HİPERBOLİK DÜZLEMLERİN PROJEKTİF ALTDÜZLEMLERLE İLİŞKİSİ ÜZERİNE

Basri Çelik

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Şükrü Olgun

Ocak - 1989

Basri Çelik'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı " Hiperbolik Düzlemlerin Projektif Altdüzlemlerle İlişkisi Üzerine " başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

..3./.2./1989

Üye : Prof.Dr..Rüstem.KAYA.........

Üye : Yrd..Doç.Dr..Şükrü.OLGUN....

Üye : Yrd.Doç.Dr. Enver.ÖZCAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 10 ŞUBAT 1989 gün ve .202/1...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Rüstem KAYA

ÖZET

$\Pi=(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ mertebesi n olan sonlu bir projektif düzlem ve $\Pi'=(\mathcal{P}',\mathcal{L}',I')$, Π nin mertebesi m olan ve Baer altdüzlemi olmayan (yani $n \geqslant m^2+m$ olan) bir altdüzlemi olsun. Bu durumda, $\mathcal{P}_o=\mathcal{P}\setminus\{X\in\mathcal{P} \mid X\,I\,\ell,\ \ell\in\mathcal{L}'\}$ $\mathcal{L}_o=\mathcal{L}\setminus\mathcal{L}'$ ve I', I nın $\mathcal{P}_o\times\mathcal{L}_o$ 'a kısıtlanmısı olmak üzere $\Pi_o=(\mathcal{P}_o,\mathcal{L}_o,I_o)$ altyapısını gözönüne alalım. Bu tez çalısmasında, $n \geqslant m^2+m+1+\sqrt{m^2+m+2}$ ise Π_o ın, Graves anlamında, bir hiperbolik düzlem olduğu gösterilmistir. Daha sonra Π_o ın bazı kombinatörsel özellikleri ve bazı paralel doğru sınıfları üzerinde durulmustur.

SUMMARY

Let $\Pi=(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ be a finite projective plane of order n and $\Pi'=(\mathcal{P}',\mathcal{L}',I')$ a non-Baerian subplane of Π with order m. Consider the substructure $\Pi_0=(\mathcal{P}_0,\mathcal{L}_0,I_0)$ with

$$\mathcal{P}_0=\mathcal{P}\setminus\{x\in\mathcal{P}\mid xI\ell,\ \ell\in\mathcal{L}'\}\ ,\ \mathcal{L}_0=\mathcal{L}\setminus\mathcal{L}'.$$

where I_0 stands for the restriction of I to $\mathcal{P}_0\times\mathcal{L}_0$. In this thessis it is shown that every Π_0 is hyperbolic plane in the sense of Graves [2] if $n\geqslant m^2+m+1+\sqrt{m^2+m+2}$. Finally we give some combinatorial properties of Π_0 and some line classes of it.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten ve çalışma boyunca her türlü yardımı esirgemeyen değerli hocam, Anadolu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Öğretim üyesi Sayın Yrd.Doç.Dr. Şükrü OLGUN'a içten teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca kaynaklarından yararlandığım değerli hocam Anadolu Üniversitesi Fen-Ed. Fak. Matematik Bölümü başkanı Sayın Prof.Dr. Rüstem KAYA'ya teşekkür ederim.

Basri Çelik

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda, çalısma boyunca kullanılacak olan bazı kavramlar hatırlatılacaktır. Bu bölüm için (Kaya,R.,[4]) ve (Hughes and Piper, [3]) kaynakları esas alınmıstır.

1.1 TANIM.

$\mathcal{P}$ ve $\mathcal{L}$ elemanları sırasıyla noktalar ve doğrular olan herhangi iki cümle ve $I \subset \mathcal{P}\times\mathcal{L}$ de üzerinde olma bağıntısı olsun. Eğer $\mathcal{P}\cap\mathcal{L}=\Phi$ ise $(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ sıralı üçlüsüne bir geometrik yapı denir.

Herhangi bir $(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ geometrik yapısında $|\mathcal{P}\cup\mathcal{L}|$ sonlu ise $(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ geometrik yapısına sonlu geometrik yapı denir.

1.2 TANIM.

$\mathbb{P}=(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ geometrik yapısı aşağıdaki P1, P2 ve P3 aksiyomlarını sağlıyorsa $\mathbb{P}$ ye bir projektif düzlem denir:

P1: Her $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, $P_1 \neq P_2$ için $P_1 I \ell$ ve $P_2 I \ell$ olacak şekilde bir tek $\ell \in \mathcal{L}$ doğrusu vardır.

P2: Her $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}$ için $P I \ell_1$ ve $P I \ell_2$ olacak şekilde birtek $P \in \mathcal{P}$ noktası vardır.

P3: Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

1.1 TEOREM.

$\mathbb{P}$ solu bir projektif düzlem olsun. O zaman aşağıdaki şartları sağlayan bir $n \geqslant 2$ pozitif tamsayısı vardır:

(i) $\mathbb{P}$ nin her doğrusu tam olarak n+1 nokta kapsar.

(ii) $\mathbb{P}$ nin her noktası tam olarak n+1 doğru üzerindedir.

(iii) $\mathbb{P}$ tam olarak n^2+n+1 nokta ve n^2+n+1 doğru kapsar.

Yukarıdaki teoremin ispatı (Kaya,R.,[4]) de verilmiştir.

1.3 TANIM.

Sonlu bir $\mathbb{P}$ projettif düzlemi için var olan 1.1 teoremdeki şartları sağlayan n pozitif tamsayısına $\mathbb{P}$ projektif düzleminin mertebesi denir.

1.4 TANIM.

$\mathbb{P}=(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ herhangi bir projektif düzlem olsun. Eğer $\mathcal{P}'\subset\mathcal{P}$, $\mathcal{L}'\subset\mathcal{L}$ ve $I'\subset\mathcal{P}'\times\mathcal{L}'$ olmak üzere $\mathbb{P}'=(\mathcal{P}',\mathcal{L}',I')$ geometrik yapısı bir projektif düzlem ise $\mathbb{P}'$ ye $\mathbb{P}$ nin bir projektif altdüzlemi denir. Özel olarak $\mathbb{P}'\neq\mathbb{P}$ ise $\mathbb{P}'$ ye $\mathbb{P}$ nin projektif özaltdüzlemi adı verilir.

1.2 TEOREM.

$\mathbb{P}$ mertebesi n olan sonlu bir projektif düzlem ve $\mathbb{P}'$ de $\mathbb{P}$ nin mertebesi m olan bir projektif özaltdüzlemi olsun. Bu takdirde eğer $\mathbb{P}$ nin her doğrusu $\mathbb{P}'$ nün bir noktasını kapsarsa $n=m^2$ dir, aksi halde $n\geq m^2+m$ dir.

İspat için bkz (Kaya, R.,[4]).

n mertebeli sonlu bir projektif düzlemin $n=m^2+m$ olacak şekilde mertebesi m olan bir altdüzleminin varlığı bilinmemektedir. Bu nedenle 1.2 teoremin hükmünün en iyi hüküm olduğu söylenemez.

Literatürde hiperbolik düzlem (veya diğer adı ile Bolyai-Lobachevsky düzlemi) için birbirinden ufak tefek nüans farklarıyla çeşitli tanımlar mevcuttur. Aşağıda bu tanımlardan bazıları verilmiştir. Bu çalışmada ise L.M. Graves'in hiperbolik düzlem tanımı esas alınmaktadır.

1.5 TANIM.

Aşağıdaki aksiyomları sağlayan herhangi bir $(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ geometrik yapısına bir Bolyai-Lobachevsky düzlemi denir:

G1: Herhangi iki noktadan bir tek doğru geçer.

G2: Herhangi bir doğru üzerinde en az iki nokta vardır.

G3: Herhangi bir doğruya dışındaki bir noktadan en az iki paralel doğru[1] çizilebilir.

G4: Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

G5: $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}$ nin doğrudas olmayan üç noktası ile, kapsadığı herhangi iki noktayı birleştiren bir doğru üzerindeki tüm noktaları da kapsarsa, bu takdirde, $\mathcal{S}=\mathcal{P}$ dir (Graves,[2]).

1.6 TANIM.

Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir $(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ geometrik yapısına bir Bolyai-Lobachevsky düzlemi denir:

T1: Herhangi iki noktadan bir tek doğru geçer.

T2: Herhangi bir doğru üzerinde en az iki nokta vardır.

T3: Herhangi bir doğrunun dışında en az bir nokta vardır.

T4: Bu yapıda en az bir doğru vardır ve herhangi bir doğrunun dışındaki bir noktadan geçen ve bu doğruya

---

[1] Ortak noktası olmayan herhangi iki doğruya paralel doğrular denir.

paralel olan k tane $(k \geqslant 2)$ doğru vardır.

T5: $\mathcal{P}$ nin bir $\mathcal{S}$ altcümlesi, doğrudaş olmayan üç nokta ve herhangi iki noktasını birleştiren bir doğru üzerindeki tüm noktaları da kapsarsa $\mathcal{S}=\mathcal{P}$ dir (Topel,[10]).

1.7 TANIM.

Aşağıdaki aksiyomları sağlayan herhangi bir $\mathcal{U}=(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ geometrik yapısına bir hiperbolik düzlem (B-L düzlemi[1]) denir:

H1: Herhangi iki noktadan geçen bir tek doğru vardır.

H2: Her doğru üzerinde aynı sayıda nokta bulunur.

H3: Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

H4(Ayırıcı aksiyom): Bir doğrunun dışındaki bir noktadan geçen ve bu doğruya paralel olan, iki yada daha çok (belli bir) sayıda doğru vardır.

H5(Sınırlayıcı aksiyom): $\mathcal{P}'\subset\mathcal{P}$, $\mathcal{L}'\subset\mathcal{L}$ ve $I'\subset I$ olmak üzere eğer,

(i) P_1 ve $P_2\in\mathcal{P}'$, $P_1\neq P_2 \Rightarrow P_1P_2\in\mathcal{L}'$

(ii) $P\ I'\ell\in\mathcal{L}' \Rightarrow P\in\mathcal{P}'$

şartları sağlanıyorsa $(\mathcal{P}',\mathcal{L}',I')=\mathcal{U}$ dur (Kaya,R.[4]).

1.8 TANIM.

$(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ ve $(\mathcal{P}',\mathcal{L}',I')$ herhangi iki geometrik yapı olsun. Eğer,

$$f:\mathcal{P}\cup\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{P}'\cup\mathcal{L}'$$

fonksiyonu,

---

[1] Bundan sonra "Bolyai-Lobachevsky düzlemi" yerine kısaca "B-L düzlemi" denecektir.

1) $f(\mathcal{P})\subseteq \mathcal{P}'$,

2) $f(\mathcal{L})\subseteq \mathcal{L}'$,

3) Her $P\in\mathcal{P}$, $\ell\in\mathcal{L}$ ve $P I \ell \Rightarrow f(P)\ I'\ f(\ell)$,

şartlarını da sağlıyorsa, f ye $(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ dan $(\mathcal{P}',\mathcal{L}',I')$ ye bir homomorfizm denir. Birebir ve örten özelliği bulunan bir homomorfizme izomorfizm denir. Bir geometrik yapıyı kendisine dönüştüren izomorfizme de kolinasyon veya otomorfizm denir.

