1$ olur ki, bu sonuç kesin dışbükeylik tanımı ile çelişir. O halde kesin dışbükey olduğundan paralel olmayan x,y vektörleri için

$$\|x+y\|<\|x\|+\|y\|$$

olur.

$\Leftarrow$: Tersine, paralel olmayan x,y $\in$X vektörleri için $\|x+y\|<\|x\|+\|y\|$ olsun $\|x\|\leq 1$, $\|y\|\leq 1$, $\|x-y\|>0$ alalım. Eğer $0<|k|<1$ için x=ky ise $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|=\|kx\|+\|y\|=(|k|+1)\|y\|\leq(|k|+1)<2$ olur. Eğer x,y $\in$X paralel olmayan vektörler ise, varsayımdan dolayı, $\|x+y\|<\|x\|+\|y\|\leq 1+1=2$ olur. Böylece her iki durum için de $\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\|<1$ sonucu elde edilir. Yani X kesin dışbükeydir.

Düzgün dışbükey uzaylar aynı zamanda kesin dışbükey uzaylardır.

Şimdi düzgün dışbükey bir uzayda $\delta:(0,2]\mapsto(0,1]$ için $\varepsilon\mapsto\delta(\varepsilon)$ fonksiyonunun kimi özelliklerini araştıralım. Önce $\varepsilon=2$ için $\delta(2)=1$ alınabileceğini kanıtlayalım.

Gerçekten $\|x\|\leq R, \|y\|\leq R$ ve $\|x-y\|\geq 2R$ iken $\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\|=0$ dır.

Aksi halde, $\|x\|\leq R, \|y\|\leq R$ ve $\|x-y\|\geq 2R$ iken $\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\|\rangle 0$ olsa idi. O zaman $\|x\|\leq R, \|-y\|\leq R$ ve $\|x-(-y)\|\geq 0$ olur, $\|x+y\|=c$ ve $0\langle\varepsilon\leq\frac{c}{R}$ seçersek böylece dışbükeylikten dolayı $\delta(\varepsilon)\in(0,1]$ vardır ki $\left\|\frac{(x+(-y))}{2}\right\|\leq(1-\delta(\varepsilon))R\langle R$ olur. Buradan $\|x-y\|\langle 2R$ çıkar. Bu sonuç $\|x-y\|\geq 2R$ alınışıyla çelişir.

$\delta(0)=0$ diyelim ve $\delta(.)$ fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri taşıdığını kabul edebiliriz ;

$$\varepsilon\mapsto 0^{+} \text{ iken } \quad \delta(\varepsilon)\mapsto 0 \qquad (24)$$

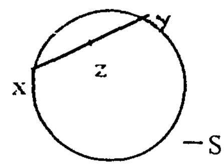
$$\delta:[0,2]\mapsto[0,1] \text{ artan ve örtendir.} \qquad (25)$$

Eğer $\delta(.)$ fonksiyonu bu özellikleri taşımıyorsa bu özelliklere sahip bir δ_2 fonksiyonunu şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$\delta_1(\varepsilon)=\sup_{\eta\in[0,\varepsilon]}\delta(\eta)\ , \quad \delta_2(\varepsilon)=\frac{\varepsilon\delta_1(\varepsilon)}{2}$$

Düzgün dışbükeylik tanımındaki δ yerine δ_1 ve δ_2 alınırsa tanım yine geçerli olur. Ayrıca $0\langle\varepsilon\leq 1$ olduğunda $\delta_2(\varepsilon)\leq\delta_1(\varepsilon)$ olur. δ_2 fonksiyonu (24) ve (25) özelliklerini sağlar.

X in düzgün dışbükeyliğini geometrik olarak ifade etmek istersek ; birim yuvarın sınırı S= $\{\, x\in X \mid \|x\|=1 \,\}$ nin üzerindeki x,y gibi herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasının orta noktası yani ; $z=\frac{x+y}{2}$ nin başlangıç merkezli $r\langle 1$ yarıçaplı yuvar içine düşmesidir. (Burada r , $\|x-y\|$ uzaklığına bağlı bir sayıdır). Kaba bir ifade ile , X in düzgün dışbükeyliği , birim yuvarın sınırının yuvarlak olduğunu söyler. Bir başka ifadeyle , düzgün dışbükey bir uzayda birim yuvarın yüzeyi doğru parçası bulundurmaz .(Şekil 2.1 (a))



Şekil 2.1 (a)

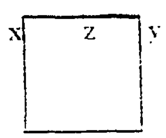
Örnek 2.1.2 X=IR ^{2} olsun . x=(ξ_1,ξ_2) $\in$X için $\|x\| = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlı öklid normunu alırsak X düzgün dışbükey uzay olur.

Ters Örnek 2.1.3 X=IR ^{2} olsun. X te öklid normu yerine $\|x\| = \max(|\xi_1|,|\xi_2|)$ maksimum normu veya $\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2|$ normunu alırsak X düzgün dışbükey uzay değildir.(Şekil 2.1 (b) , (c))

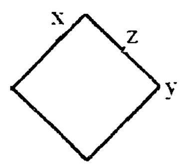
IR ^{2} bu normlar ile kesin dışbükey uzay da değildir. Örneğin IR ^{2} de x=(1,1) , y=(1,-1) vektörlerinin maksimum normları 1 dir ve bu vektörler paralel olmayan vektörlerdir. Oysa

$$\|x + y\|_m = \|(1,1) + (1,-1)\|_m = \|(2,0\|_m = 2 = 1 + 1 = \|x\|_m + \|y\|_m$$

olduğundan paralel olmayan vektörler için normun üçgen eşitsizliği kesin eşitsizlik değildir. Bu yüzden IR ^{2} maksimum norm ile kesin dışbükey uzay değildir.



