

ÇİZGİLER GEOMETRİSİNDE MEUSNIER TEOREMİ

VE

SONUÇLARI

ERDAL ZENCİROĞLU

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalında

DOKTORA TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

T. C.
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ
MERKEZ KÜTÜPHANESİ

Danışman : Prof.Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

Haziran 1988

Fedai ZENCİROĞLU'nun DOKTORA tezi olarak hazırladığı
" ÇİZGİLER GEOMETRİSİNDE MEUSNIER TEOREMİ VE SONUÇLARI"
başlıklı bu çalışma, jürimizce Lisansüstü Yönetmeliği-
nin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul
edilmiştir.

7.10.1988

ÜYE : Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

ÜYE : Prof. Dr. Rüstem KAYA

ÜYE : Doç. Dr. Arif. SABUNCUOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
13..EKİM..1988 gün ve..191./1.....sayılı kararı
ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Rüstem KAYA
Enstitü Müdürü

Ö Z E T

Bu çalışmada , önce bir α uzay eğrisine ait küresel göstergelerin eğrilik eksenlerinin birbirine göre konumları incelenmiştir. Küresel göstergeler arasındaki küresel involütenin, eğrilik eksenleri cinsinden 3-boyutlu uzaydaki karşılığı verilmiştir. Sonra α dual küresel eğrisinin, dual küresel göstergelerine ait eğrilik eksenleri arasındaki açı ve uzaklıkları hesaplanmış, bazılarının çakışık oldukları görülmüştür. Dual küresel gösterge eğrilerininin E^3 çizgiler uzayındaki resimleri araştırıldı ve birer doğru kongrüansı oldukları tesbit edildi ve kongrüanslar incelendi. Sonuçta, birbirinin küresel involütesi olan iki dual küresel eğrinin eğrilik eksenlerinin çakışık oldukları görülmüştür.

SUMMARY

In this study firstly, the positions of the curvature axes with respect to each other of the spherical indicators which belong to a space curve are examined. The corepondence of the involute among these spherical indicators is given in terms of curvature axes in the space with 3 dimensions. Then the angles and distances between the curvature axes of the dual spherical indicators belong to dual spherical curve are calculated. It is derived that some of them are coincident. The study map of the curvature circles of dual spherical indicator curves in E^3 is investigated. It is established that this mapping is a line congruence. All of these congruences are examined. As a result, it is seen that the curvature axes of two dual spherical curves which are involute to each other are coincident.

İ Ç İ N D E K İ L E R

| | |
|--|----|
| Giriş | |
| I. Bölüm: Temel Kavramlar..... | 3 |
| I. 1. Eğriler Teorisi..... | 3 |
| I. 1. 1. Birinci Eğrilik Fonksiyonu. ρ | 3 |
| I. 1. 2. Burulma (ikinci Eğrilik) Fonksiyonu. τ | 4 |
| I. 1. 3. Frenet Formülleri..... | 5 |
| I. 1. 4. Eğrilik Yarıçapı..... | 9 |
| I. 1. 5. Eğrilik Merkezi..... | 9 |
| I. 1. 6. Eğrilik Çemberi..... | 10 |
| I. 1. 7. Eğrilik Ekseni..... | 10 |
| I. 2. Bir Eğriye Ait Vektör Alanları..... | 10 |
| I. 2. 1. Vektör Alanı..... | 10 |
| I. 2. 2. Birim Teğet Vektör Alanı \vec{t} | 14 |
| I. 2. 3. Asli Normal Vektör Alanı \vec{n} | 14 |
| I. 2. 4. Binormal Vektör Alanı \vec{b} | 15 |
| I. 2. 5. Frenet (Serret) Üç Ayaklı Alanı | 15 |
| I. 2. 6. Darboux Vektör Alanı \vec{C} | 16 |
| I. 3. Oskülatör Düzlem, Normal Düzlem, Rektifiyant Düzlem..... | 17 |
| I. 4. Bir Uzay Eğrisinin Küresel Göstergeleri..... | 18 |
| I. 4. 1. Teğetler Göstergesi (t)..... | 18 |
| I. 4. 2. Aslinormaller Göstergesi (n)..... | 19 |
| I. 4. 3. Binormaller Göstergesi (b)..... | 19 |

| | |
|---|----|
| I. 4. 4. Sabit Pol Eğrisi (C)..... | 20 |
| I. 5. Küresel Hareket ve Pol Eğrileri..... | 21 |
| I. 5. 1. Küresel Hareket..... | 21 |
| I. 5. 2. Sabit Pol Noktası ve Hareketli Pol Noktası..... | 23 |
| I. 5. 3. Sabit Pol Eğrisi (C) ve Hareketli Pol Eğrisi (C')..... | 23 |
| I. 6. Dual Sayılar Halkası..... | 24 |
| I. 7. \mathbb{D} -Modül..... | 26 |
| I. 7. 1. Dual Vektörler..... | 27 |
| I. 7. 2. \mathbb{D} -Modül Üzerinde İç Çarpım..... | 28 |
| I. 7. 3. \mathbb{D} -Modül Üzerinde Norm | 28 |
| I. 7. 4. Birim Dual Vektör..... | 30 |
| I. 8. E. Study Dönüşümü..... | 31 |
| I. 8. 1. E. Study Teoremi..... | 31 |
| I. 8. 2. Dual Açılı..... | 31 |
| I. 9. Dual Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi..... | 35 |
| I. 9. 1. Birtek Dual Değişkenli Fonksiyonlar.... | 35 |
| I. 9. 2. Analitik Dual Fonksiyonlar Serisi..... | 37 |
| I. 9. 3. Analitik Dual Fonksiyonların Kuvvet Serilerine Açılımı..... | 38 |
| I.10. Çizgiler Geometrisi..... | 38 |

| | |
|---|----|
| I. 10. 1. Lineer Işın Kompleksi..... | 41 |
| 1. 10. 2. Lineer Işın Kongrüansı..... | 46 |
| I. 10. 3. Regle Yüzeyler..... | 48 |
| I. 11. Meusnier Teoremi ve Sonuçları..... | 52 |
| I. 12. Meusnier Teoreminin, Reel Birim Küre İçin Sonuçları..... | 59 |
| I. 13. Meusnier Teoreminin, Reel Küresel Hareket için Sonuçları..... | 62 |
| II. Bölüm: | |
| II. 1. Bir α Uzay Eğrisinin Frenet Vektörlerinin Küresel Göstergelerine Ait Eğrilik Fonksi- yonları..... | 66 |
| II. 2. α_t Teğetler Göstergesinin Eğriliği ve Eğrilik Yarıçapı..... | 67 |
| II. 3. α_b Binormaller Göstergesinin Eğriliği ve Eğrilik Yarıçapı..... | 69 |
| II. 4. α_n Asli Normaller Göstergesinin Eğriliği ve Eğrilik Yarıçapı..... | 70 |
| II. 5. \vec{C} Sabit Pol Eğrisinin Eğriliği ve Eğrilik Yarıçapı..... | 72 |
| II. 6. Küresel Gösterge Eğrilerinin Eğrilik Fonksi- yonları Arasındaki Bağlantılar..... | 76 |

| | |
|---|----|
| III. Bölüm; Küresel Gösterge Eğrilerinin Eğrilik | |
| Eksenleri..... | 79 |
| III. 1. α_t Teğetler Göstergesinin $\vec{b}_1 = \vec{b}_t$ Binormal | |
| Vektör Alanının Hesabı..... | 80 |
| III. 2. α_n Asli Normaller Göstergesinin $\vec{b}_2 = \vec{b}_n$ | |
| Binormal Vektör Alanının Hesabı..... | 83 |
| III. 3. α_b Binormaller Göstergesinin $\vec{b}_3 = \vec{b}_b$ Binormal | |
| Vektör Alanının Hesabı..... | 86 |
| III. 4. (C) Sabit Pol Eğrisinin $\vec{b}_4 = \vec{b}_c$ Binormal | |
| Vektör Alanının Hesabı..... | 88 |
| III. 5. Küresel Göstergelere Ait Eğrilik Eksenlerinin | |
| Denklemleri..... | 91 |
| III. 5. 1. α_t için Eğrilik Ekseninin Vektörel | |
| Denklemi..... | 92 |
| III. 5. 2. α_n için Eğrilik Ekseninin Vektörel | |
| Denklemi..... | 92 |
| III. 5. 3. α_b için Eğrilik Ekseninin Vektörel | |
| Denklemi..... | 93 |
| III. 5. 4. (C) için Eğrilik Ekseninin Vektörel | |
| Denklemi..... | 94 |
| III. 5. 5. Eğrilik Eksenleri Arasındaki Açılar. | 96 |

| | |
|--|-----|
| IV. Bölüm: Küresel Göstergelerin Eğrilik Eksenlerinin ve Eğrilik Çemberlerinin STUDY Resimleri. | 98 |
| IV. 1. Açılar..... | 98 |
| IV. 2. Küresel İnvoluteler | 100 |
| IV. 3. Eğrilik Çemberlerinin Study Resimleri..... | 105 |
| IV. 3. 1. Study Dönüşümü..... | 105 |
| IV. 3. 2. Bir Çemberin Study Resmi..... | 110 |
| IV. 4. Bir α Dual Küresel Eğrisinin Eğrilik Çemberinin Study Resmi..... | 120 |
| IV. 4. 1. α_T Teğetler Göstergesinin Eğrilik Çembe- rinin Study Resmi..... | 126 |
| IV. 4. 2. α_N Aslinormaller Göstergesinin Eğrilik Çemberlerinin Study Resmi..... | 130 |
| IV. 4. 3. α_B Binormaller Göstergesinin Eğrilik Çemberinin Study Resmi..... | 135 |
| IV. 4. 4. α_c Sabit Pol Eğrisinin Eğrilik Çemberinin Study Resmi..... | 140 |
| V. Bölüm: Küresel İnvolutenin Çizgiler Uzayındaki Karşılığı..... | 145 |
| Kaynaklar | 151 |

Bu alıŐma beŐ bölüm halinde düzenlenmiŐtir.

I. Bölümde, çalışmanın anlaŐılmasını kolaylaŐtırmak ve notasyon birliğini sağlamak için temel kavram ve teoremlere yer verilmiştir.

II. Bölümde, bir uzay eğrisine iştirak eden vektör alanlarının birim küre üzerindeki resimleri (küresel göstergeleri) ne ait eğrilikler, eğrilik yarıçapları esas uzay eğrisine ait eğrilikler cinsinden hesaplanmaktadır.

III, Bölümde, bir α uzay eğrisi üzerinde tanımlanan vektör alanlarının küresel göstergelerinin eğrilik eksenlerinin birbirlerine göre konumları incelenmiştir. Ayrıca, küresel göstergeler arasındaki küresel involütenin eğrilik eksenleri cinsinden karşılığı verilmiştir.

IV. Bölümde, bir birim dual küresel eğrinin göstergeleri de birim dual küre üzerinde birer dual küresel eğri olarak alınmaktadır. Ancak, bu

eğrilerin de parametrelerinin reel olduğunu kabul ediyoruz. Gösterge eğrilerinin eğrilik eksen vektörleri birer birim dual vektör olarak E^3 de birer doğru belirtirler. Biz bunlara eğrilik eksenleri adını vereceğiz. Bu eksenler arasındaki açı ve uzaklıkları hesapladık, bazılarının çakışık olduklarını tesbit ettik. Ayrıca gösterge eğrilerinin eğrilik çemberlerinin E^3 çizgiler uzayındaki resimlerini araştırdık, birer doğru kongrüansı olarak tesbit ettik ve inceledik.

V. Bölümde, biri diğerinin küresel involütesi olan iki dual küresel eğrinin mütekâbil noktalarındaki eğrilik eksenleri arasında bir ilgi tesbit ettik. Bu ilgi, birbirinin küresel involütesi olan iki küresel eğrinin eğrilik eksenlerinin çakışık olmasından ibarettir. Bu da α eğrisinin α_T , α_N , α_B ve α_C küresel göstergelerinin sahip olduğu küresel involütenin çizgiler uzayındaki karşılığıdır.

Bölümler hakkında yukarıda verdiğimiz kısaca açıklamadan da anlaşılacağı gibi II., III., IV. ve V. bölümler daha ziyade orijinal bölümlerdir.

BÖLÜM I

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmanın dayandığı temel tanım, teorem ve kavramlar kısaca özetlenecektir. Bu arada bazı değişik ve yeni yollarla da bilinen sonuçlara varılacaktır.

I. 1. Eğriler Teorisi [1]I. 1. 1. Birinci Eğrilik Fonksiyonu \mathcal{K}

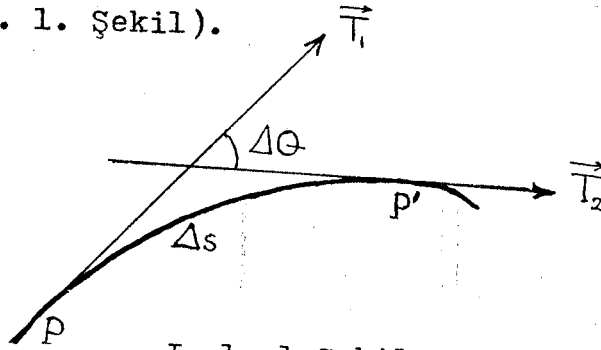
Verilen bir α eğrisinin P noktasındaki

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

oranına, o noktadaki ortalama eğriliği ve

$$(I. 1.1) \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \mathcal{K}$$

değerine de α eğrisinin P noktasındaki Eğriliği denir (I. 1. 1. Şekil).



I. 1. 1 Şekil.

$$\text{Sonuç: } \frac{ds_t}{ds} = \mathcal{K} .$$

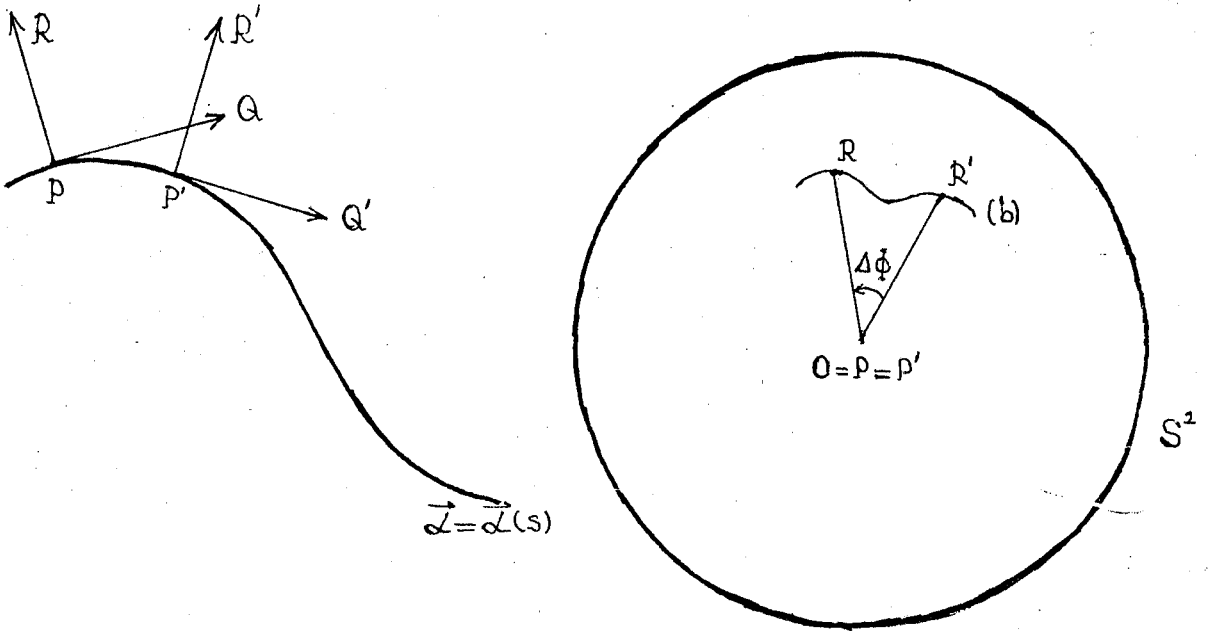
Bir α eğrisinin eğriliği, teğetler göstergesinin yay-elementinin , esas eğrinin yay-elementine oranıdır.

I. 1. 2. Burulma (İkinci Eğrilik) Fonksiyonu τ

$\frac{\Delta\phi}{\Delta s}$ oranına α eğrisinin P noktasındaki ortalama burulması ve

$$(I. 1. 2) \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds} = \tau$$

değerine de P noktasındaki Burulması denir (I. 1. 2 Şekil).



I. 1. 2 Şekil

Sonuç:

Bir α eğrisinin burulması, binormaller göstergesinin yay - elementinin, α eğrisinin yay - elementine oranıdır.

I. 1. 3 Frenet Formülleri

Şimdi \vec{t} , \vec{n} , \vec{b} vektörlerinin s yay parametresine göre türevlerini, yine \vec{t} , \vec{n} , \vec{b} cinsinden veren formülleri bulalım, bu formüllere Frenet Formülleri denir.

$$\vec{t} = \frac{d\vec{\alpha}}{ds}$$

eşitliğinin her iki tarafının (t) nin yay-parametresine göre türevini alırsak ,

$$\vec{n} = \frac{d\vec{t}}{ds_t} = \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_t}$$

$$\frac{ds}{ds_t} = \kappa$$

olduğu bilindiğinden,

$$\vec{n} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds}$$

veya

$$(I. 1. 3) \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n}$$

bulunur. Ayrıca,

$$(I. 1. 4) \quad \left\| \frac{d\vec{b}}{ds_b} \right\| = 1$$

dir.

$$\langle \vec{b}, \vec{t} \rangle = 0$$

olduğundan s'ye göre türev alalım.

$$(I. 1.5) \quad \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}, \vec{t} \right\rangle + \left\langle \vec{b}, \frac{d\vec{t}}{ds} \right\rangle = 0$$

$$(I. 1.3) \text{ den } \frac{d\vec{t}}{ds} = \lambda \vec{n}$$

değerini (I. 1.5) de yerine koyarsak,

$$\left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}, \vec{t} \right\rangle + \left\langle \vec{b}, \lambda \vec{n} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}, \vec{t} \right\rangle + \lambda \underbrace{\left\langle \vec{b}, \vec{n} \right\rangle}_0 = 0$$

$$(I. 1.6) \quad \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}, \vec{t} \right\rangle = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\left\langle \vec{b}, \vec{b} \right\rangle = 1$$

den s'ye göre türev alarak,

$$\left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}, \vec{b} \right\rangle + \left\langle \vec{b}, \frac{d\vec{b}}{ds} \right\rangle = 0$$

$$(I. 1.7) \quad \left\langle \vec{b}, \frac{d\vec{b}}{ds} \right\rangle = 0$$

(I. 1.6) ve (I. 1.7) eşitliklerini gözönüne alarak, $\frac{d\vec{b}}{ds}$ nin hem \vec{t} ye hem de \vec{b} ye dik olduğu açıktır.

Bu da $\frac{d\vec{b}}{ds}$ nin \vec{n} asli normal vektör alanına paralel

olduğunu gösterir.

O halde λ bir skalar olmak üzere,

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \lambda \vec{n}$$

yazılabilir. Şimdi λ yı bulalım.

$$(I. 1. 8) \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds_b} \cdot \frac{ds_b}{ds} = \lambda \vec{n}$$

yazılır. $\frac{ds_b}{ds}$ nin yani (b) binormaller göstergesinin yay-elementinin, α eğrisinin yay-elementine oranının Burulma Fonksiyonu olduğunu biliyoruz;

$$\frac{ds_b}{ds} = \tau$$

dır. (I. 1. 8) i şöyle ifade edebiliriz.

$$\tau \cdot \frac{d\vec{b}}{ds_b} = \lambda \vec{n} .$$

Her iki tarafın skalar karesi alınır,

$$\tau^2 \underbrace{\left\langle \frac{d\vec{b}}{ds_b}, \frac{d\vec{b}}{ds_b} \right\rangle}_1 = \lambda^2 \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle$$

$$\tau^2 = \lambda^2$$

bulunur. $\lambda = -\tau$ olarak (I. 1. 8) de yerine koyarsak,

$$(I. 1. 9) \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n}$$

elde edilir. Son olarak

$$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$$

eşitliğinde s'e göre türev alarak,

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \wedge \vec{t} + \vec{b} \wedge \frac{d\vec{t}}{ds}$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\tau \vec{n} \wedge \vec{t} + \vec{b} \wedge \kappa \vec{n}$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\tau \underbrace{(\vec{n} \wedge \vec{t})}_{-\vec{b}} + \kappa \underbrace{(\vec{b} \wedge \vec{n})}_{-\vec{t}}$$

$$(I. 1. 10) \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \tau \vec{b} - \kappa \vec{t}$$

elde edilir.

Böylece, \vec{t} , \vec{n} , \vec{b} vektörlerinin s yay-parametresine göre türevlerini, yine \vec{t} , \vec{n} , \vec{b} cinsinden veren, Frenet formülleri,

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n}$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa \vec{t} + \tau \vec{b}$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n}$$

veya matris formundaki ifade ile

$$\begin{bmatrix} \frac{d\vec{t}}{ds} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilirler.

