BİR KAPALI REGLE YÜZEYİN İNTEGRAL İNVARYANTLARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Cumali EKİCİ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi
1992

BİR KAPALI REGLE YÜZEYİN İNTEGRAL İNVARYANTLARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Cumali EKİCİ

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç.Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Mart - 1992

Cumali Ekici'nin YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "BİR KAPALI REGLE YÜZEYİN İNTEGRAL İNVARYANTLARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR" başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

..6../..3../1992

Üye: Prof. Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR

Üye: Doç. Dr. Şükrü OLGUN

Üye: Doç. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun [illegible] MART 1992 gün ve 308-11 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Rüstem KAYA

ÖZET

Bu çalışmanın birinci bölümünde, kullanacağımız temel kavramlar verilmiştir, ikinci bölümde, bir kapalı regle yüzeyin reel açılım açısı, reel açılım uzunluğu ve dual açılım açısı ile ilgili bilgiler literatürden alınarak amacımıza uygun olarak düzenlenmiştir. Son bölümde, kapalı regle yüzeylerin integral invaryantları arasında geçerli olan aşağıdaki orijinal bağıntılar bulunmuştur:

(x) ve (v_1)-kapalı regle yüzeyleri için,

$$1.\ \frac{\mathcal{L}_x}{\lambda_x}=\frac{\mathcal{L}_{v_1}}{\lambda_{v_1}}-\frac{2\pi-a_{v_1}}{2\pi-a_x}\cdot\frac{(\bar{\theta}_1\sin\theta_2+\bar{\theta}_2\sin\theta_1)\,[1-\cos(\theta_1+\theta_2)]}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}$$

$$2.\ \mathcal{L}_x=\frac{1}{\cos\theta_1}\left[\mathcal{L}_{v_1}-\lambda_{v_1}\frac{(\bar{\theta}_1+\bar{\theta}_2)}{2}\operatorname{tg}\theta_1\right]$$

$$3.\ \frac{\lambda_x}{\lambda_{v_1}}=\frac{2\pi-a_x}{2\pi-a_{v_1}}=\frac{1}{b_{v_1}}\left[b_x+\frac{(2\pi-a_{v_1})\,(\bar{\theta}_1+\bar{\theta}_2)\operatorname{tg}\theta_1}{2}\right]=\frac{1}{\cos\theta_1}$$

bağıntıları sağlanır. Burada $\mathcal{L}_x$, λ_x , a_x , b_x ve $\mathcal{L}_{v_1}$, λ_{v_1} , a_{v_1} , b_{v_1} sırasıyla, (x) ve (v_1)-kapalı regle yüzeyleri için açılım uzunluğu, açılım açısı, küresel yüzey alanı ve sitriksiyon çizgisinin uzunluklarını, θ_1 ise x ile v_1 arasındaki açıyı göstermektir.

SUMMARY

In the first part of this study, we give the basic concepts that will be used later. In the second part, we give a detailed survey about the real pitch, the real angle of pitch and the dual angle of pitch of a closed ruled surface. In the last part, we obtain the following three original results which gives some relations between the integral invariants of a closed ruled surfaces:

$$1.\ \frac{\mathcal{L}_x}{\lambda_x} = \frac{\mathcal{L}_{v_1}}{\lambda_{v_1}} - \frac{2\pi - a_{v_1}}{2\pi - a_x} \cdot \frac{(\bar{\theta}_1 \sin\theta_2 + \bar{\theta}_2 \sin\theta_1)\,[1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$2.\ \mathcal{L}_x = \frac{1}{\cos\theta_1}\left[\mathcal{L}_{v_1} - \lambda_{v_1}\frac{(\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2)}{2}\,\mathrm{tg}\,\theta_1\right]$$

$$3.\ \frac{\lambda_x}{\lambda_{v_1}} = \frac{2\pi - a_x}{2\pi - a_{v_1}} = \frac{1}{b_{v_1}}\left[b_x + \frac{(2\pi - a_{v_1})\,(\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2)\,\mathrm{tg}\,\theta_1}{2}\right] = \frac{1}{\cos\theta_1}$$

are valid for (x) and (v_1)-closed ruled surfaces. Where $\mathcal{L}_x$, λ_x , a_x , b_x and $\mathcal{L}_{v_1}$, λ_{v_1} , a_{v_1} , b_{v_1} are pitch, angle of pitch, spherical surface area and the lenghts of striction curves of the (x) and (v_1)-closed ruled surfaces, respectively. θ_1 stands for the angle between x and v_1.

TEŞEKKÜR

Beni bu çalışmaya sevkeden ve yöneten, çalışma boyunca değerli yardımlarını esirgemeyen, Hocam, Sayın;

Doç.Dr. Ali GÖRGÜLÜ'ye bu vesileyle şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Eskişehir, 1992 Cumali EKİCİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklamalar
D	Dual sayılar cümlesi
R	Reel sayılar cümlesi
$\mathbf{D}^3$	Dual vektörlerin cümlesi (D-Modül)
λ_x	Reel açılım açısı
$\mathcal{L}_x$	Reel açılım uzunluğu
Λ_x	Dual açılım açısı
K	Hareketli birim dual küre
K'	Sabit birim dual küre
H/H'	H nın H' uzayına göre 1-parametreli hareketi
K/K'	K dual küresinin K' dual küresine göre bir 1-parametreli dual küresel hareketi
Σ	Dual açı
$+ , \oplus , . , \Theta , \wedge$	İç işlemler

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM I

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmaya esas olan tanım ve teoremler verilecektir.

1.1. Dual Sayılar

Reel sayılar cümlesi, (+) toplama ve (.) çarpma işlemlerine göre bir cisimdir. Reel sayılar cümlesi **R** ile gösterilir.

Tanım 1.1.1: $\forall\ a, \bar{a} \in \mathbf{R}$ olmak üzere bir $A = (a, \bar{a})$ ikilisine bir *sıralı* ikili denir.

Bu şekilde tanımlanan sıralı ikililerin **R** x **R** cümlesi **D** ile gösterilsin.

$$\mathbf{D} = \{(a, \bar{a}) : a, \bar{a} \in \mathbf{R}\}$$

üzerinde iki iç işlem ve bir eşitlik şu şekilde tanımlanır:

Tanım 1.1.2: $A = (a, \bar{a})$ ve $B = (b, \bar{b})$ olmak üzere

$$\oplus : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \to \mathbf{D}$$

iç işlemi

$$A \oplus B = (a, \bar{a}) \oplus (b, \bar{b}) = (a + b, \bar{a} + \bar{b})$$

şeklinde tanımlanır ve **D** deki *toplama* olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.3: $A = (a, \bar{a})$ ve $B = (b, \bar{b})$ olmak üzere

$$\Theta : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \to \mathbf{D}$$

iç işlemi

$$A \Theta B = (a, \bar{a}) \Theta (b, \bar{b}) = (a\,.\,b, a\bar{b} + \bar{a}b)$$

şeklinde tanımlanır ve **D**'deki *çarpma* olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.4: $A = (a, \bar{a})$ ve $B = (b, \bar{b}) \in \mathbf{D}$ için

$$a = b, \; \bar{a} = \bar{b}$$

ise A ile B *eşittir* denir ve A = B şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.5: **R** reel sayılar cümlesi olmak üzere

$$\mathbf{D} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise **D** cümlesine *dual sayılar sistemi* ve $\forall\ (a, \bar{a}) \in \mathbf{D}$ elemanına da bir *dual sayı* denir (Hacısalihoğlu, 1983a).

Teorem 1.1.1: **(D, ⊕, ⊙)** üçlüsü birimli ve değişimli bir halkadır.

Bu halkanın toplamaya göre birim elemanı (0,0), çarpmaya göre birim elemanı ise, (1,0) dır.

Teorem 1.1.2: (D, ⊕, ⊙) üçlüsü bir cisim değildir.

Tanım 1.1.6: $A \neq (0, \bar{a})$ ve $X = (x, \bar{x})$ olmak üzere

$$A \odot X = B$$

denkleminin bir tek çözümü vardır. Gerçekten Tanım 1.1.3. den

$$(ax, a\bar{x} + \bar{a}x) = (b, \bar{b})$$

ve Tanım 1.1.4. den de

$$X = \left(\frac{b}{a}, \frac{a\bar{b} - \bar{a}b}{a^2}\right)$$

ve dolayısı ile $X \in \mathbf{D}$ elde edilir. X dual sayısına, B'nin A'ya *bölümü* denir.

Teorem 1.1.3: Dual sayılar halkası, **R** reel sayılar cismine izomorf bir alt cümleyi, alt cisim olarak kapsar (Hacısalihoğlu, 1983a).

Bu teoremin bir sonucu olarak, reel sayılar cümlesine izomorf olan,

$$\{(a,0) : a, 0 \in \mathbf{R}\}$$

dual sayılar cümlesinin herbir elemanı, izomorfu olan reel sayı ile gösterilebilir. Kısaca,

$$(a, 0) \cong a$$

ve

$$(1, 0) \cong 1$$

olarak alınabilir. Biz genel olarak bu notasyonu kullanacağız, ayrıca kısalığın hatırı için $\oplus$ ve Θ işlemleri yerine "+" ve "." işaretlerini tercih edeceğiz.

D halkasında, (0,1) dual sayısı dual birim olarak adlandırılır ve

$$\varepsilon = (0,1)$$

ile gösterilir. Çarpma işleminin tanımına göre,

$$\varepsilon \,\Theta\, \varepsilon = \varepsilon^2 = (0,0) \cong 0$$

olduğu kolayca görülebilir.

Teorem 1.1.4: Her A= $(a,\bar{a})$ dual sayısı,

$$A = a + \varepsilon\bar{a}\,,\ \varepsilon = (0,1)$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.1.7: Bir $A = a + \varepsilon\bar{a} \in \mathbf{D}$ dual sayısındaki "a" reel sayısına A'nın *reel kısmı*, "$\bar{a}$" reel sayısına da A'nın *dual kısmı* denir.

Teorem 1.1.5: İki dual sayının çarpımı sıfır ise, çarpanlardan biri sıfır olmak zorunda değildir.

Tanım 1.1.8: $Z = x + \varepsilon \bar{x}$ dual sayısının modül değeri diye $|x|$ reel sayısına denir ve,

$$|Z| = |x + \varepsilon \bar{x}|$$
$$= |x|$$

ile gösterilir.

1.2. Dual Vektörlerinin Uzayı (D-MODÜL)

$$\mathbf{D} \times \mathbf{D} \times \mathbf{D} = \mathbf{D}^3 = \{(A_1, A_2, A_3) : A_1, A_2, A_3 \in \mathbf{D}\}$$

cümlesinin her bir elemanı bir büyük harf ile gösterilirse, $A \in \mathbf{D}^3$ için $A = (A_1, A_2, A_3)$ veya $A = (A_i)$; $(i = 1,2,3)$ notasyonlarından birisi kullanılabilir. Bu cümle içinde aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 1.2.1: Her $A = (A_i)$, $B = (B_i) \in \mathbf{D}^3$ için

$$A = B \Leftrightarrow A_i = B_i \,, \; (i = 1,2,3)$$

dır.

Tanım 1.2.2: Her $A = (A_i)$, $B = (B_i) \in \mathbf{D}^3$ için, $(i = 1,2,3)$,

$$+ : \mathbf{D}^3 \times \mathbf{D}^3 \to \mathbf{D}^3$$

iç işlemi A ile B ye

$$A + B = (A_i + B_i)$$

üçlüsünü karşılık tutsun. $A + B$ ye $\mathbf{D}^3$ de A ile B nin *toplamı* denir.

Tanım 1.2.3: $\lambda \in \mathbf{D}$ ve $A \in \mathbf{D}^3$ için, $(i = 1,2,3)$

$$. : \mathbf{D} \times \mathbf{D}^3 \to \mathbf{D}^3$$

dış işlemi A yı

$$\lambda \, . \, A = (\lambda A_i)$$

üçlüsüne karşılık tutsun. λA ya *A nın λ skaları ile çarpımı* denir.

Teorem 1.2.1: $(\mathbf{D}^3, +, .)$ sistemi **D** halkası üzerinde bir modüldür.

Tanım 1.2.4: $(\mathbf{D}^3, +, .)$ üçlüsüne **D** -Modül ve bunun elemanları olan sıralı dual üçlülere, dual vektörler diyeceğiz ve $\vec{A} = (A_i)$ şeklinde göstereceğiz.

Teorem 1.2.2: $\vec{a}, \overset{\rightrightarrows}{a} \in \mathbf{R}^3$ ($\mathbf{R}^3$ üç boyutlu reel vektör uzayını göstermektedir) olmak üzere **D**-Modül'de her bir $\vec{A}$ dual vektörü

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \overset{\rightrightarrows}{a}, \; [\, \varepsilon = (0,1) \in \mathbf{D} \,]$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 1.1.3 ile eş anlamlı olarak; $\mathbf{R}^3$ vektör uzayı, **D**-Modülün elemanları $(\vec{a}, \vec{0}) = \vec{a} + \varepsilon\vec{0}$ şeklinde olan bir alt cümlesine izomorftur.

D-Modülün toplamaya göre birim elemanı,

$$\vec{0} = \vec{0} + \varepsilon\vec{0}$$

şeklinde gösterilir. Buna sıfır dual vektörü denir.

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\overset{\rightrightarrows}{a}$ ve $\vec{B} = b + \varepsilon\overset{\rightrightarrows}{b}$ dual vektörlerinin eşitliği,

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} \text{ ve } \overset{\rightrightarrows}{a} = \overset{\rightrightarrows}{b}$$

ile verilir. Bu tanım 1.2.1 ile eş anlamlıdır.

Tanım 1.2.5: Her $\vec{A}, \vec{B} \in$ **D**- Modül için,

$$<\,,\,> : \mathbf{D}^3 \times \mathbf{D}^3 \to \mathbf{D}$$

$$(\vec{A}, \vec{B}) \to <\vec{A}, \vec{B}> = <\vec{a}, \vec{b}> + \varepsilon\,(<\overset{\rightrightarrows}{a}, \vec{b}> + <\vec{a}, \overset{\rightrightarrows}{b}>) \qquad (1.2.1)$$

ile tanımlanan $<,>$ fonksiyonuna **D**-Modülde bir iç çarpım fonksiyonu denir.

Bu fonksiyonun aşağıdaki iç çarpım aksiyomlarını sağladığı kolayca gösterilebilir.

i. Her $\vec{A}, \vec{B} \in$ **D**- Modül için,

$$<\vec{A},\vec{B}> = <\vec{B},\vec{A}>$$

dir.

ii. Her $\vec{A}, \vec{B} \in$ **D**- Modül ve her $\alpha \in$ **D** için,

$$<\alpha\vec{A},\vec{B}> = <\vec{A},\alpha\vec{B}> = \alpha<\vec{A},\vec{B}>$$

dir.

iii. Her $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in$ **D**- Modül için,

$$<\vec{A}+\vec{B},\vec{C}> = <\vec{A},\vec{C}> + <\vec{B},\vec{C}>$$

$$<\vec{A},\vec{B}+\vec{C}> = <\vec{A},\vec{B}> + <\vec{A},\vec{C}>$$

dir.

iv. Her $\vec{A} \in$ **D**- Modül için,

$$\vec{A} = \vec{0} \Rightarrow <\vec{A},\vec{A}> = 0$$

dır.

Tanım 1.2.6: Bir $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^{*}$ dual vektörünün *normu* diye

$$\|\vec{A}\| = (<\vec{A},\vec{A}>)^{1/2} = \left(\|\vec{a}\|, \frac{<\vec{a},\vec{a}^{*}>}{\|\vec{a}\|}\right), \vec{a} \neq \vec{0}$$

dual sayısına denir.

Tanım 1.2.7: Normu reel birime karşılık gelen (1,0) dual sayısı olan dual vektöre *birim dual vektör* denir.

Teorem 1.2.3: $\vec{A} \neq (\vec{0}, \vec{a}^{*}) \in$ **D**-Modül olmak üzere, her $\vec{A} \in$ **D**-Modül için,

$$\vec{A}_0 = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

bir birim dual vektördür.

Tarım 1.2.8: $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \overset{\rightrightarrows}{a} \in$ **D**-Modül olmak üzere,

$$\vec{A}_o = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

birim dual vektörüne, $\vec{A}$ dual vektörünün *ekseni* denir.

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \overset{\rightrightarrows}{a}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, dual vektörünün eksenini, $k = \dfrac{\langle \vec{a} , \overset{\rightrightarrows}{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$ olmak üzere,

$$\vec{A}_o = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} + \varepsilon \frac{\overset{\rightrightarrows}{a} - k\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

şeklinde yazabiliriz.

Tanım 1.2.9: **D**-Modülde bir $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \overset{\rightrightarrows}{a}$ dual vektörü için,

$$k = \frac{\langle \vec{a} , \overset{\rightrightarrows}{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$$

sayısına, $\vec{A}$ dual vektörünün *adımı* veya *yükselişi* denir.

Bu tanımlarımızdan sonra, bir $\vec{A}$ dual vektörünü,

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \|\vec{A}\| \, A_o \\ &= \left(\|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a} , \overset{\rightrightarrows}{a} \rangle}{\|\vec{a}\|} \right) \vec{A}_o \end{aligned}$$

veya

$$\vec{A} = \|\vec{a}\| \, (1 + \varepsilon \, k) \, \vec{A}_o$$

şeklinde yazabiliriz. Reel kısmı sıfırdan farklı olan dual *vektörlere has dual vektörler* adını vereceğiz.