(b)



(c)

Örnek 2.1.4 Her H-uzay düzgün dışbükeydir.

Bu sonucu paralel kenar eşitliği olarak bilinen aşağıdaki eşitlikten gösterelim.

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad \forall x, y \in X$$

Tanım 2.1.1 den ; her $\varepsilon \in (0,2]$ için $x, y \in X$ ve $R \rangle 0$ olmak üzere , $\|x\| \leq R$, $\|y\| \leq R$ ve $\|x-y\| \geq \varepsilon R$ olduğunda $\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\| \leq (1-\delta(\varepsilon))$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) \in (0,1]$ sayısı bulmalıyız,

$$\|x+y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) - \|x-y\|^2$$

$$\|x+y\|^2 \leq 2(R^2 + R^2) - (\varepsilon R)^2$$

$$\|x+y\|^2 \leq 4R^2 - \varepsilon^2 R^2$$

$$\frac{\|x+y\|^2}{4} \leq R^2 - \frac{\varepsilon^2 R^2}{4}$$

$$\frac{\|x+y\|^2}{4} \leq R^2\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right), \quad \delta(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ise}$$

$$\frac{\|x+y\|}{2} \leq R\left(\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}\right) = R\,(1 - \delta(\varepsilon))$$

dir .Her H-uzayın düzgün dışbükey olduğu görülmüş olur .

Düzgün dışbükey uzaylara tipik bir örnek de $L_p(G)$ fonksiyon uzayıdır .(Bakınız[5],[9]).

Örnek 2.1.5 $\mu \geq 1$ ve K gerçel veya karmaşık sayılar cismi olmak üzere,

$$\ell^p = \{(\xi_n) | \forall n \text{ için } \xi_n \in K \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \langle \infty\}$$

dizi uzayı , x=$(\xi_n) \in \ell^p$, $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ normu ile kesin dışbükey uzaydır.

ℓ^2 nin düzgün dışbükey olduğunu gösterelim. ℓ^2 nin düzgün dışbükeyliği (dolayısıyla kesin konveksliği) için H-uzay olduğunu göstermek yetecektir. ℓ^2 de iç çarpım tanımlı ve norm bu iç çarpımdan elde edilebildiğinden x=(ξ_n) y=$(\eta_n) \in IR^2$ için ,

$$\|x+y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n + \eta_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n + \eta_n)\overline{(\xi_n + \eta_n)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\xi_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \overline{\xi_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \overline{\eta_n}$$

ve

$$\|x-y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \eta_n)\overline{(\xi_n - \eta_n)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\xi_n} - \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_n} - \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \overline{\xi_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \overline{\eta_n}$$

olur. Böylece ,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^2\right) = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

elde edilir . O halde ℓ^2 paralel kenar kuralını sağlayan bir iç çarpım uzayıdır yani bir H-uzayıdır. Öyleyse düzgün dışbükeydir. Ayrıca $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$ ve $\|x-y\| \rangle 0$ için paralel kenar kuralını kullanırsak ,

$$\|x+y\|^2 \langle \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \le 2(1+1) = 4 ,$$

yani;

$\|x+y\|^2 \langle 4$ veya $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \langle 1$ olur . O halde ℓ^2 kesin dışbükey uzaydır.

Tanım 2.1.6 X ve Y IR (veya C) cismi üzerinde tanımlı , X ten Y ye sürekli lineer fonksiyonların kümesini L(X,Y) ile gösterirsek L(X,Y) ye **X in duali** denir ve X' ile gösterilir.

Tanım 2.1.7 X' nün sınırlı yakınsak topolojilerine X' nün **kuvvetli topolojileri** denir. Bu durumda X', X_s' ile gösterilir ve X in **kuvvetli(strong) duali** denir.

Önerme 2.1.8 Düzgün konveks bir X Banach uzayı yansıyandır.

Kanıt:

$x_0'' \in (X_s')_s'$, $\|x_0''\|=1$ olacak şekilde bir x_0'' fonksiyonu alalım. Buradan $\{f_n\} \subseteq X_s'$ $\|f_n\|=1$, $x_0''(f_n) \geq 1-n^{-1}$, n=1,2,... olacak şekilde sınırlı lineer fonksiyonellerin bir $\{f_n\}$ dizisi vardır.

$\forall$n için bir $x_n \in$ X dizisi vardır. Öyle ki ;

$$f_i(x_n) = x_0''(f_i) \qquad \text{(i=1,2,...,n) ve} \qquad \|x_n\| \leq \|x_0''\| + n^{-1} = 1+n^{-1} \qquad (*)$$

Buradan;

$$1-n^{-1} \leq x_0''(f_n) = f_n(x_n) \leq \|f_n\|.\|x_n\| = \|x_n\| \leq 1+n^{-1}$$

dir . $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=1$ olduğunu göstermeliyiz.