I. 1. 4. Eğrilik Yarıçapı

α eğrisinin bir P noktasındaki eğriliği κ olsun.

$$\frac{1}{\kappa} = \rho$$

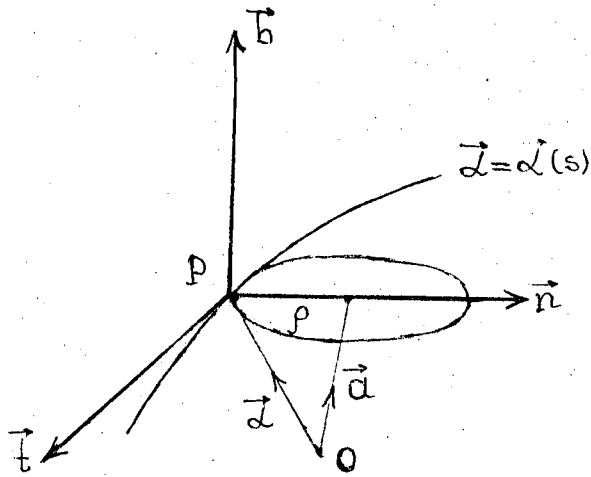
değerine α eğrisinin bu P noktasındaki Eğrilik Yarıçapı denir.

I. 1. 5. Eğrilik Merkezi

α eğrisinin P noktasındaki asli normali üzerinde ve pozitif yönünde, o noktadaki ρ eğrilik yarıçapı kadar, alınarak bulunan noktaya, P noktasındaki Eğrilik Merkezi denir (I. 1. 3.Şekil). Eğrilik merkezinin denklemi (yer vektörü)

$$\vec{a} = \vec{\alpha} + \rho \vec{n}$$

dır.



I.1.3 Şekil

I. 1. 6. Eğrilik Çemberi

α eğrisinin P noktasındaki oskülatör düzleminde, yarıçapı aynı noktadaki eğrilik yarıçapına, merkezi de eğrilik merkezi olan çembere Eğrilik Çemberi denir.

I. 1. 7. Eğrilik Ekseni

α eğrisine sonsuz yakın üç noktada teğet olan bir küre düşünelim. Bu noktalar P, Q, R olsun. Kürenin Q ve P noktalarından geçmesi için merkezi \overline{QP} doğrusunun orta noktasından geçen ve \overline{QP} doğrusuna dik olan düzlemde bulunması gerekir. Kürenin P ve R noktasından geçmesi için de \overline{PR} ye orta noktasında dik olan düzlemin üzerinde bulunması lâzımdır. O halde böyle bir kürenin merkezi bu iki düzlemin arakesiti olan doğrunun üzerinde bulunması icabeder.

Demekki α eğrisine sonsuz yakın üç noktada değen küre tek değildir. Merkezi bu iki düzlemin arakesiti üzerinde bulunan ve yarıçapı da başlangıç noktasının P noktasına olan uzaklığına eşit olan küreler α eğrisine P noktasında ve bu noktaya sonsuz yakın Q ve R noktalarında değer. Bu kürelere Oskülatör Küreler denir.

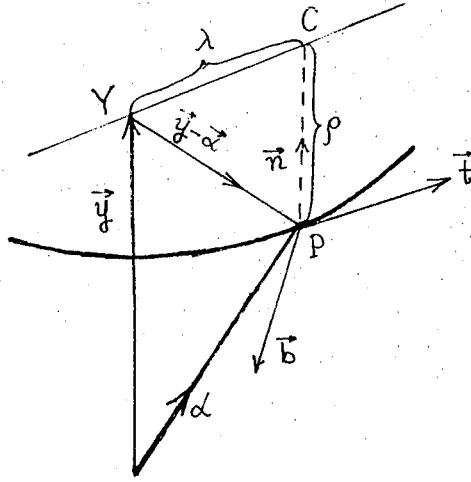
P, R, Q noktaları sonsuz yakın noktalar olduğu için gerek \overline{PR} ve gerekse \overline{PQ} teğet doğrultularıdır. Bunlara orta noktalarında dik olan düzlemler de normal düzlemler olur.

O halde α eğrisi üzerinde bir P noktasına tekâbüil eden oskülatör kürelerin merkezleri sonsuz yakın iki noktaya ait düzlemlerin arakesit doğrultusudur. Bu doğruya Eğrilik Ekseni denir.

α eğrisinin P noktasındaki eğrilik ekseninin denklemi, λ bir sabit olmak üzere,

$$\vec{y} = \vec{a} + \rho \vec{n} + \lambda \vec{b}$$

dır (I. 1. 4 Şekil).



I. 1. 4 Şekil

I. 2. Bir Eğriye Ait Vektör Alanları [2]I. 2. 1. Vektör Alanı

M bir manifold ve bu manifold üzerinde bir komşuluk V olsun. Bir $P \in V$ noktasındaki tanjant uzay $T_V(P)$ olsun. V nin bütün P noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi $\bigcup T_V(P)$ ile gösterilsin. Bir

$$\pi : \bigcup T_V(P) \longrightarrow V$$

dönüşümü $\forall t_p \in T_V(P)$ tanjant vektörü için

$$\pi(t_p) = P$$

biçiminde tanımlansın. 0 zaman V komşuluğu üzerindeki bir vektör alanını tanımlayabiliriz.

I. 2. 1. Tanım (Vektör Alanı)

$V \subseteq M$ üzerindeki bir vektör alanı operatörü

$$X : V \longrightarrow \bigcup_{P \in V} T_V(P)$$

biçiminde bir fonksiyondur, öyle ki

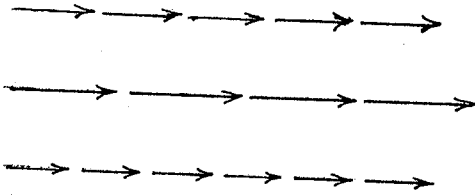
$$\kappa \circ X = I : V \longrightarrow V$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur.

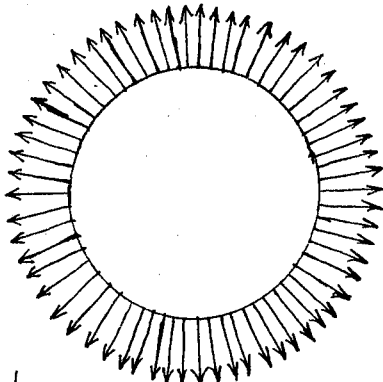
Yukarıdaki tanıma göre M manifoldu yerine n - boyutlu Öklid uzayını alarak E^n de bir X vektör alanını, $\forall P \in E^n$ noktasına bir X_p tanjant vektörünü karşılık getiren fonksiyon olarak düşünebiliriz.

Genel bir ifade ile, E^n de bir vektör alanı büyük bir tanjant vektör koleksiyonu olup, E^n nin her noktasında bir tanjant vektöre sahiptir.

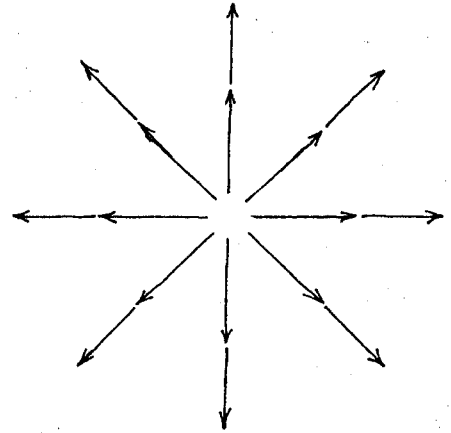
I. 2. 1 Şekilde E^2 deki üç tipik vektör alanı gösterilmektedir.



(a) Paralel vektör alanı



(c) Çemberin normal vektör alanı



(b) Radyal vektör alanı

I. 2. 1 Şekil.

I. 2. 2. Birim Teğet Vektör Alanı \vec{t}

E^3 , n-boyutlu öklid uzayında, M eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş ise $s \in I$ yay parametresi olmak üzere .

$$\vec{t} = \frac{d\vec{\alpha}}{ds} = \vec{\alpha}'(s)$$

birim vektör alanına α eğrisinin Birim Teğet Vektör Alanı denir.

I. 2. 3. Asli Normal Vektör Alanı \vec{n}

E^3 , Öklid uzayında, M eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş ise $s \in I$ yay parametresi olmak üzere,

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{\alpha}''(s)\|} \vec{\alpha}''(s), \quad \vec{\alpha}''(s) = \frac{d^2\vec{\alpha}}{ds^2}$$

birim vektör alanına α eğrisinin asli Normal Vektör Alanı denir.

I. 2. 4. Binormal Vektör Alanı \vec{b}

$$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$$

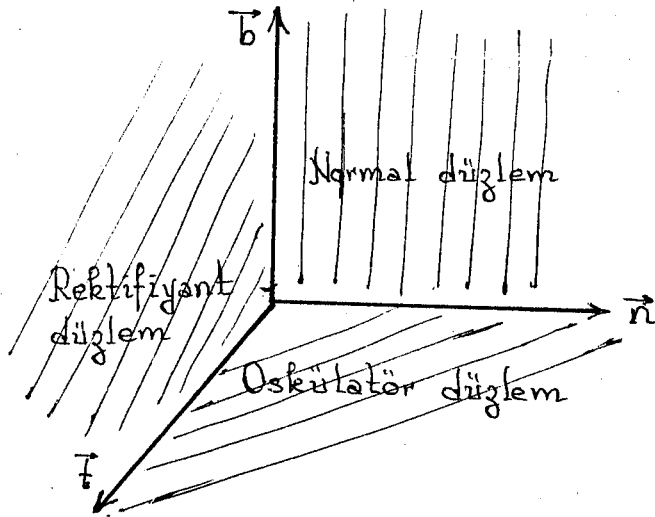
şeklinde tanımlanan birim vektör alanına, α eğrisinin Binormal Vektör Alanı denir.

I. 2. 5. Frenet (Serret) Üç Ayaklı Alanı

Yukarıda tanımlanan birim vektör alanlarının

$$\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$$

sistemine, M eğrisinin Frenet (Serret) Üç Ayaklı Alanı denir. Bu birim vektör alanları arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur (I. 2. 2 Şekil).



I. 2. 2 Şekil

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \vec{t} \wedge \vec{n}, & \langle \vec{t}, \vec{t} \rangle &= \|\vec{t}\|^2 = 1, & \langle \vec{t}, \vec{n} \rangle &= 0 \\ \vec{t} &= \vec{n} \wedge \vec{b}, & \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle &= \|\vec{n}\|^2 = 1, & \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle &= 0 \\ \vec{n} &= \vec{b} \wedge \vec{t}, & \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle &= \|\vec{b}\|^2 = 1, & \langle \vec{b}, \vec{t} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

I. 2. 6. Darboux Vektör Alanı \vec{C}

α eğrisi üzerindeki bir P noktası eğriyi çezirken \vec{t} , \vec{n} , \vec{b} birim vektörleri değişirler. Eğrinin Frenet üç ayaklısının, her s anında, bir eksen etrafında, bir ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene α eğrisinin bu s parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux (ani dönme) eksenini denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör, Darboux vektörü,

$$(I. 2. 1) \quad \vec{w} = \tau \vec{t} + \kappa \vec{b}$$

şeklindedir.

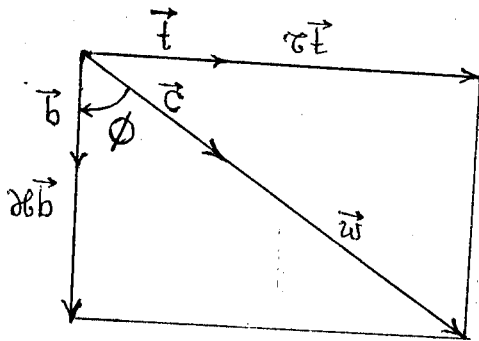
\vec{b} ile \vec{w} arasındaki açı ϕ ile gösterilirse,

$$(I. 2. 2) \quad \begin{cases} \kappa = \|\vec{w}\| \cos \phi \\ \tau = \|\vec{w}\| \sin \phi \end{cases}$$

olacağı açıktır (I. 2. 3 Şekil). Genel olarak ϕ açısı da s yay-parametresinin bir fonksiyonu, yani

$$\phi: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ s \quad \phi(s)$$

dir.



I. 2. 3 Şekil.

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

olmak üzere,

$$(I. 2. 3) \quad \vec{C} = \frac{\tau}{\|\vec{w}\|} \vec{E} + \frac{\kappa}{\|\vec{w}\|} \vec{B}$$

veya, (I.2.2) deki κ ve τ nun değerleri ile

$$(I. 2. 4) \quad \vec{C} = \sin\phi \vec{E} + \cos\phi \vec{B}$$

şeklinde verilen birim vektör alanına α eğrisinin Darboux Vektör Alanı denir.

I. 3. Oskülatör Düzlem, Normal Düzlem, Rektifiyant Düzlem

$$S_p \{ t(s), n(s) \}$$

vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt-uzaya, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasına ait, Oskülatör Düzlem,

$$S_p \{ n(s), b(s) \}$$

vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt-uzaya, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasına ait Normal Düzlem,

$$S_p \{ t(s), b(s) \}$$

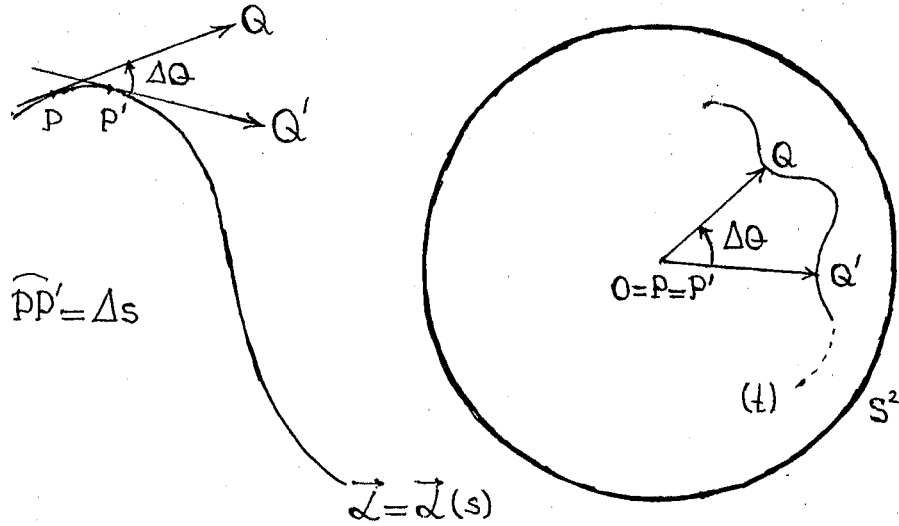
vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ noktasındaki afin altuzaya, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasına ait, Rektifiyant Düzlem denir.

(I. 2. 2 Şekil).

I. 4. Bir Uzay Eğrisinin Küresel Göstergeleri [2]

I. 4. 1. Teğetler Göstergesi (t)

3- boyutlu Öklid uzayı, E^3 de bir α eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin birim teğet vektörü \vec{t} olmak üzere, $\vec{PQ} = \vec{t}$ alındığında, P noktası α eğrisini çizerken, Q noktasının birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α eğrisinin Teğetler Göstergesi veya (Birinci Teğetler Göstergesi) adı verilir (I.4.1 Şekil).



I. 4. 1 Şekil

α eğrisinin teğetler göstergesini (t) ile gösterelim.

(t) nin denklemi,

$$(I. 4. 1) \quad \alpha_t = \vec{t}$$

dir ve (t) nin parametresine s_t dersek, $s_t \neq s$ olup, α_t nin yay-elementi de

$$ds_t = \|\vec{t}'\| ds$$

olacaktır.

I. 4. 2. Asli Normaller Göstergesi (n)

E^3 , Öklid uzayında bir α eğrisinin asli normal vektörü \vec{n} olsun, α eğrisi çizilirken \vec{n} vektörünün uç noktaları cümlesinin birim küre yüzeyi üzerinde meydana getirdiği eğriye α eğrisinin Asli Normaller Göstergesi denir.

α eğrisinin asli normaller göstergesini (n) ile gösterirsek, (n) nin denklemi,

$$(I. 4. 2) \quad \alpha_n = \vec{n}$$

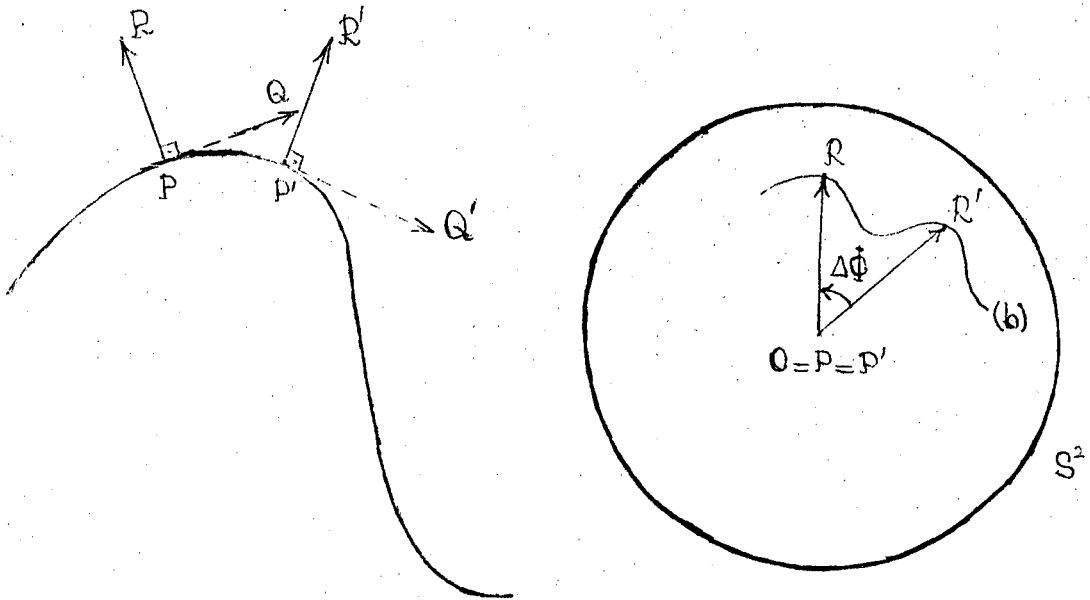
ve yay-parametresine s_n dersek $s_n \neq s$ olup α_n nin yay-elementi de

$$ds_n = \|\vec{n}'\| ds$$

olacaktır.

I. 4. 3 Binormaller Göstergesi (b)

E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında bir α eğrisinin bir P noktasındaki binormal vektörü $\vec{b} = \vec{PR}$ ve komşu iki binormal vektörü arasındaki açı $\Delta\phi$ olmak üzere P noktası α eğrisini çizerken R noktasının birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α eğrisinin Binormaller Göstergesi denir (I. 4. 2 Şekil).



I. 4. 2 Şekil.

α eğrisinin binormaller göstergesini (b) ile gösterelim.

(b) nin denklemi,

$$(I. 4. 3) \quad \alpha_b = \vec{b}$$

dir. (b) nin parametresine s_b dersek $s_b \neq s$ olup α_b nin yay-elementi de

$$ds_b = \|\vec{b}'\| ds$$

olacaktır.

I. 4. 4. Sabit Pol Eğrisi (C)

(I. 2. 3) de ifade edilen

$$\vec{C} = \frac{\tau}{\|\vec{b}\|} \vec{t} + \frac{\sigma}{\|\vec{b}\|} \vec{b}$$

veya (I. 2. 4) de verilen

$$\vec{C} = \sin\phi \vec{t} + \cos\phi \vec{b}$$

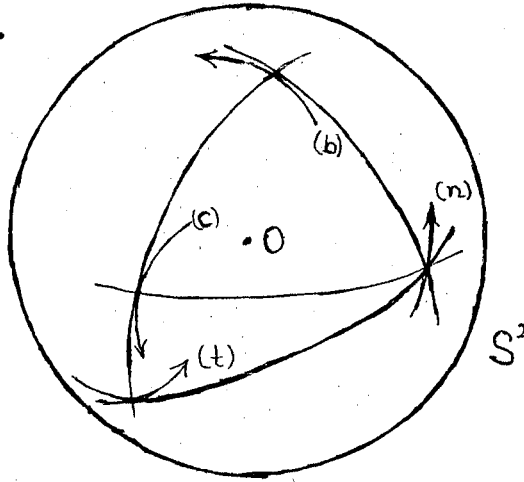
Darboux birim vektörünün uç noktalarının birim küre yüzeyi üzerinde meydana getirdiği eğriye α eğrisinin Sabit Pol Eğrisi denir. (C) Sabit Pol Eğrisi α eğrisinin s yay-parametresine bağlı olarak,

$$C = C(s)$$

şeklinde verilir.

E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayındaki bir α eğrisinin (t) teğetler göstergesini, (n) asli normaller göstergesini, (b) binormal göstergesini ve (C) sabit pol eğrisini bir küre yüzeyi üzerinde gösterebiliriz [2]

(I.4.3 Şekil).



I. 4. 3 Şekil.

I.5. Küresel Hareket ve Pol Eğrileri [2]

I.5. 1. Küresel Hareket

O merkezli sabit bir birim küre K' ve aynı merkezli hareketli bir diğer birim küre K olsun. $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ üç-ayaklılığının hareketinden bahsedeceğimizden $\{0; \vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ sistemi K küresini temsil etsin. K' sabit küresini de

$\{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ortonormal çatısı olarak alabiliriz.

Bu durumda K nın K' küresine göre bir parametrelili

küresel hareketi, α eğrisinin verilmesi ile belli olur.

Bu küresel hareket, A has ortogonal bir 3X3 tipinde matris $(AA^T = A^T A = I, \det A = 1)$ olmak üzere,

$$(I. 5. 1) \quad \begin{bmatrix} \vec{r} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix}$$

dönüşümü ile tanımlanır veya

$$X' = \begin{bmatrix} \vec{r} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad E = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix}$$

denilirse,

$$(I. 5. 2) \quad X' = AE \implies E = A^T X'$$

biçiminde olur, burada 3X3 tipindeki A matrisinin elemanları t zaman parametresinin sürekli ve diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. O halde K'nın K'ye göre bir parametrelili küresel hareketi $A = A(t)$ has ortogonal matrisi ile belirlenir ve kısaca K/K' ile gösterilir.

