

Mazlum ABAK'ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı "Regle Yüzeylerin Asli Lif Demet Yapıları ve Koneksiyonlar" başlıklı bu çalışma, jürimizce Lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

Üye: Prof. Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR

Üye: Doç. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun gün
ve 311-4..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Anadolu Üniversitesi
Merkez Kütüphane

Prof. Dr. Rüstem KAYA
Enstitü Müdürü

REGLE YÜZEYLERİN ASLİ LİF DEMET YAPILARI
VE KONEKSİYONLAR

Mazlum Abak

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof Dr. Ertuğrul Özdamar

Şubat -1992

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ
MERKEZ KÜTÜPHANASI

ÖZET

Bu çalışmada regle yüzeylerin asli lif demet yapıları verilerek bu yapı üzerindeki koneksiyonlar tanıtılmıştır. Bu koneksiyonların study dönüşümü ile dual temsilleri incelenmiştir.

Ayrıca koneksiyon regle yüzeyi tanıtılarak koneksiyon regle yüzeyinin açılım açısı hesaplanmıştır.

Son kısım genelleştirilmiş regle yüzeylerin bir incelenmesine ayrılmış ve genelleştirilmiş regle yüzeyler için striksiyon altmanifoldu ve striksiyon koneksiyonu kavramları tanımlanmıştır.

SUMMARY

In this thesis, we give a principal fibre bundle structure for ruled surfaces and the constructions on the bundle had been introduced. We have examined dual representations of those connections via the map of Study.

In addition, we defined the notion of connection ruled surface and calculated the angle of pitch of the connection ruled surface.

Last part of the thesis devoted to the generalised ruled surfaces. Finally, Striction submanifold and the striction connection concepts had been introduced.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
1.1 TEMEL KAVRAMLAR	1
1.2 E^n de Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler	2
1.3 E^3 de Study Dönüşümü	4
2.1 ASLİ LİF DEMETLERİ VE KONEKSİYONLAR	6
2.1.1 Temel vektör alanları	6
2.2.1 Bir koneksiyonun koneksiyon ve eğrilik formu	8
2.2.2 Bir koneksiyonun yapı denklemleri	9
3.1 IR^3 de REGLE YÜZEYLERİN ASLİ LİF DEMET YAPILARI VE KONEKSİYONLARIN DUAL SAYI TEMSİLLERİ	10
3.2 IR^3 de Koneksiyon regle yüzeyinin açılabilirliği ve açılım açısı	20
4.1 GENELLEŞTİRİLMİŞ REGLE YÜZEYLERİN ASLİ LİF DEMET YAPILARI VE KONEKSİYONLAR.....	34
4.2 Striksiyon Altmanifoldu	42

1.1 TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda E^3 de regle yüzeyler ve striksiyon çizgilerinin tanıtımını yapacağız.

Tanım 1.1.1: $M \subset E^3$ verilsin. $\forall P \in M$ noktasında E^3 ün M de kalan P den geçen bir doğrusu var ise M 'ye bir regle yüzey ve M de kalan doğruya da M nin bir doğrultmanı denir (Hacısalıhoğlu, H, H.1983).

Tanım 1.1.2: Bir regle yüzeyinin komşu iki doğrultmanlarının ortak dikme ayaklarına boğaz ya da merkez noktası adı verilir (Hacısalıhoğlu, H, H.1983). Bir regle yüzeyin,

$$\alpha : I \rightarrow E^3$$

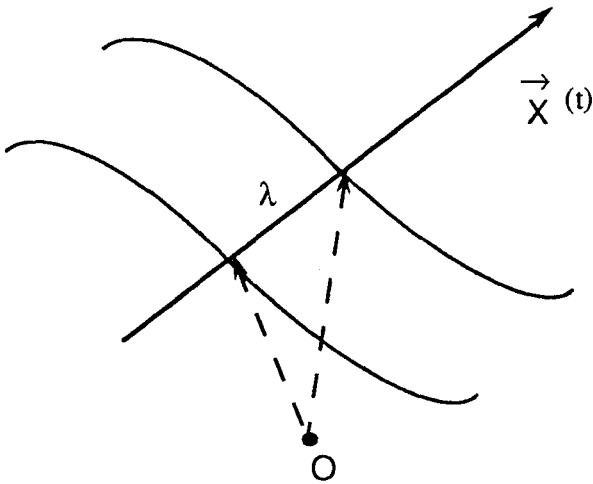
dayanak eğrisi ve

$$X : I \rightarrow \bigcup_{t \in I} T_{\alpha(t)} E^3$$

Doğrultman vektör alanı verildiğinde, herhangi bir noktası

$$x(t, \lambda) = \alpha(t) + \lambda \vec{X}(t), (t \in I, \lambda \in \mathbb{R}^*)$$

olarak yazılabilir (Hacısalıhoğlu, H, H.1983).



Şekil 1.1.1

Bundan sonra bir regle yüzey yukarıda tanıtılan anlamıyla kısaca $\varphi(t, \lambda)$ şeklinde ifade edilecektir.

Böylece boğaz noktalarının geometrik yeri olarak striksiyon çizgisi aşağıdaki gibi tanımlanır;

Tanım 1.1.3: Bir $\varphi(t, \lambda)$ regle yüzeyinin anadoğrusu, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken bu anadoğru üzerindeki boğaz noktalarının geometrik yerine striksiyon çizgisi adı verilir (Hacısalihoglu, H, H., 1963).

Bir $\varphi(t, \lambda)$ regle yüzeyinin merkez noktalarını, dayanak eğrisinin $\vec{\alpha}$ yer vektörü ve $\vec{X}(t)$ doğrultman vektörü ile merkez noktasının dayanak eğrisine olan u - uzaklığı cinsinden

$$\vec{\alpha}(t) = \alpha(t) + u \vec{X}(t)$$

Şeklinde ifade edebiliriz. Buradaki u -parametresi de

$$u = - \frac{\langle D_t \vec{X}, \vec{t} \rangle}{\|D_t X\|^2}$$

şeklinde dir (Hacısalihoglu, H, H.1983).

1.2 E^n de Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler

E^n , n -boyutlu öklit uzayında bir,

$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t), I \subset \mathbb{R}$$

eğrisi ve α eğrisinin her bir $\alpha(t)$ noktasında tanımlı ve ortonormal

$$\left\{ \vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_k(t) \right\}$$

vektör alan sistemi verilmiş olsun. Buna göre,

$$\langle \vec{e}_i(t), \vec{e}_j(t) \rangle = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq k$$

olur. $e_i(t)$ vektör alanının ∞ -boyunca $\infty'(t)$ yönündeki kovaryant türevini $\dot{e}_i(t)$ ile gösterirsek, $(D_{\infty'(t)} e_i = \dot{e}_i(t))$

$$\langle \dot{e}_i, e_j \rangle + \langle e_i, \dot{e}_j \rangle = 0, \quad 1 \leq i, j \leq k$$

dir.

E^n öklid uzayının $\infty(t) = P$ noktasındaki tanjant uzayı $T_{E^n} P$ olmak üzere, $\{e_i(t)\}$ - sistemi $T_{E^n} P$ uzayının k -boyutlu ($1 \leq k \leq n - 2$) bir alt vektör uzayını gerer. Bu altuzay her $t \in I$ 'ya karşılık gelen $\infty(t)$ noktasında $E_k(t)$ ile gösterilir. Böylece,

$$E_k(t) = S_p \left\{ \vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_k(t) \right\} \subset T_{E^n} P$$

olup aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 1.2.1: 1-parametreye bağlı bir k -boyutlu altuzay tarafından üretilen yüzeye n -boyutlu E^n öklid uzayında genelleştirilmiş regle yüzey denir ve $(k+1)$ -regle yüzey olarak adlandırılır (Frank, H. ve Giering, O.).

1.2.1 tanıma göre genelleştirilmiş regle yüzeyin bir parametrik ifadesini,

$$\infty : I \rightarrow E^n$$

dayanak eğrisi yardımıyla,

$$x(t, u_i) = \infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\{e_i(t)\}$ herbir $t \in I$ için ortonormal çatı alanıdır.

1.3 E^3 de Study Dönüşümü

Bu kısımda koneksiyonların, dual sayı temsillerinin incelenmesinde kullanacağımız kadarıyla Study dönüşümünü vereceğiz.

Tanım 1.3.1: \mathbb{R} reel sayılar cümlesi olmak üzere,

$$\text{ID} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

cümlesi üzerinde, toplama işlemi:

$$\oplus : \text{ID} \times \text{ID} \rightarrow \text{ID}$$

$$((a, a^*), (b, b^*)) \rightarrow (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$$

çarpma işlemi:

$$\otimes : \text{ID} \times \text{ID} \rightarrow \text{ID}$$

$$((a, a^*), (b, b^*)) \rightarrow (a, a^*) \otimes (b, b^*) = (ab, ab^* + a^*b)$$

ve eşitlik bağıntısı her bir $A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*) \in \text{ID}$ için,

$$a = b$$

$$a^* = b^* \Leftrightarrow A = B$$

olarak tanımlansın. Bu işlemlerle birlikte ID cümlesine dual sayılar sistemi ve $\forall (a, a^*) \in \text{ID}$ elemanına da bir dual sayı denir (Hacısalıhoğlu, H, H.1983).

Tanım 1.3.2: $\text{ID}^3 = \text{ID} \times \text{ID} \times \text{ID}$ olmak üzere $X \in \text{ID}^3$ elemanı

$\vec{X} = A + \epsilon A^*$ şeklinde yazılabilir., burada $A, A^* \in \mathbb{R}^3$ dir. Bu \vec{X} için,

$$\|\vec{X}\| = \left(\|\vec{A}\|, \frac{\langle A, A^* \rangle}{\|\vec{A}\|} \right), \vec{A} \neq 0$$

olarak tanımlı $\|X\| \in \text{ID}$ sayısına $\vec{X} \in \text{ID}^3$ ün normu denir

(Hacısalıhoğlu, H, H.1983).

$$\text{Tanım 1.3.3: } \left\{ \vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \mid \|\vec{X}\| = (1, 0), x, x^* \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

cümlesine ID^3 de birim dual küre denir (Hacısalıhoğlu, H, H., 1983).

Teorem 1.3.1: $A \in ID^3$ olmak üzere ID^3 ID-modülde denklemi,

$$\|\vec{A}\| = (1, 0)$$

olan birim dual kürenin noktaları \mathbb{R}^3 deki yönlü doğrulara bire-bir karşılık gelirler (Hacısalıhoğlu, H, H.1983).

2.1 ASLİ LİF DEMETLERİ VE KONEKSİYONLAR

Bu tezin asıl amacı regle yüzeylerin asli lif demet yapıları ve koneksiyonlar olduğundan kısaca asli lif demetleri ile koneksiyonları burada tanıtacağız. Bu kısım için kaynaklar kısmında verilen, "Foundations of differential geometry" adlı kitap temel kaynağımızdır.

2.1.1 Temel vektör alanları

Burada okuyucuya kolaylık sağlayacağı düşüncesiyle bazı kavramları hatırlatmakta yarar umuyoruz. 1-parametrelili grup ile,

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, m) &\longrightarrow \varphi(t, m) \end{aligned}$$

dönüşümünü anlayacağız (Kobayashi, S. ve Nomizu, M., 1963), öyleki bu dönüşüm için,

a) $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \varphi_t: M &\longrightarrow M \\ m &\longrightarrow \varphi_t(m) = \varphi(t, m), \quad \text{bir diffeomorfizmdir,} \end{aligned}$$

b) $\forall t, s \in \mathbb{R}$ ve $\forall P \in M$ için

$$\varphi_{t+s}(P) = (\varphi_t \circ \varphi_s)(P) = \varphi_t(\varphi_s(P)) \quad \text{dir.}$$

G bir Lie grubu ve M bir manifold olmak üzere,

$$\begin{aligned} R: G \times M &\xrightarrow{C^\infty} M \\ (g, m) &\longrightarrow R(g, m) = R_g(m) \end{aligned}$$

dönüşümü,

a) $\forall g \in G$ için

$$R_g: M \longrightarrow M, \quad \text{bir diffeomorfizm}$$

b) $R_{g_1 g_2} = R_{g_2} \circ R_{g_1}$ şartlarını sağlıyorsa R ye G nin M üzerine

bir sağ etkisi denir.

Üstelik;

$$c) (\exists x) (x \in M \text{ ve } R_g(x) = x \Rightarrow g = e) \text{ ise}$$

R' ye sağ serbest etki adı verilir (Kobayashi, S. ve Nomizu, M., 1963).

$\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, 1-parametrel grubu verilsin. $\vec{X} \in \mathcal{X}(M)$ ve $\forall P \in M$ için,

$$X_P = (\varphi_P)_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$$

ise X 'e φ 1-parametrel grubunun belirlediği vektör alanı denir (Kobayashi, S. ve Nomizu, M).