Tanım 1.2.10: $K = \{ \vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \overset{\rightrightarrows}{x} : \|\vec{X}\| = (1,0) \; ; \vec{x} , \overset{\rightrightarrows}{x} \in \mathbf{R}^3 \}$

cümlesine **D**-Modül'de *birim dual küre* denir.

Teorem 1.2.4 (E.STUDY): $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{\bar{a}}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ olmak üzere **D**-Modül'de denklemi,

$$\|\vec{A}\| = (1,0)$$

olan birim dual kürenin dual noktaları, $\mathbf{R}^3$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir (Hacısalihoğlu, 1983a).

Birim dual küre üzerindeki bir A dual noktasını merkeze birleştiren birim dual yer vektörü,

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{\bar{a}}$$

ise Teorem 1.2.4. den dolayı, çizgiler uzayında bir tek yönlü doğruya karşılık gelir. Burada $\vec{a} \in \mathbf{R}^3$ vektörü, bu yönlü doğrunun doğrultman vektörü, $\vec{\bar{a}} \in \mathbf{R}^3$ vektörü ise, X bu doğrunun üzerinde bir nokta ve 0 bir başlangıç noktası olmak üzere,

$$\vec{\bar{a}} = \overrightarrow{0X} \wedge \vec{a}$$

ile belirlenen bir moment vektörüdür. Bu vektöre, çizgiler uzayındaki doğrunun başlangıca göre vektörel momenti denir.

Tanım 1.2.11: **D**-Modülde açı, $\vec{A}$, $\vec{B}$ birer birim dual vektör olmak üzere,

$$\cos\Phi = \langle\vec{A}, \vec{B}\rangle$$

ifadesi ile verilir. $\Phi = \varphi + \varepsilon\bar{\varphi}$ dual sayısına $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasındaki *dual açı* denir.

Şimdi, iki birim dual vektör arasındaki dual açının, $\mathbf{R}^3$ deki yönlü doğruların uzayı olan çizgiler uzayındaki anlamını araştıralım. Bunun için $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörlerinin

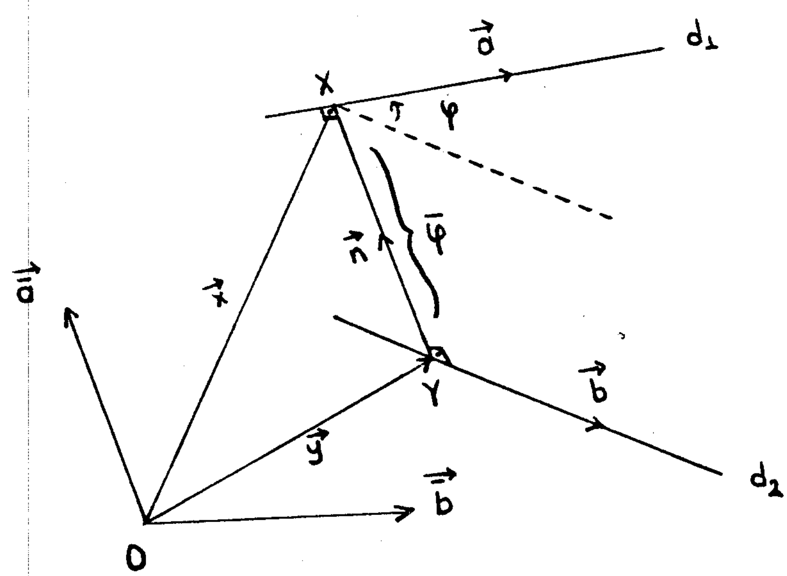
$$\langle\vec{A}, \vec{B}\rangle = \langle\vec{a}, \vec{b}\rangle + \varepsilon(\langle\vec{\bar{a}}, \vec{b}\rangle + \langle\vec{a}, \vec{\bar{b}}\rangle)$$

iç çarpımından hareket edelim. E.STUDY teoremi gereğince $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörleri $\mathbf{R}^3$ de iki yönlü d_1 ve d_2 - doğrularına karşılık gelirler, d_1 in yönü $\vec{a}$, yeri (momenti) $\vec{\bar{a}}$, d_2 nin yönü $\vec{b}$, yeri $\vec{\bar{b}}$ ile belli olduğundan $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ arasındaki açı φ ise, yukarıdaki iç çarpımın reel kısmı,

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \cos \varphi$$

dır. Şimdi de dual iç çarpımdaki $\langle \vec{\vec{a}}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{\vec{b}} \rangle$ dual kısmın anlamını araştıralım.

$\vec{\vec{a}}$ ve $\vec{\vec{b}}$ momentleri, doğrular üzerindeki noktaların seçilişinden bağımsız olduğundan, X ve Y noktalarını, d_1 ve d_2 - doğrularının ortak dikmesinin ayakları olarak seçebiliriz (Şekil 1.2.1). Bu ortak dikme doğrultusundaki birim vektör;



Şekil 1.2.1

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}$$

ile belirtilebilir. d_1 , d_2 - doğruları arasındaki en kısa uzaklık $\bar{\varphi}$ ile gösterilirse;

$$\vec{x} - \vec{y} = \pm \bar{\varphi} \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}$$

yazılabilir. Vektörel momentler $\overset{\rightrightarrows}{a} = \vec{x} \wedge \vec{a}$, $\overset{\rightrightarrows}{b} = \vec{y} \wedge \vec{b}$ olduğundan,

$$<\overset{\rightrightarrows}{a} , \vec{b}> = <\vec{x} \wedge \vec{a} , \vec{b}> = <\vec{x} , \vec{a} \wedge \vec{b}>$$

$$<\vec{a} , \overset{\rightrightarrows}{b}> = <\vec{a} , \vec{y} \wedge \vec{b}> = - <\vec{y} , \vec{a} \wedge \vec{b}>$$

olur. Buradan dual kısım için,

$$\begin{aligned}
<\overset{\rightrightarrows}{a} , \vec{b}> + <\vec{a} , \overset{\rightrightarrows}{b}> &= <\vec{x} - \vec{y} , \vec{a} \wedge \vec{b}> \\
&= \pm < \bar{\varphi} \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{||\vec{a} \wedge \vec{b}||} , \vec{a} \wedge \vec{b}> \\
&= \pm \ \bar{\varphi} \, ||\vec{a} \wedge \vec{b}|| \\
&= \pm \ \bar{\varphi} \sin \varphi
\end{aligned}$$

bulunur. Reel ve dual kısımlar için bulduğumuz değerleri, dual iç çarpım ifadesinde yerine koyarsak,

$$<\vec{A} , \vec{B}> = \cos \varphi \pm \varepsilon \bar{\varphi} \sin \varphi$$

elde edilir. Bu ifade de (-) işareti gözönüne alınırsa, $\Phi = \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}$ bir dual sayı olmak üzere, TAYLOR formülü gereğince,

$$<\vec{A} , \vec{B}> = \cos \Phi \tag{1.2.2}$$

yazılabilir. O halde $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasındaki $\Phi = \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}$ dual açısı, bunların $\mathbf{R}^3$ de temsil ettikleri d_1 ve d_2 - yönlü doğrularının arasındaki φ açısı ve en kısa uzaklığı gösteren $\bar{\varphi}$ reel çiftinden oluşur.

$\overrightarrow{OA} = \vec{A}$ ve $\overrightarrow{OB} = \vec{B}$ birim dual vektörlerinin uçları **D**-Modül'de 0 merkezli birim dual kürenin A ve B dual noktalarını belirteceğinden $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki $\Phi = \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}$ dual açısı A ve B dual noktalarından geçen dual büyük dairenin $\overset{\frown}{AB}$ dual yay uzunluğu olarak düşünülebilir.

Böylece, E.STUDY dönüşümü yardımıyla, $\mathbf{R}^3$ deki yönlü doğruların, birbirine göre durumlarını birim dual küre üzerinde inceleyebiliriz.

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ iki birim dual vektör olmak üzere (1.2.2) ifadesinden;

i. $<\vec{A}, \vec{B}>$ sırf dual $\Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, \bar{\varphi} \neq 0$

ise $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörlerinin belirttikleri yönlü doğrular dik durumlu fakat aykırıdırlar.

ii. $<\vec{A}, \vec{B}>$ sırf reel $\Leftrightarrow \bar{\varphi} = 0$

Bu halde yönlü iki doğru kesişir ve,

$$<\vec{a}, \vec{\bar{b}}> + <\vec{\bar{a}}, \vec{b}> = 0 \tag{1.2.3}$$

ifadesi kesişme koşuludur.

iii. $<\vec{A}, \vec{B}> = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, \bar{\varphi} = 0$

Yönlü doğrular birbirini dik keserler.

iv. $<\vec{A}, \vec{B}> = (1,0) \Rightarrow \varphi = 0$

Yönlü doğrular paralel ve aynı yönlüdürler. Eğer, $\bar{\varphi} = 0$ ise, bu iki doğru aynı zamanda çakışıktır.

v. $<\vec{A}, \vec{B}> = -(1,0) \Rightarrow \varphi = \pi$

Yönlü doğrular paralel ve zıt yönlüdürler. Eğer $\bar{\varphi} = 0$ ise, doğrular çakışıktır.

Tanım 1.2.12: Her $\vec{A}, \vec{B} \in$ **D**-Modül dual vektörlerinin *dış çarpımı*

$$\wedge : \mathbf{D}^3 \times \mathbf{D}^3 \rightarrow \mathbf{D}^3$$

şeklinde bir iç işlemdir ve

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon (\vec{a} \wedge \vec{\bar{b}} + \vec{\bar{a}} \wedge \vec{b})$$

olarak tanımlanır.

Teorem 1.2.5: Her $\vec{A}, \vec{B} \in$ **D**-Modül için,

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| \, . \, \|\vec{B}\| \sin \Phi \, \vec{N}$$

dır. Burada $\vec{N}$, $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ dual vektörlerine $\mathbf{R}^3$ de karşılık gelen doğruların ortak dikmesinin E. STUDY resmi olan bir dual vektördür.

Teorem 1.2.6: $\vec{A}$, $\vec{B}$ gibi iki has dual vektörün dış çarpımı sıfır ise bu dual vektörlerin eksenleri çakışıktır.

Tanım 1.2.13: $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in$ **D**-Modül has dual vektörler ve

$\lambda_i = c_i + \varepsilon \bar{c}_i \in$ **D**, $1 \leq i \leq 3$, olmak üzere

$$\lambda_1 \vec{A} + \lambda_2 \vec{B} + \lambda_3 \vec{C} = \vec{0} \Rightarrow \forall\ \lambda_i = 0$$

ise $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ has dual vektörleri *lineer bağımsızdır* denir.

Tanım 1.2.14: $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in$ **D** -Modül ve $\lambda_i = c_i + \varepsilon \bar{c}_i \in$ **D**; $c_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 3$ için,

$$\lambda_1 \vec{A} + \lambda_2 \vec{B} + \lambda_3 \vec{C} = \vec{0}$$

eşitliği en az bir $\lambda_i \neq 0$ için sağlanıyorsa, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ dual vektörleri *lineer bağımlıdır* denir.

Tanım 1.2.15: $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ birim dual vektörlerinin $\mathbf{R}^3$ deki temsil ettikleri yönlü doğrular bir noktada dik olarak kesişirlerse $\vec{A}_1, \vec{A}_2$ ve $\vec{A}_3$ birim dual vektörlerine *ortonormal dual vektörler* denir.

Tanım 1.2.16: **D**-Modül'ün bir S alt cümlesi aşağıdaki iki özelliğe sahipse **D**-Modül'ün bir *bazı* adını alır:

(i) : S lineer bağımsızdır.

(ii) : $S_p\{S\}$ = **D**-Modül'dür.

Yani $\forall\ \vec{A} \in$ **D**-Modül elemanı S deki sonlu sayıda elemanın bir lineer kombinezonudur.

Tanım 1.2.17: Elemanları dual sayılar olan bir A matrisine *dual matris* denir ve,

$$A = [A_{ij}]\,,\ A_{ij} = a_{ij} + \varepsilon \bar{a}_{ij}\,,\ a_{ij}, \bar{a}_{ij} \in \mathbf{R}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.18: $A \in \mathbf{D}_n^n$ (nxn tipi matris) için,

$$A \,.\, A^T = A^T \,.\, A = I_n$$

ise A dual matrisine *ortogonal dual matris* denir.

1.3. Lineer Işın Kompleksi

D-Modül'deki birim dual $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{\bar{x}}$ vektörünün $\mathbf{R}^3$ de bir yönlü doğru gösterdiği Teorem 1.2.4. de ifade edilmişti. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ birim reel vektörü $\vec{X}$ doğrusunun yönünü ve $\vec{\bar{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ de bir 0 noktasına göre $\vec{x}$ in vektörel momentini ifade etmekte idi. $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{\bar{x}}$ birim dual vektör için

$$\|\vec{X}\| = (1,0) \Leftrightarrow \|\vec{x}\| = 1,\ \langle \vec{x}, \vec{\bar{x}} \rangle = 0$$

olduğundan,

$$(1^\circ)\quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3 = 0 \end{cases}$$

koşulunu sağlar.

Eğer, 1° koşulundan başka bu altı Plücker doğru koordinatları arasında bir ikinci

$$(2^\circ)\ F(x_1, x_2, x_3; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 0$$

bağıntısı varsa bu halde X doğrusunun bağımsız parametre sayısı üç olur.

Tanım 1.3.1: R^3 de üç bağımsız parametreye bağlı (∞^3) sayıdaki X doğrularının cümlesine *ışın kompleksi* denir.

Tanım 1.3.2: $\vec{A}$ bir has dual vektör olmak üzere

$$<\vec{a}\,,\overset{\rightrightarrows}{x}> + <\overset{\rightrightarrows}{a}\,,\vec{x}> = 0$$

denklemini sağlayan $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon\overset{\rightrightarrows}{x}$ doğrularının cümlesine bir *lineer ışın kompleksi* denir.

X doğrusunun bağımsız üç reel parametresi u, v, w, ile gösterilirse $\vec{X}$ birim dual vektörü

$$\vec{X} = \vec{x}\,(u, v, w) + \varepsilon\overset{\rightrightarrows}{x}\,(u, v, w)$$

şeklinde u, v, w nın bir fonksiyonu olarak yazılabilir.

Tanım 1.3.3: $\vec{A}$ has dual vektörünün

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \vec{u} + \varepsilon\overset{\rightrightarrows}{u}$$

eksenine lineer *ışın kompleksinin ekseni* denir.

Tanım 1.3.4: $\vec{A}$ has dual vektörünün

$$k = \frac{<\vec{a}\,,\overset{\rightrightarrows}{a}>}{\|\vec{a}\|^2}$$

adımına lineer *ışın kompleksinin adımı* denir.

k için genellikle *adım, yükseliş* ve *parametre* adları kullanılmaktadır.

Tanım 1.3.5: k = 0 ise lineer komplekse *dejenere* veya *singüler lineer kompleks* denir.

Tanım 1.3.6: İki bağımsız parametreye bağlı (∞^2) sayıdaki X doğrularının cümlesine *ışın kongrüansı* denir.

Tanım 1.3.7: $\vec{A}$, $\vec{B}$ has dual vektörleri için

$$F \ldots \langle \vec{a}, \vec{\vec{x}} \rangle + \langle \vec{\vec{a}}, \vec{x} \rangle = 0$$
$$\Phi \ldots \langle \vec{b}, \vec{\vec{x}} \rangle + \langle \vec{\vec{b}}, \vec{x} \rangle = 0$$

denklemlerini sağlayan $\vec{X}$ doğrularının cümlesine *lineer ışın kongrüansı* denir.

Bağımsız parametrelere u ve v denirse $\vec{X}$ birim dual vektörü u ve v reel parametrelerinin

$$\vec{X} = \vec{x}(u, v) + \varepsilon \vec{\vec{x}}(u, v)$$

şeklinde bir fonksiyonu olarak yazılabilir.

F = 0 ve Φ = 0 iki lineer ışın kompleksi olduklarından lineer ışın kongrüansının (∞^2) sayıdaki $\vec{X}$ doğruları F = 0 ve Φ = 0 komplekslerinde ortak doğrulardır. Bu yüzden $\vec{X}$ doğruları

$$F + \vartheta\Phi = 0 \qquad (1.3.1)$$

lineer ışın kompleksi demetine de dahildirler. λ ve μ homogen parametreler olmak üzere $\vartheta = \frac{\mu}{\lambda}$ alınabilir. O zaman (1.3.1) lineer ışın kompleksi demeti

$$\langle \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \vec{\vec{x}} \rangle + \langle \lambda\vec{\vec{a}} + \mu\vec{\vec{b}}, \vec{x} \rangle = 0 \qquad (1.3.2)$$

olur. Bu halde her $\frac{\mu}{\lambda}$ değer çiftine ışın kongrüansını kapsayan bir ışın kompleksi karşılık gelir.

Her (1.3.2) kompleks demetinde ($\langle \vec{a}, \vec{\vec{a}} \rangle = 0 \Rightarrow k_1 = 0$, $\langle \vec{b}, \vec{\vec{b}} \rangle = 0 \Rightarrow k_2 = 0$) dejenere iki kompleks vardır. Bu dejenere komplekslerin eksenlerine ışın kongrüansının *kılavuz hatları* denir. Bu halde kongrüans, iki kılavuz hattını kesen doğruların bütününden oluşur. Bu oluşma şeklinden ötürü, kongrüansa *ışın ağı* adı da verilir.

