

**CES ÜRETİM FONKSİYONUNUN  $[a,b]$  ARALIĞININ HER BİR  $[X_i, X_{i+1})$   
ALT ARALIĞINDA PARÇALI KÜBİK SPLİNE POLİNOM YAKLAŞIMI İLE  
NÜMERİK ÇÖZÜMÜ**

**İsmail ÖZKAN**

**Anadolu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisans Üstü Yönetmeliği Uyarınca  
Matematik Anabilim Dalı  
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında  
DOKTORA TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır.**

**Danışman: Prof. Dr. Musa ŞENEL**

**Eylül - 1990**

**Anadolu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü**

İsmail Özkan'ın Doktora tezi olarak hazırladığı "CES Üretim fonksiyonunun  $[a,b]$  aralığının her bir  $[x_i, x_{i+1})$  alt aralığında Parçalı Kübik Spline Polinom Yaklaşımı ile Nümerik Çözümü" başlıklı bu çalışma, jürimizce Lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

25.9.1990

Tarih

Üye : Prof. Dr. Musa Senel

Üye : Prof. Dr. Rüstem KAYA

Üye : Doç. Dr. Seref Mirasyedioğlu

Fen bilimleri Enstitüsü yönetim kurulunun 26.9.1990  
gün ve 256/11 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Rüstem KAYA  
Enstitü Müdürü

## İÇİNDEKİLER

	SAYFA
TEŞEKKÜR	I
ÖZET	II
ABSTRACT	III
GİRİŞ	IV

### BİRİNCİ BÖLÜM

#### SPLİNE FONKSİYONU YAKLAŞIMI

1.1	Spline Fonksiyonunun Tanımı ve Tarihçesi	1
1.2	Spline Fonksiyonunun Özellikleri	3
1.3	Spline Fonksiyonunun Çeşitleri	4
	1.3.1 Parçalı Doğrularla Spline Yaklaşımı	4
	1.3.2 k- Dereceli Spline Fonksiyonu	6
	1.3.3 B-Spline Fonksiyonu	8
	1.3.4 Üstel Spline Fonsiyonu	10

### İKİNCİ BÖLÜM

#### PARÇALI KÜBİK SPLİNE POLİNOM YAKLAŞIMI

2.1	Parçalı Polinomlarla Spline Arasındaki İlişki	11
2.2	Parametrik Spline Fonksiyonu	16
2.3	Parçalı Kübik Spline Polinom Yaklaşımı	18

### ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

#### ÜRETİM FONKSİYONU

3.1	Üretim Fonksiyonunun Tanımı ve Önemi	26
3.2	COBB-DOUGLAS Üretim Fonksiyonu	27
3.3	Sabit İkame Esnekli (CES) Üretim Fonksiyonu	28
3.4	CES Üretim Fonksiyonunun Parçalı Kübik Spline Polinom Yaklaşımı ile Nümerik Çözümü	31

## **İÇİNDEKİLER (Devam)**

### **DÖRDÜNCÜ BÖLÜM**

#### **CES ÜRETİM FONKSİYONUNUN PARÇALI KÜBİK SPLİNE POLİNOM YAKLAŞIMI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜNÜN BİR ÇİMENTO FABRİKASINDA UYGULAMASI**

4.1	CES Üretim Fonksiyonunda En Küçük Kareler Yöntemi ile İkame Esnekliği Parametresinin Bulunması	35
4.2	Parçalı Kübik Spline Polinom Yaklaşımı ile Nümerik Çözümü	38
4.3	CES Üretim Fonksiyonu İle Parçalı Kübik Spline Polinom Yaklaşımının Karşılaştırılması	42
<b>EK-1</b>		<b>44</b>
<b>EK-2</b>		<b>45</b>
<b>SONUÇ</b>		<b>47</b>
<b>KAYNAKLAR DİZİNİ</b>		<b>48</b>

## TEŞEKKÜR

Bu konuda çalışmamı yöneten ve yönlendiren araştırma süresince karşılaştığım sorunlarda hoşgörü ve bilimsel katkılarıyla yardımlarını esirgemeyen tez yöneticim Sayın Hocam Prof.Dr.Musa ŞENEL'e,her zaman yardımını ve yakın desteğini gördüğüm Sayın Hocam Prof.Dr.İmdat KARA'ya,kıymetli vakitlerini ayırarak araştırmamda yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof.Dr.Rüstem KAYA'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

İsmail ÖZKAN  
Eylül 1990

## ÖZET

Her bir alt aralıkda farklı yaklaşım polinomuna sahip ve son noktalar dışında eğimi ve eğriliği sürekli, en iyi interpolasyon fonksiyonu olan spline fonksiyonun, polinom yaklaşımı uygulamalarında kullanıldığı bilinir.

C.E.S Üretim fonksiyonu logaritma gibi bir teknikle fonksiyonun parametreleri cinsinden doğrusullaştırılmaz.

Bu çalışmada C.E.S Üretim fonksiyonunun  $[a,b]$  aralığının her bir  $[x_i, x_{i+1})$  alt aralığındaki ara noktalarda  $S_{\Delta}(x) = p_i$  parçalı kübik spline polinom yaklaşımı ile nümerik çözümü yapılmıştır. Sonuçta yaklaşık çözüm elde edilmiştir.

### ABSTRACT

The spline function which has the best interpolation function that cover different approximation polynomial on each subinterval and it is slope and curvature are continuous without end points is known that it is used polynomial approximation in application.

CES production function cannot be linearized by the types of parameters of function like a logarithm technique.

In this study the numerical solution of CES production function  $S_{\Delta}(x)=p_i$  was done with the piecewise cubic spline polynomial approximation on inner point of each subintervals  $[x_i, x_{i+1})$  of interval  $[a, b]$ . As a result, an approximate solution had been obtained.

## GİRİŞ

Veriler belirlenen bir aralıkta doğru veya eğri şeklinde bir fonksiyonel ilişki gösteriyorsa verilere eğri uydurma en küçük kareler yöntemi ile yapılabilir. Bu yöntem ile verilerin gerçek değerleri ile uydurulan eğrilerin üzerindeki teorik değerler arasındaki farkı minimum yapmak amaçlanmıştır. Veriler belirlenen bir aralıkta bir fonksiyonel ilişki göstermiyorsa bu verileri en iyi temsil edebilecek eğri tipini bulmak zor olacaktır.

Bu çalışmada verilen bir aralığı alt aralıklara bölüp, her bir alt aralık için bir parçalı polinom uydurarak, belirlenen aralıkta verileri en iyi temsil edebilecek eğri denklemini bulma yöntemi araştırılmıştır.

Parametreleri en küçük kareler yöntemi ile belirlenemeyen CES Üretim fonksiyonunun, parçalı kübik spline polinom yaklaşımı ile nümerik çözümünde sonuçların karşılaştırılması ve tahmini yapılabilir. Bu analitik eşdeğerlik yaklaşımının diğer temel bir kullanımıdır.

Uygulamada önemi gün geçtikçe artan üretim ve maliyet ile ilgili problemlerin çözümünde nümerik metodlar kullanılmaktadır.

Bu çalışmanın birinci bölümünde spline fonksiyonu yaklaşımı, spline fonksiyonun tanımı ve tarihçesi, spline fonksiyonun özellikleri incelenmiş, parçalı doğrularla spline yaklaşımı, k-dereceli spline fonksiyonu, parçalı polinomlar, B-spline fonksiyonu, üstel spline fonksiyonu ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde parçalı polinomlar ve spline nin ilişkisi, parametrik spline fonksiyonu, parçalı kübik spline polinom yaklaşımı ayrıntılarıyla anlatılmıştır.

Üçüncü bölümde üretim fonksiyonunun tanımı ve önemi açıklanmıştır. Cobb-Douglas ve sabit ikame esnekli (CES) Üretim fonksiyonu incelenerek, CES Üretim fonksiyonunun  $[a,b]$  aralığında her bir  $[x_i, x_{i+1})$  alt aralıktaki ara noktalarda parçalı kübik spline polinom yaklaşımı ile nümerik çözümü verilmiştir.

Dördüncü bölümde CES Üretim fonksiyonunun parçalı kübik spline polinom yaklaşımı ile nümerik çözümünün uygulaması Afyon Çimento Fabrikasından alınan gerçek veriler ile yapılmıştır.

Bu araştırmanın bütünü için açıklamalar ve uygulama için öneriler sonuçta verilmiştir.



## BİRİNCİ BÖLÜM

### SPLİNE FONKSİYONU YAKLAŞIMI

Verilere eğri uydurmada , koordinat sistemlerinde verileri gösteren noktalara en yakın geçecek bir doğru veya eğri denklemini bulmak söz konusudur. Verilerin gösterdiği noktalara en yakın geçen doğru veya eğrinin üzerindeki teorik değerler ile gerçek değerler arasında bir fark olacaktır. Verileri koordinat sisteminde temsil eden noktalara en yakın geçecek eğrinin denklemi yüksek dereceden bir polinom olduğunda gerçek değerler ile eğri üzerindeki teorik değerler arasındaki fark büyük olacaktır. Spline fonksiyonu yaklaşımıyla bir veri kümesinde verilerin gösterdiği noktalar , alt aralıklara bölünerek , bu her bir alt aralıktan geçen en yakın parçalı polinomu bulup , bu parçalı polinomların birleştirilmesiyle teorik değerler ile gerçek değerler arasındaki fark en küçüklenebilir. Verilere eğri uydurmada spline fonksiyonu yaklaşımı , verilerin gösterdiği noktaları en iyi temsil edebilecek gerçek bir eğri tipidir. Bu bölümde spline fonksiyonun tanımı ve tarihçesi verilecek , spline fonksiyonun özellikleri ve farklı şekilleri açıklanacaktır.

#### 1.1. Spline Fonksiyonun Tanımı ve Tarihçesi :

Çeşitli kaynaklarda spline fonksiyonun değişik tanımları verilmiştir. Söz konusu tanımların ortak özelliklerinden yararlanarak spline fonksiyonun tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

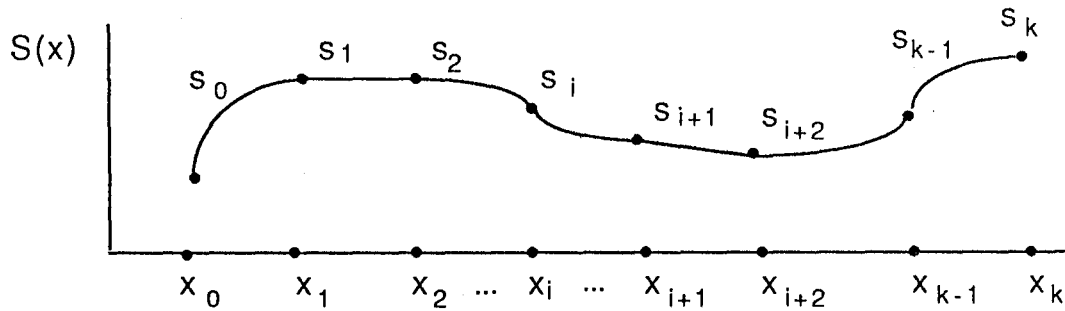
##### Tanım 1.1.1

$[a, b]$  kapalı aralığının  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k = b$  olacak şekilde  $[x_0, x_1), [x_1, x_2), \dots, [x_{k-1}, x_k]$  alt aralıklarına bölündüğünü varsayalım. Bu alt aralıklardaki  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$  uç noktalarında  $Y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, k$  özelliğini de sağlayan  $[a, b]$  aralığında  $Y=f(x)$ , fonksiyonu tanımlı

olsun. ( $Y=f(x)$  genel olarak verilere karşılık gelen fonksiyondur.) Her bir  $[x_i, x_{i+1})$  alt aralığında tanımlı birer  $s_i(x)$  polinom fonksiyonu alalım ; öyleki bu alt aralıkların uç noktalarında  $s_i(x_i)=f(x_i)$  olsun. Böylece spline fonksiyonu denilen  $S(x)$  fonksiyonu , alt aralıklarda tanımlı  $s_0(x), s_1(x), \dots, s_{k-1}(x)$  polinom fonksiyonlarının lineer birleşimi olarak belirlenmiş olur. Buna göre  $S(x)$  spline parçalı polinom fonksiyonu

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) & x_0 \leq x < x_1 \\ s_1(x) & x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \\ s_i(x) & x_i \leq x < x_{i+1} \\ \vdots & \\ s_{k-1}(x) & x_{k-1} \leq x < x_k \end{cases} \quad (1.1.1)$$

şeklinde tanımlı olup grafiği de şekil 1.1 deki gibi olur.



Şekil 1.1 Spline fonksiyonu

$Y=S(x)$  Spline fonksiyonu için - ara fonksiyonlarının - tanımları biraz genişletilerek aşağıdaki eşitlikler de verilebilir :

$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad i=0,1,2,\dots,k \text{ için}$$

yani  $x_0$  noktasında  $s_0(x_0) = f(x_0)$  ve özel olarak

$$i = 0 \text{ için } s_0(x_1) = s_1(x_1) = f(x_1)$$

$$i = 1 \text{ için } s_1(x_2) = s_2(x_2) = f(x_2)$$

(1.2.1)

$$i = k-2 \text{ için } s_{k-2}(x_{k-1}) = s_{k-1}(x_{k-1}) = f(x_{k-1})$$

$$i = k-1 \text{ için } s_{k-1}(x_k) = s(x_k) = f(x_k) \text{ olur.}$$

Spline fonksiyona ilişkin bilgiler için (Philips and Taylor,1973) (Pennington,1969) (Bever,et al.,1982) (Burden and Faires,1985) kaynaklarına bakılabilir.

Parçalı polinom yaklaşımının teorisi , nümerik analizde Weierstrass teoremi (1885) üzerine kurulmuştur ( Shea,1984).

C. Runge (1901) , A. Eagle (1928) , Quade ve L. Collatz (1938) , J. Favard (1940) yıllarında yayınladıkları makalelerinde spline fonksiyondan söz ederek bu fonksiyonu kullanmışlardır (Schumaker,1981).

Durand.D (1900-1942) tarafından verilere eğri uydurma , sadece birkaç şekli ile bilinen eğrilerle yapılmıştır ( Shea,1984). İlk kez spline fonksiyon (1946) yılında I. J. Shoenberg in yazdığı makalede tanıtılmıştır (Shoenberg,1946). Shoenberg ve Whitney ( 1949-1953 ) Shoenberg ve Maclaren (1958 ) tarafından spline ile ilgili makaleler yayınlanmıştır.

J. C. Holladay ( 1957 ) , C. de Boor ( 1962-1963 ) , Ahlberg ve Nilson ( 1963 ) , Ahlberg , Nilson ve Walsh ( 1964 ) , Shoenberg (1964 ) tarafından spline fonksiyonun çeşitli optimal özellikleri incelenmiş ve en iyi interpolasyon yöntemleri geliştirilmiştir . Laurent tarafından ( 1972 ) de spline fonksiyon ile ilgili kitap yazılmıştır. Tekniğin ilerlemesi ile Sard ve Weintraub ( 1971 ) , Shoenberg (1973 ) , Schultz ( 1973), Böhmer (1974 ) , Prenter (1975), Fisher ve Jerome (1975 ) , C de Boor ( 1978 ) , Stechin ve Subbotin (1978) de spline fonksiyonun teori ve uygulamaları ile ilgili çeşitli çalışmalar yapmışlardır (Schumaker,1981) (Shea,1985).