Tanım 2.1.1: $P, M; C^\infty$ iki manifold ve G bir Lie grubu olsun. O zaman, bir $R : G \times P \longrightarrow P$ dönüşümü için,

ALD1) $R : G \times P \longrightarrow P$, sağ serbest etkidir,

ALD2) P/G ve M ($P/G \cong M$), diffeomorfik, daha fazlası,

$$\pi : P \longrightarrow M$$

C^∞ dir,

ALD3) P Lokal aşikârdır (yani $\forall U \subset M$ açığı için,

$$\exists \psi : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\text{diffeo.}} U \times G$$

$$u \longrightarrow \psi(u) = (\pi(u), \phi(u))$$

öyleki,

$$\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow G$$

$$u \longrightarrow \phi(u)$$

olmak üzere,

$$\phi(u a) = \phi(u) \cdot a \text{ dır.}$$

ise $P(M, G)$ 3-lüsüne bir asli lif demeti denir (Kobayashi, S. ve Nomizu, M.).

Tanım 2.1.2: $P(M, G)$ asli lif demeti verilsin.

$$G_u = T_u \pi^{-1}(x)$$

olmak üzere,

$$\Gamma : P \longrightarrow \bigcup_{u \in P} \{ Q_u \mid Q_u \subset T_u P \}$$

$$u \longrightarrow \Gamma(u) = Q_u$$

dönüşümü verilsin. Eğer,

K1) $T_u P = G_u \oplus Q_u, \forall u \in P$ dir,

K2) $\forall g \in G, \forall u \in P$ için,

$R_g(Q_u) = Q_{ug}, R_g \circ \lrcorner = \lrcorner \circ R_g$ dir,

K3) $\lrcorner: u \rightarrow \lrcorner(u)$ diferensiyellenebilirdir ise \lrcorner 'ya $P(M, G)$ üzerinde bir koneksiyon adı verilir (Kobayashi, S. ve Nomizu, M.).

2.2.1 Bir koneksiyonun koneksiyon ve eğrilik formu

G bir Lie grubu, M bir C^∞ manifold olsun.

$R: G \times M \rightarrow M$

$(g, x) \rightarrow xg$

R sağ etkisi verilsin. G Lie grubu üzerinde sol invaryant vektör alanlarını $\chi_L(G)$ ile gösterelim. $A \in \chi_L(G)$, A 'ya karşılık gelen 1-parametrelili grup φ olsun.

$H = \{ \exp(tA) \mid t \in \mathbb{R} \} \subset G, a_t = \exp(tA)$

$a_t: M \rightarrow M$

diffeomorfizm olmak üzere,

$H \times M \rightarrow M$

$(a_t, x) \rightarrow a_t(x)$

nın M de belirlediği $A^* \in \chi(M)$ vektör alanına; A 'ya, R yardımıyla karşılık gelen temel vektör alanı denir.

$P(M, G)$ asli lif demeti ve \lrcorner koneksiyonu verilsin.

$w: P \rightarrow \bigcup_{u \in P} \text{Hom}(T_u P, \chi_L(G))$

$u \rightarrow w_u: T_u P \rightarrow \chi_L(G)$

$X_u \rightarrow w_u(X_u) = A$

$\Leftrightarrow A$ nın karşılık geldiği temel vektör alanı A^* olmak üzere

$A^* = w(X_u)$ ise $w, \chi_L(G)$ -değerli 1-formuna \lrcorner koneksiyonunun koneksiyon 1-formu denir (Kobayashi, S. ve Nomizu, M.).

Burada $\mathfrak{g}(X_u)$ ile X_u 'nin $T_u P = G_u \oplus Q_u$ yazılışında G_u daki bileşeni gösterilmiştir.

2.2.2 Bir koneksiyonun yapı denklemleri

$P(M, G)$ asli lif demetinde Γ koneksiyonunun koneksiyon 1-formu w -verilsin. $X, Y \in T_u P$ olmak üzere,

$$d w (X, Y) = -\frac{1}{2} [w (X), w (Y)] + \Omega (X, Y)$$

dir. Bu eşitliğe Γ nın yapı denklemi denir (Kobayashi, S. ve Nomizu, M.).

Burada,

$$\Omega = D w = (d w) \circ h$$

w eğrilik formudur (Kobayashi, S. ve Nomizu, M.).

3.1 REGLE YÜZEYLERİN ASLİ LİF DEMET YAPILARI VE KONEKSİYONLARIN DUAL SAYI TEMSİLLERİ

Bu bölüm E^3 de regle yüzeylerin bir asli lif demet yapısını ve bağlı olarak bu yapı üzerindeki koneksiyonların Study dönüşümü ile karşılık tutulduğu dual temsillerinin bir incelenmesine ayrılmıştır. Bu kısım sonuçları itibari ile orijinaldir.

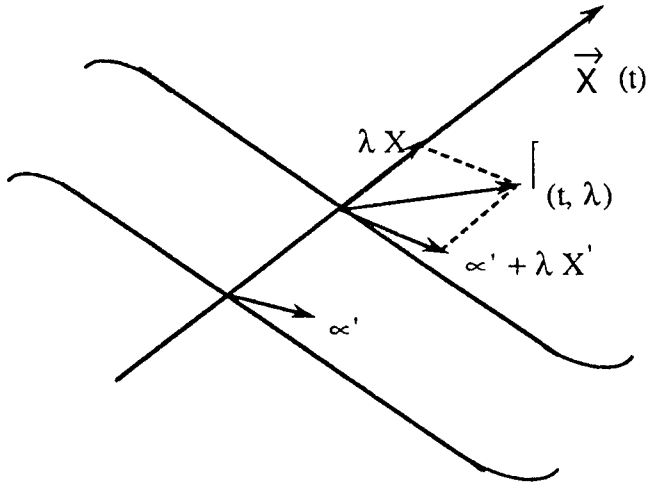
Doğrultman vektör alanı \vec{X} , $\|\vec{X}(t)\| = 1$ ve dayanak eğrisi

$$\alpha : I \rightarrow E^3$$

olmak üzere bir regle yüzeyin parametrik gösterimi,

$$x(t, \lambda) = \alpha(t) + \lambda \vec{X}(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$$

şeklinde idi.



Şekil 3.1.1

$$P = \left\{ \alpha(t) + \lambda \vec{X}(t) \mid t \in I, \lambda \in \mathbb{R}^* \right\}$$

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \alpha(t) \mid \alpha : I \rightarrow E^3, t \in I \\ t \rightarrow \alpha(t) \end{array} \right\}$$

$$G = GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$$

olmak üzere, $P (M, \mathbb{R}^*)$ 'in Tanım 2.1.1 anlamında bir asli lif demeti olduğunu gösterebiliriz; Bunun için ALD1, ALD2, ve ALD3 özelliklerinin varlığını göstermeliyiz:

$$\text{ALD1) } R : P \times GL(1, \mathbb{R}) \longrightarrow P$$

$$\left(\infty(t) + \lambda X(t), g \right) \longrightarrow R \left(\infty(t) + \lambda X(t), g \right) = \infty(t) + \lambda g \vec{X}(t)$$

sağ serbest etkidir. (P nin C^∞ yapısını,

$$x : P \rightarrow I \times \mathbb{R}^*$$

$$\infty(t) + \lambda \vec{X}(t) \rightarrow (t, \lambda)$$

haritası ile verilmiş varsayacağız). Buna göre R nin C^∞ olduğunu aşağıdaki diagramdan kolayca elde edebiliriz.

$$\begin{array}{ccc} P \times \mathbb{R}^* & \xrightarrow{R} & P \\ \downarrow x & & \downarrow x \\ I \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* & \xrightarrow{F} & I \times \mathbb{R}^* \end{array}$$

Diagram 3.1.1

Burada $y : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ özdeşlik dönüşümü id_I , I nin özdeşlik dönüşümü ve

$$\zeta_g : (\lambda, g) \rightarrow \lambda g$$

çarpma işlemi olmak üzere,

$$F \left((t, \lambda), g \right) = id_I \times \zeta_g$$

olup R C^∞ olur.

ii) R sağ etkidir:

$$R : P \times \mathbb{R}^* \rightarrow P, R\left(\underbrace{\infty(t) + \lambda X(t)}_{\infty(t)}, g\right) = \infty(t) + \lambda g \vec{X}(t)$$

olmak üzere, $b \in \mathbb{R}^*$ için,

$$R_b : P \longrightarrow P$$

$$\infty(t) + \lambda \vec{X}(t) \rightarrow \infty(t) + \lambda b \vec{X}(t)$$

dir. Böylece $\forall b, c \in \mathbb{R}^*$ için

$$R_{bc} = R_c \circ R_b$$

olup R sağ etkidir. (Gerçekte $R_c \circ R_b = R_b \circ R_c$ olduğunu da burada ifade edebiliriz).

iii) R etkisi serbesttir:

Bir $b \in \mathbb{R}^*$ için, göstermeliyiz ki;

$$"R_b\left(\infty(t) + \lambda \vec{X}(t)\right) = \infty(t) + \lambda \vec{X}(t) \Rightarrow b = 1"$$

dir. Gerçekten de,

$$R_b\left(\infty(t) + \lambda \vec{X}(t)\right) = \infty(t) + \lambda X(t)$$

$$\infty(t) + \lambda b \vec{X}(t) = \infty(t) + \lambda X(t)$$

$$\Rightarrow \lambda b = \lambda \quad ; (\lambda \in \mathbb{R}^*)$$

$$\Rightarrow b = 1$$

dir. Böylece R etkisi serbesttir.

$$ALD2) \left\{ \infty(t) + \lambda \vec{X}(t) \mid t \in I, \lambda \in \mathbb{R}^* \right\} / GL(1, \mathbb{R}) \cong M$$

dir. Üstelik,

$$\pi : P \longrightarrow M$$

$$\infty(t) + \lambda \vec{X}(t) \longrightarrow \infty(t)$$

dönüşümü de C^∞ dur. Burada \cong ile diffeomorfizm gösterilmiştir.

$P/GL(1, \mathbb{R}) \cong \in(I)$ olduğu R etkisi altında yörüngelerin anadoğrular olmasından dolayı açıktır. π nin C^∞ olması Diagram 3.1.2

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{\pi} & \in(I) \\
 \downarrow x & & \downarrow \in_i \\
 I \times \mathbb{R}^* & \xrightarrow{G} & I
 \end{array}$$

Diagram 3.1.2

den $G = iz_1$ olması nedeniyledir. Dolayısıyla π differensiyellenebilirdir.

ALD3) P Lokal aşikârdır: Gerçekten de M nin her bir $\in(I_i) = U_i$ açık altcümlesi için,

$$\pi^{-1}(\in(I_i)) = \left\{ \in(t) + \lambda \vec{X}(t) \mid t \in I, \lambda \in \mathbb{R}^* \right\}$$

olup,

$$\begin{aligned}
 \exists \psi: \quad \pi^{-1}(\in(I_i)) &\rightarrow \in(I_i) \times \mathbb{R}^* \\
 \in(t) + \lambda \vec{X}(t) &\rightarrow \psi \left(\in(t) + \lambda \vec{X}(t) \right) = (\in(t), \lambda)
 \end{aligned}$$

bir diffeomorfizmdir. (Ayrıca,

$$\pi \left(\in(t) + \lambda \vec{X}(t) \right) = \in(t) \in \in(I_i)$$

$$\phi \left(\in(t) + \lambda \vec{X}(t) \right) = \lambda \in GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$$

$$R_g \left(\phi \left(\infty(t) + \lambda \vec{X}(t) \right) \right) = \phi \left(\infty(t) + \lambda_g \vec{X}(t) \right)$$

dir). ψ nin bir diffeomorfizm olduğu Diagram 3.1.3 gereğince; ψ nin bir koordinat temsilcisi H olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\infty(I_i)) & \xrightarrow{\psi} & \infty(I_i) \times GL(1, \mathbb{R}) \\ \downarrow x & & \downarrow \infty_i \\ I_i \times \mathbb{R}^* & \xrightarrow{H} & I_i \times \mathbb{R}^* \\ & & \downarrow \text{id}_{\mathbb{R}^*} \end{array}$$

Diagram 3.1.3

H nin özdeşlik dönüşümü ve,

$$\psi = \left(\infty_i \times \text{id}_{\mathbb{R}^*} \right)^{-1} \circ H \circ x$$

olduğundan aşikârdır.

Böylece $P(M, \mathbb{R}^*)$ sistemi bir asli lif demetidir. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 3.1.1: $\infty : I \rightarrow E^3$ bir C^∞ eğri ve $X : I \rightarrow \bigcup_{t \in I} T_{\infty(t)} E^3$ bir C^∞

kesit olmak üzere,

$$P = \left\{ \infty(t) + \lambda \vec{X}(t) \mid t \in I, \lambda \in \mathbb{R}^* \right\}$$

regle yüzeyi

$$R : P \times GL(1, \mathbb{R}) \rightarrow P$$

$$\left(\left(\infty(t) + \lambda \vec{X}(t) \right), g \right) \rightarrow \infty(t) + \lambda_g \vec{X}(t)$$

etkisi gözönüne alındığında $\infty(t)$ üzerinde $GL(1, \mathbb{R})$ etki grubuyla birlikte bir asli lif demetidir. Bu asli lif demetini kısaca $P(M, \mathbb{R}^*)$ ile göstereceğiz.