(1.3.2) kompleks demetinin adımı

$$k = \frac{\langle \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\,,\, \lambda\vec{\bar{a}} + \mu\vec{\bar{b}} \rangle}{\left\| \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \right\|^2}$$

olduğundan kompleks demetinin dejenere kompleksleri için

$$\lambda^2 \langle \vec{a}\,,\, \vec{\bar{a}} \rangle + \lambda\,\mu(\langle \vec{a}\,,\, \vec{\bar{b}} \rangle + \langle \vec{\bar{a}}\,,\, \vec{b} \rangle) + \mu^2 \langle \vec{b}\,,\, \vec{\bar{b}} \rangle = 0 \qquad (1.3.3)$$

elde edilir. Bu denklem ise $\frac{\mu}{\lambda}$ ya göre karesel bir ifadedir.

(1.3.3) denkleminin diskriminantı

$$\Delta = \langle \vec{a}\,,\, \vec{\bar{a}} \rangle \langle \vec{b}\,,\, \vec{\bar{b}} \rangle - (\langle \vec{a}\,,\, \vec{\bar{b}} \rangle + \langle \vec{\bar{a}}\,,\, \vec{b} \rangle)^2$$

dir. Δ nın incelenmesi kılavuz hatlarının reel veya eşlenik imajiner olup olmadıklarını gösterir:

1. Hal: $\Delta > 0$ ise ışın ağına *eliptik ışın ağı* denir.

2. Hal: $\Delta < 0$ ise ışın ağına *hiperbolik ışın ağı* denir.

Bu iki halde ışın ağının kılavuz hatları daima aykırı doğrulardır. Çünkü kongrüansın dejenere komplekslerden oluştuğu düşünülürse bile, yani

$$\langle \vec{a}, \vec{\bar{a}} \rangle = 0 \ \text{ ve } \ \langle \vec{b}, \vec{\bar{b}} \rangle = 0$$

olsa bile

$$\Delta = -\left(\langle \vec{a}, \vec{\bar{b}} \rangle + \langle \vec{\bar{a}}, \vec{b} \rangle\right)^2 \neq 0$$

dır. Şu halde $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ kılavuz doğruları (1.2.3) kesişme koşulunu gerçeklemezler.

3. Hal: $\Delta = 0$ ise ışın ağına *parabolik ışın ağı* denir.

Bu halde kılavuz hatları hem çakışık hem de reeldir.

1.4. Regle Yüzeyler

$\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{\bar{x}} = X\left(x_1, x_2, x_3; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\right)$ doğrusunun $\left(x_1, x_2, x_3; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\right)$ normlanmış homogen olmayan altı Plücker doğru koordinatları arasında

$$1^{\circ}\text{-} \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 = 0 \end{cases}$$

bağıntılarından başka

$$2^{\circ}\text{-}\ F\left(x_1, x_2, x_3; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\right) = 0$$

$$3^{\circ}\text{-}\ \Phi\left(x_1, x_2, x_3; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\right) = 0$$

$$4^{\circ}\text{-}\ \Psi\left(x_1, x_2, x_3; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\right) = 0$$

bağıntılarıda varsa X doğrusunun bağımsız parametre sayısı bir tanedir.

Tanım 1.4.1: E. STUDY tekabülüne uyan ve bağımsız bir parametreye bağlı (∞^1) sayıdaki X doğrularının cümlesine *regle yüzey* veya *ışın yüzeyi* denir.

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ belli has dual vektörler olmak üzere,

$$F \ldots \langle\vec{a}, \vec{\bar{x}}\rangle + \langle\vec{\bar{a}}, \vec{x}\rangle = 0$$

$$\Phi \ldots \langle\vec{b}, \vec{\bar{x}}\rangle + \langle\vec{\bar{b}}, \vec{x}\rangle = 0$$

$$\Psi \ldots \langle\vec{c}, \vec{\bar{x}}\rangle + \langle\vec{\bar{c}}, \vec{x}\rangle = 0$$

şeklinde verilebilir. O zaman bir regle yüzey F=0, Φ=0 ve Ψ=0 ışın komplekslerinin üçünde de ortak olan (∞^1) doğrunun cümlesi olarak düşünülebilir.

Bir regle yüzey, bir t parametresine bağlı $\vec{X} = \vec{X}(t)$ birim dual vektörel fonksiyon olmak üzere

$$\vec{X} = \vec{x}(t) + \varepsilon\vec{\bar{x}}(t)$$

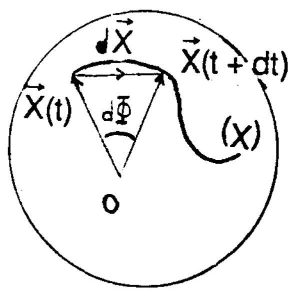
birim dual vektörüne

$$\|\vec{X}\| = \|\overrightarrow{OX}\| = (1, 0)$$

birim dual küresi üzerinde bir dual X noktası karşılık gelir. Biliniyor ki bu noktaya da $\mathbf{R}^3$ de bir X doğrusu karşılık gelir. t parametresi değiştikçe

$$\overrightarrow{OX} = \vec{X}(t) = \vec{x}(t) + \varepsilon\vec{\bar{x}}(t)$$

birim dual vektörü, birim dual küre üzerinde bir (X) dual eğrisi çizer (Şekil 1.4.1). Bu eğriye de $\mathbf{R}^3$ de bir regle yüzey karşılık gelir.



Şekil 1.4.1

(X) dual eğrisine regle yüzeyin *dual küresel resmi* denir. Birim dual küre üzerinde $\vec{X} = \vec{X}(t)$ dual eğrisinin

$$d\Phi = d\varphi + \varepsilon d\bar{\varphi}$$

dual yay elementi için

$$d\Phi^2 = \langle d\vec{X}, d\vec{X}\rangle = \langle \dot{\vec{X}}, \dot{\vec{X}}\rangle dt^2 \tag{1.4.1}$$

yazılabilir. Tanım 1.1.4'den de (1.4.1) ifadesi için

$$d\varphi^2 = \langle d\vec{x}, d\vec{x}\rangle \quad \text{ve} \quad d\varphi \,.\, d\bar{\varphi} = \langle d\vec{x}, d\vec{\bar{x}}\rangle$$

elde edilir. $d\Phi$ dual büyüklüğü bilindiği gibi $\vec{X}(t)$ ve $\vec{X}(t+dt)$ komşu birim dual vektörler arasındaki dual açı, yani bu iki birim dual vektörün birim dual küre üzerindeki uç noktalarının dual kısımlarına $\vec{X}(t)$ ve $\vec{X}(t+dt)$ birim dual vektörlerine regle yüzeyde karşılık gelen komşu iki anadoğru arasındaki açı ile bu komşu iki anadoğru arasındaki en kısa uzaklık karşılık gelir.

$$\langle d\vec{X}, d\vec{X}\rangle = \langle d\vec{x}, d\vec{x}\rangle + 2\varepsilon\langle d\vec{x}, d\vec{\bar{x}}\rangle$$

dual ifadesi, iç çarpım olması nedeni ile koordinat değişimlerine karşı değişmezdir. Bu nedenle

$$\langle d\vec{x}, d\vec{x}\rangle \quad \text{ve} \quad \langle d\vec{x}, d\vec{\bar{x}}\rangle$$

reel büyüklükleri de koordinat değişimlerine karşı değişmezdir. Dolayısıyla onların oranı regle yüzeyin en basit (yani en küçük mertebeden) diferensiyel değişmezi olur.

Tanım 1.4.2:

$$\frac{1}{d} = \frac{\langle d\vec{x}, d\vec{\bar{x}}\rangle}{\langle d\vec{x}, d\vec{x}\rangle} = \frac{d\varphi \,.\, d\bar{\varphi}}{d\varphi \,.\, d\varphi} = \frac{d\bar{\varphi}}{d\varphi}$$

ifadesindeki $\frac{1}{d}$ büyüklüğüne regle yüzeyin t parametresine ait olan $\vec{X}$ anadoğrusu boyunca *dağılma parametresi* veya dral'i denir.

Tanım 1.4.3: Komşu anadoğruları kesişen regle yüzeylere *torslar* veya *açılabilir regle yüzeyler* denir.

Torslar için dral'in sıfır olması bir karekteristiktir. Zira,

$$\frac{1}{d} = \frac{d\bar{\varphi}}{d\varphi} = 0 \Rightarrow d\bar{\varphi} = 0$$

dır. Bu ise $\vec{X}(t)$ ve $\vec{X}(t+dt)$ anadoğrularının kesişmesi demektir. Dral'in bu tanımı silindirler için geçerli değildir. Dral'i sıfır olmayan bir regle yüzeyde komşu anadoğrular aykırıdır, yani komşu iki anadoğru bir düzlem teşkil etmez.

Tanım 1.1.4: $\vec{X} = \vec{X}(t)$, $\left\|\vec{X}(t)\right\| = 1$, $t \in \mathbf{R}$ regle yüzeyinde $\vec{X}(t)$ ve $\vec{X}(t+dt)$ komşu anadoğruların ortak dikmesinin, $\vec{X}(t)$ anadoğrusu üzerindeki ayağına, *merkez noktası* veya *sitriksiyon noktası* denir. Bu noktaların geometrik yerine ise *boğaz çizgisi* veya *sitriksiyon çizgisi* denir.

Verilen bir regle yüzeyde, bütün anadoğruları kesen bir (C) eğrisi yüzeyin dayanak eğrisi olarak alınabilir.

Tanım 1.4.5: $\vec{X} = \vec{X}(t)$, $\left\|\vec{X}(t)\right\| = 1$, $t \in \mathbf{R}$ regle yüzeyinin bütün anadoğrularını dik kesen eğriye regle yüzeyin *ortogonal yörünge eğrisi* denir.

Buraya kadar ifade edilen tanım ve kavramlar (Hacısalihoğlu, 1983a) dan alınmıştır.

1.5. Çizgiler Uzayında 1-Parametreli Hareketler

Tanım 1.5.1: E^n, n-boyutlu Öklid uzayının izometrilerinden biri f olsun. E^n deki bir $\{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre f'nin matrisel ifadesi $A \in O(n)$ ve $C \in \mathbf{R}^n_1$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.5.1}$$

şeklindedir. f'ye E^n de bir *hareket* adı verilir.

Burada $O(n)$; nxn tipindeki ortogonal matrislerin cümlesi ve $\mathbf{R}^n_1$; nx1 tipindeki matrislerin cümlesidir.

$A \in O(n)$ olduğundan

$$\det A = \pm 1 \tag{1.5.2}$$

dir. Eğer det A=+1 ise f hareketine direkt hareket, det A=-1 ise karşıt hareket adı verilir.

Tanım 1.5.2: E^3 Öklid uzayında birer vektör alanı V_1, V_2, V_3 olsun. Eğer her $P \in E^3$ noktası için $\{V_1, V_2, V_3\}$ sistemi P noktasındaki $T_{E^3}(P)$ tanjant uzayının bir bazı ise bu vektör alanları üçlüsüne E^3 de *çatı alanı* denir.

E^3 Öklid uzayında her $P \in E^3$ için sabit doğal çatı alanı $E=\{E_1, E_2, E_3\}$ olsun. E^3 de diğer bir ortonormal çatı alanı $V=\{V_1, V_2, V_3\}$ olsun.

$P \in E^3$ için,

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \tag{1.5.3}$$

olarak alırsak, $A \in O(3)$ olmak üzere,

$$V=AE \tag{1.5.4}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.5.3: $T_{E^3}(P)$ tanjant uzayının dual uzayı (kotanjant uzayı), elemanları kovektörler olan $T^*_{E^3}(P) = \left\{ \Phi_p \mid \Phi_p : T_{E^3}(P) \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbf{R} \right\}$ olmak üzere, bir

$$\Phi : E^3 \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} \bigcup_{P \in E^3} T^*_{E^3}(P)$$

dönüşümüne E^3 üzerinde bir *1-form* denir.

E^3 Öklid uzayında bir çatı alanı $\{V_1, V_2, V_3\}$ olsun. Her $P \in E^3$ noktasındaki dV_i , $(1 \le i \le 3)$ diferensiyelleri $T_{E^3}(P)$ tanjant uzayına ait vektörler olduğundan $\left\{ \vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3 \right\}$ sistemi cinsinden ifade edilebilir. Buna göre, $\omega_{ij}(P) \in \mathbf{R}$, (i,j=1,2,3), olmak üzere (1.5.4) den diferensiyel alırsak, E sabit olduğundan,

$$dV = dAE$$

olur. Burada gerekli işlemler yapıldığında

$$\text{dersek} \quad \left.\begin{aligned} \Omega &= dAA^T \\ dV &= \Omega V \end{aligned}\right\} \tag{1.5.5}$$

olur.

Teorem 1.5.1: E^3 Öklid uzayında hareketli bir çatı alanı $\{V_1, V_2, V_3\}$ olsun. O zaman, her $P \in E^3$ için $dV = \Omega V$ dir ve burada Ω matrisi 3x3 tipinde bir anti-simetrik matristir. Bu matrisin bileşenleri birer 1-formdur.

E^3 Öklid uzayındaki 1-parametreli hareketlerde E^3 ün doğruları regle yüzeyler teorisi için önemlidir. Bu doğrular E^3 ün lineer nokta cümleleridir. Bu yüzden E^3 Öklid uzayını yalnızca doğrulardan meydana gelmiş bir uzay olarak düşünecek ve bunu belirtmek için de E^3 e *çizgiler uzayı* adını vereceğiz.

H ve H' sırasıyla,

$$\left\{ P ; \vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3 \right\}, \langle \vec{V}_i, \vec{V}_j \rangle = \delta_{ij}$$

hareketli sistemiyle ve

$$\left\{ 0 ; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}, \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

sabit sistemi ile meydana getirilen çizgiler uzayı olsunlar. Buna göre, H nın H' uzayına göre 1-parametreli hareketine kısaca uzay hareketi diyerek H/H' ile göstereceğiz.

Tanım 1.5.4: H/H' uzay hareketinin

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrisel ifadesinde dönmeye karşılık gelen $A \in O(3)$ ve ötelemeye karşılık gelen $C \in \mathbf{R}_1^3$ matrisleri,

$$A=A(t)\ ,\ C=C(t)$$

olacak şekilde bir tek reel t parametresinin diferensiyellenebilir fonksiyonları iseler H/H' uzay hareketine *bir parametreli uzay hareketi* denir.

Tanım 1.5.5: H/H' uzay hareketini belirleyen $A \in O(n)$ ve $C \in \mathbf{R}_1^n$ matrisleri her $t \in \mathbf{R}$ için,

$$A(t+2\pi) = A(t),$$
$$C(t+2\pi) = C(t)$$

olacak şekilde periyodik iseler H/H' uzay hareketine *kapalı hareket* adı verilir.

1.5. kısmına ait tanım ve kavramlar (Hacısalihoğlu, 1983 b) den alınmıştır.

1.6. K/K' Birim Dual Küresel Hareket

Aynı merkezli, hareketli K ve sabit K' birim dual kürelerini sırasıyla,

$$V = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix}, \quad <\vec{V}_i, \vec{V}_j> = \delta_{ij}, \quad \vec{V}_i = \vec{v}_i + \varepsilon \vec{\bar{v}}_i$$

ve

$$E - \begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{bmatrix}, \quad <\vec{E}_i, \vec{E}_j> = \delta_{ij}, \quad \vec{E}_i = \vec{e}_i + \varepsilon \vec{\bar{e}}_i$$

dual ortonormal sistemleriyle temsil edelim. Bu sistemler arasında,

$$A = \left[a_{ij}(t) + \varepsilon \bar{a}_{ij}(t)\right], \quad t \in \mathbf{R}\ , \quad 1 \le i, j \le 3$$

bir has dual ortogonal matris ($AA^T = A^TA = I$ ve det $A = +1$) olmak üzere,

$$V=AE \tag{1.6.1}$$

dönüşümü vardır. Eğer A matrisi t parametresine göre diferensiyellenebiliyorsa, bu dönüşüm, K dual küresinin K' dual küresine göre 1-parametreli dual küresel hareketini (dual dönme) tek olarak belirler. K/K' ile göstereceğimiz bu harekete,

$$A(t+T) = A(t), \text{ T periyot} \tag{1.6.2}$$

ise 1-parametreli dual küresel hareket denir.

(1.6.1) denklemlerinin t parametresine göre diferensiyeli alınırsa

$$\begin{bmatrix} d\vec{V}_1 \\ d\vec{V}_2 \\ d\vec{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix}, \quad \Omega_{ij} = -\Omega_{ji} \tag{1.6.3}$$

bulunur. Bu ifadeden elde edilen denklemlere 1-parametreli K/K' dual küresel hareketinin *türev denklemleri* veya E. CARTAN yapı denklemleri denir. Burada,

$$\Omega = dAA^T$$

ile belli olan $\Omega = [\,\Omega_{ij}\,]$ matrisinin $\Omega_{ij} = \omega_{ij} + \varepsilon\,\overline{\omega}_{ij}$ anti-simetrik elemanlarına da dual 1-formlar veya E. CARTAN formları denir.