Daniel B.Suits , Andrew Mason , Louis Chan in (1978) de yazdıkları makalede standart regresyon yöntemleriyle spline fonksiyonu bulma uygulaması yapılmıştır (Suit,et al.,1978).

## 1.2 Spline Fonksiyonun Özellikleri

Önceki kısımda tanımı ve tarihçesi verilen spline fonksiyonun özelliklerinin bilinmesi , bu yaklaşımın uygulaması için önemlidir.

$Y=S(x)$  spline fonksiyonunun bu çalışmada kullanılacak olan çok önemli özellikleri şöyledir :

a)  $[a,b]$  aralığının her bir  $[x_i, x_{i+1}]$  alt aralığında tanımlı  $Y=S(x)$ , spline fonksiyonun bütün uç noktalarında  $S(x_i) = f(x_i)$  eşitliği vardır.

b)  $[a,b]$  aralığında tanımlı ,  $Y=S(x)$  spline fonksiyonu ve  $S'(x)$ ,  $S''(x), \dots, S^{k-1}(x)$  mertebeden bütün türevleri var ve süreklidir.

c)  $f^k$ ,  $f$  nin  $k$  inci türevi ve  $s_i^k$  de  $s_i$  parçalı polinomunun  $k$  inci türevi olmak üzere a ) ve b ) deki koşullar altında

$$\int_a^b [f^k(x)]^2 dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [s_i^k(x)]^2 dx$$

integralinin toplamı minimumdur.

d)  $Y_i = S(x_i)$ ,  $i=0,1,\dots,k$ , spline fonksiyonu  $[x_0, x_1]$  ve  $[x_{k-1}, x_k]$  alt aralıklarında  $k-1$  dereceli polinomdur.

e)  $Y_i = S(x_i)$ ,  $i=0,1,\dots,k$ , spline fonksiyonu ve  $f(x_i)$  fonksiyonunun,  $[x_0, x_1]$  ve  $[x_{k-1}, x_k]$  alt aralıklarının uç noktalarında

$$S'(x_0) = f'(x_0)$$

$$S'(x_k) = f'(x_k) \quad \text{ve}$$

ikinci türevleri için

$$S''(x_0) = f''(x_0) = 0$$

$$S''(x_k) = f''(x_k) = 0 \text{ dir.}$$

f)  $Y = S(x)$ , spline fonksiyonu  $[a, b]$  aralığının her bir  $[x_i, x_{i+1}]$  alt aralığında  $2k-1$  dereceli polinomdur (Schumaker,1981) (Burden and Faires,1985) (Eckmann,1972) (Handscorn,1965).

### 1.3 Spline Fonksiyonunun Çeşitleri

Bu kesimde spline fonksiyonunun çeşitleri olan parçalı doğru - larla spline yaklaşımı,  $k$ - dereceli spline fonksiyonu, parçalı polinomlar, B- spline fonksiyonu ve üstel spline fonksiyonundan söz edilecektir.

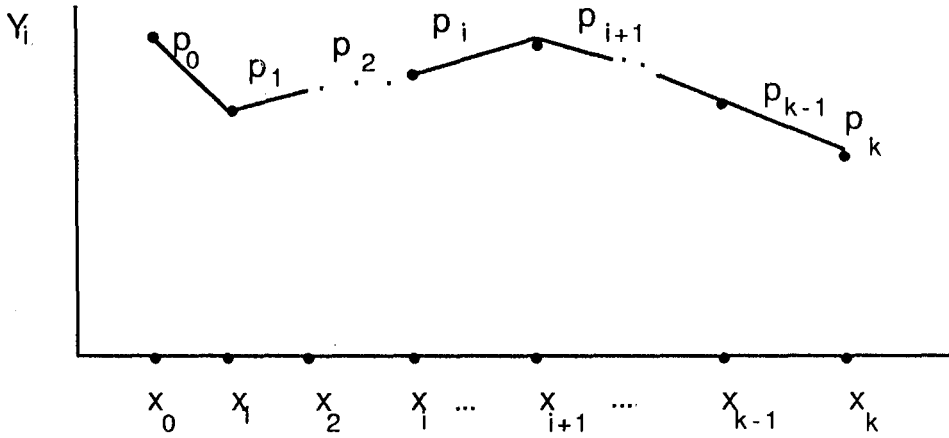
#### 1.3.1 Parçalı Doğrularla Spline Yaklaşımı

$[a, b]$  aralığını  $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k = b$  olacak şekilde  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2], \dots, [x_{k-1}, x_k]$  alt aralıklarına bölelim.  $x \in [a, b]$  için her  $p_i(x)$  her bir  $[x_i, x_{i+1}]$  alt aralığında tanımlı polinom olmak üzere,  $f(x)$  parçalı polinomları

$$f(x) = \begin{cases} p_0(x) & x_0 \leq x \leq x_1 \\ p_1(x) & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots & \vdots \\ p_i(x) & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ \vdots & \vdots \\ p_{k-1}(x) & x_{k-1} \leq x \leq x_k \end{cases} \quad (1.3.1)$$

şeklinde tanımlı olsun.

Her bir alt aralıktaki uç noktalardan oluşan küme  $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_k, f(x_k))\}$  dir. Parçalı doğrularla spline yaklaşımında  $[a, b]$  aralığındaki her bir  $[x_i, x_{i+1}]$  alt aralıkta  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  için  $p_i(x)$  bir doğrusal (birinci dereceden) polinom olarak alınır. Böylece bir parçalı doğrusal polinom yaklaşımının grafiği şekil 1.2 de gösterildiği gibi olur.



Şekil 1.2 Parçalı Doğrularla Spline Yaklaşımı

Her bir  $x \in [a, b]$  için ardaşık  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $[x_i, x_{i+1}]$  alt aralıkları yardımıyla

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ \frac{(x-x_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{(x_{i+1}-x)}{(x_{i+1}-x_i)}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases} \quad (1.3.2)$$

$\{\Psi_i(x), i = 0, 1, \dots, k\}$  fonksiyonu tanımlı olsun. Burada

$\{\psi_i(x), i=0,1,\dots,k\}$  fonksiyonu tanımlı olsun. Burada

$$\Psi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases} \quad (1.3.3)$$

olduğu hemen görülebilir. Böylece her  $x \in [x_{i-1}, x_{i+1})$  için  $Y_i = P_i(x), i=0,1,\dots,k$  parçalı doğrularla spline yaklaşımı

$$S(x) = \sum_{i=1}^k Y_i \Psi_i(x) := Y_1 \Psi_1(x) + Y_2 \Psi_2(x) + \dots + Y_k \Psi_k(x) \quad (1.3.4)$$

olarak tanımlanır (Eckmann,1972) (Dahlquist and Björck,1974).

Her bir alt aralıkta  $x \in [x_i, x_{i+1})$  için  $\{(x_i, f(x_i)) : i=0,1,\dots,k\}$  kümesindeki ardaşık iki uç noktadan bir  $p_i(x), 0 \leq i \leq k$  doğrusu geçecektir. Parçalı doğrularla spline yaklaşımda  $\{f(x) = p_i(x) : i=0,1,\dots,k\}$  şeklinde tasarlanan küme spline parçalı doğruları üzerindedir (Johnson and Riess,1982).

### 1.3.2 k-Dereceli Spline Fonksiyonu

Spline fonksiyonun diğer bir şekilde aşağıda tanımı verilecek olan k-dereceli spline fonksiyonudur.

#### Tanım 1.3.2.1

$[a, b]$  aralığını  $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$  olacak şekilde  $[x_0, x_1), [x_1, x_2), \dots, [x_{k-1}, x_k]$  alt aralıklarına bölelim. Aşağıda belirlenen A'nın kuvvet fonksiyonu  $[a, b]$  aralığının her bir  $[x_i, x_{i+1})$  alt aralığında tanımlı

$$(x-x_i)_+^j = [\max(x-x_i, 0)]^j = \begin{cases} (x-x_i)^j & x \geq x_i \text{ için} \\ 0 & x < x_i \text{ için} \end{cases} \quad (1.3.2.1)$$

$j$  dereceli parçalı polinomu olsun. Bu

$$\Psi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases}$$

olduğunda

$$\Psi_{ij} = \frac{(x-x_i)_+^j}{j!}, i=1,2,\dots,L \quad (1.3.2.3)$$

$$A = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^k a_{ij} \Psi_{ij} = a_{11} \frac{(x-x_1)_+}{1!} + a_{22} \frac{(x-x_2)_+^2}{2!} + \dots + a_{Lk} \frac{(x-x_L)_+^k}{k!} \quad (1.3.2.4)$$

olmaktadır. Burada A ya k-dereceli spline fonksiyonudur denir (Shea,1984). k- dereceli spline fonksiyonunun iki önemli özelliği şöyledir :

a-) [a,b] aralığının her bir  $[x_i, x_{i+1})$ ,  $i=0,1,\dots,k-1$  alt aralığında,  $Y_i = S(x_i)$  spline fonksiyonu k- dereceli parçalı polinomdur.

b-) [a,b] aralığında  $Y_i = S(x_i)$ ,  $i=0,1,\dots,k$  spline fonksiyonun birinci mertebeden (k-1) mertebeye kadar bütün türevleri alınabilir ve süreklidir (Dahlquist and Björck,1974).

### Tanım 1.3.2.2

[a,b] kapalı aralığının  $\Delta: a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$  olacak şekilde  $I_0=[x_0, x_1), I_1=[x_1, x_2), I_2=[x_2, x_3), \dots, I_k=[x_{k-1}, x_k]$  bir parçalanması olsun.  $x \in I_i$ ,  $f(x_i) = p_i(x)$ ,  $i=0,1,\dots,k$  için

$$f(x) = \sum_{i=0}^m c_i x^i; c_i \text{ katsayılar olmak üzere, } x \in \mathfrak{R} \quad (1.3.2.5)$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde  $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x)$  e parçalı polinomlar denir. Bunların kümesi de  $P_m$  ile gösterilir, yani

$$P_m = \{ p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x) \}$$

dır (Schumaker,1981).

$Y=S(x)$  spline fonksiyonunun sürekli ve türevlenebilir genel özelliği her bir  $[x_i, x_{i+1})$  alt aralıktaki dereceleri farklı spline parçalı polinomları üzerinde vardır (Shea,1984).

Küçük dereceli parçalı polinomların yaklaşım terimlerini içeren  $S(x)$  spline fonksiyonu ile  $f(x)$  e yaklaşım yapılabilir. Bu yaklaşım  $S(x)$  için yüksek dereceli bir polinomdan daha elverişli sonuç verecektir (Blum,1972).

$f(x)$  fonksiyonunun yaklaşımında,  $f(x)=p_i(x)$ ,  $i=0,1,\dots,k$  için  $f(x)$  fonksiyonunda her bir  $[x_i, x_{i+1})$  alt aralığının uzunluğu çok küçük seçilerek, çok sayıda değerlerinin bulunması gereklidir.  $|x_{i+1} - x_i|$  uzunluğu oldukça yaklaşık seçilmiş ise  $f(x)$  ve  $p_i(x)$  arasında olan fark  $|f(x) - p_i(x)|$ ,  $x \in [x_i, x_{i+1})$  için çok küçük olacak ve  $p_i(x)$  parçalı polinomları her bir alt aralıktaki  $f(x)$  e yaklaşık değerler verecektir (Stanton,1981).

### Tanım 1.3.2.3

$[a,b]$  kapalı aralığının  $\Delta$  ile gösterilen bir parçalanması  $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$  olacak şekilde  $I_0=[x_0, x_1)$ ,  $I_1=[x_1, x_2)$ ,  $I_2=[x_2, x_3)$ , ...,  $I_k=[x_{k-1}, x_k]$  ile verilmiş olsun.  $Y=S(x)$  spline fonksiyonunun  $(k-1)$  inci mertebeden türevleri sırayla  $M_1, M_2, \dots, M_{k-1}$  ve bunların kümesi

$M = \{ M_i = S^{(i)}(x) : i=1, \dots, k-1 \}$  olsun. Bu  $I_0, I_1, \dots, I_k$  alt aralıklarının her birinde  $s \in S(P_m, M, \Delta)$  spline polinomlarının gösterimi sırayla  $s_0, s_1, s_2, \dots, s_k$  olsun. Bu açılım  $S(x)$  in

$$s_0(x) = \sum_{j=1}^m c w_{0j} (x-x_1)^{j-1}, \quad c w_{0j} = \frac{D_-^{j-1} s(x_1)}{(j-1)!}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (1.3.2.6)$$

$$s_i(x) = \sum_{j=1}^m c w_{ij} (x-x_i)^{j-1}, \quad c w_{ij} = \frac{D_+^{j-1} s(x_i)}{(j-1)!}, \quad \begin{matrix} j = 1, 2, \dots, m \\ i = 1, 2, \dots, k \end{matrix} \quad (1.3.2.7)$$

spline parçalı polinomlarının tanımıdır.

Burada  $CW = (c w_{ij})_{i=0}^k \begin{matrix} k \\ j=1 \end{matrix}^m$  matris gösterimi spline fonksiyonunun B-Spline açılımını verir (Schumaker, 1981) (Çağal, 1989).

### 1.3.3 B-Spline Fonksiyonu

Spline fonksiyonunun diğer bir şekli olan B-Spline aşağıdaki şekilde tanımlanır.

#### Tanım 1.3.3.1.

$[a,b]$  aralığını  $\Delta: a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$  olacak şekilde  $I_0=[x_0, x_1)$ ,  $I_1=[x_1, x_2)$ ,  $I_2=[x_2, x_3)$ , ...,  $I_k=[x_{k-1}, x_k]$  alt aralıklarına bölelim.  $x \in [x_i, x_{i+1})$  için  $M_1(x)$  parçalı polinomu

$$M_1(x) = \begin{cases} 1 & -1/2 \leq x \leq 1/2 \quad \text{için} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.3.3.1)$$

tanımlı olsun.

Parçalı polinom yaklaşımında  $M_1(x)$  periyodik dalgalı bükülmeleri gösteriyorsa,  $M_k(x) = M_1(x) * M_1(x) * \dots * M_1(x)$ ,  $k$  tane faktörleri aynı olan  $M_1(x)$



### 1.3.4 Üstel Spline Fonksiyonu

Spline fonksiyonunun bir şekli B-Spline ile yakın ilişkisi olan üstel spline nin tanımı ve özellikleri şu şekildedir.