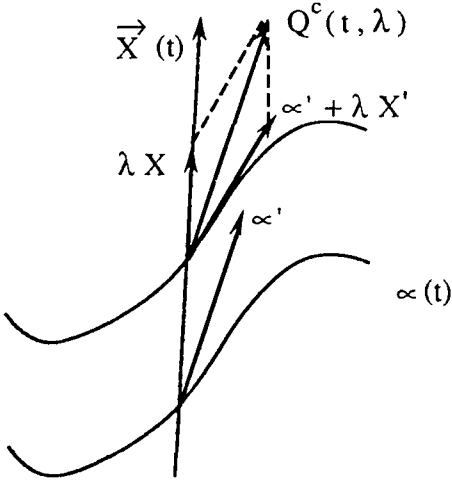
Teorem 3.1.2: Teorem 3.1.1 anlamında $P (M, \mathbb{R}^*)$ verilsin. O zaman $\forall t \in I$ için,

$$\infty (t) + \lambda \vec{X} (t) \rightarrow \text{Sp} \left\{ \left(\infty' + \lambda \vec{X}' + c \lambda \vec{X} \right) (t) \right\} = Q_{(t, \lambda)}^c$$

P de bir koneksiyondur. Burada ∞' , X' ile; ∞ -boyunca ∞ ve \vec{X} in kovaryant türevi ve $\text{Sp} \{\beta\}_{\infty (t)}$ ile de; $\infty (t)$ de β nın gerdiği vektör uzayı ile birleşen afin altuzay gösterilmiştir. Şekil 3.1.2

$$R_g : P \rightarrow P, R_g \left(\infty (t) + \lambda X (t) \right) = \infty (t) + \lambda_g X (t)$$

dönüşümü altında;



Şekil 3.1.2

$$R_{g*} \left(\infty' (t) + \lambda X' (t) \right) = \infty' (t) + \lambda_g X' (t)$$

ve böylece

$$R_{g*} \left(Q_{(t, \lambda)}^c \right) = Q_{(t, \lambda_g)}^c$$

dir. O halde $Q_{(t, \lambda)}^c$, R_g altında sağ invaryanttır. Böylece Tanım 2.1.2 den K2) sağlanır. K1) ve K3) ün sağlandığı görülebilir. O halde;

$\infty (t) + \lambda \vec{X} (t) \rightarrow Q_{(t, \lambda)}^c$, P üzerinde bir koneksiyondur.

Teorem 3.1.2 de verilen koneksiyonun belirlediği regle yüzeye koneksiyon regle yüzeyi denir.

Tanım 2.1.1 anlamında $P (M, \mathbb{R}^*)$ verilsin.

$(t, \lambda) \longrightarrow Q_{(t, \lambda)}^c = Sp \{ \infty' + \lambda X' + c \lambda X \}$ koneksiyonunun koneksiyon 1-formu w olsun.

$$Z_{(t, \lambda)} \in T_u P \Rightarrow Z_{(t, \lambda)} = p \left(\infty' + \lambda X'(t) \right) + q \vec{X}(t)$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$G_{(t, \lambda)} \equiv \mathbb{R}^*_{(t, \lambda)} \equiv Sp \{ X_t \} \left(\infty(t) + \lambda \vec{X}(t) \right)$$

$$Q_{(t, \lambda)}^c = Sp \left\{ \infty' + \lambda X' + c \lambda \vec{X} \right\}$$

olduğu gözönüne alınırsa;

$$Z_{(t, \lambda)} = k_1 \left(\infty' + \lambda X' + c \lambda X \right) + k_2 \vec{X}$$

yazılımı yardımıyla,

$$p \left(\infty' + \lambda X' \right) + q \vec{X} = k_1 \left(\infty' + \lambda X' + c \lambda X \right) + k_2 \vec{X}$$

$$\Rightarrow k_1 = p$$

$$\Rightarrow k_1 c \lambda + k_2 = q$$

$$\Rightarrow k_2 = q - k_1 c \lambda, \quad k_1 = p$$

$$\Rightarrow k_2 = q - c \lambda p, \quad k_1 = p$$

dir. Dolayısıyla \lceil koneksiyonunun w koneksiyon 1-formu için,

$$w \left(p \left(\infty' + \lambda X' \right) + q X(t) \right) = q - c \lambda p$$

elde edilir.

$$(t, \lambda) \rightarrow Q_{(t, \lambda)}^c$$

koneksiyonu 1-boyutlu yatay uzay alanı tanımladığından, eğrilik formu sıfırdır.

Örnek 3.1.1 : $P(M, \mathbb{R}^*)$ da M yerine $Z = 0$ düzleminde orijin

merkezli birim çember alalım. $\vec{X}(t) = (0,0,1)$ doğrultmanı yardımıyla M striksiyon çizgisi olacak şekilde elde edilen regle yüzey (silindir) de P olsun. O zaman,

$$x \in M = \{ (\cos t, \sin t) \mid t \in [0, 2\pi] \}$$

$$u = (x, b) = ((\cos t, \sin t), b) = (\cos t, \sin t, b)$$

olmak üzere,

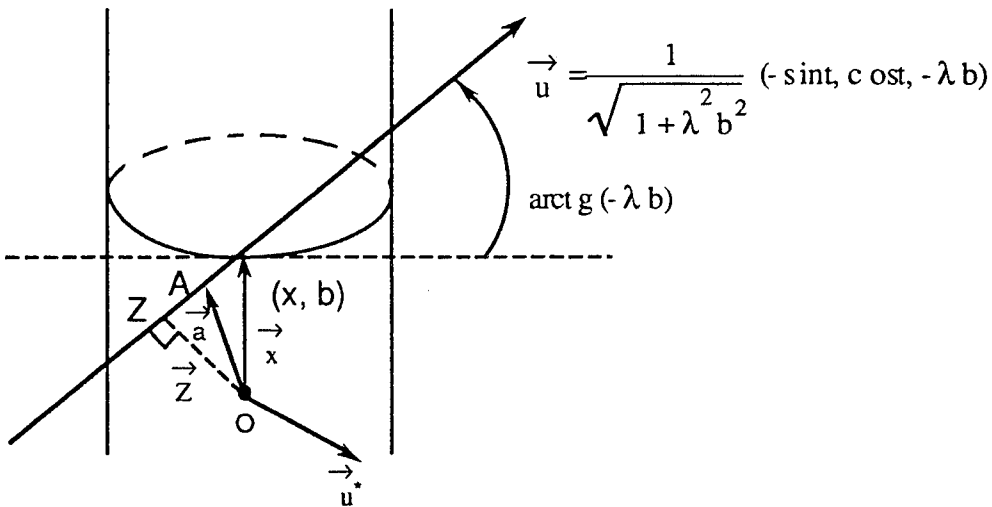
$$u \rightarrow (u) = (1, -\lambda b)$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 b^2}} (-\sin t, \cos t, -\lambda b) \in P$$

dönüşümü $P(M, \mathbb{R}^*)$ üzerinde bir koneksiyon tanımlar.

$P(M, \mathbb{R}^*)$ regle yüzeyi (asli lif demeti) üzerinde bir koneksiyon verilmesi demek, mademki P nin her noktasında; bu noktadaki tanjant uzayda kalan, daha fazlası sağ etki altında invaryant bir doğrunun (yatay uzay) verilmesi demektir, o halde Study dönüşümü ile, bu regle yüzey üzerindeki koneksiyon ile belirlenmiş bu doğruların birim dual küredeki resimlerini arayabiliriz. Önce örnek 3.1.1 deki silindir yüzeyi için asli lif demet yapısı gözönüne alındığında örnek: 3.1.1 ile tanıtılan koneksiyonun birim dual küredeki resmini hesaplayalım.

Örnek 3.1.2



Şekil 3.1.3

Q_u^c 'nin bir birim doğrultü vektörü $\vec{\vartheta}$ olsun. Böylece (x, b) noktasından geçen yatay uzayın herhangi bir noktası A olmak üzere,

$$\left(\vec{x} - \vec{a} \right) \wedge \vec{\vartheta} = 0$$

$$\vec{x} \wedge \vec{\vartheta} - \vec{a} \wedge \vec{\vartheta} = 0$$

ve dolayısıyla

$$\vec{x} \wedge \vec{\vartheta} = \vec{a} \wedge \vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}^*$$

olup, \mathbb{R}^3 deki standart baza göre

$$x = \cos t \vec{e}_1 + \sin t \vec{e}_2 + b \vec{e}_3 ,$$

$$\vec{\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 b^2}} \left(-\sin t \vec{e}_1 + \cos t \vec{e}_2 - \lambda b \vec{e}_3 \right)$$

olacağından,

$$\vec{\vartheta}^* = \vec{\vartheta} \wedge \vec{\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 b^2}} \left(-\lambda b \sin t - b \cos t, -b \sin t + \lambda b \cos t, 1 \right)$$

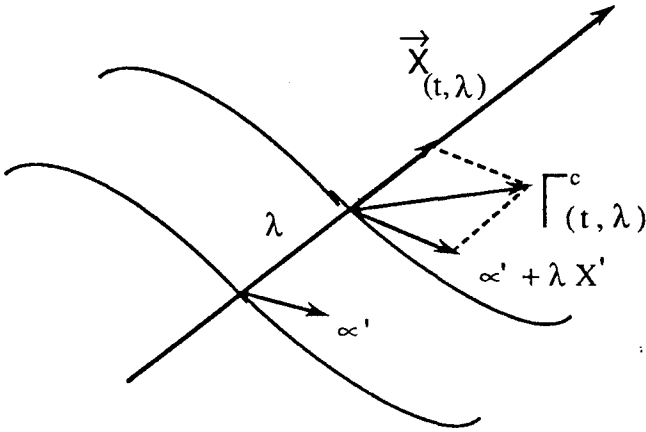
elde edilir.

Böylece P üzerinde bir Q^c koneksiyonu verildiğinde $\left(\vec{u}, \vec{u}^* \right)$ vektör çifti yardımıyla,

$$\vec{A} = \vec{\vartheta} + \varepsilon \vec{\vartheta}^*$$

elde edilir.

Bu bir ışın kompleksine karşılık gelir. Benzer şekilde $P(M, \mathbb{R}^*)$ regle yüzeyi üzerinde elde edilen Q^c koneksiyonu ile belirlenmiş doğruların birim dual küredeki resimleri de birer ışın kompleksine karşılık gelecektir. Bu komplekslerin parametrik denklemleri;



Şekil 3.1.4

$$k(t, \lambda, c) = \frac{\alpha' + \lambda X' + c\lambda X}{\sqrt{\langle \alpha' + \lambda X' + c\lambda X, \alpha' + \lambda X' + c\lambda X \rangle}}$$

$$\frac{\left[\left(\alpha(t) + \lambda X \right) \wedge \left(\alpha' + \lambda X' + c\lambda X \right) \right]}{\sqrt{\langle \alpha' + \lambda X' + c\lambda X, \alpha' + \lambda X' + c\lambda X \rangle}}$$

şeklinde dir. E^3 de $P(M, \mathbb{R}^*)$ asli lif demeti üzerinde bir koneksiyon verilmesi demek ID^3 de bir

$$\varphi(t, \lambda, c)$$

ışın kompleksi verilmesi demektir.

3.2 KONEKSİYON REGLE YÜZEYİNİN AÇILABİLİRLİĞİ VE AÇILIM AÇISI

Tanım 3.2.1: Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir (Hacısalıhoğlu, H, H.1983)

Tanım 3.2.2: Anadoğrusunun birim doğrultman vektörü \vec{X} olan bir $\varphi(t, \lambda)$ regle yüzeyinin anadoğrularına dik bir doğrultunun bir periyot sonra ilk konumu ile yaptığı açığa regle yüzeyin açılım açısı denir ve λ_X ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, H, H.1983) Açılım açısı için;

$\varphi(t, \lambda)$ regle yüzeyinin \vec{X} doğrultman vektörü,

$$\vec{a}_1 = \vec{X} \quad (3.2.1)$$

şeklinde bir ortonormal üç ayaklının ilk bileşeni \vec{a}_1 olarak alalım.

Doğrultmana dik olan vektörü \vec{a}_2 birim vektörü olarak alırsak,

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2$$

şeklinde $\left\{ \begin{matrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{matrix} \right\}$ ortonormal sistemini tesbit etmiş oluruz

(Hacısalıhoğlu, H, H.1983)

Böylece regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca hareket eden H uzayını,

$$H = \text{Sp} \left\{ \begin{matrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{matrix} \right\} \Big|_{\infty(t)}$$

olarak alabiliriz.