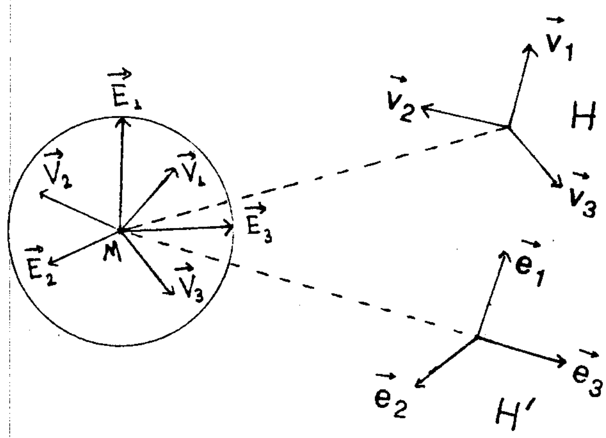
E. STUDY dönüşümünden dolayı, yukarıda verilen hareketli ve sabit dual ortonormal sistemlere, H ve H' çizgiler uzaylarında sırasıyla;

$$\left\{ 0\,; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \right\}, < \vec{v}_i, \vec{v}_j > = \delta_{ij}\,, \quad \vec{\overline{v}}_i = \overrightarrow{M0} \wedge \vec{v}_i$$

ve

$$\left\{ 0'\,; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right\}, < \vec{e}_i, \vec{e}_j > = \delta_{ij}\,, \quad \vec{\overline{e}}_i = \overrightarrow{M0'} \wedge \vec{e}_i$$

sistemleri karşılık gelirler. M dual kürelerin merkezidir (Şekil 1.6.1). Böylece, K küresinin K' sabit küresine göre 1-parametreli hareketine, çizgiler uzayında H uzayının H' uzayına göre 1-parametreli uzay hareketi karşılık gelir.



Şekil 1.6.1

K küresi üzerinde tespit edilmiş bir X dual noktasının K' ye göre hızı (sürüklenme hızı),

$$\vec{\Psi} = \Omega_{23}\vec{V}_1 + \Omega_{31}\vec{V}_2 + \Omega_{12}\vec{V}_3$$

olmak üzere,

$$d\vec{X} = \vec{\Psi} \wedge \vec{X}$$

ile bellidir.

Tanım 1.6.1: K/K' 1-parametreli birim dual küresel hareketinin dual 1-formları $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$, $(1 \leq i, j \leq 3)$ olmak üzere

$$\vec{\Psi} = \Omega_{23}\vec{V}_1 + \Omega_{31}\vec{V}_2 + \Omega_{12}\vec{V}_3$$

dual vektörüne hareketin ani *dual Pfaff vektörü* denir.

Tanım 1.6.2: K/K' hareketinde, bir t anında, hareketli kürede sabit kalan dual noktaya hareketin *dual pol noktası* denir ve P ile gösterilir. Ayrıca hareket esnasında pol noktasının K daki geometrik yerine (P)-hareketli *dual pol eğrisi*, K' deki geometrik yerine de (P')-sabit *dual pol eğrisi* denir.

Hareket esnasında, (P) eğrisinin (P') eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanmasına, bu eğrilere çizgiler uzayında sırasıyla karşılık gelen hareketli pol eksen yüzeyinin, sabit pol eksen yüzeyi üzerindeki bir kayma-yuvarlanma hareketi (yivlenme hareketi) karşılık gelir.

Eğer dual pol noktasının yer vektörünü $\vec{P} = \vec{p} + \varepsilon \vec{\bar{p}}$ ile gösterirsek, bu noktanın sürüklenme hızı

$$\begin{aligned} d\vec{P} &= \vec{\Psi} \wedge \vec{P} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

olur. Buradan $\vec{\Psi}$ ile $\vec{P}$ nin çakışık olduğu sonucuna varırız. O halde hareketin ani dual Pfaff vektörünü, $\Psi = \left\|\vec{\Psi}\right\|$ olmak üzere,

$$\vec{\Psi} = \Psi\vec{P}\ ,\ \Psi = \psi + \varepsilon\bar{\psi} \in \mathbf{D}$$

şeklinde yazabiliriz.

Ani dual Pfaff vektörü, diferensiyel geometrideki darboux vektörü ile aynı rolü oynamaktadır. Yani, K da sabit bir X dual noktası, hareketin bir t anında $\vec{\Psi} = \Psi\vec{P}$ ani dual Pfaff vektörü etrafında $\Psi = \left\|\vec{\Psi}\right\|$ dual açısal hızı ile bir dual dönme hareketi yapar. Bu dual açısal hızın, reel ve dual kısımları olan ψ ve $\bar{\psi}$ değerleri ise, H/H' uzay hareketinde, H' da tespit edilen bir X-doğrusunun, p-ekseni (ani dönme ekseni) etrafında sırasıyla, sonsuz küçük dönme ve sonsuz küçük kayma miktarlarını gösterir. Bu hareket, uzayın bir dönme ve bir ötelemesinden oluştuğuna göre ($\psi \neq 0$, $\bar{\psi} \neq 0$ halinde), çizgiler uzayının en genel bir hareketidir. O halde **D**-Modüldeki bir K/K' dual küresel hareketine, çizgiler uzayının en genel bir H/H' uzay hareketi karşılık gelir.

İRDELEME: 1-parametreli K/K' dual küresel hareketin dual açısal hızı $\Psi = \psi + \varepsilon \bar{\psi}$ olmak üzere, K/K' hareketine çizgiler uzayında;

1. $\psi \neq 0$, $\bar{\psi} \neq 0$ ise, ani Pfaff vektörüne göre bir dönme ve bir öteleme hareketi karşılık gelir.

2. $\psi \neq 0$, $\bar{\psi} = 0$ ise, ani Pfaff vektörü etrafında bir sırf dönme (küresel hareket) karşılık gelir.

3. $\psi = 0$, $\bar{\psi} \neq 0$ ise, ani Pfaff vektörü etrafında bir sırf kayma (doğrusal hareket) karşılık gelir.

Tanım 1.6.3: 1-parametreli K/K' dual küresel hareketinde $\vec{\Psi}$ ani dual Pfaff vektörü olmak üzere,

$$\vec{D} = \vec{d} + \varepsilon \vec{\bar{d}} = \oint \vec{\Psi}$$

ile tanımlanan $\vec{D}$ vektörüne hareketin *dual Steiner vektörü* denir.

Bu bölümde kullanılan tanım ve kavramlar (Hacısalihoğlu, 1983a) den alınmıştır.

BÖLÜM II

BİR KAPALI REGLE YÜZEYİN İNTEGRAL İNVARYANTLARI

2.1. Reel İntegral İnvaryantları

Bir H/H' kapalı uzay hareketinde, hareketli uzayı temsil eden $\{P; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ üçayaklısının bir,

$$\vec{r} = \vec{r}(t)\,,\ \vec{r}(t + 2\pi) = \vec{r}(t)\,,\ t \in \mathbf{R}$$

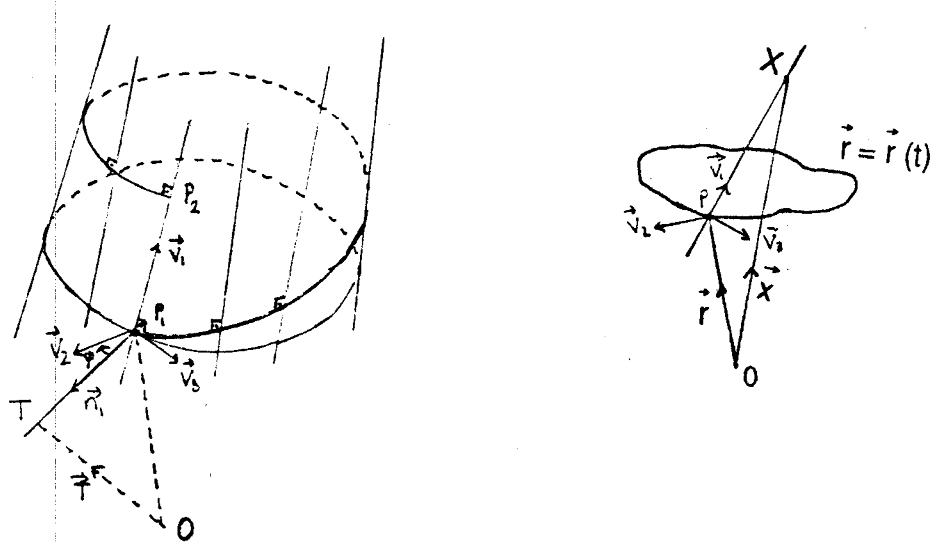
kapalı eğrisi üzerinde hareket ettiğini varsayarak, H uzayının tesbit edilmiş bir doğrusu, H' uzayında bir *kapalı regle yüzey* çizer. Örneğin, v_1-doğrusunun çizdiği kapalı regle yüzey üzerindeki bir noktanın yer vektörünü $\vec{x}$ ile gösterirsek, bu yüzeyin denklemini,

$$\vec{x}(t, v) = \vec{r}(t) + v\vec{v}_1(t)\,,\ t, v \in \mathbf{R} \qquad (2.1.1)$$

$$\vec{x}(t + 2\pi\,, v) = \vec{x}(t\,, v)$$

$$\|\vec{v}_1\| = 1$$

ile verebiliriz (Şekil 2.1.1). $\vec{v}_1$ vektörüne bu kapalı regle yüzeyin *üreteci* denir.



Şekil 2.1.1

Bu durumda v_1-doğrusu, kapalı regle yüzeyin anadoğrusunu, $\vec{r}=\vec{r}(t)$ kapalı eğrisi de dayanak eğrisini göstermektedir. v_1-doğrusunun çizdiği kapalı regle yüzeyi (v_1) ile gösterirsek, (v_1)-kapalı regle yüzeyinin bir P_1 noktasından geçen ortogonal yörüngesinin diferensiyel denklemi;

$$<d\vec{x}\,,\vec{v}_1>=0 \quad , \quad \|\vec{v}_1\|=1$$

dır. Burada (2.1.1) ifadesini kullanırsak

$$<d\vec{r}+dv\,.\,\vec{v}_1+v\,.\,d\vec{v}_1\,,\vec{v}_1>=0$$

buradan,

$$dv=-<d\vec{r}\,,\vec{v}_1>$$

bulunur. Bu formülün regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca eğrisel integrali alınırsa,

$$\oint <d\vec{r}\,,v_1>=-\oint dv$$

elde edilir.

Tanım 2.1.1: Bir $\vec{x}\,(t,v)=\vec{r}(t)+v.\vec{v}_1(t)$ kapalı regle yüzeyi için,

$$\mathcal{L}_{v_1}=\oint dv=-\oint <d\vec{r}\,,v_1> \tag{2.1.2}$$

büyüklüğüne bu kapalı regle yüzeyin *açılım uzunluğu* denir (Hacısalihoğlu, 1983a).

Bu tanım bize, v_1-anadoğrusunun, $\vec{r}=\vec{r}(t)$ kapalı eğrisine dayanarak kapalı regle yüzeyi çizdiğinde, kendi doğrultusunda $\mathcal{L}_{v_1}=\oint dv$ kadar ilerleyerek ilk konumu ile çakıştığını gösterir. Bu nedenle, v_1-anadoğrusunun bir P_1 noktasından başlayan ortogonal yörünge, bir periyot sonra aynı v_1-anadoğrusunu P_1 den farklı bir P_2 noktasında keser (Şekil 2.1.1). Ortogonal yörüngeler, çıkış noktasından bağımsız olduğundan, $\mathcal{L}_{v_1}$ açılım uzunluğu kapalı regle yüzeyler için bir integral invaryanttır.

Eğer kapalı regle yüzeyin ortogonal yörüngelerinin bir tam devri gözönüne alınırsa açılım uzunluğu hiç bir zaman regle yüzeyin sitriksiyon çizgisinin uzunluğunu aşamaz. Fakat eşitlik hali mümkündür. Eğer regle yüzeyi kapalı ve açılabilir farzeder; dayanak eğrisinide sitriksiyon çizgisi olarak alırsak, o zaman, sitriksiyon çizgisinin yay uzunluğu, açılım uzunluğuna eşittir. Özel olarak, açılabilir kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu sıfır ise sitriksiyon çizgisi bir nokta ve dolayısıyle regle yüzey bir koni olur.

Şimdi (v_1)-kapalı regle yüzeyi için, ikinci bir integral invaryantı olan açılım açısını tanımlayalım.

Tanım 2.1.2: $(v_2\,, v_3)$-düzleminde bir birim vektörü,

$$\vec{n}_1 = \cos\varphi \vec{v}_2 + \sin\varphi \vec{v}_3$$

olarak seçelim. n_1-doğrusu, kapalı hareket esnasında yüzeyin P_1 noktasından geçen ortogonal yörüngesi boyunca bir tors (açılabilir yüzey) çizsin. Yani torsun denklemi,

$$\vec{T}(t, w) = \vec{x}(t) + w\vec{n}_1(t)\ ,\ w, t \in \mathbf{R}$$

olsun (Şekil 2.2.1). Ayrıca bu torsun dayanak eğrisi $\vec{x}(t)$ için ortogonal yörünge olma şartı;

$$\langle d\vec{x}\,, \vec{v}_1\rangle = 0$$

sağlansın. n_1-doğrusu bu koşulları sağlamak üzere kapalı hareketi esnasında, hareketin bir fonksiyonu olarak değişen φ açısının bir periyotluk süredeki toplam değişme miktarına (v_1)-kapalı regle yüzeyinin *açılım açısı* denir ve,

$$\lambda_{v_1} = \oint d\varphi$$

eğrisel integrali ile belirtilir (Hacısalihoğlu, 1983a).

Bu tanım da, eğrisel integral; kapalı regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca alındığından, açılım açısı da regle yüzeyler için açılım uzunluğu gibi bir integral invaryanttır.

2.2. Dual Açılım Açısı

K/K' dual küresel kapalı hareketinde, E.STUDY dönüşümüne göre, hareketli sisteme sıkı surette bağlı bir X dual noktasının çizdiği dual küresel kapalı eğriye, çizgiler uzayında bir kapalı regle yüzey karşılık gelir. Bu dual noktanın yer vektörü $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$ olmak üzere kapalı regle yüzeyin dual vektörel denklemi,

$$\vec{X} = \vec{X}(t) \, , \left\|\vec{X}(t)\right\| = 1 \, , t \in \mathbb{R}$$

dir.

Bu tanım bize, çizgiler uzayındaki kapalı regle yüzeyleri, bu uzayın daha geneli olan **D**-Modülde inceleme imkanı vermektedir. Ayrıca bu metod, birim dual küre üzerinde bulunan sonuçlar E.STUDY dönüşümü ile derhal çizgiler uzayına aktarılabildiği için, daha özlü bir yol benimsenmiştir.

K/K' kapalı hareket esnasında $(V_1 \, , V_2 \, , V_3)$ hareketli sisteminin birinci ekseni ile çizilen, bir diferensiyellenebilir eğri, H/H' kapalı hareket esnasında $(v_1 \, , v_2 \, , v_3)$ hareketli sisteminin birinci ekseni ile oluşturulan v_1-kapalı regle yüzeye karşılık gelir.

Tanım 2.2.1: K/K' kapalı dual küresel hareketinde, hareketli sistemin birinci ekseninin çizdiği kapalı regle yüzey $\vec{V}_1 = \vec{V}_1(t)$, $t \in$ **R** olsun. Ayrıca $(V_2 \, , V_3)$ -dual düzleminde $\vec{V}_2$ ile $\Phi(t) = \varphi(t) + \varepsilon \bar{\varphi}(t)$ dual açısını yapan,

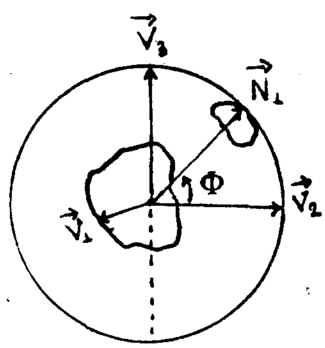
$$\vec{N}_1 = \cos \Phi \vec{V}_2 + \sin \Phi \vec{V}_3$$

birim dual vektörünü ele alalım. Öyleki, K/K' hareketinde, hareketli kürenin $\vec{V}_1$ birim dual vektörü $\vec{V}_1 = \vec{V}_1(t)$ kapalı regle yüzeyini çizerken, $\vec{N}_1$ birim dual vektörüne karşılık gelen doğru da bu kapalı regle yüzeyin ortogonal yörüngesi boyunca bir tors (açılabilir yüzey) çizsin. Bu taktirde bir periyotluk kapalı dual küresel harekette $\Phi(t) = \varphi(t) + \varepsilon\bar{\varphi}(t)$ açısının toplam değişme miktarına $\vec{V}_1 = \vec{V}_1(t)$ kapalı regle yüzeyinin *dual açılım açısı* diyelim. O halde bu yüzeyin dual açılım açısı

$\wedge_{V_1}$ ile gösterilirse,

$$\wedge_{V_1} = \oint d\Phi$$

dır. Burada integral, $\vec{V}_1 = \vec{V}_1(t)$ kapalı eğrisi üzerinden alınan bir dual eğrisel integraldir (Şekil 2.2.1), (Gürsoy, 1990a).



Şekil 2.2.1.