$\{x_n\}$ dizisi kuvvetli yakınsak değilse , ε ≤ $\|x_{n_k} - x_{m_k}\|$ (k=1,2,...) olacak şekilde $\varepsilon > 0$ ve $n_1 \langle m_1 \langle n_2 \langle m_2 \langle \cdots \langle n_k \langle m_k \langle \cdots$ değerleri vardır.

$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=1$ ve X in düzgün konveksliğinden

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n_k} - x_{m_k}\| \leq 2\,(1\text{-}\delta\,(\varepsilon)) < 2$$

dir. Fakat $n_k \langle m_k$ dan $f_{n_k}(x_{n_k}) = f_{n_k}(x_{m_k}) = x_0''(f_{n_k})$ dır . Böylece ;

$$2(1-n_k^{-1})\le 2x_0''\left(f_{n_k}\right)=f_{n_k}\left(x_{n_k}+x_{m_k}\right)\le\left\|f_{n_k}\right\|.\left\|x_{n_k}+x_{m_k}\right\|$$

elde edilir.

Böylece $\left\|f_{n_k}\right\|=1$ ile $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|x_{n_k}+x_{m_k}\right\|\ge 2$ çelişkisini elde ederiz.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ın varlığını ispatlamış olduk ve x_0,

$$\left\|x_0\right\|=1,\ f_i\left(x_0\right)=x_0''\left(f_i\right)\qquad (i=1,2,...)$$

koşullarını sağlar. (*) denkleminin çözümünün tek olduğunu göstermeye çalışalım.

$\hat{x}_0\neq x_0$ olacak şekilde (*) ı sağlayan bir $\hat{x}_0$ alalım. Düzgün konvekslikten , $\left\|\hat{x}_0+x_0\right\|\langle 2$ ve $f_i\left(\hat{x}_0+x_0\right)=2x_0''\left(f_i\right)$ (i=1,2,...) dir. Böylece,

$$2\left(1-i^{-1}\right)\le 2x_0''\left(f_i\right)=f_i\left(\hat{x}_0+x_0\right)\le\left\|f_i\right\|.\left\|\hat{x}_0+x_0\right\|=\left\|\hat{x}_0+x_0\right\|$$

dır ve buradan $\left\|\hat{x}_0+x_0\right\|\ge\lim\limits_{i\to\infty}2\left(1-i^{-1}\right)=2$ elde edilir bu da çelişki yaratır.

Son olarak f_0 , X_s' de bir nokta olsun. $f_0(x_0)=x_0''\left(f_0\right)$ iken $\left(x_s'\right)_s'\subseteq X$ olduğunu gösterebilirsek X in yansıyanlığı ispatlanmış olacaktır.

$f_0(x_0)=x_0''\left(f_0\right)$ olduğunu ispatlamak için $f_1,f_2,\dots,f_n,\dots$ yerine $f_0,f_1,\dots,f_n,\dots$ alalım ve buradan $\hat{x}_0\in X$ için

$$\left\|\hat{x}_0\right\|=1,\ f_i\left(\hat{x}_0\right)=x_0''\left(f_i\right)\qquad (i=0,1,...,n,...)$$

olur ve yukarıda ispatladığımız teklik özelliğinden dolayı $\hat{x}_0=x_0$ olduğundan önerme ispatlanmış olur. □

2.2 Yarıkapalı Operatörler

Tanım 2.2.1 X bir Banach uzayı ve $S{:}D(S)\subseteq X\to X$ bir operatör olsun .D(S) içindeki her (x_n) dizisi için n $\to \infty$ iken $x_n \to$ x ve $Sx_n \to y$ olduğunda $x \in$D(S) ve Sx=y (26)

ise S operatörüne D(S) üzerinde **yarıkapalıdır** denir.

Önerme 2.2.2 I-T operatörü aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa yarıkapalıdır:

i. T:M$\subseteq X \to X$ genişlemeyen operatördür,

ii. X Banach uzayı düzgün konvekstir,

iii. M kümesi kapalı, sınırlı ve konvekstir.

Bu önermeyi üç adımda kanıtlamaya çalışacağız.

Kanıt:

I. Her $\varepsilon \in (0,1), x_0, x_1 \in M$;

$$\|Tx_0 - x_0\| \le \varepsilon \quad , \quad \|Tx_1 - x_1\| \le \varepsilon \qquad (27)$$

iken, her $x_t = tx_0 + (1-t)x_1 \quad 0 \le t \le 1$ için

$$\varepsilon \to +0 \quad \text{iken} \quad a(\varepsilon) \to 0 \quad \text{ve} \quad \|Tx_t - x_t\| \le a(\varepsilon) \qquad (28)$$

olacak bir $a(\varepsilon) > 0$ sayısı olduğunu göstereceğiz.

İlk olarak $x_0 \neq x_1$ iken (27) in varlığını kabul edelim $0<t<1$ olsun ve

$$\|x_i - (x_t + Tx_t)/2\| \ge \|x_i - x_t\|$$

olacak şekilde i (i=0 veya i=1) seçelim. Aksi halde $0<t<1$ olduğundan x_t, x_0 ile x_1 arasındadır. Böylece,

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_0\| &= \|(x_1 - (x_t + Tx_t)/2) + ((x_t + Tx_t)/2 - x_0\| \\ &\le \|x_1 - (x_t + Tx_t)/2\| + \|(x_t + Tx_t)/2 - x_0\| \\ &< \|x_1 - x_t\| + \|x_t - x_0\| = \|x_1 - x_0\|\end{aligned}$$

çelişkisi oluşur. $x_0 \neq x_1$ olduğundan r= $\|x_t - x_i\|$ dersek r>0 dır. T nin genişlemeyen operatör olmasından dolayı,

$$\|Tx_t - x_t\| \le \|Tx_t - Tx_i\| + \|Tx_i - x_i\|$$

$$\le \|x_t - x_i\| + \|Tx_i - x_i\|$$

$$\le r + \varepsilon$$

olur .