Burada sözü edilen t zaman parametresi α eğrisinin s yay-parametresinin bir fonksiyonudur.

I. 5. 2. Sabit Pol Noktası ve Hareketli Pol Noktası

K/K' hareketinde her t anında K' küresinde sabit bir P noktası, K küresinde sabit bir P' noktası vardır. Bu noktalara sırası ile, Sabit Pol Noktası ve Hareketli Pol Noktası denir.

I. 5. 3. Sabit Pol Eğrisi (C) ve Hareketli Pol Eğrisi (C')

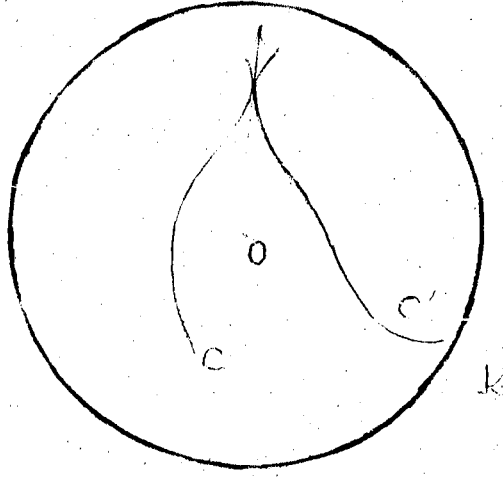
\mathcal{L} eğrisinin çizilmesine karşılık gelen K/K' hareketi esnasında P ve P' noktalarının ait oldukları küreler üzerindeki geometrikyeri, sırası ile Sabit Pol Eğrisi ve Hareketli Pol Eğrisi adları verilir. Bu eğriler C ve C' ile gösterilir.

C' ve C eğrileri arasında şu münasebet vardır.

(i) C' ve C eğrileri her t anında birbirine teğettirler.

(ii) C' ve C eğrilerinin yay uzunlukları birbirine eşittir.

Buradan sonuç olarak C' hareketli pol eğrisi C sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır (I.5.1 Şekil).



I. 5. 1 Şekil.

Yani, K/K' hareketi bu iki eğrinin birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanması ile de elde edilebilir.

Şimdi \mathcal{L} eğrisine geçelim: \mathcal{L} eğrisi kapalı bir eğri olduğu zaman K/K' hareketi de kapalı olur. Böylece, sabit pol eğrisi $C = C(s)$ ile verilen C eğrisi olmak üzere C' hareketli pol eğrisi \vec{t} ve \vec{b} vektörleri ile belirtilen bir büyük çember olur.

Sonuç: K/K' kapalı hareketine iştirak eden \vec{t} , \vec{n} , \vec{b} üç-ayaklısının hareketi C' büyük çemberinin C sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanmasından ibarettir.

I. 6. Dual Sayılar Halkası [3]

Reel sayılar cümlesi (+) toplama ve (.) çarpma işlemlerine göre bir cisimdir. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ reel sayılar cismini \mathbb{R} ile göstereceğiz.

$\forall a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir $A = (a, a^*)$ sıralı reel sayı ikilisine kısaca bir sıralı ikili denir.

Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi \mathbb{D} ile gösterilsin.

$$\mathbb{D} = \{ (a, a^*) \mid a, a^* \in \mathbb{R} \}$$

üzerinde iki iç işlem ve bir eşitlik şu şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} \text{a) } \oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ (A, B) &\longrightarrow A \oplus B = (a+b, a^*+b^*) \end{aligned}$$

(\mathbb{D}, \oplus) 'nin bir Abel grubu olduğu gösterilebilir.

$$\begin{aligned} \text{b) } \odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ (A, B) &\longrightarrow A \odot B = (a \cdot b, ab^* + a^*b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \forall A, B \in \mathbb{D} \\ A = B &\iff (a, a^*) = (b, b^*) \\ & a = b, a^* = b^* \end{aligned}$$

I. 6. 1. Teorem: $\{\mathbb{D}, \oplus, \odot\}$ üçlüsü birimli ve değişimli bir halkadır [3].

$\{\mathbb{D}, \oplus, \odot\}$ üçlüsü bir cisim değildir. \odot çarpma işlemine göre ters elemanı mevcut değildir. Yani,

$\forall A \in \mathbb{D}$ için $A \odot Y = Y \odot A = 1$ eşitliğini sağlayan Y yoktur [3].

I. 6. 2. Teorem: $\lambda = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı $\varepsilon = (0, 1)$ olmak üzere $\lambda = (a, a^*) = a + \varepsilon a^*$ şeklinde yazılabilir. [3].

I. 7. \mathbb{D} -Modül

Tanım: Birimi 1 olan değişimli bir halka H olsun.

H üzerinde bir Modül diye bir S abel grubu ile aşağıdaki özelliklere sahip olan S üzerindeki bir

$$\begin{array}{ccc} H \times S & \longrightarrow & S \\ (a, \alpha) & \longrightarrow & a\alpha \end{array}$$

dış işleminden oluşan ikiliye denir.

$a, b \in H$ ve $\alpha, \beta \in S$ olmak üzere

$$(1) a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$$

$$(2) (a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$$

$$(3) (ab)\alpha = a(b\alpha)$$

$$(4) 1.\alpha = \alpha.$$

\mathbb{D} Dual sayılar halkası üzerinde $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \mathbb{D}^3$ bir modüldür. Burada \mathbb{D} , birimi $(1, 0) = 1$ olan değişimli bir halkadır.

$$\mathbb{D}^3 = \{ X = (x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{D}, 1 \leq i \leq 3 \}$$

$$\circ : \mathbb{D} \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}^3$$

$$(G, X) \longrightarrow G \circ X = GX$$

\mathbb{D}^3 için eşitlik $X = Y \implies x_i = y_i, 1 \leq i \leq 3$

$$\oplus : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}$$

$$(X, Y) \longrightarrow X \oplus Y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3\}$$

$\{\mathbb{D}^3, \oplus\}$ ikilisinin bir Abel Grubu olduğu kolayca

gösterilebilir.

$$o : \mathbb{D} \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}^3$$

I) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{D}^3, \forall k \in \mathbb{D}$ için

$$k \circ (\alpha \oplus \beta) = k \circ \alpha \oplus k \circ \beta$$

$$\text{II) } (k_1 + k_2) \circ \alpha = k_1 \circ \alpha + k_2 \circ \alpha$$

$$\text{III) } (k_1 k_2) \circ \alpha = k_1 \circ (k_2 \circ \alpha)$$

$$\text{IV) } 1 \circ \alpha = \alpha$$

$$\mathbb{D}\text{-modül} = \{\mathbb{D}^3, \oplus, \mathbb{D}, +, \cdot, o\}$$

Abel Grubu Birleşimli, değişimli halka

I. 7. 1. Dual Vektörler

\mathbb{D} -Modülünün elemanları olan sıralı dual sayı üçlü-

lerine Dual Vektör denir.

I. 7. 1. Teorem: $\vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\forall \vec{A} \in \mathbb{D}^3 \text{ için } \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \quad \varepsilon = (0, 1)$$

yazılabilir. [3].

I. 7. 2. Teorem: $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* = (\vec{a}, \vec{a}^*)$, $\lambda \in \mathbb{D}$ ise

$$\lambda \vec{A} = (\lambda \vec{a}, \lambda \vec{a}^*)$$

dır. [3].

I. 7. 3. Teorem: $\forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{D}^3$ için
 $\vec{A} = \vec{B} \iff \vec{a} = \vec{b}, \vec{a}^* = \vec{b}^*$
 dır [3] .

I. 7. 2. \mathbb{D} -Modül Üzerinde İç Çarpım.

Bir

$$\langle, \rangle : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}$$

$$(\vec{A}, \vec{B}) \longrightarrow \langle, \rangle (\vec{A}, \vec{B}) = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{D}^3}$$

işlemi için aşağıdaki aksiyonlar sağlarsa bu işleme

üzerinde iç-çarpım fonksiyonu diyeceğiz.

(i) $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle$, $\forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{D}^3$ / Simetri Aksiyomu

(ii) $\langle \alpha \vec{A}, \vec{B} \rangle = \alpha \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{A}, \alpha \vec{B} \rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{D}$

(iii) $\langle \vec{A} + \vec{B}, \vec{C} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle + \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle$, $\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{D}^3$

$\langle \lambda \vec{A} + \mu \vec{B}, \vec{C} \rangle = \lambda \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle + \mu \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle$ Bilineerlik Aks.

(iv) $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = 0 \iff \vec{A} = \vec{0}$

örnek: $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$, $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^*$, $\vec{a}, \vec{a}^*, \vec{b}, \vec{b}^* \in \mathbb{R}^3$

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \rangle$$

$$= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon \{ \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle \} + \frac{\varepsilon^2 \langle \vec{a}^*, \vec{b}^* \rangle}{0}$$

I. 7. 3. \mathbb{D} - Modül Üzerinde Norm

$$\| \cdot \| : \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}$$

$$\vec{A} \longrightarrow \| \vec{A} \| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} \text{ operatörüne}$$

\mathbb{D} -Modülde Norm Operatörü denir.

Simdi $\|\vec{A}\|$ nin ifadesini bulalım.

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \rangle}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \varepsilon \cdot 2 \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}$$

$$(I. 7. 1) \quad \|\vec{A}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + \varepsilon \cdot 2 \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}$$

$$\|\vec{A}\| = \|\vec{a}\| \sqrt{1 + \varepsilon \cdot 2 \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2}}$$

Hatırlatma: $\mathcal{F} = 1 + \varepsilon x^*$ alırsak

$$(1 + \mathcal{F})^m = [(1 + x) + \varepsilon x^*]^m$$

$$= (1 + x)^m + \varepsilon m x^* (1 + x)^{m-1} + \underbrace{\varepsilon^2 \dots}_{0} \text{ Binomaçınımlı}$$

$$(1 + \mathcal{F})^m = (1 + x)^m + \varepsilon m x^* (1 + x)^{m-1}$$

$m = \frac{1}{2}$ alarak

$$(1 + \mathcal{F})^{\frac{1}{2}} = (1 + x)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \frac{1}{2} x^* (1 + x)^{-\frac{1}{2}}$$

bulunur.

Veya

$$\sqrt{1 + \mathcal{F}} = \sqrt{1 + x} + \varepsilon \frac{x^*}{2\sqrt{1 + x}}$$

dir.(I.7.1) de

$$\mathcal{F} = \varepsilon \cdot 2 \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \text{ olarak alınır}$$

$$\sqrt{1 + \varepsilon \cdot 2 \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2}} = 1 + \varepsilon \frac{2 \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2}}{2 \cdot 1}$$

$$\sqrt{1 + \varepsilon \cdot 2 \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2}} = 1 + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$$

dir.

Bu durumda (I. 7. 1) eşitliği,

$$\|\vec{A}\| = \|\vec{a}\| \left(1 + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \right)$$

$$(1.7.2) \quad \|\vec{A}\| = \|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|}$$

biçiminde yazılabilir. Veya,

$$\|\vec{a}\| = a \in \mathbb{R}, \quad \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} = a^* \in \mathbb{R}$$

olarak alınır

$$(I. 7. 3) \quad \|\vec{A}\| = a + \varepsilon a^*$$

şeklinde yazılır.

I. 7. 4. Birim Dual Vektör

$\|\vec{A}\| = 1 + \varepsilon 0 = 1$ ise A dual vektörüne Birim Dual Vektör denir.

Sonuç: A birim dual vektördür. $\Leftrightarrow \|\vec{a}\| = 1, \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$ dir.

I. 7. 4. Teorem: $\vec{A} \in \mathbb{D}^3$ ve $\vec{A} \neq (0, \vec{a}^*)$ olmak üzere

$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$ dual vektörü, bir birim dual vektördür [3].

Sonuç: $\vec{A} = \|\vec{A}\| \vec{u} = (a + \varepsilon a^*) \vec{u}$

$$\vec{A} = \left(\|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \right) \vec{u}$$

$$k = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \quad \text{ye Adım dersek}$$

$$\vec{A} = \|\vec{a}\| (1 + \varepsilon k) \vec{U}$$

$$\vec{A} = a (1 + \varepsilon k) \vec{U}.$$

Buradan, \vec{A} dual vektörü için, \vec{U} birim dual vektörünün bir dual katı olduğunu söyleyebiliriz.

I. 8. E. Study Dönüşümü [3] .

I. 8. 1. Tanım (Birim Dual Küre)

$K = \{ \vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \mid \|\vec{X}\| = (1, 0); \vec{x}, \vec{x}^* \in \mathbb{R}^3 \}$ CID-Modül alt cümlesine Birim Dual Küre denir.

I. 8. 1. E. Study Teoremi

\mathbb{D} - Modülde birim dual kürenin noktaları 3-boyutlu Öklid uzayının yönlü doğrularıyla bire-bir tekabül ederler [3].

I. 8. 2. Dual Açılı

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$, $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^*$ iki birim dual vektör olsunlar. Yani,

$$\|\vec{a}\| = 1, \quad \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0 \quad \text{ve} \quad \|\vec{b}\| = 1, \quad \langle \vec{b}, \vec{b}^* \rangle = 0$$

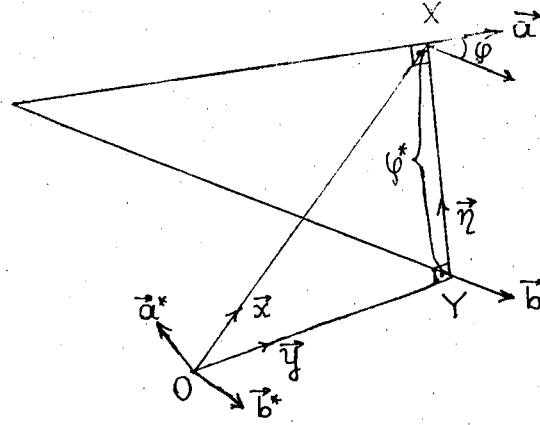
olsun. \vec{A} ile \vec{B} nin

$$(I. 8. 1) \quad \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle)$$

iç çarpımını inceleyelim. \vec{a} ile \vec{b} arasındaki açı φ ise ,

(I. 8. 2) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $\varphi \in \mathbb{R}$

dir (I. 8. 1 Şekil).



I. 8. 1 Şekil.

\vec{n} , Orta dikmesi üzerinde bir birim vektör olsun.

Bunun denklemi, $\vec{n} \perp \vec{a}$ ve $\vec{n} \perp \vec{b}$ olduğundan,

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}$$

dir. Bu takdirde,

$$\vec{x} - \vec{y} = \mp \varphi \vec{n}$$

dir. Böylece,

$$\vec{a}^* = \vec{x} \wedge \vec{a}, \quad \vec{b}^* = \vec{y} \wedge \vec{b}$$

eşitliklerini gözönüne alarak,

$$\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle = \langle \vec{a}, \vec{y} \wedge \vec{b} \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle = - \langle \vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{y} \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle = - \langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{y} \rangle$$

$$(I. 8. 3) \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle = - \langle \vec{y}, \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle$$

ve benzer şekilde,

$$\langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle = \langle \vec{x} \wedge \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$$(I. 8. 4) \quad \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle$$

bulunur. (I. 8. 3) ve (I. 8. 4) değerlerini toplayarak

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle &= \langle \vec{x}, \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle - \langle \vec{y}, \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle \\ &= \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle \\ &= \langle \mp \varphi^* \vec{\eta}, \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle \\ &= \mp \varphi^* \langle \vec{\eta}, \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle \\ &= \mp \varphi^* \left\langle \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}, \vec{a} \wedge \vec{b} \right\rangle \\ &= \mp \varphi^* \frac{1}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|} \langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle \\ &= \mp \varphi^* \frac{1}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|} \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|^2 \\ &= \mp \varphi^* \|\vec{a} \wedge \vec{b}\| \end{aligned}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle = \mp \varphi^* \sin \varphi$$

eşitliği elde edilir. (I. 8. 1) den,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \varphi \mp \varphi^* \sin \varphi$$

bulunur. Burada, yönlendirmeyi öyle yapalım ki,

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \varphi - \varphi^* \sin \varphi$$

şeklinde alalım.

$$\Phi = \varphi + \varepsilon \varphi^*$$

olarak tanımlarsak,

$$\cos \Phi = \cos(\varphi + \varepsilon \varphi^*) = \cos \varphi - \varphi^* \sin \varphi$$

dır ve

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \Phi$$

bulunur. Yönlü iki aykırı doğru arasındaki açı (φ) ve

bunlar arasındaki en kısa mesafe (φ^*) in oluşturduğu açıya

Dual Açı (Φ) denir.

$\|\vec{A}\| = 1, \quad \|\vec{B}\| = 1$ olduğu durumda, $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ olmak üzere,

$$(I. 8. 5) \quad \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \Phi$$

dan

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \Phi .$$

(I. 8. 5) formülünden yararlanarak \mathbb{R}^3 deki yönlü doğruların birbirine göre durumları incelenebilir:

$$1) \quad \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 0 \text{ ise}$$

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \sin \varphi = 0$$

$$\cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi^* \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi^* = 0$$

A doğrusu B yi dik keser.

$$2) \quad \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 1 \text{ ise}$$

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \sin \varphi = 1$$

$$\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0, \quad \varphi^* \sin \varphi = 0, \quad \varphi^* \text{ keyfi}$$

\vec{A} ve \vec{B} doğruları birbirlerine paraleldir. $\varphi^* = 0$

ise doğrular çakışır.

$$3) \quad \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \text{sıfır} \text{ ise}$$

$$\cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi^* \neq 0 .$$

\vec{A} ve \vec{B} aykırı dik doğrulardır.

$$4) \quad \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \text{sıfır} \text{ reel} \text{ ise}$$

$$\varphi^* = 0 .$$

\vec{A} ve \vec{B} doğruları aykırı kesişen doğrulardır.

$$5) \quad \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = -1 \text{ ise}$$

$$\cos \varphi = -1 \implies \varphi = \pi$$

\vec{A} ve \vec{B} doğruları, paralel fakat zıt yönlü doğrulardır.

I. 9. Dual Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi [3]

I. 9. 1. Birtek Dual Değişkenli Fonksiyonlar

I. 9. 1. Tanım: Dual düzlemde M ve N iki dual nokta cümlesi olsun. $\mathcal{I} = x + \varepsilon x^* \in M$ elemanı bir keyfi dual değişken olmak üzere $\forall \mathcal{I} \in M$ noktasına bir f kuralı ile birtek $w \in N$ dual sayısı karşılık tutulabiliyorsa bu halde f 'ye M den N ye bir dual fonksiyon denir ve

$$\begin{aligned} f: M &\longrightarrow N \\ \mathcal{I} &\longrightarrow w = f(\mathcal{I}) \end{aligned}$$

şeklinde gösterilir.

Eğer $w = f(\mathcal{I})$ ifadesinde $\mathcal{I} = x + \varepsilon x^*$ konumu yapılırsa ve

$$R_w = U(x, x^*), \quad D_w = U^*(x, x^*)$$

denirse

$$f(\mathcal{I}) = U(x, x^*) + \varepsilon U^*(x, x^*)$$

elde edilir. O halde,

$$u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ve } u^*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

reel iki değişkenli fonksiyonlar olmak üzere

$$f = u + \varepsilon u^*$$

şeklindedir.

I. 9. 2. Tanım: (Dual Fonksiyonların Sürekliliği)

Farzedelim ki f fonksiyonu bir G bölgesinde tanımlıdır. $\mathcal{I}_0 \in G$ bir nokta olsun. Eğer $\forall \eta > 0$ için bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa öyle ki $\mathcal{I} \in G$ ve $h = \mathcal{I} - \mathcal{I}_0$ olmak üzere $|h| < \delta$ için

$$|f(\mathcal{I}_0 + h) - f(\mathcal{I}_0)| < \eta$$

ise f fonksiyonu, \mathcal{I}_0 da süreklidir denir.

I. 9. 3. Tanım: (Dual Fonksiyonların Diferensiyellenebilmesi).

f dual fonksiyonu bir G bölgesinde tanımlanmış olsun. Eğer $\forall \eta > 0$ için bir $\delta > 0$ bulunabilirse öyle ki bütün $0 < |h| < \delta$ için

$$\left| \frac{f(\mathcal{I}_0 + h) - f(\mathcal{I}_0)}{h} - f'(\mathcal{I}_0) \right| < \eta$$

olacak şekilde bir $f'(\mathcal{I}_0)$ mevcut ise bu halde f , $\mathcal{I}_0 \in G$ noktasında diferansiyellenebilir denir. $f'(\mathcal{I}_0)$ a f 'nin

\mathcal{I}_0 daki türevi adı verilir ve

$$f'(\mathcal{I}_0) = \lim_{\Delta \mathcal{I} \rightarrow 0} \frac{f(\mathcal{I}_0 + \Delta \mathcal{I}) - f(\mathcal{I}_0)}{\Delta \mathcal{I}}$$

şeklinde tanımlanır.

I. 9.4. Tanım: Eğer f dual fonksiyonu dual düzlemin bir G bölgesinin her noktasında diferansiyellenebiliyorsa f , G de analitiktir denir.