#### Tanım 1.3.4.1

$[a, b]$  aralığını  $\Delta: a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$  olacak şekilde  $I_0=[x_0, x_1)$ ,  $I_1=[x_1, x_2)$ ,  $I_2=[x_2, x_3)$ , ...,  $I_k=[x_{k-1}, x_k]$  alt aralıklarına bölünüm her bir  $[x_i, x_{i+1})$  alt aralığında  $Y=S(x)$  spline fonksiyonu  $S(x) \in C^{n-1}(-\infty, \infty)$  tanımlı,  $t \neq 0$  tamsayılar olduğunda  $f(x) = t^x$  interpolasyon değerleri  $\forall x$  için  $S(x+1)=t \cdot S(x)$  özelliğini sağlasın. Burada

$$S(x) = c_0 \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} t^j Q(x-j), \quad c_0 \text{ sabit olmak üzere} \quad (1.3.4.1) \text{ şeklindeki,}$$

$$\Phi(x, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} t^j Q_{n+1}(x-j) \quad (1.3.4.2)$$

gösterimine üstel spline denir.  $Q_{n+1}(x)$ , sabit bir faktöre kadar  $Y_i=S(x_i), i=0,1,\dots,k$  bir elemanı ve  $x_+ = \max\{x, 0\}$  için

$$Q(x) = Q_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \{x_+^n - \binom{n+1}{1} (x-1)_+^n + \dots + (-1)^{n+1} (x-n-1)_+^n\} \quad (1.3.4.3)$$

B-Spline fonksiyonudur. Eğer  $0 < x < n+1$  ise  $Q(x) > 0$ , diğer değerler için  $Q(x) = 0$  dır. Burada  $x = \frac{(n+1)}{2}$  noktasındaki simetriklik ve  $Q(x) = Q(n+1-x)$  şeklindeki eşdeğerlik en önemli özelliğidir (Shoenberg, 1971).

## İKİNCİ BÖLÜM

### PARÇALI KÜBİK SPLİNE POLİNOM YAKLAŞIMI

Spline fonksiyonundan sözedildiğinde parçalı polinomlar anlaşılmaktadır. Bu bölümde parçalı polinomlar ile splinenin ilişki ve farklı yönleri incelenerek parametrik spline fonksiyonu , parçalı kübik spline polinom yaklaşımı verilecektir.

#### 2.1 Parçalı Polinomlar İle Spline Arasındaki İlişki

$[a, b]$  aralığını  $\Delta : a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$  olacak şekilde  $I_0=[x_0, x_1)$ ,  $I_1=[x_1, x_2)$ ,  $I_2=[x_2, x_3)$ , ...,  $I_k=[x_{k-1}, x_k]$  alt aralıklarına bölünsün.

Parçalı polinomda  $f(x) = p_i(x)$ ,  $i=0,1,\dots,k$  ve

$$t_i \in [x_i, x_{i+1}) \text{ ve } T = \{ t_i \mid 0 \leq i \leq k \} \quad (2.1.1)$$

ara noktaları nümerik hesaplamalarda oldukça birbirine yakın alınır. Burada polinom katsayıları  $a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{in}$  olan  $n$ -dereceli  $p_i(x)$  parçalı polinomunun gösterimi

$$p_i(x) = a_{i0} + a_{i1}(x-t_i) + a_{i2}(x-t_i)^2 + \dots + a_{in}(x-t_i)^n \quad (2.1.2)$$

şekindedir .

$C^n(x)$ -deki parçalı polinomların her birinin ,  $n=0$  noktası dışındaki noktalarda  $n$ -inci mertebeden türevleri var ve süreklidir.

Spline fonksiyonlarda  $C^{n-1}(x)$  de  $(n-1)$ -inci mertebeden türevleri sürekli olan ve ara noktalarda  $(n-1)$  inci türevi ile çakışmış  $n$  dereceli parçalı polinomlardır.

Eğer  $n=2,3$  ve daha yüksek dereceli parçalı polinomu ise , spline türevleri ile birlikte ara noktalarda çakışır.  $C^{(n-1)/2}(x)$  dereceli parçalı polinomun  $t_i \in [x_{i-1}, x_i)$  ve  $t_i \in [x_i, x_{i+1})$  ara noktaları arasındaki uzaklık pozitif tamsayı değerleri alınırsa hesaplanması kolaydır. Her bir alt aralıkta iki ara nokta arasındaki uzaklık yakın değerler alınınca parçalı polinom türevleri ile ara noktalarda çakışır.

$C^r(x)$  deki parçalı polinomların gösterimi,

$$pp(x) = \sum_{j=0}^n a_j (x-t_i)^j + \sum_{L=0}^{n-r-1} \sum_{i=2}^k b_{iL} (x-t_i)_+^{n-L} \quad (2.1.3)$$

şekindedir.

$[a, b]$  aralığının her bir alt  $[x_i, x_{i+1})$  aralığındaki  $(x-t_i)_+^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$

dereceleri farklı parçalı polinom türevleri  $t_i \in [x_{i-1}, x_i)$  ve  $t_i \in [x_i, x_{i+1})$  ara noktalarındaki sıçramaları (atlamaları) gösterir.

Spline fonksiyonu parçalı polinomlarla gösterilmek istendiğinde, parçalı polinomun sıçrama(atlama) durumundaki ara noktalarında katsayılardan birisi yok edilir. Burada parçalı polinom kümesinde bir parçalı polinomun sahip olduğu sadece bir değer gereklidir. Bu kırık çizgide olduğu gibi kolayca görülür. Bir defada  $i$  inci aralığı bulmada kullanacağımız formül

$$a_{i0} + \left[ \frac{a_{0, i+1} - a_{0i}}{t_{i+1} - t_i} \right] (x - t_i) \quad (2.1.4)$$

$pp(x) = p_i(x)$  parçalı polinomunun değeridir. Böylece değerlerin bulunmasında  $(x - t_i)$  nin katsayısı hesaplanabilir.

Benzer gösterim yüksek dereceli spline içinde yapılabilir. En soldan başlayarak ilk  $[x_0, x_1)$  alt aralığında her bir parçalı polinom spline ile gösterilebilir. Burada bir  $p_1$  polinomunun  $a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}$  polinom katsayıları gereklidir. İkinci  $[x_1, x_2)$  alt aralığında  $p_2(x)$  in  $(n-1)$ -inci türevi  $x_1$  de çözülmüştür. Bu değer  $x_1$  de  $p_1(x)$  in eşitidir. Böylece parçalı polinomun katsayıları ayrı ayrı  $a_{ij}$ ,  $j=1, \dots, n$  için hesaplanabilir.  $p_2(x)$  in  $n$ -inci türevi de bir  $x_1$  olmalıdır.  $p_1(x)$  den  $p_2(x)$  e  $n$ -inci türevin ara noktadaki atlama (sıçraması)  $n!$   $b_2$  dir. Bu nedenle  $n$ -dereceli parçalı polinomlar  $p_i(x) = pp(x)$  dir. Bu  $p_i(x)$  in  $n$ -inci türevinde tam bir basamak [(step), sıfır dereceli spline] fonksiyonu ve  $n!$   $b_2$  ilk basamağının atlama büyüklüğüdür. Bu işlemi üçüncü, dördüncü, ...,  $n$  inci için tekrarlanabilir.

Böylece  $p_i(x)$  parçalı polinom gösterilmesini  $a_{ij}$ ,  $j=1, \dots, n$  katsayıları ile  $b_i$ ,  $i=1, \dots, k$  atlamaların (step) toplamı olarak alınabilir. Parçalı polinomların gösterilmesinde  $p_i(x)$ ,  $i=0, 1, \dots, k$  parçalı polinomları ve  $n$  de bir  $p_i(x)$  in derecesi olduğunda  $k(n+1)$  ve  $(n+k)$  katsayıları karşılaştırılabilir.

Buradan  $t_i \in [x_i, x_{i+1})$  ara noktadaki

$$(x - x_i)_+^j = \begin{cases} (x - x_i)^j & x \geq t_i \text{ için} \\ 0 & x < t_i \text{ için} \end{cases} \quad (2.1.5)$$

parçalı polinomunun türevleri ve integralleri kolayca hesaplanabilir. Burada  $(x - t_i)_+^j$  nin türevlerinin benzer başka bir gösterilmesini

$$\frac{d^j (x - t_i)_+^i}{d x^j} = i(i-1) \dots (i-j+1) (x - t_i)_+^{i-j}, \quad j \leq i \text{ için} \quad (2.1.6)$$

şeklinde verebiliriz.

Böylece  $(x-t_i)_+^i$  de  $i = n$ -inci türevi alınabilir basamak (step) fonksiyonudur. Bu  $t_i$  nin solunda sıfır,sağında  $n!$  dir.  $p_1(x)$  den  $p_2(x)$  e geçişi sağlayan tam bir fonksiyon gereklidir.Bu  $[x_1,x_2)$  alt aralığında  $x_2$  nin  $n$ -inci türevi  $n!$   $b_2$  atlaması ile  $p_1(x) + b_2(x-t_2)_+^n$  dir.

Böylece  $C^{n-1}(x)$ -deki spline parçalı polinomları teorik ve analitik çalışmalar için

$$pp(x)=\sum_{j=0}^n a_j (x-t_1)_+^j + \sum_{i=2}^k b_i (x-t_i)_+^n \quad (2.1.7)$$

şeklinde verilebilir (Schumaker,1981)(Rice,1983)(Burden and Faires,1985).

Yüksek dereceli spline  $\{Y=Y_0,Y_1,\dots,Y_k\}$  ordinatları ve

$\Delta: a=x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k = b$  parçalanmasıyla  $\forall x \in \mathfrak{R}$  için

$S(x) \in C^{k-1}(\mathfrak{R})$  spline fonksiyonu her bir  $[x_i, x_{i+1})$ ,  $i=0,1,\dots,k$  alt aralığı dışında

$x_{-1} = -\infty$ ,  $x_{k+1} = \infty$  olarak tanımlı parçalı polinomdur. A tek dereceli spline fonksiyonu  $m = 2k-1$  ve  $k-1$  için eğer her bir  $[x_i, x_{i+1})$ ,  $i=0,1,\dots,k$  alt aralığında tanımlı ise doğal spline adını alır.

A,nın  $m$ -dereceli spline fonksiyonu ile gösterimi  $\forall x \in \mathfrak{R}$  için

$$p(x)=a_{i0}+a_{i1}(x-t_i)+a_{i2}(x-t_i)^2+\dots+a_{im-1}(x-t_i)^{m-1} \quad (2.1.8)$$

$$\text{polinom olmak üzere } S(x) = p(x) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i (x-t_i)_+^m \quad (2.1.9)$$

olarak verilebilir.

Burada  $x_+^m$  parçalı polinomları  $[(x_+^m=x^m)$ ,  $x>0$  için ve  $(x_+^m=0)$ ,  $x \leq 0$  için] şeklinde tanımlıdır (Blum,1972) (Çağal,1989).

### Örnek 2.1.1

$\int (x^2+1) d[x]$ = integralinde  $[x]$ ,  $x$  den küçük ve  $x$  e eşit olan en büyük tam sayı ve

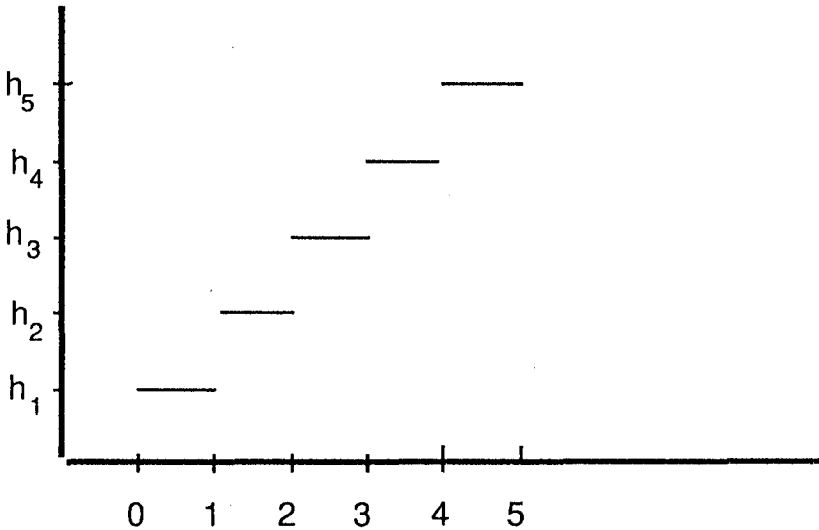
$f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $f(x)=[x]$  fonksiyonu basamak(step) fonksiyonudur.  $\alpha(x)$  fonksiyonu

$\{a=x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_k = b\}$  parçalanması üzerinde atlama yapan bir fonksiyon ise

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sum_{i=1}^k h_i f(x_i) \quad \text{dır. Burada } x_i, i=0,1,2,\dots,k \text{ ara noktalarındaki}$$

atlama  $h_i = \alpha(x_i^+) - \alpha(x_i^-)$  olarak tanımlıdır. Sıfır noktasındaki atlama

$$h_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \alpha(x) - \alpha(0) = 0 \quad \text{ve} \quad h_5 = \lim_{x \rightarrow 5} \alpha(x^+) = \alpha(5^+) - \alpha(5) = 5 - 4 = 1 \text{ olur.}$$