$x=x_t$,$y=Tx_t$ $z=x_i$,$R= r + \varepsilon$ olarak kabul edelim . (25) ile verilen $\delta: [0,2] \to [0,1]$ kesin monoton artan ve örten olduğundan ters fonksiyonu $\eta: [0,1] \to [0,2]$ kesin monoton artan bir fonksiyondur ve kolayca görülür ki, 0<r<R olmak üzere,

$$\|z-x\| \le R,\ \|z-y\| \le R \quad \text{ve} \quad \|z-(x+y)/2\| \ge r \quad \text{ise}$$

$$\|x-y\| \le R\eta((R-r)/R)$$

olur .d (M) , M nin çapını göstermek üzere ,

$$\|Tx_t - x_t\| \le \sup_{r\in[0,d(M)]} (r+\varepsilon)\eta(\varepsilon/(r+\varepsilon)) \overset{\tan ım}{=} a(\varepsilon)$$

Şimdi bu şekilde tanımladığımız a(ε) değerinin istenilen özellikleri sağladığını gösterelim : İlk olarak , r=0 için $(r+\varepsilon)\eta(\varepsilon/(r+\varepsilon)) = \varepsilon\eta(1)$ ve $\eta(1)=2$ olduğundan a(ε)$\ge \varepsilon\eta(1) = 2\varepsilon$ dur.

Şimdi de [0,d(M)] aralığını $\left[0,\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon\right[,\left[\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon,d(M)\right]$ şeklinde parçalayarak sup' u bu alt aralıklar üzerinde alalım. Böylece ;

$$\sup_{r\in[0,\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon]} (r+\varepsilon)\eta(\varepsilon/(r+\varepsilon)) \le \sqrt{\varepsilon}\eta(1),$$

$$\sup_{r\in[\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon,d(M)]} (r+\varepsilon)\eta(\varepsilon/(r+\varepsilon)) \le (d(M)+\varepsilon)\eta(\sqrt{\varepsilon})$$

olduğundan $\varepsilon \to 0$ iken ;

$$a(\varepsilon) \le \max\{\sqrt{\varepsilon}\eta(1), (d(M)+\varepsilon)\eta(\sqrt{\varepsilon})\} \mapsto 0$$

elde edilir. $a(\varepsilon) \ge 2\varepsilon$ dan $x_1 \ne x_0, t$=0,1 ve $x_1 = x_0$ durumlarında yine (28) doğrulanır.

II. M deki herhangi bir (x_n) dizisi için $n \to \infty$ iken $x_n \rightharpoonup x$ ve $(I-T)(x_n) \to 0$ olduğunda $x \in M$ ve $(I-T)(x)=0$ olduğunu göstereceğiz.

II.1) M ;Banach uzayda kapalı ve konveks bir küme iken M deki kimi (x_n) dizileri için $x_n \rightharpoonup x$ ise $x \in M$ dir .(Bkz.[1])

II.2) $\varepsilon_0 \in (0,1)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon_n \leq \varepsilon_{n-1}$ olacak şekilde bir (ε_n) dizisi seçelim. $\varepsilon \to 0$ iken $a(\varepsilon) \to 0$ olduğundan bu şekilde bir dizi seçilebilir. (x_n) in bir alt dizisini seçmek gerekli ise ;

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|Tx_n - x_n\| \leq \varepsilon_n$ den , $\forall y \in co\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ için

$$\|Ty - y\| \leq \varepsilon_0 \tag{29}$$

dır.

Aşağıdaki (a) ve (b) yi gözönüne alarak tümevarımla kanıtlanabilir.

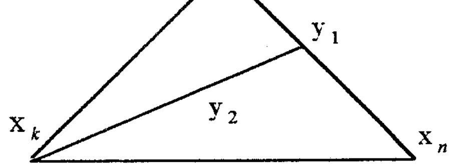
a. $1 \leq m \langle n$ iken $y_1 \in co\{x_m, x_n\}$ olsun. Hipotezden; $\|Tx_m - x_m\| \leq \varepsilon_m$ ve $\|Tx_n - x_n\| \leq \varepsilon_n$ dir .Burada $\varepsilon_n \leq \varepsilon_m$ dir . Buradan (28) da anlatılmak istenen

$$\|Ty_1 - y_1\| \leq a(\varepsilon_m) \leq \varepsilon_{m-1} \leq \varepsilon_0$$

elde edilir.

b. $1 \leq k < m \langle n$ iken $y_2 \in co\{x_k, x_m, x_n\}$ olsun. Bunu daha kolay olarak şu şekilde anlatabiliriz; uygun $y_1 \in co\{x_m, x_n\}$ için $y_2 \in co\{x_k, y_1\}$ olarak alalım.**(şekil 2.2)**

a dan dolayı, $\|Ty_1 - y_1\| \leq \varepsilon_{m-1}$ ve $\varepsilon_{m-1} \leq \varepsilon_k$ dır. Böylece $\|Tx_k - x_k\| \leq \varepsilon_k$ ve $\|Ty_1 - y_1\| \leq \varepsilon_k$ yazılabilir. (28) dan $\|Ty_2 - y_2\| \leq a(\varepsilon_k) \leq \varepsilon_{k-1} \leq \varepsilon_0$ dır.