I. 9. 2. Analitik Dual Fonksiyonlar Serisi.

I. 9. 5. Tanım: (Dual Değişkenli Fonksiyonlar Serisinin Yakınsaklık Bölgesi).

Kevfi olarak verilen dual fonksiyonlardan meydana gelen

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

gibi bir sonsuz diziyi gözönüne alalım. $\mathcal{I} = x + \varepsilon x^*$ bütün bu fonksiyonların tanım bölgesine ait bir nokta olsun. $\mathcal{I} = x + \varepsilon x^*$ noktasında,

$$f_0(\mathcal{I}) + f_1(\mathcal{I}) + f_2(\mathcal{I}) + \dots + f_n(\mathcal{I}) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\mathcal{I})$$

serisi ya yakınsaktır ya da değildir. Bu serinin yakınsak olduğu nokta cümlesine serinin yakınsaklık bölgesi denir.

Özel Hal: $f_n(\mathcal{I}) = \mathcal{I}^n$ olsun.

$$f_0(\mathcal{I}) + f_1(\mathcal{I}) + f_2(\mathcal{I}) + \dots + f_n(\mathcal{I}) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}^n$$

serisinin yakınsaklık bölgesi, D'Alembert kriterine göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{I}^{n+1}}{\mathcal{I}^n} = \mathcal{I}$$

elde edilir.

$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}^n$ serisinin yakınsak olması için $|\mathcal{I}| < 1$ olmalıdır.

I. 9. 6. Tanım:

$$\mathcal{I}^0 = (x + \varepsilon x^*)^0 = (1, 0)$$

dır.

I. 9. 1. Teorem:

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\mathcal{F}^n = (x + \varepsilon x^*)^n = x^n + \varepsilon n x^{n-1} x^*$$

dır.

İsbat: Binom açılımına göre

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^n &= (x + \varepsilon x^*)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n-p} (\varepsilon x^*)^p \\ &= \binom{n}{0} x^n \underbrace{(\varepsilon x^*)^0}_1 + \binom{n}{1} x^{n-1} \underbrace{(\varepsilon x^*)^1}_{\varepsilon x^*} \\ &\quad + \binom{n}{2} x^{n-2} \underbrace{(\varepsilon x^*)^2}_0 + \dots + \binom{n}{n} x^0 \underbrace{(\varepsilon x^*)^n}_0 \\ \mathcal{F}^n &= x^n + \varepsilon n x^{n-1} x^* \end{aligned}$$

bulunur.

I. 9. 3. Analitik Dual Fonksiyonların Kuvvet Serilerine Açılımı.

$f^{(n)}(\mathcal{F}) = f(\mathcal{F})$, f' nin 0 ıncı mertebeden türevi olarak düşünölsün. Taylor açılımı, $\mathcal{F}_0 \in G$ noktasında,

$$\begin{aligned} f(\mathcal{F}) &= f(\mathcal{F}_0) + \frac{\mathcal{F} - \mathcal{F}_0}{1!} f'(\mathcal{F}_0) + \frac{(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)^2}{2!} f''(\mathcal{F}_0) + \dots \\ &\quad + \frac{(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)^n}{n!} f^{(n)}(\mathcal{F}_0) + \dots \end{aligned}$$

şeklindedir. $\mathcal{F}_0 = 0$ ise Maclaurin Açılımı adı verilir ve bu açılım,

$$f(\mathcal{F}) = f(0) + \frac{\mathcal{F}}{1!} f'(0) + \frac{\mathcal{F}^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{\mathcal{F}^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

$\mathcal{F} = x + \varepsilon x^*$ konumu yapılırsa,

$$f(x + \varepsilon x^*) = f(0) + \frac{x + \varepsilon x^*}{1!} f'(0) + \frac{(x + \varepsilon x^*)^2}{2!} f''(0) + \dots$$

$$+ \frac{(x + \varepsilon x^*)^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

$$f(x + \varepsilon x^*) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

$$+ \varepsilon x^* (f'(0) + \frac{x}{1!} f''(0) + \frac{x^2}{2!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n+1)}(0) + \dots)$$

dır.

$f'(0) = F(0)$ denirse $f^{(p)} = F^{(p-1)}$ olur. Öyleyse,

$$f(x + \varepsilon x^*) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

$$+ \varepsilon x^* (F(0) + \frac{x}{1!} F'(0) + \frac{x^2}{2!} F''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} F^{(n)}(0) + \dots)$$

dır. Burada birinci kısım $f(x)$ in $x=0$ daki Taylor açılımı
ikinci kısım da $F(x) = f'(x)$ in $x=0$ daki Taylor açılımıdır:

$$(I. 9. 1) \quad f(x + \varepsilon x^*) = f(x) + \varepsilon x^* f'(x)$$

dır.

(I. 9. 1) den faydalanarak

$$(I. 9. 2) \quad \cos(\varphi + \varepsilon \varphi^*) = \cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \sin \varphi$$

$$(I. 9. 3) \quad \sin(\varphi + \varepsilon \varphi^*) = \sin \varphi + \varepsilon \varphi^* \cos \varphi$$

$$(I. 9. 4) \quad \operatorname{tg}(\varphi + \varepsilon \varphi^*) = \operatorname{tg} \varphi + \varepsilon \varphi^* (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)$$

bulunur.

I. 9. 2. Teorem: \mathbb{Q} rasyonel sayılar cümlesini gösterebilir.

$m \in \mathbb{Q}$ olmak üzere Binom açılımı Taylor formülü ile elde edilebilir.

$$\text{İsbat: } f(x) = (1+x)^m$$

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

$x=0$ için

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = m$$

$$f''(0) = m(m-1)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$$

$w=f(x)$ nin Maclaurin formülünde, bu değerleri yerine koyarsak.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

bulunur. Burada, $x = \epsilon + \epsilon^2 x^*$ konumu yapıldıktan sonra reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$(1+\varepsilon)^m = 1 + m(x + \varepsilon x^*) + \frac{m(m-1)}{2!} (x + \varepsilon x^*)^2 + \dots \\ + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} (x + \varepsilon x^*)^n + \dots$$

$$(1+\varepsilon)^m = 1 + mx + mx^*\varepsilon + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)}{1!} xx^*\varepsilon + \dots \\ + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1}x^*\varepsilon + \dots$$

$$(1+\varepsilon)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots \\ + \varepsilon mx^* \left[1 + \frac{m-1}{1!} x + \dots + \frac{(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} + \dots \right]$$

$$(I. 9. 5) (1+\varepsilon)^m = (1+x)^m + \varepsilon mx^* (1+x)^{m-1}$$

elde edilir.

I. 10. Çizgiler Geometrisi [5].

I. 10. 1. Lineer Işın Kompleksi.

□ - Modüldeki birim dual $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$ vektörünün \mathbb{R}^3 de bir yönlü doğru gösterdiğini biliyoruz. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ birim reel vektörü \vec{X} doğrusunun yönünü ve $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ de bir 0 noktasına göre \vec{X} in vektörel momentini ifade ediyordu.

Bu durumda,

$$\|\vec{X}\|=1 \implies x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

$$x_1 x_1^* + x_2 x_2^* + x_3 x_3^* = 0$$

olur. 0 halde $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ yönlü doğrusunun PLÜCKER koordinatları,

$$(I. 10. 1) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

$$(I. 10. 2) \quad x_1 x_1^* + x_2 x_2^* + x_3 x_3^* = 0$$

bağıntılarını sağlar.

I. 10. 1. Tanım: $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$, $\|\vec{A}\| \neq 1$ olmak üzere,

$$(I. 10. 3) \quad \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{a} \rangle = 0$$

yani

$$(I. 10. 4) \quad a_1 x_1^* + a_2 x_2^* + a_3 x_3^* + a_1^* x_1 + a_2^* x_2 + a_3^* x_3 = 0$$

bağıntısı (I. 10. 1) ve (I. 10.2) bağıntılarının yanısıra sağlanırsa \vec{X} yönlü doğrularının kümesine \mathbb{R}^3 de bir Lineer Işın Kompleksi denir.

$$(I. 10. 5) \quad k = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$$

büüklüğüne ışın kompleksinin parametresi veya yükselişi diyeceğiz. \vec{A} dual vektöründen,

$$\vec{A}_0 = \frac{\vec{A}}{\sqrt{\vec{A}}} = \frac{\vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*}{\|\vec{a}\| \sqrt{1 + 2\varepsilon k}}$$

birim dual vektörünü teşkil edebiliriz. Bu birim vektöre doğrular uzayında, Lineer kompleksin ekseni olan bir doğru tekabül eder.

Halbuki,

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\epsilon k}} = \sqrt{1-2\epsilon k} = 1 - \epsilon k$$

bağıntısı mevcut olduğundan,

$$(I. 10. 6) \quad \vec{A}_0 = \vec{a}_0 + \epsilon \vec{a}_0^* = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} + \epsilon \frac{\vec{a}^* - k\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

elde ederiz.

Şimdi, parametresi (yükselişi) k olan \vec{A}_0 eksenini etrafındaki helisel hareketi gözönüne alalım. Bu helis hareketi Darboux dönme vektörü \vec{a} olan \vec{A}_0 eksenini etrafındaki bir dönme ile, kayma vektörü $k\vec{a}$ olan eksen doğrultusundaki bir kaymadan oluşturabiliriz. Bu takdirde, kayılan uzunluğun dönme açısına oranı gerçekten k dir. Yani,

$$k = \frac{\text{kayma kısmı}}{\text{dönme kısmı}}$$

$$k = \frac{\|\vec{k}\vec{a}\|}{a}$$

$\vec{OM} = \vec{m}$ olmak üzere \vec{A}_0 ekseninin herhangi bir M noktası için vektörel moment,

$$\vec{a}_0^* = \vec{m} \wedge \vec{a}_0$$

dir. (I. 10. 6) dan faydalanarak

$$\frac{\vec{a}^* - k\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \vec{m} \wedge \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

$$(I. 10. 7) \quad \vec{a}^* - k\vec{a} = \vec{m} \wedge \vec{a}$$

eşitliği bulunur. Şimdi,

$$\vec{MP} = \vec{OP} - \vec{OM} = \vec{p} - \vec{m}$$

olmak üzere, herhangi bir P noktasını helisel bir harekete tabi tutalım. Bu noktanın yörüngesi adi bir helistir. P noktasının \vec{v} hız vektörü, \vec{A}_0 etrafındaki sırf dönmenin hız bileşeni ile \vec{A}_0 boyunca meydana gelen sırf kaymanın hız bileşeninden oluşturulabilir. Yani,

$$\vec{v} = \vec{v}_d + \vec{v}_k.$$

Burada,

$$\vec{v}_d = \vec{a} \wedge (\vec{p} - \vec{m})$$

ve

$$\vec{v}_k = k\vec{a}$$

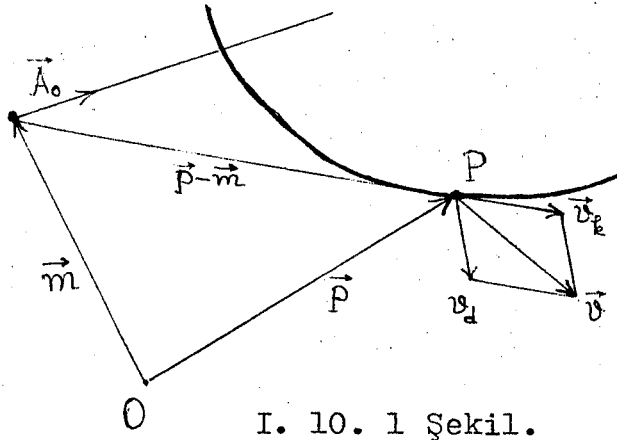
dır. Öyleyse,

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{a} \wedge (\vec{p} - \vec{m}) + k\vec{a} \\ &= \vec{a} \wedge \vec{p} - \underbrace{\vec{a} \wedge \vec{m}} + k\vec{a} \\ &= \vec{a} \wedge \vec{p} + (\vec{a}^* - k\vec{a}) + k\vec{a} \end{aligned}$$

$$(I. 10. 8) \quad \vec{v} = \vec{a} \wedge \vec{p} + \vec{a}^*$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi, (\vec{x}, \vec{x}^*) doğrusu P noktasının helisel yörün-
gesinin herhangi bir normali olsun (I. 10. 1 Şekil). O halde,



I. 10. 1 Şekil.

$$\vec{x}^* = \vec{p} \wedge \vec{x}$$

ve, $\vec{v} \perp \vec{x}$

$\langle \vec{v}, \vec{x} \rangle = 0$
koşullarını sağlar. \vec{v} nin (I. 10. 8) deki değeri burada
yerine konulursa

$$\langle \vec{v}, \vec{x} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{a} \wedge \vec{p} + \vec{a}^*, \vec{x} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{a} \wedge \vec{p}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{x} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{a}, \vec{p} \wedge \vec{x} \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{x} \rangle = 0$$

$\vec{p} \wedge \vec{x} = \vec{x}^*$ eşitliği gözününe alınır,sa,

$$\langle \vec{a}, \vec{x}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{x} \rangle = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu suretle şu teoremi ifade ederiz:

I. 10. 1. Teorem: Lineer bir doğru kompleksine bir helis hareketi, tersine olarak bir helis hareketine Lineer bir doğru kompleksi bağlıdır. Kompleksin ekseni, helisin eksenini ile çakışır, kompleksin ve helis hareketinin parametre-

leri birbirinin aynıdır. Lineer bir kompleksin (∞^3) sayıdaki ışınları uzayın helis hareketine uyan noktalarındaki yörünge normallerinin bütününden ibaret olur.

$$(1. 10. 9) \quad \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0 \quad \text{veya} \quad k=0$$

şartı sağlanırsa dejenere veya singüler olan bir lineer kompleksten bahsedilir. Bu takdirde \vec{A} vektörü, \vec{A} eksenini ile çakışık olan bir doğru gösterir. (I.10.3) denklemi, dejenere olmuş bir ışın kompleksinde eksen ve kompleks doğrularınının kesişme şartı ile aynı olur. Bu sebepten dejenere veya singüler bir ışın kompleksi \vec{A} eksenini kesen bütün doğrulardan ibarettir ve dolayısıyla dejenere bir ışın kompleksine \vec{A} eksenininin ışın demeti de denir.

I. 10. 2. Lineer Işın Kongrüansı

Denklemleri

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{x}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{x} \rangle &= 0, \\ \langle \vec{b}, \vec{x}^* \rangle + \langle \vec{b}^*, \vec{x} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

olan iki ışın kompleksinde ortak olan (∞^2) sayıdaki doğru çizgilere lineer ışın kongrüansı veya kısaca ışın ağı diyeceğiz.

Homogen λ, μ parametreleri yardımı ile lineer ışın komplekslerinin demetini şu şekilde ifade edebiliriz:

$$(I. 10. 10) \quad \langle (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}), \vec{x}^* \rangle + \langle (\lambda \vec{a}^* + \mu \vec{b}^*), \vec{x} \rangle = 0.$$

Bu takdirde her $\frac{\lambda}{\mu}$ değeri çiftine ışın kongrüansımızı ihtiva eden ışın kompleksi tekabül eder.

Her (I.10.10) kompleks demetinde dejenere iki kompleks vardır. Bu dejenere komplekslerin eksenlerine ışın kongrüansının kılavuz hatları denir. Bu takdirde kongrüans, iki kılavuz hattını kesen doğruların bütününden ibaret olur. Bu husule gelme şekli, ışın ağı tabirini kullanmamıza hak kazandırır.

Kompleks demetimizin dejenere komplekslerini, (I.10.9) a göre

$$\langle (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}), (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) \rangle = 0$$

şartını yazarak buluruz. Bu ise $\frac{\lambda}{\mu}$ ye göre

$$\lambda^2 \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \lambda \mu (\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle) + \mu^2 \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0$$

şeklinde karesel bir denklem gösterir. Bu denklemin

$$D = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle - (\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle)^2$$

diskriminantının tetkiki, kılavuz hatların reel veya eşlenik imajiner olup olmadıklarını belirtir.

$D < 0$ ise, hiperbolik bir ışın ağı,

$D > 0$ ise, eliptik bir ışın ağı,

$D = 0$ ise, parabolik bir ışın ağı

söz konusudur. Son hal ilk iki halin sınır halidir. Parabolik halde kılavuz hatları hem çakışık, hem de reeldir.

Hiperbolik veya eliptik bir ışın ağının kılavuz hatları daima aykırı doğrulardır. Çünkü, kongrüansın dejenere komplekslerden husule geldiği düşünülse bile, yani

$$\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0, \quad \langle \vec{b}, \vec{b}^* \rangle = 0$$

farzedilse bile

$$D = -(\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle)^2 \neq 0$$

olur. Şu halde (\vec{a}, \vec{a}^*) ve (\vec{b}, \vec{b}^*) kılavuz hatları kesişmezler, aykırı doğrulardır.

I. 10. 3. Regle Yüzeyler

Uzayda bir parametrelili (∞^1) doğru ailelerinin söz konusu yapacağız. Böyle bir doğru ailesine, süreklilik ve diferansiyellensibilirliğe dair bazı şartlar altında, regle yüzey denir. Bu aileyi, ya Plücker doğru koordinatlarına göre üç denklemle ifade edebilir veya parametrik bir gösterme yardımı ile verebiliriz. Cebirsel regle yüzeylerinin tetkiki için, bazı maksatlardan dolayı, birinci gösterme şeklini tercih edeceğiz. Meselâ,

$$\langle \vec{a}, \vec{x}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{x} \rangle = 0, \quad \langle \vec{b}, \vec{x}^* \rangle + \langle \vec{b}^*, \vec{x} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{c}, \vec{x}^* \rangle + \langle \vec{c}^*, \vec{x} \rangle = 0$$

lineer denklemleri ile bir kuadriğin (ikinci derece yüzeyinin) bir ana doğru ailesi belirtilir.

Bir genel regle yüzeyini reel bir t parametresi vasıtası ile ifade etmek için,

$$\vec{A} = \vec{A}(t) = \vec{a}(t) + \varepsilon \dot{\vec{a}}(t)$$

birim dual vektörünü t nin diferansiyellenebilir fonksiyonu olarak alalım.

Başlangıç noktası O da alınan $\vec{a} = \vec{a}(t)$ yer vektörü birim küre üzerinde bir eğri çizer. Bu eğriye regle yüzeyin küresel tasviri diyeceğiz. Eğrinin $d\varphi$ yay-elementi için

$$(I. 10. 11) \quad d\varphi^2 = \langle d\vec{a}, d\vec{a} \rangle = \langle \dot{\vec{a}}, \dot{\vec{a}} \rangle dt$$

bağıntısı mevcuttur. Bundan başka birim küre üzerinde $\vec{A} = \vec{A}(t)$ dual eğrisinin

$$(I. 10. 12) \quad d\Phi = d\varphi + \varepsilon d\varphi^*$$

dual yay- elementini de gözönüne alalım. Tamamen benzer bir şekilde,

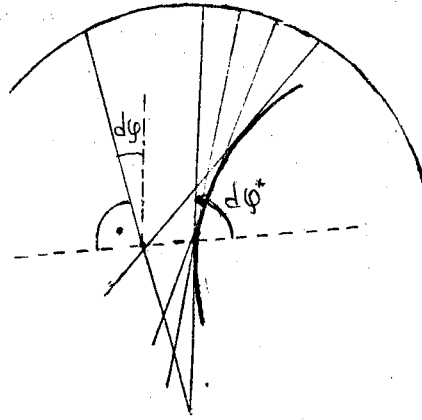
$$(I. 10. 13) \quad d\Phi^2 = \langle d\vec{A}, d\vec{A} \rangle = \langle \dot{\vec{A}}, \dot{\vec{A}} \rangle dt^2$$

bağıntısı geçerli olur. Basit bir hesaptan sonra bunun reel kısmı için (I. 10. 11), dual kısmı için de

$$\langle d\varphi, d\varphi^* \rangle = \langle d\vec{a}, d\vec{a}^* \rangle = \langle \dot{\vec{a}}, \dot{\vec{a}}^* \rangle dt^2$$

bağıntısını elde ederiz. $d\Phi$ dual büyüklüğü $\vec{A}(t)$ ve $\vec{A}(t+dt)$ komşu dual vektörlerinin dual açısı, yani bu iki

vektörün küre üzerindeki uç noktalarının küresel uzunluğu olarak da düşünülebilir. Buradaki $d\varphi$ reel ve $d\varphi^*$ dual kısımlarına, komşu birim dual vektörlere regle yüzeyde karşılık gelen komşu iki anadoğru arasındaki açı ile normal uzaklık (en kısa mesafe) tekabül eder (I.10.2 Şekil).



I. 10. 2 Şekil.

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\epsilon \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle$$

dual ifadesi iç çarpım olmasından dolayı koordinat dönüşümlerine karşı invaryanttır. Parametrenin değişmesi halinde bu dual ifade reel bir çarpanla çarpılmış olur. Bu sebepten

$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle$ reel büyüklükleri koordinat dönüşümlerine karşı invaryant kalırlar ve parametrenin değişmesi halinde aynı reel çarpanla çarpılmış olurlar. Bu yüzden onların oranı regle yüzeyin diferansiyel invaryantı olur.

$$(I. 10. 14) \quad \lambda = \frac{1}{d} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \frac{\langle d\vec{a}, d\vec{a}^* \rangle}{\langle d\vec{a}, d\vec{a} \rangle} = \frac{d\varphi^*}{d\varphi}$$

ifadesini ele alalım. burada λ büyüklüğüne regle yüzeyin t parametresine ait olan \vec{A} anadoğrusu boyunca dağıtma parametresi veya drali diyeceğiz.

