Ziya Akça'nın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "EN KÜÇÜK KARTEZYEN GRUP DÜZLEMİNİN FANO KONFİGURASYONLARI" başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

5/9/1991

Üye: Prof. Dr. Rüstem KAYA

Üye: Doç. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ

Üye: Doç. Dr. Şükrü OLGUN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 09 EYLÜL 1991 gün ve 285-1 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Rüstem KAYA

ÖZET

Bu çalışmada, bilinen en küçük kartezyen grup üzerinde kurulan projektif düzlemin geometrik yapısı incelenerek, bu düzlemin

a) 2. mertebeden en az 1500 tane projektif altdüzlem kapsadığı,

b) 2. mertebeden Fano düzlemi olmayan en az 522 konfigurasyon kapsadığı,

c) 3. mertebeden bazı özel konumlarda projektif alt düzleminin var olmadığı gösterilmektedir.

SUMMARY

In this study, We investigate the geometrical structure of the projective plane which is constructed on the known smallest cartesian group. For this purpose it is shown that the above mentioned plane

a) contains at least 1500 subprojektive planes of order 2,

b) contains at least 519 configarations of order 2, which are not Fano planes, and

c) has not subprojective planes of order 3 in some special cases.

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklamalar
$\mathcal{N}$	Noktalar kümesi
$\mathcal{D}$	Doğrular kümesi
o	Üzerinde bulunma bağıntısı
N o d	N noktası d doğrusu üzerindedir.
N $\not\circ$ d	N noktası d doğrusu üzerinde değildir.
$(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$	Geometrik yapı
$\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$	Projektif düzlem
T	Üçlü İşlem
(S,T)	Üçlü halka
$P_{(S,T)}$	(S,T) üçlü halkasının belirttiği projektif düzlem
R	Gerçel sayılar kümesi
$GF(p^r)$	Galois cismi
$+, \oplus, \cdot, *, o, \ominus$	İkili İşlemler

İÇİNDEKİLER

1.1. Bazı Temel Kavramlar

Önce projektif geometrinin, bu çalışmada geçen, bazı temel kavramlarını kısaca verelim.

Tanım 1.1.1: $\mathcal{N}$ elemanları noktalar, $\mathcal{D}$ elemanları doğrular olan birer küme ve $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ olsun. o, $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde üzerinde bulunma bağıntısı iken $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ geometrik yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyor ise, bu sisteme bir *projektif düzlem* denir:

P1) Her A, B $\in \mathcal{N}$, A $\neq$ B için Aod ve Bod özelliğinde bir tek d $\in \mathcal{D}$ vardır.

P2) Her c,d $\in \mathcal{D}$ için Aoc ve Aod özelliğinde en az bir A $\in \mathcal{N}$ vardır.

P3) Her hangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Projektif düzlemlerde P2 aksiyomundan daha kuvvetli ve kesin bir önerme geçerlidir.

Teorem 1.1.1: Bir $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ projektif düzleminde farklı iki doğru bir tek noktada kesişirler.

Tanım 1.1.2: A, B, C, D hepsi aynı projektif düzlemde bulunan ve herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta olsun. Bu noktaları ikişer ikişer birleştiren doğruların çizilmesi ve bulunan doğruların ikişer ikişer kesiştirilmesiyle elde edilen altı doğru ve yedi noktadan oluşan bir konfigurasyona *tamdörtgen* denir. Ayrıca A, B, C, D noktalarına tamdörtgenin *köşeleri,* AB ve CD, AC ve BD, BC ve AD doğru ikililerine tamdörtgenin *karşılıklı kenarları,* karşılıklı kenarların kesişme noktalarına yani U=AB$\wedge$CD, V=AC$\wedge$BD, W=AD$\wedge$BC noktalarına tamdörtgenin *köşegen noktaları* denir.

Biz bu çalışmanın bir kısmında 2. mertebeden Fano düzlemlerini araştırıyoruz. Şimdi Fano düzleminin tanımını verelim.

Tanım 1.1.3: İçindeki bütün tamdörtgenlerin köşegen noktaları doğrudaş olan bir projektif düzleme *Fano düzlemi* denir. Eğer bir Fano düzlemi diğer Fano düzlemlerinden en az bir farklı nokta kapsıyorsa bu Fano düzlemlerine *Farklı Fano düzlemleri* denir.

Fano Aksiyomu: Kapsadığı her bir tamdörtgenin köşegen noktaları doğrudaş olmayan noktalardır.

Tanım 1.1.4: $\mathcal{P}= (\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ ve $\mathcal{P}'= (\mathcal{N}', \mathcal{D}', o')$ iki projektif düzlem olsun. Eğer $\mathcal{N}'\subset\mathcal{N}$ ise ve her $d'\in\mathcal{D}'$doğrusu için $d'=d\cap\mathcal{N}'$olacak biçimde bir $d\in\mathcal{D}$ doğrusu varsa $\mathcal{P}'$ ye $\mathcal{P}$ nin *projektif altdüzlemi* denir. Eğer $\mathcal{P}'\neq\mathcal{P}$ ise $\mathcal{P}'$ ye $\mathcal{P}$ nin *projektif öz altdüzlemi* denir.

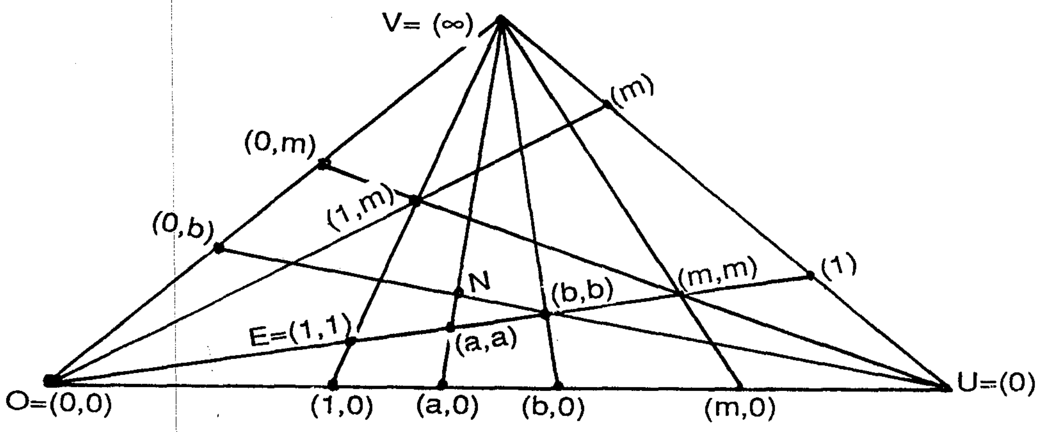
Teorem 1.1.2: $\mathcal{P}$ mertebesi n olan sonlu bir projektif düzlem ve $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{P}$ nin mertebesi m olan bir projektif öz altdüzlemi olsun. Eğer $\mathcal{P}$ nin her doğrusu $\mathcal{P}'$ nin bir noktasını kapsarsa $n=m^2$, aksi halde $n\geq m^2+m$ dir.

1.2. Projektif Düzlemlerin Koordinatlanması

Her projektif düzlem uygun bir S kümesinin elemanlarıyla koordinatlanabilir.

Tanım 1.2.1: $\mathcal{P}$ mertebesi n olan bir projektif düzlem, S de 0 ve 1 ile gösterilen iki özel elemanı bulunan ve kardinalitesi $n\geq2$ olan bir küme olsun. $\mathcal{P}$ de herhangi üçü doğrudaş olmayan O, E, U, V noktalarından oluşan seçimli {O, E, U, V} koordinatlama dörtgeni ve S kümesini kullanarak $\mathcal{P}$ nin noktalarını, doğrularını ve üzerinde bulunma bağıntısını belirleyelim.

Noktaların koordinatlanması:



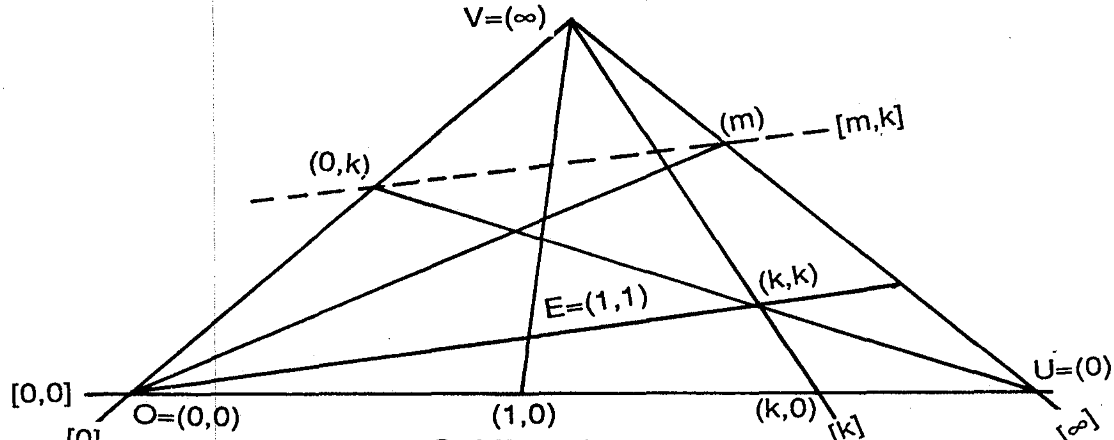
Şekil 1.2.1.

OE doğrusu üzerinde OE∧UV den başka her bir noktaya S^2 nin (a,a) biçimindeki bir tek elemanını eşleyelim. Özel olarak, O=(0,0), E= (1,1) olsun. UV doğrusu üzerinde bulunmayan seçimli her bir N noktası için eğer NU∧OE=(b,b) ve NV∧OE=(a,a) ise N=(a,b) diyelim. Özel olarak OU doğrusu üzerindeki noktalar (a,0) ve OV doğrusu üzerindeki noktalar (0,b) biçiminde koordinatlara sahip olur. UV nin [(0,0)v(1,m)]∧UV noktasına (m) koordinatını verelim. Buna göre U=[(0,0)v(1,0)]∧UV olduğundan U=(0) dır. OE∧UV=[(0,0)v(1,1)]∧UV olup OE∧UV=(1) dir. $\infty \notin S$ olmak üzere UV nin V noktası için V= (∞) olsun. (Şekil 1.2.1)

Doğruların koordinatlanması:

V=(∞) noktasından geçmeyen ve dolayısıyla UV ile bir (m) ortak noktasına ve OV ile bir (0,k) ortak noktasına sahip olan doğruya [m,k] koordinatını; V=(∞) dan geçen ve OU=[0,0] doğrusuyla bir (k,0) ortak noktasına sahip olan doğruya [k] koordinatını ve UV doğrusuna da [∞]

koordinatını tayin edelim (bak şekil 1.2.2).



Şekil 1.2.2.

Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir husus, bu koordinatlamanın seçilen $\{O, E, U, V\}$ dörtgenine bağlı olmasıdır.

Üzerinde bulunma bağıntısı:

Her m, k, x, y, $\in$ S için,

$(\infty)\ o\ [\infty]$	, $(\infty)\ o\ [k]$	, $(\infty) \not o\ [m,k]$
$(x) o [\infty]$	, $(x) \not o\ [k]$	, $(x)\ o\ [m,k] \Leftrightarrow x=m$
$(x,y) \not o\ [\infty]$	, $(x,y)\ o\ [k] \Leftrightarrow x=k$	, $(x,y)\ o\ [m,k] \Leftrightarrow y = T(m,x,k)$

S kümesi ve "$T : S^3 \rightarrow S \ni T(m, x, k) = y \Leftrightarrow (x, y)\, o\, [m, k]$" olacak biçimde T üçlü işleminin birlikte düşünülmesiyle yeni bazı kavramlar tanımlanabilir.

1.3.Projektif Düzlemlerin Cebirsel Yapıları

Tanım 1.3.1: S, 0 ve 1 ile gösterilen iki elemanı da içeren bir küme ve $\infty \notin S$ olsun. T, S üzerinde aşağıdaki T1 - T5 koşullarını gerçekleyen bir üçlü işlem ise, (S,T) ikilisine *üçlü halka* denir.

T1) Her a, b, c$\in$S için, T(0, b, c)= T (a, 0, c)=c

T2) Her $a \in S$ için, $T(1, a, 0) = T(a, 1, 0) = a$

T3) Verilen her $a, b, c \in S$ için $T(a,b,x)=c$ olacak biçimde bir tek $x \in S$ vardır.

T4) $a \neq c$ olmak üzere verilen $a, b, c, d \in S$ için $T(a, x, b) = T(c, x, d)$ olacak biçimde bir tek $x \in S$ vardır.

T5) $a \neq c$ olmak üzere verilen $a, b, c, d \in S$ için $T(x, a, y)=b$, $T(x, c, y)=d$ olacak biçimde bir tek $(x,y) \in S^2$ vardır.

Ayrıca eğer S bir $\mathcal{P}$ projektif düzlemin koordinatlama kümesi ve T de bu koordinatlardaki üçlü işlemse (S,T) üçlü halkasına $\mathcal{P}$ nin *düzlemsel üçlü halkası* ya da kısaca *düzlemsel üçlü halka* denir.

Teorem 1.3.1: Her (S,T) üçlü halkası bir düzlemsel üçlü halkadır, yani verilen her (S,T) üçlü halkası için öyle bir $\mathcal{P}$ projektif düzlemi vardır ki onun düzlemsel üçlü halkası (S,T) dir. (Bu projektif düzlem $\mathcal{P}_{(S,T)}$ ile gösterilir.)

Teorem 1.3.2: $\mathcal{P}$ bir projektif düzlem, (S,T) bu düzlemin bir O,E, U, V koordinatlama dörtgenine göre düzlemsel üçlü halkası ve (S',T') de yine $\mathcal{P}$ nin O', E', U', V' koordinatlama dörtgenine göre düzlemsel üçlü halkası olsun. (S,T) ve (S',T') nin izomorf olması için gerek ve yeter koşul $f(O)=O'$, $f(E)=E'$, $f(U)=U'$ ve $f(V)=V'$ olacak biçimde bir $f \in G(\mathcal{P})$ kolinasyonunun var olmasıdır.

Tanım 1.3.2: Her hangi bir L kümesi üzerinde * ikili işlemi verilmiş olsun. (L,*) sistemi aşağıdaki L1-L3 özelliklerini sağlarsa bu sisteme *yarıgrup* veya *loop* denir.

L1) Verilen her a, b,$\in$L için $a*x=b$ denkleminin bir tek $x\in L$ çözümü vardır.

L2) Verilen her $a,b\in L$ için, $x*a=b$ denkleminin bir tek $x\in L$ çözümü vardır.

L3) Her $x\in L$ için $u*x=x*u=x$ olacak biçimde bir $u\in L$ (birim eleman) vardır.

Tanım 1.3.3: Herhangi bir (S,T) üçlü halkasının T işleminin

$$x+y=T(1,x,y) \qquad \text{ve} \qquad x.y=T(x,y,0)$$

biçiminde tanımlanan özel hallerine sırasıyla S üzerinde *toplama* ve *çarpma* (ikili) işlemleri denir.

Tanım 1.3.4: S , 0 ve 1 i de kapsayan bir küme olsun. + ve . bu küme üzerinde iki ikili işlem iken (S,+) ve (S-{0},·) birim elemanları sırasıyla 0 ve 1 olan birer yarıgrup ve her $x\in S$ için $x.0=0.x=0$ ise (S,+,·) sistemine *çifte-yarıgrup* denir.

Tanım 1.3.5: (S,+,·) sistemi bir düzlemsel halka olmak üzere T üçlü işlemi,

$$T : S^3 \to S$$

$$(a,\ b,\ c) \longrightarrow T(a,\ b,\ c)=ab+c$$

şeklinde tanımlanırsa (S,T) ikili sistemine bir *lineer üçlü halka* denir.

Tanım 1.3.6: (S,T) bir lineer üçlü halka olsun. (S,T) lineer üçlü halkasında + işlemi asosyatif ise, (S,T) ye bir *kartezyen grup* denir.

Teorem 1.3.3: Herhangi bir $(S,+,\cdot)$ çifte-yarıgrubunun $T(a,b,c)=ab+c$ işlemi ile birleştirilmesinden elde edilen (S,T) ikilisinin kartezyen grup olması için gerek ve yeter koşullar şunlardır:

1) $(S,+,\cdot)$ bir düzlemsel halkadır.