Bir tam dönmeden sonra doğrultmanın ilk ve son konumları

aynı olacağından \vec{a}_1 ve \vec{V}_1 ile gösterilecek bu konumlar için

$$\vec{V}_1 = \vec{a}_1$$

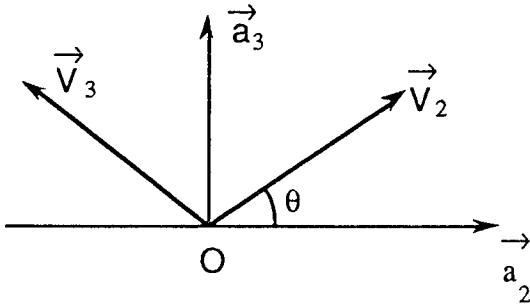
elde edilir. Aynı şekilde üç ayaklının diğer vektörlerinin ilk ve son

konumlarını \vec{V}_2, \vec{V}_3 ve \vec{a}_2, \vec{a}_3 ile gösterelim.

Böylece sabit sistemi $\left\{ \vec{\infty}(t_0); \vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3 \right\}$ ve hareketli

sistemi de $\left\{ \vec{\infty}(t); \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$ şeklinde alalım. İkinci ve üçüncü

eksenlerin ilk ve son konumları arasındaki açı θ ise bu takdirde,



Şekil 3.2.1

$$\vec{a}_2 = \vec{V}_2 \cdot \cos \theta - \vec{V}_3 \cdot \sin \theta \quad (3.2.2)$$

$$\vec{a}_3 = \vec{V}_2 \cdot \sin \theta + \vec{V}_3 \cdot \cos \theta \quad , \quad \theta = \theta(t)$$

yazılabilir. Bu sistemlerin değişimi için t'ye göre diferensiyel alınırsa,

$$\begin{aligned}
d \vec{a}_2 &= d \vec{V}_2 \cdot \cos \theta - d \vec{V}_3 \cdot \sin \theta + \left(-\vec{V}_2 \cdot \sin \theta - \vec{V}_3 \cdot \cos \theta \right) d \theta \\
d \vec{a}_3 &= d \vec{V}_2 \cdot \sin \theta + d \vec{V}_3 \cdot \cos \theta + \left(+\vec{V}_2 \cdot \cos \theta - \vec{V}_3 \cdot \sin \theta \right) d \theta
\end{aligned} \quad (3.2.3)$$

elde edilir (Hacısalıhoğlu, H, H.1983) \vec{V}_2 ve \vec{V}_3 sabit sistemde olduklarından,

$$d \vec{V}_2 = d \vec{V}_3 = 0$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
d \vec{a}_2 &= \left(-\vec{V}_2 \cdot \sin \theta - \vec{V}_3 \cdot \cos \theta \right) d \theta \\
d \vec{a}_3 &= \left(+\vec{V}_2 \cdot \cos \theta - \vec{V}_3 \cdot \sin \theta \right) d \theta
\end{aligned} \quad (3.2.4)$$

olacağından, (3.2.2) den dolayı

$$\begin{aligned}
d \vec{a}_2 &= -\vec{a}_3 d \theta \\
d \vec{a}_3 &= \vec{a}_2 d \theta
\end{aligned} \quad (3.2.5)$$

olur. Buradan $d \theta$ çözülürse,

$$-d \theta = \langle d \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle = -\langle d \vec{a}_3, \vec{a}_2 \rangle \quad (3.2.6)$$

elde edilir (Hacısalıhoğlu, H, H.1983) Eğer (3.2.6) nın $\varphi(t, \lambda)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi boyunca integralini alırsak açılım açısının λ_X değeri,

$$\lambda_X = -\oint d \theta \quad (3.2.7)$$

veya

$$\lambda_x = + \oint_{\infty} \langle d \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle = - \oint_{\infty} \langle d \vec{a}_3, \vec{a}_2 \rangle \quad (3.2.8)$$

olarak bulunur.

Ayrıca $\left\{ \infty(t), \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \right\}$ sisteminin değişimi için,

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi kullanılarak,

$$\begin{bmatrix} d \vec{a}_1 \\ d \vec{a}_2 \\ d \vec{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

şeklinde yazılabileceğinden (Hacısalihoglu, H, H.1983),

$$\langle d \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle = - \langle d \vec{a}_3, \vec{a}_2 \rangle = w_1 \quad (3.2.10)$$

ve dolayısıyla açılım açısı için,

$$\lambda_x = \oint w_1 \quad (3.2.11)$$

elde edilir (Hacısalihoglu, H, H.1983)

3.2.1 Koneksiyon regle yüzeyinin açılabilirliği

$$X_{(t, \vartheta)} = \beta(t) + \vartheta \vec{X}(t) \quad , \quad \beta(t) = \infty(t) + \lambda \vec{X}(t)$$

$$Q_{(t, \vartheta)} = \beta(t) + \vartheta \left(\beta'(t) + c \lambda X_1 \right)$$

nın açılabilir olması için,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \det \left[\beta(t+h) - \beta(t), \beta'(t+h) + c \lambda X_{t+h}, \beta'(t) + c \lambda \vec{X}_t \right] = 0$$

olmalıdır. Böylece,

$$\det \left(\beta'(t), \beta''(t) + c \lambda X_t', \beta'(t) + c \lambda X_t \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left(\beta'(t), \beta'' + c \lambda X_t', \beta'(t) + c \lambda X_t \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left(\beta', \beta'', c \lambda X_t \right) + \det \left(\beta', c \lambda X_t', c \lambda X_t \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow c \lambda \det \left(\beta', \beta'', X_t \right) + c^2 \lambda^2 \det \left(\beta', X_t', X_t \right) = 0$$

$X_{(t, \vartheta)}$ için açılabilirlik şartı:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \det \left(\beta(t+h) - \beta(t), X_{t+h}, X_t \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left(\beta'(t), X_t' + X_t, X_t \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow c \lambda \det \left(\beta'(t), X_t', X_t \right) = 0 \begin{matrix} \lambda \neq 0 \\ \Rightarrow \\ c \neq 0 \end{matrix} \det \left(\beta', X_t', X_t \right) = 0$$

dır. O halde aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.1: $X_{(t, \vartheta)}$ açılabilir olsun. O zaman $Q_{(t, \vartheta)}$ açılabilir, yalnız ve yalnız $\left\{ \beta' \wedge \beta'', X_t \right\}$ lineer bağımlıdır.

Teorem 3.2.2: Doğrultman vektör alanı \vec{X} , $\|\vec{X}(t)\| = 1$, olmak üzere bir $\varphi(t, \lambda)$ regle yüzeyi,

$$\varphi(t, \lambda) = \alpha(t) + \lambda X(t) \text{ öyle ki } \alpha: I \rightarrow E^3, \left(\varphi(t+2\pi, \lambda) = \varphi(t, \lambda) \right) \\ t \rightarrow \alpha(t)$$

yay-parametrizasyonu ile verilsin. $\varphi(t, \lambda)$ regle yüzeyinin bir koneksiyonu,

$$(c, \vartheta) \\ \Gamma = S_p \left\{ \alpha'(t) + \lambda \vec{X}'(t) + c \lambda \vec{X}(t) \right\} \\ (t, \lambda)$$

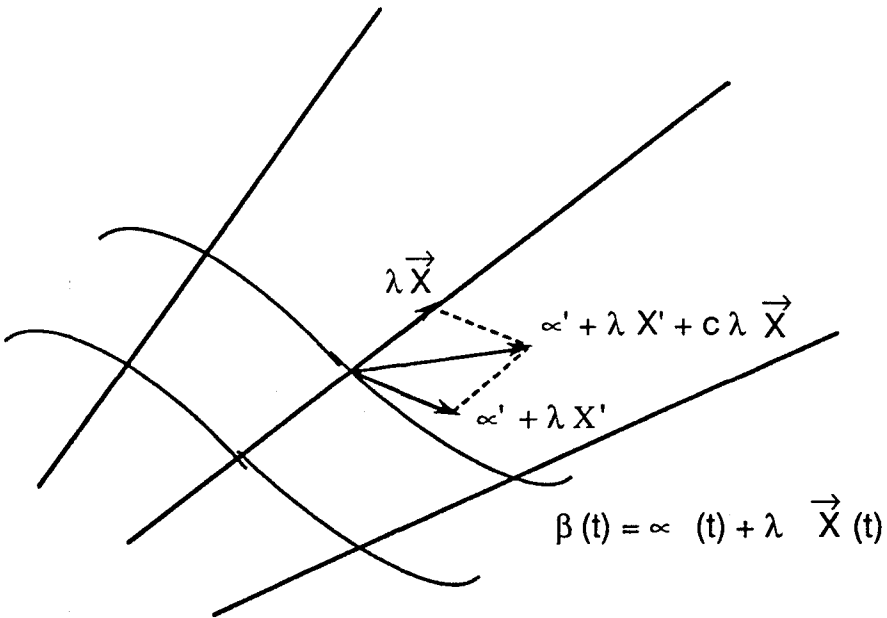
olsun. $Q_{(t, \lambda)}$ koneksiyon regle yüzeyinin açılım açısı,

$$\lambda_{\alpha' + \lambda X' + c \lambda X} = -c \lambda \int \frac{w_1}{\sqrt{M}} + \int \frac{w_2(a\lambda - 1)}{\sqrt{M}}$$

dir. Burada w_1, w_2 ile $N, \varphi(t, \lambda)$ nin birim normal vektör alanı olmak üzere, $\{X_1, \alpha'(t), N\}$ çatı alanının bağ formları gösterilmiştir ve

$$a \in C^\infty(M, \mathbb{R}), c \in \mathbb{R} \text{ ve } M = 1 + c^2 \lambda^2 + \lambda^2 \|X_1\|^2 \text{ dir.}$$

İSPAT:



Şekil 3.2.1

$$\vec{V}_1 = \vec{X}_t \quad , \quad \beta(t) = \alpha(t) + \lambda \vec{X}(t)$$

$$\vec{V}_2 = \vec{\alpha}'(t) \quad , \quad \vec{V}_3 = \vec{N}$$

diyelim. $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ ile $Q_{(t, \lambda)}$ koneksiyon regle yüzeyinin ortonormal çatı alanını gösterelim. Böylece,

$$Y_1 = \frac{\alpha' + \lambda X' + c \lambda \vec{X}}{\sqrt{1 + c^2 \lambda^2 + \lambda^2 \|X_t\|^2}} \quad , \quad M = 1 + c^2 \lambda^2 + \lambda^2 \|X_t\|^2$$

$$\Rightarrow Y_1 = \frac{\|\beta'\| \cdot \frac{\beta'}{\|\beta'\|} + c \lambda \vec{X}}{\sqrt{M}}$$

ve

$$Y_2 = \frac{-c \lambda \cdot \frac{\beta'}{\|\beta'\|} + \|\beta'\| \cdot X_t}{\sqrt{M}} = \frac{-c \lambda \cdot \beta' + \|\beta'\|^2 \cdot X_t}{\|\beta'\| \cdot \sqrt{M}}$$

$$Y_3 = \vec{N}$$

dir. O halde,

$$Y_1 = \frac{\alpha' + \lambda X_t' + c \lambda \vec{X}_t}{\sqrt{M}}$$

$$Y_2 = \frac{-c \lambda (\alpha' + \lambda X_t') + \|\beta'\|^2 \cdot X_t}{\|\beta'\| \sqrt{M}}$$

olup $\{V_1, V_2, V_3\}$ ortonormal olduğundan $X_t' = a \alpha' + c_0 \vec{N}$ olmak üzere,

$$Y_1 = \frac{c\lambda}{\sqrt{M}} \vec{V}_1 + \frac{1-\lambda a}{\sqrt{M}} \vec{V}_2 + \frac{\lambda c_0}{\sqrt{M}} \vec{V}_3$$

ve

$$Y_2 = \frac{-c\lambda \alpha' - c\lambda^2 (-a\alpha' + c_0 N) + \|\beta'\|^2 X_t}{\|\beta'\| \sqrt{M}}$$

$$= \frac{\|\beta'\|}{\sqrt{M}} \vec{V}_1 + \frac{-c\lambda + c\lambda^2 a}{\|\beta'\| \sqrt{M}} \vec{V}_2 + \frac{-c_0 c\lambda^2}{\|\beta'\| \sqrt{M}} \vec{V}_3$$

ve

$$Y_3 = V_3$$

dir. Böylece,

$$A = \frac{1}{\|\beta'\| \sqrt{M}} \begin{bmatrix} c\lambda \|\beta'\| & \|\beta'\|^2 & 0 \\ (1-\lambda a) \|\beta'\| & -c\lambda + c\lambda^2 a & 0 \\ \lambda c_0 \|\beta'\| & -c c_0 \lambda^2 & \|\beta'\| \sqrt{M} \end{bmatrix}$$