Tanım 2.2.1. de verilen Φ açısının $d\Phi$ diferensiyel değişimini, hareketin 1-formları cinsinden şöyle hesaplayabiliriz:

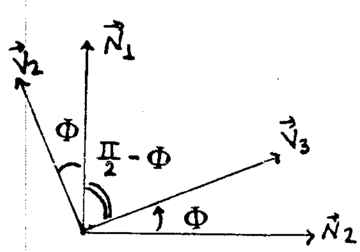
$\vec{N}_1$ birim dual vektörü üzerinde kurulan dual ortonormal,

$$N = \begin{bmatrix} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \\ \vec{N}_3 \end{bmatrix}$$

sistemi ile hareketli,

$$V = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix}$$

ortonormal sistemlerini göz önüne alalım. $\vec{V}_1 = \vec{N}_3$ kabulü ile,



$$< \vec{N}_2, \vec{V}_3 > = \cos\Phi$$

$$< \vec{N}_1, \vec{V}_3 > = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right) = \sin\Phi$$

$$< \vec{N}_1, \vec{V}_2 > = \cos\Phi$$

$$< \vec{N}_2, \vec{V}_2 > = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \Phi\right) = -\sin\Phi$$

ifadelerinin kullanımıyla bu iki ortogonal sistem arasındaki has dual ortogonal matris,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\Phi & -\sin\Phi & 0 \\ \sin\Phi & \cos\Phi & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere V ile N arasında,

$$V = BN$$

dönüşümü vardır. Buradan t parametresine göre diferensiyel alırsak V sistemine göre hareketin denklemi olarak,

$$dV = dBB^T V$$

buluruz. dBB^T matrisi hesaplanırsa;

$$dBB^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -d\Phi\sin\Phi & -d\Phi\cos\Phi & 0 \\ d\Phi\cos\Phi & -d\Phi\sin\Phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cos\Phi & \sin\Phi \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Phi \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d\Phi \\ 0 & d\Phi & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Bu sonuç $dV = dBB^T V$ olarak ifade edilen türev denklemlerinde yerine konursa,

$$d\vec{V}_2 = -d\Phi\vec{V}_3 \text{ ve } d\vec{V}_3 = d\Phi\vec{V}_2$$

veya

$$d\Phi = -\langle d\vec{V}_2, \vec{V}_3\rangle = \langle \vec{V}_2, d\vec{V}_3\rangle \qquad (2.2.1)$$

bulunur. $dV = \Omega V$ türev denklemleri, yani;

$$d\vec{V}_i = \sum_{j=1}^{3} \Omega_{ij}\vec{V}_j, \ (i = 1, 2, 3),$$

dikkate alınırsa,

$$d\vec{V}_2 = \Omega_{21}\vec{V}_1 + \Omega_{23}\vec{V}_3$$

değerini yerine koyarsak,

$$d\Phi = -\langle \Omega_{21}\vec{V}_1 + \Omega_{23}\vec{V}_3, \vec{V}_3\rangle$$

$$= -\Omega_{23}$$

bulunmuş olur.

Teorem 2.2.1: Bir 1-parametreli K/K' birim dual küresel hareketinden hareketli,

$$V = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix}$$

sistemine sıkı suretle bağlı bir $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{\bar{x}}$ birim dual vektörünün çizdiği kapalı regle yüzeyin dual açılım açısını Λ_X ile gösterirsek,

$$\Lambda_X = - <\vec{D}, \vec{X}>$$

dir. Burada $\vec{D} = \vec{d} + \varepsilon\vec{\bar{d}}$, dual küresel hareketin *dual Steiner vektörüdür* (Gürsoy, 1979).

İspat: $\vec{X} = \vec{X}_1$ alarak, bu birim dual vektör üzerinde kurulan dual ortonormal sağ sistemimizi,

$$X = \begin{bmatrix} \vec{X}_1 \\ \vec{X}_2 \\ \vec{X}_3 \end{bmatrix}$$

ile gösterelim.Böylece $\vec{X} = \vec{X}(t)$, $t \in \mathbf{R}$, (veya $\vec{X}_1 = \vec{X}(t)$) kapalı regle yüzeyimizin dual açılım açısını (2.2.1) den,

$$\Lambda_X = \Lambda_{X_1} = - < d\vec{X}_2, \vec{X}_3 >$$

şeklinde ifade edebiliriz. Ayrıca $C = [\, C_{ij} \,]$, $1 \leq i,j \leq 3$ matrisi bir dual ortonormal matris olmak üzere,

$$X = CV$$

dönüşümü yazılabilir. Diğer taraftan, bir vektör uzayında ortogonal baz dönüşümlerine karşılık gelen, bu uzayın dual uzayındaki dual baz dönüşümleri ile ilgili bir teorem **D**-Modül için de geçerli olacağından,

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{C} & X \\ \Omega\downarrow & & \downarrow\overline{\Omega} \\ dV & \xleftarrow{C^T} & dX \end{array}$$

diyagramı değişimlidir. Yani,

$$\overline{\Omega} = (C^T)^T \Omega C^T$$

veya

$$= C\,\Omega\,C^T$$

dir. Burada $\Omega = [\Omega_{ij}]$ ve $\overline{\Omega} = [\overline{\Omega}_{ij}]$, $1 \leq i$, $j \leq 3$ matrisleri, sırasiyle, V ve X sistemlerinin E sabit sistemine göre hareketini belirleyen anti-simetrik matrislerdir.

Şimdi yukarıdaki diyagrama göre,

$$d\vec{X}_2 = \sum_{i=1}^{3} (C\,\Omega\,C^T)_{2i}\vec{X}_i$$

veya

$$\begin{aligned} d\vec{X}_2 = & [C_{11}(C_{22}\Omega_{21} + C_{23}\Omega_{31}) + C_{12}(C_{21}\Omega_{12} + C_{23}\Omega_{32}) \\ & + C_{13}(C_{21}\Omega_{13} + C_{22}\Omega_{23})]\vec{X}_1 + [C_{21}(C_{22}\Omega_{21} + C_{23}\Omega_{31}) \\ & + C_{22}(C_{21}\Omega_{12} + C_{23}\Omega_{32}) + C_{23}(C_{21}\Omega_{13} + C_{22}\Omega_{23})]\vec{X}_2 \\ & + [C_{31}(C_{22}\Omega_{21} + C_{23}\Omega_{31}) + C_{32}(C_{21}\Omega_{12} + C_{23}\Omega_{32}) \\ & + C_{33}(C_{21}\Omega_{13} + C_{22}\Omega_{23})]\vec{X}_3 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$<d\vec{X}_2, \vec{X}_3> = (C_{31}C_{22} - C_{32}C_{21})\,\Omega_{21}$$
$$+ (C_{33}C_{22} - C_{32}C_{23})\,\Omega_{23}$$
$$+ (C_{31}C_{23} - C_{33}C_{21})\,\Omega_{31}$$

olur. Parantezli ifadeler sırasiyle, $-C_{13}$, C_{11} , C_{12} elemanlarının kofaktörleri-dirler. $C = [\, C_{ij} \,]$ matrisi has ortogonal olduğu için bunlardan biri diğerinin yerine yazılabilir.

Bu takdirde dual açılım açısı için,

$$\Lambda_X = -\oint <d\vec{X}_2, \vec{X}_3>$$

$$= -\oint (C_{13}\Omega_{12} + C_{11}\Omega_{23} + C_{12}\Omega_{31}) \tag{2.2.2}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\vec{D} = \vec{V}_1 \oint \Omega_{23} + \vec{V}_2 \oint \Omega_{31} + \vec{V}_3 \oint \Omega_{12}$$

dual Steiner vektörü ile,

$$\vec{X} = \vec{X}_1 = C_{11}\vec{V}_1 + C_{12}\vec{V}_2 + C_{13}\vec{V}_3$$

vektörünü iç çarparsak,

$$-<\vec{D}, \vec{X}> = --\oint \left(C_{11}\Omega_{23} + C_{12}\Omega_{21} + C_{13}\Omega_{12} \right) \tag{2.2.3}$$

bulunur. Böylece $\vec{X} = \vec{X}(t)$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısının (2.2.2) ve (2.2.3) den,

$$\Lambda_X = -<\vec{D}, \vec{X}> \tag{2.2.4}$$

olduğu gösterilmiş olur.

Gerçekten,

$$\vec{D}=\vec{d}+\varepsilon\vec{\bar{d}}=\oint\vec{\Psi}\ ,\ \vec{\Psi}=\Omega_{23}\vec{V}_1+\Omega_{31}\vec{V}_2+\Omega_{12}\vec{V}_3$$

olduğunu göz önüne alırsak, Teorem 2.2.1 den

$$\Lambda_{V_1}=-<\vec{D},\vec{V}_1> \tag{2.2.5}$$

elde edilir.

Eğer (2.2.5) ifadesini reel ve dual kısımlara ayırırsak, o zaman

$$\Lambda_{V_1}=-<\vec{d}+\varepsilon\vec{\bar{d}},\vec{v}_1+\varepsilon\vec{\bar{v}}_1>$$

$$=-<\vec{d},\vec{v}_1>-\varepsilon\left(<\vec{\bar{d}},\vec{v}_1>+<\vec{d},\vec{\bar{v}}_1>\right) \tag{2.2.6}$$

bulunur. (2.2.6) nın reel kısmı (v_1)-kapalı regle yüzeyinin reel açılım açısıdır, yani

$$\lambda_{v_1}=-<\vec{d},\vec{v}_1>$$

dır. Diğer taraftan, K üzerinde sabit bir noktanın dual diferensiyel hızı

$$d\vec{V}_1=\vec{\Psi}\wedge\vec{V}_1$$

ile elde edilir.

$$d\vec{v}_1+\varepsilon d\vec{\bar{v}}_1=\left(\vec{\psi}+\varepsilon\vec{\bar{\psi}}\right)\wedge\left(\vec{v}_1+\varepsilon\vec{\bar{v}}_1\right)$$

olup, reel ve dual kısımlara ayırırsak,

$$d\vec{v}_1=\vec{\psi}\wedge\vec{v}_1$$

$$d\vec{\bar{v}}_1=\vec{\bar{\psi}}\wedge\vec{v}_1+\vec{\psi}\wedge\vec{\bar{v}}_1 \tag{2.2.7}$$

dır. Burada $\vec{V}_1=\vec{v}_1+\varepsilon\vec{\bar{v}}_1$ birim dual vektörü için, $\vec{v}_1$ in vektörel momentini

$$\vec{\bar{v}}_1 = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{v}_1 = \vec{r} \wedge \vec{v}_1$$

yazabiliriz.

Bir X noktasının diferensiyel hızı $d\vec{X}_1 = \vec{\Psi} \wedge \vec{X}$ dır. Burada $\vec{\Psi} = \vec{\psi} + \varepsilon \vec{\bar{\psi}}$ dual Pfaff vektörü olup, $\vec{\psi}$, H/H' hareketinde ani dönmeye $\vec{\bar{\psi}}$, H/H' hareketinde ani ötelemeye karşılık gelmektedir. K/K' hareketinde sabit ve hareketli kürelerin merkezleri için,

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} \tag{2.2.8}$$

eşitliğini gözönüne alırsak

$$d\vec{r} = \vec{\bar{\psi}} + \vec{\psi} \wedge \vec{r} \tag{2.2.9}$$

dır (Hacısalihoğlu, 1972).

Eğer kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğunun (2.1.2) ifadesinde (2.2.9) eşitliği kullanılırsa yani;

$$\mathcal{L}_{v_1} = \oint \langle d\vec{r}, \vec{v}_1 \rangle$$

$$= \oint \langle \vec{\bar{\psi}} + \vec{\psi} \wedge \vec{r}, \vec{v}_1 \rangle$$

veya

$$\mathcal{L}_{v_1} = \oint \langle \vec{\bar{\psi}}, \vec{v}_1 \rangle + \oint \langle \vec{\psi}, \vec{r} \wedge \vec{v}_1 \rangle$$

yazılabilir.

Burada, H da v_1 sabit doğrusunun v_i , $\bar{v}_i$ (i=1,2,3) normlanmış Plücker doğru koordinatları, H/H' hareketinden bağımsızdır. Son ifade,

$$\mathcal{L}_{v_1} = \langle \oint \vec{\bar{\psi}}, \vec{v}_1 \rangle + \langle \oint \vec{\psi}, \vec{\bar{v}}_1 \rangle$$

olur veya $\vec{D} = \oint \vec{\Psi}$ dan (v_1)-kapalı regle yüzeyinin bir integral invaryantı olan açılım uzunluğu,

$$\mathcal{L}_{v_1} = <\vec{\bar{d}}, \vec{v}_1> + <\vec{d}, \vec{\bar{v}}_1>$$

buluruz. Kapalı regle yüzeyin açılım açısı ve açılım uzunluğunun bulunan bu değerleri Λ_{V_1} dual açılım açısının (2.2.3) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$\Lambda_{V_1} = \lambda_{v_1} - \varepsilon \mathcal{L}_{v_1} \tag{2.2.10}$$

sonucunu elde ederiz. Burada, $\mathcal{L}_{v_1}$ ve λ_{v_1}, (v_1)-kapalı regle yüzeyinin reel integral invaryantları olduğundan, Λ_{V_1} dual açılım açısı (v_1)-kapalı regle yüzeyinin dual integral invaryanttır.

Böylece aşağıdaki iki önemli teoremi verebiliriz.

Teorem 2.2.2: D-Modülde bir $\vec{X} = \vec{X}(t)$, $t \in \mathbf{R}$ kapalı regle yüzeyinin açılım açısı, bu yüzeyin bir dual integral invaryantıdır (Gürsoy, 1990a).

Teorem 2.2.3: D-Modülde bir $\vec{X} = \vec{X}(t)$, $\left\|\vec{X}(t)\right\| = 1$, $t \in \mathbf{R}$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısını, bu yüzeyin reel integral invaryantları cinsinden,

$$\Lambda_X = \lambda_x - \varepsilon \mathcal{L}_x$$

şeklinde ifade edebiliriz. $\mathcal{L}_x$ ve λ_x reel sayıları bu yüzeyin, sırasıyla, açılım uzunluğu ve açılım açısıdır (Gürsoy, 1990a).

Diğer taraftan, $V_1(t)$, K/K' kapalı hareket esnasında K üzerinde bir V_1 keyfi sabit dual noktasının K' üzerinde dual kapalı yörüngesi olsun. Dual küresel kapalı eğrinin çevrelediği dual küresel alan F_{V_1} olsun. Dual küresel alan,

$$F_{V_1} = 2\pi(1 - n) - <\vec{D}, \vec{V}_1>$$

şeklinde verilir (Hacısalihoğlu, 1972). Burada $\vec{D}$ dual Steiner vektörü ve n, (P) pol eğrisinin V_1 noktasındaki devir sayısıdır.

$<\vec{D}, \vec{V}_1>$ yerine Λ_{V_1} yazarsak

$$F_{V_1} = 2\pi(1-n) - (-\Lambda_{V_1})$$

$$F_{V_1} = 2\pi(1-n) + \Lambda_{V_1}$$

olur. Burada $\Lambda_{V_1} = \lambda_{V_1} - \varepsilon \mathcal{L}_{V_1}$ değerini koyarsak,

$$F_{V_1} = 2\pi(1-n) + \lambda_{V_1} - \varepsilon \mathcal{L}_{V_1}$$

ifadesini elde ederiz. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.2.4: Bir birim dual küresel kapalı $\vec{X} = \vec{X}(t)$ eğrisinin çevrelediği küresel alan, bu kapalı eğrinin E. STUDY resmi olan kapalı regle yüzeyin açılım açısı ve açılım uzunluğu cinsinden,

$$F_X = 2\pi(1-n) + \left(\lambda_X - \varepsilon \mathcal{L}_X\right)$$

şeklinde ifade edilebilir (Gürsoy, 1979).

1-parametreli K/K' dual küresel kapalı hareketinde, hareketli dual ortonormal sistemini özel olarak,

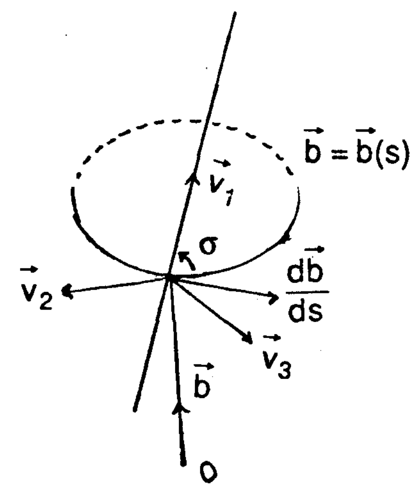
$$\vec{V}_1 = \vec{V}_1$$

$$\vec{V}_2 = \frac{\vec{V}'_1}{\left\|\vec{V}'_1\right\|}$$

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

şeklinde seçebiliriz. Bu harekette, $\vec{V}_1$ birim dual vektörünün küre üzerine çizdiği, $t \in \mathbf{R}$ parametresine göre diferensiyellenebilir kapalı eğriye, çizgiler uzayında v_1-yönlü doğrusunun çizdiği (v_1)-kapalı regle yüzeyi karşılık gelir. Diğer taraftan $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ birim dual vektörlerinin, çizgiler uzayındaki E.

STUDY resmi olan $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$-yönlü doğruları ($v_1$)-kapalı regle yüzeyinin sitriksiyon (merkez) noktasında kesişirler. Öyle ki, v_2, v_3 -yönlü doğruları kapalı regle yüzeyin sitriksiyon noktasındaki sırasıyla, normal ve teğet doğrultularıdır (Şekil 2.2.2).