Şekil 2.2

II.3) $n \to \infty$ iken $x_n \rightharpoonup x$ ise $x \in \overline{co}\{x_n : n \in IN\}$ (II.1 den dolayı) (29) den, $\|Tx - x\| \le \varepsilon_0$, ε_0 ın keyfi küçük seçilmesinden de Tx-x=0 dır.

III. Yalnızca $x \to Tx$ fonksiyonu genişlemeyen değildir. Sabit bir y için $x \to Tx+y$. Böylece II deki (I-T) operatörü yarıkapalı bir operatördür. □

2.3 Banach Uzayda Yakınsaklık Prensipleri

Aşağıdaki sonuçlar, gerçel sayı dizilerinin iyi bilinen yakınsaklık özelliklerinin genelleştirilmişidir. Bu sonuçlar sıklıkla kullanılırlar .Aşağıda sözü edilen kuvvetli yakınsaklık normlu uzaylardaki yakınsaklıktır. Bizler çoğu zaman bunların herbirine kısaca yakınsama deriz.

Önerme 2.3.1 (Yakınsaklık Prensipleri) Bir X Banach uzayındaki bir (x_n) dizisi aşağıdaki yakınsaklık özelliklerine sahiptir ;

1.Kuvvetli yakınsaklık: x, X Banach uzayının sabit bir elemanı olsun. Eğer (x_n) in her alt dizisi x e kuvvetli yakınsayan bir alt diziye sahipse asıl dizi de x e kuvvetli yakınsar. Yani ; $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ dir .

2.Zayıf yakınsaklık: x, X Banach uzayının sabit bir elemanı olsun. Eğer (x_n) in her alt dizisi x e zayıf yakınsayan bir alt diziye sahipse asıl dizi de x e zayıf yakınsar. Yani ; $n \to \infty$ iken $x_n \rightharpoonup x$ dir .

3.Ayırma prensibi:Eğer X uzayı yansıyan ise o zaman X içindeki her sınırlı (x_n) dizisi zayıf yakınsak bir $(x_{n'})$ dizisine sahiptir. Yani ; $n \to \infty$ iken $x_{n'} \rightharpoonup x$ dir .Ayrıca $x \in \overline{co}\{x_n : n \in IN\}$ dir.

4.Sınırlı dizilerin zayıf yakınsaklığı: (x_n) yakınsak bir X Banach uzayında sınırlı bir dizi olsun. Eğer (x_n) in bütün zayıf yakınsak alt dizileri aynı x limitine sahipse $n \to \infty$ iken $x_n \rightharpoonup x$ dir .

Kanıt:

1. $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ değilse o zaman $\varepsilon_0 > 0$ ve bütün $(x_{n'})$ ler için $\|x - x_{n^1}\| \ge \varepsilon_0$ olacak şekilde bir $(x_{n'})$alt dizisi vardır. Fakat ; hipotezden $(x_{n'})$ dizisinin x e yakınsayan bir $(x_{n''})$ alt dizisi vardır, bu da çelişki yaratır.

2. $n \to \infty$ iken $x_n \rightharpoonup x$ olmadığını kabul edelim. Bu durumda $f \in X^*$ fonksiyoneli için; $\left(\langle f, x_n \rangle\right)$ dizisi $\langle f, x \rangle$ e yakınsamaz. Böylece $(x_{n'})$ alt dizisi ve $\varepsilon_0 > 0$ sayısı vardır ve her $(x_{n'})$ için,

$$|\langle f, x_{n^1} \rangle - \langle f, x \rangle| \geq \varepsilon_0$$

olur. Fakat, hipotezden $(x_{n'})$ nin x e zayıf yakınsayan bir $(x_{n''})$ alt dizisi vardır. Yani ; $n \to \infty$ iken $x_{n''} \rightharpoonup x$ dir .Buradan ; $\langle f, x_{n''} \rangle \to \langle f, x \rangle$ dir. Bu da çelişki yaratır.

□

2.4 Browder ,Göhde ve Kirk Sabit Nokta Teoremi

Aşağıda vereceğimiz teorem bu bölümün asıl sonucudur.

Teorem 2.4.1 M; düzgün konveks X Banach uzayı içinde boş olmayan, kapalı , sınırlı ve konveks bir küme ve $T{:}M \subset X \to X$ genişlemeyen bir operatör olsun. Bu durumda T nin sabit noktalarının kümesi Fix (T) boş olmayan , kapalı ve konveks bir kümedir.

Kanıt:

I. İlk olarak Fix (T) $\neq \emptyset$ olduğunu gösterelim.

Sabit $p \in M$ ve n=1,2,... için

$$T_n(x) = (1 - \frac{1}{n})Tx + \frac{p}{n}$$

olarak T_n operatörlerini tanımlayalım. T_n operatörü $\forall x, y \in M$ için;

$$\|T_n x - T_n y\| \leq (1 - \frac{1}{n})\|Tx - Ty\| \leq (1 - \frac{1}{n})\|x - y\|$$

eşitsizliğini sağlar ve M nin konveksliğinden dolayı $T_n(M) \subseteq M$ dir .