1.3 TEOREM.

Bir B-L düzleminin tüm kolinasyonlarının cümlesi (fonksiyon bileşke işlemi altında) bir grup yapısına sahiptir.

İSPAT.

Grup olma aksiyomlarının sağlandığı kolayca görülebilir.

1.9 TANIM.

G bir $\mathcal{H}$ B-L düzleminin **kolinasyonlar** grubu olsun. Bu takdirde $\mathcal{H}=(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ olmak üzere,

"$\forall X,Y(X,Y\in\mathcal{P}\Rightarrow\exists\alpha\in G \ni \alpha(X)=Y)$"

oluyorsa, G kolinasyon grubuna $\mathcal{H}$ nin noktaları üzerinde ($\mathcal{P}$ üzerinde) geçişkendir denir.

1.10 TANIM.

$\mathcal{H}=(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ bir B-L düzlemi olsun. $\mathcal{H}$ nın kolinasyonlar grubu $\mathcal{P}$ üzerinde geçişken (transitif) ise, $\mathcal{H}$ B-L düzlemine, Graves ([2]) anlamında homogendir denir.

BÖLÜM 2

2. BAZI B-L DÜZLEMİ MODELLERİ

Literatürde bir projektif düzlemden bazı doğrular, ve bu doğruların üzerindeki tüm noktalar atılarak teşkil edilen B-L düzlemleri mevcuttur. Bu bölümde sözü edilen tarzda inşa edilen B-L düzlemlerinden bazıları takdim edilmektedir.

2.1 T.G. Ostrom'un B-L Düzlemi Modeli

2.1.1 TANIM.

Mertebesi n olan sonlu bir projektif düzlemde herhangi üçü doğrudaş olmayan n+1 noktanın oluşturduğu cümleye oval denir.

2.1.2 TANIM.

Bir $\mathcal{O}$ ovalinin,

(i) Tam olarak bir tek noktasını kapsayan bir doğruya teğet doğru,

(ii) Tam olarak iki noktasını kapsayan bir doğruya kesen doğru,

(iii) Hiçbir noktasını kapsamayan bir doğruya dış doğru denir. $\mathcal{O}$ ovalinin üzerindeki noktalara mutlak nokta, herhangi iki teğeti üzerindeki noktaya dış nokta, hiçbir teğeti üzerinde bulunmayan noktasına da iç nokta denir.

2.1.1 ÖNERME.

n pozitif bir tek tamsayı olmak üzere, n mertebeden bir projektif düzlemdeki bir oval için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

(i) Dış noktaların toplam sayısı $n(n+1)/2$ dir.

(ii) Kesen doğruların toplam sayısı $n(n+1)/2$ dir.

(iii) İç noktaların toplam sayısı $n(n-1)/2$ dir.

(iv) Teğet doğruların toplam sayısı $(n+1)$ dir.

(v) Dış doğruların toplam sayısı $n(n-1)/2$ dir.

(vi) Herhangi bir kesen doğru tam olarak $(n-1)/2$ adet iç nokta kapsar.

(vii) Herhangi bir dış doğru tam olarak $(n+1)/2$ adet iç nokta kapsar.

İSPAT.

Bkz (Ostrom, T.G., [8]).

2.1.1 TEOREM.

$n > 7$ bir tek tamsayı olmak üzere, n mertebeli bir $\mathbb{P}$ projektif düzleminin bir $\mathcal{O}$ ovali var olsun. $\mathcal{O}$ ovalinin tüm iç noktaları cümlesini $\mathcal{P}$ ile, tüm dış ve kesen doğrularının cümlesini $\mathcal{L}$ ile gösterelim. $\mathbb{P}$ projektif düzlemindeki I üzerinde olma bağıntısını gözönüne alalım. O zaman $(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ geometrik yapısı bir B-L düzlemidir.

İSPAT.

$(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ nın bir geometrik yapı belirlediği aşikârdır. Şimdi $(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ geometrik yapısının Graves'in B-L düzlemi tanımındaki (1.6 tanım) aksiyomları sağladığını görelim:

G1: $\mathcal{P}$ deki her nokta aynı zamanda $\mathbb{P}$ projektif düzleminin de noktası olduğundan, $\mathcal{P}$ deki herhangi iki nokta $\mathbb{P}$ de bir doğru belirler. Belirlenen bu doğru ya kesen yada dış doğrudur.

G2: Bir dış doğru $(n+1)/2$ ve bir kesen doğru $(n-1)/2$ iç nokta kapsadığından,

$$(n+1)/2 > (n-1)/2 \geqslant 3$$

olduğu aşikârdır. Böylece $(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ nın herhangi bir doğrusu en az iki (hatta üç) nokta kapsar.

G3: Bir kesen doğru üzerinden $(n+3)/2$ nokta ve bir dış doğru üzerinden $(n+1)/2$ nokta atılmıştır. Burada,

$$(n+3)/2 > (n+1)/2 \geqslant 4$$

olduğundan $(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ nın herhangi bir doğrusuna dışındaki bir noktadan en az iki (hatta dört) paralel doğru çizilebilir.

G4: "Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır." aksiyomu P3 aksiyomunun kendisi olduğundan aşikârdır.

G5: $\mathcal{P}'\subset\mathcal{P}$ olsun. $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}$ nin doğrudaş olmayan P, Q, R noktalarını ve PQR üçgeninin kenar doğruları üzerindeki noktaların hepsini kapsasın. PQ doğrusu 2.1.1 teoremden dolayı, $\mathcal{P}$ nin en az $(n-1)/2$ adet noktasını kapsar(çünkü PQ kesen doğru olabilir). R noktası ile PQ kesen doğrusu üzerindeki $(n-1)/2$ iç nokta birleştirilirse, teşkil edilen doğrular üzerindeki tüm noktalar da $\mathcal{P}'$ tarafından kapsanır. O halde $\mathcal{P}'$ altcümlesi en az,

$$[(n-1)/2]\cdot[(n-1)/2-1]+1$$

nokta kapsar. Diğer taraftan,

$$n\geqslant 7 \Rightarrow [(n-1)/2][(n-1)/2-1]+1 > n+1$$

dir. O halde $\mathcal{P}'$ de en az $n+1$ nokta var olduğundan P ile $\mathcal{P}'$ nün $n+1$ noktası birleştirilerek, P den geçen $n+1$ doğruyu teşkil edelim. $\mathbb{P}$ projektif düzleminin tüm noktalarının böyle bir P noktasından geçen demet üzerinde olduğu bilindiğini göre $\mathcal{P}'$ nün $n+1$ den fazla olan noktaları, P noktası ile $\mathcal{P}'$ nün noktalarını birleştiren doğrulardan herhangi birisinin üzerinde olmak zorundadır. O halde P noktasından geçen en az bir doğru $\mathcal{P}'$ nün en az iki noktasını kapsar. $P\in\mathcal{P}$ keyfi bir nokta olduğundan,

$$\forall P(P\in\mathcal{P} \Rightarrow P\in\mathcal{P}')$$

bulunur. Yani $\mathcal{P}\subset\mathcal{P}'$ dür. O halde $\mathcal{P}'=\mathcal{P}$ sonucu elde edilir.

Sonuç olarak Graves'in B-L düzlemi olma aksiyomları sağlandığından dolayı $(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ geometrik yapısı bir Bolyai-Lobachevsky düzlemidir.

Projektif düzlemin $\mathcal{O}$ ovalini kendisine dönüştüren herbir kolinasyonu, B-L düzleminin de bir kolinasyonudur. Bu nedenle π nin $\mathcal{O}$ ovalini invaryant bırakan kolinasyon grubunun, iç noktalar üzerinde geçişken (transitif) olduğunu göstermek, B-L düzleminin homogenliği için kâfidir. T.G. Ostrom'un bu modelinde, π projektif düzlemi Dezargsel ve $n \not\equiv 1 \pmod 8$ ise, elde edilen B-L düzlemi homogendir (Ostrom [8]).

2.2 R. Sandler'in B-L Düzlemi Modeli

π , mertebesi $n \geqslant 5$ olan sonlu bir projektif düzlem olsun. ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 ise π nin noktadaş olmayan üç doğrusu olmak üzere, π den ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 doğruları ve bu doğrular üzerindeki tüm noktalar atılarak π_0 teşkil edilsin. π_0 ın üzerinde olma bağıntısı, π nin üzerinde olma bağıntısının kısıtlanmışı olduğundan, üzerinde olma bağıntıları aynı sembolle gösterilebilir. Bu durumda π_0 geometrik yapısı bir B-L düzlemidir. Şimdi gerçektende π_0 için Graves'in B-L düzlemi tanımındaki aksiyomların sağlandığını görelim:

G1: π_0 ın tüm noktaları aynı zamanda π nin de noktaları oldugundan P1 gereğince farklı iki nokta bir tek doğru belirler.

G2: π nin bir doğrusu üzerinden en fazla üç nokta atılmıştır. Yani π_0 ın bir doğrusu en az n-2 nokta kapsar (Bu durum π den atılan üçgenin herhangi bir köşesinden geçmeyen doğrular için geçerlidir.). Halbuki, $n \geqslant 5$ oldugundan,

$$n-2 \geqslant 5-2 \Rightarrow n-2 \geqslant 3$$

olur. Yani π_0 ın bir dogrusu üzerinde enaz üç nokta vardır.

G3: π nin herhangi bir doğrusu üzerinden atılan en az nokta sayısı ikidir (Bu durum π den atılan üçgenin herhangi bir kösesinden geçen doğrular için geçerlidir.). Dolayısıyla π_o ın bir doğrusuna dışındaki bir noktadan en az iki paralel çizilebilir.

G4: ℓ , π_o ın bir doğrusu, $A I \ell$, $B I \ell$, $P \not I \ell$ olsun. O zaman G3 den dolayı, π_o ın,

$$\ell_1 I P,\quad \ell_2 I P \quad \text{ve} \quad \ell_1 \wedge \ell = \phi = \ell_2 \wedge \ell$$

şartını sağlayan ℓ_1 , ℓ_2 doğruları vardır. Diğer taraftan G2 den dolayı,

$$C I \ell_1 ,\ C \neq \ell_1 \wedge \ell_2$$

ve

$$D I \ell_2 ,\ D \neq \ell_1 \wedge \ell_2$$

noktaları da mevcuttur. Bu durumda π_o ın A,B,C,D noktalarının herhangi üçü doğrudaş değildir.

G5: π_o ın noktalarının bır S altcümlesi, doğrudaş olmayan üç nokta ve S ye ait iki noktayı birleştiren doğrular üzerindeki tüm noktaları kapsasın. O zaman P_1 ,P_2 ,$P_3 \in S$ doğrudaş olmayan üç nokta ise $\ell = P_1 P_2$ doğrusu üzerindeki tüm noktalar da S ye aittir. Diğer tarafdan $\ell = P_1 P_2$ doğrusu üzerinde en az n-2 nokta mevcut olup, P_3 den ve ℓ nin S ye ait n-2 noktasından geçen doğrular teşkil edilirse, S en az,

$$(n-2)(n-3)+1 = n^2 + 5n + 7$$

adet nokta kapsar.