dir. Burada;

$$X_t = -a\alpha' + c_0 N$$

olup

$$\langle X_t, \alpha' \rangle = -a$$

dir. O zaman,

$$\|\beta'\| = \|\alpha' + \lambda X_t\| = \sqrt{1 + \lambda^2 a^2 - 2\lambda a}$$

$$= |1 - \lambda a|$$

$$\sqrt{M} = \|\alpha' + \lambda X_t + c\lambda X_t\|$$

$$= \sqrt{1 + \lambda^2 a^2 + c^2 \lambda^2 - 2\lambda a}$$

$$= \sqrt{(\lambda a - 1)^2 + c^2 \lambda^2}$$

değerleri yerlerine yazılırsa,

$$A = \frac{1}{\| \beta' \| \sqrt{M}} \begin{bmatrix} \|1 - \lambda a\| c \lambda & (1 - \lambda a) \|1 - \lambda a\| & 0 \\ (1 - \lambda a)^2 & c \lambda (1 - \lambda a) & 0 \\ 0 & 0 & \|1 - \lambda a\| \sqrt{M} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} c \lambda & 1 - \lambda a & 0 \\ \lambda a - 1 & c \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{M} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} c \lambda & 1 - \lambda a & 0 \\ \lambda a - 1 & c \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

dir. O halde;

$$dA = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cdot a' \cdot 2(\lambda a - 1) \lambda \cdot M^{-\frac{3}{2}} c \lambda & * & 0 \\ * & -\frac{c \lambda^2 (\lambda a - 1) \cdot a'}{\sqrt{M} \cdot M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Burada $*$ = $\left(\frac{1 - \lambda a}{\sqrt{(1 - \lambda a)^2 + c^2 \lambda^2}} \right)$ olup,

$$* = \left(\frac{1 - \lambda a}{\sqrt{(1 - \lambda a)^2 + c^2 \lambda^2}} \right) = \frac{a' \lambda (\sqrt{M})^{-1} - (1 - \lambda a) \frac{(\lambda a - 1) \cdot \lambda a'}{\sqrt{M}}}{M}$$

$$= \frac{-a' \lambda M + (1 - \lambda a)^2 \lambda a'}{M \cdot \sqrt{M}}$$

dir. Sonuç olarak,

$$dA = \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2 c a'(1-\lambda a)}{M \cdot \sqrt{M}} & -\frac{\lambda^3 c^2 a'}{M \cdot \sqrt{M}} & 0 \\ \frac{\lambda^3 c^2 a'}{M \cdot \sqrt{M}} & \frac{\lambda^2 c \cdot a'(1-\lambda a)}{M \cdot \sqrt{M}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$dA A^T = \frac{1}{M \cdot \sqrt{M}} \begin{bmatrix} \lambda^2 c a'(1-\lambda a) & -\lambda^3 c^2 a' & 0 \\ \lambda^3 c^2 a' & \lambda^2 c a'(1-\lambda a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{M}} \cdot C$$

$$C = \begin{bmatrix} c \lambda & \lambda a - 1 & 0 \\ 1 - \lambda a & c \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{M} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{a' \lambda^2 c}{M^2} \begin{bmatrix} 0 & -(1-\lambda a)^2 - \lambda^2 c^2 & 0 \\ M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yani,

$$\Omega = dA A^T = \frac{a' \lambda^2 c}{M} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$Y = A V, \quad dV = \Psi V$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
 dY &= (dA) V + A (dV) \\
 &= (dA) A^T AV + A \Psi V, \quad V = A^{-1} Y = A^T Y \\
 &= (dA) A^T Y + A \Psi A^T Y \\
 &= ((dA) A^T + A \Psi A^T) Y \\
 &= (\Omega + A \Psi A^T) Y
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{c\lambda}{\sqrt{M}} & \frac{1-\lambda a}{\sqrt{M}} & 0 \\ \frac{\lambda a-1}{\sqrt{M}} & \frac{c\lambda}{\sqrt{M}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} c\lambda & \lambda a-1 & 0 \\ 1-\lambda a & c\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{M} \end{bmatrix}$$

dir. Bu değerler yardımıyla,

$$\Psi A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} -w_3(1-\lambda a) & w_3 c\lambda & -w_2 \sqrt{M} \\ -w_3 c\lambda & -w_3(\lambda a-1) & w_1 \sqrt{M} \\ w_3 c\lambda - w_1(1-\lambda a) & w_2(\lambda a-1) - w_1 c\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \Psi A^{-1} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} c\lambda & 1 - \lambda a & 0 \\ \lambda a - 1 & c\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot B$$

dir. Burada

$$B = \begin{bmatrix} -w_3(1 - \lambda a) & w_3 c\lambda & -w_2 \sqrt{M} \\ -w_3 c\lambda & -w_3(\lambda a - 1) & w_1 \sqrt{M} \\ w_3 c\lambda - w_1(1 - \lambda a) & w_2(\lambda a - 1) - w_1 c\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

olup

$$A \Psi A^{-1} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} 0 & -w_3 c^2 \lambda^2 - w_3(\lambda a - 1)^2 & \sqrt{M} [c\lambda w_2 - w_1(1 - \lambda a)] \\ w_3 M & 0 & \sqrt{M} [(a\lambda - 1) w_2 c\lambda - w_1] \\ \sqrt{M} [-c\lambda w_2 + w_1(1 - \lambda a)] & \sqrt{M} [-w_2(\lambda a - 1) + w_1 c\lambda] & 0 \end{bmatrix}$$

böylece,

$$A \Psi A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & \frac{1}{\sqrt{M}} [c\lambda w_2 - w_1(1 - \lambda a)] \\ w_3 & 0 & \frac{1}{\sqrt{M}} [c\lambda w_1 - w_2(\lambda a - 1)] \\ \frac{1}{\sqrt{M}} [c\lambda w_2 - w_1(1 - \lambda a)] & \frac{1}{\sqrt{M}} [c\lambda w_1 - w_2(\lambda a - 1)] & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu ise,

$$\Omega + A \Psi A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-c\lambda^2 a'}{M} & 0 \\ \frac{c\lambda^2 a'}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & \frac{1}{\sqrt{M}} [c\lambda w_2 - w_1(1-\lambda a)] \\ w_3 & 0 & \frac{1}{\sqrt{M}} [c\lambda w_1 - w_2(1-\lambda a)] \\ \frac{1}{\sqrt{M}} [c\lambda w_2 - w_1(1-\lambda a)] & \frac{1}{\sqrt{M}} [c\lambda w_1 - w_2(a\lambda - 1)] & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\left(w_3 + \frac{c\lambda^2 a'}{M}\right) & \frac{1}{\sqrt{M}} (c\lambda w_2 - w_1(1-\lambda a)) \\ w_3 + \frac{c\lambda^2 a'}{M} & 0 & \frac{1}{\sqrt{M}} (c\lambda w_1 - w_2(1-\lambda a)) \\ \frac{1}{\sqrt{M}} (c\lambda w_2 - w_1(1-\lambda a)) & \frac{1}{\sqrt{M}} (c\lambda w_1 - w_2(a\lambda - 1)) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ 2 & 2 & 2 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ 3 & 3 & 3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & w_3^Y & -w_2^Y \\ -w_3^Y & 0 & w_1^Y \\ w_2^Y & -w_1^Y & 0 \end{bmatrix}$$

demektir. Buna göre,

$$w_1^Y = \Omega_3^2 = -\frac{1}{\sqrt{M}} (c\lambda w_1 - w_2(a\lambda - 1))$$

olup, koneksiyon regle yüzeyi için açılım açısı,

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha' + \lambda x' + c\lambda x} &= \oint w_1^Y \\ &= -c\lambda \oint \frac{w_1}{\sqrt{M}} + \oint \frac{w_2(a\lambda - 1)}{\sqrt{M}} \end{aligned}$$

dir. Burada integraller $x(t) = \alpha(t) + \lambda X_t$ eğrisi boyunca hesaplanmıştır.

$$\langle x_t', \alpha'(t) \rangle = -a = \frac{1}{\lambda}$$

olması halinde

$$\lambda_{\alpha' + \lambda x' + c\lambda x} = -c\lambda \oint \frac{w_1}{\sqrt{M}}$$

dir.

4.1 GENELLEŞTİRİLMİŞ REGLE YÜZEYLERİN ASLİ LİF DEMET YAPILARI VE KONEKSİYONLAR

Bu bölümde 1.2.1 deki $(k+1)$ -regle yüzeylerin bir asli lif demet yapılarını ve bu demetler üzerinde koneksiyonlarını vereceğiz.

1.2.1 tanıma göre bir genelleştirilmiş regle yüzeyin C^∞ yapısını

$$\infty : I \xrightarrow{C^\infty} E^n$$

olmak üzere,

$$x(t, u_i) = \infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t), \quad u_i \in \mathbb{R}, u_i \neq 0$$

şeklindeki parametrizasyon ile tanımlayabiliriz. Burada $\{e_i(t)\}$ her bir $t \in I$ için ortonormal C^1 çatı alanıdır. Şimdi,

$$P = \left\{ \infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t) \mid t \in I, u_i \in \mathbb{R}^* \right\}$$

$$M = \infty(I)$$

manifoldlarını gözönüne alalım. $D_k(\mathbb{R}^*) = \tilde{G}$ ile

$$\left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \lambda_k \end{bmatrix} \mid \forall \lambda_i \in \mathbb{R}^* \right\} \subset GL(n, \mathbb{R})$$

Lie altgrubunu göstereceğiz ve bundan sonra köşegen üzerindeki bileşenleri $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ olmak üzere bu altgrubun herhangi bir elemanını da $[\lambda_i]$ şeklinde temsil edeceğiz.

$$R : P \times D_k(\mathbb{R}^*) \longrightarrow P$$

$$\left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t), [\lambda_i] \right) \longrightarrow \infty(t) + \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i e_i(t)$$

etkisini tanımlayalım. Bu etki ile $P(M, \tilde{G})$ bir asli lif demetidir. Bunun için 2.1.1 tanımın gerçekleşmesi gerekir. İlgili aksiyomların sağlandığını aşağıdaki şekilde görebiliriz:

ALD1) R sağ serbest etkidir:

R nin bir koordinat temsilcisi F olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc}
 P \times D_k(\mathbb{R}^*) & \xrightarrow{R} & P \\
 \downarrow x_k = \text{id}_{\mathbb{R}^k} & & \downarrow x_k = \text{id}_{\mathbb{R}^k} \\
 I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{F} & I \times \mathbb{R}^k
 \end{array}$$

Diagram 4.1.1

$F((t, (u_1, \dots, u_k)), g_1, \dots, g_k) = (t, u_1 g_1, \dots, u_k g_k)$ F ve R C^∞ dur.

ii) R bir sağ etkidir:

$$R : P \times D_k(\mathbb{R}^*) \rightarrow P$$

$$\text{olup, } \forall g_1, g_2 \in D_k(\mathbb{R}^*), \forall \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t) \right) \in P$$

için, g_1 ve g_2 nin köşegen üzerindeki bileşenleri sırasıyla g_{11}, \dots, g_{1n} ve g_{21}, \dots, g_{2n} ile gösterilmek üzere;

$$\begin{aligned}
R_{g_1 g_2} \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t) \right) &= \infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i g_{1i} g_{2i} e_i \\
&= R_{g_2} \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i g_{1i} e_i(t) \right) \\
&= R_{g_2} \circ R_{g_1} \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t) \right) \\
\Rightarrow R_{g_1 g_2} &= R_{g_2} \circ R_{g_1}
\end{aligned}$$

Böylece R bir sağ etkidir.

iii) R etkisi serbesttir:

$\forall g \in D_k(\mathbb{R}^*)$ için

$$R_g((t, u_i)) = (t, u_i) \Rightarrow g = I_k$$

olduğunu göstermeliyiz. Bu ise,

$$\begin{aligned}
\left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i g_i e_i(t) \right) &= \infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i \\
\Rightarrow u_i g_i &= u_i \quad , \quad i = 1, \dots, k \quad , \quad (u_i \neq 0) \\
\Rightarrow g_i &= 1 \quad , \quad i = 1, \dots, k \quad , \quad (u_i \neq 0) \\
\Rightarrow g &= I_k
\end{aligned}$$

olduğundan doğrudur.

ALD2) $P/D_k(\mathbb{R}^*) \cong \infty(I) = M$ diffeomorfik, üstelik

$$\pi : P \rightarrow M$$

$$\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t) \rightarrow \pi \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t) \right) = \infty(t)$$

C^∞ olur.

$P/D_k(\mathbb{R}^*) \cong M$ nin birebir karşılık gelme olduğu π nin bu tanımlanmasından açıktır. π nin C^∞ olduğu ise diagram 4.1.2 gereğince, π nin bir koordinat temsilcisi \tilde{F} için,

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi} & M \\ \downarrow x_k & & \downarrow x_i \\ I \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\tilde{F}} & I \end{array}$$

Diagram 4.1.2

$\tilde{F} = iz_1$ olmasından elde edilir.