Banach sabit nokta teoremi $T_n{:}M \to M$ operatörünün sabit bir x_n noktasının varlığını garantiler. Bu durumda;

$$x_n = T_n x_n = (1 - \frac{1}{n})Tx_n + \frac{p}{n} \qquad (30)$$

olur. Önerme 2.1.6 dan; X uzayı yansıyandır. Önerme 2.3.1 den dolayı M deki sınırlı bir (x_n) dizisinin zayıf yakınsak bir altdizisi vardır. Yani; $n \to \infty$ iken $x_{n'} \rightharpoonup x$ dir . (30) dan $n \to \infty$ için $x_{n'} - Tx_{n'} \to 0$. Önerme 2.2.2 den (I-T) yarıkapalı olduğundan x-Tx=0 dır.

II. Fix(T) kapalı mı?

$x \in \overline{Fix(T)}$ olsun. Fix(T) içindeki en az bir (x_n) dizisi için $x_n \to x$ dir.

T sürekli olduğundan $T x_n \to x$ dir . Diğer taraftan $\forall n$ için $T x_n = x_n$ olduğundan $x_n \to Tx$ ve limitin tekliğinden Tx=x dir . O halde $x \in$ Fix (T), yani Fix (T) kapalıdır.

III. Fix (T) dışbükey mi ?

$x_0, x_1 \in Fix(T)$ ve $0 \le t \le 1$ için $x_t = (1-t)x_0 + tx_1$ olsun. $x_t \in Fix(T)$, yani $T x_t = x_t$ m i ?

$x_0, x_1 \in Fix(T)$ için $T x_0 = x_0$, $T x_1 = x_1$ dir . Böylece (28) ya göre $\forall \varepsilon \in (0,1]$ için $\|Tx_t - x_t\| \le a(\varepsilon)$ dur. $\varepsilon \to 0$ iken $a(\varepsilon) \to 0$ olduğundan $\|Tx_t - x_t\| = 0$,yani $T x_t = x_t$ olur. □

2.5 Yarı Kompakt Operatörler

Tanım 2.5.1 X bir B-Uzay ve $T: D(T) \subseteq X \to X$ bir operatör olsun.

T operatörü yarıkompaktır $\Leftrightarrow$ D(T) içindeki sınırlı bir

(x_n) dizisi için $(T x_n - x_n)$ dizisi yakınsaktır ve bu (31)

durumda , (x_n) dizisininin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Bu kavram bir sonraki bölümde verilecek olan uyarlanmış ardışık yaklaşımların yakınsaklığını belirlemekte kullanılacaktır.

Örnek 2.5.2 Aşağıdaki iki özellik sağlanıyorsa C+D operatörü X Banach uzayının bir M alt kümesi üzerinde yarıkompaktır.

i. $C: M \subseteq X \to X$ operatörü kompaktır,

ii. $D: M \subseteq X \to X$ operatörü için (I-D) operatörü kapalı aralıkta birebirdir ve $(I-D)^{-1}$ operatörü süreklidir.

Özel olarak D=0 seçilebilir.

Kanıt:

T=C+D olsun. (x_n), M de sınırlı bir dizi ve $n \to \infty$ iken $Tx_n - x_n \to z$ ise C nin kompaklığından (x_n) in bir alt dizisi vardır. Bu alt diziyi de (x_n) ile gösterelim .Buradan $n \to \infty$ için $Cx_n \to y$ olsun. $y_n = (I - D)(x_n)$ olarak gösterelim. Buradan $n \to \infty$ iken;

$$y_n = x_n - Tx_n + Cx_n \to z + y$$

olur. Yani $n \to \infty$ iken;

$$x_n = (I - D)^{-1} y_n \to (I - D)^{-1}(z + y)$$

olduğu görülür. □

2.6 Uyarlanmış Ardışık Yaklaşımlar

Ters Örnek 2.6.1 Bir T: M $\to$ M genişlemeyen operatörü için n=0,1,2,... olmak üzere başlangıç elemanı $y_0 \in$ M olan genel bir $y_{n+1} = Ty_n$ yinelemeli yöntemin yakınsak olması gerekmez. Örneğin; M kapalı birim disk ve T, π açılı bir dönme olsun. Sıfırdan farklı herhangi bir $y_0 \in$ M seçtiğimizde (y_n) yakınsak değildir, sadece salınım yapar.

Bir H-uzay üzerinde yakınsaklık sonuçları için, sabit bir t $\in$ [0,1[ile

$$x_{n+1} = (1-t)Tx_n + t\,x_n, \qquad x_0 \in M,\ n=0,1,2,... \tag{32}$$

olarak ifade edilen uyarlanmış yinelemeli yöntem, kanıtları daha bir ilginç yapar. Örneğin, yukarıdaki ters örnekte verilen T operatörü her yinelemede x_n ile tek sabit noktası x=0 arasındaki uzaklığı azaltır, böylece n$\to\infty$ iken $x_n \to 0$ olur.

Önerme 2.6.2 X gerçel bir H-uzayı, M de boş olmayan, kapalı, sınırlı ve dışbükey bir altküme , T:M $\subseteq$ X $\to$X genişlemeyen bir operatör olsun. O zaman,

(1) $\forall$ t $\in$ [0,1[için (10) da verilen yinelemeli (x_n) dizisi T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar (Bkz. 2.3.1.),

(2) Eğer T yarıkompakt ise (x_n) dizisi kuvvetli yakınsar; yani X üzerinde norma göre yakınsar.