Şekil 2.2.2

Yukarıda tanımlanan hareketli $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ dual ortonormal sistemine, çizgiler uzayında karşılık gelen hareketli $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ortonormal sisteminin türev denklemleri, $s \in \mathbf{R}$ parametresi (v_1)-kapalı regle yüzeyinin sitriksiyon çizgisinin yay parametresi olmak üzere,

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{K} & 0 \\ -\mathcal{K} & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{bmatrix} \tag{2.2.11}$$

ile verilebilir. Diğer taraftan $\vec{b} = \vec{b}(s)$ ile verilen sitriksiyon çizgisinin teğeti ile $\vec{v}_1$ arasındaki açı σ olmak üzere,

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \cos\sigma\,\vec{v}_1 + \sin\sigma\,\vec{v}_3$$

yazılabilir. Bu denklemler, K/K' 1-parametreli dual küresel harekete, çizgiler uzayında karşılık gelen H/H' hareketini tek türlü olarak belirtirler. Bu denklemlerle karşımıza çıkan $\mathcal{K}, \tau, \sigma$ büyüklükleri, (v_1)-kapalı regle yüzeyinin bir invaryant sistemidir. Sırasıyla, kapalı regle yüzeyin doğal eğriliği, doğal burulması ve sitriksiyonudur. Eğer $-\frac{\pi}{2} \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}$ alırsak, kapalı regle yüzeyi parametrenin artış yönünde yönlendirmiş oluruz.

σ'nın sıfıra yaklaşımı halinde, (v_1)-kapalı regle yüzeyinin sitriksiyon çizgisi *sırt eğrisine* dönüşmüş olur ki, bu da regle yüzeyin bir teğetler torsu (açılabilir bir yüzey) olmasını karekterize eder. O halde, $\sigma \to 0$ halinde $\mathcal{K}$ ve τ büyüklükleri bir uzay eğrisi (Sırt eğrisi veya sitriksiyon çizgisi) nin eğriliği ve burulması olmaktadır. Bu ifadeden, kapalı regle yüzeylerin doğal geometrisinden, özel bir hal olarak, kapalı uzay eğrilerinin geometrisinin incelenebileceği sonucu çıkar.

Şimdi (v_1) -kapalı regle yüzeyinin, açılım uzunluğu ve açılım açısı tanımlarını ve (2.2.11) formüllerini gözönüne alırsak,

$$\mathcal{L}_{v_1} = \oint dv = -\oint <d\vec{r}, \vec{v}_1>$$

$$\mathcal{L}_{v_1} = \oint <d\vec{b}, \vec{v}_1> ds$$

$$\mathcal{L}_{v_1} = \oint \cos\sigma \, ds$$

ve

$$\lambda_{v_1} = \oint d\varphi = -\oint <d\vec{v}_2, \vec{v}_3>$$

$$\lambda_{v_1} = -\oint <\mathcal{K}\vec{v}_1 + \tau\vec{v}_3, \vec{v}_3> ds$$

$$\lambda_{v_1} = -\oint \tau ds$$

bulunur. Böylece $\vec{V}_1 = \vec{V}_1(s)$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısını,

$$\Lambda_{v_1} = -\oint \tau ds - \varepsilon\oint \cos\sigma \, ds$$

olarak buluruz (Gürsoy, 1990a). Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.2.5: Kapalı regle yüzeyin toplam doğal torsiyonu, $\oint \tau ds$ ve sitriksiyon çizgisinin çizilme hızının anadoğru üzerindeki toplam izdüşümü $\oint \cos\sigma ds$ olmak üzere (v_1)-kapalı regle yüzeyin dual açılım açısı doğal burulma ve sitriksiyon cinsinden,

$$\Lambda_{V_1} = -\oint \tau ds - \varepsilon \oint \cos\sigma ds$$

şeklinde ifade edilebilir (Hacısalihoğlu, 1983a).

BÖLÜM III

BİR KAPALI REGLE YÜZEYİN İNTEGRAL İNVARYANTLARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR

3.1. İntegral İnvaryantları ve Aralarındaki Bağıntılar

Bir ışın kongrüansı, $\vec{X}$ birim dual vektörü u ve v reel parametrelerinin

$$\vec{X} = \vec{x}(u, v) + \varepsilon \vec{\bar{x}}(u, v)$$

şeklinde bir vektörel fonksiyonu olarak yazılabilir. Kongrüansın bir kapalı regle yüzeyini

$$\vec{X} = \vec{X}(u,v), \quad u = u(t), \quad v = v(t), \; X^2 = 1, \; t \in \mathbf{R}$$

olarak seçebiliriz.

$V_1(t) = X(t)$, $t \in \mathbf{R}$ alalım, o zaman

$$\vec{V}_1(t) = \vec{X}(t), \; \vec{V}_2 = \frac{\vec{V}'_1}{\|\vec{V}'_1\|}, \; \vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \tag{3.1.1}$$

birim dual vektörlerinin E.STUDY resmi olan $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ - yönlü doğruları (v_1)-kapalı regle yüzeyinin sitriksiyon (merkez) noktasında kesişirler ve bu vektörler (1.6.3) denklemlerini sağlarlar. Biz birde (1.6.3) denklemlerine $\omega_{12} \neq 0$ şartını ilave edersek, $v_1(t) = x(t)$ kapalı regle yüzeyi silindir veya koni olamaz. Çünkü,

$$\frac{1}{d} = \frac{d\bar{\varphi}}{d\varphi} = \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{\bar{\omega}_{12}}{\omega_{12}}$$

bir kapalı regle yüzeyin dral'idir. $\omega_{12} = 0$ olması halinde regle yüzeyi silindir veya koni tanımlamaktadır.

$ds = \omega_{12}$ (t) dt değerini (1.6.3) de yerine koyarsak

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix}\vec{V}_1\\ \vec{V}_2\\ \vec{V}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & K & 0\\ -K & 0 & T\\ 0 & -T & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{V}_1\\ \vec{V}_2\\ \vec{V}_3\end{bmatrix} \tag{3.1.2}$$

buluruz, burada $K = k + \varepsilon\bar{k}$ ve $T = t + \varepsilon\bar{t}$ dir. (1.6.3) ve (3.1.2) den

$$\frac{d\vec{V}_2}{dt} = -\Omega_{12}\vec{V}_1 + \Omega_{23}\vec{V}_3 \quad \text{ve} \quad \frac{d\vec{V}_2}{ds} = -K\vec{V}_1 + T\vec{V}_3$$

dır. Buna göre;

$$\Omega_{23}\,(t)\,dt = Tds$$

$$\Omega_{23}\,(t)\,dt = T\,.\,\omega_{12}\,(t)\,dt$$

olur, buradan

$$T = \frac{\Omega_{23}(t)}{\omega_{12}(t)}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\frac{d\vec{V}_1}{dt} = \Omega_{12}\vec{V}_2 + \Omega_{13}\vec{V}_3 \quad \text{ve} \quad \frac{d\vec{V}_1}{ds} = K\vec{V}_2$$

olduğundan

$$Kds = \Omega_{12}\,(t)\,dt$$

$$K\omega_{12}\,(t)\,dt = \Omega_{12}\,(t)\,dt$$

olur, buradan

$$K = \frac{\Omega_{12}(t)}{\omega_{12}(t)}$$

bulunur. Bölme yapılırsa

$$K = \frac{\omega_{12}(t) + \varepsilon\,\bar{\omega}_{12}(t)}{\omega_{12}(t)} = 1 + \varepsilon\frac{\bar{\omega}_{12}(t)}{\omega_{12}(t)}$$

elde edilir. O halde $K = k + \varepsilon\bar{k} = 1 + \varepsilon\frac{\bar{\omega}_{12}}{\omega_{12}}$, $T = \Omega_{23}/\omega_{12}(t)$ dir. Burada $\bar{k} = \frac{\bar{\omega}_{12}}{\omega_{12}}$

$\omega_{12} \neq 0$ olup, bu ise (v_1)-kapalı regle yüzeyin dağılma parametresidir.

$ds = \omega_{12}\, dt$ ve $\bar{k} = \dfrac{\bar{\omega}_{12}}{\omega_{12}}$ olduğundan, $\bar{\omega}_{12} = k\,.\,\omega_{12}$ olur. $d\bar{s} = \bar{\omega}_{12} dt$ olduğundan, $d\bar{s} = \bar{k} ds$ bulunur. $dS = ds + \varepsilon d\bar{s} = (1 + \varepsilon \bar{k})\, ds$ dual yay uzunluğu parametresi olarak alınır ve $d\bar{s} = \bar{k} ds$ nin integrali hesaplanırsa

$$\bar{s} = \int_0^s \bar{k} ds$$

yazabiliriz. Bu sebepten $\bar{s}$, s reel parametresine bağlıdır. Böylece $v_1(s)$-kapalı regle yüzeyi $S = s + \varepsilon \bar{s}$ dual yay parametresi ile verilir.

Diğer bir yolla, $X = X\,(u,v)$, $u,v \in \mathbf{R}$ doğru kongrüansı

$$X = X(U\,,V),\, X^2 = 1,\, U = u + \varepsilon \int_0^u \bar{k}_1 du\,,\, V = v + \varepsilon \int_0^v \bar{k}_2 dv \qquad (3.1.3)$$

şeklinde $U = u + \varepsilon \bar{u}\,, V = v + \varepsilon \bar{v}$ dual parametreleri ile verilebilir. $\bar{k}_1(u) = \bar{\omega}_{12}/\omega_{12}, \omega_{12}(u) \neq 0$, $\bar{k}_2(v) = \bar{\omega}_{12}/\omega_{12}, \omega_{12}(v) \neq 0$ kapalı regle yüzeyinin dağılma parametreleridir. v= sabit ve u = sabit (kongrüansı asli yüzeyleri) ve u, v sırasıyla, kongrüansın bu yüzeylerin küresel göstergelerinin reel yay-uzunluğudurlar.

Burada $\bar{u}$ ve $\bar{v}$, u ve v reel parametrelerine bağlı olduğundan (3.1.3) denklemi u ve v reel parametrelerine sahiptir. Yani, $\mathbf{R}^3$ de bir doğru koordinatı gösterir.

Diğer taraftan, (3.1.1) ve (1.6.3) den, yani; türev denklemlerinden

$$d\vec{V}_2 = \Omega_{21}\, \vec{V}_1 + \Omega_{23} \vec{V}_3$$

dir. İki tarafı $\vec{V}_3$ ile iç çarparsak,

$$< d\vec{V}_2, V_3 > = < \Omega_{21}\, \vec{V}_1 + \Omega_{23}\, \vec{V}_3,\ \vec{V}_3 >$$

$$= \Omega_{23}$$

olur. $\vec{V}_2 = \dfrac{\vec{V}'_1}{\|\vec{V}'_1\|}$ ve $\vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ değerleri yerine konursa

$$\Omega_{23} = \left\langle d\left(\frac{\vec{V}'_1}{\|\vec{V}'_1\|}\right),\ \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\|\vec{V}'_1\|} \left\langle \vec{V}''_1,\ \vec{V}_1 \wedge \frac{\vec{V}'_1}{\|\vec{V}'_1\|} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\|\vec{V}'_1\|^2} (\vec{V}_1, \vec{V}'_1, \vec{V}''_1)$$

yazabiliriz. Tanım 2.2.1 ve (2.2.1) den (v_1)-kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı

$$\wedge_{V_1} = \oint \langle d\vec{V}_2, \vec{V}_3 \rangle = \oint \Omega_{23} dt = \oint \frac{(\vec{V}_1, \vec{V}'_1, \vec{V}''_1)}{\|\vec{V}'_1\|^2} dt \qquad (3.1.4)$$

dir. Biliyoruz ki, dual birim kürenin Gauss-Bonnet formülü,

$$\int\int dA + \oint \frac{(\vec{V}_1, \vec{V}'_1, \vec{V}''_1)}{\|\vec{V}'_1\|^2} dt - 2\pi = 0 \qquad (3.1.5)$$

dır, burada $dA = dU . dV$ dual birim küre üzerinde dual alan elementidir (Blaschke, 1949). (3.1.4) ve (3.1.5) denklemlerinden

$$\int\int dA + \wedge_{V_1} - 2\pi = 0$$

veya

$$\wedge_{V_1} = 2\pi - \int\int dA$$

yazabiliriz, burada $\int\int dA = A_{V_1} = a_{V_1} + \varepsilon \bar{a}_{V_1}$, (v_1)-kapalı regle yüzeyin küresel göstergesinin dual küresel alanıdır. Böylece aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.1.1: (v_1)-kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı, yüzeyin dual küresel resminin dual küresel alanına karşılık gelir (Gürsoy, 1990a).

$$\wedge_{V_1} = 2\pi - A_{V_1} \qquad (3.1.5)$$

(3.1.5) ifadesini reel ve dual kısımlara ayırırsak,

$$\Lambda_{V_1} = \lambda_{V_1} - \varepsilon \mathcal{L}_{V_1} = (2\pi - a_{V_1}) - \varepsilon \bar{a}_{V_1}$$

veya

$$\lambda_{V_1} = 2\pi - a_{V_1} \quad , \quad \mathcal{L}_{V_1} = \bar{a}_{V_1} \tag{3.1.6}$$

yazabiliriz.

Diğer taraftan, (3.1.3) denklemlerinden

$$dA = dU \,.\, dV = (1 + \varepsilon\bar{k}_1)(1 + \varepsilon\bar{k}_2) du\, dv$$

$$= [1 + \varepsilon(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)] da$$

$$= da + \varepsilon(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) da$$

yazabiliriz veya eşitliklerin integralinden,

$$A_{V_1} = \int\int dA = \int\int da + \varepsilon\int\int (\bar{k}_1 + \bar{k}_2) da$$

$$= a_{V_1} + 2\varepsilon \int\int k^* da \tag{3.1.7}$$

buluruz, burada $k^* = (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)/2$ ye V_1 (u,v)-doğru kongrüansının ortalama *dağılma parametresi* denir ve da = du . dv reel birim küre üzerinde alan elementidir.

(3.1.6) ve (3.1.7) denklemlerinden

$$\mathcal{L}_{V_1} = \bar{a}_{V_1} = 2\int\int k^* da \tag{3.1.8}$$

yazabiliriz. Böylece aşağıdaki sonuçları ifade ederiz.

Sonuç 3.1.1: (v_1)-kapalı regle yüzeyinin küresel göstergesinin reel küresel alanı ve açılım açısı arasında

$$\lambda_{V_1} = 2\pi - a_{V_1} \tag{3.1.9}$$

bağıntısı vardır.

Sonuç 3.1.2: V_1 (u,v)-doğru kongrüansının ortalama dağılma parametresi ve (v_1)-kapalı regle yüzeyinin açılım uzunluğu arasında

$$\mathcal{L}_{v_1} = 2 \int \int k^* da \tag{3.1.10}$$

bağıntısı vardır.

$V_1(t) = v_1(t) + \varepsilon \bar{v}_1(t)$ birim dual vektörü, birim dual küre yüzeyinin dış normali olmak üzere, $V_1(t)$-dual kapalı eğrisinin *dual geodezik eğriliği*

$$G_{V_1} = g_{v_1} + \varepsilon \bar{g}_{v_1} = \frac{(\vec{V}_1, \vec{V}'_1, \vec{V}''_1)}{\|\vec{V}'_1\|^2} \tag{3.1.11}$$

ile verilir (Blaschke, 1949). Böylece (3.1.4) ve (3.1.11) denklemlerinden aşağıdaki teoremi elde ederiz;

Teorem 3.1.2: (v_1)-kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı, yüzeyin küresel göstergesinin toplam dual geodezik eğrilerine eşittir.

$$\Lambda_{V_1} = \oint G_{V_1} dt \tag{3.1.12}$$

(3.1.12) ifadesini reel ve dual kısımlara ayırırsak ve (3.1.9) ile (3.1.10) denklemlerinden aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1.3: (v_1)-kapalı regle yüzeyinin λ_{v_1}, λ_{v_1}, g_{v_1}, a_{v_1} invaryantları arasında aşağıdaki bağıntılar sağlanır (Gürsoy, 1990 b).

$$\text{(i) } \lambda_{v_1} = \oint g_{v_1} dt \quad , \quad \text{(ii) } \mathcal{L}_{v_1} = \oint \bar{g}_{v_1} dt$$

$$\text{(iii) } \oint g_{v_1} dt = 2\pi - a_{v_1} \ , \quad \text{(iv) } \oint \bar{g}_{v_1} = -2 \int \int k^* \, da \tag{3.1.13}$$

(3.1.9), (3.1.10) ve (3.1.13) ifadeleri, (v_1)-kapalı regle yüzeyinin reel invaryantlarının yeni geometrik yorumlarıdır. Özellikle, (3.1.9) ve (3.1.10) λ_{v_1} açılım açısı ve $\mathcal{L}_{v_1}$ açılım uzunluğu, sırasıyla, küresel göstergenin a_{v_1} alanı ve V_1 (u,v)-kapalı doğru kongrüansının k^* ortalama dağılma parametresine karşılık gelir. Ayrıca (3.1.13) de (v_1)-kapalı regle yüzeyinin reel açılım açısı bu yüzeyin küresel resminin toplam geodezik eğriliğine eşittir. (3.1.13) ün (iii) ifadesi, geodezik eğrilik ile küresel kapalı eğrinin alanı arasındaki ilişkiyi gösteren önemli bir formüldür.

Teorem 3.1.3: Eğer $\mathbf{R}^3$ de x ve y-doğruları, kapalı uzay hareketi esnasında aynı açılım açılı iki kapalı regle yüzey çizer ise, o zaman bu yüzeylerin küresel göstergeleri birim küre üzerinde eşdeğer yüzey alanlarına sahiptirler. Teoremin tersi de doğrudur.