ALD3) P Lokal aşikârdır. Gerçekten de;

$\forall \infty(I_i) = U_i \subset M$ açık alt cümlesi için,

$$\exists \psi : \pi^{-1}(\infty(I_i)) \rightarrow \infty(I_i) \times D_k(\mathbb{R}^*)$$

$$\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t) \rightarrow \left(\pi \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i \right), \varnothing \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i \right) \right)$$

olup burada,

$$\pi \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t) \right) = \infty(t) \in \infty(I_i)$$

$$\varnothing \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t) \right) = [u_i] \in D_k(\mathbb{R}^*)$$

olarak tanımlandığında,

$$\emptyset : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow D_k(\mathbb{R}^*)$$

$$\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i \rightarrow \emptyset \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i \right) = [u_i]$$

dönüşümü için de,

$$R_g \left(\emptyset \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i \right) \right) = \emptyset \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i g_i e_i(t) \right) \Rightarrow R_g \circ \emptyset = \emptyset \circ R_g$$

dir. Şimdi Ψ nin bir diffeomorfizm olduğunu gösterelim. Diagram 4.1.3 yardımıyla Ψ nin bir koordinat temsilcisi H olmak üzere;

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Psi} & \infty(I_i) \times D_k(\mathbb{R}^*) \\ \downarrow y & & \downarrow x_i \quad \downarrow \text{id}_{\mathbb{R}^k} \\ \mathbb{R}^{k+1} & \xrightarrow{H} & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \end{array}$$

Diagram 4.1.3

$H(t, (u_1, \dots, u_k)) = (t, (u_1, \dots, u_k))$, dolayısıyla H bir diffeomorfizm olduğundan Ψ bir diffeomorfizmdir. Yukarıdaki tartışmayı bir teorem olarak ifade edelim:

Teorem 4.1.1: $\infty : I \rightarrow E^n$, bir C^∞ eğri olmak üzere,

$$P = \left\{ \infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t) \mid t \in I, u_i \in \mathbb{R}^* \right\}$$

genelleştirilmiş regle yüzeyi,

$$R : P \times D_k(\mathbb{R}^*) \rightarrow P$$

$$\left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i, [g_i] \right) \rightarrow \infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i g_i e_i(t)$$

etkisi ve $\forall I_i \subset I$ açık alt aralık olmak üzere,

$$\psi : \pi^{-1}(\infty(I_i)) \rightarrow \infty(I_i) \times D_k(\mathbb{R}^*)$$

$$\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i \rightarrow (\infty(t), [u_i])$$

lokal aşıkârlığı gözönüne alındığında, $\infty(I)$ üzerinde $D_k(\mathbb{R}^*)$ etki grubuyla birlikte bir asli lif demetidir. Bu asli lif demetini kısaca $P(M, D_k(\mathbb{R}^*))$ ile göstereceğiz ve P üzerindeki bu asli lif demet yapısına da P regle yüzeyinin doğal asli lif demet yapısı diyeceğiz.

Teorem 4.1.2: Teorem 4.1.1 deki notasyon ile P regle yüzeyinin doğal asli lif demet yapısı verilsin. $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}^*$ verilen sabitler ve,

$$Q^{c_i} \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t) \right) = \text{Sp} \left\{ \infty'(t) + \sum_{i=1}^k u_i \dot{e}_i(t) + \sum_{i=1}^k c_i u_i e_i(t) \right\} \Bigg|_{\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i}$$

olmak üzere, Q^{c_i} , $P(M, D_k(\mathbb{R}^*))$ üzerinde bir koneksiyondur.

İspat: $P(M, D_k(\mathbb{R}^*))$ asli lif demeti Tanım 2.1.1 anlamında verilsin. O zaman, $\infty : I \longrightarrow E^n$, $\infty(I) = M$, P 'nin yay parametrelili striksiyon çizgisi ve,

$$P = \left\{ \infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t) \mid t \in I, u_i \in \mathbb{R}^* \right\}$$

olmak üzere, $P(M, D_k(\mathbb{R}^*))$ üzerinde, her bir $c_i \in \mathbb{R}^*$ için,

$$\begin{aligned}
u &= \infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t) \longrightarrow Q^{c_i} \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i \right) \\
&= Sp \left\{ \infty'(t) + \sum_{i=1}^k u_i \dot{e}_i + \sum_{i=1}^k c_i u_i e_i \right\} \\
&= Q_{(t, u_i)}^{c_i}
\end{aligned}$$

dönüşümü bir koneksiyon tanımlar. Gerçekten de,

$$\begin{aligned}
G_u &= T_u(D_k(\mathbb{R}^*)) \cong T_u \pi^{-1}(\infty(t)) \\
Q_u &= Sp \left\{ \infty'(t) + \sum_{i=1}^k u_i \dot{e}_i + \sum_{i=1}^k u_i e_i \right\} \\
T_u P &= T_u \pi^{-1}(\infty(t)) \oplus Q_u
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$T_u \pi^{-1}(\infty(t)) \cong Sp \{e_i(t)\} \text{ olup, } \left\{ \infty' + \sum_{i=1}^k u_i \dot{e}_i, e_1, \dots, e_k \right\}; T_u P \text{'nin}$$

bir bazı olduğundan,

$$T_u P = Q_u \oplus G_u$$

dur.

$$R_g : P \longrightarrow P, \quad R_g \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i \right) = \infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i g_i e_i(t)$$

sağ etkisi altında,

$$(R_g)_* \left(\infty'(t) + \sum_{i=1}^k u_i \dot{e}_i(t) \right) = \infty'(t) + \sum_{i=1}^k u_i g_i \dot{e}_i(t)$$

$$(R_g)_* (e_1) = g_1 e_1$$

$$(R_g)_* (e_2) = g_2 e_2$$

$$\vdots$$

$$(R_g)_* (e_k) = g_k e_k$$

olduğu kolayca görülebilir. Buna göre,

$$R_g (Q_{(t, u_i)}^{c_i}) = Q_{(t, u_i, g_i)}^{c_i}$$

dir. O halde;

$Q_{(t, u_i)}^{c_i}$ R_g altında sağ invaryanttır.

$$\left\{ \alpha'(t) + \sum_{i=1}^k u_i \dot{e}_i + \sum_{i=1}^k c_i u_i e_i \right\}$$

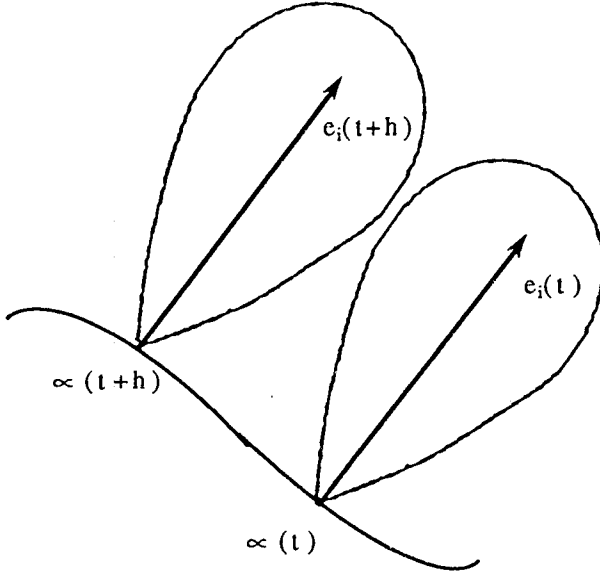
diferensiyellenebilir bir baz olduğundan Q^{c_i} diferensiyellenebilir-
dir. Böylece Q^{c_i} , $P(M, D_k(\mathbb{R}^*))$ da bir koneksiyon tanımlar.

4.2 Striksiyon Altmanifoldu

$\varphi(t, v_1, \dots, v_k) = \infty(t) + \sum_{i=1}^k v_i e_i(t)$ parametrizasyonu ile bir regle yüzey verilsin.

$$E_k(t) = \text{Sp} \{ e_1(t), \dots, e_k(t) \} \Big|_{\infty(t)}$$

$\infty(t)$ den geçen doğrultman uzay olmak üzere $E_k(t)$ ye komşu $E_k(t+h)$ doğrultman uzayı ile $E_k(t)$ nin ortak dikmesi olan hiperdüzlemin $E_k(t)$ ile P , $E_k(t+h)$ ile P' ortak noktasına sahip olduğunu varsayalım. O zaman;



Şekil 4.2.1

$$P = \infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i(t) e_i(t) \quad ; \quad u_i(t) = v_i(t, v_1, \dots, v_k)$$

$$P' = \infty(t+h) + \sum_{i=1}^k u_i(t+h) e_i(t+h) \quad ; \quad u_i(t+h) = v_i(t+h, v_1, \dots, v_k)$$

yazılabilir. Buradan,

$$\overrightarrow{PP'} = \infty(t+h) - \infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i(t+h) e_i(t+h) - \sum_{i=1}^k u_i(t) e_i(t)$$

Bu eşitlikte sağ tarafa $\sum_{i=1}^k u_i(t) e_i(t+h)$ ekleyip çıkararak elde edilen ifadeden $h \rightarrow 0$ için limit alınır,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \overrightarrow{PP'} = \infty'(t) + \sum_{i=1}^k \dot{u}_i e_i + \sum_{i=1}^k u_i \dot{e}_i(t)$$

elde edilir. Doğrultman uzayına, $\overrightarrow{PP'}$ ' nün dik olması nedeniyle,

$$\langle e_j, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \overrightarrow{PP'} \rangle = 0 = \langle e_j, \infty' + \sum_{i=1}^k \dot{u}_i e_i + \sum_{i=1}^k u_i \dot{e}_i \rangle \quad (i) \quad (4.2.1)$$

... $1 \leq j \leq k$

ve $\lim_{h \rightarrow 0} \langle e_j(t+h), \frac{1}{h} \overrightarrow{PP'} \rangle = 0$ olup,

$$\langle \dot{e}_j, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \overrightarrow{PP'} \rangle = 0 \dots \quad 1 \leq j \leq k \quad (4.2.2)$$

dir. Dolayısıyla,

$$\langle \dot{e}_j, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \overrightarrow{PP'} \rangle = 0 = \langle \dot{e}_j, \infty' + \sum_{i=1}^k \dot{u}_i e_i + \sum_{i=1}^k u_i \dot{e}_i \rangle \dots (ii)$$

dir. (i)-denklemlerinde $T = \infty'(t)$ yazılımı kullanılarak,

$$\langle e_1, T \rangle + u_1 \langle e_1, \dot{e}_1 \rangle + \dots + u_k \langle e_1, \dot{e}_k \rangle + \dot{u}_1 \langle e_1, e_1 \rangle + \dots + \dot{u}_k \langle e_1, e_k \rangle = 0$$

⋮

$$\langle e_k, T \rangle + u_1 \langle e_k, \dot{e}_1 \rangle + \dots + u_k \langle e_k, \dot{e}_k \rangle + \dot{u}_1 \langle e_k, e_1 \rangle + \dots + \dot{u}_k \langle e_k, e_k \rangle = 0$$

(4.2.3)

(ii) denklemlerinden de,

$$\begin{aligned} <\dot{e}_1, T> + u_1 <\dot{e}_1, \dot{e}_1> + \dots + u_k <\dot{e}_1, \dot{e}_k> + \dot{u}_1 <\dot{e}_1, e_1> + \dots + \dot{u}_k <\dot{e}_1, e_k> = 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ <\dot{e}_k, T> + u_1 <\dot{e}_k, \dot{e}_1> + \dots + u_k <\dot{e}_k, \dot{e}_k> + \dot{u}_1 <\dot{e}_k, e_1> + \dots + \dot{u}_k <\dot{e}_k, e_k> = 0 \end{aligned}$$