Kanıt:(1)

(I) M nin konveksliğinden (x_n) dizisi M kümesindedir. T nin sabit noktalarının kümesi Fix (T) olsun. Teorem 2.4.1 de gösterdiğimiz gibi Fix(T) boştan farklıdır. y∈Fix(T) yani , Ty=y olsun. ($\|x_n - y\|$) sayı dizisi sıfırdan küçük değerlerde sınırlı olduğundan yakınsaktır ve monoton azalandır çünkü;

$$\|x_{n+1} - y\| = \|(1-t)(Tx_n - Ty) + t(x_n - y)\|$$

$$\leq (1-t)\|Tx_n - Ty\| + t\|x_n - y\|$$

$$\leq (1-t)\|x_n - y\| + t\|x_n - y\|$$

$$= \|x_n - y\|$$

3. adıma dikkat edilirse $\|Tx_n - Ty\| \leq \|x_n - y\|$ olduğu görülür.

(II)∀ y∈ Fix (T) olmak üzere $g(y) = \lim_{n\to\infty}\|x_n - y\|$ olsun.

g fonksiyoneli süreklidir çünkü;

$$|g(y) - g(z)| = \left|\lim_{n\to\infty}(\|x_n - y\| - \|x_n - z\|)\right|$$

$$\leq \|y - z\|.$$

olduğu görülür.

g fonksiyoneli konvekstir ;0≤ s ≤ 1 için,

$$\|x_n - (sy + (1-s)z)\| \leq s\|x_n - y\| + (1-s)\|x_n - z\|$$

Yani;

$$g(sy + (1\text{-}s)z) \leq s\, g(y) + (1\text{-}s)\, g(z)$$

olduğu görülür.

(III) Konveks ve sürekli g fonksiyonelinin Teorem 2.4.1 de tanımlı kapalı, sınırlı ve konveks Fix (T) kümesi üzerinde bir minimumu vardır. $y_0 \in$ Fix (T) olan bir minimal nokta seçebiliriz. Yani; her $y_0 \in$ Fix (T) olmak üzere $g(y) \geq g(y_0)$ dır.

(IV) (x_n) dizisinin $(x_{n'})$ gibi zayıf yakınsak bir alt dizisini alırsak $n \to \infty$ iken $x_{n'} \rightharpoonup y$ olacaktır. Önerme 2.3.1 (4) den $y = y_0$ ve $n \to \infty$ iken x_n y_0 olduğu görülür.

Bundan sonra $x_{n'}$ yerine x_n kullanılacaktır.

(IV-1) İlk olarak $y \in$ Fix (T) olduğunu gösterelim.

$$u_n = y_0 - x_n \qquad \text{ve} \qquad v_n = Ty_0 - Tx_n$$

olsun ve (II) den dolayı;

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|v_n\| \leq \lim_{n\to\infty}\|u_n\| = \lim_{n\to\infty}\|y_0 - x_n\| = g(y_0)$$

olduğu görülür.

$Ty_0 = y_0$ olmasından ve (II) den dolayı

$$\lim_{n\to\infty}\|su_n + (1-s)v_n\| = \lim_{n\to\infty}\|s(y_0 - x_n) + (1-s)(Ty_0 - Tx_n)\|$$

yazılabilir. (I) den dolayı da ;

$$\lim_{n\to\infty}\|s(y_0 - x_n) + (1-s)(Ty_0 - Tx_n)\| = \lim_{n\to\infty}\|y_0 - x_{n+1}\| \leq \lim_{n\to\infty}\|y_0 - x_n\| = g\,(y_0)$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= y_0 - x_n + Tx_n \\ &= y_0 - x_n - y_0 + Tx_n \\ &= Tx_n - x_n \end{aligned}$$

olarak bulunur. $n \to \infty$ iken $u_n - v_n = Tx_n - x_n \to 0$ dır.

Önerme 2.2.2 de verildiği gibi, T nin M üzerinde yarıkapalı olmasından dolayı Ty-y=0 dır.

(IV-2) $y=y_0$ olduğunu gösterelim X üzerindeki skaler (iç) çarpım $(.|.)$ olmak üzere

$$\|x_n - y_0\|^2 = \|x_n - y\|^2 + \|y - y_0\|^2 + 2(x_n - y|y - y_0)$$

özdeşliğinde $n \to \infty$ iken

$$g(y_0)^2 = g(y)^2 + \|y - y_0\|^2 \geq g(y_0)^2 + \|y - y_0\|^2$$

olur. Böylece $y=y_0$ olduğu görülür.

(2) (IV) den dolayı $n \to \infty$ iken $x_n \rightharpoonup y_0$ dır ve (IV-1) den dolayı da $n \to \infty$ iken $x_n - Tx_n \to 0$ dır. T nin yarı kompaklığından $n \to \infty$ iken $x_{n'} \to y_0$ olan bir alt dizisi vardır. (I) de ispatladığımız gibi $(\|x_n - y_0\|)$ dizisinin monoton azalanlığından (x_n) tam dizisi yakınsaktır. Yani $n \to \infty$ iken $x_n \to y_0$ dır. Böylelikle x_n dizisinin kuvvetli yakınsaklığı gösterilmiş olur.