X, π_o ın bir noktası olsun. X ile S nin (n-2)(n-3)+1 noktası birleştirilirse X den geçen (n-2)(n-3)+1 doğru teşkil edilir. Bu durumda,

$$(n-2)(n-3)+1 \geqslant n+2$$

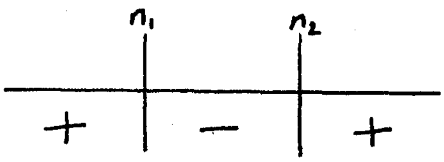
dir. Şimdi bunun gerçeklendiğini görelim:

$(n-3)(n-2)+1 = n^2-5n+7 \geqslant n+2$

$\Rightarrow n^2-6n+5 \geqslant 0$

$\Rightarrow n_{1,2}=(6\mp\sqrt{36-20})/2$

$\Rightarrow n_1 = 5$ ve $n_2 = 1$



$(n-3)(n-2)+1 \geqslant n+2$ olması için,

$n \geqslant 5$ veya $n \leqslant 1$

olmak zorundadır. Diğer tarafdan $n \geqslant 2$ olduğundan $n \leqslant 1$ olması imkânsızdır. Dolayısıyla $n \geqslant 5$ olmalıdır. Bu ise hipotezde $n \geqslant 5$ olduğundan aşikârdır. Bu durumda X den ve $\mathcal{S}$ nin bir noktasından geçen en az bir doğru $\mathcal{S}$ nin en az iki noktasını kapsar. Bu ise $X \in \mathcal{S}$ demek olup, G5 aksiyomunun sağlandığını gösterir.

Bu modelde atılan ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 doğrularını kendilerine dönüştüren π nin bir kolinasyonu, π_0 ın da bir kolinasyonudur. Bu durumda π Dezargsel ise, π nin kolinasyonları grubunun dörtgenler üzerinde geçişken olduğu bilinmektedir. Bu nedenle π Dezargsel iken,

$\ell_i \wedge \ell_j \; (i,j=1,2,3)$

noktalarını invaryant bırakan kolinasyonların altgrubu π_0 ın noktaları üzerinde geçişken olan bir altgrupdur. Yani π Dezargsel iken π_0, Graves anlamında, homogendir (Sandler, R., [9]).

2.3 R.J. Bumcrot'un B-L Düzlemi Modeli

2.3.1 TANIM.

Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ geometrik yapısına bir lineer uzay denir:

L1: İki noktadan bir doğru geçer.

L2: Herhangi bir doğru üzerinde en az iki nokta vardır.

2.3.2 TANIM.

$S=(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ bir lineer uzay iken,

$v=|\mathcal{P}|$, $b=|\mathcal{L}|$

ile gösterelim. S nin her P noktası ve ℓ doğrusu için,

$$r(P)=|\{\ell\in\mathcal{L}\,|\,PI\,\ell\}|$$

$$k(\ell)=|\{P\in\mathcal{P}\,|\,PI\,\ell\}|$$

tanımlayalım. Böylece $k(\ell)$ ile herhangi bir $\ell\in\mathcal{L}$ doğrusu üzerindeki noktaların sayısı, $r(P)$ ile de herhangi bir P noktasından geçen doğruların sayısı gösterilmiş olur.

Eğer S sonlu bir lineer uzay ise,

$$k_m=\min\{k(\ell)\,|\,\ell\in\mathcal{L}\}$$

$$k_M=\max\{k(\ell)\,|\,\ell\in\mathcal{L}\}$$

$$r_m=\min\{r(P)\,|\,P\in\mathcal{P}\}$$

$$r_M=\max\{r(P)\,|\,P\in\mathcal{P}\}$$

tanımlanabilir. Bu durumda eğer,

$$k_m=k_M=k$$

ve

$$r_m=r_M=r$$

ise S ye regülerdir denir ve mertebesi de (k,r) olarak belirlenir (Saxena, 1967).

2.3.3 TANIM.

$(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ bir geometrik yapı, $\mathcal{P}'\subset\mathcal{P}$, $\mathcal{L}'\subset\mathcal{L}$ ve $I'\subset\mathcal{P}'\times\mathcal{L}'$ olmak üzere $(\mathcal{P}',\mathcal{L}',I')$ geometrik yapısına $(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ nın geometrik altyapısı denir.

2.3.1 TEOREM.

Herhangi bir sonlu S lineer uzayı için,

(i) $r_m \geqslant k_M+2$

(ii) $k_m(k_m-1) \geqslant r_M$

ise S bir hiperbolik düzlemdir.

İSPAT.

Bkz (Bumcrot, R.J.,[1]).

$S=(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ bir lineer uzay, $\mathcal{M}$, S nin aşağıdaki C şartını sağlayan doğruları cümlesi, Q da $\mathcal{M}$ nin en az bir doğrusu üzerinde bulunan S nin noktalarının cümlesi olsun.

C şartı: "S nin her doğrusu $\mathcal{M}$ yi en az farklı iki noktada keser."

$$S_{\mathcal{M}}=(\mathcal{P}\setminus Q,\ \mathcal{L}\setminus\mathcal{M},\ I\cap(\mathcal{P}\setminus Q)\times(\mathcal{L}\setminus\mathcal{M}))$$

yapısı S nin bir altuzayıdır. Eğer $S_{\mathcal{M}}$ bir düzlemse hiperbolik düzlemdir. P ve ℓ, $S_{\mathcal{M}}$ nin $P \not{I} \ell$ [1] olacak şekildeki nokta ve doğrusu olsun. Diğer tarafdan $A I \ell$, $B I \ell$, $A, B \in Q$, $A \neq B$ olacak şekilde A, B noktaları vardır. Bu durumda PA ve PB doğruları ℓ yi $S_{\mathcal{M}}$ de kesmezler.

v,b S nin sırasıyla nokta ve doğrularının sayısını, v', b' ise $S_{\mathcal{M}}$ nin sırasıyla nokta ve doğrularının sayısını göstersin ve $m=|\mathcal{M}|$ olsun. O zaman,

---

[1] $P \not{I} \ell$ gösterimi " P noktası ℓ doğrusunun üzerinde değildir." diye okunur.

$$b'=b-m \quad \ldots\ldots (2.3.1)$$

$$k_m-m \leqslant k'_m \leqslant k'_M \leqslant k_M-2 \quad \ldots\ldots (2.3.2)$$

$$r_m \leqslant r'_m \leqslant r'_M \leqslant r_M \quad \ldots\ldots (2.3.3)$$

$$v-mk_M \leqslant v' \leqslant v-(1/2)m(2k_m-m+1) \quad \ldots\ldots (2.3.4)$$

olur. Herbir doğru üzerinden k_m nokta atılır ise ve atılan herhangi iki doğru farklı noktalarda kesişir ise (2.3.4) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. Bu nedenle (2.3.4) eşitsizliğinin sağ tarafı $k_m < m$ için geçerli değildir. Fakat L2 den ve (2.3.2) den dolayı $m \leqslant k_m-2$ eşitsizliği gerçeklenir. 2.3.1 teorem ve yukarıdakilerden dolayı $S_{\mathfrak{M}}$ nin hiperbolik düzlem olması için,

$$k_m \geqslant m+2 \quad \ldots\ldots (2.3.5)$$

$$r_m \geqslant k_M \quad \ldots\ldots (2.3.6)$$

ve

$$(k_m-m)(k_m-m-1) \geqslant r_M \quad \ldots\ldots (2.3.7)$$

şartlarının sağlanması yeterlidir. S, n mertebeli bir projektif düzlem ise $\mathfrak{M}$ cümlesinin C şartını sağlaması için gerek ve yeter şart $n \geqslant 5$ iken,

$$3 \leqslant m \leqslant (1/2)[2n+1-(4n+5)^{1/2}]$$

olmasıdır. $m=3$ için,

$$k_m=n-2$$
$$k_M=n-1$$
$$r=n+1$$

özelliklerine haiz olan bir hiperbolik düzlem elde edilir. Bu $m=3$ özel hali, bir önceki bölümde takdim edilen Sandler'in B-L düzlemi modelini verir.

2.4 Kaya - Özcan'ın B-L Düzlemi Modeli (Sandler'in B-L Düzlemi Modelinin Genellemesi)

π mertebesi n olan sonlu bir projektif düzlem ve $m \leq n+2$ olacak sekilde, $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m$ bu düzlemin herhangi üçü noktadaş olmayan doğruları olsun. π den bu farklı m dogrunun ve bu doğrular üzerindeki tüm noktaların atılması ile elde edilen yapıya π_m diyelim.

2.4.1 ÖNERME.

(a) π_m de farklı iki nokta bir tek doğru belirler

(b) π_m nin herbir noktasından n+1 doğru geçer.

(c) π_m nin toplam doğru sayısı $n^2+n+1-m$ dir.

(d) π_m nin toplam nokta sayısı

$n^2+(1-m)n+(1/2)(m-1)(m-2)$

dir.

İSPAT.

Bkz (Kaya-Özcan,[6])

2.4.1 TANIM.

π de atılan $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m$ doğrularının herhangi ikisinin arakesiti olan noktaya köşe noktası denir.

π_m nin bir doğrusu, π nin bir dogrusu olarak düşünülürse [1], m nin tek veya çift olmasına göre, sırasıyla $(m-1)/2$ veya $m/2$ köşe noktası kapsar. O halde, buradan, aşağıdaki iki sonucun doğruluğu kolayca görülür;

---

[1] π_m nin bir doğrusu üzerinden, π de, atılan noktalar iade edilerek elde edilen doğru π nin bir dogrusu olarak düşünülür.

2.4.1 SONUÇ.

π de s adet köşe noktası kapsayan π_m nin bir doğrusunun π_m de tam olarak $n+1-(m-s)$ adet noktası vardır.

2.4.2 SONUÇ.

r, π_m nin bir doğrusunun genişletilmişi üzerindeki köşe noktalarının minimum sayısı, k da π_m nin bir doğrusu üzerindeki tüm noktaların sayısı olsun. O zaman,

(a) m çift ise,

$$n+1-m+r \leqslant k \leqslant n-(1/2)(m-2)$$

dir.

(b) m tek ise,

$$n+1-m+r \leqslant k \leqslant n-(1/2)(m-1)$$

dir.

2.4.2 ÖNERME.

r, π_m nin bir doğrusunun genişletilmişi üzerindeki noktaların minimum sayısını göstersin. Bu durumda eğer,

$$3 \leqslant m \leqslant n+r+(1/2)(1-\sqrt{4n+5}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4.1)$$

ise π_m bir B-L düzlemidir.

İSPAT.