2) $+$ işlemi assosyatiftir.

Sonuç 1.3.4: Herhangi bir $(S,+,\cdot)$ cebirsel yapısının

$$T(a,\ b,\ c)=ab+c$$

üçlü işlemiyle birleştirilmesinden elde edilen (S,T) ikilisinin kartezyen grup olması için,

1) $(S,+)$ nın birim elemanı 0 olan, bir grup olması,

2) $(S-\{0\},\cdot)$ nın birim elemanı 1 olan, bir yarıgrup olması,

3) Her $x\in S$ için $0.x=x.0=0$ olması,

4) Verilen her $a,\ b,\ c,\ d\in S$, $a\neq c$ için

$$ax+b=cx+d$$

olacak biçimde bir tek $x\in S$ çözümünün bulunması,

5) Verilen her $a,\ b,\ c,\ d\in S$, $a\neq c$ için

$$xa+y=b$$
$$xc+y=d$$

sisteminin bir tek $(x,\ y)\in S^2$ çözümünün bulunması, gerek ve yeterdir.

Kartezyen gruplar $((\infty),\ [\infty])$ - Dezargsel olan projektif düzlemler belirtirler. Şimdi bir kartezyen grup örneği verelim. Bundan önceki kullanılan tanım ve kavramlar (Kaya, 1978) den alınmıştır.

1.4. Bir Kartezyen Grup Örneği

Örnek 1.4.1: (Spencer 1960; Kaya 1978; Özcan 1988)

R gerçel sayılar kümesi ve +, **R** üzerinde bilinen toplama işlemi olsun. Θ işlemi ise her x, y$\in$**R** için

$$x\Theta y = \begin{cases} xy & , \; xy\geq 0 \quad \text{iken} \\ xy^2 & , \; x<0 \text{ ve } y>0 \quad \text{iken} \\ x^2y & , \; x>0 \text{ ve } y<0 \quad \text{iken} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın, (**R**, +, Θ) sisteminin bir kartezyen grup olduğunu fakat çarpmanın komutatifliği dışında birleşim veya toplama üzerine dağılma gibi standart özelliklerden hiç birini sağlamadığını gösterelim.

1) (**R**,+) nın, birim elemanı 0 olan bir grup olduğu aşikardır.

2) (**R**-{0}, Θ) nın bir yarıgrup olduğunu gösterelim:

L1) a, b,$\in$ **R**-{0} için $a\Theta x=b$ (1.1)

denkleminin bir tek x$\in$**R** çözümünün varlığını inceleyelim.

a>0 ve b>0 iken ax=b ise $x = a^{-1}b > 0$ tek çözümdür. $a^2x=b$ olsa idi $x = (a^2)^{-1}b > 0$ olduğundan x<0 çözümü mevcut olmazdı.

a<0 ve b>0 ise, ax=b ve buradan $x = a^{-1}b < 0$ tek çözümdür.

Oysa $ax^2=b$ iken $x^2=a^{-1}b$ ve $x=\pm\sqrt{a^{-1}b}$ olurdu. $a^{-1}b<0$ olduğundan böyle bir çözüm varolamaz.

$a>0$ ve $b<0$ ise, $ax=b$ den $x=a^1b<0$ çözüm olamaz. $a^2x=b$ ise, $x=(a^2)^{-1}b<0$ tek çözümdür.

$a<0$ ve $b<0$ ise, $ax=b$ ve $x=a^{-1}b>0$ olur. Dolayısıyla x çözüm olamaz. Fakat $ax^2=b$ ise, $x=\pm\sqrt{a^{-1}b}$ olduğundan $x=\sqrt{a^{-1}b}>0$ tek çözümdür. Böylece (1.1) in bir tek x çözümü vardır.

Kartezyen grup koşulları arasında olmamasına karşın bu işlem komutatiftir. Şöyleki,

$x,y\geq 0$ veya $x,y\leq 0$ iken, $xy\geq 0$ olduğundan $x\Theta y=xy=yx=y\Theta x$ dir. $x>0$ ve $y<0$ ise, $x\Theta y=x^2y=yx^2=y\Theta x$ dir. Ve nihayet

$x<0$ ve $y>0$ iken, $x\Theta y=xy^2=y^2x=y\Theta x$ olduğundan her $x,y\in\mathbf{R}$ için $x\Theta y=y\Theta x$ dir.

L2) Θ işlemi komütatif olduğundan $a\Theta x=b$ denkleminin bir tek çözümü var iken $x\Theta a=b$ nin de bir tek $x\in\mathbf{R}$ çözümü vardır.

L3) $$1\Theta x=\begin{cases}1x & , x\geq 0\\ 1^2x & , x<0\end{cases}=\begin{cases}x & , x\geq 0\\ x & , x<0\end{cases}=x$$

olduğundan $(\mathbf{R}-\{0\},\Theta)$, birim elemanı 1 olan, bir yarıgruptur.

3) Her $x\in\mathbf{R}$ için $0\Theta x=0x=0=x0=x\Theta 0$ dır.

4) Her $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $a \neq c$ için,

$$a\Theta x+b=c\Theta x+d \tag{1.2}$$

eşitliğinin bir tek $x \in \mathbf{R}$ çözümünü araştıralım.

$$a\Theta x+b=\begin{cases} ax+b & , ax\geq 0 \text{ iken} \\ a^2x+b & , a>0 \text{ ve } x<0 \text{ iken} \\ ax^2+b & , a<0 \text{ ve } x>0 \text{ iken} \end{cases}$$

$$c\Theta x+d=\begin{cases} cx+d & , cx\geq 0 \text{ iken} \\ c^2x+d & , c>0 \text{ ve } x<0 \text{ iken} \\ cx^2+d & , c<0 \text{ ve } x>0 \text{ iken} \end{cases}$$

ifadeleri yardımıyla çeşitli halleri inceleyelim.

$a=0$ iken, $b=c\Theta x+d \Rightarrow c\Theta x=b-d$ ve $c=0$ iken,

$a\Theta x+b=d \Rightarrow a\Theta x=d-b$ eşitliklerinin bir tek çözümlerinin varlığını yarıgrup özelliklerinden söyleyebiliriz.

$a>0$ ve $c>0$ olsun.

$ax+b=cx+d$, $(x\geq 0)$ veya $a^2x+b=c^2x+d$, $(x<0)$ eşitlikleri vardır.

Eğer $(d-b)(a-c)^{-1} \geq 0$ ise, birinci eşitliğin bir tek $x=(d-b)(a-c)^{-1}$ çözümü vardır. Aksi takdirde $x=(d-b)(a^2-c^2)^{-1}$ ikinci eşitliğin tek çözümüdür.

$a<0$ ve $c>0$ olsun. $ax+b=c^2x+d$, $(x<0)$ veya $ax^2+b=cx+d$, $(x>0)$ eşitliklerinin çözümüne bakalım. $d-b>0$ ise birinci eşitliğin ve $d-b<0$ ise ikinci eşitliğin bir tek çözümü vardır.

$a>0$ ve $c<0$ iken, $d-b<0$ ise,

$a^2x+b = cx+d$, $(x<0)$ eşitliğinin birtek x çözümü vardır.

Eğer $d-b>0$ ise, $ax+b=cx^2+d$, $(x>0)$ ın x çözümü tektir.

$a<0$ ve $c<0$ ise, $(d-b)(a-c)^{-1}<0$ iken $ax+b=cx+d$, $(x<0)$ eşitliğinin bir tek x çözümü vardır. Ayrıca $(d-b)(a-c)^{-1}>0$ iken $ax^2+b=cx^2+d$ nin de bir tek çözümü var olduğundan (1.2) eşitliğinin çözümü daima tektir.

5) Her $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $a \neq c$ için,

$$\begin{aligned} x\Theta a+y&=b \\ x\Theta c+y&=d \end{aligned} \tag{1.3}$$

sisteminin bir tek $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ çözümü olmalıdır.

$$x\Theta a+y = b \Leftrightarrow \begin{cases} xa+y=b , & xa\geq 0 \text{ iken} \\ x^2a+y=b , & x>0 \text{ ve } a<0 \text{ iken} \\ xa^2+y=b , & x<0 \text{ ve } a>0 \text{ iken} \end{cases}$$

$$x\Theta c+y = d \Leftrightarrow \begin{cases} xc+y=d , & xc\geq 0 \text{ iken} \\ x^2c+y=d , & x>0 \text{ ve } c<0 \text{ iken} \\ xc^2+y=d , & x<0 \text{ ve } c>0 \text{ iken} \end{cases}$$

dır.

$a=0$ veya $c=0$ iken, sırasıyla $x\Theta c=d-b$ ve $x\Theta a=b-d$ eşitliklerinin, yarıgrup özellikleri nedeniyle, birer tek x çözümleri olduğundan (1.3) sisteminin de bir tek (x, y) çözümü vardır.

$a>0$ ve $c>0$ olsun. $(b-d)\,(a-c)^{-1}<0$ ise,

$$xa^2+y=b$$

$$xc^2+y=d,\ (x<0)$$

sisteminin bir tek (x, y) çözümü vardır ve $(b-d)\,(a-c)^{-1}>0$ ise,

$$xa+y=b$$

$$xc+y=d,\ (x>0)$$

sisteminin bir tek çözümü vardır.

$a>0$ ve $c<0$ iken, $b-d<0$ olması halinde

$$xa^2+y=b$$

$$xc+y=d,\ (x<0)$$

sisteminin bir tek çözümü varken, $b-d>0$ ise,

$$xa+y=b$$

$$x^2c+y=d,\ (x>0)$$

sisteminin bir tek çözümü vardır.

$a<0$ ve $c>0$ ise, $b-d>0$ iken,

$$xa+y=b$$

$$xc^2+y=d,\ (x<0)$$

sisteminin ve $b-d<0$ iken,

$$x^2a+y=b$$

$$xc+y=d,\ (x>0)$$

sisteminin birer tek çözümleri vardır.

$a<0$ ve $c<0$ olması halinde, $(b-d)\,(a-c)^{-1}<0$ ise,

$$xa+y=b$$

$$xc+y=d$$

sisteminin bir tek çözümü vardır. Eğer $(b-d)\,(a-c)^{-1}>0$ ise,

$$x^2a+y=b$$

$$x^2c+y=d$$

sisteminin bir tek (x, y) çözümü olduğundan (1.3) sisteminin, her durumda bir tek çözümü vardır. Dolayısıyla ($\mathbf{R}$, +, Θ) bir kartezyen gruptur. Bu sistemde çarpımın, birleşme ve toplama üzerine dağılma özelliklerinin sağlanmadığını birer örnek ile gösterelim.

$$(2\Theta(-3))\Theta(-2)=(-12)\Theta(-2)=24$$

ve

$$2\Theta((-3)\Theta(-2)) = 2\Theta 6=12$$

dir.

$$2\Theta(-5+3)=2\Theta(-2)=-8$$

ve

$$2\Theta(-5)+2\Theta 3=-20+6=-14$$

dır.

$$(-2+1)\Theta 3=(-1)\Theta 3=-9$$

ve

$$(-2)\Theta 3+1\Theta 3=-18+3=-15$$

dır.

2. EN KÜÇÜK KARTEZYEN GRUP ÜZERİNDE PROJEKTİF DÜZLEMLER

2.1. En Küçük Kartezyen Grup

$F_5 = \{0,1,2,3,4\}$, 5 in kalanlarından oluşan küme olmak üzere F_5 üzerinde + ve · işlemleri sırasıyla 5 modülüne göre toplama ve çarpma işlemleri iken $(F_5, +, \cdot)$ bir cisimdir.

$S = F_5 \times F_5 = \{ (x, y) \mid x, y \in F_5 \}$ üzerinde ⊕ ve ⊙ işlemleri aşağıdaki biçimde tanımlanıyor. (Panella 1965; Kaya 1978; Özcan 1988)

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a+c\ , b+d)$$

$$(a,b) \odot (c,d) = \begin{cases} (a,b) * (c,d) & , \quad b=0 \text{ veya } (bc-ad)^2 - 2d^2 = 0,1,4 \text{ iken} \\ -(a,b) * (c,d) & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Burada * işlemi de

$$(a,b) * (c,d) = \begin{cases} (a.c\ ,\ a.d) & , \quad b=0 \text{ iken} \\ (a.c - b^{-1}.d.(a^2 - 2)\ ,\ b.c - a.d) & , \quad b \neq 0 \text{ iken} \end{cases}$$

ile belirli olsun. Böyle belirlenen $(S, \oplus, \odot)$ sisteminin bir kartezyen grup olduğunu gösterelim.

1) $(S, \oplus)$, birim elemanı (0,0) olan bir değişmeli gruptur.

I) $\forall$ a, b, c, d $\in F_5$ için,

$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d) \in S$ olup işlem kapalıdır.

ii) $\forall$ a, b, c, d$\in F_5$ için,

$(a,b) \oplus (c,d) = (a,b)$

$\Rightarrow (a+c,\ b+d) = (a,b)$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a+c=a \\ b+d=b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} c=0 \\ d=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (0,0)$ birim eleman

iii) $\forall$ a, b, c, d$\in F_5$ için,

$(a,b) \oplus (c,d) = (0,0)$

$\Rightarrow (a+c,\ b+d) = (0,0)$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a+c=0 \\ b+d=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} c=-a \\ d=-b \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-a,-b)$, (a,b) nin tersidir.

iv) $\forall$ a, b, c, d,e, f$\in F_5$ için,

$$\begin{aligned} (a,b) \oplus \big((c,d)\oplus(e,f)\big) &= (a,b)\oplus(c+e,\ d+f) && (\oplus \text{ nın tanımından}) \\ &= \big(a+(c+e),\ b+(d+f)\big) && (+ \text{ nın asos.}) \\ &= \big((a+c)+e,\ (b+d)+f\big) \\ &= \big(a+c,\ b+d\big) \oplus (e,f) \\ &= \big((a,b) \oplus (c,d)\big) \oplus (e,f) \end{aligned}$$

olduğundan $\oplus$ işlemi birleşmelidir. i), ii), iii), ve iv) den $(S,\oplus)$ bir gruptur.

Ayrıca $\forall$ a, b, c, d$\in F_5$ için,

$$\begin{aligned} (a,b) \oplus (c,d) &= (a+c,\ b+d) && (+ \text{ nın değişme öz.}) \\ &= (c+a,\ d+b) \\ &= (c,d) \oplus (a,b) \end{aligned}$$

olduğundan $\oplus$ işlemi değişmelidir. Dolayısıyla $(S,\oplus)$ değişmeli bir gruptur.

(S,Θ) nın özelliklerinin kolayca görülebilmesi için Θ işlemine ilişkin çizelgeyi verelim. Bu çizelgede kısalık sağlamak için her (x,y) ∈S elemanı için xy gösterimi kullanılacaktır. Örneğin i. satırın başındaki (a,b) ve j. sütununun başındaki (c,d) elemanları sırasıyla ab ve cd olarak yazılacak ve eğer (a,b)Θ(c,d) = (u,v) ise bu eleman çizelgede i. satır ve j. sütunuda uv biçiminde gösterilecektir.