Şekil 2.1

Burada

$$\int_0^5 (x^2+1) d[x] = 1.0+2.1+5.1+10.1+17.1+26.1=60$$

$$0 \leq x < 1 \text{ için } [x] = 0$$

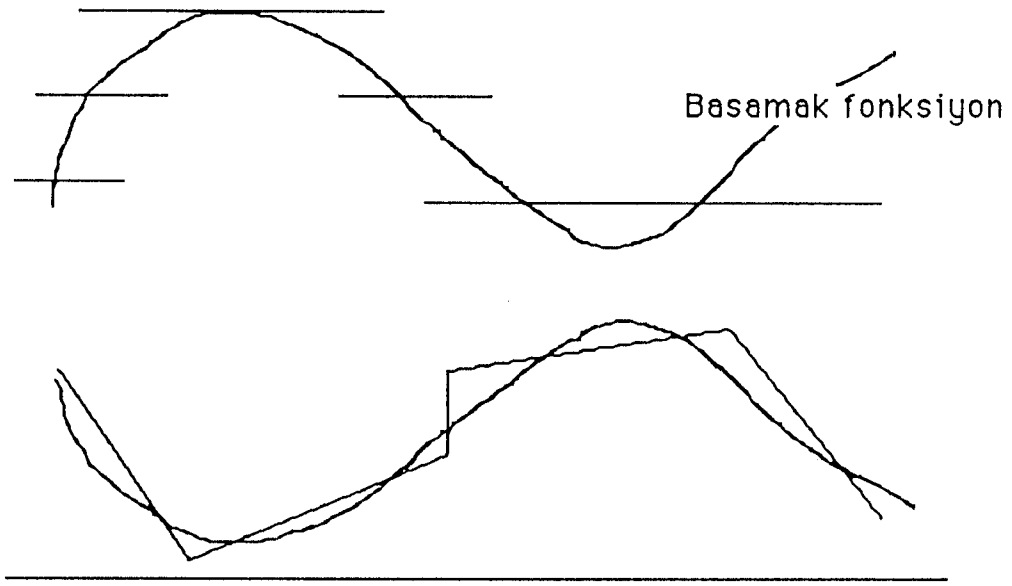
$$1 \leq x < 2 \text{ için } [x] = 1$$

$$2 \leq x < 3 \text{ için } [x] = 2$$

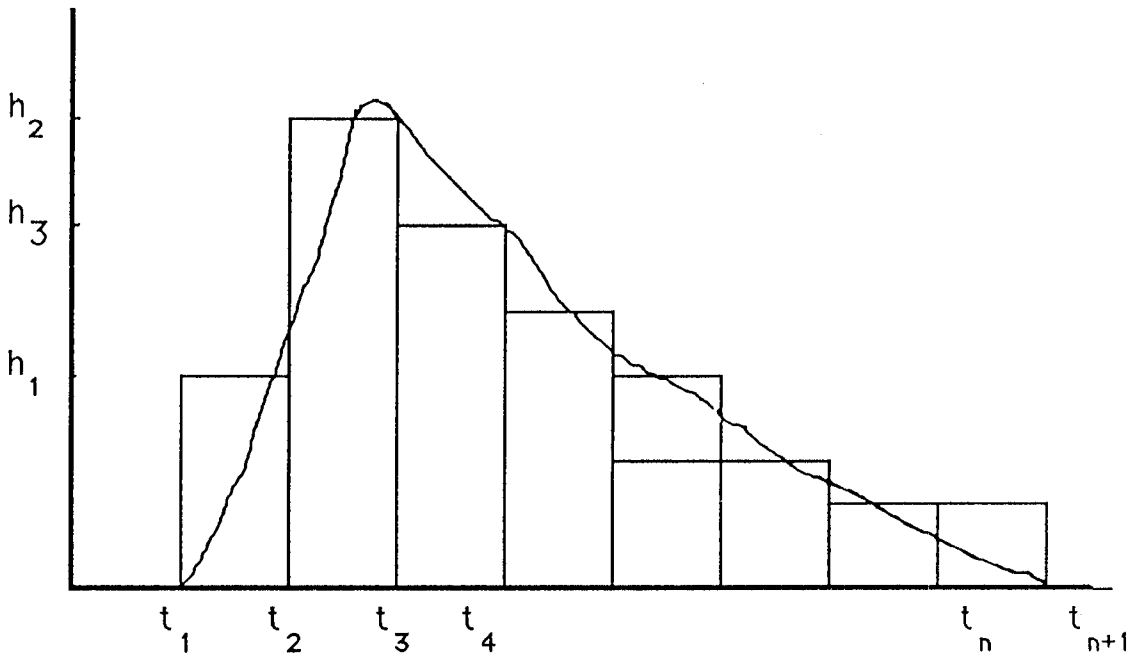
$$3 \leq x < 4 \text{ için } [x] = 3$$

$$4 \leq x < 5 \text{ için } [x] = 4$$

$$x = 5 \text{ için } [x] = 5 \text{ dir.}$$



Şekil 2.2 basamak fonksiyon ve kırık çizgi 0 ve 1 derece spline ile iki eğriye yaklaşılmıştır.



Şekil 2.3 Parabolik Spline

## 2.2 Parametrik Spline Fonksiyonu

Genel olarak tanımı verilen parametrik spline fonksiyonunun özel bir şekli parçalı kübik spline fonksiyonudur. Bu bölümde önce parametrik spline fonksiyonu daha sonraki bölümde parçalı kübik spline polinom fonksiyonu verilecektir.

### Tanım 2.2.1

$[a, b]$  kapalı aralığını  $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$  olacak şekilde,  $[x_0, x_1)$ ,  $[x_1, x_2)$ , ...,  $[x_{k-1}, x_k]$  alt aralıklara bölelim.  $Y=S(x)$  spline fonksiyonu  $C^2[a, b]$  tanımlı ve  $h=x_i - x_{i-1}$  olmak üzere bu fonksiyonda  $\{x_i\}$  değerleri için  $Y(x_i)$  yaklaşım değerleri olduğunda, spline fonksiyonu  $p > 0$  parametresi üzerinde bağımlıdır. Trigonometrik spline fonksiyonunda polinom birinci derecedendir. Bu fonksiyon  $[x_{i-1}, x_i)$  alt aralığında  $p=0$  için kübik spline fonksiyonuna dönüşür.

Eğer genel olarak  $S(x)$  parametrik spline fonksiyonu ise, bu

$$S''(x) + pS(x) = (S''(x_{i-1}) + pS(x_{i-1})) \left(\frac{x_i - x}{h}\right) + (S''(x_i) + pS(x_i)) \left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right) \quad (2.2.1)$$

şekilde gösterilir.

$[a, b]$  aralığının her bir  $[x_i, x_{i+1})$  alt aralığında tanımlı,  $Y=S(x)$ , spline fonksiyonu bütün uç noktalarında  $f(x_i) = S(x_i)$  eşittir. Her bir  $[x_{i-1}, x_i)$  alt aralığında  $p$  parametre ve  $W = h\sqrt{p}$  olmak üzere (2.2.1) diferansiyel denkleminin çözümünden,

$$S(x) = \frac{-h^2}{w^2 \sin w} \left[ S''(x_i) \cdot \sin w \left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right) + S''(x_{i-1}) \cdot \sin w \left(\frac{x_i - x}{h}\right) \right] + \frac{h^2}{w^2} \cdot \left[ \left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right) \cdot \left(S''(x_i) + \frac{w^2}{h^2} S(x_i)\right) + \left(\frac{x_i - x}{h}\right) \cdot \left(S''(x_{i-1}) + \frac{w^2}{h^2} S(x_{i-1})\right) \right] \quad (2.2.2)$$

elde edilir. Bulunan bu denkleme parametrik spline fonksiyonu denir. Burada  $S(x)$  fonksiyonu  $[x_{i-1}, x_i)$  alt aralığında integrasyon sabitlerinin çözümü yapılarak birlikte verilmiştir.

$S(x)$  fonksiyonunun  $[x_i, x_{i+1})$  alt aralığındaki (2.2.2) denkleminde  $i$  ve  $(i-1)$  yerine  $(i+1)$  değerini koyalım.  $S(x)$  fonksiyonunun ilk türevinin süreklilik özelliğini de kullanarak işlemleri tamamladıktan sonra

$$Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1} = h^2 (\alpha M_{i+1} + 2\beta M_i + \alpha M_{i-1}) \quad (2.2.3)$$

şeklinde yazılabilir.

Buradan,

$$S(x_i) = Y(x_i) = Y_i \text{ ve } S''(x_i) = M_i \quad (2.2.4)$$

$$\alpha = \frac{1}{w^2} \left( \frac{w}{\sin w} - 1 \right), \beta = \frac{1}{w^2} \left( 1 - \frac{w}{\sin w} \cos w \right) \quad (2.2.5)$$

$S'(x_i) = m_i$  olmak üzere spline ile ilgili bu formülleri

$$m_i = -h (\alpha M_{i+1} + \beta M_i) + \frac{Y_{i+1} - Y_i}{h}, \quad (2.2.6)$$

$$m_{i+1} = h (\alpha M_i + \beta M_{i+1}) + \frac{Y_{i+1} - Y_i}{h}, \quad (2.2.7)$$

$$m_{i+1} - m_i = (\beta + \alpha) h (M_{i+1} - M_i), \quad (2.2.8)$$

$$m_{i+1} - m_i = (\beta - \alpha) h (M_{i+1} - M_i) + \frac{2(Y_{i+1} - Y_i)}{h}, \quad (2.2.9)$$

$$\alpha m_{i+1} + 2\beta m_i + \alpha m_{i-1} = (\alpha + \beta) \frac{(Y_{i+1} - Y_{i-1})}{h}, \quad (2.2.10)$$

şeklinde verebiliriz. Parametrik spline fonksiyonu (2.2.2) nin  $[x_{i-1}, x_i]$  alt aralığında  $p \rightarrow 0$  için Taylor serisine açılımından,

$$S(x) = \frac{(x_i - x)^3}{6h} M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2}{6h} M_i + (y_{i-1} + \frac{h^2}{6} M_{i-1}) \left( \frac{x_i - x}{h} \right) + (y_i - \frac{h^2}{6} M_i) \left( \frac{x - x_{i-1}}{h} \right) \quad (2.2.11)$$

kübik spline fonksiyonu elde edilir. Buradan (2.2.3) (2.2.8) ve (2.2.9) da verilen formüllerden spline ile ilgili

$$\frac{Y_{i+1} - Y_i}{h} = \frac{1}{2} (m_{i+1} + m_i) \quad (2.2.12)$$

$$\frac{m_{i+1} - m_i}{h} = \frac{1}{2} (M_{i+1} + M_i) \quad (2.2.13)$$

$$Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1} = \frac{h^2}{4} (M_{i+1} + 2M_i + M_{i-1}) \quad (2.2.14) \text{ formülleri bulunur (Jain}$$

and Aziz, 1981).



### 2.3 Parçalı Kübik Spline Polinom Yaklaşımı

Spline fonksiyonun uygulamalarında en çok kullanılan şekli parçalı kübik spline polinomudur. Bu bölümde parçalı kübik spline polinom yaklaşımı ayrıntıları ile verilecektir.

#### Tanım 2.3.1

[ a, b ] kapalı aralığının  $\Delta : a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  olacak şekilde  $[x_0, x_1), [x_1, x_2), \dots, [x_{n-1}, x_n]$  alt aralıklarına bölündüğünü varsayalım. Bu alt aralıklardaki  $(x_0, Y_0), (x_1, Y_1), (x_2, Y_2), \dots, (x_n, Y_n)$  uç noktalarında  $Y_j = f(x_j)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  özelliğini de sağlayan [a,b] aralığında  $Y=f(x)$ , fonksiyonu tanımlı olsun. ( $Y=f(x)$  genel olarak verilere karşılık gelen fonksiyondur.) Her bir  $[x_j, x_{j+1})$  alt aralıklığında tanımlı birer  $s_j(x) \in C^2 [a, b]$  polinom fonksiyonu alalım; öyleki bu alt aralıkların uç noktalarında  $s_j(x_j) = f(x_j)$  olsun. her bir  $[x_j, x_{j+1})$  alt aralıklarının her birinde, birbirinden farklı kübik polinomların lineer birleşimi olan  $Y=S(x)$  kübik spline fonksiyonunun bu yaklaşımına parçalı KÜBİK SPLINE polinom yaklaşımıdır denir.

Her bir  $[x_j, x_{j+1})$  alt aralığındaki parçalı kübik spline polinom yaklaşımında  $S(x)$ , polinom derecesi en çok 3 olan spline fonksiyonudur (Blum, 1972) (Çağal, 1989).

$Y=S(x)$  spline fonksiyonu  $\Delta$  üzerinde kübik spline yaklaşımı olduğunda,  $S_\Delta(x)$  spline fonksiyonu kümesi  $i \in S_\Delta(x) \in S_p(x_n)$  şu üç özelliği gerçekleştirir.

a-)  $S_\Delta(x) \in C^2[a, b]$  aralığında tanımlı ve  $S_\Delta(x), S_\Delta'(x), S_\Delta''(x)$  türevleri süreklidir.

b-)  $S_\Delta(x_j) = f(x_j) = Y_j$ ,  $0 < j < n$  olmak üzere [a,b] aralığında  $f(x)$  in interpolasyonu  $S_\Delta(x)$  dir.

c-)  $S_\Delta(x)$  spline fonksiyonu, her bir  $[x_j, x_{j+1})$  alt aralığında  $0 < j < n-1$  için kübik polinomdur (Johnson and Riess, 1982).

Parçalı kübik spline polinomu ara noktalarda kübik polinom ile çakışır (Shea, 1984).

Kübik spline polinom yaklaşımı daima sayılabilir (sonsuz) çözüme sahiptir (Dahlquist and Björck, 1974).

Birinci ve ikinci türevlerin süreklilikleri ile spline kümesi süreklidir. İkinci veya daha yüksek türevlerin sürekli olmadığı durumda atlama olur.

Kabul edelimki  $M_j = S_\Delta''(x_j)$  ve  $m_j = S_\Delta'(x_j)$ ,  $j=0, 1, \dots, n$  için (2.3.1)

$$h_j = x_j - x_{j-1} \text{ ve } \lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \quad p_j = (1 - \lambda_j) \quad (2.3.2)$$

olsun (Mizumura,1985).

Bu takdirde  $Y=S(x)$  spline fonksiyonunun her bir  $[x_j, x_{j+1})$  aralığında ikinci türevin doğrusal olmasından

$$S''(x) = M_j \frac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_{j+1}} \quad (2.3.3)$$

yazılır. Burada  $S''(x)$  in ardarda integrasyonu ile

$$S'(x) = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h_{j+1}} + C_1 \quad (2.3.4)$$

$$S(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_{j+1}} + C_1 x + C_2 \quad (2.3.5)$$

fonksiyonu elde edilir. Burada  $C_1$  ve  $C_2$  integrasyon sabitidir.  $(x_j, y_j)$  ve  $(x_{j+1}, y_{j+1})$  noktalarından geçen eğrinin

$$Y_j = S(x_j) \text{ ve } Y_{j+1} = S(x_{j+1}) \quad (2.3.6)$$

şartını sağlaması varsayımıyla (2.3.5) de (2.3.6) ayrı ayrı yerine konulursa  $C_1$  ve  $C_2$  nin çözümü bulunur.

$$\text{Buradan } S'_\Delta(x) = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h_{j+1}} + \frac{Y_{j+1} - Y_j}{h_{j+1}} - \frac{M_{j+1} - M_j}{6} h_{j+1} \quad (2.3.7)$$

$$S_\Delta(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_{j+1}} + \frac{(Y_j - M_j h_{j+1}^2)(x_{j+1} - x)}{6h_{j+1}} + Y_{j+1} \left( \frac{-M_{j+1} h_{j+1}^2}{6} \right) \left( \frac{x - x_j}{h_{j+1}} \right) \quad (2.3.8)$$

iki denklem elde edilir (Pennington,1969) (Blum,1972) (Çağal,1989).

$M_j$  lerin bulunması için  $[x_{j-1}, x_j]$  ve  $[x_j, x_{j+1})$  ardaşık aralıklarında ortak düğüm noktalarındaki türevleri

$$S_{\Delta}'(x_{j-1}^-) = \frac{h_j}{6} (M_{j-1}) + \frac{M_j h_j}{3} + \frac{y_j - y_{j-1}}{h} \quad (2.3.9)$$

$$S_{\Delta}'(x_{j-1}^+) = -\frac{h_{j+1}}{3} M_j - \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} \quad (2.3.10)$$

$$S_{\Delta}'(x_{j-1}^-) = S_{\Delta}'(x_{j-1}^+) \text{ eşittir.}$$

Bu eşitlik yeniden düzenlenirse

$$\frac{h_j}{6} (M_{j-1}) + \frac{h_j + h_{j+1}}{3} M_j + \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \quad (2.3.11)$$

$$p_j M_{j-1} - 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = \frac{6 y_j}{h_j(h_j + h_{j+1})} - \frac{6 y_j}{h_j h_{j+1}} + \frac{6 y_{j+1}}{h_{j+1}(h_j + h_{j+1})} \quad (2.3.12)$$

bulunur. Burada  $N+1$  tane bilinmeyen olan  $M_j, j=0,1, \dots, N$  ye karşılık  $N-1$  denklemler sistemine vardır. Bu denklemler sisteminin  $N+1$  noktadaki bilinmeyenlerin  $N-1$  i için çözümü yapılabilir.