G1: 2.4.1 sonuçtan dolayı, π_m nin herhangi bir doğrusu en az $n+1-m+r$ nokta kapsar. Diğer tarafdan 2.4.1 esitsizliğinden dolayı

$$m \leqslant n+r+(1/2)(1-\sqrt{4n+5})$$
$$\Rightarrow n \geqslant m-r-(1/2)(1-\sqrt{4n+5}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4.2)$$

olur. Burada $n \geqslant 2$ olduğu kullanılırsa,

$$m-r-(1/2)(1-\sqrt{4n+5}\,) \geqslant m-r-(1/2)(1-\sqrt{13}\,)$$

$$\Rightarrow m-r-(1/2)(1-\sqrt{4n+5}\,) \geqslant m-r+1$$

bulunur. Bu sonuç (2.4.2) eşitsizliğinde yerine konursa,

$$n \geqslant m-r-(1/2)(1-\sqrt{4n+5}\,) \geqslant m-r+1$$

$$\Rightarrow n \geqslant m-r+1$$

$$\Rightarrow n-m+r \geqslant 1$$

$$\Rightarrow n-m+r+1 \geqslant 2$$

$$\Rightarrow n+1-m+r \geqslant 2$$

elde edilir.

G2: 2.4.1 önermedeki (a) özelliği G2 aksiyomunun kendisi olduğundan, aşikâr olarak G2 sağlanır.

G3: π_m de her biri en az iki nokta kapsayan ve birbirine paralel olan iki doğru var olduğundan, aşikâr olarak G3 sağlanır.

G4: ℓ, π_m nin bir doğrusu ve P, π_m nin ℓ üzerinde olmayan bir noktası olsun. ℓ ye, üzerinden atılan nokta sayısı kadar, P den geçen paralel çizilebilir. Yani ℓ den m-s adet nokta atılmış ise, P den geçen ve ℓ ye paralel olan m-s adet doğru çizilebilir. Bu nedenle, m çift ise ℓ üzerinde en fazla m/2 köşe noktası mevcut olduğundan ℓ ye P den geçen en az,

$$m-(m/2)= m/2$$

adet paralel çizilebilir. m tek iken ise ℓ üzerinde en fazla (m-1)/2 adet köşe noktası mevcuttur. Bu nedenle ℓ ye P den geçen en az,

$$m-((m-1)/2) = (m+1)/2$$

adet paralel çizilebilir. Diğer taraftan $m \geqslant 3$ olduğundan $m/2 \geqslant 2$ veya $(m+1)/2 \geqslant 2$ dir.

G5: S, π_m nin noktaları cümlesinin doğrudaş olmayan A, B, C noktalarını kapsayan bir altcümlesi olsun. Ayrıca S, S ye ait herhangi iki noktayı birleştiren bir doğru üzerindeki tüm noktaları da kapsasın. O zaman S, AB, AC, ve BC doğruları üzerindeki tüm noktaları da kapsar. Bu doğruların herbiri, hipotezden dolayı, π de en az r adet köşe noktası kapsar. O halde AB doğrusu da π_m nin en az n+1-m+r adet noktasını kapsar. O zaman, C ile AB doğrusu üzerindeki n+1-m+r adet nokta birleştirilerek, C den geçen ve AB doğrusunu kesen en az n+1-m+r adet doğru elde edilir. Bu doğruların herbiri C den başka en az n-m+r adet nokta kapsar. Dolayısı ile S, en az ,

$$(n-m+r)(n-m+r+1)+1$$

nokta kapsar.

X, π_m nin herhangi bir noktası olsun. X ile, S tarafından en az olarak kapsanan,

$$(n-m+r)(n+1-m+r)+1$$

adet nokta birleştirilirse X den ve S nin bir noktasından geçen en az $(n-m+r)(n+1-m+r)+1$ adet doğru elde edilir. Diğer taraftan π de X den tam olarak n+1 doğru geçer. Bu durumda eğer,

$$(n-m+r)(n+1-m+r)+1 \geqslant n+2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4.3)$$

ise, X noktasını S nin noktalarına birleştiren doğruların en az iki tanesi çakışır demektir.(Aksi halde X den n+2 adet doğru geçmiş olurdu ki bu imkânsızdır.). Yani X i, S nin noktalarına birleştiren bir doğru üzerinde S nin en az iki noktası mevcut olur. Bu ise $X \in S$ demek olup, S ile π_m nin noktaları cümlesi aynıdır.

O halde G5 in sağlanması için (2.4.3) eşitsizliğinin geçerli olması yeterlidir. Şimdi (2.4.3) eşitsizliğini inceleyelim:

$$(n-m+r)(n+1-m+r) \geqslant n+2$$

$$\Rightarrow (n-m+r)(n+1-m+r)-n-1 \geqslant 0$$

$$\Rightarrow n^2+n-mn+nr-mn-m+m^2-rm+nr+r-mr+r^2-n-1 \geqslant 0$$

$$\Rightarrow m^2-m(2n+2r+1)+n^2+2nr+r^2+r-1 \geqslant 0$$

Son bulunan ikinci derece polinomun m ye göre kökleri,

$$m_{1,2}=\frac{2n+2r+1\mp\sqrt{(4n^2+8nr+4n+4r+4r^2+1)-(4n^2+8nr+4r^2+4r-4)}}{2}$$

$$\Rightarrow m_{1,2}=\frac{2n+2r+1\mp\sqrt{4n+5}}{2}$$

$$\Rightarrow m_{1,2}=n+r+(1/2)\mp(1/2)\sqrt{4n+5}$$

$$\Rightarrow m_{1,2}=n+r+(1/2)(1\mp\sqrt{4n+5})$$

$$\Rightarrow m_1=n+r+(1/2)(1-\sqrt{4n+5})$$

$$m_2=n+r+(1/2)(1+\sqrt{4n+5})$$

olarak elde edilir.

	m_1		m_2	
+		−		+

Bu durumda $m \leqslant n+2$ olduğundan $m \leqslant m_1$ olmalıdır. Yani,

$$m \leqslant n+r+(1/2)(1-\sqrt{4n+5})$$

olur ki bu (2.4.1) eşitsizliğinin ikinci yanı olduğundan (2.4.3) sağlanır. Dolayısıyla G5 aksiyomu sağlanır.

BÖLÜM 3

3. HİPERBOLİK DÜZLEMLERİN PROJEKTİF ALTDÜZLEMLERLE İLİŞKİSİ

Π mertebesi n olan sonlu bir projektif düzlem ve Π' mertebesi m olan, Π nin bir projektif altdüzlemi olsun. Bu durumda 1.2 teoremden dolayı ya $n=m^2$ veya $n \geq m^2+m$ olduğu bilinmektedir. $n=m^2$ halinde Π'ye Baer altdüzlemi denir.

$\Pi=(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ mertebesi n olan $(n \geq 9)$ sonlu bir projektif düzlem ve $\Pi'=(\mathcal{P}',\mathcal{L}',I')$, Π nin bir Baer altdüzlemi olsun. Bu durumda $A \in \mathcal{P}$, $A \notin \mathcal{P}'$ olmak üzere A dan geçen Π nin farklı $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$ doğrularını gözönüne alalım. $\mathcal{L}_k = \mathcal{L} \setminus \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k\}$ $\mathcal{P}_k = \{X \mid X \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}', X \not I \ell_i, 1 \leq i \leq k\}$ ve $I'' = I \cap (\mathcal{P}_k \times \mathcal{L}_k)$ olmak üzere $2 \leq k \leq n-\sqrt{n}-(1/2)(1+\sqrt{4n+5})$ ise $\mathcal{H}=(\mathcal{P}_k,\mathcal{L}_k,I'')$ altyapısı, Graves anlamında, bir hiperbolik düzlemdir (Kaya-Olgun., [5]).

Bu çalışmada ise mertebesi $n \geq m^2+m$ özellikli projektif altdüzlemlerle hiperbolik düzlemlerin ilişkisi incelenmektedir.

$\Pi=(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ mertebesi n olan sonlu bir projektif düzlem $\Pi'=(\mathcal{P}',\mathcal{L}',I')$ de Π nin,

$$n \geq m^2+m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1)$$

özelliğindeki m mertebeli bir projektif altdüzlemi olsun. Burada $I' \subset \mathcal{P}' \times \mathcal{L}'$ olup, $I'=I \cap (\mathcal{P}' \times \mathcal{L}')$ olduğundan I' ile I aynı anlamda olup I' yerine I gösterimini kullanmakta bir sakınca yoktur.

Π den Π' nün tüm doğrularının ve bu dogrular üzerindeki tüm noktaların çıkarılması ile elde edilen yapıyı Π_0 ile gösterelim. Şöyle ki:

$$Q = \{ P \in \mathcal{P} \mid P I \ell,\ \ell \in \mathcal{L}' \}$$

tanımlansın. O zaman, $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P} \setminus Q$, $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}'$, $I_0 = I \cap (\mathcal{P}_0 \times \mathcal{L}_0)$ olmak üzere $\Pi_0 = (\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0, I_0)$ şeklindedir. Burada biraz evvel ifade edilen nedenle I_0 yerine I yazmakta bir sakınca yoktur. Dolayısıyla $\Pi_0 = (\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0, I)$ formundadır.

3.1 Π_o Yapısının Bazı Özellikleri

3.1.1 ÖNERME.

(1) Π_o da farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.

(2) Π_o ın toplam doğru sayısı n^2+n-m^2-m dir.

(3) Π_o ın toplam nokta sayısı $(n-m)(n-m^2)$ dir.

(4) Π_o ın herhangi bir doğrusu üzerindeki en az nokta sayısı $n-m^2-m$ dir.

İSPAT.

(1) Π de fakl̇ı iki noktadan bir tek doğru geçtiği P1 den dolayı aşikârdır. $X, Y \in \mathcal{P}_o$ olsun. Bu durumda $\mathcal{P}_o \subset \mathcal{P}$ olduğundan $X, Y \in \mathcal{P}_o$ olup $XY \in \mathcal{L}$ doğrusu mevcuttur. Π' nün tüm doğruları, üzerlerindeki tüm noktalarla birlikte atıldığından $XY \notin \mathcal{L}$ dür.

(2) Π_o, Π den Π'nün tüm doğruları atılarak elde edildiğinden, Π_o ın doğruları sayısı Π nin doğruları sayısı ile Π' nün doğruları sayısı arasındaki fark kadardır. Yani:

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{L}_o| &= |\mathcal{L}|-|\mathcal{L}'| \\
&= n^2+n+1-(m^2+m+1) \\
&= n^2+n-m^2-m
\end{aligned}
$$

dir.

(3) Daha önce tanımlanan,

$$Q=\{P\in\mathcal{P} \mid P I \ell,\ \ell\in\mathcal{L}'\}$$

için

$$|Q|=(m^2+m+1)(n+1-m) \quad \text{.......................}(3.1.1)$$

dir. Çünkü Π den toplam m^2+m+1 adet doğru atılmış olup, atılan herbir doğru üzerinde, $\mathcal{P}'$ nün elemanı olmayan $\mathcal{P}$ nin $n-m$ adet noktası vardır. O halde atılan yapının $\mathcal{P}'$ ye ait olmayan toplam nokta sayısı $(m^2+m+1)(n-m)$ dir. Diğer yandan, $\mathcal{P}'$ nün toplam nokta sayısı m^2+m+1 olduğundan (3.1.1) in doğru olduğu gösterilmiş olur.