İspat: Eğer, (x) ve (y) -kapalı regle yüzeylerinin açılım açıları eşit ise o zaman (3.1.9) denkleminden

$$\lambda_x = \lambda_y \Leftrightarrow 2\pi - a_x = 2\pi - a_y$$

$$\Leftrightarrow a_x = a_y$$

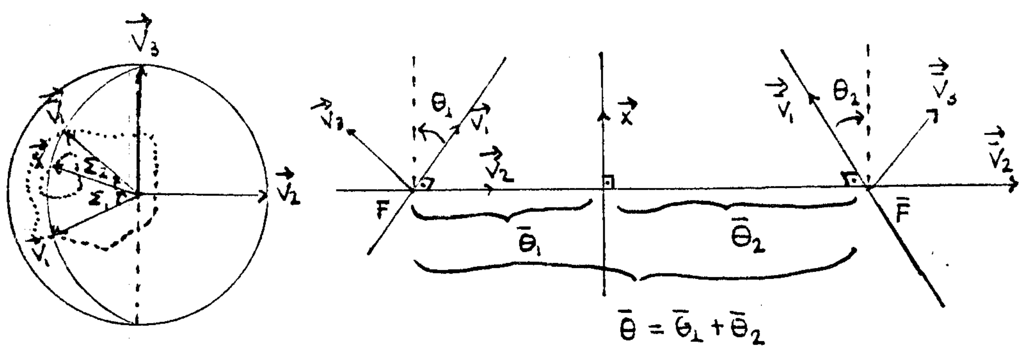
dir.

Bölüm 3 ün bu kısmındaki sonuçlar ve teoremler (Gürsoy, 1990 b) den alınmıştır.

3.2. İntegral İnvaryantlarla İlgili Bazı Sonuçlar

K' sabit birim dual küresi üzerinde diferensiyellenebilir bir e kapalı eğrisi seçelim. K hareketli küresinin bir büyük dairesi üzerinde, tesbit ettiğimiz θ= sabit uzunluklu $\overset{\frown}{V_1\overline{V}_1}$ dual yay parçasının, V_1 ve $\overline{V}_1$ uç noktalarını, e eğrisi üzerinde (veya eş alanlı iki kapalı küresel eğri üzerinde) hareket ettirirsek, bir K/K' 1-parametreli dual kapalı küresel hareketi tanımlamış oluruz. $\theta = \overset{\frown}{V_1\overline{V}_1}$ dual yay parçasını sabit tuttuğumuza göre, bu hareket yalnız başlangıçta K' de seçeceğimiz e eğrisine bağlıdır.

K/K' hareketinde, θ= sabit uzunluklu dual yay üzerinde tesbit edeceğimiz bir X dual noktasının hareketini inceleyebiliriz. Hareketimiz kapalı olduğundan, X dual noktasının bir kapalı yörüngeye sahip olduğunu hemen söyleyebiliriz (Şekil 3.2.1).



Şekil 3.2.1

K/K' hareketinin çizgiler uzayındaki, karşılığı olan H/H' hareketini verelim.

Σ= sabit uzunluklu dual yay parçasının V_1 ve $\overline{V}_1$ uç noktalarının e eğrisi üzerinde (veya eş alanlı iki kapalı küresel eğri üzerinde) hareketine, çizgiler uzayında, bir L dik hiperbolik doğru kongrüansının (iki parametreli doğru ailesi), (v_1)-kapalı regle yüzeyi üzerindeki kapalı hareketi karşılık gelir. Öyleki, bu kongrüansın odak çizgisi, (v_1)-kapalı regle yüzeyinin v_1 ve $\overline{v}_1$ - anadoğrularına, F ve $\overline{F}$ noktalarında diktir.

Σ= sabit uzunluklu $\overset{\frown}{V_1 \overline{V}_1}$ dual yayı üzerinde seçtiğimiz X dual noktasına ise, bu kongrüansın odak çizgisine dik bir x-ışını karşılık gelir. Öyleki, $\vec{V}_1$ ile $\vec{\overline{V}}_1$ dual vektörleri arasındaki $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ dual açısı sabit seçildiği için, x-ışını v_1-anadoğrusu ile θ_1 reel açısını yapar ve ondan $\overline{\theta}_1$ uzaklığındadır. Aynı şekilde, $\overline{v}_1$ - anadoğrusu ile θ_2 reel açısını yapar ve ondan $\overline{\theta}_2$ uzaklığındadır. Burada $\Sigma_1 = \theta_1 + \varepsilon\overline{\theta}_1$ ve $\Sigma_2 = \theta_2 + \varepsilon\overline{\theta}_2$, $\Sigma = (\theta_1 + \theta_2) + \varepsilon(\overline{\theta}_1 + \overline{\theta}_2)$ dır. (Şekil 3.2.1).

Şimdi 1-parametreli kapalı küresel K/K' hareketinde, X , V_1 ve $\overline{V}_1$ dual noktalarının çizdikleri kapalı regle yüzeylerin dual açılım açılarını hesabedelim.

$\vec{X} = \vec{X}(t)$ kapalı regle yüzeyinin (veya kapalı küresel eğrinin) dual açılım açısı,

$$\Lambda_X = -<\vec{D}, \vec{X}>$$

$$\Lambda_X = -<\vec{V}_1 \oint \Omega_{23} + \vec{V}_2 \oint \Omega_{31} + \vec{V}_3 \oint \Omega_{12}, \cos \Sigma_1 \vec{V}_1 + \sin \Sigma_1 \vec{V}_3>$$

$$\Lambda_X = -\cos \Sigma_1 \oint \Omega_{23} - \sin \Sigma_1 \oint \Omega_{12} \tag{3.2.1}$$

dır.

$\vec{V}_1 = \vec{V}_1(t)$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı,

$$\Lambda_{V_1} = -<\vec{D}, \vec{V}_1>$$

$$= -\oint \Omega_{23} \tag{3.2.2}$$

dır.

$\vec{\overline{V}}_1 = \vec{\overline{V}}_1(t)$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı,

$$\Lambda_{\overline{V}_1} = -<\vec{D}, \vec{\overline{V}}_1>$$

$$= -<\vec{D}, \cos(\Sigma_1 + \Sigma_2)\vec{V}_1 + \sin(\Sigma_1 + \Sigma_2)\vec{V}_3>$$

$$= \sin(\Sigma_1 + \Sigma_2) \oint \Omega_{21} - \cos(\Sigma_1 + \Sigma_2) \oint \Omega_{23} \tag{3.2.3}$$

bulunur. Burada V_1 ve $\overline{V}_1$ dual noktaları, aynı kapalı e eğrisini bir parametre farkıyla çizerler, bunun için $\Lambda_{V_1} = \Lambda_{\overline{V}_1}$ alınabilir. Ayrıca (3.2.1) ifadesini (3.2.2) ve (3.2.3) ifadesinde yerine koyarsak,

$$\Lambda_X = \Lambda_{V_1} \cos \Sigma_1 + \sin \Sigma_1 \oint \Omega_{21}, \; \Omega_{ij} = -\Omega_{ji}, \; 1 \leq i, j \leq 3$$

ve

$$\Lambda_{V_1} = \sin(\Sigma_1 + \Sigma_2) \oint \Omega_{21} + \Lambda_{V_1} \cos(\Sigma_1 + \Sigma_2)$$

bulunur. Bu ifadelerde, bizce, bir geometrik anlamı olmayan $\oint \Omega_{21}$ ifadesini yok edebiliriz. Böylece, ikinci ifadeden elde edilen,

$$\oint \Omega_{21} = \frac{\Lambda_{V_1}[1 - \cos(\Sigma_1 + \Sigma_2)]}{\sin(\Sigma_1 + \Sigma_2)}$$

değeri ikinci denklemde yerine konursa,

$$\Lambda_X = \Lambda_{V_1} \cos \Sigma_1 + \frac{\Lambda_{V_1}[1 - \cos(\Sigma_1 + \Sigma_2)] \sin \Sigma_1}{\sin(\Sigma_1 + \Sigma_2)}$$

$$\Lambda_X = \frac{\Lambda_{V_1} \cos \Sigma_1 \sin(\Sigma_1 + \Sigma_2) - \Lambda_{V_1} \sin \Sigma_1 \cos(\Sigma_1 + \Sigma_2) + \Lambda_{V_1} \sin \Sigma_1}{\sin(\Sigma_1 + \Sigma_2)}$$

ve

$$\Lambda_X = \Lambda_{V_1} \frac{\sin \Sigma_1 + \sin \Sigma_2}{\sin(\Sigma_1 + \Sigma_2)} \qquad (3.2.4)$$

ifadesi bulunur. $\vec{X} = \vec{X}(t)$ ve $\vec{V}_1 = \vec{V}_1(t)$ kapalı regle yüzeylerinin dual açılım açıları arasındaki bu bağıntıdan, $\sin(\theta_1 + \varepsilon\bar{\theta}_1)$ ve $\cos(\theta_1 + \varepsilon\bar{\theta}_1)$ dual fonksiyonlarının 0= (0,0) dual noktasındaki Taylor açılımları:

$$\cos(\theta_1 + \varepsilon\bar{\theta}_1) = \cos\theta_1 - \varepsilon\bar{\theta}_1 \sin\theta_1$$

$$\sin(\theta_1 + \varepsilon\bar{\theta}_1) = \sin\theta_1 + \varepsilon\bar{\theta}_1 \cos\theta_1$$

ifadelerinin kullanılmasıyla

$$\frac{\lambda_X}{\lambda_{V_1}} = \frac{\sin\theta_1 + \sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \qquad (3.2.5)$$

oranın sabit olduğu gösterilebilir, yani hareketten bağımsızdır ve (3.2.4) ifadesinin dual kısımlarının eşitliğinden

$$\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{V_1} \frac{\sin\theta_1 + \sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} - \lambda_{V_1} \frac{(\bar{\theta}_1 \sin\theta_2 + \bar{\theta}_2 \sin\theta_1)[1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} \qquad (3.2.6)$$

bağıntısı sağlanır, burada $\mathcal{L}_x$, λ_x , $\mathcal{L}_{v_1}$, λ_{v_1} (x) ve (v_1)-kapalı regle yüzeyinin integral invaryantlarıdır ve θ_1 , θ_2 ile $\overline{\theta}_1$, $\overline{\theta}_2$, x, v_1 ve $\overline{v}_1$ -yönlü doğruları arasında, sırasıyla, sabit açılar ve sabit uzaklıklardır.

(3.2.5) ve (3.2.6) sonuçlarına ilave olarak, bu denklemleri (3.1.9) ve (3.1.10) ifadelerinde yerine koyarsak, aşağıdaki sonuçları elde ederiz;

Sonuç 3.2.1: a_x ve a_{v_1} , (x) ve (v_1)-kapalı regle yüzeyinin küresel göstergeleri ile sınırlı küresel alanlar olmak üzere,

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_{v_1}}=\frac{2\pi - a_x}{2\pi - a_{v_1}}=\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \tag{3.2.7}$$

oranı sabittir, yani bunlar hareketten bağımsızdır (Gürsoy, 1979).

$\theta_1 = \theta_2$ alınması halinde (3.2.5) denkleminden

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_{v_1}}=\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}=\frac{1}{\cos\theta_1}$$

bulunur. Buna göre, (3.2.7) den

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_{v_1}}=\frac{2\pi - a_x}{2\pi - a_{v_1}}=\frac{1}{\cos\theta_1}$$

eşitliğini yazabiliriz (Gürsoy, 1990a).

Bu sonuç daha sonra vereceğimiz A. Holditch teoreminin farklı, bir ifade edilmişidir. Ayrıca (3.2.6) ifadesinin iki tarafını λ_x 'e bölersek aşağıdaki sonuç bulunur.

Sonuç 3.2.2: (x) ve (v_1)-kapalı regle yüzeyleri için,

$$\frac{\mathcal{L}_x}{\lambda_x}=\frac{\mathcal{L}_{v_1}}{\lambda_{v_1}}-\frac{2\pi - a_{v_1}}{2\pi - a_x}\cdot\frac{\left(\overline{\theta}_1\sin\theta_2+\overline{\theta}_2\sin\theta_1\right)\left[1-\cos(\theta_1+\theta_2)\right]}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)} \tag{3.2.8}$$

bağıntısı sağlanır.

$\theta_1 = \theta_2$ özel halinde, (3.2.6) denklemi için

$$\mathcal{L}_x = \mathcal{L}_{v_1} \frac{\sin\theta_1 + \sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} - \lambda_{v_1} \frac{\left(\bar{\theta}_1 \sin\theta_2 + \bar{\theta}_2 \sin\theta_1\right)\left[1-\cos(\theta_1+\theta_2)\right]}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}$$

$$= \mathcal{L}_{v_1} \cdot \frac{1}{\cos\theta_1} - \lambda_{v_1} \frac{\left(\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2\right)}{2} \cdot \frac{\sin\theta_1}{\cos^2\theta_1}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta_1}\left[\mathcal{L}_{v_1} - \lambda_{v_1} \frac{\left(\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2\right)}{2} \cdot \operatorname{tg}\theta_1\right]$$

sonucu elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuç ifade edilir.

Sonuç 3.2.3: (x) ve (v_1)-kapalı regle yüzeylerinin integral invaryantları arasında

$$\mathcal{L}_x = \frac{1}{\cos\theta_1}\left[\mathcal{L}_{v_1} - \lambda_{v_1} \frac{\left(\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2\right)}{2} \cdot \operatorname{tg}\theta_1\right] \qquad (3.2.9)$$

bağıntısı vardır.

$\theta_1 = \theta_2$ ye ilave olarak (x) ve (v_1)-kapalı regle yüzeyleri açılabilir iseler bu halde (x) ve (v_1)-kapalı regle yüzeylerinin açılım uzunlukları sırasıyla, bu yüzeylerin sitriksiyon çizgilerinin uzunluklarına eşittir. (x) ve (v_1)-kapalı regle yüzeylerinin sitriksiyon çizgilerinin uzunlukları sırasıyla, b_x ve b_{v_1} olmak üzere, (3.2.6) ifadesinin $\mathcal{L}_{v_1}$ 'e bölümünden,

$$\frac{\mathcal{L}_x}{\mathcal{L}_{v_1}} = \frac{1}{\cos\theta_1} - \frac{\lambda_{v_1}}{\mathcal{L}_{v_1}} \cdot \frac{\left(\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2\right)\operatorname{tg}\theta_1}{2}$$

olur. Buradan,

$$\frac{1}{\cos\theta_1}=\frac{\mathcal{L}_x}{\mathcal{L}_{v_1}}+\frac{\lambda_{v_1}}{\mathcal{L}_{v_1}}\cdot\frac{\left(\bar{\theta}_1+\bar{\theta}_2\right)\operatorname{tg}\theta_1}{2}$$

olduğundan, (3.2.7) ifadesini de gözönüne alırsak,

$$\frac{1}{\cos\theta_1}=\frac{2\pi-a_x}{2\pi-a_{v_1}}=\frac{b_x}{b_{v_1}}+\frac{2\pi-a_{v_1}}{b_{v_1}}\cdot\frac{\left(\bar{\theta}_1+\bar{\theta}_2\right)\operatorname{tg}\theta_1}{2}$$

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_{v_1}}=\frac{1}{b_{v_1}}\left[b_x+\frac{\left(2\pi-a_{v_1}\right)\left(\bar{\theta}_1+\bar{\theta}_2\right)\operatorname{tg}\theta_1}{2}\right]=\frac{1}{\cos\theta_1}$$

bağıntısı elde edilir. Böylece aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Sonuç 3.2.4: (x) ve (v_1)-kapalı regle yüzeyleri için, λ_x , a_x , b_x ve $\lambda_{v_1}, a_{v_1}, b_{v_1}$ arasında,

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_{v_1}}=\frac{2\pi-a_x}{2\pi-a_{v_1}}=\frac{1}{b_{v_1}}\left[b_x+\frac{\left(2\pi-a_{v_1}\right)\left(\bar{\theta}_1+\bar{\theta}_2\right)\operatorname{tg}\theta_1}{2}\right]=\frac{1}{\cos\theta_1} \qquad (3.2.10)$$

bağıntıları vardır.

Eğer uzay hareketinde $\left\{\vec{V}_1,\vec{V}_2=\frac{\vec{V'}_1}{\left\|\vec{V'}_1\right\|},\vec{V}_3=\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2\right\}$ hareketli ortonormal sistemini alırsak, o zaman üçlünün eksenleri, (v_1)-kapalı regle yüzeyinin v_1 - üreticinin sitriksiyon noktasında kesişir. Keza, v_2 ve v_3 , sırasıyla sitriksiyon noktasında yüzeyin normal ve teğetidir.

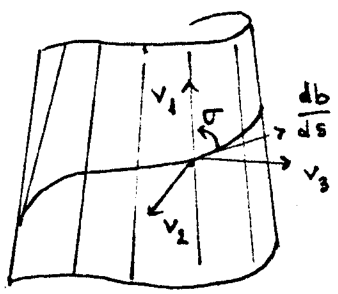
b=b(s), (v_1)-kapalı regle yüzeyinin sitriksiyon çizgisi olmak üzere,

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \cos\sigma\,\vec{v}_1 + \sin\sigma\,\vec{v}_3 \tag{3.2.11}$$

dır, (v_1)-kapalı regle yüzeyinin $\mathcal{K}(\mathcal{K}>0)$, τ , σ doğal invaryantlarına sırasıyla, (v_1)-kapalı regle yüzeyinin doğal eğriliği, doğal torsiyonu ve sitriksiyonu denir. Burada s (v_1)-kapalı regle yüzeyinin sitriksiyon çizgisi ve s^*_1 ve s^*_3 sırasıyla, (v_1) ve (v_3)-kapalı regle yüzeylerinin küresel göstergelerinin uzunlukları olmak üzere,

$$\mathcal{K} = ds^*_1/ds\ ,\ \tau = ds^*_3/ds$$

dir.