Demekki Dral kavramı limit değer olarak somut bir şekilde şöyle tanımlanabilir: e, e_1 gibi komşu iki anadoğrunun $\Delta\varphi^*$ en kısa mesafesinin bu iki anadoğrunun $\Delta\varphi$ eğilim açısına oranının $e_1 \rightarrow e$ için limiti drali verir:

$$\lim_{e_1 \rightarrow e} \frac{\Delta\varphi^*}{\Delta\varphi} = \frac{d\varphi^*}{d\varphi} = \frac{1}{d} = \lambda$$

Torslarda (açılabilir regle yüzeylerde) komşu anadoğrular kesiştiğinden $\frac{1}{d}$ ifadesi sıfır olur. Böylece $\frac{1}{d}$ nin sıfır olması torsları karakterize eder.

Drali sıfır olmayan bir regle yüzeyde komşu anadoğrular aykırıdır, yani bir düzlem teşkil etmezler. $A(t)$ anadoğrusunun, $A(t+dt)$ komşu anadoğrusundan en kısa mesafeye sahip olan X noktasına boğaz noktası veya striksiyon noktası denir. Bu noktanın $X(t)$ geometrikyerine regle yüzeyin boğaz çizgisi veya striksiyon çizgisi denir.

I. 11. Meusnier Teoremi ve Sonuçları [4]

E^3 Öklid uzayında bir M yüzeyi alalım. M yüzeyinde diferansiyellenebilir bir eğri, I aralığı E de bir açık aralık olmak üzere:

$$\alpha: I \longrightarrow M$$

dönüşümü ile verilsin. α eğrisi ile M yüzeyinin oluşturduğu (α, M) ikilisi M üzerinde herhangi bir yüzey şeridini gösterebilir. α eğrisinin eğrilikleri \mathcal{K}, \mathcal{C} ve şeridin eğrilikleri de a, b, c olmak üzere,

$$(I. 11. 1) \quad b = \mathcal{K} \langle \vec{n}, \vec{\xi} \rangle = \frac{II}{I} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

eşitliği mevcuttur; burada a, şeridin normal eğriligi,

b asimtotik eğriligi, c ise jeodezik eğriligi dir.

Ayrıca $\vec{n}, m_0 \in \alpha \subset M$ noktasında α eğrisinin asli normal, $\vec{\xi}$ ise aynı noktada M yüzeyinin birim normalidir. I ve II, sırası ile, yüzeyin birinci ve ikinci esas formlarını ve E, F, G, L, M, N de yüzeyin m_0 noktasındaki Gauss elemanlarını göstermektedir.

M yüzeyinin komşu iki noktasını, sırası ile, (u, v) ve $(u+du, v+dv)$ olarak gösterirsek, (I. 11. 1) ifadesi

$$f : M \longrightarrow \frac{II}{I} \in \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longrightarrow \frac{II}{I} = f(u, v, du, dv)$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olur. Böylece (I. 11. 1) ifadesi,

$$(I. 11. 2) \quad \kappa = \frac{f(u, v, du, dv)}{\langle \vec{n}, \vec{\xi} \rangle}$$

biçimine dönüşür. $\vec{\xi}$ ve $f(u, v, du, dv)$, $m_0 \in M$ noktasında bilindikleri için κ eğriliği yalnız \vec{n} asli normale bağlıdır.

Buna göre,

1°) M yüzeyinin $m_0 \in \alpha(t_0)$, ($t_0 \in I$) noktasından geçen ve aynı oskültör düzleme sahip olan bütün eğrilerin κ eğrilikleri aynıdır.

2°) m_0 noktasında, aynı hız vektörüne sahip ancak, oskültör düzlemleri farklı olan eğrilerin κ eğrilikleri de farklıdır.

$m_0 \in M$ noktasında ortak \vec{t} teğet vektörüne sahip M üzerindeki eğrilerin κ eğriliklerini incelemek için, \vec{t} vektörü sabit tutulup, \vec{n} vektörü değiştirilir. Böylece \vec{t} ve \vec{n} vektörlerinin belirttiği oskültör düzlemle M yüzeyinin arakesitleri elde edilir. Bu α_i arakesit eğrilerinin eğrilikleri, belirtmek istediğimiz κ_i eğrilikleridir.

\vec{t} yi sabit tutup, \vec{n} yi değiştirmekle (\vec{t}, \vec{n}) oskulator düzlemi \vec{t} etrafında döndürölmüş olur. Bu dönme esnasında oluşan ani oskulator düzlem (\vec{t}, \vec{n}_i) olsun. M yüzeyi ile (\vec{t}, \vec{n}_i) oskulator düzleminin arakesit eğrisini α_i ve bunun eğriliğini \varkappa_i ile gösterirsek, (I. 11. 2) ifadesi

$$(I, 11. 3) \quad \varkappa_i = \frac{f(u, v, du, dv)}{\langle \vec{n}_i, \vec{\xi} \rangle}$$

şeklinde yazılabilir.

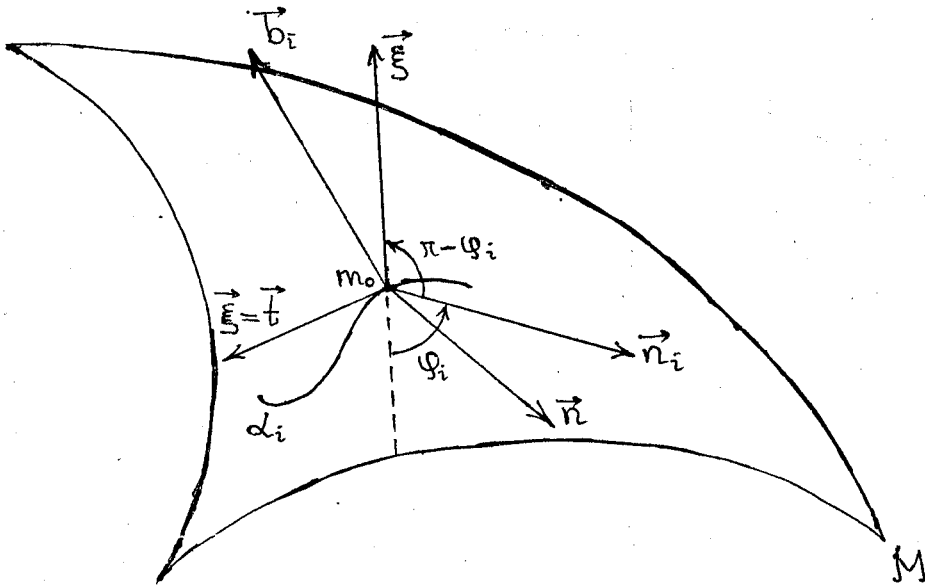
\vec{n}_i ile $\vec{\xi}$ arasındaki açı $\pi - \varphi_i$ ise (I. 11. 3) ifadesi

$$\varkappa_i = \frac{f(u, v, du, dv)}{-\cos \varphi_i}$$

veya

$$(I. 11. 4) \quad \varkappa_i \cos \varphi_i = -f(u, v, du, dv)$$

ifadesine dönuşür. (I. 11. 1 şekil).



I. 11. 1 şekil.

\vec{t} sabit tutulduğundan $f(u, v, du, dv)$, bütün arakesit eğrileri için aynıdır. Böylece \mathcal{A}_i ve \mathcal{Q}_i nin bütün değerleri için $\mathcal{A}_i \cos \mathcal{Q}_i$ çarpımı sabittir.

(\vec{t}, \vec{n}_i) oskulator düzlemi, $(\vec{t}, \vec{\xi})$ normal düzlemi ile çakıştığında \vec{n}_i vektörü m_0 noktasında M yüzeyinin normal vektörü ile çakışır. M ile $(\vec{t}, \vec{\xi})$ düzleminin arakesit eğrisi L olsun. Bu eğri için \vec{n}_i , \mathcal{Q}_i ve \mathcal{A}_i ye, sırasıyla, \vec{n} , $\bar{\mathcal{Q}}$ ve $\bar{\mathcal{A}}$ karşılık tutulsun. $\bar{\mathcal{Q}} = \pi$ olduğu için,

$$\langle \vec{n}, \vec{\xi} \rangle = -1$$

olur ve (I.11.4) ifadesi,

$$(I.11.5) \quad \bar{\mathcal{A}} = \frac{II}{I} = f(u, v, du, dv)$$

biçimine dönüşür. Ayrıca,

$$-1 \leq \cos \mathcal{Q}_i \leq 1$$

olduğundan $\bar{\mathcal{A}}$, \mathcal{A}_i lerin en küçüğüdür ve

$$R = \frac{1}{\bar{\mathcal{A}}}$$

eğrilik yarıçapı da $m_0 \in M$ noktasından geçen eğrilerin eğrilik yarıçaplarının en büyüğüdür. R ye M yüzeyinin m_0 noktasındaki eğrilik yarıçapı denir. Böylece (I. 11. 5) ifadesi,

$$(I. 11. 6) \quad \frac{1}{R} = \frac{II}{I}$$

şeklini alır.

(I. 11. 6) eşitliğinin sağ tarafı, $m_0 \in M$ noktasından geçen eğrilere bağlı değildir. Diğer taraftan, $\frac{II}{I}$ kemiyeti, $m_0 \in M$ noktası için sabit bir reel sayıdır. Öyleyse, (I.11.4) ve (I.11.6) ifadelerinden

$$\mathcal{A}_i \cos \mathcal{Q}_i = \frac{1}{R}$$

elde edilir.

$\rho_i = \frac{1}{\kappa_i}$ notasyonu kullanılarak, bu ifade,

$$(I. 11. 7) \quad \boxed{\rho_i = R \cos \varphi_i}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Ayrıca, M yüzeyi ile m_0 da M ye teğet ve normal olan düzlemin arakesit eğrisinin eğrilik yarıçapı R dir. Bu arakesit eğrisine M yüzeyinin Normal kesiti denir.

Karşı tutulan φ_i kesitinin $m_0 \in M$ noktasındaki eğrilik çemberi, (\vec{t}, \vec{n}_i) oskülatör düzleminde bulunur. Bu çemberin yarıçapı ρ_i ve merkezi

$$\vec{c}_i = \vec{m}_0 + \rho_i \vec{n}_i$$

dır.

Benzer şekilde, $m_0 \in M$ noktasında M yüzeyinin normal kesiti olan L eğrisinin eğrilik çemberi, $(\vec{t}, \vec{\xi})$ oskülatör düzleminde bulunur. Bu çemberin yarıçapı R ve merkezi

$$\vec{c} = \vec{m}_0 + R \vec{\xi}$$

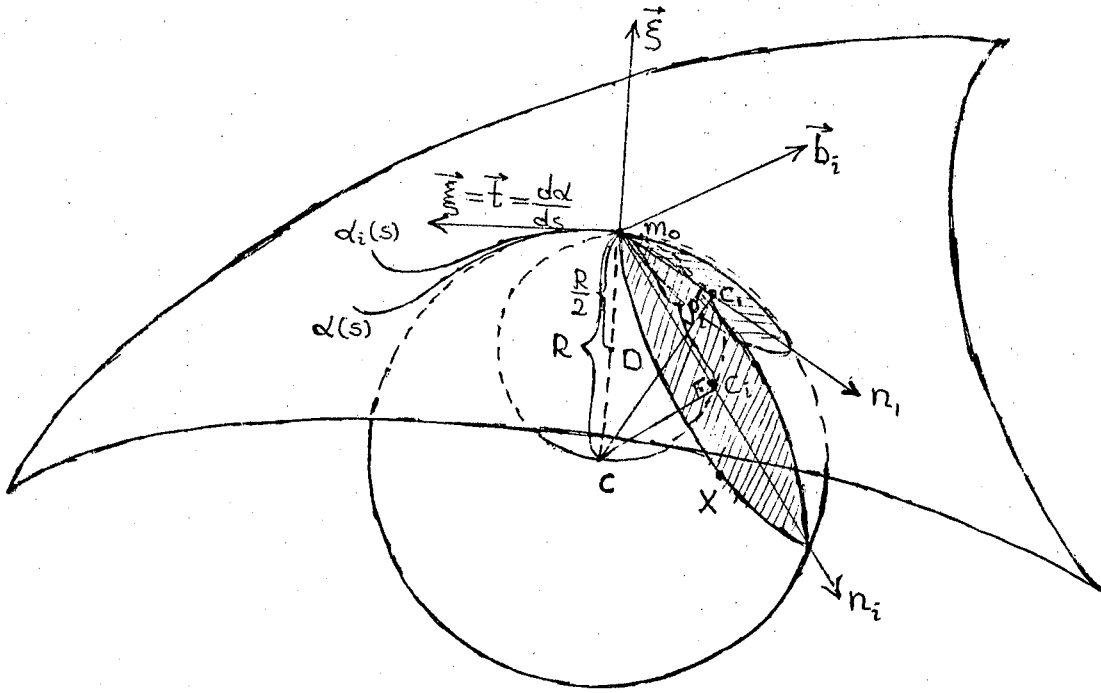
dır (I. 11. 2 Şekil).

(I. 11. 7) bağıntısına göre,

$$\langle \vec{m}_0 \vec{c}_i, \vec{c}_i \vec{c} \rangle$$

iç- çarpımı sifıra eşittir ve buradan

$$\|\vec{c}_i \vec{c}\| = \sqrt{R^2 - \rho_i^2}$$



I. 11. 2 Şekil.

eşitliği elde edilir.

Diğer taraftan, $\vec{\xi} = \vec{t}$ vektörü, $(\vec{n}_i, \vec{\xi})$ düzlemine ortogonaldır ve böylece L eğrisinin C eğrilik merkezini, α_i eğrisinin C_i eşitlik merkezine birleştiren $\vec{C}_i C$ doğrusu da adı geçen düzleme ortogonaldır. Sonuçta, $\vec{C}_i C$ vektörü (\vec{t}, \vec{n}_i) düzlemini de ortogonal olur ve buradan, X , α_i eğrisinin m_0 noktasındaki eğrilik çemberinin herhangi bir noktası olmak üzere,

$$\langle \vec{C}_i C, \vec{XC}_i \rangle = 0$$

olur. Böylece, CXC_i üçgeni bir dik üçgendir.

Sonuçta,

$$\|\vec{XC}\| = R$$

bulunur.

Bu demektir ki, α_i eğrisinin m_0 noktasındaki eğrilik çemberi, merkezi C ve yarıçapı R olan bir küre üzerinde bulunur. Meusnier teoremi denilen, aşağıdaki teorem böylece isbatlanmış oldu.

I. 11. 1. Teorem: (Meusnier Teoremi)

Bir M yüzeyinin, keyfi bir m_0 noktasından geçen bütün düzlem kesitlerinin cümlesi $\{\alpha_i\}$ olsun. Bunların m_0 noktasındaki teğetlerinin doğrultuları, asimtotik olmamak üzere, aynı olsun. α_i eğrilerinin eğrilik çemberlerinin herbiri, yarıçapı R ve merkezi $\vec{C} = \vec{m}_0 + R\vec{\xi}$ olan bir küre üzerinde bulunur. Burada, $\vec{\xi}$, M nin m_0 noktasında birim normal vektörünü ve R ise M nin aynı noktadaki normal kesiti için eğrilik yarıçapını gösterir.

I. 11. 1. Teoremde ifade edilen küreye, m_0 noktasında M yüzeyi için Meusnier küresi denilir. Bu eğrilik çemberlerinin meydana getirdiği tek büyük çember normal kesitte aittir.

Tanrıöver N., Meusnier teoreminin sonucu olarak aşağıdaki teoremi ispatlamıştır [7].

I. 11. 2. Teorem: Bir M yüzeyinin keyfi bir $m_0 \in M$ noktasından geçen bütün düzlem kesitlerinin cümlesi $\{\alpha_i\}$ olsun. Bu düzlem kesitlerin m_0 noktasındaki teğetlerinin

doğrultuları, asimtotik doğrultu olmamak üzere, aynı olsun.

(i) m_0 noktasındaki bütün α_i eğrilerinin eğrilik merkezleri, yarıçapı, $\frac{R}{2}$ ve merkezi $\vec{D} = \vec{m}_0 + \frac{R}{2} \vec{\xi}$ olan bir çember üzerinde bulunurlar. Burada $\vec{\xi}$, M yüzeyinin m_0 noktasındaki birim normal vektörüdür, R ise M yüzeyinin aynı noktadaki normal kesitinin eğrilik yarıçapıdır.

(ii) m_0 noktasındaki bütün α_i eğrilerinin eğrilik eksenleri, düzlemsel bir doğru demetine dahildirler. Burada, demetin ortak noktası Meusnier küresinin merkezi ve düzlemi ise m_0 noktasındaki normal kesite ait $(\vec{n}, \vec{\xi})$ oskulator düzlemidir.

I. 12. Meusnier Teoreminin, Reel Birim Küre İçin

Sonuçları [4].

Bu paragrafta M yüzeyi olarak K' reel birim küresini ele alacağız.

K' küresi üzerindeki bir eğri α ve K' küresinin $m_0 = \alpha(s_0) \in K'$ noktasındaki birim normali $\vec{\xi}$ olsun. Bu durumda,

$$(I. 12. 1) \quad \vec{\xi} = \vec{\alpha}$$

yazılabilir.

(I. 12. 1) eşitliğinin, $m_0 = \alpha(s_0)$ noktasında, α nın yay-parametresine göre türevini alırsak,

$$(I. 12. 2) \quad \vec{\xi}' = \vec{\mathcal{L}}' = \vec{\xi}$$

bulunur. Ayrıca birim kürede,

$$I = du^2 + \cos^2 u dv^2, \quad II = du^2 + \cos^2 u dv^2$$

$$\frac{I}{R} = \frac{II}{I} = 1$$

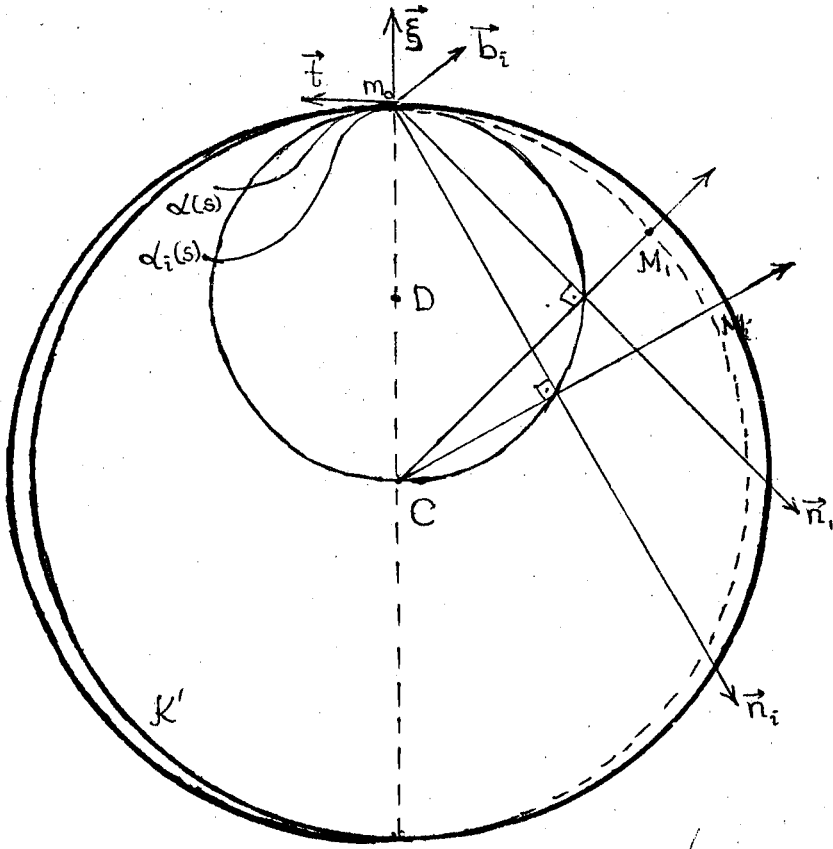
$$R = 1$$

dir. Burada, R , K' küresine ait normal kesitin eğrilik çemberinin yarıçapıdır. Sözü edilen normal kesit, m_0 noktasında α eğrisiyle aynı teğet vektöre sahiptir. Buradan, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

I. 12. 1. Teorem: K' birim küresi üzerindeki eğrilerin Meusnier küreleri, K' nün bütün noktalarında K' küresi ile çakışırlar.

Bir M yüzeyi için verilen Meusnier teoreminin sonuçları, aynı zamanda, bir K birim küresi için de geçerlidir.

$m_0 \in K'$ noktasındaki bir α küresel eğrisinin eğrilik merkezini, K' küresinin merkezine birleştiren doğru, $m_0 = \alpha(s_0)$ noktasına karşılık gelen eğrilik eksenidir. Yönlendirilmiş eğrilik ekseninin K' küresini deldiği noktaya, α küresel eğrisinin $m_0 = \alpha(s_0) \in K'$ noktasındaki küresel eğrilik merkezi denilir (I. 12. 1 Şekil).



I. 12. 1 Şekil.

Bu durumda, (I. 11. 1) ve (I. 11. 2) Teoremleri bir K' birim küresi için aşağıdaki teoremlere dönüşürler.

I. 12. 2. Teorem: Bir K' birim küresi üzerinde, herbiri bir keyfi sabit $m_0 \in K'$ noktasından geçen ve bu noktadaki teğetleri, asimtotik doğrultu hariç, aynı doğrultuda olan eğrilerin $\{\alpha_i\}$ cümlesini ele alalım:

(i) m_0 noktasından geçen eğrilerin eğrilik çemberleri, K' birim küresi üzerinde bulunurlar ve m_0 noktasından geçerler.

(ii) α_i eğrilerinin küresel eğrilik merkezlerinin Geometrikeri, K' küresinin bir büyük çemberidir. Bu büyük çember α_i eğrilerinin ortak teğet vektörüne normal olan düzlemdir.