Öte yandan,

$$\mathcal{P}=\mathcal{P}_0 \cup Q \ , \ \mathcal{P}_0 \cap Q = \Phi$$

olduğu aşikârdır. O halde,

$$|\mathcal{P}|=|\mathcal{P}_0 \cup Q| \Rightarrow |\mathcal{P}|=|\mathcal{P}_0|+|Q|$$

$$\Rightarrow |\mathcal{P}_0| = |\mathcal{P}| - |Q|$$

$$= n^2+n+1-(m^2+m+1)(n+1-m)$$

$$= n^2+n+1-nm^2-nm-n-m^2-m-1+m^3+m^2+m$$

$$= n^2-nm^2-nm+m^3$$

$$= m^2(m-n)+n(n-m)$$

$$= (n-m)(n-m^2)$$

olarak elde edilir.

(4) π_0 inşa edilirken π nin atılan yapıya ait olmayan bir doğrusu üzerinden en fazla m^2+m+1 adet nokta atılmıştır (Böyle doğrular, üzerinde atılan yapının hiçbir noktasını bulundurmayan doğrulardır.). Bu nedenle π_0 ın bir doğrusu tarafından kapsanan minimum nokta sayısı,

$$n+1-(m^2+m+1) = n-m^2-m$$

dir.

3.1.1 TANIM.

π_0 ın tam olarak bir tek noktasını kapsayan bir doğruya teğet doğru, hiçbir noktasını kapsamayan bir doğruya da dış doğru denir.

3.1.2 ÖNERME.

π_0 ın herhangi bir doğrusu ya $n-m^2-m$ adet nokta veya $n-m^2$ adet nokta kapsar.

İSPAT.

$\ell_0 \in \mathcal{L}_0$ olsun. ℓ_0 ın tamamlanmışını ℓ ile gösterelim. O zaman ℓ doğrusu atılan yapının ya hiçbir noktasını kapsamaz yada bir tek noktasını kapsar. Yani ya ℓ bir dış doğru yada bir teğet doğrudur. ℓ bir dış doğru ise, atılan yapının (π' nün) atılan m^2+m+1 doğrusu ile ℓ farklı noktalarda kesişirler. Bu ise ℓ doğrusu üzerinden farklı m^2+m+1 adet noktanın atılması demektir. O halde ℓ_0 doğrusu, ℓ üzerinden m^2+m+1 adet noktanın atılması ile elde edilmiştir. Diğer taraftan ℓ üzerinde, π de, $n+1$ adet nokta var olup, bunların m^2+m+1 tanesi atıldığından ℓ_0 üzerinde tam olarak,

$$n+1-(m^2+m+1) = n-m^2-m$$

adet nokta vardır. O halde ℓ_0 doğrusu $n-m^2-m$ adet nokta kapsar. Eğer ℓ bir teğet doğru ise, bu durumda, ℓ ile atılan yapının bir tek P ortak noktası var demektir. P noktasından π' nün $m+1$ adet doğrusu geçer. Bu $m+1$ adet doğrunun hepsi de ℓ yi bir tek P noktasında keserler. Bu nedenle de ℓ_0 doğrusu, ℓ doğrusu üzerinden m^2+1 adet nokta atılarak elde edilmiş demektir. Böylece ℓ_0 doğrusu üzerinde,

$$n+1-(m^2+1) = n-m^2$$

adet noktanın varlığı bulunmuş olur.

3.2 π_0 Yapısının Hiperbolik Düzlemlerle İlişkisi

Şimdi, π_0 yapısının hangi şartlar altında bir hiperbolik düzlem belirlediğini araştıracağız. Bunun için $\pi_0 = (\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0, I)$ yapısının $G1 - G5$ aksiyomlarını sağlaması için gerekli şartların neler olduğunu tesbit etmeliyiz.

3.1.1 önermenin (1) şıkkından dolayı G1 aşikârdır. π_0 ın herhangi bir doğrusu üzerindeki en az nokta sayısı 3.1.1 önermenin (4) şıkkından dolayı, $n-m^2-m$ dir. Bu durumda G2 aksiyomunun sağlanması için (yani Π_0 ın herhangi bir doğrusu üzerinde en az iki nokta bulunması için),

$$n-m^2-m \geqslant 2$$

olması gereklidir.

Bir doğruya dışındaki bir noktadan o doğrunun genişletilmişi olan doğru üzerinden atılan nokta sayısı kadar paralel doğru çizilebilir. O halde G3 ü yani, "Bir doğruya dışındaki bir noktadan en az iki paralel çizilebilir." aksiyomunu incelemek için, Π_0 ın bir doğrusu üzerinden en az ne kadar nokta atıldığı bulunmalıdır. Π_0 ın bir doğrusu üzerinden en az m^2+1 adet nokta atılmış olduğundan bir doğruya dışındaki bir noktadan en az m^2+1 adet paralel doğru çizilebilir. Burada $m \geqslant 2$ olduğundan,

$$m^2+1 \geqslant 2^2+1 = 5$$

olur. Bunun anlamı ise, bir doğruya dışındaki bir noktadan en az beş paralel doğru çizilebileceğidir.

Şimdi, Π_0 yapısı için G4 aksiyomunu inceleyelim. Yani Π_0 da herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktanın var olup olmadığını araştıralım:

$\ell_0 \in \mathcal{L}_0$, $P \not I \ell_0$, $P \in \mathcal{P}_0$ olsun. O zaman G3 gereğince ℓ_0 doğrusuna P noktasından geçen en az iki (hatta beş) paralel doğru çizilebilir. Yani,

$$\exists\, \ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}_0 \ni P I \ell_1,\ P I \ell_2,\quad \ell_1 \wedge \ell_0 = \Phi = \ell_2 \wedge \ell_0$$

olacak sekilde ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 doğruları ve P noktası mevcuttur. Diğer taraftan G2 den dolayı,

$$R I \ell_2,\ Q I \ell_1,\ R \neq P \neq Q$$

olacak şekilde $R, Q \in \mathcal{P}_0$ noktaları vardır. Bu durumda

G2 den dolayı,

$$A I \ell_0, \ B I \ell_0, \ A \neq B$$

olacak şekilde $A, B \in \mathcal{P}_0$ noktaları da bulunabilir. A, B, Q, R noktalarının herhangi üçü doğrudaş değildir. Dolayısıyla π_0 için G4 aksiyomu sağlanır.

Son olarak π_0 yapısı için G5 aksiyomunu inceleyelim. Önce G5 aksiyomunun " $S \subset \mathcal{P}_0$ doğrudaş olmayan farklı üç nokta ile, herhangi iki noktasını birleştiren doğrular üzerindeki tüm noktaları da kapsıyorsa $S = \mathcal{P}_0$ dır." olduğunu hatırlayalım. Şimdi, $S \subset \mathcal{P}_0$ doğrudaş olmayan farklı A, B, C noktalarını kapsasın. Bu takdirde, AB, AC ve BC doğrularını gözönüne alalım. π_0 ın bir doğrusu üzerindeki en az nokta sayısı 3.1.1 önermenin (4) sıkkından dolayı $n-m^2-m$ dir. Bu nedenle BC doğrusu üzerinde en az $n-m^2-m$ adet nokta vardır. A noktası ile, BC doğrusu üzerindeki $n-m^2-m$ adet noktayı birleştiren doğruları düşünelim. Böylece S ye ait $n-m^2-m$ adet doğru elde edilir. Bu doğruların herbiri üzerinde A noktası hariç $n-m^2-m-1$ adet nokta vardır. O halde S de en az,

$$(n-m^2-m)(n-m^2-m-1)+1$$

adet nokta mevcuttur.

$X \in \mathcal{P}_0$ olsun. X noktasını S nin noktalarına birleştiren doğruları teşkil edelim. Bu durumda eğer,

$$(n-m^2-m)(n-m^2-m-1)+1 \geqslant n+2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.2.1)$$

ise, yani X ile S nin noktalarını birleştiren doğru sayısı $n+1$ den büyük ise, X noktasını S nin noktalarına birleştiren en az iki doğru çakışıktır demektir. Bu durumda X noktasını S nin noktalarına birleştiren en az bir doğru üzerinde S nin farklı en az iki noktası vardır. Diğer taraftan kabul gereği S nin farklı iki noktasını birleştiren bir doğru üzerindeki tüm noktalar da S nin elemanı olacağından $X \in S$ olur. Bu durumda $G5$ aksiyomunun sağlanması için (3.2.1) eşitsizliğinin sağlanması gerektiği sonucuna ulaşılır.

Şimdi tekrar (3.2.1) esitsizliğine dönelim:

$$(n-m^2-m)(n-m^2-m-1)+1 \geqslant n+2$$

$$\Rightarrow n^2-nm^2-nm-n-nm^2+m^4+m^3+m^2-nm+m^3+m^2+m+1 \geqslant n+2$$

$$\Rightarrow n^2-n(m^2+m+m^2+1+m)+m^4+2m^3+2m^2+m+1 \geqslant n+2$$

$$\Rightarrow n^2-n(2m^2+2m+1)+m^4+2m^3+2m^2+m-n-1 \geqslant 0$$

$$\Rightarrow n^2-2n(m^2+m+1)+m^4+2m^3+2m^2+m-1 \geqslant 0$$

olur. Şimdi,

$$n^2-2n(m^2+m+1)+m^4+2m^3+2m^2+m-1 = 0$$

ikinci derece polinomunu n ye göre çözelim:

$$n_{1,2}=\frac{2(m^2+m+1)\mp\sqrt{4(m^2+m+1)^2-4(m^4+2m^3+2m^2+m-1)}}{2}$$

$$=(m^2+m+1)\mp\sqrt{(m^2+m+1)^2-m^4-2m^3-2m^2-m+1}$$

$$=m^2+m+1\mp\sqrt{m^4+m^2+1+2m^3+2m^2+2m-m^4-2m^3-2m^2-m+1}$$

$$=m^2+m+1\mp\sqrt{m^2+m+2}$$

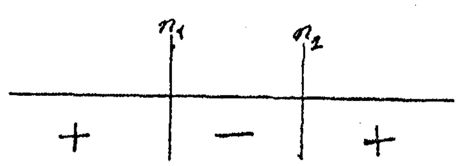
O halde,

$$n^2-2n(m^2+m+1)+m^4+2m^3+2m^2+m-1 = 0$$

denkleminin kökleri,

$$n_{1,2}=m^2+m+1\mp\sqrt{m^2+m+2}$$

dir. Bu durumda, $n \leqslant n_1$ veya $n \geqslant n_2$ olmalıdır.



Sonuç olarak bulunan köklerden dolayı (3.2.1) eşitsizliğinin sağlanması için,

$$n \leqslant m^2+m+1-\sqrt{m^2+m+2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.2)$$

veya

$$n \geqslant m^2+m+1+\sqrt{m^2+m+2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.3)$$

olması gerekmektedir. Oysa (3.1) den dolayı,

$$n \geqslant m^2+m$$

olup,

$$\sqrt{m^2+m+2} > 2$$

olduğundan,

$$n < m^2+m$$

olurdu. Bu nedenle Π_o için (3.2.2) eşitsizliğinin sağlanmadığı aşikârdır. O halde G5 aksiyomunun geçerli olması için (3.2.3) eşitsizliğinin sağlanması yeterlidir. Yani,

$$n \geqslant m^2+m+1+\sqrt{m^2+m+2}$$

olmalıdır. (3.2.3) sağlanıyor ise, (3.2.1) de sağlandığından G5 aksiyomu Π_o da geçerlidir.