Θ	00	01	02	03	04	10	11	12	13	14	20	21	22	23	24	30	31	32	33	34	40	41	42	43	44
00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
01	00	30	10	40	20	01	21	14	44	31	02	33	42	12	23	03	32	43	13	22	04	24	11	41	34
02	00	40	30	20	10	02	43	22	32	13	04	14	31	21	44	01	11	34	24	41	03	42	23	33	12
03	00	10	20	30	40	03	12	33	23	42	01	41	24	34	11	04	44	21	31	14	02	13	32	22	43
04	00	20	40	10	30	04	34	41	11	24	03	22	13	43	32	02	23	12	42	33	01	31	44	14	21
10	00	01	02	03	04	10	11	12	13	14	20	21	22	23	24	30	31	32	33	34	40	41	42	43	44
11	00	14	23	32	41	11	30	21	43	03	22	31	10	01	42	33	13	04	40	24	44	02	12	34	20
12	00	34	13	42	21	12	41	30	01	22	24	02	32	44	10	31	40	11	23	03	43	33	04	20	14
13	00	24	43	12	31	13	23	04	30	44	21	10	41	33	03	34	02	22	14	40	42	11	20	01	32
14	00	44	33	22	11	14	02	42	24	30	23	43	04	10	34	32	21	40	01	12	41	20	31	13	03
20	00	02	04	01	03	20	22	24	21	23	40	42	44	41	43	10	12	14	11	13	30	32	34	31	33
21	00	22	44	11	33	21	04	32	40	12	42	30	03	24	14	13	41	31	02	20	34	43	10	23	01
22	00	12	24	31	43	22	40	03	14	34	44	23	30	13	01	11	04	42	20	32	33	21	41	02	10
23	00	42	34	21	13	23	31	11	02	40	41	04	12	30	22	14	33	20	43	01	32	10	03	44	24
24	00	32	14	41	23	24	13	40	33	01	43	11	21	02	30	12	20	03	34	44	31	04	22	10	42
30	00	03	01	04	02	30	33	31	34	32	10	13	11	14	12	40	43	41	44	42	20	23	21	24	22
31	00	23	41	14	32	31	42	10	22	04	12	44	34	03	20	43	30	02	21	11	24	01	33	40	13
32	00	13	21	34	42	32	24	44	03	10	14	01	43	20	33	41	22	30	12	04	23	40	02	11	31
33	00	43	31	24	12	33	10	02	41	21	11	32	20	42	04	44	01	13	30	23	22	34	14	03	40
34	00	33	11	44	22	34	01	23	10	43	13	20	02	31	41	42	14	24	03	30	21	12	40	32	04
40	00	04	03	02	01	40	44	43	42	41	30	34	33	32	31	20	24	23	22	21	10	14	13	12	11
41	00	11	22	33	44	41	03	13	31	20	32	12	01	40	21	23	34	10	04	43	14	30	24	42	02
42	00	31	12	43	24	42	32	01	20	11	34	40	14	22	02	21	03	33	41	10	13	44	30	04	23
43	00	21	42	13	34	43	14	20	04	33	31	03	23	11	40	24	10	44	32	02	12	22	01	30	41
44	00	41	32	23	14	44	20	34	12	02	33	24	40	04	13	22	42	01	10	31	11	03	43	21	30

2) $(S-\{(0,0)\}, \Theta)$ sisteminin bir yarıgrup olduğunu gösterelim.

$\alpha, \beta \in S-\{(0,0)\}$ için,

$\alpha \Theta x = \beta$

denkleminin bir tek $x \in S$ çözümü vardır. Çünkü, i. satırın başında bulunan bir α elemanı ve yine aynı satırda bir kez görülen β elemanı verildiğinde eğer β, i. satır ve j. sütunundaki bir eleman ise j. sütunun başındaki eleman $\alpha \Theta x = \beta$ denkleminin bir tek $x \in S$ çözümüdür. Örneğin, $23 \Theta x = 12$ denkleminin bir tek $x = 22 \equiv (2,2) \in S$ çözümü vardır.

$\alpha, \beta \in S-\{(0,0)\}$ için, $x \Theta \alpha = \beta$ denkleminin bir tek $x \in S$ çözümünün olduğunu, yukarıda satır ve sütunların rollerini değiştirerek söyleyebiliriz.

Her $\alpha \in S$ için, $10 \Theta \alpha = \alpha \Theta 10 = \alpha$ olduğu çizelgeden görülmektedir. Dolayısıyla $(S-\{(0,0)\}, \Theta)$ birim elemanı (1,0) olan bir yarıgruptur.

3) Her $\alpha \in S$ için

$00 \Theta \alpha = \alpha \Theta 00 = 00$.

olduğu yine çizelgeden görülmektedir.

4) $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in S$ ve $\alpha \neq \beta$ için,

$\alpha \Theta x \oplus \gamma = \beta \Theta x \oplus \delta$

denkleminin S üzerinde bir tek çözümünün olduğunu çizelgeden görebilmek için bu ifadeyi, $(S, \oplus)$ nın grup özelliklerinden,

$(\alpha \Theta x) - (\beta \Theta x) = \mu$

biçiminde yazalım. Çizelgede, α ve β nın bulunduğu satırlarda olup aynı sütunda bulunan eleman çiftlerinin farkı μ olan sütun bir tek tanedir. Çünkü bu farklar her sütun için farklı elemanlar vermektedir. Bu sütunun başında bulunan elemanda

$$\alpha\Theta x\oplus\gamma = \beta\Theta x\oplus\delta$$

denkleminin aranan tek çözümüdür. Bir örnek verelim:

$$12\Theta x\oplus 32 = 13\Theta x\oplus 41$$

denkleminin bir tek $x=33\equiv(3,3)\in S$ çözümü vardır.

5) $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in S,\ \alpha\neq\beta$ için,

$$x\Theta\alpha\oplus y = \gamma$$

$$x\Theta\beta\oplus y = \delta$$

sisteminin bir tek $(x,y)\in S^2$ çözümünün olduğunu görebilmek için bu ifadeyi, $(S,\oplus)$ nın grup olma özelliğinden,

$$(x\Theta\alpha) - (x\Theta\beta) = \gamma - \delta = \mu$$

ve

$$y = \gamma - (x\Theta\alpha)$$

biçiminde yazalım.

$$\alpha\Theta x\oplus\gamma = \beta\Theta x\oplus\delta$$

denkleminin çözümünde satır sütunların rollerini değiştirerek

$$(x\Theta\alpha) - (x\Theta\beta) = \gamma - \delta = \mu$$

denkleminin bir tek $x\in S$ çözümünün olduğunu söyleyebiliriz. $x\in S$ bulunduktan sonra, $(S,\oplus)$ nın grup olması nedeniyle

$$y = \gamma - (x\Theta\alpha)$$

eşitliği yardımıyla bir tek $y\in S$ hemen bulunabilir. Dolayısıyla

$$x\Theta\alpha\oplus y = \gamma$$

$$x\Theta\beta\oplus y = \delta$$

sisteminin bir tek $(x,y) \in S^2$ çözümü mevcuttur.

$(S, \oplus, \ominus)$ sistemi çarpmanın komutatifliği, birleşimi yada toplama üzerine dağılması gibi standart özelliklerden hiç birini sağlamaz. Bu özelliklerin sağlanmadığını birer örnekle gösterelim.

$41 \ominus 24 = 21$ ve $24 \ominus 41 = 04$ (Değişme özelliği yok).

$(12 \ominus 30) \ominus 42 = 31 \ominus 42 = 33$ ve $12 \ominus (30 \ominus 42) = 12 \ominus 21 = 02$ olduğundan birleşme özelliği yoktur.

$21 \ominus (03 \oplus 41) = 21 \ominus 44 = 01$ ve $(21 \ominus 03) \oplus (21 \ominus 41) = 11 \ominus 43 = 04$ olduğundan soldan dağılma özelliği yoktur.

$(31 \oplus 04) \ominus 11 = 30 \ominus 11 = 33$ ve $(31 \ominus 11) \oplus (04 \ominus 11) = 42 \oplus 34 = 21$ olduğundan sağdan dağılma özelliği yoktur.

2.2. P_2S nin İnşaası

(25.Mertebeden bir projektif düzlemin inşaası)

Düzlemin Noktalar Kümesi $\mathcal{N}$:

625	'afin'	nokta	(x,y),	$(x,y \in S)$
25	'ideal'	nokta	(m),	$(m \in S)$
1	'ideal'	nokta	(∞)	

Düzlemin Doğrular Kümesi $\mathfrak{D}$:

625	'afin'	doğru	$y = m \ominus x \oplus k$,	$(m, k \in S)$
25	'afin'	doğru	$x = \lambda$,	$(\lambda \in S)$
1	'ideal'	doğru	$[\infty]$	

Üzerinde Bulunma Bağıntısı o:

(m) ideal noktası $y = m \ominus x \oplus k$, (her $k \in S$ için) doğrusu ve $[\infty]$doğrusu üzerindedir. (∞) ideal noktası $x=\lambda$, $(\forall\lambda\in S$ için) doğruları ve $[\infty]$ doğrusu üzerindedir.

(x,y) afin noktası $y=m\Theta x\oplus k$, $(\forall\ m,k\in S)$ doğrusu üzerindedir ve (x,y) afin noktası $x=\lambda$, $(\lambda\in S)$ doğrusu üzerindedir.

Yani;

$(x,y)\ o\ [m,k] \Leftrightarrow y=m\Theta x\oplus k$

ve

$(x,y)\ o\ [\lambda] \Leftrightarrow x=\lambda$ eşitlikleri geçerlidir.

(x,y) afin noktası $[\infty]$ doğrusu üzerinde değildir.

$\mathcal{N}$ noktalar kümesi, $\mathcal{D}$ doğrular kümesi ve o üzerinde bulunma bağıntısı iken $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ sisteminin bir projektif düzlem olduğunu gösterelim.

P1)

$P_1=(x_1,y_1)$ ve $P_2=(x_2,y_2)$ iki farklı nokta olsun.

Eğer $x_1=x_2$ ise P_1 ve P_2 den geçen bir tek $x=x_1$ doğrusu vardır. $x_1=x_2$ iken $y_1\neq y_2$ olduğundan P_1 ve P_2 den $y=m\Theta x\oplus k$ şeklinde bir doğru geçemez. Eğer P_1 ve P_2 den $x_1=x_2$ iken $y=m\Theta x\oplus k$ şeklinde bir doğru geçseydi (x_1,y_1) ve (x_1,y_2) noktaları bu denklemi sağlarlardı.

Yani,

$$\left.\begin{array}{l}(x_1,y_1)\ o\ [m,k] \Leftrightarrow y_1=m\Theta x_1\oplus k\\ (x_1,y_2)\ o\ [m,k] \Leftrightarrow y_2=m\Theta x_1\oplus k\end{array}\right\} \Rightarrow y_1=y_2 \quad \text{olup} \quad P_1\neq P_2 \text{ ile çelişir.}$$

Eğer $x_1\neq x_2$ ise P_1 ve P_2 bir $y=m\Theta x\oplus k$ doğrusu üzerindedirler.

Yani,

$$y_1 = m\Theta x_1 \oplus k$$

$$y_2 = m\Theta x_2 \oplus k$$

sisteminin bir tek $[m,k]$ çözümü vardır. Dolayısıyla (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarından bir tek doğru geçer. Çünkü $x_1 \neq x_2$ olduğundan $x = \lambda$ şeklinde bir doğru P_1 ve P_2 den geçemez.

P2)

$$y = m_1 \Theta x \oplus k_1 \quad \text{ve} \quad y = m_2 \Theta x \oplus k_2 \ (m_1 \neq m_2 \text{ iken})$$

$$(m_1 \Theta x) - (m_2 \Theta x) = k_1 - k_2 = k$$

denkleminin bir tek x çözümü olduğundan y de tek olarak bulunabilir.

Dolayısıyla,

$$y = m_1 \Theta x \oplus k_1$$

$$y = m_2 \Theta x \oplus k_2$$

doğrularının bir tek (x,y) ortak noktaları vardır. $x=\lambda$ şeklindeki doğrularda sadece (∞) ideal ortak noktasına sahip olduklarından bu şekildeki iki doğrunun arakesiti bir tek (∞) noktasıdır.

P3)

Her hangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta ise daima bulunabilir. Örneğin $O = ((0,0),\ (0,0))$, $I = ((1,0),\ (1,0))$, $X = ((0,0))$, $y = (\infty)$ noktalarının herhangi üçü doğrudaş değildir.

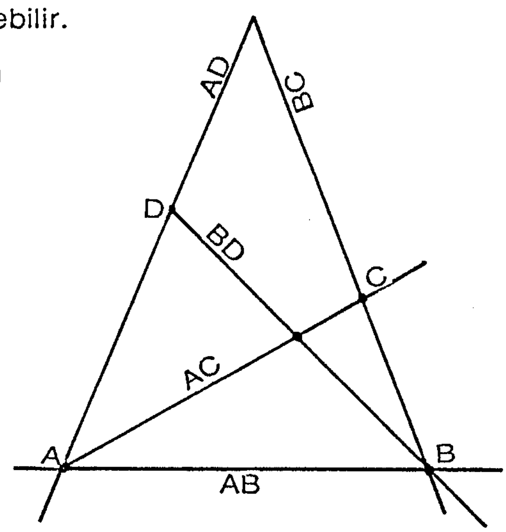
Dolayısıyla $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ sistemi bir projektif düzlemdir.

2.3. P_2S nin Düzgün Dörtgenleri

Önerme 2.3.1.

P_2S nin düzgün dörtgenlerinin sayısı $\dfrac{651.650.625.576}{4!}$ dır.

İspat: Bu düzlemin bir ABCD dörtgeninin kaç farklı şekilde seçilebileceğini göstermek gerekir. Bu dörtgenin ilk noktası olan A noktası düzlemin 651 noktasından biri olarak seçilebilir. B noktası A noktasından farklı olacağından B ise kalan 650 nokta içinden seçilebilir. Dörtgenin C noktası AB doğrusu üzerinde olmayacağından ve AB üzerinde 26 nokta bulunduğundan C noktası 651-26 = 625 farklı şekilde seçilebilir. Dörtgenin sonuncu noktası olan D noktası, D $\notin$ AB, D $\notin$ AC , D $\notin$ BC özelliğinde olması gerektiğinden ve bu üç doğrunun yani, AB, BC, AC doğruları üzerinde toplam 26+25+24=75 farklı nokta mevcut olduğundan, D noktası 651-75 = 576 farklı şekilde seçilebilir. Ancak her hangi bir A'B'C'D' dörtgeninin kendi üzerine permütasyonları sayısı 4! kadar olduğundan dolayı P_2S nin düzgün dörtgenlerinin sayısı



$$\frac{651.650.625.576}{4!}$$

dir.

2.4. P_2S nin Kolinasyonları

S üzerinde tanımlanın $\oplus$ işlemi yardımıyla tanımlayabileceğimiz f_a dönüşümünü gözönüne alalım.

$f_a : (x, y) \longrightarrow (x, y \oplus a)$, $(a \in S)$ $\qquad f_a : [m, k] \longrightarrow [m, k \oplus a]$

$(m) \longrightarrow (m)$ $\qquad [\lambda] \longrightarrow [\lambda]$

$(\infty) \longrightarrow (\infty)$ $\qquad [\infty] \longrightarrow [\infty]$

$\Rightarrow$ f_a 1-1 dir: Çünkü $f_a(x_1 , y_1) = f_a(x_2 , y_2) \Rightarrow (x_1 , y_1 \oplus a) = (x_2 , y_2 \oplus a)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 \oplus a = y_2 \oplus a, \end{cases} \quad ((S, \oplus) \text{ grup olduğundan})$$

$$\Rightarrow y_1 \oplus a - a = y_2 \oplus a - a \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ dir.}$$

Şimdi (x_o , y_o) noktasının $y = m \ominus x \oplus k$ doğrusu üzerinde olduğunu kabul edelim. O zaman,

$$y_o = m \ominus x_o \oplus k \text{ dır.}$$

Eşitliğin her iki yanına a ilave edelim.

$$y_o \oplus a = (m \ominus x_o \oplus k) \oplus a \quad \text{(Toplama asosyatif olduğundan)}$$

$$y_o \oplus a = m \ominus x_o \oplus (k \oplus a)$$

$\Rightarrow$ $(x_o , y_o \oplus a)$ noktası $y = m \ominus x \oplus (k \oplus a)$ doğrusu üzerindedir.

Eğer (x_o , y_o) $x=\lambda$ doğrusu üzerinde ise $(x_o , y_o \oplus a)$ noktasıda $x=\lambda$ doğrusu üzerindedir. Dolayısıyla f_a dönüşümü

$$f_a : (m) \longrightarrow (m) \quad \text{ve} \quad (\infty) \longrightarrow (\infty) \quad \text{olur.}$$

Kolinasyonlarla geçişkenlik arasındaki ilişki gözönüne alınarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç: 2.4.1 P_2S $((\infty), [\infty])$ - geçişkendir.

2.5. P_2S NİN ALT DÜZLEMLERİ

Bir Fano düzlemi birçok projektif düzlemlerin alt projektif düzlemleri olarak da ortaya çıkar. Bir projektif düzlemdeki Fano altdüzlemleri bu projektif düzlemin geometrik yapısının da belirlenmesinde önemli rol oynar. (Çiftçi-Kaya 1990, Kirkpatrick, 1971).