Kabul edelim ki matrisler

$$\Lambda \equiv \begin{bmatrix}
 2 & \lambda_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
 1-\lambda_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
 0 & 1-\lambda_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
 0 & 0 & 1-\lambda_3 & 2 & \lambda_3 & 0 & \cdot & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1-\lambda_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\
 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \lambda_N & 2
 \end{bmatrix} \quad (2.313)$$

$$\theta \equiv \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{6}{h_1(h_1+h_2)} & \frac{-6}{h_1 h_2} & \frac{6}{h_2(h_1+h_2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{6}{h_{n-1}(h_{n-1}+h_n)} & \frac{-6}{h_{n-1} h_n} & \frac{6}{h_{n-1}(h_{n-1}+h_n)} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{-6}{h_{n-1} h_n} & \frac{6}{h_{n-1}(h_{n-1}+h_n)} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{h(h+h)}{N N-1 N} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

$$M \equiv \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{N-1} \\ M_N \end{bmatrix} \quad (2.3.15)$$

$$Y \equiv \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{N-1} \\ Y_N \end{bmatrix} \quad (2.3.16)$$

olsun.

Burada  $[a, b]$  aralığının son uç noktalarında  $\lambda_0$  ve  $\lambda_N$  tanımlı ve

$$M_0 + \frac{\lambda_0}{2} M_1 = 0 \quad , \quad M_N + \frac{\lambda_N}{2} M_{N-1} = 0 \quad (2.3.17) \text{ olur.}$$

Eğer  $\lambda_0 = \lambda_N = 0$  ise bu doğal kübik spline olarak bilinir (Bever, et al., 1982).

Bununla birlikte ,  $2M_0 + \lambda_0 M_1 = Y_0$  ve  $\lambda_N M_{N-1} + 2M_N = Y_N$  (2.3.18)

ve  $|P_j| + |\lambda_j| = 1 < 2$ ,  $1 < i < k-1$  için  $|\lambda_0| < 2$  ve  $|\lambda_N| < 2$  olarak belirli ise , tekil olmayan

$\Lambda^{-1}$  var olması için  $\Lambda$  matrisinin kare olması yeterlidir.  $\Lambda$  Matrisi üçlü köşegen matristir ve köşegen bölgesinde tekil değildir (Jonhson and Riess, 1982).

Bu son uç noktalarda (2.3.17) deki iki denklemini ve  $(N-1)$  bilinmeyenli olan denklem sistemini

$$\Lambda M = \theta y \quad (2.3.19)$$

$$M = \Lambda^{-1} \theta Y \quad (2.3.20)$$

matrisleri ile gösterelim. Matrisin  $\Lambda^{-1}$  tersinin olmasından  $Y \neq 0$  için yeniden

düzenlenirse,  $Y_0 \neq 0$  ve  $Y_N \neq 0$  için  $\Lambda$  nin çözümü daima Gauss eliminasyon yada iterasyon metodu ile yapılabilir. Kübik spline interpolasyon yaklaşımını (2.3.11) nin çözümü ile hesaplayabiliriz. Bununla birlikte kübik spline interpolasyon (2.3.17) deki son uç noktalar ve  $Y$  ordinatları kümesiyle tek çözüm değildir. Başka kısıtlarla son uç noktalarda çözümü yapılabilir. Doğal spline olduğunda , spline interpolasyonda ısrar ederseniz  $Y$  nin tek çözümü olduğundan  $S''(x_0) = M_0 = 0$  ve  $S''(x_N) = M_N = 0$  dir.

Kalan bilinmeyenler için  $M_1, \dots, M_{N-1}$  (2.3.12) üçlü köşegen lineer denklem sistemi ile çözülür (Blum, 1972). Bu denklem sistemi parçalı denklemler şeklinde ve her denklemde sadece üç bilinmeyen vardır (Pennington, 1969).

Parçalı kübik spline polinom yaklaşımının uygulamasında

$(x_j, Y_j) = Y(x_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  interpolasyon noktalarıdır. Bir veya iki son uç nokta seçimi ile  $S(x)$  spline fonksiyonunun türev değerleri bulunabilir.

Spline fonksiyonu, her bir  $[x_j, x_{j+1})$  alt aralıkta üçüncü derece polinom katsayılarıyla birlikte şu şekilde verilebilir. Burada,

$$S(x) = Y_1 + b_1(x-x_1) + C_1(x-x_1)^2 \quad , \quad x < x_1 \text{ için}$$

$$S(x) = Y_j + b_j(x-x_j) + C_j(x-x_j)^2 + d_j(x-x_j)^3 \quad , \quad x_j \leq x < x_{j+1} \text{ için} \quad (2.3.21)$$

$$S(x) = Y_N + b_N(x-x_N) + C_N(x-x_N)^2 \quad x \geq x_N \text{ için}$$

türev değerleri belirlenmemiş ise  $C_1 = 0$ ,  $C_N = 0$  dir.

Lineer denklem sisteminin çözümünden spline fonksiyonun  $C_j$  katsayıları bulunur. Lineer denklem sisteminin katsayı matrisi simetrik ve köşegendir.

Bununla birlikte

$$2(x_2 - x_1) C_1 + (x_2 - x_1) C_2 = 3 \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - y'_1 \right)$$

veya  $Y'(x_1) = Y'_1$  türevi belirli değil ise  $C_1 = 0$  dır.

Burada

$$(x_j - x_{j-1})C_{j-1} + 2(x_{j+1} - x_{j-1})C_j + (x_{j+1} - x_j)C_{j+1} \\ = 3 \left( \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right), j = 2, 3, \dots, N-1 \text{ için} \quad (2.3.22)$$

$$(x_N - x_{N-1})C_{N-1} + 2(x_N - x_{N-1})C_N = 3 \left( Y'_N - \frac{Y_N - Y_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} \right) \quad (2.3.23) \text{ veya}$$

$Y'_N(x_N) = Y'_N$  belirlenmemiş ise  $C_N = 0$  dır. Kalan  $b_j$  ve  $d_j$  bilinmeyen katsayılar

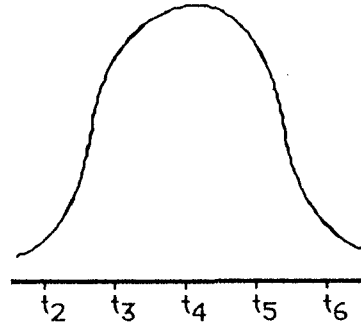
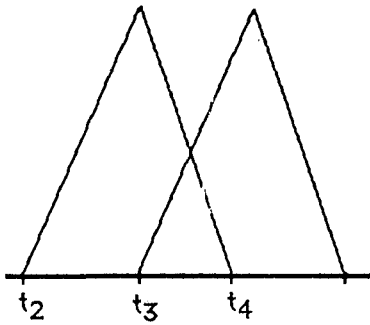
$$\begin{cases} b_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - (x_{j+1} - x_j) \frac{2C_j + C_{j+1}}{3} \\ d_j = \frac{C_{j+1} - C_j}{3(x_{j+1} - x_j)} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, (N-1) \text{ için} \quad (2.3.24)$$

$$\text{ve } b_N = \frac{Y_N - Y_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} + (x_N - x_{N-1}) \frac{2C_N + C_{N-1}}{3}, d_N = 0$$

olarak elde edilir (Greville, 1967).

Parçalı kübik spline polinom yaklaşımı bir bütündür. Spline fonksiyonu her bir interpolasyon noktasında ve onun her değeri üzerinde her yerde bağımlıdır.

Lineer spline ve kübik spline parçalı polinomların ilgi çeken sıralı ikilidir.  $C^1$  -deki parçalı kübik spline polinom yaklaşımı uygulamada en çok kullanılan bir eğridir (Rice, 1983).



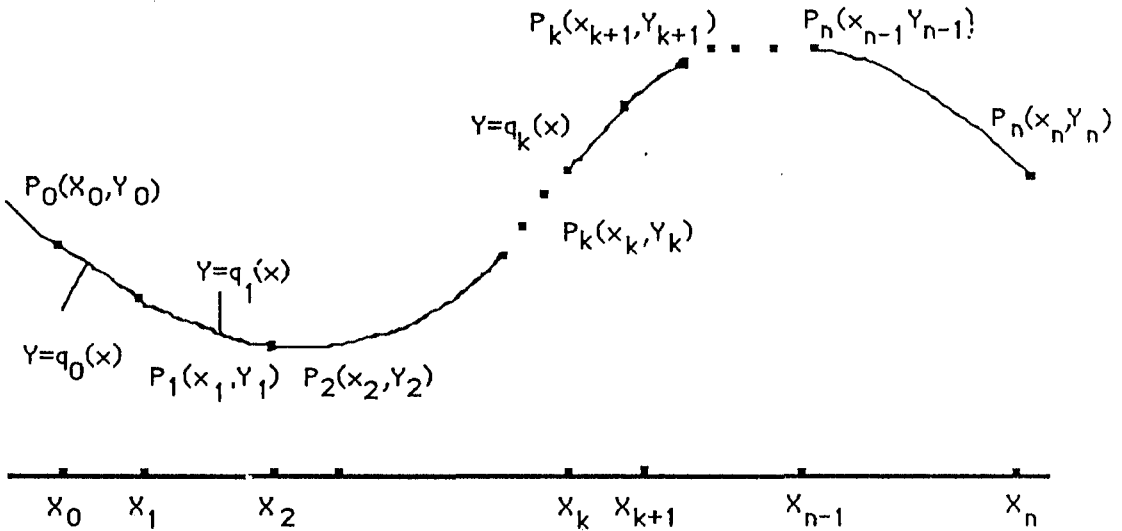
Şekil 2.4 Lineer Spline Şekil 2.5 kübik Spline

İnterpolasyon değerleri  $f(x_j) = P_j(x_j) = f_j$  için

$$\int_{x_0}^{x_N} [f''(x)]^2 dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [P_j''(x)]^2 dx = \text{minimumdur (2.3.25).}$$

İkinci türevin karesinin integrali her hangi bir yaklaşımda eğriliğin esasıdır. Bu özellik minimum norm özelliğidir. Her bir  $[x_j, x_{j+1}]$  alt aralığın uç noktalarında tanımlı  $f(x)$  in minimum norm özelliği parçalı polinomların bir uç noktadan diğer bir uç noktaya düzgün geçtiği, ya da spline fonksiyonunun düzgünleştiği noktalar (Bever, et al., 1982) (Eckmann, 1972) (Rice, 1983).

$P_j(x_j, y_j)$ ,  $y_j = f(x_j)$   $j=0,1,\dots,n$  için şekil 2.6 da  $P_{0,n}(x)$  polinomunun grafiği üzerinde  $q_0(x), \dots, q_{n-1}(x)$  kübikleri varsa  $[x_0, x_n]$  aralığında  $Y_j = S(x_j)$  parçalı kübik spline polinomudur. Spline fonksiyonu  $Y_j = S(x_j)$   $j=0,\dots,n-1$  için sürekli dönen tangenta sahiptir.



Şekil 2.6  $p_0, p_1, \dots, p_n$  Parçalı kübik spline polinom yaklaşımı

Her bir  $S(x) = q_j(x)$   $j=0,1,\dots,n-1$  için

$$q_j(x_j) = y_j \quad \text{ve} \quad q_j(x_{j+1}) = y_{j+1} \quad j=0,1,\dots,n-1 \text{ için}$$

$$q'_j(x_j) = y'_j \quad \text{ve} \quad q'_j(x_{j+1}) = y'_{j+1} \quad j=1,2,\dots,n-1 \text{ için} \quad (2.3.26)$$

$$q''_{j-1}(x_j) = y''_j \quad \text{ve} \quad q''_j(x_j) = y''_j \quad j=1,2,\dots,n-1 \text{ için}$$

bu özellikleri sağlıyorsa  $p_0, p_1, \dots, p_n$  noktalarında parçalı kübik spline polinom yaklaşımıdır (Maron, 1982).

Her bir  $[x_j, x_{j+1}]$  alt aralığında  $q_0(x), q_1(x), \dots, q_n(x)$  kübiklerinin

$$\int_a^b [q''(x)]^2 dx = 0 \quad \text{eğriliği sıfırdır (Jonhson and Riess, 1982).}$$



## ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

### ÜRETİM FONKSİYONU

Bu bölümde üretim fonksiyonunun tanımı ve önemi verilecek, Cobb-Douglas ve sabit ikame esnekli CES üretim fonksiyonu incelenerek, CES üretim fonksiyonunun parçalı kübik spline polinom yaklaşımı ile nümerik çözümü verilecektir.

#### 3.1 Üretim Fonksiyonunun Tanımı ve Önemi

Üretim fonksiyonu , üretim faktörlerinden üretime katılan miktarlar ile, bu üretim faktörleri yardımıyla elde edilen üretim miktarları arasındaki fonksiyonel ilişkinin matematiksel ifadesidir. Bir firmanın üretim miktarını  $Q$ , üretim faktörlerini  $K$  sermaye,  $L$  emek,  $N$  tabii kaynaklar olarak ifade edilirse

$Q=f(K,L,N)$  (3.1.1) şeklindeki gösterim üretim fonksiyonunun genel gösterimidir. Bu şekilde gösterilen üretim fonksiyonu, üretim faktörlerinden üretime katılan miktarlar ile üretim miktarlarının maliyet ve fiyatı arasındaki ilişkiyi fiziki yönü ile açıklar. Bununla birlikte toplam maliyet fonksiyonu ile üretim fonksiyonunun yakın ilişkisi vardır.

Üretim fonksiyonunda üretilen mal veya hizmet miktarını  $Q$ , bu mal veya hizmeti elde etmek için üretim faktörlerinin herbirinin üretime katılan (fiziki girdileri) miktarları  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ile gösterirsek bir fonksiyon olarak üretim fonksiyonunu,

$Q=f_j(a_1, a_2, \dots, a_n)$  (3.1.2) şeklinde ifade edebiliriz. Burada  $f_j$ ,  $j=1,2,\dots,m$  üretim faktörlerinden üretime katılan miktarlar ile üretilen mal ve hizmet miktarı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi ifade eder (Üstünel,1975) (Uluatam,1980) (Kılıçbay,1975).

Kantitatif bir model kurmak için iktisat teorisini matematik formlara sokarak , matematik denklemleri bulmak, bu denklemleri sistemli ve tutarlı olarak bir araya getirmek gerekir. Bu denklemlerden üretim fonksiyonu, üretim sürecini ve değişkenler arasındaki bağlantıyı teknik yönü ile inceleyen bir denklemdir. Kantitatif iktisat teorisinde üretim fonksiyonu kavramı önemli bir yer tutar. Öte yandan tekniksel denklemler kısa dönem içinde değiştirilemeyecek nitelik taşırlar.Üretim faktörlerinin üretime katılma payları olan üretim tekniği sabittir.Bunlara teknik katsayılar da denir.Bu fonksiyonda üretim, genellikle sermaye ve işgücüne bağlanır (Kılıçbay,1970) (Bulutay,1972).

### 3.2 COBB-DOUGLAS Üretim Fonksiyonu

Genel olarak (3.1.2) deki üretim fonksiyonu daha özel bir şekli ile gösterilmek istenirse bu ,

$$Y=f (K,L,E,N) \quad (3.2.1) \quad \text{şeklini alır.}$$

Bu denklem genel üretim fonksiyonunun özel bir şeklidir.