Sonuç olarak Π_o da G5 aksiyomunun sağlanması için,

$$n \geqslant m^2+m+1+\sqrt{m^2+m+2}$$

olmalıdır.

O halde, şimdi aşağıdaki önerme verilebilir:

3.2.1 ÖNERME.

$\Pi = (\mathcal{P},\mathcal{L},\mathrm{I})$ mertebesi n olan sonlu bir projektif düzlem ve $\Pi' = (\mathcal{P}',\mathcal{L}',\mathrm{I}')$, $\mathrm{I}' = \mathrm{I} \cap (\mathcal{P}' \times \mathcal{L}')$ olmak üzere Π projektif düzleminin mertebesi m olan ($n \geqslant m^2+m$) bir projektif altdüzlemi olsun. Π den Π' nün tüm doğruları ile bu dogrular üzerindeki tüm noktaların atılması ile elde edilen kalan yapıya π_0 diyelim. Bu durumda eğer,

$$n \geqslant m^2+m+1+\sqrt{m^2+m+2}$$

ise π_0 bir B-L düzlemidir.

Aslında 3.2.1 önerme sözler yerine sembollerle şöyle de ifade edilebilir:

$\pi = (\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ mertebesi n olan bir projektif düzlem, $\pi' = (\mathcal{P}',\mathcal{L}',I')$, π nin mertebesi m olan ($n \geqslant m^2+m$) bir projektif altdüzlemi olsun ($I'=I \cap (\mathcal{P}' \times \mathcal{L}')$).

$$Q = \{P \mid PI\ell,\ \ell \in \mathcal{L}'\}$$

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{P} \setminus Q$$

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}'$$

olmak üzere eğer,

$$n \geqslant m^2+m+1+\sqrt{m^2+m+2}$$

ise $\pi_0 = (\mathcal{P}_0,\mathcal{L}_0,I_0)$, ($I_0 = I \cap (\mathcal{P}_0 \times \mathcal{L}_0)$) geometrik yapısı bir B-L düzlemidir.

3.3 π_0 B-L Düzleminin Bazı Özellikleri

3.3.1 ÖNERME.

π_0, 3.2.1 önermedeki gibi elde edilen bir B-L düzlemi olsun. Bu takdirde,

(1) π' nün herhangi bir noktasından π_0 ın $n-m$ adet doğrusu geçer.

(2) π_0 ın teğet doğrularının toplam sayısı $(m^2+m+1)(n-m)$ dir.

(3) π_0 ın dış doğrularının toplam sayısı $n^2+n+1-(m^2+m+1)(n+1-m)$ dir.

(4) π_0 regüler değildir.

(5) π_0 ın bir noktasından m^2+m+1 adet teğet doğru geçer.

(6) π_0 ın bir noktasından $n-m^2-m$ adet dış doğru geçer.

İSPAT.

(1) $P\in\mathcal{P}'$, π' nün herhangi bir noktası olsun. P den, π de, $n+1$ ve π' de $m+1$ adet doğru geçer. Bu nedenle π_0 da P den,

$$n+1-(m+1) = n-m$$

adet doğru geçer. Bu ise π' nün herhangi bir noktasından $n-m$ adet teğet doğru geçtiğini gösterir.

(2) π_0 ın teğet doğrularının cümlesini C_t ile gösterelim. O zaman,

$$C_t = \{\ell \mid \ell\notin\mathcal{L}',\ P\,\mathrm{I}\,\ell,\ P\in\mathcal{P}'\}$$

olup,

$$|C_t| = |\{\ell \mid \ell\notin\mathcal{L}',\ P\,\mathrm{I}\,\ell,\ P\in\mathcal{P}'\}|$$

dir. Diğer taraftan π' nün m^2+m+1 adet noktası olup, π' nün her noktasından π_0 ın $n-m$ adet doğrusu geçer. Bu doğrular teğet doğrular olup,

$$|C_t| = (m^2+m+1)(n-m)$$

elde edilir.

(3) π_0 ın dış doğrularının cümlesini C_d ile gösterelim. O zaman,

$$C_d = \{\ell\in\mathcal{L} \mid \ell\notin\mathcal{L}',\ P\not{\mathrm{I}}\,\ell,\ \forall P\in\mathcal{P}'\}$$

dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}|C_d| &= |\mathcal{L}| - (|C_t| + |\mathcal{L}'|)\\ &= n^2+n+1-[(m^2+m+1)(n-m)+(m^2+m+1)]\\ &= n^2+n+1-(m^2+m+1)(n+1-m)\end{aligned}$$

olur.

(5) $P \in \mathcal{P}_o$ olsun. O zaman P ile π' nün herhangi bir noktasını birleştiren bir doğru π' ye ait olmayacağından P den geçen bu tür doğruların toplam sayısı π' nün toplam nokta sayısı olan m^2+m+1 e eşittir.

(6) $P \in \mathcal{P}_o$ olsun. P den, π de, n+1 doğru geçer. Ayrıca, (5) den dolayı P den m^2+m+1 adet teğet doğru geçer. O halde P den,

$$n+1-(m^2+m+1) = n-m^2-m$$

adet dış doğru geçer.

3.3.2 ÖNERME.

π_o , 3.2.1 önermedeki gibi elde edilen bir B-L düzlemi olsun.

(1) π_o ın C_t sınıfından bir doğrusu en fazla n-4 adet nokta kapsar.

(2) π_o ın C_d sınıfından bir doğrusu en fazla n-6 adet nokta kapsar.

İSPAT.

(1) C_t sınıfından bir doğrunun üzerinde $n-m^2$ adet nokta vardır. Burada $m \geqslant 2$ olduğu gözönüne alınırsa, C_t sınıfından bir doğru üzerinde en fazla $n-2^2$ adet nokta olacağı elde edilir.

(2) C_d sınıfından bir doğru üzerinde $n-m^2-m$ adet nokta vardır. Bu durumda $m \geqslant 2$ olduğu gözönüne alınırsa, C_d sınıfından bir doğru en fazla $n-2^2-2$ adet nokta kapsar.

3.4. π_o B-L Düzleminin Paralel Doğru Sınıfları

Bu kesim (Olgun, [7]) tarafından, π_m hiperbolik düzleminin paralel doğru sınıfları ve bazı kombinatörsel özelliklerine dair yapılan çalışmadaki tekniğin, π_o B-L düzlemlerine uygulanması biçimindedir.

3.4.1 TANIM.

Π_o ın herhangi ikisi paralel olan tüm dogrularının oluşturduğu bir cümleye paralel sınıf denir.

Π_o ın, Π nin atılan herhangi P noktasından geçen tüm doğruları bir paralel doğru sınıfı teşkil eder. Bu paralel dogru sınıfına P nin belirttiği paralel sınıf veya (P)- tipinden bir paralel sınıf denir.

Bir ℓ doğrusu ile bu doğru üzerinde bulunmayan, atılan bir Q noktasından geçen ve ℓ yi, Π de, atılan noktalarda kesen tüm doğrular da bir paralel doğru cümlesi oluştururlar. Ancak bu doğrular cümlesini kapsayan bir çok paralel sınıf bulunabilir. Sözü edilen doğrular cümlesini kapsayan tüm paralel sınıfların arakesiti, ℓ ile Q nun belittiği paralel sınıf veya (ℓ, Q)- tipinden bir paralel sınıf olarak adlandırılır.

Π_o ın yukarıda belirlenen paralel doğru sınıflarından başka paralel sınıfların da bulunması mümkün olduğundan (P)- ve (ℓ, Q)- tipinden paralel sınıflara aşikâr paralel sınıflar demek uygun olur.

Şimdi Π_o da aşikâr paralel sınıflar tanımlandığına göre bunların kombinatörsel özelliklerini incelemeye baslayabiliriz.

3.4.1 ÖNERME.

Π_o ın (P)- tipinden bir paralel doğru sınıfında ya n yada n-m adet doğru vardır.

İSPAT.

Bir P noktasının atılan bir nokta olması için gerek ve yeter sart ya $P \in \mathcal{P}'$ yada $P \notin \mathcal{P}'$, $P I \ell \in \mathcal{L}'$ olmasıdır. Buna göre:

(i) $P \in \mathcal{P}'$ ise, P den geçen $\mathcal{L}_o$ ın doğruları sayısı n-m dir. Bu n-m adet doğrunun hepsi de atılan P noktasında noktadaş oldukları için,

$$(P) = n-m$$

olur.

(ii) $P \notin \mathcal{P}'$, $PI\ell \in \mathcal{L}'$ ise, atılan bir dış noktadan[1] geçen π_0 ın doğruları sayısı aranılan sayıdır. P noktasından $n+1$ adet doğru geçer ve bu doğrulardan birisi hariç diğerlerinin hiçbiri de π' nün doğrusu değildir. O halde π_0 ın, π de, P den geçen doğrularının sayısı n dir.

3.4.2 ÖNERME.

π_0 ın (ℓ,P) tipinden bir paralel sınıfına ait doğruların minimum sayısı $\min|(\ell,P)|$ olduğuna göre,

$$\min|(\ell,P)| = \begin{cases} m^2+1 & ; \ P\notin\mathcal{P}', \ell\in C_t \text{ veya } P\in\mathcal{P}', \ell\in C_d \text{ ise,} \\ m^2+m+1 & ; \ P\notin\mathcal{P}', \ell\in C_d \text{ ise,} \\ m^2-m+1 & ; \ P\in\mathcal{P}', \ell\in C_t \text{ ise,} \end{cases}$$

İSPAT.

ℓ, π_0 ın herhangi bir doğrusu olsun. Bu durumda ya $\ell\in C_t$ yada $\ell\in C_d$ olmak zorundadır. Çünkü, $\mathcal{L}_0 = C_t \cup C_d$, $C_t \cap C_d = \Phi$ dir.

(i) $\ell \in C_t$ ise;

(a) $P\in\mathcal{P}'$ ise, ℓ doğrusu üzerinden atılan noktaların sayısı m^2+1 dir. Diğer taraftan P den, π'de, toplam $m+1$ adet doğru geçer ve bu doğrular atılan doğrudurlar. Dolayısıyla ℓ doğrusu ile birlikte en az,

$$m^2+1-(m+1)+1 = m^2-m+1$$

adet doğru (ℓ,P) tipindendir.

(b) $P\in\mathcal{P}'$ ise, ℓ doğrusu üzerinden atılan noktaların sayısı m^2+1 dir. Bu m^2+1 nokta ile ℓ üzerinde olmayan P noktası birleştirilirse, elde edilen m^2+1 adet doğru ℓ yi, π de, atılan noktalarda keserler. Bu doğrulardan biri atılan doğru olduğundan, ℓ ile birlikte en az m^2+1 adet doğru (ℓ,P) tipindendir.

---

[1]"Atılan bir dış nokta" deyiminin anlamı " atılan fakat π' nün elemanı olmayan bir nokta " demektir.