2.5.1. P_2S nin 2. Mertebeden Bazı Alt Düzlemleri

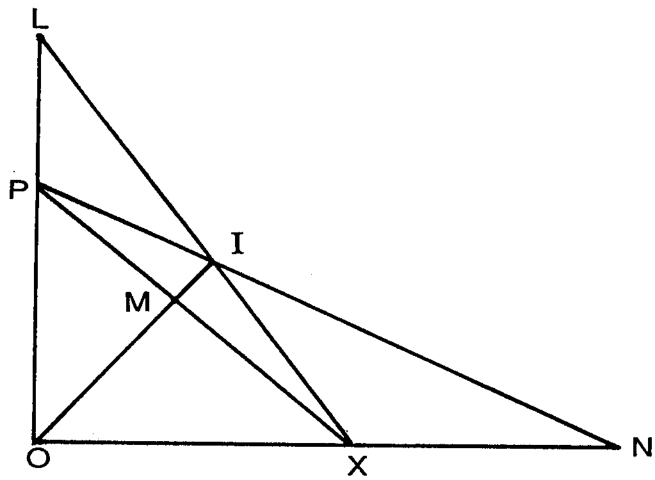
P_2S nin 2. mertebeden altdüzlemlerini araştırırken, ilgili tam dörtgenler aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde seçilmiştir.

$O=((0,0),(0,0))$, $I=((1,0),(1,0))$, $X=((0,0))$ ve $P=((0,0),(a,b))$ her hangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta olsun.

Bu durumda $P=((0,0),(a,b))$ de $a=b=0$ ise $P=O$ olup OIXP bir düzgün dörtgen oluşturmaz. Eğer $P=((0,0),(a,b))$ de $a=1$, $b=0$ ise $P=((0,0),(1,0))$ olduğundan I,X ve P noktaları doğrudaş olacağı için yine OIXP bir düzgün dörtgen oluşturmaz. Diğer bütün durumlarda OIXP bir düzgün dörtgen olduğundan bu dörtgenlerin tamamlanmışları olan konfigurasyonların hangilerinin birer Fano düzlemi olduğunu, hangilerinin birer Fano düzlemi olmadığını $P=((0,0),(a,b))$ deki a ve b nin diğer seçilişlerine göre inceleyelim.

Önerme 2.5.1.1. P_2S de $P=((0,0),(a,b))$ olmak üzere $a\in\{2,3,4\}$ ve $b=0$ iken OIXP dörtgenlerinin tamamlanmışları birer Fano düzlemi değildir.

İspat: İspat boyunca noktalar ve doğrular Şekil 2.5.1.1 deki konumda olsun.



Şekil 2.5.1.1.

I.Hal: Eğer a=2, b=0 ise P=((0,0),(2,0)) olup;

OP = [(0,0)], OX = [(0,0),(0,0)], IX = [(0,0),(1,0)] , PX = [(0,0),(2,0)] dır.

$OP \wedge IX = [(0,0)] \wedge [(0,0),(1,0)] = (x, y) \Leftrightarrow x=(0,0)$

$y=(0,0) \ominus x \oplus (1,0) \Rightarrow y=(1,0)$

$\Rightarrow OP \wedge IX = ((0,0), (1,0)) = L$ dir.

$OI \wedge PX = [(1,0),(0,0)] \wedge [(0,0),(2,0)] = (x,y) \Leftrightarrow y= (1,0) \ominus x \Rightarrow y=x$

$y=(0,0) \ominus x \oplus (2,0) \Rightarrow y=(2,0)=x$

$OI \wedge PX = M = ((2,0),(2,0))$ dır.

$PI = ((0,0),(2,0)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (2,0) = m \ominus (0,0) \oplus k \\ (1,0) = m \ominus (1,0) \oplus (2,0) \end{array}\right\} \Rightarrow k = (2,0),\ m = (4,0)$

olduğundan PI = [(4,0),(2,0)] dır.

$PI \wedge OX = [(4,0),(2,0)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x,y) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=(0,0) \\ y=(4,0) \ominus X \oplus (2,0) \end{array}\right\} \Rightarrow x=(2,0)$

$PI \wedge OX = N = ((2,0),(0,0))$ dır.

OIXP nin tamamlanmışı olan konfigurasyonda L, M ve N noktaları doğrudaş ise buna bir Fano düzlemi denir.

$LN=((0,0),(1,0)) \vee ((2,0),(0,0)) = [m,k] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}(1,0)=m\ominus(0,0)\oplus k\\(0,0)=m\ominus(2,0)\oplus k\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}k=(1,0)\\m=(2,0)\end{array}$

dır.

$\Rightarrow LN = [(2,0),(1,0)]$ dır.

Varsayalım ki $M \circ LN$ olsun.

$$M \circ LN \Leftrightarrow ((2,0),(2,0)) \circ [(2,0),(1,0)] \Leftrightarrow (2,0)= (2,0)\ominus(2,0)\oplus(1,0)$$

$$\Leftrightarrow (2,0) = (0,0)$$

olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla L, M ve N noktaları doğrudaş olmadığından OIXP dörtgeninin tamamlanmışı olan konfigurasyon Fano düzlemi değildir.

II.Hal: Eğer $a = 3$, $b = 0$ ise $P = ((0,0),(3,0))$ olup,

$OP=[(0,0)]$, $OX=[(0,0),(0,0)]$, $IX=[(0,0),(1,0)]$, $PX=[(0,0),(3,0)]$, $OI=[(1,0),(0,0)]$ dır.

$OP \wedge IX = L =((0,0),(1,0))$ dır.

$OI \wedge PX=[(1,0),(0,0)] \wedge [(0,0),(3,0) = (x,y) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}y=(1,0)\ominus x\oplus(0,0)\\y=(0,0)\ominus x\oplus(3,0)\end{array}\right\} \Rightarrow y=x=(3,0)$

$OI \wedge PX=M=((3,0),(3,0))$ dır.

$PI=((0,0),(3,0)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}(3,0)= m\ominus (0,0) \oplus k\\(1,0)= m\ominus (1,0) \oplus k)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}k =(3,0)\\m =(3,0)\end{array}$

olduğundan $PI = [(3,0),(3,0)]$ dır.

$$PI \wedge OX = [(3,0),(3,0)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x,y) \Leftrightarrow y = (0,0)$$

$$y = (3,0)\ominus x\oplus(3,0) \Rightarrow x=(4,0)$$

$\Rightarrow PI \wedge OX = N = ((4,0),(0,0))$ dır.

L, M ve N nin doğrudaş olabilmeleri için $N \circ LM$ olmalıdır.

$LM=((0,0),(1,0)) \vee ((3,0),(3,0)) = [m,k] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}(1,0)= m\ominus (0,0) \oplus k\\(3,0)= m\ominus (3,0) \oplus k)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}k =(1,0)\\m =(4,0)\end{array}$

olduğundan $LM = [(4,0), (1,0)]$ dır.

$NoLM \Leftrightarrow ((4,0),(0,0)) \circ [(4,0),(1,0)] \Leftrightarrow (0,0) = (4,0)\Theta(4,0) \oplus (1,0)$

$\Leftrightarrow (0,0) = (2,0)$

olup $(0,0) \neq (2,0)$ olduğundan $N \not\in LM$ dir. Dolayısıyla OIXP dörtgeninin tamamlanmışı bir Fano düzlemi değildir.

III.Hal: Eğer a = 4, b = 0 ise P =((0,0), (4,0)) olup;

OP = [(0,0)], OX = [(0,0),(0,0)], IX = [(0,0),(1,0)], PX = [(0,0),(4,0)], OI = [(1,0),(0,0)] dır.

$OP \wedge IX = L = ((0,0),(1,0))$ dır.

$$OI \wedge PX = [(1,0),(0,0)] \wedge [(0,0),(4,0)] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = (1,0)\ \Theta\ x \oplus (0,0) \\ y = (0,0)\ \Theta\ x \oplus (4,0) \end{array}\right\} \Rightarrow y = x = (4,0)$$

$OI \wedge PX = M = ((4,0),(4,0))$ dır.

$$PI = ((0,0),(4,0)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (4,0) = m\Theta(0,0)\oplus k \\ (1,0) = m\Theta(1,0)\oplus k \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} k = (4,0) \\ m = (2,0) \end{array}$$

olduğundan PI = [(2,0),(4,0)] dır.

$PI \wedge OX = N = ((3,0),(0,0))$ bulunur.

L, M ve N noktalarının doğrudaş olabilmeleri için NoLM olmalıdır.

LM = [(2,0),(1,0)] bulunur.

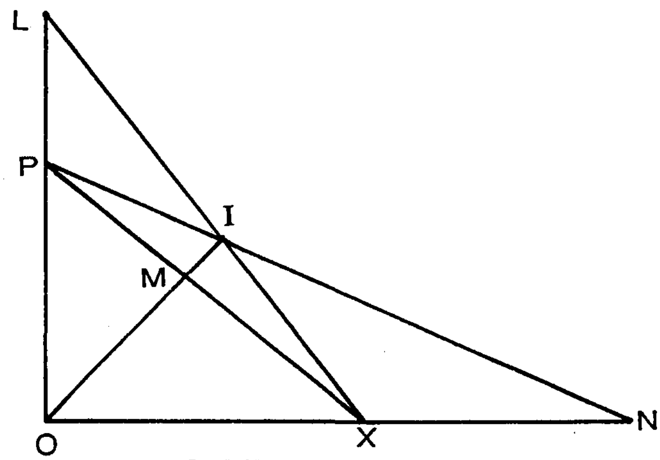
$NoLM \Leftrightarrow ((3,0),(0,0)) \circ [(2,0),(1,0)] \Leftrightarrow (0,0) = (2,0)\ \Theta\ (3,0) \oplus (1,0)$

$\Leftrightarrow (0,0) = (2,0)$

olup, $(0,0) \neq (2,0)$ olduğundan $N \not\in LM$ dir.Yani OIXP dörtgeninin tamamlanmışı olan konfigurasyon bir Fano düzlemi değildir.

Önerme 2.5.1.2: P_2S de P=((0,0),(a,b)) olmak üzere a=0 ve $b \in \{1,2,3,4\}$ iken OIXP dörtgenlerinin tamamlanmışları birer Fano düzlemi oluştururlar.

İspat: İspat boyunca noktalar ve doğrular Şekil 2.5.1.2 deki konumda olsun.



Şekil 2.5.1.2

I.Hal: Eğer a=0, b=1 ise P = ((0,0),(0,1)) olup;

OP = [(0,0)], OX = [(0,0),(0,0)], IX = [(0,0),(1,0)], PX = [(0,0),(0,1)],
OI = [(1,0),(0,0)] dır.

$OP \wedge IX = L = ((0,0),(1,0))$ dır.

$$OI \wedge PX = [(1,0),(0,0)] \wedge [(0,0),(0,1)] = (x,\ y) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = (1,0) \ominus x \oplus (0,0) \\ y = (0,0) \ominus x \oplus (0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow y = x = (0,1)$$

$\Rightarrow OI \wedge PX = M = ((0,1),(0,1))$ dir.

$$PI = ((0,0),(0,1)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (0,1) = m \ominus (0,0) \oplus k \\ (1,0) = m \ominus (1,0) \oplus k \end{array}\right\} \Rightarrow k = (0,1) \text{ ve } m = (1,4)$$

olduğundan PI = [(1, 4),(0,1)] dir.

$$PI \wedge OX = [(1,4),(0,1)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x,\ y) \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = (0,0) \\ x = (2,2) \end{array}$$

$PI \wedge OX = ((2,2),(0,0)) = N$ dir.

L, M ve N noktalarının doğrudaş olabilmeleri için NoLM olmalıdır.

$$LM = ((0,0),(1,0)) \vee ((0,1),(0,1)) = [m,\ k] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (1,0) = m \ominus (0,0) \oplus k \\ (0,1) = m \ominus (0,1) \oplus k \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} k = (1,0) \\ \text{ve } m = (4,4) \end{array}$$

olduğundan $LM = [(4,4),(1,0)]$ dır.

$$NoLM \Leftrightarrow ((2,0),(0,0)) \circ [(4,4),(1,0)] \Leftrightarrow (0,0) = (4,4) \ominus (2,0) \oplus (1,0)$$

$$\Leftrightarrow (0,0) = (0,0)$$

olduğundan L, M, N noktaları doğrudaştır. Yani OIXP dörtgeninin tamamlanmışı bir Fano düzlemidir, bu düzlem F_1 ile gösterilir.

II.Hal: Eğer $a=0$, $b=2$ ise $P = ((0,0),(0,2))$ olup;

$OP = [(0,0)]$, $OX = [(0,0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PX=[(0,0),(0,2)]$, $OI = [(1,0),(0,0)]$ dır.

$OP \wedge IX = L = ((0,0),(1,0))$ dır.

$$OI \wedge PX = [(1,0),(0,0)] \wedge [(0,0),(0,2)] = (x,y) \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} y &= (1,0)\ominus x \oplus (0,0) \\ y &= (0,0)\ominus x \oplus (0,2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y = (0,2)$$

$\Rightarrow OI \wedge PX = M = ((0,2),(0,2))$ dir.

$$PI = ((0,0),(0,2)) \vee ((1,0),(1,0)) = \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} (0,2) &= m\ominus(0,0)\oplus k \\ (1,0) &= m\ominus(1,0)\oplus k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} k &= (0,2) \\ m &= (1,3) \end{aligned} \quad \text{ve}$$

olduğundan $PI = [(1,3),(0,2)]$ dir.

$PI \wedge OX = [(1,3),(0,2)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x,y) \Leftrightarrow y = (0,0),\ x = (2,4)$

$PI \wedge OX = N = ((2,4),(0,0))$ dır.

L, M ve N noktalarının doğrudaş olabilmeleri için NoLM olmalıdır. O halde

$$LM = ((0,0),(1,0)) \vee ((0,2),(0,2)) = [m,k] \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} (1,0) &= m\ominus(0,0)\oplus k \\ (0,2) &= m\ominus(0,2)\oplus k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} k &= (1,0) \\ m &= (4,3) \end{aligned}$$

olduğundan $LM = [(4,3),(1,0)]$ dır.

$$NoLM \Leftrightarrow ((2,4),(0,0)) \circ [(4,3),(1,0)] \Leftrightarrow (0,0) = (4,3)\ominus(2,4) \oplus (1,0)$$

$$\Leftrightarrow (0,0) = (0,0)$$

olup köşegen noktaları doğrudaş olduğundan OIXP dörtgeninin tamamlanmışı bir Fano düzlemidir, bu düzlem F_2 ile gösterilir.

III.Hal: Eğer a=0, b=3 ise $P = ((0,0),(0,3))$ olup;

$OP = [(0,0)]$, $OX = [(0,0),(0,0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PX = [(0,0),(0,3)]$,

$OI = [(1,0),(0,0)]$ dır.

$OP \wedge IX = L = ((0,0),(1,0))$ dır.

$OI \wedge PX = [(1,0),(0,0)] \wedge [(0,0),(0,3)] = (x,y) \Leftrightarrow x = y = (0,3)$

$\Rightarrow OI \wedge PX = M = ((0,3),(0,3))$ dür.

$PI = ((0,0),(0,3)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (0,3)$ ve $m = (1,2)$

olduğundan $PI = [(1,2),(0,3)]$ doğrusudur.

$PI \wedge OX = [(1,2),(0,3)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x,y) \Leftrightarrow y = (0,0)$ ve $x = (2,1)$

dolayısıyla $PI \wedge OX = N = ((2,1),(0,0))$ dır.

OIXP dörtgeninin tamamlanmışının Fano düzlemi olabilmesi için L, M, N köşegen noktaları doğrudaş olması gerektiğinden $M o LN$ olmalıdır. O halde

$LN = ((0,0),(1,0)) \vee ((2,1),(0,0)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,0)$, $m = (4,2)$

olduğundan $LN = [(4,2),(1,0)]$ dır.

$M o LN \Leftrightarrow ((0,3),(0,3))\ o\ [(4,2),(1,0)] \Leftrightarrow (0,3) = (4,2)\ominus(0,3) \oplus (1,0)$

$$\Leftrightarrow (0,0) = (0,0)$$

olup köşegen noktalar doğrudaş olduğundan OIXP dörtgeninin tamamlanmışı olan konfigurasyon bir Fano düzlemidir, bu düzlem F_3 ile gösterilir.

IV. Hal: Eğer a=0, b=4 ise $P=((0,0),(0,4))$ olup;

$OP = [(0,0)]$, $OX = [(0,0),(0,\ 0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PX = [(0,0),(0,4)]$,

$OI = [(1,0),(0,0)]$ dır.