Denklemden Y üretim miktarı, K sermaye, L emek, E enerji, N tabii kaynakları gösterir. Bu denklem belli bir üretimi gerçekleştiren firma hakkında bilgi verir (Kılıçbay,1968).

Üretim faktörü olarak K,L,E,N Cobb-Douglas üretim fonksiyonu çerçevesi içerisine dahil edildiğinde Cobb-Douglas üretim fonksiyonunu

$$Y=A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2} \cdot E^{\alpha_3} \cdot N^{\alpha_4} \quad (3.2.2) \quad \text{bu şekilde ifade edebiliriz.}$$

A: Sabit bir terim , eş ürün eğrisinin yerini belirler.

$\alpha_1$ : Üretimin sermayeye göre esnekliği

$\alpha_2$ : Üretimin emeğe göre esnekliği

$\alpha_3$ : Üretimin enerjiye göre esnekliği

$\alpha_4$  Üretimin tabii kaynaklara göre esnekliğidir (Kılıçbay,1965) (Jones,et al.,1986).

Genel olarak  $Y= A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}$  şeklinde yazılabilen ve üretim fonksiyonu çerçevesi içinde , üretim faktörlerinin miktar ve birleşimi ile üretim hacmi arasındaki bağlantıyı ilk araştıran matematikçi C.W.Cobb ve Ekonomist P.H.Douglas tarafından (1928) de önerilmiştir. Parametre tahmini yapılabilmesi için hata terimini içeren biçimiyle Cobb-Douglas üretim fonksiyonu

e: Tabii logaritmanın tabanı olan sabit

u: Hata terimi

i: i İşletmeyi gösteren indis olmak üzere

$$Y_i=A \cdot K_i^{\alpha_1} \cdot L_i^{\alpha_2} \cdot e^{u_i} \quad (3.2.3) \quad \text{şeklindedir .}$$

Cobb-Douglas üretim fonksiyonu aşağıdaki varsayımları kabul etmektedir.

a-) Üretim faktörleri sonsuz bölünebilir varsayıldığında üretim faktör değişkenleri süreklidir. Üretim fonksiyonunun üretim faktörlerine göre kısmi türevi alınabilir.

b-) Üretim süreci değişimi ve eş ürün eğrisi sürekli ve türevi alınabilir özelliindedir.

c-) Emek , sermaye arasında ikame esnekliği sabit ve  $\sigma=1$  dir.

d-) Ölçek esnekliği,  $\alpha_1+\alpha_2=1$  ve fonksiyonun homogenlik derecesidir.

e-) Faktör piyasasında tam rekabet koşulları geçerlidir.

Bu varsayımın tümünün veya en azından büyük bir kısmının geçerli olduğu bir sektör ve ekonomi düşünülemez. Bu yüzden fonksiyon sonuçları değerlendirilirken ekonominin diğer kuralları ve teorileri ile karşılaştırmak gereklidir. Bu yapılmadığında veya eksik yapıldığında gerçek dışı sonuçlara ulaşılması mümkündür (Atalay,1983) .

### 3.3 Sabit İkame Esnekli (CES) Üretim Fonksiyonu

CES Üretim fonksiyonu, büyümesi sabit oranlı olup, belirli bir fonksiyonel ilişki göstermeyen endüstri verilerinin sayısal hesaplamalarındaki hesaplanamayan hatalarda, Cobb-Douglas üretim fonksiyonundan daha iyi sonuç verir (Kontorovich,1986).

Neoklasik iktisat üretim faktörleri arasındaki ikameye ağırlık verir.Üretim faktörleri arasındaki ikame esneklik parametresi olan ( $\sigma$ ) ile kolayca ölçülebilir. Cobb-Douglas üretim fonksiyonunda ( $\sigma$ ) nın 1 e eşit olması kısıtlayıcısını getirir. Sabit ikame esnekli CES üretim fonksiyonunda  $\sigma$  nın değerinin sabit olması kısıtlayıcısını getirmektedir. Söz konusu üretim fonksiyonunda  $\sigma=1$  olması zorunluluğu yoktur. İkame esnekliğinin değeri üretim tekniği ile belirlenir ve dolayısı ile üretim tekniğindeki değişme ile birlikte değişebilir (Wallis,1984).

Sabit ikame esnekliği CES üretim fonksiyonunun uygulamadaki genel olarak tahminini gösteren formül

$$Y=A \cdot \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^{-p} \right]^{-\frac{\lambda}{p}} \quad (3.3.1)$$

şeklindedir.

Burada A: Etkinlik Parametresi

$x_i$ : i inci girdinin ( $i=1,2,\dots,n$ ) , değeri

p: İkame esnekliği parametresi

$\lambda$ : Homojenlik derecesi

$\sigma: (1+p)^{-1}$  ikame esnekliğidir (Disney and Elbashir,1984).

K j .Arrow, H.B.Chenery, B.S.Minhas, R.M.Solow tarafından 1961 li yıllarda verilerin bu modele uyduğu ilişkisi olan

$$V/L=a \cdot w^b \quad (3.3.2) \text{ formülünden}$$

hareket ederek CES üretim fonksiyonu geliştirilmiştir. ACMS, ikame esnekliğine ulaşmak için bu fonksiyonun logaritmik ifadesi kullanılır (Demirci ve Baray,1973).

Bu denklemde  $a$  ve  $b$  parametre,  $e$ : tabii logaritmanın tabanı olan sabittir.

$Y=F(K,L)$  üretim fonksiyonunun bağımsız değişkenleri  $\lambda$  gibi bir sayı ile çarpıldığında bağımlı değişken  $\lambda^n$  ile çarpılmış gibi değişiyorsa yani

$$Y=f(\lambda K,\lambda L)=\lambda^n f(K,L) \quad (3.3.4)$$

bu fonksiyona  $n$  inci dereceden homojendir denir.CES üretim fonksiyonu birinci dereceden homojen bir fonksiyondur (Türkey,1986). Burada

$$V/L=F(K/L,1) \quad (3.3.5) \quad \text{şeklinde yazalım}$$

$$Y=V/L, X=K/L, \quad \frac{\partial x}{\partial L} = -\frac{K}{L^2} = -\frac{X}{L} \quad (3.3.6)$$

$$w = \frac{\partial V}{\partial L} = Y + L \frac{\partial Y}{\partial L}, \quad w = Y + \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial L} \quad (3.3.7)$$

$$w = Y - X \frac{dy}{dx} \quad (3.3.8) \quad \text{değeri (3.3.3) de yerine konunca}$$

$$\log Y = \log a + b \log \left[ y - x \frac{dy}{dx} \right] \quad (3.3.9)$$

$$Y = a \left[ y - x \frac{dy}{dx} \right]^b \quad (3.3.10) \quad \text{da } dy/dx \text{ çözelim.}$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \frac{1}{b} \cdot a^{-\frac{1}{b}} \cdot \frac{1}{x} + \frac{y}{x}, \quad \alpha = a^{-\frac{1}{b}}, \quad p = \frac{1-b}{b} \quad (3.3.11) \quad \text{yazılınca}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \alpha \frac{y^{p+1}}{x} \quad (3.3.12) \quad \text{elde edilen bu diferensiyel denklem } y = z \frac{1}{p}$$

dönüşümü ile bir lineer diferensiyel denklem haline getirilebilir.

$$\text{Buradan } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{p} z^{-\frac{1+p}{p}} \cdot \frac{dz}{dx} \quad (3.3.13)$$

(3.3.12) ve (3.3.13) denklemlerinden sağ taraflar birbirine eşit yazılır

$$\text{ve } Y = z \frac{1}{p} \text{ konursa } -\frac{1}{p} z^{-\frac{1+p}{p}} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{z^{-\frac{1}{p}}}{x} - \alpha \frac{z^{-\frac{1+p}{p}}}{x} \quad (3.3.14)$$

lineer diferensiyel denklemi elde edilir.

Bu lineer diferensiyel denklemin çözümü için,

$$\frac{dz}{dx} = -Pz + Q, \quad P = \frac{p}{x}, \quad Q = \frac{\alpha_1 p}{x} \quad (3.3.16) \quad \text{değerleri alınırsa,}$$

$$z = e^{-\int P(x)dx} \cdot \int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)dx + \alpha_2 e^{-\int P(x)dx} \quad (3.3.17)$$

$$\int P(x)dx = \int \frac{p}{x} dx = p \log x \quad (3.3.18) \quad \text{in değeri (3.3.17)de yerine konunca}$$

$$z=e^{-p \log x} \int e^{p \log x} \frac{\alpha_1 p}{x} dx + \alpha_2 e^{-p \log x} \quad (3.3.19) \text{ den}$$

$z = (\alpha_1 + \alpha_2 x^{-p})$  (3.3.20.) elde edilen denklemde  $z = y^{-p}$  konulursa (3.3.21)

$$y = [\alpha_1 + \alpha_2 x^{-p}]^{-\frac{1}{p}} \quad (3.3.22) \text{ bulunur.}$$

Burada  $Y = V/L$ ,  $x = K/L$  değişkenleri konulursa,

$$\frac{V}{L} = [\alpha_1 + \alpha_2 (K/L)^{-p}]^{-\frac{1}{p}} \quad (3.3.23) \text{ ve } V = [\alpha_1 \cdot L^{-p} + \alpha_2 K^{-p}]^{-\frac{1}{p}} \quad (3.3.24)$$

elde edilir. Bu denklemde,  $\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{A^p}$ ,  $A^p = (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}$  değerlerini yerine

koyalım. Buradan

$$V = \left[ \frac{\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} L^{-p} + \alpha_1 K^{-p}}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}} \right]^{-\frac{1}{p}} \quad (3.3.25)$$

$$V = \frac{[\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} L^{-p} + \alpha_1 K^{-p}]^{-\frac{1}{p}}}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{\frac{1}{p}}} \quad (3.3.26)$$

Bu denklemde  $A = (\alpha_1 + \alpha_2)^{-\frac{1}{p}}$  den  $A^{-1} = (\alpha_1 + \alpha_2)^{\frac{1}{p}}$  değeri (3.3.26) yerine konulursa

$$V = A [\alpha_1 K^{-p} + \alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \cdot L^{-p}]^{-\frac{1}{p}} \quad (3.3.27) \text{ bulunur.}$$

Buradan  $\alpha_1 = A^{-p} + \alpha_2$  ve  $A^p = (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}$  ve  $\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{A^p}$

değerleri yerine konulursa, işlemleri tamamladıktan sonra,

$$V=A[\alpha_1 K^{-p} + (1 + \alpha_1) L^{-p}]^{-\frac{1}{p}} \quad (3.3.28)$$

CES üretim fonksiyonunun birinci şekli bulunur (Demirci ve Baray,1973).

Buradan (3.3.27) deki denklemde

$$\alpha_1 = A^{-p} - \alpha_2 \text{ ve } \alpha_2 = \frac{\alpha_1}{A^p}$$

değerleri konulursa, işlemleri tamamladıktan sonra

$$V= A [\alpha_1 K^{-p} + (1-\alpha_1) L^{-p}]^{-\frac{1}{p}} \quad (3.3.29)$$

CES üretim fonksiyonunun ikinci şekli bulunur ([Avralıoğlu,1973]).

Önceki kesimde verdiğimiz (3.2.3) deki Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun CES üretim fonksiyonu,

$$V= A [\alpha_1 K_i^{-p} + (1-\alpha_1) L_i^{-p}]^{-\frac{1}{p}} \cdot e^{u_i} \quad (3.3.30)$$

şeklindedir (Theil,1978).

### 3.4 CES Üretim Fonksiyonunun Parçalı Kübik Spline Polinom Yaklaşımı ile Nümerik Çözümü

Bazı üretim fonksiyonları logaritma almak suretiyle doğrusallaştırılamaz. Bu tip üretim fonksiyonlarından biriside CES üretim fonksiyonudur. CES üretim fonksiyonunun logaritma yardımı ile bu fonksiyonun parametreleri cinsinden doğrusallaştırılması yapılamadığından fonksiyonun parametreleri kolaylıkla tahmin edilemez.

Burada CES üretim fonksiyonunun,

$$V=A [\alpha K^{-p}+(1-\alpha) L^{-p}]^{-\frac{1}{p}} \quad (3.4.1)$$

istatistik olmayan yaklaşımla, ikame esnekliğini hesaplamaksızın, parçalı kübik spline polinomu ile nümerik çözümünü vereceğiz. CES Üretim fonksiyonunun parçalı kübik spline polinom yaklaşımıyla nümerik çözümü, bu fonksiyonun değerine en yakın geçen eğriyi gösterir.

[a,b] aralığının  $x \in [x_j, x_{j+1}]$  her bir alt aralığında  $j = 1, 2, \dots, N$  için parçalı kübik spline polinomunu  $p_j$ , parçalı polinomları ile  $S_{\Delta}(x) = p_j$  şeklinde gösterelim. Parçalı kübik spline polinomun açılımı ve  $x_+$  gösterimi,

$$x_+ = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & \text{diğerleri} \end{cases} ; x_+^r = \begin{cases} x^r & x > 0 \\ 0 & \text{diğerleri} \end{cases}$$

$$S_{\Delta}(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \beta_j (x - x_j)_+^3 + \beta_N + \beta_{N+1} x + \beta_{N+2} x^2 + \beta_{N+3} x^3 \quad (3.4.2)$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklem [a,b] aralığının son uç noktalarındaki (2.3.17) kısıtlayıcıları ile (N+3) bilinmeyen parametreye sahiptir. Burada (2.3.12) deki (N+1) tane bilinmeyen olan lineer denklem sisteminin (N+1) tanesinin ortak çözümü yapılabilir (Bever, et al., 1982).

Belli bir üretim düzeyinde, kullanılan üretim faktörlerinden birinin miktarı, bir birim artırıldığında ürün miktarının aynı kalabilmesi için, diğer üretim faktöründen yapılması gereken azalma miktarına marjinal teknik ikame oranı denir. Marjinal teknik ikame oranında girdilerden biri artarken diğeri azalacağından

$$p = -\frac{1-\sigma}{\sigma} \text{ işareti eksidir.}$$

Marjinal teknik ikame oranı ikame esnekliğinin hesaplanmasına olanak sağlar. İkame esnekliği,

$$G = \frac{dk}{k} / \frac{ds}{s} = \frac{dk}{ds} \cdot \frac{s}{k} \quad (3.4.3) \text{ dir. Burada } k = \frac{K}{L} \text{ ve}$$

$s =$  Marjinal teknik ikame oranıdır.

Buradan marjinal teknik ikame oranı ile ikame esnekliği arasındaki ilişkiyi ,

$$\text{ikame esnekliği} = \frac{\text{Girdilerin miktarları arasındaki nisbi değişme}}{\text{Marjinal teknik ikame oranındaki değişme}} \quad (3.4.4)$$

formülü ile verebiliriz. Bu (3.4.1) deki CES üretim fonksiyonunda

$A = \frac{Y}{A}$ ,  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $K = p_1$ ; bir birim ürün elde etmek için kullanılan enerji maliyeti (TL/KG)

$L = p_2$ ; Bir birim ürün elde etmek için kullanılan (1TL) birim sermaye olmak üzere,

$$\frac{\frac{\Delta \left( \frac{p_1}{p_2} \right)}{\left( \frac{p_1}{p_2} \right)}}{\frac{\Delta (MTIO_{p_1 p_2})}{MTIO_{p_1 p_2}}} = \frac{\frac{p_2}{p_1} \Delta \left( \frac{p_1}{p_2} \right)}{\frac{\Delta MTIO_{p_1 p_2}}{MTIO_{p_1 p_2}}} \quad (3.4.5)$$

ikame esnekliği bu değişimlerin birbirine oranıdır (Uluatam,1980) (Türkey,1986).