(ii) $\ell \in C_d$ ise,

(a) $P \notin \mathcal{P}'$ ise, ℓ doğrusu üzerinden m^2+m+1 adet nokta atılmıştır. Bu noktalarla $P \not\in \ell$ noktası birleştirildiğinde elde edilen m^2+m+1 adet doğru ℓ yi, π de, atılan noktalarda keserler. Bu doğrulardan biri atılan doğru olduğundan ℓ ile birlikte en az m^2+m+1 adet doğru (ℓ,P) tipindendir.

(b) $P \in \mathcal{P}'$ ise, P den, π'de, m+1 adet atılan doğru geçer. Bu sebeple P ile ℓ üzerinden atılan m^2+m+1 adet doğru birleştirilirse, elde edilen m^2+m+1 adet doğrudan m+1 tanesi atılan doğrudur. Bu durumda ℓ ile birlikte en az, $m^2+m+1-(m+1)+1 = m^2+1$ adet doğru (ℓ,P) tipindendir.

3.4.3 ÖNERME.

π_0 ın C_t sınıfına ait bir ℓ doğrusu m^2+1 adet $(P)_-$ tipinden, $m(m+1)(n-m)+n$ adet $(\ell, P)_-$ tipinden paralel sınıfa aittir.

İSPAT.

$\ell \in C_t$ olduğundan ℓ ile atılan π' nün arakesiti sadece bir tek noktadır. Bu noktadan π' nün m+1 doğrusu geçtiğinden geriye kalan m^2 adet doğru ℓ yi farklı noktalarda keserler. O halde ℓ üzerinden atılan noktaların sayısı m^2+1 olduğundan ve bu atılan noktaların herbiri $(P)_-$ tipinden bir paralel sınıfa karşılık geldiğinden, ℓ_0 doğrusu m^2+1 adet $(P)_-$ tipinden paralel sınıfa aittir.

Diğer taraftan ℓ nin dışında atılan noktaların sayısı,

$$\begin{aligned}(m^2+m+1)(n+1-m)-m^2-1 &= (m^2+m+1)(n-m)+m^2+m+1-m^2-1\\ &= (m^2+m+1)(n-m)+m\\ &= (m^2+m)(n-m)+n-m+m\\ &= (m^2+m)(n-m)+n\\ &= m(m+1)(n-m)+n\end{aligned}$$

olduğundan ℓ doğrusu $m(m+1)(n-m)+n$ adet $(\ell, P)_-$ tipinden paralel sınıfa aittir.

3.4.4 ÖNERME.

Π_0 ın C_d sınıfına ait olan bir ℓ doğrusu m^2+m+1 adet (P)- tipinden ve $(m^2+m+1)(n-m)$ adet (ℓ, P)- tipinden paralel sınıfa aittir.

İSPAT.

3.4.3 önermedeki gibidir.

3.4.5 ÖNERME.

$\mathcal{L}_0$, Π_0 ın doğruları cümlesi, i de herhangi tipten bir paralel sınıfı gösterdiğine göre $f_i(\ell)$, $\ell \in \mathcal{L}_0$ doğrusunun ait olduğu i tipinden paralel sınıf sayısı olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

(i) $f_{(P)}(\ell) + f_{(\ell, P)}(\ell) = (m^2+m+1)(n+1-m)$

(ii) $\sum_{\ell \in \mathcal{L}_0} f_{(P)}(\ell) = (m^2+m+1)(n+1)(n-m)$

(iii) $\sum_{\ell \in \mathcal{L}_0} f_{(\ell, P)}(\ell) = (m^2+m+1)(n-m)(n^2-m^2+n)$

İSPAT.

(i) Herhangi bir $\ell \in \mathcal{L}_0$ doğrusu, üzerinden atılmış olan noktaların sayısı kadar (P)- tipinden, üzerinde olmayan atılmış noktaların sayısı kadar da (ℓ, P) tipinden paralel doğru sınıfına aittir. O halde bir $\ell \in \mathcal{L}_0$ doğrusu toplam olarak Π den atılan noktaların sayısı kadar (P)-veya (ℓ, P)- tipinden paralel sınıfa aittir. Π den atılan toplam nokta sayısı,

$(m^2+m+1)(n+1-m)$

olduğundan,

$$f_{(P)}(\ell) + f_{(\ell, P)}(\ell) = (m^2+m+1)(n+1-m) \quad ; \forall \ell \in \mathcal{L}_0$$

elde edilir.

(ii) $\sum_{\ell \in \mathcal{L}_0} f_{(P)}(\ell)$ toplamı, atılan tüm noktalarla bu noktalardan geçen Π_0 ın doğrularının oluşturduğu toplam flag[1] sayısıdır. Bu toplam aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\sum_{\ell\in\mathcal{L}_0} f_{(P)}(\ell) = \sum_{\substack{\ell\in\mathcal{L}_0 \\ P\in\mathcal{P}'}} f_{(P)}(\ell) + \sum_{\substack{\ell\in\mathcal{L}_0 \\ P\notin\mathcal{P}' \text{ atılan nokta}}} f_{(P)}(\ell)$$

Bundan dolayı,

$$\begin{aligned}\sum_{\ell\in\mathcal{L}_0} f_{(P)}(\ell) &= |\mathcal{P}'|\cdot(n-m)+(|Q|-|\mathcal{P}'|)n \\ &= (m^2+m+1)(n-m)+(m^2+m+1)(n-m)n \\ &= (m^2+m+1)(n-m)(n+1)\end{aligned}$$

olduğu görülür.

(iii) $\sum_{\ell\in\mathcal{L}_0} f_{(\ell,\ P)}(\ell)$ toplamı atılan tüm noktalarla bu noktalardan geçmeyen Π_0 ın doğrularının oluşturduğu toplam anti-flag sayısıdır. Buradan,

$$\begin{aligned}\sum_{\ell\in\mathcal{L}_0} f_{(\ell,\ P)}(\ell) &= \sum_{\ell\in C_t} f_{(\ell,\ P)}(\ell) + \sum_{\ell\in C_d} f_{(\ell,\ P)}(\ell) \\ &= |C_t|[(m^2+m+1)(n-m)+m] + |C_d|\cdot(m^2+m+1)(n-m) \\ &= |C_t|(m^2+m+1)(n-m)+|C_t|m+|C_d|(m^2+m+1)(n-m) \\ &= (m^2+m+1)(n-m)(|C_t|+|C_d|)+|C_t|m \\ &= (m^2+m+1)(n-m)|\mathcal{L}_0|+(m^2+m+1)(n-m)m \\ &= (m^2+m+1)(n-m)(n^2+n-m^2-m)+(m^2+m+1)(n-m)m \\ &= (m^2+m+1)(n-m)(n^2+n-m^2-m+m) \\ &= (m^2+m+1)(n-m)(n^2+n-m^2)\end{aligned}$$

elde edilir.

3.5 İzomorfizm

Π mertebesi n olan sonlu bir projektif düzlem olmak üzere Π nin m mertebeli Π' ve Π'' projektif altdüzlemlerini gözönüne alalım. Π, Π' ve Π'' için

---

1 Bir doğru ile bu doğru üzerinde bulunan bir noktanın teşkil ettiği konfigürasyona flag denir.

3.2.1 önerme sağlansın ve π' yardımı ile π_0' , π'' yardımı ile de π_0'' B-L düzlemleri elde edilsin. O zaman aşagıdaki önermeyi verebiliriz:

3.5.1 ÖNERME.

π projektif düzleminin, π'yü π''ye dönüştüren bir kolinasyonu varsa, π_0' ve π_0'' B-L düzlemleri izomorfiktirler.

İSPAT.

α , π nin π' yü π'' ye dönüştüren bir kolinasyonu, yani,

$$\alpha(\pi') = \pi''$$

olsun. α nın π_0' ve π_0'' B-L düzlemlerinin noktaları üzerinde birebir olduğu aşikârdır. α , π nin bir kolinasyonu olduğundan, α nın π' üzerine kısıtlanmışı da üzerinde olmayı korumak zorundadır. Bu nedenle π_0' ile π_0'' B-L düzlemleri izomorfiktirler.

3.5.1 SONUÇ.

π mertebesi n olan sonlu bir projektif düzlem, π' de π nin mertebesi m olan, $n \geqslant m^2+m$ özelliğinde herhangi bir projektif altdüzlemi olsun. Eğer,

$$n \geqslant m^2+m+1+\sqrt{m^2+m+2}$$

ise π nin mertebesi m olan her π' projektif altdüzlemine 3.2.1 önerme anlamında bir B-L düzlemi karşılık gelir. ∎

3.6 Özel Bir Örnek

3.6.1 TANIM.

$\mathbb{P}=(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ bir projektif düzlem ve $A,B,C,D\in\mathcal{P}$ olsun. A,B,C,D noktalarını ikişer ikişer birleştiren altı doğru ve bu altı doğrunun ikişer ikişer arakesiti ile bulunan yedi noktanın oluşturduğu konfigürasyona tamdörtgen denir. A,B,C,D noktalarına tamdörtgenin köşeleri, AB ile CD, AD ile BC ve AC ile BD doğrularına tamdörtgenin karşılıklı kenarları denir. Bir tamdörtgenin karşılıklı kenarlarının kesişme noktalarına ise tamdörtgenin köşeleri denir.

3.6.2 TANIM.

$\mathbb{P}=(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ projektif düzleminin kapsadığı tüm tamdörtgenlerin köşegen noktaları, $\mathbb{P}$ de, doğrudaş ise $\mathbb{P}$ ye Fano düzlemi denir.

3.6.1 TEOREM.

$\mathcal{F}$ bir cisim olsun. O zaman,

$$\mathcal{P}=\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1,x_2,x_3\in\mathcal{F},\ (x_1,x_2,x_3)\neq(0,0,0),\ (x_1,x_2,x_3)\equiv\lambda(x_1,x_2,x_3),\ \lambda\in\mathcal{F},\ \lambda\neq 0\}$$

$$\mathcal{L}=\{[a_1,a_2,a_3] \mid a_1,a_2,a_3\in\mathcal{F},\ [a_1,a_2,a_3]\neq[0,0,0],\ [a_1,a_2,a_3]\equiv\eta[a_1,a_2,a_3],\ \eta\in\mathcal{F},\ \eta\neq 0\}$$

ve $I\subset\mathcal{P}\times\mathcal{L}\ni$

$$(x_1,x_2,x_3)\ I\ [a_1,a_2,a_3] \Leftrightarrow a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$$

olmak üzere, $P_2\mathcal{F}=(\mathcal{P},\mathcal{L},I)$ geometrik yapısı bir projektif düzlemdir.

İspat (Kaya, R. [4]) da verilmiştir.

3.6.2 TEOREM.

$\mathcal{F}$ herhangi bir cisim olmak üzere $P_2\mathcal{F}$ projektif düzleminin Fano düzlemi olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{F}$ nin karakteristiğinin 2 olmasıdır.

İspat için bkz. (Kaya, R. [4]).