$OP \wedge IX = L = ((0,0),(1,0))$ ilk köşegen noktasıdır.

$OI \wedge PX = [(1,0),(0,0)] \wedge [(0,0),(0,4)] = (x,y) \Leftrightarrow y = x = (0,4)$

$\Rightarrow OI \wedge PX = M = ((0,4),(0,4))$ ikinci köşegen noktasıdır.

$PI \wedge OX = N$ üçüncü köşegen nokta olacağından

$PI = ((0,0),(0,4)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (0,4),\ m = (1,1)$

olduğundan $PI = [(1,1),(0,4)]$ dür.

$PI \wedge OX = [(1,1),(0,4)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x,y) \Leftrightarrow y = (0,0),\ x = (2,3)$

dolayısıyla $PI \wedge OX = N = ((2,3),(0,0))$ üçüncü köşegen noktasıdır.

L, M, N köşegen noktaları doğrudaş ise $N o LM$ olmalıdır.

$LM = ((0,0),(1,0)) \vee ((0,4),(0,4)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,0)$ ve $m = (4,1)$

olduğundan $LM = [(4,1),(1,0)]$ dır.

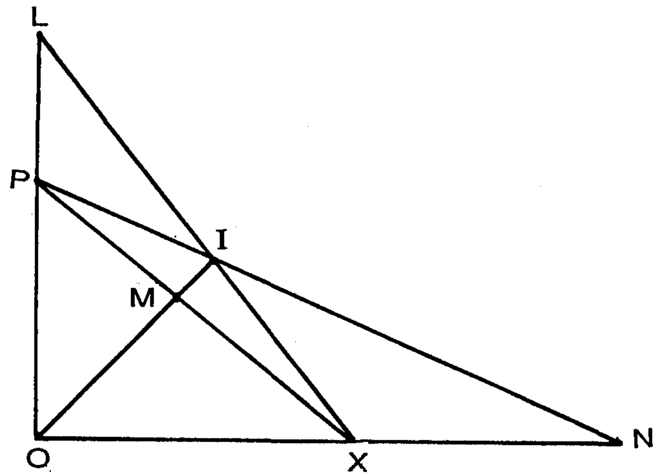
$$N o LM \Leftrightarrow ((2,3),(0,0)) \ o\ [(4,1),(1,0)] \Leftrightarrow (0,0) = (4,1) \ominus (2,3) \oplus (1,0)$$

$$\Leftrightarrow (0,0) = (0,0)$$

olduğundan köşegen noktaları doğrudaş, dolayısıyla OIXP dörtgeninin tamamlanmaşı olan konfigurasyon bir Fano düzlemidir, bu düzlem F_4 ile gösterilir.

Önerme 2.5.1.3: P_2S de $P = ((0,0),(a,b))$ olmak üzere $a, b \in \{1,2,3,4\}$ iken OIXP dörtgenlerinin tamamlanmışları birer Fano düzlemi oluştururlar.

İspat: İspat boyunca noktalar ve doğrular Şekil 2.5.1.3 deki konumda olsun.



Şekil 2.5.1.3.

I.Hal: Eğer $a=b=1$ ise $P = ((0,0),(1,1))$ olup;

$OP = [(0,0)]$, $OX = [(0,0),(0,0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PX = [(0,0),(1,1)]$, $OI = [(1,0),(0,0)]$ dır.

$OP \wedge IX = L = ((0,0),(1,0))$ dır.

$OI \wedge PX = [(1,0),(0,0)] \wedge [(0,0),(1,1)] = (x, y) \Leftrightarrow x = y = (1,1)$

$\Rightarrow OI \wedge PX = ((1,1),(1,1)) = M$ dir.

$PI = ((0,0),(1,1)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,1),\ m = (0,4)$

olduğundan $PI = [(0,4),(1,1)]$ dir.

$PI \wedge OX = [(0,4),(1,1)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x, y) \Leftrightarrow y = (0,0),\ x = (4,2)$

$PI \wedge OX = N = ((4,2),(0,0))$ dır.

L, M ve N köşegen noktaları doğrudaş ise $N o LM$ olmalıdır.

$LM = ((0,0),(1,0)) \vee ((1,1),(1,1)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,0),\ m = (3,4)$

olduğundan $LM = [(3,4),(1,0)]$ dır.

$N o LM \Leftrightarrow ((4,2),(0,0))\ o\ [(3,4),(1,0)] \Leftrightarrow (0,0) = (3,4) \ominus (4,2) \oplus (1,0)$

$$\Leftrightarrow (0,0) = (0,0)$$

olup köşegen noktalar doğrudaş olduğundan OIXP dörtgeninin tamamlanmışı olan konfigurasyon bir Fano düzlemidir, bu düzlem F_5 ile gösterilir.

II.Hal: Eğer $a=b=2$ ise $P = ((0,0),(2,2))$ olup;

$OP = [(0,0)]$, $OX = [(0,0),(0,0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PX = [(0,0),(2,2)]$, $OI = [(1,0),(0,0)]$ dır.

$OP \wedge IX = L = ((0,0),(1,0))$ dır.

$OI \wedge PX = [(1,0),(0,0)] \wedge [(0,0),(2,2)] = (x,y) \Leftrightarrow x = y = (2,2)$

$\Rightarrow OI \wedge PX = M = ((2,2),(2,2))$ dir.

$PI = ((0,0),(2,2)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (2,2)$ ve $m = (4,3)$

olduğundan $PI = [(4,3),(2,2)]$ dir.

$PI \wedge OX = [(4,3),(2,2)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x,y) \Leftrightarrow y = (0,0),\ x = (1,4)$

$PI \wedge OX = ((1,4),(0,0)) = N$ dir.

L, M, N köşegen noktaları doğrudaş ise NoLM olmalıdır.

$LM = ((0,0),(1,0)) \vee ((2,2),(2,2)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,0),\ m = (2,3)$

olduğundan $LM = [(2,3),(1,0)]$ dır.

$$NoLM \Leftrightarrow ((1,4),(0,0))\ o\ [(2,3),(1,0)] \Leftrightarrow (0,0) = (2,3) \ominus (1,4) \oplus (1,0)$$

$$\Leftrightarrow (0,0) = (0,0)$$

olup L, M, N köşegen noktaları doğrudaş olduğundan OIXP dörtgeninin tamamlanmışı olan konfigurasyon bir Fano düzlemidir, bu düzlem F_6 ile gösterilir.

III.Hal: Eğer $a=b=3$ ise $P = ((0,0),(3,3))$ olup;

$OP = [(0,0)]$, $OX = [(0,0),(0,0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PX = [(0,0),(3,3)]$, $OI = [(1,0),(0,0)]$ dır.

$OP \wedge IX = L = ((0,0),(1,0))$ dır.

$OI \wedge PX = [(1,0),(0,0)] \wedge [(0,0),(3,3)] = (x,y) \Leftrightarrow x = y = (3,3)$

$\Rightarrow OI \wedge PX = M = ((3,3),(3,3))$ dür.

$PI = ((0,0),(3,3)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (3,3)$ ve $m = (3,2)$

olduğundan PI = [(3,2),(3,3)] dür.

PI∧OX = [(3,2),(3,3)] ∧ [(0,0),(0,0)] = (x,y) $\Leftrightarrow$ y = (0,0), x = (3,1)

PI∧OX = N = ((3,1),(0,0)) dır.

L, M, N köşegen noktalarının doğrudaş olabilmesi için MoLN olmalıdır.

LN = ((0,0),(1,0)) v ((3,1),(0,0)) = [m,k] $\Leftrightarrow$ k = (1,0) ve m = (1,2)

olduğundan LN = [(1,2),(1,0)] dır.

MoLN $\Leftrightarrow$ ((3,3),(3,3)) o [(1,2),(1,0)] $\Leftrightarrow$ (3,3) = (1,2) $\ominus$ (3,3) $\oplus$ (1,0)

$\Leftrightarrow$ (3,3) = (3,3)

olup köşegen noktalar doğrudaş olduğundan OIXP dörtgeninin tamamlanmaşı bir Fano düzlemidir, bu düzlem F_7 ile gösterilir.

IV.Hal: Eğer a=b=4 ise P = ((0,0),(4,4)) olup;

OP = [(0,0)], OX = [(0,0),(0,0)], IX = [(0,0),(1,0)], PX = [(0,0),(4,4)],
OI = [(1,0),(0,0)] dır.

OP∧IX = L = ((0,0),(1,0)) dır.

OI∧PX = M = ((4,4),(4,4)) dür.

PI = ((0,0),(4,4)) v ((1,0),(1,0)) = [m,k] $\Leftrightarrow$ k = (4,4), m = (2,1)

olduğundan PI = [(2,1),(4,4)] dür.

PI∧OX = [(2,1),(4,4)] ∧ [(0,0),(0,0)] = (x,y) $\Leftrightarrow$ y = (0,0), x = (0,3)

PI∧OX = N = ((0,3),(0,0)) dır.

L, M, N köşegen noktaları doğrudaş ise NoLM olmalıdır.

LM = ((0,0),(1,0)) v ((4,4),(4,4)) = [m,k] $\Leftrightarrow$ k = (1,0) ve m = (0,1)

olduğundan LM = [(0,1),(1,0)] dır.

NoLM $\Leftrightarrow$ ((0,3),(0,0)) o [(0,1),(1,0)] $\Leftrightarrow$ (0,0) = (0,1) $\ominus$ (0,3) $\oplus$ (1,0)

$\Leftrightarrow$ (0,0) = (0,0)

olup OIXP nin tamamlanmışı bir Fano düzlemidir, bu düzlem F_8 ile gösterilir.

V. Hal: Eğer $a=1$ ve $b=2$ ise $P = ((0,0),(1,2))$ olup;

$OP = [(0,0)]$, $OX = [(0,0),(0,0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PX = [(0,0),(1,2)]$,
$OI = [(1,0),(0,0)]$ dır.

$OP \wedge IX = ((0,0),(1,0)) = L$ dir.

$OI \wedge PX = [(1,0),(0,0)] \wedge [(0,0),(1,2)] = (x,y) \Leftrightarrow y = x = (1,2)$

$\Rightarrow OI \wedge PX = M = ((1,2),(1,2))$ dir.

$PI = ((0,0),(1,2)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,2),\ m = (0,3)$

olduğundan $PI = [(0,3),(1,2)]$ dir.

$PI \wedge OX = [(0,3),(1,2)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x,y) \Leftrightarrow y = (0,0),\ x = (4,4)$

$PI \wedge OX = ((4,4),(0,0)) = N$ dir.

L, M, N köşegen noktaları doğrudaş ise NoLM olmalıdır.

$LM = ((0,0),(1,0)) \vee ((1,2),(1,2)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,0),\ m = (3,3)$

olduğundan $LM = [(3,3),(1,0)]$ dır.

$NoLM \Leftrightarrow (0,0) = (3,3) \ominus (4,4) \oplus (1,0)$

$\Leftrightarrow (0,0) = (0,0)$

olup köşegen noktalar doğrudaş olduğundan OIXP dörtgenlerinin tamamlanmışı bir Fano düzlemidir ve F_9 ile gösterilir.

VI. Hal: Eğer $a=1$ ve $b=3$ ise $P = ((0,0),(1,3))$ olup;

$OP = [(0,0)]$, $OX = [(0,0),(0,0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PX = [(0,0),(1,3)]$,
$OI = [(1,0),(0,0)]$ dir.

$OP \wedge IX = L = ((0,0),(1,0))$ dır.

$OI \wedge PX = M\ ((1,3),(1,3))$ dür.

$PI = ((0,0),(1,3)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,3),\ m = (0,2)$

olduğundan $PI = [(0,2),(1,3)]$ dür.

$PI \wedge OX = [(0,2),(1,3)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x,y) \Leftrightarrow y = (0,0),\ x = (4,1)$

$\Rightarrow PI \wedge OX = \big((4,1),(0,0)\big) = N$ dir.

L, M, N köşegen noktalarının doğrudaş olması için NoLM olmalıdır. Buradan

$LM = [(3,2),(1,0)]$ bulunur.

$NoLM \Leftrightarrow \big((4,1),(0,0)\big)\ o\ [(3,2),(1,0)] \Leftrightarrow (0,0) = (3,2) \ominus (4,1) \oplus (1,0)$

$$\Leftrightarrow (0,0) = (0,0)$$

olup OIXP dörtgeninin tamamlanmışı bir Fano düzlemidir ve F_{10} ile gösterilir.

VII. Hal: Eğer $a=1$ ve $b=4$ ise $P=\big((0,0),(1,4)\big)$ olup;

$OP = [(0,0)]$, $OX = [(0,0),(0,0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PX = [(0,0),(1,4)]$, $OI = [(1,0),(0,0)]$ dır.

$OP \wedge IX = L = \big((0,0),(1,0)\big)$ dır.

$OI \wedge PX = M = \big((1,4),(1,4)\big)$ dür.

$PI = \big((0,0),(1,4)\big) \vee \big((1,0),(1,0)\big) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,4)$ ve $m = (0,1)$

olduğundan $PI = [(0,1),(1,4)]$ dir.

$PI \wedge OX = [(0,1),(1,4)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x,y) \Leftrightarrow y = (0,0),\ x = (4,3)$

$\Rightarrow PI \wedge OX = \big((4,3),(0,0)\big) = N$ dır.

L, M, N köşegen noktalarının doğrudaş olabilmesi için NoLM olmalıdır. Buradan,

$LM = \big((0,0),(1,0)\big) \vee \big((1,4),(1,4)\big) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,0),\ m = (3,1)$

olduğundan $LM = [(3,1),(1,0)]$ bulunur.

$NoLM \Leftrightarrow \big((4,3),(0,0)\big)\ o\ [(3,1),(1,0)] \Leftrightarrow (0,0) = (3,1) \ominus (4,3) \oplus (1,0)$

$$\Leftrightarrow (0,0) = (0,0)$$

olup OIXP dörtgeninin tanımlanmışı bir Fano düzlemidir ve F_{11} ile gösterilir.

VIII. Hal: Eğer $a=2$ ve $b=1$ ise $P = ((0,0),(2,1))$ olup;

$OP = [(0,0)]$, $OX = [(0,0),(0,0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PX = [(0,0),(2,1)]$
$OI = [(1,0),(0,0)]$ dır.

$OP \wedge IX = L = ((0,0),(1,0))$ ve $OI \wedge PX = M = ((2,1),(2,1))$ dir.

$PI = ((0,0),(2,1)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (2,1)$ ve $m = (4,4)$

olduğundan $PI = [(4,4),(2,1)]$ dir.

$PI \wedge OX = [(4,4),(2,1)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x,y) \Leftrightarrow y = (0,0),\ x = (1,2)$

$\Rightarrow PI \wedge OX = N = ((1,2),(0,0))$ dır.

Elde edilen konfigurasyonun Fano düzlemi olabilmesi için L, M ve N noktalarının doğrudaş olması gerektiğinden $N o LM$ olmalıdır. Buradan

$LM = ((0,0),(1,0)) \vee ((1,2),(1,2)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,0)\ m = (2,4)$

olduğundan $LM = [(2,4),(1,0)]$ olarak bulunur.

$$N o LM \Leftrightarrow ((1,2),(0,0)) \circ [(2,4),(1,0)] \Leftrightarrow (0,0) = (2,4) \ominus (1,2) \oplus (1,0)$$

$$\Leftrightarrow (0,0) = (0,0)$$

olup OIXP nin tamamlanmışı bir Fano düzlemidir, bu düzlem F_{12} ile gösterilir.

IX. Hal: Eğer $a=2$ ve $b=3$ ise $P = ((0,0),(2,3))$ olup;

$OP = [(0,0)]$, $OX = [(0,0),(0,0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PX = [(0,0),(2,3)]$ ve
$OI = [(1,0),(0,0)]$ doğruları elde edilir.

$OP \wedge IX = ((0,0),(1,0)) = L$ noktası birinci köşegen noktasıdır.

$OI \wedge PX = ((2,3),(2,3)) = M$ noktasıda ikinci köşegen nokta olarak bulunur.

$PI = ((1,0),(1,0)) \vee ((0,0),(2,3)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (2,3)$ ve $m = (4,2)$

olduğundan $PI = [(4,2),(2,3)]$ dür.

$PI \wedge OX = (x,y) \Leftrightarrow y = (0,0)$ ve $x = (1,1)$ olacağından

$PI \wedge OX = ((1,1),(0,0)) = N$ üçüncü köşegen noktadır.