(4.2.4) elde edilir. Böylece

4.2.3 matris formunda,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} <e_1, T> \\ \vdots \\ <e_1, T> \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} <e_1, \dot{e}_1> & \dots & <e_1, \dot{e}_k> \\ \vdots \\ <e_k, \dot{e}_1> & \dots & <e_k, \dot{e}_k> \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} <e_1, e_1> & \dots & <e_1, e_k> \\ \vdots \\ <e_k, e_1> & \dots & <e_k, e_k> \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

ve 4.2.4 matris formunda,

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \langle \dot{e}_1, T \rangle \\ \vdots \\ \langle \dot{e}_k, T \rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \langle \dot{e}_1, \dot{e}_1 \rangle & \dots & \langle \dot{e}_1, \dot{e}_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \dot{e}_k, \dot{e}_1 \rangle & \dots & \langle \dot{e}_k, \dot{e}_k \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \langle \dot{e}_1, e_1 \rangle & \dots & \langle \dot{e}_1, e_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \dot{e}_k, e_1 \rangle & \dots & \langle \dot{e}_k, e_k \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.6)
 \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada,

$$\begin{aligned}
 A' &= \begin{bmatrix} \langle e_1, \dot{e}_1 \rangle & \dots & \langle e_1, \dot{e}_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_k, \dot{e}_1 \rangle & \dots & \langle e_k, \dot{e}_k \rangle \end{bmatrix}, \\
 A &= \begin{bmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_k, e_1 \rangle & \dots & \langle e_k, e_k \rangle \end{bmatrix} = I_n
 \end{aligned}$$

$$E = \begin{bmatrix} \langle e_1, T \rangle \\ \vdots \\ \langle e_k, T \rangle \end{bmatrix}$$

$$A'' = \begin{bmatrix} \langle \dot{e}_1, \dot{e}_1 \rangle & \dots & \langle \dot{e}_1, \dot{e}_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \dot{e}_k, \dot{e}_1 \rangle & \dots & \langle \dot{e}_k, \dot{e}_k \rangle \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix},$$

$$\dot{U} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_k \end{bmatrix}, E' = \begin{bmatrix} \langle \dot{e}_1, T \rangle \\ \vdots \\ \langle \dot{e}_k, T \rangle \end{bmatrix}$$

olmak üzere (4.2.5) ve (4.2.6) eşitlikleri, basitçe

$$\left. \begin{aligned} A \cdot \dot{U} + A'U + E &= 0 \\ A'' \cdot U + A'\dot{U} + E' &= 0 \end{aligned} \right\}, A=I \quad (4.2.7)$$

şeklini alır ve bu denklemlerden birincisinden

$$\dot{U} = -A'U - E$$

değeri ikincisinde yerine konulursa,

$$(A'' - A'^2) U = A' E - E' \quad (4.2.8)$$

elde ederiz. Eğer (4.2.8) in çözümü var ise bu eşitliklerden elde edilen

$$U = (u_1, \dots, u_k)$$

sıralı k-lısı

$$P = \infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t)$$

eşitliği ile bir nokta tayin eder. Bu nokta komşu doğrultman uzayların ortak dikme ayaklarındandır. Bu ortak dikme ayaklarının geometrik yerinin de verilen regle yüzeyin bir altmanifoldu olduğunu göstereceğiz. Bu altmanifoldu özel olarak, striksiyon altmanifoldu olarak adlandıracağız.

Tanım 4.2.1: Bir regle yüzeyin komşu doğrultman uzaylarının ortak dikme ayaklarının geometrik yeri olan altmanifolda regle yüzeyin striksiyon altmanifoldu denir.

Striksiyon altmanifoldunun varlık teoremi aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.1.2: 4.2 paragraftaki gösterimler kullanılarak $\varphi(t, u_1, \dots, u_k)$ parametrizasyonu ile bir genelleştirilmiş P regle yüzeyi verilsin. O zaman,

$$A'' = \begin{bmatrix} \langle \dot{e}_1, \dot{e}_1 \rangle & \dots & \langle \dot{e}_1, \dot{e}_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \dot{e}_k, \dot{e}_1 \rangle & \dots & \langle \dot{e}_k, \dot{e}_k \rangle \end{bmatrix},$$

$$A' = \begin{bmatrix} \langle e_1, \dot{e}_1 \rangle & \dots & \langle e_1, \dot{e}_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_k, \dot{e}_1 \rangle & \dots & \langle e_k, \dot{e}_k \rangle \end{bmatrix} \neq 0, A = I$$

$$E = \begin{bmatrix} \langle e_1, T \rangle \\ \vdots \\ \langle e_k, T \rangle \end{bmatrix}, \quad E' = \begin{bmatrix} \langle \dot{e}_1, T \rangle \\ \vdots \\ \langle \dot{e}_k, T \rangle \end{bmatrix}$$

olmak üzere bu regle yüzeyin striksiyon altmanifoldunun mevcut olması için gerek şart,

$$\text{rank}(A'' - A'^2, A'E - E') = \text{rank}(A'' - A'^2)$$

olmasıdır. (bundan sonra m ile $\text{rank}(A'' - A'^2)$ yi göstereceğiz.),

İspat: (4.2.7) ile

$$\ddot{U} + A'U + E = 0$$

$$(A'' - A'^2)U = A'E - E'$$

sisteminin çözümleri aynıdır. Halbuki ikinci denklemin çözümünün mevcut olması için

$$\text{rank}(A'' - A'^2, A'E - E') = \text{rank}(A'' - A'^2)$$

oması gerekir.

KARŞIT ÖRNEK: Teorem 4.1.2 deki gerek şart aşağıdaki karşıt örnek nedeniyle yeter şart değildir. \mathbb{R}^4 de bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ eğrisi

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+t, 0, 0, 1+t);$$

verilsin.

$$e_1(t) = (\sin t, 0, \cos t, 0);$$

$$e_2(t) = (0, \sin t, 0, \cos t);$$

olmak üzere

$$\alpha'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)$$

$$\dot{e}_1(t) = (\cos t, 0, -\sin t, 0)$$

$$\dot{e}_2(t) = (0, \cos t, 0, -\sin t)$$

dir. Böylece;

$$A = [\langle e_i, e_j \rangle] = I_2$$

$$A' = [\langle e_i, \dot{e}_i \rangle] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A'' = [\langle \dot{e}_i, \dot{e}_j \rangle] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = [\langle e_i, T \rangle] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \end{bmatrix}$$

$$E' = [\langle \dot{e}_i, T \rangle] = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

olup

$$A \dot{U} + A' U + E = 0$$

$$A'' U + A' \dot{U} + E' = 0$$

$$\dot{U} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \text{sint} \\ \text{cost} \end{bmatrix} = 0$$

$$U + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \text{cost} \\ -\text{sint} \end{bmatrix} = 0$$

dir. O halde,

$$U + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \text{cost} \\ \text{sint} \end{bmatrix} = 0$$

$$\dot{U} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \text{sint} \\ \text{cost} \end{bmatrix} = 0$$

olmalıdır. Bu ise

$$\begin{bmatrix} -\text{sint} \\ -\text{cost} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sint} \\ \text{cost} \end{bmatrix}$$

yani

$$\text{sint} = 0$$

$$\text{cost} = 0$$

demek olacağından çelişmedir. Yani sistemin çözümü yoktur.

Burada,

$$\text{rank} \left(A'' - A'^2, A'E - E' \right) = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\text{cost} \\ 0 & 1 & \text{sint} \end{bmatrix}$$

$$= \text{rank} \left(A'' - A'^2 \right)$$

olmasına rağmen 4.2.7 nin çözümü mevcut değildir. Lineer denklem sistemlerinin teorisinden çözüm uzayının boyutu ile ilgili olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.1.2.1 : Striksiyon altmanifoldu mevcut ise $\text{rank} \left(A'' - A'^2 \right) = m$ olmak üzere striksiyon alt manifoldunun boyutu, $k - m + 1$ dir.

ÖRNEK: 4.1.1: $M = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1 \}$, yüzeyi,

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow E^3$$

$$t \longrightarrow \alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

dayanak eğrisi ve,

$$e_3 = (0, 0, 1)$$

doğrultmanı ile silindirdir. (4.2.7) eşitliklerden,

$$A' = \langle e_3, e_3 \rangle = 0$$

$$A'' = \langle e_3, e_3 \rangle = 0$$

$$A = \langle e_3, e_3 \rangle = 1$$

$$E = \langle e_3, T \rangle = 1$$

$$E' = \langle \dot{e}_3, T \rangle = 0$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$\dot{u} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \dot{u} = -1$$

$$\Rightarrow u = -t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

elde edilir. O halde $\forall c \in \mathbb{R}$ için

$$P(t) = \alpha(t) + (-t + c)e_3$$

$$= (\cos t, \sin t, c)$$

bir merkez noktasıdır. Bu ise M nin striksiyon altmanifoldunun yine M olduğunu gösterir.

O halde M nin striksiyon altmanifoldu 2-boyutludur. Bu ise sonuç 4.1.2.1 de $k = 1$, $m = 0$ olması nedeniyle $k - m + 1 = 2$ olduğunu doğrular.

Şimdi striksiyon altmanifoldunun varlığı ile ilgili olarak bazı özel sonuçlar vereceğiz:

Sonuç: 4.1.2.2: $A'' - A'^2 = 0$, $A'E - E' = 0$ ve A' regüler ise striksiyon altmanifoldu mevcut ve manifoldun tamamından ibarettir.

İspat:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{U} + A'U + E = 0 \\ A''U + A'\dot{U} + E' = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{U} = -A'U - E \\ A''U + A'\dot{U} + E' = 0 \end{array}$$

dir. Böylece

$$\left. \begin{array}{l} A' \cdot \dot{U} = A'^2 - A'E \\ A''U - A'^2U - A'E + E' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A'E - E' = 0, \quad \dot{U} = 0$$

yani $U = \text{sabittir}$. Dolayısıyla manifoldun her noktası bir merkez noktasıdır. Yani striksiyon altmanifoldu manifoldun tamamından ibarettir

Sonuç 4.1.2.3: $A'' - A'^2 = 0$ ve $A'E - E' \neq 0$ ise striksiyon altmanifoldu mevcut değildir.

İspat: Teorem 4.1.2 den açıktır.

Sonuç: 4.1.2.4: Regle yüzeyin striksiyon altmanifoldu mevcut ve boyutu $k - m + 1 \geq 2$ ise striksiyon altmanifoldu da bir regle yüzeydir.

İspat: 4.2.7 nin bir çözümü

$$u_1, \dots, u_k$$

olsun. O zaman,

$$(A'' - A'^2)U = A'E - E'$$

lineer denklem sisteminin çözümleri arasında,

$$\dot{U} + A'U + E = 0$$

lineer denklem sistemine uyan (u_1, \dots, u_k) k-lıların tanımladığı

$$\sum_{i=1}^k u_i e_i(t)$$

noktalar cümlesi bir afin altuzay tanımlar. Böylece,

$$S = \left\{ \alpha(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t) \mid \forall u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}, \quad 4.2.7 \text{ nin bir çözüdür.} \right\}$$

cümlesi regle yüzeyidir.

Tanım 4.2.2: E^n de $(k+1)$ - regle yüzey φ olsun. φ nin her $E_k(t)$ doğrultman uzayının sabit bir $E^q \subset E^n$, $q \geq k$, altuzayı mevcut ise φ ye q -konoidal regle yüzey, E^q altuzayına da φ nin doğrultu uzayı (Richraum'u) denir (Frank, H. ve Gierig, O., 1976).

Teorem 4.2.2 : q -konoidal regle yüzeyin Richraum'una paralel bir q -regle altmanifoldunun herbir noktası bir merkez noktasıdır.

İspat: Regle yüzeyin bir parametrizasyonu

$$\varphi(t, u_1, \dots, u_q, \dots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{k-q} u_i e_i + \sum_{j=k-q+1}^k u_j e_j$$

olup, u_{k-q+1}, \dots, u_k nin herbir değeri için,

$$(A'' - A'^2)U = A'E - E', \quad \dot{U} + A'U + E = 0$$

sağlanır. Buradan,

$$\text{rank}(A'' - A'^2) = m \leq k - q$$

dir. Böylece;

$$\left[\langle \dot{e}_i, \dot{e}_j \rangle - \sum_{s=1}^k \langle \dot{e}_i, e_s \rangle \langle \dot{e}_s, e_j \rangle \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_q \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

İlk $k-q$ adres

Son q adres

Son q adrestekilerle

$$u_{m+1} = c_{m+1} = st, \dots, u_k = c_k$$

birer parametre olmak üzere u_1, \dots, u_{s-1} ; bu parametreler cinsinden ifade edilerek,

$$\varphi(t, u_m, \dots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^m u_i(u_1, \dots, u_{m-1}) e_i + \sum_{i=m+1}^k u_i e_i$$

parametrik yazılımıyla belli $(k-m+1)$ - boyutlu regüler regle altmanifoldunu oluşturur. Burada * ile sıfır olmak zorunda olmayan bileşenler gösterilmiştir. Bu altmanifold açıkca q -regle yüzeyin Richthranm'una paralel regle altmanifoldu da ihtiva eder.

Burada şu açıklamayı yapmakta yarar umuyoruz. $\forall t \in I$ için boy $T(t) = k + m$ olsun. Bu taktirde \emptyset nin $\zeta(t)$ dayanak eğrisinin $\dot{\zeta}(t)$ hız vektörü $A(t)$ asimptotik demetinde bulunur (Regle altmanifoldlar, Aslaner R. 1989), çalışmasında,

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^k \zeta_i e_i + \sum_{s=1}^k \zeta_s a_{k+s}$$

ifadesini vermiş olup, bu halde asimptotik ve teğetsel demetler çakışmalıdır. Bu ise bizim ele aldığımız hal için her zaman olmayabilir. Ek olarak aynı çalışmada verilen,

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j + K_i a_{k+i}$$

$$e_{m+s} = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j$$

ifadelerini de bizim ele aldığımız haller için yazamayabiliriz. Böylece bu çalışmayla birlikteliğimiz, sadece E^3 de merkez nokta tanımıyla ilgilidir. E^3 ün dışında verilen merkez nokta tanımı bizim ele aldığımız biçiminden farklıdır.