Herhangi bir p asal sayısı ve $r \in \mathbb{Z}^+$ için karakteristiği p olan p^r elemanlı bir tek sonlu cisim vardır. Bu cisme mertebesi p^r olan Galois cismi denir ve $GF(p^r)$ ile gösterilir. O halde p=2 ve r=4 için, karakteristiği 2 olan, $2^4=16$ elemanlı $\mathcal{F}=GF(2^4)$ cismi mevcuttur, ve 3.6.2 teoremden dolayı $P_2\mathcal{F}$ bir Fano düzlemidir.

Şimdi $\mathcal{F}$ de (+) işlemine göre etkisiz eleman olan 0 ve $\mathcal{F}-\{0\}$ da $(\cdot)$ işlemine göre etkisiz eleman olan 1 elemanlarını gözönüne alalım. Bu takdirde, 3.6.1 teoremdeki homogen koordinatlama ile $P_2\mathcal{F}$ nin,

$$(2^4)^2+2^4+1=273$$

adet nokta ve doğrusu koordinatlanabilir. Bu durumda,

$$(1,0,0),\ (0,1,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1)$$

noktaları $P_2\mathcal{F}$ nin herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktasıdır. Şimdi bu noktalar için bir tamdörtgen oluşturalım:

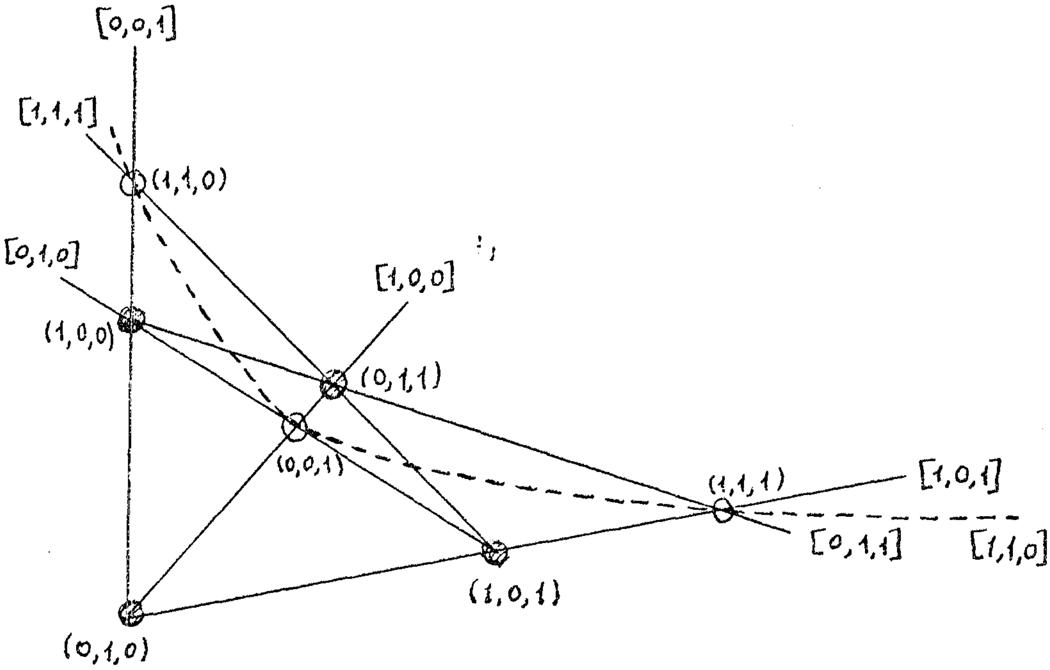
$$(1,0,0)\ I\ [a,b,c] \Leftrightarrow a=0$$
$$(0,1,0)\ I\ [a,b,c] \Leftrightarrow b=0$$
$$(1,0,1)\ I\ [a,b,c] \Leftrightarrow a+c=0 \Leftrightarrow a=-c$$
$$(0,1,1)\ I\ [a,b,c] \Leftrightarrow b+c=0 \Leftrightarrow b=-c$$

olup buradan,

$$(1,0,0) \vee (0,1,0) = [0,0,c] \equiv [0,0,1]$$
$$(0,1,1) \vee (1,0,1) = [a,a,a] \equiv [1,1,1]$$
$$(0,1,0) \vee (1,0,1) = [a,0,a] \equiv [1,0,1]$$

$(1,0,0) \vee (0,1,1) = [0,b,b] \equiv [0,1,1]$
$(0,1,0) \vee (0,1,1) = [a,0,0] \equiv [1,0,0]$
$(1,0,0) \vee (1,0,1) = [0,b,0] \equiv [0,1,0]$

olduğu bulunur.



Bulunan tamdörtgenin köşe noktaları, $\mathcal{P}_2\mathcal{F}$ Fano düzlemi olduğu için, doğrudaş olmak zorundadır. Gerçekten de,

$[1,0,0] \wedge [0,1,0] = (0,0,z) \equiv (0,0,1)$
$[0,0,1] \wedge [1,1,1] = (x,x,0) \equiv (1,1,0)$
$[0,1,1] \wedge [1,0,1] = (x,x,x) \equiv (1,1,1)$

ve

$(0,0,1)\ I\ [1,1,0]$
$(1,1,0)\ I\ [1,1,0]$
$(1,1,1)\ I\ [1,1,0]$

olup, tamdörtgenin köşe noktaları doğrudaştır. Bu durumda ,

$\mathcal{P}' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$
$\mathcal{L}' = \{[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1],[1,1,0],[1,0,1],[0,1,1],[1,1,1]\}$
$\mathcal{I}' = I \cap (\mathcal{P}' \times \mathcal{L}')$

alınırsa, $\mathbb{P}' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}', I')$, $\mathcal{P}_2\mathcal{F}$ nin bir projektif altdüzlemi olup, $\mathbb{P}'$ nün mertebesi 2 dir. Diğer taraftan $\mathcal{P}_2\mathcal{F}$ nin mertebesi $2^4=16$ olup, n=16 ve m=2 için,

$$n \geqslant m^2+m$$

ve hatta,

$$n \geqslant m^2+m+1+\sqrt{m^2+m+2}$$

olduğu aşikârdır. Bu durumda, $\mathcal{P}_2\mathcal{F}$ projektif düzleminden, $\mathbb{P}' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}', I')$ projektif altdüzleminin tüm doğruları ve bu doğrular üzerindeki tüm noktaların atılması ile elde edilen yapıyı Π_0 ile gösterelim. Dikkat edilirse, burada, $\mathbb{P}'$, $\mathcal{P}_2\mathcal{F}$ nin Baer altdüzlemi değildir.

Bu durumda, Π_0 ın herhangi bir doğrusunun genişletilmişi $\mathbb{P}'$ nün bir noktası üzerinde ise bu genişletilmiş doğru (ki teğet doğrudur) üzerinden 5 adet nokta atılmış demektir. Bu ise bir teğet doğru üzerinde,

$$17-5=12$$

adet nokta bulunduğunu gösterir. Eğer Π_0 ın herhangi bir doğrusunun genişletilmişi $\mathbb{P}'$ nün hiç bir noktasını kapsamıyorsa, yani dış doğru is e, üzerinden 7 adet nokta atıldığı aşikârdır. Bu ise bir dış doğru üzerinde,

$$17-7=10$$

adet nokta bulunduğunu gösterir.

Π_0 ın noktaları cümlesini $\mathcal{P}_0$ ile gösterelim. $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}_0$ doğrudaş olmayan X,Y,Z noktalarını kapsasın. Üstelik $\mathcal{S}$ ye ait olan herhangi iki noktayı birleştiren bir doğru üzerindeki tüm noktalar da $\mathcal{S}$ tarafından kapsansın. Bu takdirde XY doğrusu teşkil edilirse, XY üzerinde en az 10 adet nokta vardır. Bu 10 nokta ile Z noktası birleştirildiğinde, Z den geçen 10 adet doğru elde edilir. Bu doğrular üzerinde Z noktası hariç 9 adet nokta vardır. O halde $\mathcal{S}$, toplam en az,

$$(10)(9)+1=91$$

adet nokta kapsar. Bu ise $\mathcal{S}=\mathcal{P}_0$ olduğunu gösterir. Çünkü $P\in\mathcal{P}_0$ için P ile $\mathcal{S}$ nin en az nokta sayısı olan 91 adet nokta birleştirilirse, P den geçen 91 adet doğru bulunur. Oysa, P den $\mathcal{P}_2\mathcal{F}$ de tam olarak,

$$n+1=17$$

adet doğru geçer. O halde, P den ve $\mathcal{S}$ nin bir noktasından geçen en az bir doğru üzerinde, $\mathcal{S}$ nin en az iki noktası vardır. Bu ise $\mathcal{P}_0\subset\mathcal{S}$ olduğunu gösterir.

Böylece, Π_0 ın bir B-L düzlemi olduğu görülmüş olur. Π_0 ın bir B-L düzlemi olduğu görüldükten sonra, kombinatörsel özellikleri de incelenebilir.

Π_0 ın toplam nokta sayısı:

$\mathcal{P}_2\mathcal{F}$ den yedi adet doğru atılmış olup atılan herbir doğru üzerinde $\mathcal{P}'$ nün elemanı olmayan ondört adet nokta vardır. O halde Π_0 da toplam,

$$(7)(14)+7 = 105$$

adet nokta mevcuttur.

Π_0 ın toplam doğru sayısı:

$\mathcal{P}_2\mathcal{F}$ den yedi adet doğru atılmıs oldugundan, Π_0 ın toplam doğru sayısı,

$$273-7 = 266$$

dır.

Bunların haricinde, 3.3 ve 3.4. bölümlerde verilen, Π_0 B-L düzlemlerine dair özelliklerinde, burada takdim edilen özel örnek için geçerli olduğu kolaylıkla görülebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

1. Bumcrot, R.J., 1963, Finite hyperbolic spaces, Atti Convegno Geom. Comb. e sue Appl. Monthly, 70.
2. Graves, L.M., 1962, A finite Bolyai-Lobachevsky plane, Amer. Math. Monthly, 69, 130-132.
3. Hughes, D.R. and Piper, F.C., 1973, Projective planes, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York.
4. Kaya, R., 1978, Projektif geometri, Cilt 1, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
5. Kaya, R. ve Olgun, Ş., Construction of some hyperbolic planes from finite projective planes using Baer subplanes, (Yayınlanacak).
6. Kaya, R. ve Özcan, E., 1984, On the construction of Bolyai-Lobachevsky planes from projective planes, Rendiconti Semin. Math. Birescia, 7, 427-434.
7. Olgun, Ş., Bazı sonlu hiperbolik düzlemlerin paralel doğru sınıfları üzerine, Ulusal Matematik Sempozyumu Bildirisi, 1988, (Yayınlanacak).
8. Ostrom, T.G., 1962, Ovals and finite Bolyai-Lobachevsky planes, Amer. Math. Monthly, 69, 899-901.
9. Sandler, R., 1963, Finite homogeneous Bolyai-Lobachevsky planes, Amer. Math. Monthly, 73, 158-161.
10. Topel, B.J., 1964, Bolyai-Lobachevsky planes with finite lines, Rep. Math. Colloquium, Notre Dame, Ser. 2 Vol. 5-6, 40-42.