L, M ve N noktaları eğer doğrudaş ise $N o LM$ olmalıdır. Buradan,

$LM = ((0,0),(1,0)) \vee ((2,3),(2,3)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,0)\ m = (2,2)$

$\Rightarrow LM = [(2,2),(1,0)]$ dır.

$NoLM \Leftrightarrow ((1,1),(0,0)) \circ [(2,2),(1,0)] \Leftrightarrow (0,0) = (2,2) \ominus (1,1) \oplus (1,0)$

$\Leftrightarrow (0,0) = (0,0)$

olduğundan OIXP dörtgeninin tamamlanmışı olan konfigurasyon bir Fano düzlemidir ve F_{13} ile gösterilir.

X.Hal: Eğer a=2 ve b=4 ise $P = ((0,0),(2,4))$ olup;

$OP = [(0,0)]$, $OX = [(0,0),(0,0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PX = [(0,0),(2,4)]$ ve $OI = [(1,0),(0,0)]$ doğruları noktaların ikişer ikişer birleştirilmesiyle hemen elde edilebilir. Sonra

$OP \wedge IX = ((0,0),(1,0)) = L$ arakesit noktası ve

$OI \wedge PX = ((2,4),(2,4)) = M$ arakesit noktası bulunur.

$PI = ((0,0),(2,4)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (2,4)$ ve $m = (4,1)$

olduğundan $PI = [(4,1),(2,4)]$ doğrusu bulunur.

$PI \wedge OX = [(4,1),(2,4)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x,y) \Leftrightarrow y = (0,0),\ x = (1,3)$

$\Rightarrow PI \wedge OX = ((1,3),(0,0)) = N$ arakesit noktasıda elde edilir.

Bu L, M ve N noktaları doğrudaş ise NoLM olmalıdır. Buradan,

$LM = ((0,0),(1,0)) \vee ((2,4),(2,4)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,0)$ ve $m = (2,1)$

olduğundan $LM = [(2,1),(1,0)]$ olarak bulunur.

$NoLM \Leftrightarrow ((1,3),(0,0)) \circ [(2,1),(1,0)] \Leftrightarrow (0,0) = (2,1) \ominus (1,3) \oplus (1,0)$

$\Leftrightarrow (0,0) = (0,0)$

olduğundan elde edilen konfigurasyon bir Fano düzlemidir ve F_{14} ile gösterilir.

XI. Hal: Eğer a=3 ve b=1 ise $P = ((0,0),(3,1))$ olup;

$OP = [(0,0)]$, $OX = [(0,0),(0,0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PX = [(0,0),(3,1)]$,
$OI = [(1,0),(0,0)]$ doğruları elde edilir. Sonra

$OP \wedge IX = ((0,0),(1,0)) = L$ ve $OI \wedge PX = ((3,1),(3,1)) = M$

arakesit noktaları bulunur.

$PI = ((0,0),(3,1)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (3,1)$ ve $m = (3,4)$

olduğundan $PI = [(3,4),(3,1)]$ dir.

$PI \wedge OX = [(3,4),(3,1)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x,y) \Leftrightarrow y = (0,0),\ x = (3,2)$

$\Rightarrow PI \wedge OX = ((3,2),(0,0)) = N$ arakesit noktası elde edilir.

Bu L, M ve N noktaları doğrudaş ise $NoLM$ olmalıdır. Buradan,

$LM = ((0,0),(1,0)) \vee ((3,1),(3,1)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,0)$ ve $m = (1,4)$

olduğundan $LM = [(1,4),(1,0)]$ doğrusudur.

$$NoLM \Leftrightarrow ((3,2),(0,0)) \circ [(1,4),(1,0)] \Leftrightarrow (0,0) = (1,4) \ominus (3,2) \oplus (1,0)$$

$$\Leftrightarrow (0,0) = (0,0)$$

olduğundan oluşturulan konfigurasyon bir Fano düzlemidir, bu düzlem F_{15} ile gösterilir.

XII. Hal: Eğer $a=3$ ve $b=2$ ise $P = ((0,0),(3,2))$ olup;
$OP = [(0,0)]$, $OX = [(0,0),(0,0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PX = [(0,0),(3,2)]$,
$OI = [(1,0),(0,0)]$ doğruları bulunur. Daha sonra

$OP \wedge IX = ((0,0),(1,0)) = L$ ve $OI \wedge PX = ((3,2),(3,2)) = M$

arakesit noktaları elde edilir.

$PI = ((0,0),(3,2)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (3,2)$ ve $m = (3,3)$

olduğundan $PI = [(3,3),(3,2)]$ doğrusudur.

$PI \wedge OX = [(3,3),(3,2)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x,y) \Leftrightarrow y = (0,0),\ x = (3,4)$

$\Rightarrow PI \wedge OX = ((3,4),(0,0)) = N$ arakesit noktası elde edilir.

Elde edilen L, M ve N noktalarının doğrudaş olabilmesi için $NoLM$

olmalıdır. Buradan,

$LM = ((0,0),(1,0)) \vee ((3,2),(3,2)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,0)$ ve $m = (1,3)$

$\Rightarrow LM = [(1,3),(1,0)]$ doğrusudur.

$NoLM \Leftrightarrow ((3,4),(0,0)) \circ [(1,3),(1,0)] \Leftrightarrow (0,0) = (1,3) \ominus (3,4) \oplus (1,0)$

$$\Leftrightarrow (0,0) = (0,0)$$

olduğundan köşegen noktaları doğrudaş olan bu konfigurasyon bir Fano düzlemidir ve F_{16} ile gösterilir.

XIII. Hal: Eğer $a=3$ ve $b=4$ ise $P = ((0,0),(3,4))$ olup;

$OP = [(0,0)]$, $OX = [(0,0),(0,0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PX = [(0,0),(3,4)]$,

$OI = [(1,0),\ (0,0)]$ doğruları bulunur. Sonrada

$OP \wedge IX = ((0,0),(1,0)) = L$ ve $OI \wedge PX = ((3,4),(3,4)) = M$

arakesit noktaları bulunur.

$PI = ((0,0),(3,4)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (3,4)$ ve $m = (3,1)$

olduğundan $PI = [(3,1),(3,4)]$ doğrusudur.

$PI \wedge OX = [(3,1),(3,4)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x,y) \Leftrightarrow y = (0,0),\ x = (3,3)$

$\Rightarrow PI \wedge OX = ((3,3),(0,0)) = N$ arakesit noktası elde edilir.

Elde edilen bu L, M, N noktalarının doğrudaş olabilmeleri için NoLM olmalıdır.

$LM = ((0,0),(1,0)) \vee ((3,4),(3,4)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,0)$ ve $m = (1,1)$

$\Rightarrow LM = [(1,1),(1,0)]$ doğrusudur.

$NoLM \Leftrightarrow ((3,3),(0,0)) \circ [(1,1),(1,0)] \Leftrightarrow (0,0) = (1,1) \ominus (3,3) \oplus (1,0)$

$$\Leftrightarrow (0,0) = (0,0)$$

olduğundan elde edilen konfigurasyon yine bir Fano düzlemidir ve F_{17} ile gösterilir.

XIV. Hal: Eğer $a=4$ ve $b=1$ ise $P = ((0,0),(4,1))$ olup;

$OP = [(0,0)]$, $OX = [(0,0),(0,0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PX = [(0,0),(4,1)]$,

$OI = [(1,0),(0,0)]$ doğruları bulunur. Sonra

$OP \wedge IX = ((0,0),(1,0)) = L$ ve $OI \wedge PX = ((4,1),(4,1)) = M$

arakesit noktaları bulunur.

$PI = ((0,0),(4,1)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (4,1)$ ve $m = (2,4)$

olduğundan $PI = [(2,4),(4,1)]$ doğrusudur.

$PI \wedge OX = [(2,4),(4,1)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x,y) \Leftrightarrow y = (0,0),\ x = (0,2)$

$\Rightarrow PI \wedge OX = ((0,2),(0,0)) = N$ arakesit noktası bulunur.

Bulunan bu L, M ve N noktaları doğrudaş ise NoLM olmalıdır.

$LM = ((0,0),(1,0)) \vee ((4,1),(4,1)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,0)$ ve $m = (0,4)$

$\Rightarrow LM = [(0,4),(1,0)]$ doğrusudur.

$$NoLM \Leftrightarrow ((0,2),(0,0))\ o\ [(0,4),(1,0)] \Leftrightarrow (0,0) = (0,4) \ominus (0,2) \oplus (1,0)$$

$$\Leftrightarrow (0,0) = (0,0)$$

olduğundan elde edilen konfigurasyon bir Fano düzlemidir, bu düzlem F_{18} ile gösterilir.

XV. Hal: Eğer $a=4$ ve $b=2$ ise $P = ((0,0),(4,2))$ olup;

$OP = [(0,0)]$, $OX = [(0,0),(0,0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PX = [(0,0),(4,2)]$,

$OI = [(1,0),(0,0)]$ doğruları bulunur. Sonra

$OP \wedge IX = ((0,0),(1,0)) = L$ ve $OI \wedge PX = ((4,2),(4,2)) = M$

arakesit noktaları bulunur.

$PI = ((0,0),(4,2)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (4,2)$ ve $m = (2,3)$

olduğundan $PI = [(2,3),(4,2)]$ doğrusudur.

$PI \wedge OX = [(2,3),(4,2)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x,y) \Leftrightarrow y = (0,0),\ x = (0,4)$

$\Rightarrow PI \wedge OX = ((0,4),(0,0)) = N$ arakesit noktası bulunur.

Bulunan bu L, M ve N noktaları doğrudaş ise NoLM olmalıdır.

$LM = ((0,0),(1,0)) \vee ((4,2),(4,2)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,0)$ ve $m = (0,3)$

$\Longrightarrow LM = [(0,3),(1,0)]$ doğrusudur.

$NoLM \Leftrightarrow ((0,4),(0,0)) \circ [(0,3),(1,0)] \Leftrightarrow (0,0) = (0,3) \ominus (0,4) \oplus (1,0)$

$\Leftrightarrow (0,0) = (0,0)$

olduğundan elde edilen konfigurasyon bir Fano düzlemidir, F_{19} ile gösterilir.

XVI. Hal: Eğer $a=4$ ve $b=3$ ise $P = ((0,0),(4,3))$ olup;

$OP = [(0,0)]$, $OX = [(0,0),(0,0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PX = [(0,0),(4,3)]$,

$OI = [(1,0),(0,0)]$ doğruları bulunur. Sonra da

$OP \wedge IX = ((0,0),(1,0)) = L$ ve $OI \wedge PX = ((4,3),(4,3)) = M$

arakesit noktaları bulunur.

$PI = ((0,0),(4,3)) \vee ((1,0),(1,0)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (4,3)$ ve $m = (2,2)$

olduğundan $PI = [(2,2),(4,3)]$ doğrusudur.

$PI \wedge OX = [(2,2),(4,3)] \wedge [(0,0),(0,0)] = (x,y) \Leftrightarrow y = (0,0)$, $x = (0,1)$

$\Longrightarrow PI \wedge OX = ((0,1),(0,0)) = N$ arakesit noktası bulunur.

Bulunan bu L, M ve N noktaları doğrudaş ise NoLM olmalıdır. O halde

$LM = ((0,0),(1,0)) \vee ((4,3),(4,3)) = [m,k] \Leftrightarrow k = (1,0)$ ve $m = (0,2)$

$\Longrightarrow LM = [(0,2),(1,0)]$ doğrusudur.

$NoLM \Leftrightarrow ((0,1),(0,0)) \circ [(0,2),(1,0)] \Leftrightarrow (0,0) = (0,2) \ominus (0,1) \oplus (1,0)$

$\Leftrightarrow (0,0) = (0,0)$

olduğundan elde edilen konfigurasyon bir Fano düzlemidir, bu düzlem F_{20} ile gösterilir.

Sonuç. 2.5.1.4: $O = ((0,0),(0,0))$, $I = ((1,0),(1,0))$, $X = ((0,0))$ ve $P = ((0,0),(a,b))$ olmak üzere

i) $b \neq 0$ iken OIXP nin tamamlanmışı olan konfigurasyonlar birer Fano düzlemi oluştururlar. (Bunların sayısı 20 tanedir.)

ii) $b=0$ ve $a \neq 0,1$ iken OIXP nin tamamlanmışı olan konfigurasyonlar birer Fano düzlemi değildir. (Bunların sayısı 3 tanedir.)

Önerme 2.5.1.5: $O=((0,0),(0,0))$, $I=((1,0),(1,0))$, $X=((0,0))$ ve $P=((a,b)\ ,\ (c,d)\ )$ olsun. a, b ikisi birlikte sıfır olmamak koşulu ile $P \circ [(a,b)]$ olmak üzere a ve b nin değişik değerleri için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

I) $b=d \neq 0$ olmak üzere $c=a+1$ veya $c=a+3$ iken OIXP nin tamamlanmışı olan konfigurasyonlar birer Fano düzlemidir. (Bunların sayısı 40 dır.)

II) i) koşulunun sağlanmadığı durumlarda OIXP nin tamamlanmışı olan konfigurasyonlar birer Fano düzlemi değildir. (Bunların sayısı 519 dır.)

İspat: i) ve ii) ifadelerinin geçerli oldukları tek tek hesap yapılarak gösterilir. Buna bir örnek verelim.

Örnek 2.5.1.6: $P=((0,1),(1,1))$ ise $a=0$, $b=1$, $c=1$ ve $d=1$ olduğundan $b=d$ ve $c=a+1$ dir. Böylece yukarıdaki önermenin (i) şıkkının hipotezleri sağlanır. OIXP nin tamamlanmışı olan konfigurasyonunun doğruları:

$OP = [(4,1),(0,0)]$, $PX = [(0,0),(1,1)]$, $OI = [(1,0),(0,0)]$, $OX = [(0,0),(0,0)]$, $IX = [(0,0),(1,0)]$, $PI = [(2,1),(4,4)]$ ve $LM = [(1,3),(4,3)]$ dir.

Noktalarda; O, I, X, P, $L = ((3,2),(1,0))$, $M = ((1,1),(1,1))$ ve $N = ((0,3),(0,0))$ dir.

Diğer taraftan $NoLM \Leftrightarrow (0,0) = (1,3) \ominus (0,3) \oplus (4,3)$ olduğundan OIXP nin tamamlanmışı bir Fano düzlemidir.

Sonuç 2.5.1.7: O, I, X i kapsayan Fano düzlemlerinin sayısı 20+40=60 dır.

Önerme 2.5.1.8: P = ((0,0),(a,b)) iken b≠0 olmak üzere P_2S de OIXP nin tamamlanmışlarından elde edilen Fano düzlemlerinin her birine izomorf 24 farklı Fano düzlemi vardır.

İspat: P_2S de $F_1, F_2, \ldots, F_{20}$ Fano düzlemlerinin her birine izomorf 24 farklı Fano düzlemi bulmak için F_i $(i = 1, 2, \ldots, 20)$ lerin f_a $(a \in S - \{(0,0)\})$ kolinasyonları altındaki görüntüleri olan $F_{i f_a}$ Fano düzlemlerinin her birinin en az bir farklı nokta içerdiğini göstermek yeterli olacaktır. Yani;

$$F_1 \xrightarrow{f_a} F_{1 f_{01}}, F_{1 f_{02}}, \ldots, F_{1 f_{44}}$$

$$F_2 \xrightarrow{f_a} F_{2 f_{01}}, F_{2 f_{02}}, \ldots, F_{2 f_{44}}$$

.
.
.

$$F_{20} \xrightarrow{f_a} F_{20 f_{01}}, F_{20 f_{02}}, \ldots, F_{20 f_{44}}$$

olmak üzere her $F_{i f_r} \neq F_{i f_s}$, $r \neq s$ $(r, s \in S - \{(0,0)\})$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için her bir F_i düzleminde bulunan I = ((1,0),(1,0)) noktasının f_a kolinasyonu altındaki görüntüsünün her bir $F_{i f_a}$ düzleminde farklı olduğunu gösterelim. Her $a \in S - \{(0,0)\}$ için f_a kolinasyonu I noktasının sadece ikinci bileşenine etki edeceğinden, her bir $a \in S - \{(0,0)\}$ için I noktasının f_a

altındaki görüntüsü olan noktalar farklı olacaktır. Dolayısıyla her bir $F_{i f_a}$ düzleminde I noktasının görüntüsü farklı olacağından, her bir F_i Fano düzlemine izomorf 24 farklı $F_{i f_a}$ Fano düzlemi vardır.