CM_i doğruları, karşılık tutulan α_i eğrilerinin m_0 noktasındaki eğrilik eksenleridir. Bu doğruların hepsi, K' küresinin C merkezinden geçerler ve aynı düzlemde bulunurlar. Şu halde, I. 12. 2 Teoreminin (ii) paragrafı, aşağıdaki teoreme indirgenir.

I. 12. 3. Teorem: Bir K' birim küresi üzerinde, herbiri aynı bir sabit $m_0 \in K'$ noktasından geçen ve bu noktadaki teğetleri aynı doğrultuda olan eğrilerin oskulator düzlemleri ile K' küresinin kesitlerinin $\{\alpha_i\}$ cümlesini alalım. I_i doğrusu, m_0 noktasında α_i eğrisinin eğrilik eksenini olsun. I_i doğrularının hepsi düzlemsel bir doğru demeti oluştururlar. Bu doğru demetinin ortak noktası, K' küresinin C merkezi ve ortak düzlemi ise m_0 noktasındaki teğet vektöre ortogonal olan $(\vec{n}, \vec{\xi})$ düzlemidir.

I. 13. Meusnier Teoreminin Reel Küresel Hareketler İçin Sonuçları [4]

Bir O noktasını sabit bırakan bir katı cismin bir parametrelili hareketi, O merkezli hareketli K birim küresinin, aynı merkezli, sabit K' birim küresine göre hareketiyle tanımlanır. Bu harekete bir parametrelili hareket denir ve bunu K/K' ile göstermiştik.

K/K' hareketi esnasında, K küresi üzerindeki keyfi sabit bir X noktasının, K' küresi üzerindeki izi (X) olsun. K/K' hareketinde parametreyi bir reel t parametresi olarak ele alacağız ve t 'nin K/K' hareketi esnasında zamanı temsil ettiğini düşüneceğiz. Öyleyse bir $X_0 \in (X)$ noktası,

$$K/K' : \mathbb{R} \longrightarrow K'$$

$$t_0 \longrightarrow X_0 = X(t_0) \in (X) \subset K'$$

fonksiyonu marifetiyle t_0 parametresine karşılık tutulur.

Buradaki fonksiyon, bir ortogonal matrise karşılıktır.

$X(t_0)$ noktasının komşuluğundaki nokta $X(t_0 + dt)$ olsun. K' birim küresi üzerinde, herbiri X_0 noktasından geçen ve bu noktadaki teğetleri, asimtotik doğrultu hariç, aynı doğrultuda olan eğrilerin $\{\alpha_i\}$ cümlesini ele alalım:

$\{\alpha_i\}$ cümlesinin eğrileri $X(t_0)$ ve $X(t_0 + dt)$ noktalarından geçen eğriler olarak düşünülebilir. Bu eğrilerin $X_0 = X(t_0)$ noktasındaki eğrilik çemberleri için I. 12. 2 Teoreminin (i) şıkkı mevcuttur. Benzer şekilde X_0 noktasında α_i eğrilerinin küresel eğrilik merkezlerinin geometrikyeri için ise aynı teoremin (ii) şıkkı geçerlidir. Sonuç olarak, α_i eğrilerinin eğrilik eksenleri için (I. 12. 3) Teorem'e müracaat edilir.

Böylece hareket geometrisinde, yukarıda verilen (I. 12. 1), (I. 12. 2) ve (I. 12. 3) teoremleri yerine aşağıdaki teoremleri ifade edebiliriz.

I. 13. 1. Teorem: Hareketli K birim küresinin, sabit K' birim küresine göre bir parametrelili küresel hareketi K/K' olsun. Bir t anında, sabit bir $X \in K$ noktasının (X) yörüngesi için Meusnier küresi K' birim küresidir.

I. 13. 2. Teorem: Bir parametrelili küresel hareket esnasında, $X_i \in K$ noktalarının, sabit K' birim küresi üzerindeki ve $X(t_0), X(t_0 + dt) \in K'$ noktalarından geçen yörüngelerinin cümlesi $\{(X_i)\}$ olsun.

(i) $\{(X_i)\}$ yörüngelerinin $X(t_0)$ noktasındaki eğrilik çemberleri K' birim küresi üzerinde bulunurlar ve $X(t_0)$ noktasından geçerler.

(ii) $\{(X_i)\}$ yörüngelerinin küresel eğrilik merkezlerinin geometrikyeri, K' birim küresi üzerindeki büyük çemberdir. Bu çember, normal vektörü

$$\vec{T} = \frac{\overrightarrow{X(t_0) X(t_0 + dt)}}{\|\overrightarrow{X(t_0) X(t_0 + dt)}\|}$$

olan düzlemde bulunur.

I. 13. 3. Teorem: Bir parametrelili K/K' küresel hareketi esnasında, $X(t_0)$ ve $X(t_0+dt) \in K'$ noktalarından geçen $\{(X_i)\}$ yörüngelerinin $X(t_0)$ noktasındaki eğrilik eksenlerinin cümlesi $\{l_i\}$ olsun. $\{l_i\}$ sistemi bir doğru demeti, normal vektörü,

$$\vec{T} = \frac{\overrightarrow{X(t_0) X(t_0+dt)}}{\|\overrightarrow{X(t_0) X(t_0+dt)}\|}$$

olan düzlemde bulunur ve l_i eksenlerinin ortak noktası K' küresinin merkezidir.

II. BÖLÜM

Bu bölümde bir uzay eğrisine iştirak eden vektör alanlarının birim küre üzerindeki resimleri (küresel göstergeleri) ne ait eğrilikler, eğrilik yarıçapları esas uzay eğrisine ait eğrilikler cinsinden hesaplanmaktadır.

II. 1. Bir α Uzay Eğrisinin Frenet Vektörlerinin Küresel Göstergelerine ait Eğrilik Fonksiyonları:

Bir $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisinin küresel göstergeleri

α_t (teğetler göstergesi)

α_b (binormaller göstergesi)

α_n (asli normaller göstergesi)

C (sabit Pol eğrisi)

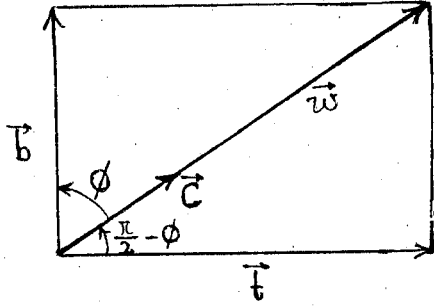
olsun. α eğrisinin yay parametresi s olsun. α eğrisini s cinsinden ifade edebiliriz.

$$\omega = \|\vec{\omega}\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\vec{C} = \frac{1}{\omega} (\tau \vec{T} + \kappa \vec{B})$$

$$\vec{C} = \frac{\tau}{\omega} \vec{T} + \frac{\kappa}{\omega} \vec{B}$$

dir (II. 1. 1 Şekil).



II. 1. 1 Şekil.

II. 1. 1 Teorem: $\vec{\alpha}_t = \vec{t}(s)$, $\vec{\alpha}_b = \vec{b}(s)$, $\vec{\alpha}_n = \vec{n}(s)$ diyelim.

$$\alpha_t \text{ nin yay uzunluğu} = s_t = \int_0^s \alpha_t ds$$

$$\alpha_b \text{ nin yay uzunluğu} = s_b = \int_0^s \alpha_b ds$$

$$\alpha_n \text{ nin yay uzunluğu} = s_n = \alpha(s) = \int_0^s \omega ds$$

$$c \text{ nin yay uzunluğu} = s_c = \phi(s) - \phi(0)$$

dır [2].

I. 2. α_t Teğetler Göstergesinin Eğriligi ve Eğrilik Yarıçapı

α eğrisinin değişken bir noktası P ve bunun yer vektörü $\alpha(s)$ olsun. α eğrisinin s yay-parametresi, α_t teğetler göstergesinin herhangi bir parametresiymiş gibi alınabilir.

$$\vec{\alpha}_t = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}, \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = \alpha \vec{n} \Rightarrow \left\| \frac{d\vec{t}}{ds} \right\| = \alpha$$

$$\alpha_b = \frac{\|\dot{\alpha}_t \wedge \ddot{\alpha}_t\|}{\|\dot{\alpha}_t\|^3}$$

$$\dot{\alpha}_t = \alpha \vec{n}, \quad \|\dot{\alpha}_t\|^3 = \alpha^3$$

$$\frac{d^2 \vec{\alpha}_t}{ds^2} = \ddot{\alpha}_t = \frac{d}{ds} (\alpha \vec{n}) = \dot{\alpha} \vec{n} + \alpha \dot{\vec{n}}$$

$$(II. 2. 1) \quad \begin{cases} \frac{d\vec{t}}{ds} = 0 \cdot \vec{t} + \kappa \vec{n} + 0 \cdot \vec{b} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa \vec{t} + 0 \cdot \vec{n} + \tau \vec{b} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} = 0 \cdot \vec{t} - \tau \vec{n} + 0 \cdot \vec{b} \end{cases}$$

$$\dot{\vec{\alpha}}_t = \dot{\kappa} \vec{n} + \kappa (-\kappa \vec{t} + \tau \vec{b})$$

$$\ddot{\vec{\alpha}}_t = -\kappa^2 \vec{t} + \dot{\kappa} \vec{n} + \kappa \tau \vec{b}$$

$$\dot{\vec{\alpha}}_t \wedge \ddot{\vec{\alpha}}_t = \begin{vmatrix} \vec{t} & \vec{n} & \vec{b} \\ 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa^2 & \dot{\kappa} & \kappa \tau \end{vmatrix}$$

$$\dot{\vec{\alpha}}_t \wedge \ddot{\vec{\alpha}}_t = \kappa^2 \tau \vec{t} + \kappa^3 \vec{b}$$

$$\dot{\vec{\alpha}}_t \wedge \ddot{\vec{\alpha}}_t = \kappa^2 (\tau \vec{t} + \kappa \vec{b})$$

$$\|\dot{\vec{\alpha}}_t \wedge \ddot{\vec{\alpha}}_t\| = \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

$$\kappa_t = \frac{\|\dot{\vec{\alpha}}_t \wedge \ddot{\vec{\alpha}}_t\|}{\|\dot{\vec{\alpha}}_t\|^3} = \frac{\kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa^3}$$

$$\kappa_t = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa}, \quad \omega = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

Şu halde α_t teğetler göstergesinin I. eğrilik fonksiyonu,

$$\alpha_t = \frac{\omega}{\mathcal{K}}$$

dır. Aynı eğrinin eğrilik yarıçap fonksiyonu da

$$\rho_t = \frac{\mathcal{K}}{\omega}$$

dır.

II. 3. Binormaller Göstergesinin Eğriliği ve Eğrilik Yarıçapı

$$\vec{\mathcal{L}}_b = \vec{b}(s)$$

olduğundan

$$\dot{\vec{\mathcal{L}}}_b = \dot{\vec{b}}(s) = -\tau \vec{n}$$

veya buradan,

$$\|\dot{\vec{\mathcal{L}}}_b\| = \tau, \quad \|\dot{\vec{\mathcal{L}}}_b\|^3 = \tau^3$$

$$\ddot{\vec{\mathcal{L}}}_b = \mathcal{K} \tau \vec{t} - \dot{\tau} \vec{n} - \tau^2 \vec{b}$$

$$\dot{\vec{\mathcal{L}}}_b \wedge \ddot{\vec{\mathcal{L}}}_b = \begin{vmatrix} \vec{t} & \vec{n} & \vec{b} \\ 0 & -\tau & 0 \\ 2\mathcal{K} & -\dot{\tau} & -\tau^2 \end{vmatrix}$$

dir. Buradan,

$$\dot{\alpha}_b \wedge \ddot{\alpha}_b = \tau^3 \vec{t} + \kappa \tau^2 \vec{b}$$

$$\dot{\alpha}_b \wedge \ddot{\alpha}_b = \tau^2 (\tau \vec{t} + \kappa \vec{b})$$

$$\|\dot{\alpha}_b \wedge \ddot{\alpha}_b\| = \tau^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

$$\alpha_b = \frac{\|\dot{\alpha}_b \wedge \ddot{\alpha}_b\|}{\|\dot{\alpha}_b\|^3} = \frac{\tau^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\tau^3}$$

$$\alpha_b = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\tau}, \quad \omega = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

dir. Şu halde, α_b binormaller göstergesinin eğrilik fonksiyonu

$$\alpha_b = \frac{\omega}{\tau}$$

ve dolayısıyla α_b 'nin eğrilik yarıçap fonksiyonu da

$$\rho_b = \frac{\tau}{\omega}$$

dır.

II. 4. Asli Normaller Göstergesinin Eğriligi ve Eğrilik Yarıçapı

$$\mathcal{I}_n = \vec{n}(s)$$

$$\dot{\mathcal{I}}_n = \dot{\vec{n}}(s) = -\kappa \vec{t} + \tau \vec{b}$$

$$\|\dot{\mathcal{I}}_n\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}, \quad \|\dot{\mathcal{I}}_n\|^3 = \omega^3$$

$$\ddot{\mathcal{I}}_n = -\kappa \dot{\vec{t}} - \kappa \vec{t} + \tau \dot{\vec{b}} + \tau \vec{b}$$

$$\ddot{\mathcal{I}}_n = -\kappa \dot{\vec{t}} - \kappa^2 \vec{n} + \tau \dot{\vec{b}} - \tau^2 \vec{n}$$

$$\ddot{\mathcal{I}}_n = -\kappa \dot{\vec{t}} - (\kappa^2 + \tau^2) \vec{n} + \tau \dot{\vec{b}}$$

$$\ddot{\mathcal{I}}_n = -\kappa \dot{\vec{t}} - \omega^2 \vec{n} + \tau \dot{\vec{b}}$$

$$\dot{\vec{\alpha}}_n \wedge \ddot{\vec{\alpha}}_n = \begin{vmatrix} \vec{t} & \vec{n} & \vec{b} \\ -\kappa & 0 & \tau \\ -\dot{\kappa} & -\omega^2 & \dot{\tau} \end{vmatrix}$$

$$\dot{\vec{\alpha}}_n \wedge \ddot{\vec{\alpha}}_n = \omega^2 \tau \vec{t} + (\kappa \dot{\tau} - \tau \dot{\kappa}) \vec{n} + \kappa \omega^2 \vec{b}$$

$$\|\dot{\vec{\alpha}}_n \wedge \ddot{\vec{\alpha}}_n\| = \sqrt{\omega^4 \tau^2 + (\kappa \dot{\tau} - \tau \dot{\kappa})^2 + \omega^4 \kappa^2}$$

$$\|\dot{\vec{\alpha}}_n \wedge \ddot{\vec{\alpha}}_n\| = \sqrt{\omega^4 (\tau^2 + \kappa^2) + (\kappa \dot{\tau} - \tau \dot{\kappa})^2}$$

$$\|\dot{\vec{\alpha}}_n \wedge \ddot{\vec{\alpha}}_n\| = \sqrt{\omega^6 + (\kappa \dot{\tau} - \tau \dot{\kappa})^2} .$$

$$\kappa_n = \frac{\|\dot{\vec{\alpha}}_n \wedge \ddot{\vec{\alpha}}_n\|}{\|\dot{\vec{\alpha}}_n\|^3}$$

formülünden κ_n asli normaller göstergesinin eğrilik fonksiyonu için

$$\kappa_n = \frac{\sqrt{\omega^6 + (\kappa \dot{\tau} - \tau \dot{\kappa})^2}}{\omega^3}$$

dır. Buradan da aynı eğrinin eğrilik yarıçap fonksiyonu için de

$$\rho_n = \frac{w^3}{\sqrt{w^6 + (\mathcal{R}\dot{\mathcal{C}} - \mathcal{C}\dot{\mathcal{R}})^2}}$$

dır.

II. 5. \vec{C} Sabit Pol Eğrisinin Eğriliği ve Eğrilik Yarıçapı

$$\vec{C} = \frac{\mathcal{R}\vec{b} + \mathcal{C}\vec{t}}{w}, \quad w = \sqrt{\mathcal{R}^2 + \mathcal{C}^2}$$

$$\dot{\vec{C}} = \frac{\mathcal{R}\dot{\mathcal{R}}}{w}\vec{b} + \frac{\mathcal{C}\dot{\mathcal{C}}}{w}\vec{t}$$

$$\dot{w} = \frac{1}{2} (2\mathcal{R}\dot{\mathcal{R}} + 2\mathcal{C}\dot{\mathcal{C}}) (\mathcal{R}^2 + \mathcal{C}^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\dot{w} = \frac{\mathcal{R}\dot{\mathcal{R}} + \mathcal{C}\dot{\mathcal{C}}}{(\mathcal{R}^2 + \mathcal{C}^2)^{1/2}}$$

$$\dot{w} = \frac{\mathcal{R}\dot{\mathcal{R}} + \mathcal{C}\dot{\mathcal{C}}}{w}$$

olmak üzere

$$\vec{C} = \frac{\dot{\alpha}\omega - \dot{\omega}\alpha}{\omega^2} \vec{b} + \frac{\alpha\dot{\epsilon}}{\omega} \vec{b} + \frac{\dot{\epsilon}\omega - \dot{\omega}\epsilon}{\omega^2} \vec{f} + \frac{\epsilon}{\omega} \vec{f}$$

veya

$$\vec{C} = \frac{\dot{\alpha}\omega - \dot{\omega}\alpha}{\omega^2} \vec{b} + \frac{\alpha\dot{\epsilon}}{\omega} (-\hat{e}\vec{n}) + \frac{\dot{\epsilon}\omega - \dot{\omega}\epsilon}{\omega^2} \vec{f} + \frac{\epsilon}{\omega} (\dot{\alpha}\hat{e}\vec{n})$$

$$\vec{C} = \frac{1}{\omega^2} \left[(\dot{\epsilon}\omega - \dot{\omega}\epsilon) \vec{f} + (\alpha\dot{\epsilon}\omega - \dot{\omega}\alpha\epsilon) \vec{b} \right]$$

$$\vec{C} = \frac{1}{\omega^2} \left[(\dot{\epsilon}\omega - \frac{\alpha\dot{\alpha}\dot{\epsilon} + \epsilon\dot{\epsilon}\dot{\alpha}}{\omega}) \vec{f} + (\alpha\dot{\epsilon}\omega - \frac{\alpha\dot{\alpha}\dot{\epsilon} + \epsilon\dot{\epsilon}\dot{\alpha}}{\omega} \alpha) \vec{b} \right]$$

$$\vec{C} = \frac{1}{\omega^2} \left[\left(\frac{\dot{\epsilon}\omega^2 - \alpha\dot{\alpha}\dot{\epsilon} - \epsilon\dot{\epsilon}\dot{\alpha}}{\omega} \right) \vec{f} + \left(\frac{\alpha\dot{\epsilon}\omega^2 - \alpha\dot{\alpha}\dot{\epsilon} - \epsilon\dot{\epsilon}\dot{\alpha}}{\omega} \right) \vec{b} \right]$$

$$\vec{C} = \frac{1}{\omega^3} \left\{ [\dot{\epsilon}(\alpha\dot{\alpha} + \epsilon^2) - \alpha\dot{\alpha}\dot{\epsilon} - \epsilon\dot{\epsilon}\dot{\alpha}] \vec{f} + [\alpha\dot{\epsilon}(\alpha\dot{\alpha} + \epsilon^2) - \alpha\dot{\alpha}\dot{\epsilon} - \epsilon\dot{\epsilon}\dot{\alpha}] \vec{b} \right\}$$

$$\vec{C} = \frac{1}{\omega^3} \left[(\alpha\dot{\epsilon}^2 + \epsilon^2\dot{\alpha} - \alpha\dot{\alpha}\dot{\epsilon} - \epsilon\dot{\epsilon}\dot{\alpha}) \vec{f} + (\alpha\dot{\epsilon}^2 + \epsilon^2\dot{\alpha} - \alpha\dot{\alpha}\dot{\epsilon} - \epsilon\dot{\epsilon}\dot{\alpha}) \vec{b} \right]$$

$$\vec{C} = \frac{1}{\omega^3} \left[(\alpha\dot{\epsilon}^2 - \alpha\dot{\alpha}\dot{\epsilon}) \vec{f} + (\epsilon^2\dot{\alpha} - \epsilon\dot{\epsilon}\dot{\alpha}) \vec{b} \right]$$

$$\vec{C} = \frac{1}{\omega^3} \left[\alpha(\alpha\dot{\epsilon} - \dot{\alpha}\dot{\epsilon}) \vec{f} + \epsilon(\epsilon\dot{\alpha} - \dot{\alpha}\dot{\epsilon}) \vec{b} \right]$$

$$\vec{C} = \frac{1}{\omega^3} \left[\alpha(\alpha\dot{\epsilon} - \dot{\alpha}\dot{\epsilon}) \vec{f} - \epsilon(\alpha\dot{\epsilon} - \dot{\alpha}\dot{\epsilon}) \vec{b} \right]$$

$$\vec{C} = \frac{\alpha\dot{\epsilon} - \dot{\alpha}\dot{\epsilon}}{\omega^3} (\alpha\vec{f} - \epsilon\vec{b}), \quad \frac{\alpha\dot{\epsilon} - \dot{\alpha}\dot{\epsilon}}{\omega^3} = v$$

$$\dot{\vec{C}} = v(\mathcal{A}\vec{t} - \mathcal{C}\vec{b})$$

$$\|\dot{\vec{C}}\| = v\sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{C}^2}, \quad \|\dot{\vec{C}}\|^3 = v^3\omega^3$$