Teorem 4.1.3: P bir $(k + 1)$ - boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey ve P nin $(k-m+1)$ -boyutlu striksiyon altmanifoldu mevcut olsun. O zaman P , striksiyon manifoldu üzerinde $(k-m)$ - boyutlu fibre'leriyle bir asli lif demeti yapısına sahiptir. Burada m ile,

$$A'' = \begin{bmatrix} \langle \dot{e}_1, \dot{e}_1 \rangle & \dots & \langle \dot{e}_1, \dot{e}_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \dot{e}_k, \dot{e}_1 \rangle & \dots & \langle \dot{e}_k, \dot{e}_k \rangle \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} \langle \dot{e}_1, \dot{e}_1 \rangle & \dots & \langle \dot{e}_1, \dot{e}_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \dot{e}_k, \dot{e}_1 \rangle & \dots & \langle \dot{e}_k, \dot{e}_k \rangle \end{bmatrix} \neq 0$$

olmak üzere, $A'' - A'^2$ nin rankı gösterilmiştir. $\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ de doğrultman uzayının bir ortonormal bazıdır.

İspat:

$$P = \left\{ \alpha(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i \mid t \in I, u_i \in \mathbb{R}^* \right\}$$

$$S=M = \left\{ \alpha(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i (u_m, \dots, u_k) e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j \mid t \in I, u_j \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\tilde{G} = D_{m-1}(\mathbb{R}^*)$$

diyelim. Burada u_m, \dots, u_k (4.2.7) nin çözümündeki serbest parametreler, u_1, \dots, u_k ise u_m, \dots, u_k cinsinden tayin edilen

değerlerdir. x ile S nin ve y ile de P nin bir koordinatlamasını aşağıdaki şekilde tanımlayacağız:

$$x : S \longrightarrow \mathbb{R}^{k-m+1}$$

$$\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i (u_m, \dots, u_k) e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j \longrightarrow (t, u_m, \dots, u_k)$$

$$y : P \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$$

$$\infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i e_i \longrightarrow (t, u_1, \dots, u_k).$$

$$R : P \times D_{m-1}(\mathbb{R}^*) \rightarrow P$$

$$(\infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j, [g_i]) \longrightarrow \infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i g_i e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j$$

etkisini tanımlayalım. İlk olarak R nin bir sağ serbest etki olduğunu göstermeliyiz.

ALD1) i) R diferensiyellenebilirdir:

Aşağıdaki diagram yardımıyla;

$$\begin{array}{ccccc}
 P & \times & D_{m-1}(\mathbb{R}^*) & \xrightarrow{R} & P \\
 \downarrow x & & \downarrow x_{ij} & & \downarrow y \\
 I \times \mathbb{R}^k & \times & \mathbb{R}^{m-1} & \xrightarrow{F} & I \times \mathbb{R}^k
 \end{array}$$

Diagram 4.1.1

$$F\left((t, u_1, \dots, u_k), (g_{11}, \dots, g_{1, m-1})\right) = \left(t, (u_1 g_1, \dots, u_{m-1} g_{m-1}), u_m, \dots, u_k\right)$$

olduğundan dolayı R diferensiyellenebilirdir.

ii) R sağ etkidir:

$R : P \times D_{m-1}(\mathbb{R}^*) \longrightarrow P$, olup

$$\forall g_1 = [g_{1i}], g_2 = [g_{2i}] \in D_{m-1}(\mathbb{R}^*), \forall \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j \right) \in P$$

için

$$\begin{aligned} R_{g_1 g_2} \left(\infty(t) + \sum_{j=m}^k u_j e_j + \sum_{i=1}^{m-1} u_i e_i \right) &= \infty(t) + \sum_{j=m}^k u_j e_j + \sum_{i=1}^{m-1} u_i g_{1i} g_{2i} e_i \\ &= R_{g_2} \left(\infty(t) + \sum_{j=m}^k u_j e_j + \sum_{i=1}^{m-1} u_i g_{1i} e_i \right) \\ &= (R_{g_2} \circ R_{g_1}) \left(\infty(t) + \sum_{j=m}^k u_j e_j + \sum_{i=1}^{m-1} u_i e_i \right) \end{aligned}$$

olup $R_{g_1 g_2} = R_{g_2} \circ R_{g_1}$ dir. Böylece R bir sağ etkidir.

iii) R etkisi serbesttir:

Bir $g \in D_{m-1}(\mathbb{R}^*)$ için göstermeliyiz ki,

$$R_g \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j \right) = \infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j$$

ise $g = I_{m-1}$ dir. Gerçektende bu halde

$$\infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i g_i e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j = \infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j$$

olup;

$$\sum_{i=1}^{m-1} (u_i g_i - u_i) e_i = 0, \quad u_i \neq 0$$

$$\Rightarrow u_i g_i = u_i, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad u_i \neq 0$$

$$\Rightarrow g = I_{m-1}$$

dir. Dolayısıyla R etkisi serbesttir.

ALD2) $P/D_{m-1}(\mathbb{R}^*) \cong S$ diffeomorfizm üstelik,

$$\pi : P \rightarrow S$$

$$\infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j \rightarrow \infty(t) + \sum_{j=m}^k u_j e_j + \sum_{i=1}^{m-1} u_i(u_m, \dots, u_k) e_i$$

dir. $P/D_{m-1}(\mathbb{R}^*) \cong M$ 1:1 karşılık gelme olduğu π nin bu tanımlanmasından açıktır. Şimdi π 'nin C^∞ olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi} & M \\ y \downarrow & & \downarrow x \\ I \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathbb{R}^{k-m+1} \end{array}$$

Diagram 4.1.2

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, u_1, \dots, u_k) &= (x \circ \pi \circ y^{-1})(t, u_1, \dots, u_k) \\ &= x \left(\pi \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i(u_m, \dots, u_k) e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j \right) \right) \end{aligned}$$

$$x : S \longrightarrow \mathbb{R}^{k-m+1}$$

olup,

$$\pi = x^{-1} \circ \tilde{F} \circ y$$

C^∞ dur.

ALD3) P lokal aşikârdır. Gerçekten de, S striksiyon altmanifoldu için,

$$\pi^{-1}(S) = \left\{ \infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i(u_m, \dots, u_k) e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j \mid t \in I_i, u_i \in \mathbb{R} \right\}$$

olup,

$\exists \psi : \pi^{-1}(S) \longrightarrow S \times D_{m-1}(\mathbb{R}^*)$, dönüşümü,

$$\pi \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j \right) = \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i(u_m, \dots, u_k) e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j \right) \in S$$

$$\emptyset \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j \right) = [u_i] \in D_{m-1}(\mathbb{R}^*)$$

olacak şekildedir.

$$\emptyset : \pi^{-1}(S) \rightarrow D_{m-1}(\mathbb{R}^*)$$

$$\infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i(u_m, \dots, u_k) e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j \rightarrow [u_i]$$

ayrıca,

$$R_g \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i(u_m, \dots, u_k) e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j \right) =$$

$$\emptyset \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i g_i(u_m, \dots, u_k) e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j \right)$$

dir. Şimdi ψ nin diffeomorfizim olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{ccccc} \pi^{-1}(S) & \xrightarrow{\psi} & S \times D_{m-1}(\mathbb{R}^*) & & \\ \downarrow x & & \downarrow x_i & & \downarrow \text{id}_{\mathbb{R}^{m-1}} \\ I \times \mathbb{R} & \xrightarrow{H} & \mathbb{R}^{k-m+2} & \times & \mathbb{R}^{m-1} \end{array}$$

Diagram 4.1.3

$$\begin{aligned}
H(t, u_m, \dots, u_k) &= \left[(x_i \times \text{id}_{\mathbb{R}^{m-1}}) \circ \psi \circ x^{-1} \right] (t, u_m, \dots, u_k) \\
&= (x_i \times \text{id}_{\mathbb{R}^{m-1}}) \left(\psi \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i (u_m, \dots, u_k) e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j \right) \right) \\
&= \left(u_i \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i (u_m, \dots, u_k) e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j \right), \text{id}_{(\mathbb{R}^{m-1})} [u_i] \right) \\
&= (t, u_m, \dots, u_k)
\end{aligned}$$

olur. H özdeşlik dönüşümüdür. Dolayısıyla,

$$\psi = (x_i \times \text{id}_{\mathbb{R}^{m-1}})^{-1} \circ H \circ x$$

C^∞ dur. Böylece $P(M, D_{m-1}(\mathbb{R}^*))$ sistemi bir asli lif demetidir.

Teorem 4.1.4: $P(M, D_{m-1}(\mathbb{R}^*))$ asli lif demeti Teorem 4.1.3 deki gibi verilsin. Bu taktirde P üzerinde,

$$u = \left(\infty(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i \right) \in P$$

olmak üzere,

$$u \rightarrow \Gamma(u) = \text{Sp} \left\{ \infty'(t) + \sum_{i=1}^k u_i \dot{e}_i, e_m, \dots, e_k \right\}$$

bir koneksiyon tanımlar.

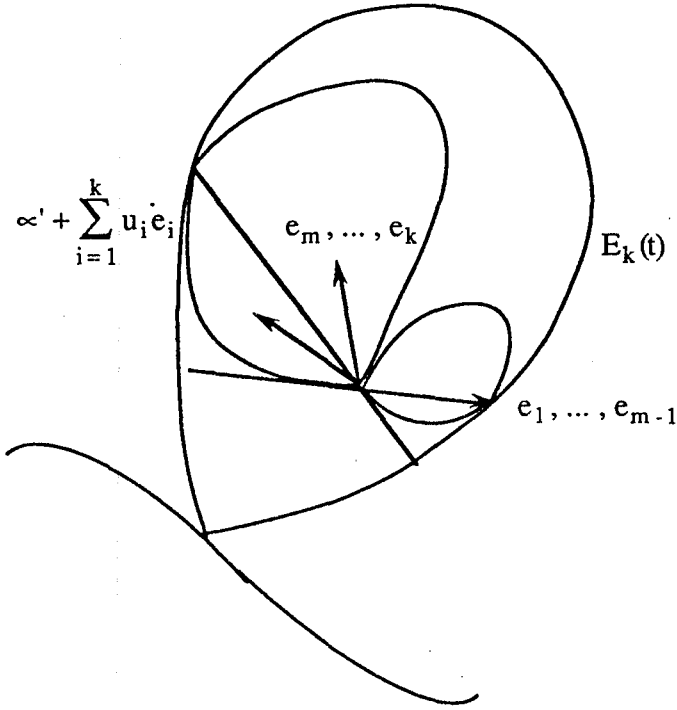
İspat: $P(M, D_{m-1}(\mathbb{R}^*))$ verilsin.

$$Q = \text{Sp} \left\{ \infty'(t) + \sum_{i=1}^k u_i \dot{e}_i, e_m, \dots, e_k \right\}$$

$$G_u = \text{Sp} \{ e_1, \dots, e_{m-1} \}$$

dir. Tanım 2.1.2 nin gerçekleştiğini göstermeliyiz.

K1) $T_u P = G_u \oplus Q_u$ açıktır.



Şekil 4.1.1

K2)

$$R_g : P \longrightarrow P$$

$$\alpha(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j \longrightarrow \alpha(t) + \sum_{i=1}^{m-1} u_i g_i e_i + \sum_{j=m}^k u_j e_j$$

olup,

$$R_{g*} \left(\alpha'(t) + \sum_{i=1}^k u_i \dot{e}_i \right) = \alpha' + \sum_{i=1}^k u_i g_i \dot{e}_i, \text{ dir.}$$

Buradan, $R_g(Q_u) = Q_{u_g}$ olduğu görülür.

K3) Q_u diferensiyellenebilir olduğundan Γ diferensiyellenebilirdir. O halde Γ , P üzerinde bir koneksiyondur.

Tanım 4.1.1: Teorem 4.1.1 deki koneksiyona P 'nin striksiyon koneksiyonu denir.

KAYNAKLAR

Aslaner, R. 1989, Regle Altmanifoldlar, Tez Çalışması,

Frank, H. ve Giering, O., 1976, "Verallgemeinerte Regeflächen" Math. Zeit 150, 261-271

Hacısalıhoğlu, H, H., 1983 Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fütakültesi,

Hacısalıhoğlu, H, H., 1983, Hareket Geometrisi, Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakütitesi,

Kobayashi, S. ve Nomizu, M., 1963, "Founddations of Diferential Geometry" İnterscience Pbulishers, a division of John Wiley Sons, Newyork Vol I - II,