Önerme 2.5.1.9: P = ((0,0),(a,b)) iken b=0 olmak üzere P_2S de OIXP dörtgenlerinin tamamlanmışı olan konfigurasyonlardan Fano Aksiyomunu sağlayanların her birine izomorf 24 farklı konfigurasyon vardır.

İspat: P_2S projektif düzleminin P noktası yukarıdaki koşul altında verildiğinde Fano aksiyomunu sağlayan yanlız 3 konfigurasyon mevcuttur. Önerme 2.5.1.8 in ispatındaki yolla bu konfigurasyonların f_a kolinasyonu altındaki görüntüleri olan konfigurasyonların farklı olduğu görülür.

Önerme 2.5.1.10: b≠0 olmak üzere P = ((0,0),(a,b)) olsun. P_2S de F_i $(i = 1, 2, \ldots, 20)$ Fano düzlemlerine izomorf olan f_a $(a \in S\text{-}\{(0,0)\})$ kolinasyonları altındaki görüntü düzlemleride birbirlerinden farklıdırlar. Yani;

$F_{i f_r} \neq F_{j f_s}$ $(i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, 20;\ r, s \in S - \{(0,0)\})$ dir, (bunların sayısı 20.24 = 480 dir.)

İspat: F_i lerin f_r kolinasyonları altındaki görüntüleri ve F_j lerin de f_s kolinasyonları altındaki görüntüleri tek tek hesaplanarak $F_{i f_r} \neq F_{j f_s}$ olduğu görülür.

Şimdi bunu bir örnekle açıklayalım. Örneğin; Çizelge 2.5.1.1 ve Çizelge 2.5.1.2 deki F_1 ve F_2 Fano düzlemleri için $F_{1 f_r} \neq F_{2 f_s}$ dir.

Çizelge 2.5.1.1.

F_1	((0,0),(0,0))	((1,0),(1,0))	((0,0),(0,1))	((0,0),(1,0))	((0,1),(0,1))	((2,2),(0,0))
$F_1 f_{01}$	((0,0),(1,0))	((1,0),(1,1))	((0,0),(0,2))	((0,0),(1,1))	((0,1),(0,2))	((2,2),(0,1))
$F_1 f_{02}$	((0,0),(0,2))	((1,0),(1,2))	((0,0),(0,3))	((0,0),(1,2))	((0,1),(0,3))	((2,2),(0,2))
$F_1 f_{03}$	((0,0),(0,3))	((1,0),(1,3))	((0,0),(0,4))	((0,0),(1,3))	((0,1),(0,4))	((2,2),(0,3))
$F_1 f_{04}$	((0,0),(0,4))	((1,0),(1,4))	((0,0),(0,0))	((0,0),(1,4))	((0,1),(0,0))	((2,2),(0,4))
$F_1 f_{10}$	((0,0),(1,0))	((1,0),(2,0))	((0,0),(1,1))	((0,0),(2,0))	((0,1),(1,1))	((2,2),(1,0))
$F_1 f_{11}$	((0,0),(1,1))	((1,0),(2,1))	((0,0),(1,2))	((0,0),(2,1))	((0,1),(1,2))	((2,2),(1,1))
$F_1 f_{12}$	((0,0),(1,2))	((1,0),(2,2))	((0,0),(1,3))	((0,0),(2,2))	((0,1),(1,3))	((2,2),(1,2))
$F_1 f_{13}$	((0,0),(1,3))	((1,0),(2,3))	((0,0),(1,4))	((0,0),(2,3))	((0,1),(1,4))	((2,2),(1,3))
$F_1 f_{14}$	((0,0),(1,4))	((1,0),(2,4))	((0,0),(1,0))	((0,0),(2,4))	((0,1),(1,0))	((2,2),(1,4))
$F_1 f_{20}$	((0,0),(2,0))	((1,0),(3,0))	((0,0),(2,1))	((0,0),(3,0))	((0,1),(2,1))	((2,2),(2,0))
$F_1 f_{21}$	((0,0),(2,1))	((1,0),(3,1))	((0,0),(2,2))	((0,0),(3,1))	((0,1),(2,2))	((2,2),(2,1))
$F_1 f_{22}$	((0,0),(2,2))	((1,0),(3,2))	((0,0),(2,3))	((0,0),(3,2))	((0,1),(2,3))	((2,2),(2,2))
$F_1 f_{23}$	((0,0),(2,3))	((1,0),(3,3))	((0,0),(2,4))	((0,0),(3,3))	((0,1),(2,4))	((2,2),(2,3))
$F_1 f_{24}$	((0,0),(2,4))	((1,0),(3,4))	((0,0),(2,0))	((0,0),(3,4))	((0,1),(2,0))	((2,2),(2,4))
$F_1 f_{30}$	((0,0),(3,0))	((1,0),(4,0))	((0,0),(3,1))	((0,0),(4,0))	((0,1),(3,1))	((2,2),(3,0))
$F_1 f_{31}$	((0,0),(3,1))	((1,0),(4,1))	((0,0),(3,2))	((0,0),(4,1))	((0,1),(3,2))	((2,2),(3,1))
$F_1 f_{32}$	((0,0),(3,2))	((1,0),(4,2))	((0,0),(3,3))	((0,0),(4,2))	((0,1),(3,3))	((2,2),(3,2))
$F_1 f_{33}$	((0,0),(3,3))	((1,0),(4,3))	((0,0),(3,4))	((0,0),(4,3))	((0,1),(3,4))	((2,2),(3,3))
$F_1 f_{34}$	((0,0),(3,4))	((1,0),(4,4))	((0,0),(3,0))	((0,0),(4,4))	((0,1),(3,0))	((2,2),(3,4))
$F_1 f_{40}$	((0,0),(4,0))	((1,0),(0,0))	((0,0),(4,1))	((0,0),(0,0))	((0,1),(4,1))	((2,2),(4,0))
$F_1 f_{41}$	((0,0),(4,1))	((1,0),(0,1))	((0,0),(4,2))	((0,0),(0,1))	((0,1),(4,2))	((2,2),(4,1))
$F_1 f_{42}$	((0,0),(4,2))	((1,0),(0,2))	((0,0),(4,3))	((0,0),(0,2))	((0,1),(4,3))	((2,2),(4,2))
$F_1 f_{43}$	((0,0),(4,3))	((1,0),(0,3))	((0,0),(4,4))	((0,0),(0,3))	((0,1),(4,4))	((2,2),(4,3))
$F_1 f_{44}$	((0,0),(4,4))	((1,0),(0,4))	((0,0),(4,0))	((0,0),(0,4))	((0,1),(4,0))	((2,2),(4,4))

Çizelge 2.5.1.2

F_2	((0,0),(0,0))	((1,0),(1,0))	((0,0),(0,2))	((0,0),(1,0))	((0,2),(0,2))	((2,4),(0,0))
$F_2 f_{01}$	((0,0),(0,1))	((1,0),(1,1))	((0,0),(0,3))	((0,0),(1,1))	((0,2),(0,3))	((2,4),(0,1))
$F_2 f_{02}$	((0,0),(0,2))	((1,0),(1,2))	((0,0),(0,4))	((0,0),(1,2))	((0,2),(0,4))	((2,4),(0,2))
$F_2 f_{03}$	((0,0),(0,3))	((1,0),(1,3))	((0,0),(0,0))	((0,0),(1,3))	((0,2),(0,0))	((2,4),(0,3))
$F_2 f_{04}$	((0,0),(0,4))	((1,0),(1,4))	((0,0),(0,1))	((0,0),(1,4))	((0,2),(0,1))	((2,4),(0,4))
$F_2 f_{10}$	((0,0),(1,0))	((1,0),(2,0))	((0,0),(1,2))	((0,0),(2,0))	((0,2),(1,2))	((2,4),(1,0))
$F_2 f_{11}$	((0,0),(1,1))	((1,0),(2,1))	((0,0),(1,3))	((0,0),(2,1))	((0,2),(1,3))	((2,4),(1,1))
$F_2 f_{12}$	((0,0),(1,2))	((1,0),(2,2))	((0,0),(1,4))	((0,0),(2,2))	((0,2),(1,4))	((2,4),(1,2))
$F_2 f_{13}$	((0,0),(1,3))	((1,0),(2,3))	((0,0),(1,0))	((0,0),(2,3))	((0,2),(1,0))	((2,4),(1,3))
$F_2 f_{14}$	((0,0),(1,4))	((1,0),(2,4))	((0,0),(1,1))	((0,0),(2,4))	((0,2),(1,1))	((2,4),(1,4))
$F_2 f_{20}$	((0,0),(2,0))	((1,0),(3,0))	((0,0),(2,2))	((0,0),(3,0))	((0,2),(2,2))	((2,4),(2,0))
$F_2 f_{21}$	((0,0),(2,1))	((1,0),(3,1))	((0,0),(2,3))	((0,0),(3,1))	((0,2),(2,3))	((2,4),(2,1))
$F_2 f_{22}$	((0,0),(2,2))	((1,0),(3,2))	((0,0),(2,4))	((0,0),(3,2))	((0,2),(2,4))	((2,4),(2,2))
$F_2 f_{23}$	((0,0),(2,3))	((1,0),(3,3))	((0,0),(2,0))	((0,0),(3,3))	((0,2),(2,0))	((2,4),(2,3))
$F_2 f_{24}$	((0,0),(2,4))	((1,0),(3,4))	((0,0),(2,1))	((0,0),(3,4))	((0,2),(2,1))	((2,4),(2,4))
$F_2 f_{30}$	((0,0),(3,0))	((1,0),(4,0))	((0,0),(3,2))	((0,0),(4,0))	((0,2),(3,2))	((2,4),(3,0))
$F_2 f_{31}$	((0,0),(3,1))	((1,0),(4,1))	((0,0),(3,3))	((0,0),(4,1))	((0,2),(3,3))	((2,4),(3,1))
$F_2 f_{32}$	((0,0),(3,2))	((1,0),(4,2))	((0,0),(3,4))	((0,0),(4,2))	((0,2),(3,4))	((2,4),(3,2))
$F_2 f_{33}$	((0,0),(3,3))	((1,0),(4,3))	((0,0),(3,0))	((0,0),(4,3))	((0,2),(3,0))	((2,4),(3,3))
$F_2 f_{34}$	((0,0),(3,4))	((1,0),(4,4))	((0,0),(3,1))	((0,0),(4,4))	((0,2),(3,1))	((2,4),(3,4))
$F_2 f_{40}$	((0,0),(4,0))	((1,0),(0,0))	((0,0),(4,2))	((0,0),(0,0))	((0,2),(4,2))	((2,4),(4,0))
$F_2 f_{41}$	((0,0),(4,1))	((1,0),(0,1))	((0,0),(4,3))	((0,0),(0,1))	((0,2),(4,3))	((2,4),(4,1))
$F_2 f_{42}$	((0,0),(4,2))	((1,0),(0,2))	((0,0),(4,4))	((0,0),(0,2))	((0,2),(4,4))	((2,4),(4,2))
$F_2 f_{43}$	((0,0),(4,3))	((1,0),(0,3))	((0,0),(4,0))	((0,0),(0,3))	((0,2),(4,0))	((2,4),(4,3))
$F_2 f_{44}$	((0,0),(4,4))	((1,0),(0,4))	((0,0),(4,1))	((0,0),(0,4))	((0,2),(4,1))	((2,4),(4,4))

Sonuç 2.5.1.11:

Önerme 2.5.1.5 in (i) şıkkında elde edilen Fano düzlemlerinin herbirine izomorf 24 farklı Fano düzlemi vardır, (bunların sayısı 40.24=960 dır).

Sonuç 2.5.1.12:

Enaz 60+480+960=1500 tane 2. mertebeden altdüzlem vardır.

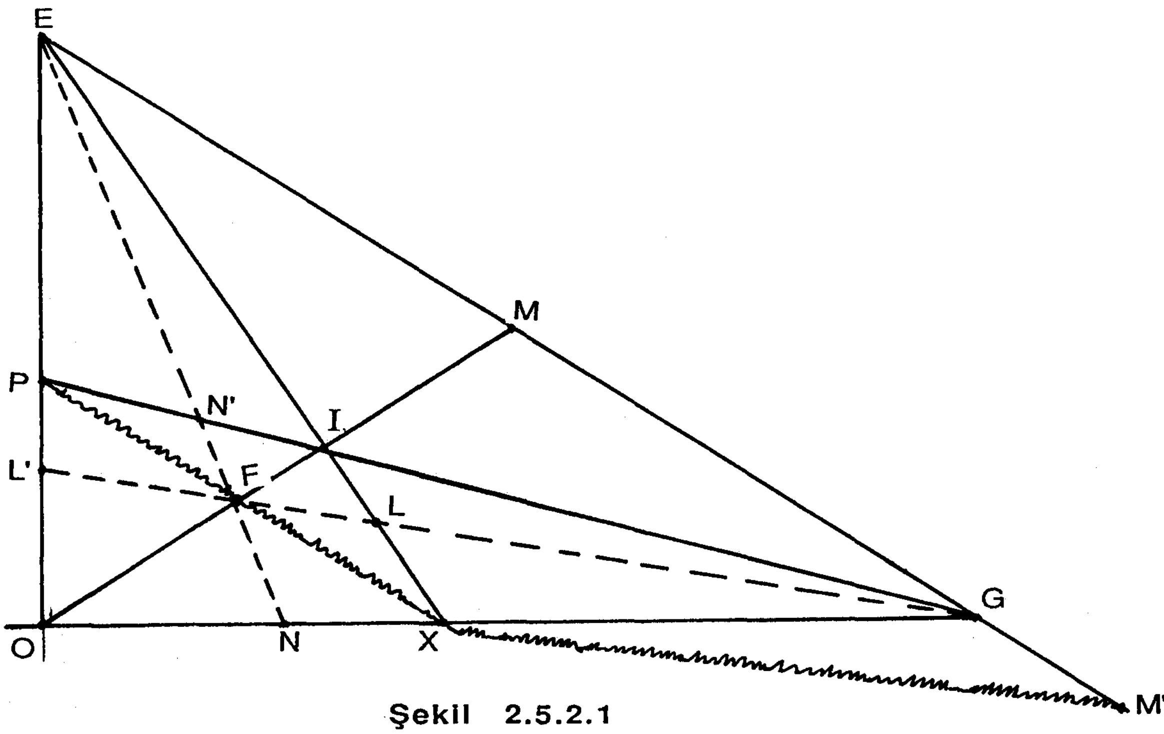
2.5.2: P_2S nin 3. Mertebeden Alt düzlemleri var mı?

P=((0,0),(a,b)) noktasında a=b=0 ve a=1, b=0 olması hallerinde OIXP nin bir dörtgen oluşturmadığı biliniyor. Buna göre aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme: 2.5.2.1: P=((0,0),(a,b)) olmak üzere (a=b=0 ve a=1, b=0 durumları hariç)

P_2S nin OIXP dörtgenlerinin tamamlanmışlarından elde edilen konfigurasyonlar 3. mertebeden birer altdüzlem oluşturmazlar.

İspat: P=((0,0),(a,b)) olmak üzere b≠0 iken OIXP nin tamamlanmışı olan konfigurasyonlar P_2S nin 2. mertebeden birer altdüzlemini (Fano düzlemlerini) oluşturuyordu. O halde ispatı tamamlayabilmek için b=0 ve a ≠ 0,1 iken OIXP nin tamamlanmışı olan konfigurasyonların (ki bunların sayısı 3 dür.) 3. mertebeden birer altdüzlem oluşturmadığını göstermek yeterli olacaktır. Şimdi bu 3 durumu inceleyelim. Bu incelemeleri yaparken Şekil 2.5.2.1 deki nokta ve doğrular gözönüne alınacaktır.



Şekil 2.5.2.1

1.Durum: Eğer a=2, b=0 ise P=((0,0),(2,0)) olup; OIXP nin tamamlanmışının 3. mertebeden bir altdüzlem olamayacağını gösterelim.

O = ((0,0),(0,0)), I = ((1,0),(1,0)), X = ((0,0)) P = ((0,0),(2,0)) olup;

OP = [(0,0)], OX = [(0,0),(0,0)], OI = [(1,0),(0,0)], PX = [(0,0),(2,0)] ve

IX = [(0,0),(1,0)] olduğundan

OP∧IX = ((0,0),(1,0)) = E, OI∧PX = ((2,0),(2,0)) = F elde edilir.