$$\ddot{\vec{C}} = v(\mathcal{A}\vec{t} - \mathcal{C}\vec{b})$$

ve buradan da

$$\ddot{\vec{C}} = \dot{v}(\mathcal{A}\vec{t} - \mathcal{C}\vec{b}) + v(\mathcal{A}\dot{\vec{t}} + \mathcal{A}\vec{t} - \dot{\mathcal{C}}\vec{b} - \mathcal{C}\dot{\vec{b}})$$

$$\ddot{\vec{C}} = \dot{v}(\mathcal{A}\vec{t} - \mathcal{C}\vec{b}) + v(\mathcal{A}\vec{t} + \mathcal{A}^2\vec{n} - \dot{\mathcal{C}}\vec{b} + \mathcal{C}^2\vec{n})$$

$$\ddot{\vec{C}} = (\dot{v}\mathcal{A} + v\mathcal{A})\vec{t} + v\omega^2\vec{n} - (\dot{v}\mathcal{C} + v\dot{\mathcal{C}})\vec{b}$$

$$\dot{\vec{C}} \wedge \ddot{\vec{C}} = \begin{vmatrix} \vec{t} & \vec{n} & \vec{b} \\ v\mathcal{A} & 0 & -v\mathcal{C} \\ \dot{v}\mathcal{A} + v\mathcal{A} & v\omega^2 & -(\dot{v}\mathcal{C} + v\dot{\mathcal{C}}) \end{vmatrix}$$

$$\dot{\vec{C}} \wedge \ddot{\vec{C}} = v^2\omega^2\mathcal{C}\vec{t} + [v\mathcal{C}(\dot{v}\mathcal{A} + v\mathcal{A}) - v\mathcal{A}(\dot{v}\mathcal{C} + v\dot{\mathcal{C}})]\vec{n} + v^2\omega^2\mathcal{A}\vec{b}$$

$$\dot{\vec{C}} \wedge \ddot{\vec{C}} = v^2\omega^2\mathcal{C}\vec{t} + [v\mathcal{C}\mathcal{A}\dot{v} + v^2\mathcal{C}\mathcal{A} - v\mathcal{A}\mathcal{C}\dot{v} - v^2\mathcal{A}\dot{\mathcal{C}}]\vec{n} + v^2\omega^2\mathcal{A}\vec{b}$$

$$\dot{\vec{C}} \wedge \ddot{\vec{C}} = v^2\omega^2\mathcal{C}\vec{t} + v^2(\mathcal{C}\mathcal{A} - \mathcal{A}\dot{\mathcal{C}})\vec{n} + v^2\omega^2\mathcal{A}\vec{b}$$

$$\dot{\vec{C}} \wedge \ddot{\vec{C}} = v^2 \left[\omega^2\mathcal{C}\vec{t} + (\mathcal{C}\mathcal{A} - \mathcal{A}\dot{\mathcal{C}})\vec{n} + \omega^2\mathcal{A}\vec{b} \right]$$

$$\|\dot{\vec{C}} \wedge \ddot{\vec{C}}\| = v^2 \sqrt{\omega^4 r^2 + (r \dot{\theta} - \theta \dot{r})^2 + \omega^4 r^2}$$

$$\|\dot{\vec{C}} \wedge \ddot{\vec{C}}\| = v^2 \sqrt{\omega^4 (r^2 + r^2) + (r \dot{\theta} - \theta \dot{r})^2}$$

$$\|\dot{\vec{C}} \wedge \ddot{\vec{C}}\| = v^2 \sqrt{\omega^6 + (r \dot{\theta} - \theta \dot{r})^2} .$$

Böylece C sabit Pol eğrisinin eğrilik fonksiyonu için

$$\rho_c = \frac{\|\dot{\vec{C}} \wedge \ddot{\vec{C}}\|}{\|\dot{\vec{C}}\|^3}$$

formülü kullanılarak

$$\rho_c = \frac{v^2 \sqrt{\omega^6 + (r \dot{\theta} - \theta \dot{r})^2}}{v^3 \omega^3}$$

veya

$$\rho_c = \frac{\sqrt{\omega^6 + (r \dot{\theta} - \theta \dot{r})^2}}{v \omega^3}$$

dır. Buradan da C nin eğrilik yarıçapı fonksiyonu için

$$\rho_c = \frac{1}{\rho_c} = \frac{v \omega^3}{\sqrt{\omega^6 + (r \dot{\theta} - \theta \dot{r})^2}}$$

veya

$$\rho_c = \frac{r \dot{r} - r \dot{\theta}}{\sqrt{\omega^6 + (r \dot{\theta} - \theta \dot{r})^2}}$$

dır.

Şu halde özet olarak şu değerleri verebiliriz:

$$(1) \quad f_t = \frac{1}{\partial \epsilon_t} = \frac{\partial \epsilon}{w}, \quad w = \sqrt{\partial \epsilon^2 + \tau^2}$$

$$(2) \quad f_n = \frac{1}{\partial \epsilon_n} = \frac{w^3}{\sqrt{w^6 + (\partial \epsilon \tau - \tau \partial \epsilon)^2}}$$

$$(3) \quad f_b = \frac{1}{\partial \epsilon_b} = \frac{\tau}{w}$$

$$(4) \quad f_c = \frac{1}{\partial \epsilon_c} = \frac{\partial \epsilon \tau - \tau \partial \epsilon}{\sqrt{w^6 + (\partial \epsilon \tau - \tau \partial \epsilon)^2}}$$

II. 6. Küresel Gösterge Eğrilerinin Eğrilik Fonksiyonları arasındaki Bağlantılar:

Yukarıdaki (1) ve (3) ifadelerinin karelerini toplayalım.

$$\left(\frac{1}{\partial \epsilon_t}\right)^2 + \left(\frac{1}{\partial \epsilon_b}\right)^2 = \frac{\partial \epsilon^2}{w^2} + \frac{\tau^2}{w^2}$$

$$\left(\frac{1}{\partial \epsilon_t}\right)^2 + \left(\frac{1}{\partial \epsilon_b}\right)^2 = \frac{\partial \epsilon^2 + \tau^2}{w^2}$$

$$\left(\frac{1}{\partial \epsilon_t}\right)^2 + \left(\frac{1}{\partial \epsilon_b}\right)^2 = 1 \quad .$$

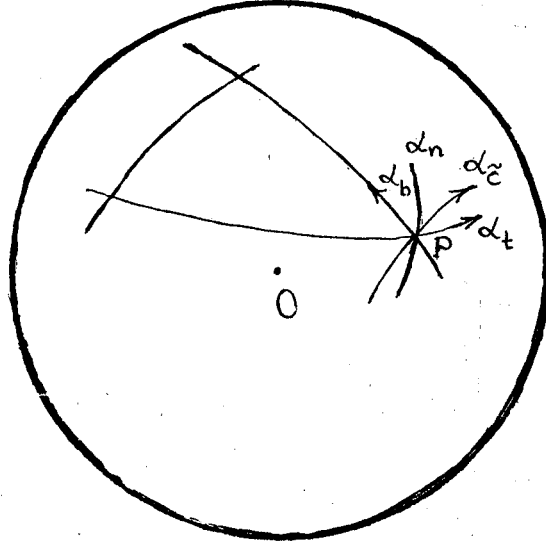
(2) ve (4) ifadelerinin kar elerini toplayalım.

$$\left(\frac{1}{\partial_n}\right)^2 + \left(\frac{1}{\partial_c}\right)^2 = \frac{\omega^6}{\omega^6 + (\partial_c \partial_c - \partial_c \partial_c)^2} + \frac{(\partial_c \partial_c - \partial_c \partial_c)^2}{\omega^6 + (\partial_c \partial_c - \partial_c \partial_c)^2}$$

$$\left(\frac{1}{\partial_n}\right)^2 + \left(\frac{1}{\partial_c}\right)^2 = \frac{\omega^6 + (\partial_c \partial_c - \partial_c \partial_c)^2}{\omega^6 + (\partial_c \partial_c - \partial_c \partial_c)^2}$$

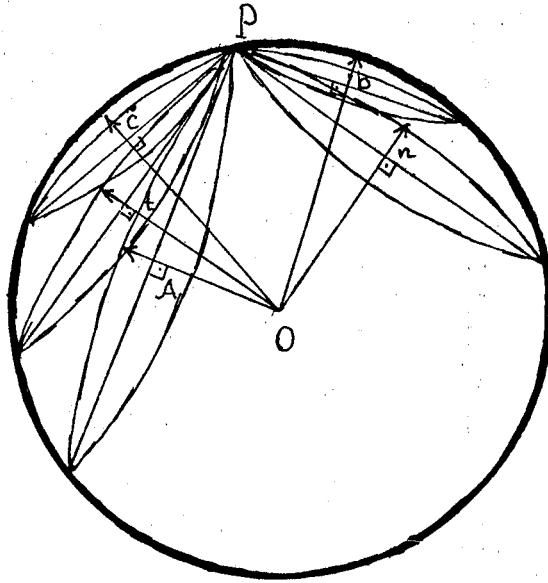
$$\left(\frac{1}{\partial_n}\right)^2 + \left(\frac{1}{\partial_c}\right)^2 = 1 .$$

α_t tegetler göstergesi, α_n asli normaller göstergesi, α_b binormaller göstergesi α egrisinin P noktasından geçer. Bunların yanısıra α_c , egriliği α_c nin egriliğine efit olan ve P den geçen eğri olsun (II. 6. 1 Şekil).



II. 6. 1 Şekil.

Yukarıdaki sonuçlardan edindiğimiz bilgilere göre, α egrisinin küresel göstergelerinin ve α_c egrisinin eğrilik çemberlerini bir birim küre üzerinde gösterebiliriz (II. 6. 2 Şekil).



II. 6. 2 Şekil.

II. 6. 2. Şekil üzerinde,

$$\overline{PA} = \frac{1}{\mathcal{A}}$$

$$\overline{Pt} = \frac{1}{\mathcal{A}_t} = \frac{\mathcal{A}}{w}$$

$$\overline{Pb} = \frac{1}{\mathcal{A}_b} = \frac{c}{w}$$

$$\overline{Pn} = \frac{1}{\mathcal{A}_n} = \frac{w^3}{\sqrt{w^6 + (\mathcal{A}c - c\mathcal{A})^2}}$$

$$\overline{Pc} = \frac{1}{\mathcal{A}_c} = \frac{\mathcal{A}c - c\mathcal{A}}{\sqrt{w^6 + (\mathcal{A}c - c\mathcal{A})^2}}$$

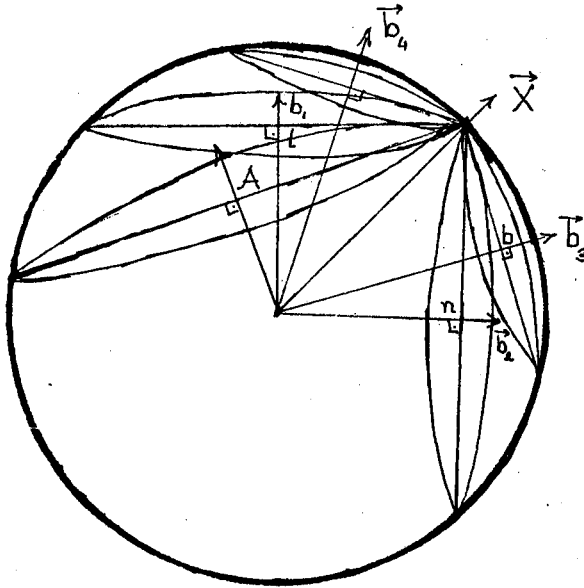
dır.

III. BÖLÜM

Küresel Gösterge Eğrilerinin Eğrilik Eksenleri

Bu bölümde bir α uzay eğrisi üzerinde tanımlanan vektör alanlarının küresel göstergelerinin eğrilik eksenlerinin birbirine göre konumları incelenmiştir. Küresel göstergeler arasındaki küresel involütenin eğrilik eksenini cinsinden karşılığı verildi.

Bir α uzay eğrisinin Frenet vektörlerinin küresel göstergelerinin eğrilik eksenlerinin doğrultman vektörlerini $\vec{b}_i, 1 \leq i \leq 4$ ile gösterelim (III. 1. Şekil).



III. 1 Şekil

$\vec{b}_t = \vec{b}_1$ in denklemi, α_t teğetler göstergesinin binormal vektör alanı,

$\vec{b}_n = \vec{b}_2$ in denklemi, α_n asli normaller göstergesinin binormal vektör alanı,

$\vec{b}_b = \vec{b}_3$ in denklemi, α_b binormaller göstergesinin binormal vektör alanı.

$\vec{b}_c = \vec{b}_4$ in denklemi, α_c sabit pol eğrisinin binormal vektör alanı

olsun.

$$\vec{b}_i = \vec{t}_i \wedge \vec{n}_i, \quad 1 \leq i \leq 4, \quad .$$

III. 1. α_t Teğetler Göstergesinin $\vec{b}_1 = \vec{b}_t$ Binormal Vektör Alanının Hesabı:

α_t nin denklemi,

$$\vec{L}(s_t) = \vec{t}$$

dır. Buradan

$$\frac{d\vec{L}}{ds_t} = \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_t}$$

$$\vec{t}_t = \lambda \vec{n} \cdot \frac{ds}{ds_t}$$

olur. Her iki tarafın normunu alırsak

$$1 = \alpha \cdot \frac{ds}{ds_t} \Rightarrow \frac{ds}{ds_t} = \frac{1}{\alpha}$$

Şu halde,

$\vec{t}_t = \vec{n}$, α_t teğetler göstergesinin birim teğet vektör alanıdır.

Şimdi, α_t nin \vec{n}_t asli normal vektör alanını hesaplıyalım.

$$D_t \vec{t}_t = \frac{d\vec{t}_t}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_t}$$

$$\alpha_t \vec{n}_t = \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_t}$$

$$\alpha_t \vec{n}_t = (-\alpha \vec{t} + \tau \vec{b}) \cdot \frac{1}{\alpha}$$

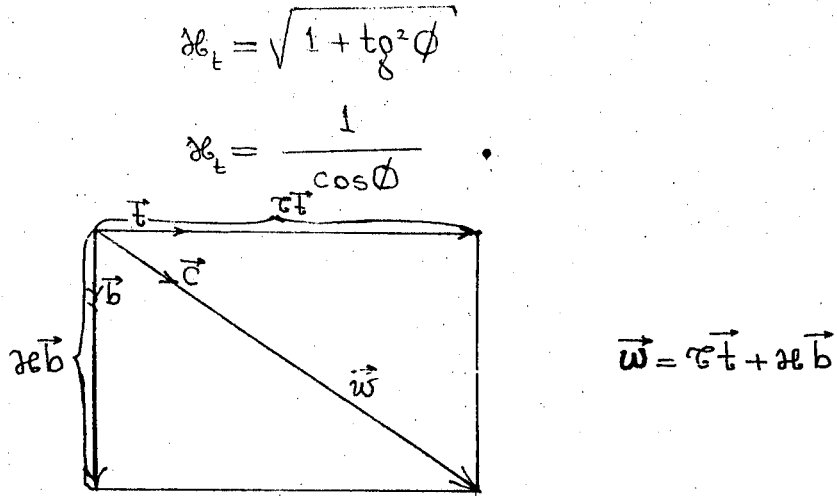
$$\alpha_t \vec{n}_t = -\vec{t} + \frac{\tau}{\alpha} \vec{b}$$

(Burada α_t ve \vec{n}_t ile α_t teğetler göstergesinin eğriliğini ve asli normalini gösteriyoruz).

Her iki tarafın normunu alırsak,

$$\alpha_t = \sqrt{1 + \frac{\tau^2}{\alpha^2}}$$

$\frac{\tau}{\alpha} = \tan \phi$ (Burada ϕ , \vec{w} darboux vektörü ile \vec{b} binormali arasındaki açıdır.)



III. 1. 1 Şekil.

Şu halde,

$$\vec{n}_t = -\cos \phi \vec{t} + \sin \phi \vec{b}.$$

$$\vec{n}_t = -\cos \phi \vec{t} + \sin \phi \vec{b}.$$

Şimdi α_t nin \vec{b}_t binormal vektör alanını hesaplayalım.

$$\vec{b}_t = \vec{t}_t \wedge \vec{n}_t$$

$$\vec{b}_t = \vec{n} \wedge (-\cos \phi \vec{t} + \sin \phi \vec{b})$$

$$= -\cos \phi \vec{n} \wedge \vec{t} + \sin \phi \vec{n} \wedge \vec{b}$$

$$= -\cos \phi (-\vec{b}) + \sin \phi \vec{t}$$

$$\vec{b}_t = \sin \phi \vec{t} + \cos \phi \vec{b}.$$

III. 2. \mathcal{L}_n Asli Normaller Göstergesinin $\vec{b}_2 = \vec{b}_n$

Binormal Vektör Alanının Hesabı:

\mathcal{L}_n nin denklemi:

$$\vec{\mathcal{L}}(s_n) = \vec{n}(s)$$

dır. Buradan \mathcal{L}_n nin \vec{t}_n birim teğet vektör alanını hesap-
larsak,

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{ds_n} = \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_n}$$

$$\vec{t}_n = (-\kappa\vec{t} + \tau\vec{b}) \cdot \frac{ds}{ds_n} .$$

Her iki tarafın normunu alırsak,

$$1 = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \cdot \frac{ds}{ds_n}$$

$$\frac{ds}{ds_n} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} , \quad \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = \|\vec{w}\|$$

$$\frac{ds}{ds_n} = \frac{1}{\|\vec{w}\|} .$$

0 halde,

$$\vec{t}_n = -\frac{\kappa}{\|\vec{w}\|} \vec{t} + \frac{\tau}{\|\vec{w}\|} \vec{b} ,$$

$$\frac{\partial \ell}{\|\vec{w}\|} = \cos \phi, \quad \tau = \sin \phi$$

$$\vec{t}_n = -\cos \phi \vec{t} + \sin \phi \vec{b}$$

veya \vec{n}_t nin ifadesi de aynı olduğundan,

$$\vec{t}_n = \vec{n}_t$$

dir.

α_n asli normaller göstergesinin \vec{n}_n asli normal vektör alanı:

$$\begin{aligned} D_{t_n} \vec{t}_n &= \frac{dt_n}{ds_n} \\ &= \frac{d\vec{t}_n}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_n} \\ &= \frac{d}{ds} (-\cos \phi \vec{t} + \sin \phi \vec{b}) \cdot \frac{ds}{ds_n} \\ &= (\phi' \sin \phi \vec{t} + \phi' \cos \phi \vec{b} - \alpha \cos \phi \vec{n} - \tau \sin \phi \vec{n}) \frac{1}{\|\vec{w}\|} \\ D_{t_n} \vec{t}_n &= \frac{1}{\|\vec{w}\|} (\phi' \sin \phi \vec{t} - \|\vec{w}\| \vec{n} + \phi' \cos \phi \vec{b}) \end{aligned}$$

veya $D_{t_n} \vec{t}_n = \alpha_n \vec{n}_n$ olduğundan, (burada α_n ve \vec{n}_n , eğrisinin eğriliği ve asli normalidir.)

$$\alpha_n \vec{n}_n = \frac{1}{\|\vec{w}\|} (\phi' \sin \phi \vec{t} - \|\vec{w}\| \vec{n} + \phi' \cos \phi \vec{b})$$

olur. Buradan norm alarak,

$$\alpha_n = \frac{1}{\|\vec{w}\|} \sqrt{\phi'^2 + \|\vec{w}\|^2}$$

$$\alpha_n = \sqrt{1 + \left(\frac{\phi'}{\|\vec{w}\|}\right)^2}$$

olur. Şu halde,

$$\vec{n}_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\phi'}{\|\vec{w}\|}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\|\vec{w}\|} (\phi' \sin \phi \vec{t} - \|\vec{w}\| \vec{n} + \phi' \cos \phi \vec{b})$$

$$\vec{n}_n = \frac{1}{\sqrt{\phi'^2 + \|\vec{w}\|^2}} (\phi' \sin \phi \vec{t} - \|\vec{w}\| \vec{n} + \phi' \cos \phi \vec{b})$$

olur.