2.7 Periyodik Çözümlerin Uygulamaları

Teorem 2.4.1 in asıl uygulaması gibi skaler çarpımlı X Hilbert uzayı üzerinde tanımlı

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad (33)$$

diferansiyel denklemi f periyodikliğin anahtar koşullarını sağladığı zaman,

Yani;

Periyodiklik için;

$$\forall\, t \in [0, \infty[\quad \text{ve} \quad x \in X \quad \text{için} \quad f(t+p, x) = f(t, x) \qquad (34a)$$

Monotonluk için;

$$\forall\, t \in [0, \infty[\quad \text{ve} \quad x, y \in X \quad \text{için} \quad (f(t,x) - f(t,y)\,|\,x-y) \leq 0 \qquad (34b)$$

Periyodu $p>0$ olan periyodik bir çözüme sahiptir..

Önerme 2.7.1 (Browder (1969)) Aşağıdaki üç koşul sağlanıyorsa (33) diferansiyel denkleminin periyodu $p>1$ olan bir çözümü vardır.

(i) X, reel bir H-uzay ve p>0 sabit bir sayı olmak üzere $f:[0,\infty[\times X \to X$ fonksiyonu (34a) ve (34b) eşitsizliklerini sağlar.

(ii) $\forall$ t$\in$ [0,p] için (f(t,x) | x) <0 ve x$\in$X olmak üzere

$$\|x\| = R \tag{34c}$$

olacak şekilde R>0 sayısı vardır.

(iii) (33) de verilen başlangıç değer probleminin, x (0)=x_0 olmak üzere x :[0,∞ [→ X , her x_0 için $\|x_0\| \le$ R olacak şekilde bir çözümü vardır.

Kanıt:

(I) Başlangıç değer probleminin çözümünün tekliğini gösterelim. Bunu göstermek için aşağıdaki formülü kullanacağız,

$$\frac{d}{dt}(\|x(t)\|^2) = 2(x'(t)|x(t))$$

x (.) ve y (.) (33) ün [0,∞ [aralığında iki çözümü ise (34b) de verilen eşitsizlikten dolayı ,

$$\frac{d}{dt}(\|x(t)-y(t)\|^2) = 2(f(t,x(t)) - f(t,y(t))|x(t)-y(t)) \le 0$$

dır. Böylece ;

$$\forall t \ge 0 \text{ için } \|x(t)-y(t)\| \le \|x(0)-y(0)\| \tag{35}$$

olur.

Sonuç olarak x(0)=y(0) olduğu görülür. Buradan da $\forall$ t $\ge$ 0 için x(t)=y(t) dir .

(II) X uzayı üzerinde Lajapunov fonksiyonunu L(x)=$\|x\|^2$ ile tanımlayalım. L nin anahtar özelliği şudur; sabit bir t$\in$[0,p] noktası için $\|x(t)\| = R$ olacak şekilde (33) ün [0,∞ [aralığında x(.) çözümü (34c) özelliğiyle birlikte doğrudur böylece

$$\frac{d}{dt}L(x(t)) = 2(f(t,x(t))|x(t)) \langle 0 \tag{36}$$

olur.

(III) T shift operatör. $M=\{x\in X \mid \|x\| \leq R\}$ için T operatörünü $x(.)$, (33) ün $[0,\infty[$ aralığında $x(0)=x_0$ olan bir çözümü olmak üzere

$$T x_0 = x\ (p) \qquad (37)$$

ile tanımlayalım.

$T(M)\subseteq M$ olduğunu göstermeliyiz.(36) dan dolayı $t\to x(t)$ eğrisi $\forall\, t \in[0,p]$ için M topunun içerisindedir.

T operatörü genişlemeyendir. (35) ve (37) den dolayı $\|Tx_0 - Ty_0\| \leq \|x_0 - y_0\|$ olduğu görülür.

(37) ile birlikte, x 0)=x(p) iken x(.) (33) başlangıç değer probleminin bir çözümü olmak üzere 2.4.1 teoremi $T:M\to M$ operatörünün bir sabit noktası olduğunu garantiler.

(IV) x(.) çözümünün periyodu $p>0$ dır. $y(t) = x(t+p)$olsun. (34a) dan dolayı, x(.) (33) ün bir çözümü ise y(.) da bir çözümüdür. Buradan $y(0)=x(0)$ olur. (I) de $x(t)=y(t)$ olduğunu görmüştük böylece her $t\geq 0$ için $x(t)= x(t+p)$ olur.

KAYNAKLAR

1.ZEİDLER, E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I Fixed Point Theorems*, Springer-Verlag, Newyork, 1985.

2.ISTRATESCU, V., I., *Fixed Point Theory,* D. Reidler Publishing Company, 1981.

3.KLAMBAUER, G., *Real Analysis.* Dep. of Mat. Univ. of Ottawa, 1973.

4.KREYSZIG, E. , *Introductory Functional Analysis and Application.* Jhon Willey and Sons, New York, 1989.

5.CLARKSON, J., A., *Uniformly Conveks Space.* Trans. Am. Mat. Soc. 40, 396-414, 1936.

6.FLEMİNG, W., H., *Functions of Several Variables.* Addison -Wasley, Massachusetts (USA), 1965 (c.)

7.RALL, L., B., *Nonlinear Functional Analysis and Applications.* Academic Press, New-York, 1971.

8.KASAKU, Y., *Functional Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1974.

9.KÖTHE, G. *Topolocigal Vector Spaces* I. Springer-Verlag, Berlin, 1969.