EF = [(3,0),(1,0)] doğrusudur.

EF∧OX = ((3,0),(0,0)) = N noktası ve PI = [(4,0),(2,0)] doğrusu sonrada

PI∧OX = ((2,0),(0,0)) = G noktası bulunur.

EF∧PI = ((2,1),(2,3)) = N' noktası FG = [(2,0)] doğrusu

FG∧IX = ((2,0),(1,0)) = L noktası ve FG∧OP = (∞) = L' noktaları elde edilir.

EG = [(2,0),(1,0)], doğrusu ile OI doğrusunun arakesit noktası

EG∧OI = ((4,0),(4,0)) = M dir.

PX∧EG = ((3,0),(2,0)) = M' dür.

Bu dörtgenin tamamlanmışı olan konfigurasyonun 3. mertebeden bir altdüzlem olması için her noktadan 4 doğru geçmeli ve her doğru üzerinde 4 nokta bulunmalıdır. O halde PM = [(3,0),(2,0)] doğrusu üzerindeki diğer 2 nokta belirlenebilmelidir.

LoPM olsun. LoPM $\Leftrightarrow$ (1,0) $\neq$ (3,0) $\ominus$ (2,0) $\oplus$ (2,0) dir.

NoPM olsun. NoPM $\Leftrightarrow$ (0,0) $\neq$ (3,0) $\ominus$ (3,0) $\oplus$ (2,0)

olduğundan PM doğrusu üzerinde bu düzleme ait 2 nokta daha bulunamadığı için bu konfigurasyon 3. mertebeden bir altdüzlem olamaz.

2.Durum: Eğer a=3, b=0 ise P=((0,0),(3,0)) olup OIXP nin tamamlanmışının 3. mertebeden bir altdüzlem olamayacağını gösterelim.

Yine O, I, X ve E noktaları ve OP, OX, OI, IX doğruları 1. Durumdaki nokta ve doğrularla aynıdır.

PX = [(0,0),(3,0)] doğrusu ve PX$\wedge$OI = ((3,0),(3,0)) = F noktası bulunur.

EF = [(4,0),(1,0)] doğrusudur.

EF$\wedge$OX = ((1,0),(0,0)) = N ve PI = [(3,0),(3,0)] doğrusunu vede

EF$\wedge$PI = ((2,0),(4,0)) = N' noktası elde edilir.

PI$\wedge$OX = ((4,0),(0,0)) = G noktası ile FG = [(2,0),(2,0)] doğrusu ve

FG$\wedge$OP = ((0,0),(2,0)) = L' , FG$\wedge$IX = ((2,0),(1,0)) = L noktaları bulunur.

EG = [(1,0),(1,0)] doğrusunun sırasıyla OI ve PX doğruları ile arakesiti

M = ((1,0)) ve M' = ((2,0)),(3,0)) noktalarıdır.

PM = [(1,0),(3,0)] olup N o PM ve L o PM dir, yani PM üzerinde olan düzleme ait diğer 2 nokta bulunamaz, dolayısıyla bu konfigurasyon 3. mertebeden bir altdüzlem oluşturmaz.

3. Durum: Eğer a=4, b=0 ise P=((0,0),(4,0)) olup;

OIXP nin tamamlanmışının 3. mertebeden bir altdüzlem olamayacağını gösterelim.

O, I, X ve E noktalar ve OP, OX, OI, IX doğruları 1. Durumdaki nokta ve doğrulardır.

PX = [(0,0),(4,0)] doğrusu ve PX$\wedge$OI = ((4,0),(4,0)) = F noktası bulunur.

EF=[(2,0),(1,0)] doğrusu ile OX doğrusunun arakesit noktası

$N = ((2,0),(0,0))$ dır. $PI = [(2,0),(4,0)]$ doğrusunun EF doğrusu ile arakesit noktası $N' = ((2,0))$ dır.

$PI \wedge OX = ((3,0),(0,0))$ dır. $FG = [(4,0),(3,0)]$ doğrusunun sırasıyla IX ve OP ile arakesit noktaları $L = ((2,0),(1,0))$ ve $L' = ((0,0),(3,0))$ noktalarıdır.

$EG = [(3,0),(1,0)]$ doğrusunun ise OI ile arakesit noktası $M = ((2,0),(2,0))$, PX ile arakesit noktası $M' = ((1,0),(4,0))$ dır.

$N,L \circ PM = [(4,0),(4,0)]$ olduğundan, bu konfigurasyon 3. mertebeden bir altdüzlem oluşturmaz.

2.5.3. P_2S nin 5. Mertebeden Bazı Altdüzlemler:

P_2S nin 5. mertebeden altdüzlemlerini her doğrusu 6 nokta kapsadığından ve her noktasından da 6 doğru geçtiği gerçeği gözönüne alınarak O, II, X ve $Y=(\infty)$ noktalarını içeren OIXY tamdörtgeninin tamamlanışından elde edilen altdüzlemin nokta ve doğruları bilinen anlamda üzerinde bulunma bağıntısı kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

P_2S nin 5. Mertebeden Bir Altdüzleminin İnşası:

I) Düzlemin Noktaları:

((0,0),(0,0)) , ((0,0),(1,0)) , ((0,0),(2,0)) , ((0,0),(3,0)) , ((0,0),(4,0)) , ((0,0))
((1,0),(0,0)) , ((1,0),(1,0)) , ((1,0),((2,0)) , ((1,0),(3,0)) , ((1,0),(4,0)) , ((1,0))
((2,0),(0,0)) , ((2,0),(1,0)) , ((2,0),(2,0)) , ((2,0),(3,0)) , ((2,0),(4,0)) , ((2,0))
((3,0),(0,0)) , ((3,0),(1,0)) , ((3,0),(2,0)) , ((3,0),(3,0)) , ((3,0),(4,0)) , ((3,0))
((4,0),(0,0)) , ((4,0),(1,0)) , ((4,0),(2,0)) , ((4,0),(3,0)) , ((4,0),(4,0)) , ((4,0))

(∞)

II) Düzlemin Doğruları:

[(0,0),(0,0)] , [(0,0),(1,0)] , [(0,0),(2,0)] , [(0,0),(3,0)] , [(0,0),(4,0)] , [(0,0)]
[(1,0),(0,0)] , [(1,0),(1,0)] , [(1,0),(2,0)] , [(1,0),(3,0)] , [(1,0),(4,0)] , [(1,0)]
[(2,0),(0,0)] , [(2,0),(1,0)] , [(2,0),(2,0)] , [(2,0),(3,0)] , [(2,0),(4,0)] , [(2,0)]
[(3,0),(0,0)] , [(3,0),(1,0)] , [(3,0),(2,0)] , [(3,0),(3,0)] , [(3,0),(4,0)] , [(3,0)]
[(4,0),(0,0)] , [(4,0),(1,0)] , [(4,0),(2,0)] , [(4,0),(3,0)] , [(4,0),(4,0)] , [(4,0)]

[(∞)]

III) Hangi Doğrular Üzerinde Hangi Noktalar Var:

[(0,0),(0,0)] ;	((0,0),(0,0)) ,	((1,0),(0,0)) ,	((2,0),(0,0)) ,	((3,0),(0,0)) ,	((4,0),(0,0)) ,	((0,0))
[(0,0),(1,0)] ;	((0,0),(1,0)) ,	((1,0),(1,0)) ,	((2,0),(1,0)) ,	((3,0),(1,0)) ,	((4,0),(1,0)) ,	((0,0))
[(0,0),(2,0)] ;	((0,0),(1,0)) ,	((1,0),(2,0)) ,	((2,0),(2,0)) ,	((3,0),(2,0)) ,	((4,0),(2,0)) ,	((0,0))
[(0,0),(3,0)] ;	((0,0),(3,0)) ,	((1,0),(3,0)) ,	((2,0),(3,0)) ,	((3,0),(3,0)) ,	((4,0),(3,0)) ,	((0,0))
[(0,0),(4,0)] ;	((0,0),(4,0)) ,	((1,0),(4,0)) ,	((2,0),(4,0)) ,	((3,0),(4,0)) ,	((4,0),(4,0)) ,	((0,0))
[(1,0),(0,0)] ;	((0,0),(0,0)) ,	((1,0),(1,0)) ,	((2,0),(2,0)) ,	((3,0),(3,0)) ,	((4,0),(4,0)) ,	((1,0))
[(1,0),(1,0)] ;	((0,0),(1,0)) ,	((1,0),(2,0)) ,	((2,0),(3,0)) ,	((3,0),(4,0)) ,	((4,0),(0,0)) ,	((1,0))
[(1,0),(2,0)] ;	((0,0),(2,0)) ,	((1,0),(3,0)) ,	((2,0),(4,0)) ,	((3,0),(0,0)) ,	((4,0),(1,0)) ,	((1,0))
[(1,0),(3,0)] ;	((0,0),(3,0)) ,	((1,0),(4,0)) ,	((2,0),(0,0)) ,	((3,0),(1,0)) ,	((4,0),(2,0)) ,	((1,0))
[(1,0),(4,0)] ;	((0,0),(4,0)) ,	((1,0),(0,0)) ,	((2,0),(1,0)) ,	((3,0),(2,0)) ,	((4,0),(3,0)) ,	((1,0))
[(2,0),(0,0)] ;	((0,0),(0,0)) ,	((1,0),(2,0)) ,	((3,0),(1,0)) ,	((2,0),(4,0)) ,	((4,0),(3,0)) ,	((2,0))
[(2,0),(1,0)] ;	((0,0),(1,0)) ,	((1,0),(3,0)) ,	((2,0),(0,0)) ,	((3,0),(2,0)) ,	((4,0),(4,0)) ,	((2,0))
[(2,0),(2,0)] ;	((0,0),(2,0)) ,	((1,0),(4,0)) ,	((2,0),(1,0)) ,	((3,0),(3,0)) ,	((4,0),(0,0)) ,	((2,0))
[(2,0),(3,0)] ;	((0,0),(3,0)) ,	((1,0),(0,0)) ,	((2,0),(2,0)) ,	((3,4),(4,0)) ,	((4,0),(1,0)) ,	((2,0))
[(2,0),(4,0)] ;	((0,0),(4,0)) ,	((1,0),(1,0)) ,	((2,0),(3,0)) ,	((3,0),(0,0)) ,	((4,0),(2,0)) ,	((2,0))
[(3,0),(0,0)] ;	((0,0),(0,0)) ,	((3,0),(4,0)) ,	((2,0),(1,0)) ,	((4,0),(2,0)) ,	((4,0),(3,0)) ,	((3,0))
[(3,0),(1,0)] ;	((0,0),(1,0)) ,	((1,0),(4,0)) ,	((2,0),(2,0)) ,	((3,0),(0,0)) ,	((4,0),(3,0)) ,	((3,0))
[(3,0),(2,0)] ;	((0,0),(2,0)) ,	((1,0),(0,0)) ,	((2,0),(3,0)) ,	((3,0),(1,0)) ,	((4,0),(4,0)) ,	((3,0))
[(3,0),(3,0)] ;	((0,0),(3,0)) ,	((1,0),(1,0)) ,	((2,0),(4,0)) ,	((3,0),(2,0)) ,	((4,0),(0,0)) ,	((3,0))
[(3,0),(4,0)] ;	((0,0),(4,0)) ,	((1,0),(2,0)) ,	((2,0),(0,0)) ,	((3,0),(3,0)) ,	((4,0),(1,0)) ,	((3,0))
[(4,0),(0,0)] ;	((0,0),(0,0)) ,	((1,0),(4,0)) ,	((2,0),(3,0)) ,	((3,0),(2,0)) ,	((4,0),(1,0)) ,	((4,0))
[(4,0),(1,0)] ;	((0,0),(1,0)) ,	((1,0),(0,0)) ,	((2,0),(4,0)) ,	((3,0),(3,0)) ,	((4,0),(2,0)) ,	((4,0))
[(4,0),(2,0)] ;	((0,0),(2,0)) ,	((1,0),(1,0)) ,	((2,0),(0,0)) ,	((3,0),(4,0)) ,	((4,0),(3,0)) ,	((4,0))
[(4,0),(3,0)] ;	((0,0),(3,0)) ,	((1,0),(2,0)) ,	((2,0),(1,0)) ,	((3,0),(0,0)) ,	((4,0),(4,0)) ,	((4,0))
[(4,0),(4,0)] ;	((0,0),(0,4)) ,	((1,0),(3,0)) ,	((2,0),(2,0)) ,	((3,0),(1,0)) ,	((4,0),(0,0)) ,	((4,0))
[(0,0)] ;	((0,0),(0,0)) ,	((0,0),(1,0)) ,	((0,0),(2,0)) ,	((0,0),(3,0)) ,	((0,0),(4,0)) ,	(∞)
[(1,0)] ;	((1,0),(0,0)) ,	((1,0),(1,0)) ,	((1,0),(2,0)) ,	((1,0),(3,0)) ,	((1,0),(4,0)) ,	(∞)
[(2,0)] ;	((2,0),(0,0)) ,	((2,0),(1,0)) ,	((2,0),(2,0)) ,	((2,0),(3,0)) ,	((2,0),(4,0)) ,	(∞)
[(3,0)] ;	((3,0),(0,0)) ,	((3,0),(1,0)) ,	((3,0),(2,0)) ,	((3,0),(3,0)) ,	((3,0),(4,0)) ,	(∞)
[(4,0)] ;	((4,0),(0,0)) ,	((4,0),(1,0)) ,	((4,0),(2,0)) ,	((4,0),(3,0)) ,	((4,0),(4,0)) ,	(∞)
[∞] ;	((0,0)) ,	((1,0)) ,	((2,0)) ,	((3,0)) ,	((4,0)) ,	(∞)

Önerme 2.5.3.1: P_2S nin, $O=((0,0),(0,0))$, $X=((0,0))$, $I=((1,0),(1,0))$ ve $Y=(\infty)$ olmak üzere OIXY düzgün dörtgeninin tamamlanmışı olan, 5. mertebeden altdüzlemine izomorf 24 tane farklı altdüzlem vardır.

İspat: P_2S nin 5. mertebeden altdüzlemine izomorf 24 farklı düzlemin bulunduğunu göstermek için her bir düzlemin en az bir farklı nokta içerdiğini göstermek yeterli olacaktır. Halbuki P_2S nin f_a kolinasyonu

$$
\begin{aligned}
f_a : (x\,,y) &\rightarrow (x\,,y \oplus a)\\
(\mu) &\rightarrow (\mu)\\
(\infty) &\rightarrow (\infty)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlı olduğu için f_a nın 1-1 liğinden dolayı her bir a için OIXY ye eşlenen farklı 24 tane dörtgenin varlığı bilinmektedir. Her bir dörtgende I noktasının görüntüsü, her bir düzlemde tek olarak içerileceğinden dolayı her bir düzlem en az bir farklı nokta içerir.

AÇIK SORULAR

1. Genel olarak P_2S nin herhangi bir tamdörtgeninin tamamlanmışı ne zaman bir Fano düzlemidir, ne zaman değildir?
2. P_2S nin 3. mertebedenalt düzlemleri var mıdır?
3. P_2S nin 4. mertebeden alt düzlemleri var mıdır?
4. P_2S nin 5. mertebeden altdüzlemlerinin sayısı kaçtır?
5. Bilinen En Küçük kartezyen grupdan daha küçük bir kartezyen grup var mıdır?

KAYNAKLAR DİZİNİ

Çiftçi, S - Kaya, R., 1990, On the Fano Subplanes in the Translation plane of order 9. Doğa - Tr. J.of Mathematics 14, 1-7.

Kaya, R., 1978, Projektif Geometri, Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, Matematik: 1, 371 s.

Özcan, M., 1988, Cebirsel Yapılardan Projektif Düzlem Elde Edilmesi Üzerine, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, 130 s.

Panella, G., 1965, Una classe di sistemi cartesiani. Atti Accod. Naz. Lincei Rendic., 38, 480-485.

Room, T.G - Kirkpatrick, P.B. 1971, Miniquaternion Geometry, London, Cambridge University Press, 177.

Spencer, J., 1960, On the Lenz-Barlotti Classification of Projektive planes, Quart, J.Math. Oxford (2), 11, 241-257.