CES üretim fonksiyonunda  $\alpha$  ve  $(1-\alpha)$  nın üssü,

$$\sigma = \frac{1}{1+p} \text{ dir.}$$

Girdilerin üretime katılan miktarları arasındaki nisbi değişme, ikame esnekliği ile marjinal teknik ikame oranındaki değişmenin çarpımı şeklindedir.

Buradan girdilerin üretime katılan miktarları arasındaki

nisbi değişme  $= \frac{1}{1+p} \cdot p$  olur.

Bu değişmelerden sonra,  $-p = \frac{p}{1+p}$  de  $-\frac{1}{p} = \frac{1+p}{p}$  olacaktır.

Bu açıklamalardan sonra CES üretim fonksiyonu

$$C(p_1^i, p_2) = \frac{y_i}{A} \left[ \alpha^{\frac{1}{1+p}} (p_1^i)^{\frac{p}{1+p}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{1+p}} p_2^{\frac{p}{1+p}} \right]^{\frac{1+p}{p}} \quad (3.4.6)$$

$0 < i < k$

şeklinde gösterilir .

CES üretim fonksiyonunun  $C(p_1^i, p_2)$ ,  $[a, b]$  aralığının her bir  $[x_j, x_{j+1})$

$0 < i < k$



alt aralığındaki  $\Delta: p_1^0, p_1^1, p_1^2, p_1^3, \dots, p_1^k$  ara noktalarda nümerik çözümü elde edilir. Parçalı kübik spline polinomu, (3.4.2) deki formülünde  $(x_i)=(p_1^i)$  ara noktalarının değeri yerine konulursa,  $0 < i < k$

$$S_{\Delta}(p_1) = \sum_{j=1}^{N-1} \beta_j (p_1 - p_j)^3 + \beta_N + \beta_{N+1} p_1 + \beta_{N+2} p_1^2 + \beta_{N+3} p_1^3 \quad (3.4.7)$$

şeklinde olur (Bever, et al., 1982).

CES üretim fonksiyonunun homojenlik özelliği, parçalı kübik spline polinom yaklaşımında,  $[a, b]$  aralığının her bir  $[x_j, x_{j+1})$  alt aralığındaki  $(p_1^i)$  ara  $0 < i < k$

noktalarında her yerde sağlanabilir. Bu nedenle CES üretim fonksiyonunun (3.4.6) ile  $S_{\Delta}(p_1^i)$  parçalı kübik spline polinomunun (3.4.7) nin nümerik  $0 < i < k$

çözümü  $[a, b]$  aralığının her bir  $[x_j, x_{j+1})$  alt aralığındaki  $(p_1^i)$  ara noktalarında  $0 < i < k$

yapılabilir (Pennington, 1969) (Bever, et al, 1982).

Bu çözümde, CES üretim fonksiyonu  $C(p_1^i, p_2)$  ile  $S_{\Delta}(p_1^i)$  parçalı  $0 < i < k$   $0 < i < k$

kübik spline polinomunun  $[a, b]$  aralığının her bir  $[x_j, x_{j+1})$  alt aralığındaki

$(P_1^i)$  ara noktalarında sonuç değerlerinin eşit olduğu nümerik çözüm  $0 < i < k$

bulunur (Shea, 1985).

## DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

### CES ÜRETİM FONKSİYONUNUN PARÇALI KÜBİK SPLİNE POLİNOM YAKLAŞIMI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜNÜN BİR ÇİMENTO FABRİKASINDA UYGULAMASI

Afyon Çimento fabrikası, Çimento üretimi ve satışı amacıyla 7 Ekim 1957 tarihinde işletmeye açılmıştır. Fives-Lille Firmasının yaş sistem teknolojisi ile kurulan fabrika 1965 yılında Polysius firmasının lepol izgaralı kuru sistemine dönüştürülmüştür. Üretilen mal ve hizmetin piyasaya sürülmesinde hiç bir güçlük çekilmemektedir. Fabrikada 1988 yıl sonu itibarı ile 304 vasıflı işçi çalışmaktadır.

Talep durumu ve girdi maliyetlerinin artışı nedeni ile maliyet fiatının oluşumunda, Üretim maliyetinin hesaplanması önemli bir yer tutar. Bu bölümde modelin tamamen gerçek verilerle çözümü için Afyon Çimento Fabrikasından alınan veriler ile bir örnek olayda uygulama yapılmıştır.

#### 4.1 CES Üretim Fonksiyonunda En küçük kareler Yöntemi ile İkame Esnekliği Parametresinin Bulunması.

CES Üretim fonksiyonu ile üretim maliyetinin hesaplanmasında, firma için belirli bir ürünün üretim maliyeti, üretiminde kullanılan bütün girdilerin para olarak değeridir. Firma belirli bir üretim maliyeti ile en yüksek ürün miktarına ulaştığında, yada mümkün olan üretim maliyet değeri ile belirli bir ürün miktarını elde ettiğinde, firma karının ne olduğunu hesaplayacaktır.

$$\text{CES Üretimfonksiyonu , } Y = F(p_1, p_2) , \frac{Y}{p_2} = F\left(\frac{p_1}{p_2}, 1\right)$$

şeklinde gösterilir. Burada,

$p_1$ : Enerjinin birim maliyeti (TL/KG)

$p_2$ : Birim sermaye (1TL) olmak üzere

$Y = Ap^{\sigma_1}$  (4.1.1) fonksiyonel ilişkisinde logaritma almak suretiyle

$\log Y = \log A + \sigma \log p_1$  (4.1.2) şeklinde olur. Bu formülden en küçük kareler yöntemi ile  $\sigma$  ikame esnekliği parametresini bulabilmek için normal denklemler

$$\Sigma \log Y = n \log A + \sigma \log p_1$$

$$\Sigma \log p_1 \cdot \log Y = \log A \cdot \Sigma \log p_1 + \sigma \Sigma (\log p_1)^2 \quad (4.1.3)$$

şeklindedir.

Bu normal denklemlerden A ve  $\sigma$  parametrelerinin hesaplanması için Afyon Çimento Fabrikasından alınan veriler. TABLO-1 de gösterilmiştir.

TABLO-I

Afyon Çimento Fabrikasında Çimento Üretimi İçin 1 Kg başına harcanan yıllara göre üretim ve enerji maliyeti(TL)

<u>YILLAR</u>	<u>ÇİMENTO ÜRETİM MALİYETİ(TL/KG)</u>	<u>ENERJİ MALİYETİ (TL/KG)</u>
1980	3,69610	0,33073
1981	4,54111	0,45040
1982	6,12119	0,76336
1983	7,21695	1,33979
1984	11,12077	1,64570
1985	12,53313	3,69790
1986	15,19960	4,78040
1987	18,62220	5,67433

Normal denklemlerden parametrelerin hesaplanması için gerekli işlemler TABLO-II de verilmiştir.

TABLO-II

$Y_i$	$(p_i)$ Alt aralıklarının 0<i<k uç noktaları	$\log Y_i$	$\log p_i$ 0<i<k <sup>1</sup>	$\log p_i \cdot \log Y$	$(\log p_i)^2$
3,69610	0,33073	0,56743	-0,480526	-0,272815	0,230905
4,54111	0,45040	0,657162	-0,346401	-0,227641	0,119993
6,12119	0,76336	0,786835	-0,117270	-0,092193	0,013752
7,21695	1,33979	0,85835	0,127036	0,109041	0,016138
11,12077	1,64570	1,046135	0,216350	0,226331	0,046807
12,53313	3,69790	1,098059	0,567955	0,623648	0,32257
15,19960	4,78040	1,181832	0,679464	0,803012	0,461671
18,62220	5,67433	1,270031	0,753914	0,957494	0,568386
TOPLAM		7,466147	1,400522	2,127177	1,780224

Normal denklemler için TABLO-II de hesaplanan değerleri (4.1.3) de yerine koyalım

$$7,466147 = 8 \log A + 1,400522 \sigma$$

$$2,12777 = \log A \cdot 1,400522 + 1,780224 \sigma$$

Buradan  $\log A = 0,8397376$  ,  $A = 6,91$  ve  $\sigma = 0,53$  bulunur

Marjinal teknik ikame oranından,

$$p = -\frac{1-\sigma}{\sigma} = -\frac{1-0,53}{0,53} = -\frac{0,47}{0,53}, p = -\frac{4}{5}, \frac{1}{1+p} = 5 \text{ ve } \frac{p}{1+p} = -4, \frac{1+p}{p} = -\frac{1}{4} \text{ bu değerler bulunur.}$$

#### 4.2 Parçalı Kübik Spline Polinom Yaklaşımı ile Nümerik Çözümü

Parçalı kübik spline polinomunun nümerik çözümünde

$$h_j = x_j - x_{j-1} \text{ ve } \lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ için}$$

değerlerinin hesaplanması ve sonuçları TABLO-III de verilmiştir.

TABLO-III

YILLAR	$h_j = x_j - x_{j-1}$	$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}$	$h_j$	$\lambda_j$
1980	$h_0 = x_0 - x_{-1}$	$\lambda_0 = \frac{h_1}{h_0 + h_1}$	0,20369	0,370082
1981	$h_1 = x_1 - x_0$	$\lambda_1 = \frac{h_2}{h_1 + h_2}$	0,11967	0,723389
1982	$h_2 = x_2 - x_1$	$\lambda_2 = \frac{h_3}{h_2 + h_3}$	0,31296	0,648118
1983	$h_3 = x_3 - x_2$	$\lambda_3 = \frac{h_4}{h_3 + h_4}$	0,57643	0,346703
1984	$h_4 = x_4 - x_3$	$\lambda_4 = \frac{h_5}{h_4 + h_5}$	0,30591	0,870273
1985	$h_5 = x_5 - x_4$	$\lambda_5 = \frac{h_6}{h_5 + h_6}$	2,0522	0,345328
1986	$h_6 = x_6 - x_5$	$\lambda_6 = \frac{h_7}{h_6 + h_7}$	1,0825	0,452295
1987	$h_7 = x_7 - x_6$		0,89393	

$$\Lambda \equiv \begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & & & & \\ 1-\lambda_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & & & \\ 0 & 1-\lambda_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & & \\ & 0 & 1-\lambda_3 & 2 & \lambda_3 & 0 & \\ & & 0 & 1-\lambda_4 & 2 & \lambda_4 & 0 \\ & & & 0 & 1-\lambda_5 & 2 & \lambda_5 \\ & & & & & \lambda_6 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

$\Lambda$  Matrisi ve enerji maliyetleri için  $\Lambda$  matrisinin değerleri

$$\Lambda \equiv \begin{bmatrix} 2 & 0,370082 & 0 & & & & \\ 0,276611 & 2 & 0,723389 & & & & \\ 0 & 0,351882 & 2 & 0,648118 & 0 & & \\ & 0 & 0,653297 & 2 & 0,346703 & & \\ & & 0 & 0,129727 & 2 & 0,870273 & \\ & & & 0 & 0,654675 & 2 & 0,345328 \\ & & & & & 0,452295 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

$$Y \equiv \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ \frac{6Y_1}{h_1(h_1+h_2)} & \frac{-6Y_1}{h_1 \cdot h_2} & \frac{6Y_2}{h_2(h_1+h_2)} & & & & & \\ & \frac{6Y_2}{h_2(h_2+h_3)} & \frac{-6Y_2}{h_2 \cdot h_3} & \frac{6Y_3}{h_3(h_2+h_3)} & & & & \\ & & \frac{6Y_3}{h_3(h_3+h_4)} & \frac{-6Y_3}{h_3 \cdot h_4} & \frac{6Y_4}{h_4(h_3+h_4)} & & & \\ & & & \frac{6Y_4}{h_4(h_3+h_4)} & \frac{-6Y_4}{h_4 \cdot h_5} & \frac{6Y_5}{h_5(h_4+h_5)} & & \\ & & & & \frac{6Y_5}{h_5(h_5+h_6)} & \frac{-6Y_5}{h_5 \cdot h_6} & \frac{6}{h_6(h_5+h_6)} & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

$$Y \equiv \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ 526,273 & -727,510 & 271,257 & & & & & \\ & 131,948 & -203,587 & 84,462 & & & & \\ & & 85,137 & -245,563 & 247,204 & & & \\ & & & 92,497 & -106,285 & 15,539 & & \\ & & & & 11,689 & -33,850 & 26,875 & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

$\theta Y$  ve  $\theta Y$  matrisinin değerleri bu şekildedir.



Üçlü köşegen matris şeklindeki (2.3.14) ve (2.3.15) lineer denklem sisteminin Gauss eliminasyon metodu ile çözümünden,

$$\begin{aligned}
 M_0 &= -7,82 \\
 M_1 &= 42,28 \\
 M_2 &= -17,12 \\
 M_3 &= 49,67 \\
 M_4 &= -4,008 \\
 M_5 &= 3,818 \\
 M_6 &= -0,863
 \end{aligned}
 \tag{4.2.5}$$

değerleri bulunur.

$M_j = S''_\Delta(x_j)$  ,  $j=0,1,2,3,4,5,6$  için bulunan bu değerler parçalı kübik spline polinomunun katsayılarıdır. Parçalı kübik spline polinomunun  $[a,b]$  aralığındaki

$$M_0 + \frac{\lambda_0}{2} M_1 = 0, \quad -7,82 + \frac{0,370082}{2} \cdot 42,28 = 0$$

$$M_6 + \frac{\lambda_6}{2} M_5 = 0, \quad -0,863 + \frac{0,452295}{2} \cdot 3,818 = 0$$

son uç noktalarda  $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$  değerleri sıfırdır.