(v_1)-kapalı regle yüzeyinin açılım uzunluğu ve açılım açısı (2.1.2), (2.2.1), (2.2.11), (3.2.11) denklemlerinden,

$$\mathcal{L}_{v_1} = -\oint \cos\sigma\, ds\ ,\ \lambda_{v_1} = \oint \tau\, ds \tag{3.2.12}$$

dır ve (v_3)-kapalı regle yüzeyinin küresel göstergesinin uzunluğu

$$s^*_3 = \oint \|v'_3\|\, ds = \oint \tau\, ds \tag{3.2.13}$$

dır, buradan (v_1)-kapalı regle yüzeyinin açılım açısı

$$\lambda_{v_1} = s^*_3$$

dır.

Böylece, (3.1.9) ve (3.2.13) denklemlerinden aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.2.1: (v_1)-kapalı regle yüzeyin invaryantları arasında,

$$\text{(i) } \lambda_{v_1} = s^*_3\,, \quad \text{(ii) } a_{v_1} = 2\pi - s^*_3\,,$$
$$\text{(iii) } \oint \tau\, ds = 2\pi - a_{v_1} \tag{3.2.14}$$

bağıntıları sağlanır, burada a_{v_1} ve $\oint \tau\, ds$ sırasıyla, gösterge ile sınırlı, birim kürenin yüzey alanının ölçüsü ve (v_1)-kapalı regle yüzeyinin toplam doğal torsiyonudur (Gürsoy, 1991).

Aşikar olarak, eğer $\lambda_{v_1} = 0$ ise, o zaman (3.1.9) dan, $a_{v_1} = 2\pi$ dir. Yani, (v_1)-kapalı regle yüzeyin göstergesi, birim küre yüzeyini eşit alanlı iki parçaya ayırır.

(3.2.14) ifadesinden,

$$\lambda_{v_1} = 0 \Leftrightarrow s^*_3 = 0 \Leftrightarrow \oint \tau\, ds = 0 \Leftrightarrow a_{v_1} = 2\pi$$

yazabiliriz. Buna göre, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.5: (v_1)-kapalı regle yüzeyinin açılm açısı $\lambda_{v_1} = 0$ dır.
$\Leftrightarrow$ (v_3)-kapalı regle yüzeyinin göstergesinin uzunluğu $s^*_3 = 0$ dır.
$\Leftrightarrow$ (v_1)-kapalı regle yüzeyinin toplam doğal torsiyonu $\oint \tau\, ds = 0$ dır.
$\Leftrightarrow$ (v_1)-kapalı regle yüzeyin göstergesi, birim küre yüzeyini eşit alanlı iki parçaya ayırır (Gürsoy, 1991).

Diğer taraftan, (2.2.1) ve (2.2.11) denklemlerinden, (v_3)-kapalı regle yüzeyinin açılım açısı

$$\lambda_{v_3} = \oint \mathcal{K} ds \tag{3.2.15}$$

dir ve (v_1)-kapalı regle yüzeyinin küresel göstergesinin uzunluğu,

$$s^*_1 = \oint \|v'_1\| ds = \oint \mathcal{K} ds$$

veya (3.2.15) den,

$$\lambda_{v_3} = \oint \mathcal{K} ds = s^*_1 \tag{3.2.16}$$

yazabiliriz.

(3.2.16) da görüldüğü gibi, (v_1)-kapalı regle yüzeyinin küresel göstergesinin uzunluğu ile toplam doğal eğriliği ve (v_3)-kapalı regle yüzeyin açılım açısı aynıdır. Bu sebepten, (3.2.16) ve (3.1.9) dan aşağıdaki teoremleri elde ederiz.

Teorem 3.2.2: (v_1)-kapalı regle yüzeyinin toplam doğal eğriliği $\oint \mathcal{K} ds$ ve (v_3)-kapalı regle yüzeyinin küresel göstergesi ile tanımlanan küresel alanının ölçüsü a_{v_3} olmak üzere,

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ \lambda_{v_3} = s^*_1\,, \quad \text{(ii)}\ a_{v_3} = 2\pi - s^*_1\,, \\ &\text{(iii)} \oint \mathcal{K} ds = 2\pi - a_{v_3} \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

bağıntıları sağlanır (Gürsoy, 1991).

Aşikar olarak, (2.2.1) ve (2.2.11) denklemlerinden, hareketli üçlü sistemin ikinci ekseni ile oluşturulan kapalı regle yüzeyin açılım açısı $\lambda_{v_2} = 0$ dır. Buna göre (3.1.9) dan, $a_{v_2} = 2\pi$ dir. Yani, (v_2)-kapalı regle yüzeyin göstergesi birim küre yüzeyini eşit alanlı iki parçaya ayırır.

Eğer, (v_1)-kapalı regle yüzeyinin açılım açısı $\lambda_{v_1} = 2\pi$ ise, o zaman, (3.1.9) dan $a_{v_1} = 0$ olur. O halde (v_1)-kapalı regle yüzeyi bir silindirdir. Böylece (3.2.14) den aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.2.3: (v_1)-kapalı regle yüzeyinin açılım açısı $\lambda_{v_1} = 2\pi$ dir.

$\Leftrightarrow$ (v_3)-kapalı regle yüzeyinin göstergesinin uzunluğu $s^*_3 = 2\pi$ dir.

$\Leftrightarrow$ (v_1)-kapalı regle yüzeyinin toplam doğal torsiyonu $\oint \tau\, ds = 2\pi$ dir.

$\Leftrightarrow$ (v_1)-kapalı regle yüzeyi bir silindirdir (Gürsoy, 1991).

(v_1)-kapalı regle yüzeyinin küresel göstergesinin geodezik eğriliği

$$\rho_g = \left(\vec{v}_1, \vec{v}'_1, \vec{v}''_1\right) \tag{3.2.18}$$

dır (Blashcke, 1949) ve (2.2.11) denklemlerinden, (v_1)-kapalı regle yüzeyinin doğal torsiyonu

$$\tau = \frac{\left(\vec{v}_1, \vec{v}'_1, \vec{v}''_1\right)}{\left\|\vec{v}'_1\right\|^2} \tag{3.2.19}$$

ve (v_2)-kapalı regle yüzeyinin göstergesinin uzunluğu,

$$s^*_2 = \oint \sqrt{\mathcal{K}^2 + \tau^2}\, ds \tag{3.2.20}$$

dır.

Görüldüğü gibi, (3.2.19) ve (3.2.20) denklemlerinden

$$\tau = 0 \Leftrightarrow \rho_g = 0$$

yazabiliriz. Yani doğal torsiyon (v_1)-kapalı regle yüzeyi üzerinde sıfırdır ancak ve ancak (v_1)-kapalı regle yüzeyin göstergesi bir geodezik eğridir. Eğer $\tau=0$ ise, o zaman (3.2.20), (3.2.16), (3.2.14) ve (3.2.19) denklemlerinden,

$$s^*_2 = \oint \mathcal{K} ds = s^*_1 = \lambda_{v_3}$$

ve (3.2.12) den $\lambda_{v_1} = 0$, $a_{v_1} = 2\pi$ yazabiliriz. Bu sebepten şu teoremi elde ederiz.

Teorem 3.2.4: $\left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right\}$ hareketli sistemin v_1 (s) birinci ekseni ile oluşturulan (v_1)-kapalı regle yüzeyi için,

$$\tau = 0 \Leftrightarrow \rho_g = 0 \Rightarrow s^*_3 = s^*_1 = \lambda_{v_3} \Rightarrow \lambda_{v_1} = 0 \Leftrightarrow a_{v_1} = 2\pi \Leftrightarrow s^*_3 = 0 \tag{3.2.21}$$

ifadeleri sağlanır (Gürsoy, 1991).

(v_1) ve (v_3)-kapalı regle yüzeylerinin dağılma parametreleri sırasıyla,

$\delta_1 = \frac{\sin\sigma}{\mathcal{K}}$ ve $\delta_3 = \frac{\cos\sigma}{\tau}$ olmak üzere, (3.2.12) den (v_1)-kapalı regle yüzeyinin açılım açısı ve açılım uzunluğu,

$$\mathcal{L}_{v_1} = -\oint \sqrt{1-\delta_1^2 \mathcal{K}^2}\, ds \,,\, \lambda_{v_1} = \oint \frac{\cos\sigma}{\delta_3} ds \,,\, \delta_3 \neq 0 \qquad (3.2.22)$$

yazabiliriz. (3.2.22) ifadelerinden (v_1)-kapalı regle yüzeyinin reel integral invaryantları ve diğer integral invaryantları arasında bağıntılar verilir. Keza, (3.1.10), (2.2.1) ve (3.2.22) denklemlerinden aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.6: $V_1(u,v)$-doğru kongrüansının asli yüzeylerinin dağılma parametreleri δu , δv olmak üzere,

$$\int\int (\delta u + \delta v)\, du dv - \oint \sqrt{1-\delta_1^2 \mathcal{K}^2}\, ds = 0$$

$$a_{v_1} = 2\pi - \oint \frac{\cos\sigma}{\delta_3} ds \,,\, \delta_3 \neq 0 \qquad (3.2.23)$$

bağıntıları sağlanır (Gürsoy, 1991).

(3.2.11) de, eğer $\sigma = 0$ ise, o zaman $\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{v}_1$ dir. Yani regle yüzey (v_1)-kapalı regle yüzeyinin b(s) sitriksiyon çizgisinin teğet regle yüzeyi (teğetsel tors) olur. Böylece (v_1)-kapalı regle yüzeyi açılabilirdir. Keza, v_2 ve v_3 sırasıyla, sitriksiyon çizgisinin asli normal ve binormal vektörleridir. Böylece, σ=0 olması durumunda (v_1)-kapalı regle yüzeyinin $\mathcal{K}$, τ doğal invaryantları sırasıyla, b(s) kapalı uzay eğrisinin $\mathcal{K}$ eğriliği ve τ torsiyonu olarak, klasik invaryantları olur. Bu durumda, b(s) sitriksiyon çizgisi, kapalı uzay eğrisi olarak alınabilir.

Bu nedenle, açılabilir kapalı regle yüzey, sitriksiyon çizgisi ve kapalı uzay eğrisi üzerinde çalışma yapmak mümkündür.

Şimdi $\sigma = 0$ olmasını gözönünde bulunduralım. Yani, (v_1)-kapalı regle yüzey verilen üçüncü sınıf kapalı uzay eğrilerinin teğet regle yüzeyidir. Böylece (3.2.14) ve (3.2.17) ifadelerinden aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 3.2.7: Verilen kapalı uzay eğrisinin teğet ve binormal regle yüzeylerinin açılım açıları, sırasıyla eğrinin binormal ve teğet göstergelerinin uzunluklarına eşittirler; yani

$$\lambda_{v_1} = s^*_3 \, , \, \lambda_{v_3} = s^*_1$$

dır (Gürsoy, 1991).

Sonuç 3.2.8: Verilen kapalı uzay eğrisinin teğet ve binormali ile tanımlanan, küresel alanın ölçüsü sırasıyla,

$$a_{v_1} = 2\pi - s^*_3 \, , \, a_{v_3} = 2\pi - s^*_1$$

dır (Gürsoy, 1991).

Sonuç 3.2.9: Verilen kapalı uzay eğrisinin toplam eğriliği ve toplam torsiyonu, sırasıyla,

$$\oint \kappa ds = 2\pi - a_{v_3}, \oint \tau ds = 2\pi - a_{v_1}$$

dır (Gürsoy, 1991).

Eğer $\kappa = \tau$ ise o zaman , $s^*_2 = \oint \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}\, ds$ kapalı uzay eğrisinin asli normal regle yüzeyinin göstergesinin uzunluğundan ve Sonuç 3.2.7, 3.2.8 ve 3.2.9 dan,

$$s^*_2 = \sqrt{2}\oint \mathcal{K} ds = \sqrt{2}\oint \tau\, ds$$

dır. Buna göre şu sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.10: Aşağıdaki ifadeler sağlanır (Gürsoy, 1991),

$$\mathcal{K} = \tau \Rightarrow a_{V_1} = a_{V_3} \Leftrightarrow \lambda_{V_1} = \lambda_{V_3} \Leftrightarrow s^*_2/\sqrt{2} = s^*_1 .$$

Aşikar olarak, Sonuç 3.2.5. den aşağıdaki sonuç bulunur.

Sonuç 3.2.11: Verilen kapalı uzay eğrisinin teğet göstergesinin açılım açısı $\lambda_{V_1} = 0$ dır $\Leftrightarrow$ eğrinin binormal göstergesinin uzunluğu $s^*_3 = 0$ dır. $\Leftrightarrow$ eğrinin toplam torsiyon $\oint \tau\, ds = 0$ dır. $\Leftrightarrow$ teğet göstergesi, birim küre yüzeyini eşit alanlı iki parçaya ayırır, yani $a_{V_1} = 2\pi$ dir (Gürsoy, 1991).

(2.2.1) den kapalı yüzey eğrisinin asli normalinin açılım açısı $\lambda_{V_2} = 0$ dır. Bu sebepten (3.1.9) dan, $a_{V_2} = 2\pi$ dir. Aşikar olarak, bunun terside doğrudur.

3.3. Holditch Teoreminin Bir Genelleştirilmesi

A. Holditch teoreminin, çizgiler uzayında H. HACISALİHOĞLU tarafından yapılan bir genellemesinde, kapalı regle yüzeylerin açılım uzunluklarının $\mathcal{L}_x/\mathcal{L}_y$ oranının, hareketten bağımsız olduğu gösterilmiştir. Bunun benzeri olan bir diğer hareketten bağımsız oran, kapalı regle yüzeylerin açılım açıları arasında da vardır. Bunu bir teorem olarak ifade ve ispat edebiliriz.

Teorem 3.3.1: K/K' hareketinde, Σ= sabit uzunluklu dual yay parçasının üzerinde seçilen, X ve Y dual noktalarının çizdiği kapalı yörüngelere, H/H' uzay hareketinde karşılık gelen kapalı (x) ve (y)-regle yüzeylerinin açılım açılarının,

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_y}$$

oranı hareketten bağımsızdır (Hacısalihoğlu, 1983a).

İspat: X in V_1 ile $\overline{V}_1$ noktalarına olan dual küresel uzaklıklarını Σ_1 ve Σ_2, Y nin V_1 ile $\overline{V}_1$ noktalarına olan dual küresel uzaklıklarını $\overline{\Sigma}_1$ ve $\overline{\Sigma}_2$ ile gösterelim. (3.2.5) ifadesinden (x) ve (y)-kapalı regle yüzeyleri için,

$$\lambda_x = \frac{\sin \Sigma_1 + \sin \Sigma_2}{\sin(\Sigma_1 + \Sigma_2)} \lambda_{v_1}$$

ve

$$\lambda_y = \frac{\sin \overline{\Sigma}_1 + \sin \overline{\Sigma}_2}{\sin\left(\overline{\Sigma}_1 + \overline{\Sigma}_2\right)} \lambda_{v_1}$$

yazılabilir.

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = \overline{\Sigma}_1 + \overline{\Sigma}_2 = \overset{\frown}{V_1 \overline{V}_1}$$

olduğundan, bunların reel kısımları için,

$$\sin\left(\Sigma_1 + \Sigma_2\right) = \sin\left(\overline{\Sigma}_1 + \overline{\Sigma}_2\right)$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_y} = \frac{\sin \Sigma_1 + \sin \Sigma_2}{\sin \overline{\Sigma}_1 + \sin \overline{\Sigma}_2}$$

bulunur. Bu ise λ_x / λ_y oranının sadece X ve Y dual noktalarının $\overset{\frown}{V_1 \overline{V}_1}$ dual yayı üzerindeki seçilişine (ya da x ve y ışınlarının L dik hiperbolik kongrüansındaki seçilişlerine) bağlı olduğunu ve H/H' hareketine bağlı olmadığını gösterir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Blashcke, W. (Erim, K), 1949, Diferensiyel Geometri Dersleri, İstanbul Üniversitesi Yayınları, 399 s.

Gürsoy, O., 1979, Açılım uzunluğu ve açılım açısı üzerine, Karadeniz Üniversitesi Matematik Bölümünde hazırlanmış doktora tezi.

Gürsoy, O., 1990a, The Dual Angle of a Closed Ruled Surface, Mechanism and Machine Theory, vol. 25, pp. 131-140.

Gürsoy, O., 1990b, On the Integral Invariants of a Closed Ruled Surface, Journal of Geometry, vol. 39.

Gürsoy, O., 1991, Some Results on the Closed Ruled Surfaces and Closed Space Curves, Mechanism and Machine Theory'de baskıda.

Hacısalihoğlu, H.H., 1972, On the Pitch of a Closed Ruled Surface, Mechanism an Machine Theory, vol. 7, pp. 291-305.

Hacısalihoğlu, H.H., 1983a, Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, 338 s.

Hacısalihoğlu, H.H., 1983b, Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Matematik:2, 895 s.