### 4.3 CES Üretim Fonksiyonu ile Parçalı Kübik Spline Polinom Yaklaşımının Karşılaştırılması

CES Üretim fonksiyonunun  $[a,b]$  aralığının  $[x_j, x_{j+1})$  alt aralığındaki uç nokta değerleri (3.4.6) da yerine konursa

$\Delta$ ; 0,45      0,763      1,339      1,645      3,697      için

CES Üretim fonksiyonunun  $C(p^i_1, 1)$  her bir alt aralıktaki uç nokta

değerleri

$C(p^i_1, 1)$ ; 26,68      43,40      61,45      64,55      68,08      bulunur.  
 $0 < i < k$

Parçalı kübik spline polinomunu  $[a,b]$  aralığının her bir alt aralığındaki uç noktalarda yedi lineer denklem sistemi , yedi bilinmeyen ve modelin kısıtlayıcıları ile birlikte düşündüğümüzde (3.4.7) den

$$S_{\Delta}(p_1) = \sum_{j=1}^3 \beta_j (p_1 - p_j)_+^3 + \beta_4 + \beta_5 p_1 + \beta_6 p_1^2 + \beta_7 p_1^3 \quad (4.3.1)$$

şeklinde elde edilir. Bulunan (4.2.5) deki parçalı kübik spline polinom katsayıları (4.3.1) de yerine koyulunca,

$$S_{\Delta}(p_1) = -7,82 (p_1 - 0,763)_+^3 + 42,28 (p_1 - 1,339)_+^3 - 17,12 (p_1 - 1,645)_+^3 + 49,67 - 4,008 p_1 + 3,818 p_1^2 - 0,863 p_1^3 \quad (4.3.2) \text{ bulunur.}$$

CES Üretim fonksiyonu  $[a, b]$  aralığının her bir alt aralığındaki  $(x_j, x_{j+1})$  ara noktalarda  $(p_1^0, p_2)$ ,  $(p_1^1, p_2)$ ,  $(p_1^2, p_2), \dots, (p_1^k, p_2)$  bir

$C(p_1^i, p_2) = C(0,88, 1)$  ara nokta ve  $Y_1 = 184,9$  noktasındaki değeri için  $0 < i < k$

(3.4.6) dan,

$$C(p_1^i, p_2) = \frac{184,9}{6,91} \left[ (0,53)^5 (0,88)^{-4} + (0,47)^{-5} (1)^{-4} \right]^{-\frac{1}{4}} = 48,498 \text{ (TL/KG)}$$

değeri bulunur.

Aynı şekilde  $[a, b]$  aralığının her bir alt aralığındaki ara noktalarda bir

$S_{\Delta}(p_1^i)$  ara noktası için (4.3.2) den parçalı kübik spline polinomunun  $0 < i < k$

$$S_{\Delta}(0,88) = -7,82 (0,88 - 0,763)_+^3 + 42,28 (0,88 - 1,339)_+^3 - 17,12 (0,88 - 1,645)_+^3 + 49,67 - 4,008 (0,88) + 3,818 (0,88)^2 - 0,863 (0,88)^3 \text{ değeri}$$

$S_{\Delta}(p_1^i) = S_{\Delta}(0,88) = 48,498 \text{ (TL/KG)}$  bulunur. Bulunan bu değer 1 Kg

çimento üretimi için üretim maliyetidir.

## EK-1

$[x_j, x_{j+1})$  alt aralığının  $(p_1^i)_{0 < i < k} = 0,1$  ara noktalarındaki

$184,1 < Y_i < 190,6$ ,  $C(p_1^i)$ ,  $S_{\Delta}(p_1^i)$  değerleridir.

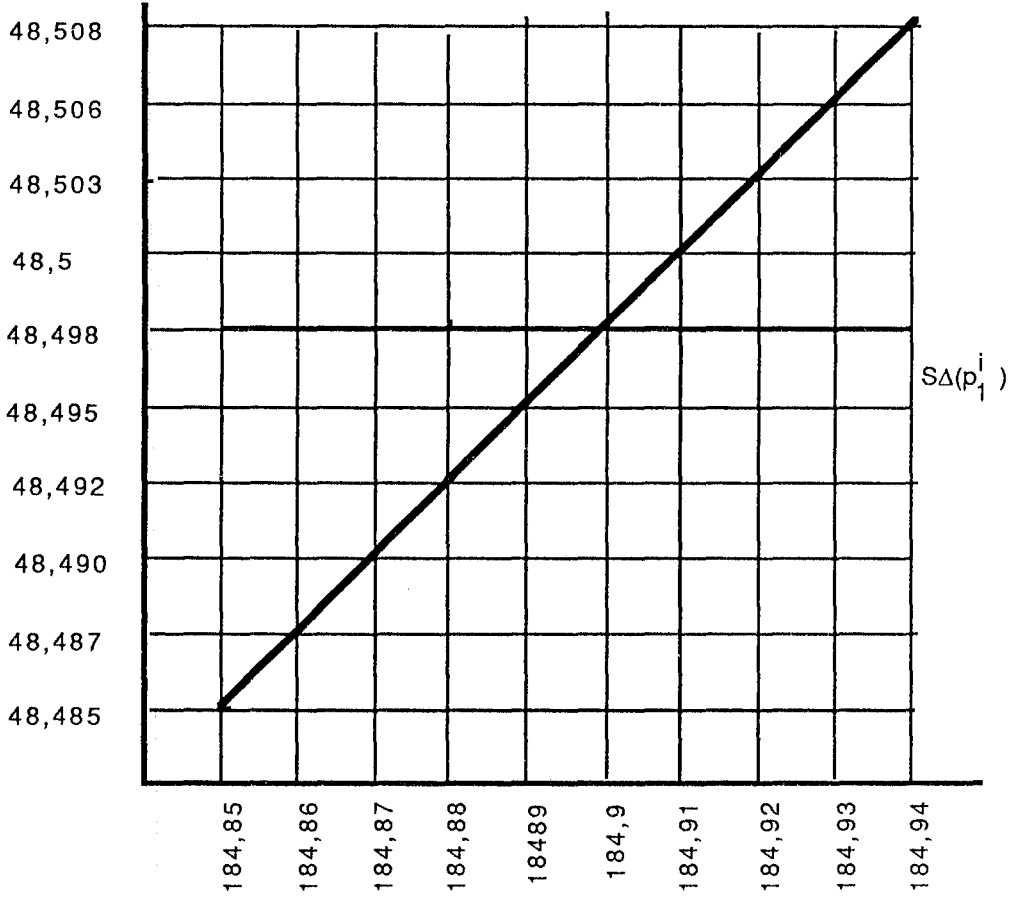
$Y_i$	$p_1$	$C(p_1^i)$ $0 < i < k$	$S_{\Delta}(p_1^i)$ $0 < i < k$
184,1	2,55	67,743	67,73
184,2	2,55	67,780	67,73
184,3	2,55	67,817	67,73
184,4	2,55	67,854	67,73
184,5	2,55	67,890	67,73
184,6	2,55	67,927	67,73
184,7	2,55	67,964	67,73
189,9	0,850	48,505	48,48
190,0	0,850	48,530	48,48
190,1	0,850	48,556	48,48
190,2	0,850	48,581	48,48
190,3	0,850	48,607	48,48
190,4	0,850	48,632	48,48
190,5	0,850	48,658	48,48
190,6	0,850	48,683	48,48

## EK-2

$[x_j, x_{j+1})$  alt aralığının  $(p_1^i)_{0 < i < k} = 0,01$  ara noktalarındaki

$184,85 < Y_i < 185,05$ ,  $C(p_1^i)_{0 < i < k}$ ,  $S_{\Delta}(p_1^i)_{0 < i < k}$  değerleridir

$Y_i$	$p_1$	$C(p_1^i)_{0 < i < k}$	$S_{\Delta}(p_1^i)_{0 < i < k}$
184,85	0,88	48,485	48,498
184,86	0,88	48,487	48,498
184,87	0,88	48,490	48,498
184,88	0,88	48,492	48,498
184,89	0,88	48,495	48,498
184,90	0,88	48,498	48,498
184,91	0,88	48,500	48,498
184,92	0,88	48,503	48,498
184,93	0,88	48,506	48,498
184,94	0,88	48,508	48,498
184,95	0,88	48,511	48,498
184,96	0,88	48,513	48,498
184,97	0,88	48,516	48,498
184,98	0,88	48,519	48,498
184,99	0,88	48,521	48,498
185,00	0,88	48,524	48,498
185,01	0,88	48,527	48,498
185,02	0,88	48,529	48,498
185,03	0,88	48,532	48,498
185,04	0,88	48,534	48,498



ŞEKİL 4.1

$184,85 < Y_i < 184,94$  ara noktaları ve  $p_1^i = 0,88$  için  $0 < i < k$

$C(p_1^i)$  ve  $S_{\Delta}(p_1^i)$   
 $0 < i < k$   $0 < i < k$   
 değerlerinin grafiğidir.

## SONUÇ

Bu çalışmada logaritma almak suretiyle parametreleri cinsinden doğrusallaştırılamayan CES Üretim fonksiyonu, parçalı polinom şeklinde ifade edilerek yeni bir yaklaşım getirilmeye çalışılmıştır. Araştırmada varılan sonuçları ve ileriye dönük çalışmalar için önerileri şu şekilde verebiliriz.

Üretim süreci ile ilgili problemlerin çözümünde istatistik olmayan yaklaşımla, üretim fonksiyonları gibi sonuç fonksiyonlarının parçalı kübik spline polinom yaklaşımı ile tahmini yapılabilir.

CES Üretim fonksiyonunu  $[a,b]$  aralığının her bir  $[x_j, x_{j+1})$  alt aralığındaki  $(p_{-1}^i)$  ara noktalarda ikame elastikiyetini heseslamaksızın, parçalı kübik  $0 < i < k$

spline polinom yaklaşımı ile nümerik çözümü yapılabilir.

Bu nümerik çözümde homojenlik özelliği  $[a,b]$  aralığının her bir  $[x_j, x_{j+1})$  alt aralığındaki  $(p_{-1}^i)$  ara noktalarında her yerde sağlanabilir.  $0 < i < k$

Parçalı kübik spline polinom yaklaşımı, CES Üretim fonksiyonunun değerine en yakın geçen gerçek homojen fonksiyondur.

Parçalı kübik spline polinom yaklaşımı  $[a,b]$  aralığının her bir  $[x_j, x_{j+1})$  alt aralığında dereceleri farklı ve en çok üçüncü dereceden parçalı polinomların birleşimidir.

Parçalı kübik spline polinom yaklaşımı uygulamalı matematikte kullanılan bir nümerik analiz tekniğidir.

### KAYNAKLAR DİZİNİ

- Atalay,M.,1983,Kütahya çinicilik sanayiinin İncelenmesi,Anadolu Üniversitesi yayın no:10 İktisadi ve İdari Bilimler yayın no:15 Eskişehir,167 s.
- Avralıoğlu,Z., Üretim fonksiyonları , A.İ.T.A Yayın no: 12, Ankara, 129 s.
- Bever,.R.C.,Marsden,J.R.and Whinston,A.,1982, Point estimation and process models-The spline function alternative,International Journal on Policy and Information ,Vol6,no:1,85-100.
- Blum,E.K.,Numerical analysis and computation theory and practice,University of Southern California,605 p.
- Bulutay,T.,1972, İktisadi büyüme modelleri üzerine açıklamalar ve eleştirmeler, Ankara Üniversitesi,Siyasal Bilgiler Fakültesi No:341, 123 s.
- Burden,L.R.and Faires,J.D.,1985,Numerical analysis,Prindlle,Weber& Schmidt , Boston,629 p.
- Çağal,B.,1989,Sayısal analiz,İstanbul,568s.
- Dahlquist,G.and Björk,A.,By Ned Anderson,1974,Numerical methods,PrenticeHall,inc.Engle wood Cliff,New Jersey,565 p.
- Demirci, M. ve Baray,I.,1983,CES Üretim fonksiyonu ve Türk özel imalat sanayiinde faktör ikamesi, Finansal Yönetim ve Yatırım Planlaması Dergisi , Sayı :17,1-18.
- Dısnay,R.and Elbashir,A.A.,1984,Mechanisation employment and productivity in sudanese agriculture , Journal of Development Economics, Nort-holland, 249-262.
- Eckmann,B.,van der Waerden,B.L.,!972,Die grundlehren der mathematischen wissenschaffen,Band,141,265-277.
- Grewille,T.N.E.,1967,Spline functions,Interpolation and numerical quadrature mathematical methods for digital computers,John Wiley & Sons,Vol:2,New York,457-459.
- Handcomb,D.C.,1965,Methods of numerical approximation ,Oxford University Computing laboratory,215 p.
- Jain,M.K.and Aziz,T.,1981,Spline function approxmation for diferential equations,Department of Mathematics,Indian Institute of Technology,New Delhi,129-143.
- Johnson,L.W.and Riess,R.D.,1982, Numerical analysis ,Virginia Polytechnic Institute and State University,551 p.
- Jones,D.W.,Hillsman,E.L.,Lee,R.and Foust,C.B.,1986, Production function and tract rents in coal mining,Resources and Energy , Nort Holland, 35-61.

- Kılıçbay,A.,1968,Ekonometri ,İstanbul Üniversitesi yayın no: 1392, İktisat Fakültesi No:236 ,434 s.
- Kılıçbay,A.,1975,Ekonometrik metodlar ve araştırma,İstanbul Üniversitesi yayın no:2110,İşletme Fakültesi no: 52, 424 s.
- Kılıçbay,A.,1970, Kantitatif iktisat teorisi ve politikası ,İstanbul Üniversitesi, Yayın no:1592, İktisat Fakültesi No:289 ,751 s.
- Kontorovich,V.,1986,Soviet growt slowdown,Econometric vs.Direct Evidence,181-185.
- Maron,M.J.,1982,Numerical analysis a practical approach,University of Lousville, Macmillan Publishing Co.,Inc,New York,465 p.
- Mizumura,K.,1985,Estimation of hydraulic data by spline functions,Kanazawa Inst of Technology,Journal of Hydraulic Engineering , VIII n.9,1219-1225.
- Pennington,R.H.,1969, Introductory computer methods and numerical analysis, Ph.D.Chief, Mathematics Branch Air Force Weapons Laboratory, Albuquerque, New Mexico, 451 p.
- Philips,G.M. and Taylor,P.J.,1973, Theory and applications of numerical analysis, Academic Press: Inc. London and New York,377 p.
- Rice,R.J.,1983,Numerical methods software and analysis,Purdue University,475 s.
- Shea,G.S.,1984,Pittalls in smoothing interest rate term structure data equilibrium models and spline approximations, Journal of Financial and Quantitative Analysis,vol 19,No: 3 ,253-269.
- Shea, G.S,1985,Interest rate term structure estimation with exponential splines:A Note,The Journal of Finance.vol: x1, no:1,319-325 p.
- Shoenberg,I.J.,1946,Contributions to problem of approximation of equidistant data by analtic functions, Quart. Appl. Math., 45-99 and 112-141.
- Shoenberg,I.J.,1971,Cardinal interpolation and spline functions IV the exponential euler splines,The University of Wisconsin,Madison, 32p.
- Shoenberg,I.J.,1968 Cardinal interpolasyon and spline functions The University of Wisconsin, Madison, 66 p.
- Schumaker,L.L.,1981, Spline function: basic theory, pure and applied mathematics,John Wiley & Sons, Inc.,New York, 549 p.
- Stanton,R.G.,!981,Bilim ve mühendislik'de nümerik metodlar,(çev. Aktaş,Ç.),İ.D.M.M.A Elektrik Fakültesi,341 s.
- Suits,D.B.,Mason,A.and Chan,L.,1978,Spline functions fitted by standard regression methods,Vol:60,132-139.
- Theil,H.,1978, Introduction to economics , University of Chicago , New Jersey, 443 p.



- Türkay,O.,1986, Mikro iktisat ,Ankara Üniversitesi Siyasal Bilgiler Yayınları:  
551, Cilt 1,250 s.
- Uluatam,Ö.,1980,Makro iktisat,Ankara,280 s.
- Üstünel,B.,1978,Ekonominin temelleri,Ankara ,280 s.
- Wallis,K.F.,1984,Uygulamalı ekonometri,(çev.Şenel M., Atalay,M.),Anadolu  
Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Endüstri Mühendisliği  
Bölümü yayını,Eskişehir, 124 s.