Şimdi α_n nin \vec{b}_n binormal vektör alanını hesaplayalım.

$$\vec{b}_n = \vec{t}_n \wedge \vec{n}_n$$

$$\vec{b}_n = (-\cos \phi \vec{t} + \sin \phi \vec{b}) \wedge \frac{1}{\sqrt{\phi'^2 + \|\vec{w}\|^2}} (\phi' \sin \phi \vec{t} - \|\vec{w}\| \vec{n} + \phi' \cos \phi \vec{b})$$

$$\vec{b}_n = \begin{vmatrix} \vec{t} & \vec{n} & \vec{b} \\ -\cos \phi & 0 & \sin \phi \\ \phi' \sin \phi & -\|\vec{w}\| & \phi' \cos \phi \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\phi'^2 + \|\vec{w}\|^2}}$$

$$\vec{b}_n = \left\{ \|\vec{w}\| \sin \phi \vec{t} + (\phi' \cos^2 \phi + \phi' \sin^2 \phi) \vec{n} + \|\vec{w}\| \cos \phi \vec{b} \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{\phi'^2 + \|\vec{w}\|^2}}$$

$$\vec{b}_n = \frac{1}{\sqrt{\phi'^2 + \|\vec{w}\|^2}} \left(\|\vec{w}\| \sin \phi \vec{t} + \phi' \vec{n} + \|\vec{w}\| \cos \phi \vec{b} \right) .$$

III. 3. \mathcal{L}_b Binormaller Göstergesinin $\vec{b}_3 = \vec{b}_b$

Binormal Vektör Alanının Hesabı:

\mathcal{L}_b nin denklemi

$$\vec{\mathcal{L}}(s_b) = \vec{b}(s)$$

dir. Buradan \mathcal{L}_b nin \vec{t}_b birim vektör alanı:

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{ds_b} = \frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_b}$$

$$\vec{t}_b = -\tau \vec{n} \cdot \frac{ds}{ds_b}$$

Her iki tarafın normu alınırsa

$$1 = \tau \cdot \frac{ds}{ds_b} \implies \frac{ds}{ds_b} = \frac{1}{\tau}$$

olur. Burada,

$$\vec{t}_b = -\tau \vec{n} \cdot \frac{1}{\tau}$$

$$\vec{t}_b = -\vec{n}$$

dir. Şimdi; \mathcal{L}_b nin \vec{n}_b asli normal vektör alanı:

$$\underbrace{D_{t_b} \vec{t}_b}_{\vec{a}_b \cdot \vec{n}_b} = \frac{d\vec{t}_b}{ds_b}$$

$$\vec{a}_b \cdot \vec{n}_b = -\frac{d\vec{n}}{ds_b}$$

$$\begin{aligned}\alpha_b \vec{n}_b &= - \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_b} \\ &= - (-\alpha \vec{t} + \tau \vec{b}) \cdot \frac{1}{\tau} \\ \alpha_b \vec{n}_b &= \frac{\alpha}{\tau} \vec{t} - \vec{b}\end{aligned}$$

veya normunu alarak

$$\begin{aligned}\alpha_b &= \sqrt{\frac{\alpha^2}{\tau^2} + 1}, & \frac{\alpha}{\tau} &= \cot \phi = \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \\ \alpha_b &= \sqrt{\frac{\cos^2 \phi}{\sin^2 \phi} + 1} \\ \alpha_b &= \frac{1}{\sin \phi}\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\vec{n}_b &= \frac{1}{\alpha_b} \left(\frac{\alpha}{\tau} \vec{t} - \vec{b} \right) \\ \vec{n}_b &= \sin \phi \left(\frac{\cos \phi}{\sin \phi} \vec{t} - \vec{b} \right) \\ \vec{n}_b &= \cos \phi \vec{t} - \sin \phi \vec{b}\end{aligned}$$

olur. Buradan, \vec{n}_t nin ifadesi ile karşılaştırılırsa,

$$\vec{n}_b = - \vec{n}_t$$

olduğu görülür.

Şimdi, α_b nin \vec{b}_b binormal vektör alanını hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\vec{b}_b &= \vec{t}_b \wedge \vec{n}_b \\ &= - \vec{n} \wedge (\cos \phi \vec{t} - \sin \phi \vec{b}) \\ &= - \cos \phi \vec{n} \wedge \vec{t} + \sin \phi \vec{n} \wedge \vec{b} \\ \vec{b}_b &= \cos \phi \vec{b} + \sin \phi \vec{t}\end{aligned}$$

$$\vec{t}_c = \phi' (\cos \phi \vec{T} - \sin \phi \vec{B}) \cdot \frac{1}{\phi'}$$

veya

$$\vec{t}_c = \cos \phi \vec{T} - \sin \phi \vec{B}$$

dir.

(C) nin \vec{n}_c asli normal vektör alanı:

$$D_t \vec{t}_c = \frac{d\vec{t}_c}{ds_c}$$

$$\kappa_c \vec{n}_c = \frac{d\vec{t}_c}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_c}$$

$$\kappa_c \vec{n}_c = (-\phi' \sin \phi \vec{T} - \phi' \cos \phi \vec{B} + \underbrace{\kappa \cos \phi \vec{n} + \tau \sin \phi \vec{n}}_{\|\vec{w}\| \vec{n}}) \frac{1}{\phi'}$$

veya norm alarak,

$$\kappa_c = \sqrt{1 + \left(\frac{\|\vec{w}\|}{\phi'}\right)^2}$$

bulunur ve yerine yazılırsa,

$$\vec{n}_c = \frac{1}{\phi'} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\|\vec{w}\|}{\phi'}\right)^2}} \cdot (-\phi' \sin \phi \vec{T} + \|\vec{w}\| \vec{n} - \phi' \cos \phi \vec{B})$$

veya

$$\vec{n}_c = \frac{1}{\sqrt{\phi'^2 + \|\vec{w}\|^2}} (-\phi' \sin \phi \vec{T} + \|\vec{w}\| \vec{n} - \phi' \cos \phi \vec{B})$$

olur.

(C) nin \vec{b}_c binormal vektör alanı:

$$\vec{b}_c = \vec{t}_c \wedge \vec{n}_c$$

olduğundan

$$\vec{b}_c = \begin{vmatrix} \vec{t} & \vec{n} & \vec{b} \\ \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ -\phi'\sin\phi & \|\vec{w}\| & -\phi'\cos\phi \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\phi'^2 + \|\vec{w}\|^2}}$$

$$\vec{b}_c = \frac{1}{\sqrt{\phi'^2 + \|\vec{w}\|^2}} \left\{ \|\vec{w}\| \sin\phi \vec{t} + \underbrace{(\phi' \cos^2\phi + \phi' \sin^2\phi)}_{\phi'} \vec{n} + \|\vec{w}\| \cos\phi \vec{b} \right\}$$

$$\vec{b}_c = \frac{1}{\sqrt{\phi'^2 + \|\vec{w}\|^2}} \left(\|\vec{w}\| \sin\phi \vec{t} + \phi' \vec{n} + \|\vec{w}\| \cos\phi \vec{b} \right) .$$

Şu halde

$$\vec{b}_1 = \vec{b}_t = \sin\phi \vec{t} + \cos\phi \vec{b}$$

$$\vec{b}_2 = \vec{b}_n = \frac{1}{\sqrt{\phi'^2 + \|\vec{w}\|^2}} \left(\|\vec{w}\| \sin\phi \vec{t} + \phi' \vec{n} + \|\vec{w}\| \cos\phi \vec{b} \right)$$

$$\vec{b}_3 = \vec{b}_b = \sin\phi \vec{t} + \cos\phi \vec{b}$$

$$\vec{b}_4 = \vec{b}_c = \frac{1}{\sqrt{\phi'^2 + \|\vec{w}\|^2}} \left(\|\vec{w}\| \sin\phi \vec{t} + \phi' \vec{n} + \|\vec{w}\| \cos\phi \vec{b} \right) .$$

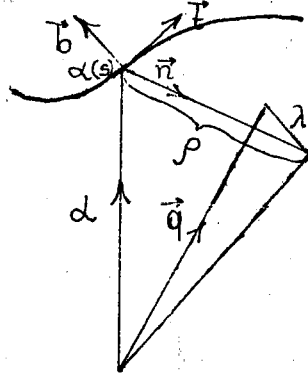
Böylece şu teoremi verebiliriz:

III. 4. 1. Teorem:

- (i) α_t teğetler göstergesinin bir noktasındaki eğrilik ekseni ile α_b binormaller göstergesinin eğrilik ekseninin doğrultuları aynıdır.
- (ii) α_n asli normaller göstergesi ile, (C) sabit pol eğrisinin eğrilik eksenlerinin doğrultuları aynıdır.

III. 5. Küresel Göstergelere Ait Eğrilik Eksenlerinin Denklemleri:

Herhangi bir α eğrisinin bir $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilik ekseninin denklemi (III. 5. 1 Şekil) den,



III. 5. 1 Şekil.

$$\vec{q} = \vec{a} + \rho \vec{n} + \lambda \vec{b}$$

dir. Buna göre:

III. 5. 1. α_t için Eğrilik Ekseninin Vektörel

Denklemi:

$$\vec{a}_t = \vec{t} + \rho_t \vec{n}_t + \lambda_t \vec{b}_t$$

$$\vec{a}_t = \vec{t} + \cos\phi (-\cos\phi \vec{t} + \sin\phi \vec{b}) + \lambda_t (\sin\phi \vec{t} + \cos\phi \vec{b})$$

$$\vec{a}_t = (1 - \cos^2\phi + \lambda_t \sin\phi) \vec{t} + (\sin\phi \cos\phi + \lambda_t \cos\phi) \vec{b}$$

$$\vec{a}_t = (\sin^2\phi + \lambda_t \sin\phi) \vec{t} + (\sin\phi \cos\phi + \lambda_t \cos\phi) \vec{b}$$

$$\vec{a}_t = \sin\phi (\sin\phi + \lambda_t) \vec{t} + \cos\phi (\sin\phi + \lambda_t) \vec{b}$$

$$\vec{a}_t = (\sin\phi + \lambda_t) (\underbrace{\sin\phi \vec{t} + \cos\phi \vec{b}}_{\vec{b}_t})$$

$$\vec{a}_t = (\sin\phi + \lambda_t) \vec{b}_t$$

III. 5. 2. α_n için Eğrilik Ekseninin Vektörel

Denklemi:

$$\vec{a}_n = \vec{n} + \rho_n \vec{n}_n + \lambda_n \vec{b}_n$$

$$\vec{a}_n = \vec{n} + \frac{\|\vec{w}\|}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \frac{1}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} (\phi' \sin\phi \vec{t} - \|\vec{w}\| \vec{n} + \phi' \cos\phi \vec{b})$$

$$+ \lambda_n \frac{1}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} (\|\vec{w}\| \sin\phi \vec{t} + \phi' \vec{n} + \|\vec{w}\| \cos\phi \vec{b})$$

$$\vec{a}_n = \vec{n} + \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} (\phi' \sin\phi \vec{t} - \|\vec{w}\| \vec{n} + \phi' \cos\phi \vec{b})$$

$$+ \lambda_n \frac{1}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} (\|\vec{w}\| \sin\phi \vec{t} + \phi' \vec{n} + \|\vec{w}\| \cos\phi \vec{b})$$

$$\vec{a}_n = \left(\frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} \phi' \sin\phi + \frac{\lambda_n \|\vec{w}\|}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \sin\phi \right) \vec{t}$$

$$+ \left(1 - \frac{\|\vec{w}\|^2}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} + \frac{\lambda_n \phi'}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \right) \vec{n} + \left(\frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} \phi' \cos\phi + \frac{\lambda_n \|\vec{w}\|}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \cos\phi \right) \vec{b}$$

$$\begin{aligned} \vec{q}_n &= \left(\frac{\phi'}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} + \frac{\lambda_n}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \right) \|\vec{w}\| \sin \phi \vec{e} \\ &+ \left(\frac{\phi'}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} + \frac{\lambda_n}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \right) \phi' \vec{n} + \left(\frac{\phi'}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} + \frac{\lambda_n}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \right) \|\vec{w}\| \cos \phi \vec{b} \\ \vec{q}_n &= \left(\frac{\phi'}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} + \frac{\lambda_n}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \right) \left(\underbrace{\|\vec{w}\| \sin \phi \vec{e} + \phi' \vec{n} + \|\vec{w}\| \cos \phi \vec{b}}_{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} \vec{b}_n} \right) \\ \vec{q}_n &= \left(\frac{\phi'}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} + \frac{\lambda_n}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \right) \sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} \cdot \vec{b}_n \end{aligned}$$

veya

$$\vec{q}_n = \left(\frac{\phi'}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} + \lambda_n \right) \vec{b}_n$$

III. 5. 3. α_b nin Eğrilik Ekseninin Vektörel

Denklemi:

$$\vec{q}_b = \vec{b} + \rho_b \vec{n}_b + \lambda_b \vec{b}_b$$

$$\vec{n}_b = \cos \phi \vec{e} - \sin \phi \vec{b} \quad , \quad \vec{b}_b = \sin \phi \vec{e} + \cos \phi \vec{b}$$

$$\vec{q}_b = \vec{b} + \sin \phi (\cos \phi \vec{e} - \sin \phi \vec{b}) + \lambda_b (\sin \phi \vec{e} + \cos \phi \vec{b})$$

$$\vec{q}_b = \vec{b} + \sin \phi \cos \phi \vec{e} - \sin^2 \phi \vec{b} + \lambda_b \sin \phi \vec{e} + \lambda_b \cos \phi \vec{b}$$

$$\vec{q}_b = \sin \phi (\cos \phi + \lambda_b) \vec{e} + (1 - \sin^2 \phi + \lambda_b \cos \phi) \vec{b}$$

$$\vec{q}_b = \sin \phi (\cos \phi + \lambda_b) \vec{e} + (\cos^2 \phi + \lambda_b \cos \phi) \vec{b}$$

$$\vec{q}_b = \sin \phi (\cos \phi + \lambda_b) \vec{e} + \cos \phi (\cos \phi + \lambda_b) \vec{b}$$

$$\vec{a}_b = (\cos \phi + \lambda_b) (\underbrace{\sin \phi \vec{t} + \cos \phi \vec{b}}_{\vec{b}_b})$$

$$\vec{a}_b = (\cos \phi + \lambda_b) \vec{b}_b$$

III. 5. 4. (C) için Eğrilik Ekseninin Vektörel

Denklemi:

$$\vec{a}_c = \vec{c} + \beta_c \vec{n}_c + \lambda_c \vec{b}_c$$

$$\vec{n}_c = \frac{1}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \left(-\phi' \sin \phi \vec{t} + \|\vec{w}\| \vec{n} - \phi' \cos \phi \vec{b} \right)$$

$$\vec{b}_c = \frac{1}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \left(\|\vec{w}\| \sin \phi \vec{t} + \phi' \vec{n} + \|\vec{w}\| \cos \phi \vec{b} \right)$$

$$\beta_c = \frac{\phi'}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}}$$

$$\vec{a}_c = \sin \phi \vec{t} + \cos \phi \vec{b} + \frac{\phi'}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \frac{1}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \left(-\phi' \sin \phi \vec{t} + \|\vec{w}\| \vec{n} - \phi' \cos \phi \vec{b} \right) + \lambda_c \frac{1}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \left(\|\vec{w}\| \sin \phi \vec{t} + \phi' \vec{n} + \|\vec{w}\| \cos \phi \vec{b} \right)$$

$$\vec{a}_c = \sin \phi \vec{t} + \cos \phi \vec{b} - \frac{\phi'^2}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} \sin \phi \vec{t} + \frac{\phi'}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} \|\vec{w}\| \vec{n} - \frac{\phi'^2}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} \cos \phi \vec{b}$$

$$+ \frac{\lambda_c \|\vec{w}\|}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \sin \phi \vec{t} + \frac{\lambda_c \phi'}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \vec{n} + \frac{\lambda_c \|\vec{w}\|}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \cos \phi \vec{b}$$

$$\vec{a}_c = \left(1 - \frac{\phi'^2}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} + \frac{\lambda_c \|\vec{w}\|}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \right) \sin \phi \vec{t} + \left(\frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} + \frac{\lambda_c}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \right) \phi' \vec{n}$$

$$+ \left(1 - \frac{\phi'^2}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} + \frac{\lambda_c \|\vec{w}\|}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \right) \cos \phi \vec{b}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}_c &= \left(\frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} + \frac{\lambda_c}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \right) \|\vec{w}\| \sin \phi \vec{t} + \left(\frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} + \frac{\lambda_c}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \right) \phi' \vec{n} \\
&+ \left(\frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} + \frac{\lambda_c}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \right) \|\vec{w}\| \cos \phi \vec{b} \\
\vec{a}_c &= \left(\frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} + \frac{\lambda_c}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \right) \left(\underbrace{\|\vec{w}\| \sin \phi \vec{t} + \phi' \vec{n} + \|\vec{w}\| \cos \phi \vec{b}}_{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} \cdot \vec{b}_c} \right) \\
\vec{a}_c &= \left(\frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} + \frac{\lambda_c}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \right) \sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2} \cdot \vec{b}_c \\
\vec{a}_c &= \left(\frac{\|\vec{w}\|}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} + \lambda_c \right) \vec{b}_c
\end{aligned}$$

dir. Özetle: $\lambda_t = \lambda_n = \lambda_b = \lambda_c = \lambda$ olarak

$$\begin{aligned}
\vec{a}_t &= (\sin \phi + \lambda) \vec{b}_t \\
\vec{a}_n &= \left(\frac{\phi'}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} + \lambda \right) \vec{b}_n \\
\vec{a}_b &= (\cos \phi + \lambda) \vec{b}_b \\
\vec{a}_c &= \left(\frac{\|\vec{w}\|}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} + \lambda \right) \vec{b}_c
\end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\vec{b}_t = \vec{b}_b = \sin\phi \vec{t} + \cos\phi \vec{b}$$

$$\vec{b}_n = \vec{b}_c = \frac{1}{\sqrt{\|\vec{\omega}\|^2 + \phi'^2}} \left(\|\vec{\omega}\| \sin\phi \vec{t} + \phi' \vec{n} + \|\vec{\omega}\| \cos\phi \vec{b} \right)$$

dır.

III. 5. 5. Eğrilik Eksenleri Arasındaki Açılar:

Aşağıdaki iç çarpımları yaparak eğrilik eksenleri arasındaki açıların kosinüslerini bulabiliriz.

$$\langle \vec{b}_t, \vec{b}_n \rangle = \frac{\|\vec{\omega}\| \sin^2\phi + \|\vec{\omega}\| \cos^2\phi}{\sqrt{\|\vec{\omega}\|^2 + \phi'^2}}$$

$$\langle \vec{b}_t, \vec{b}_n \rangle = \frac{\|\vec{\omega}\|}{\sqrt{\|\vec{\omega}\|^2 + \phi'^2}}$$

$$\langle \vec{b}_t, \vec{b}_b \rangle = \sin^2\phi + \cos^2\phi$$

$$\langle \vec{b}_t, \vec{b}_b \rangle = 1$$

$$\langle \vec{b}_t, \vec{b}_c \rangle = \frac{\|\vec{\omega}\| \sin^2\phi + \|\vec{\omega}\| \cos^2\phi}{\sqrt{\|\vec{\omega}\|^2 + \phi'^2}}$$

$$\langle \vec{b}_t, \vec{b}_c \rangle = \frac{\|\vec{\omega}\|}{\sqrt{\|\vec{\omega}\|^2 + \phi'^2}}$$

$$\langle \vec{b}_n, \vec{b}_b \rangle = \frac{\|\vec{\omega}\| \sin^2\phi + \|\vec{\omega}\| \cos^2\phi}{\sqrt{\|\vec{\omega}\|^2 + \phi'^2}}$$

$$\langle \vec{b}_n, \vec{b}_b \rangle = \frac{\|\vec{\omega}\|}{\sqrt{\|\vec{\omega}\|^2 + \phi'^2}}$$

$$\langle \vec{b}_n, \vec{b}_c \rangle = \frac{\|\vec{w}\|^2 \sin^2 \phi + \phi'^2 + \|\vec{w}\|^2 \cos^2 \phi}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}$$

$$\langle \vec{b}_n, \vec{b}_c \rangle = \frac{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}$$

$$\boxed{\langle \vec{b}_n, \vec{b}_c \rangle = 1}$$

$$\langle \vec{b}_b, \vec{b}_c \rangle = \frac{\|\vec{w}\| \sin^2 \phi + \|\vec{w}\| \cos^2 \phi}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}}$$

$$\boxed{\langle \vec{b}_b, \vec{b}_c \rangle = \frac{\|\vec{w}\|}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}}}$$

dir. Özetle:

$$\langle \vec{b}_t, \vec{b}_n \rangle = \frac{\|\vec{w}\|}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}}$$

$$\langle \vec{b}_t, \vec{b}_b \rangle = 1$$

$$\langle \vec{b}_t, \vec{b}_c \rangle = \frac{\|\vec{w}\|}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}}$$

$$\langle \vec{b}_n, \vec{b}_b \rangle = \frac{\|\vec{w}\|}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}}$$

$$\langle \vec{b}_n, \vec{b}_c \rangle = 1$$

$$\langle \vec{b}_b, \vec{b}_c \rangle = \frac{\|\vec{w}\|}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}}$$

$$\langle \vec{b}_t, \vec{b}_n \rangle = \langle \vec{b}_t, \vec{b}_c \rangle = \langle \vec{b}_n, \vec{b}_b \rangle = \langle \vec{b}_b, \vec{b}_c \rangle$$

$$\langle \vec{b}_t, \vec{b}_b \rangle = \langle \vec{b}_n, \vec{b}_c \rangle \cdot$$

IV. BÖLÜM

Küresel Göstergelerin Eğrilik Eksenlerinin
ve Eğrilik Çemberlerinin STUDY Resimleri.

Bir α dual küresel eğrisinin birim dual küresel göstergelerini düşünelim. Bu dual gösterge eğrilerinin \vec{B}_1 eğrilik eksen vektörleri artık birer birim dual vektör olduklarından E^3 de birer doğru belirtirler. Bu bölümde bu doğrular (eğrilik eksenleri) arasındaki açı ve uzaklıklara bakacağız. Gösterge eğrilerinin eğrilik çemberlerinin E^3 deki karşılıklarını birer doğru kongrüansı olarak tesbit edeceğiz. Bu durumda eğrinin eğrilikleri birer dual sayıdır. Fakat, eğrinin parametresini gene reel kabul edelim.

$$\mathcal{R} = k + \varepsilon k^* , k, k^* \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{C} = t + \varepsilon t^* , t, t^* \in \mathbb{R}$$

olsun.

IV. 1. Açılar

$$\langle \vec{B}_T , \vec{B}_N \rangle = \frac{\|\vec{w}\|}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi^2}}$$

Burada

$$\|\vec{w}\|^2 = \mathcal{R}^2 + \mathcal{C}^2 , \mathcal{R} = k + \varepsilon k^* , \mathcal{C} = t + \varepsilon t^*$$

ve

$$\phi = \varphi + \varepsilon \varphi^*$$

olduğundan

$$\cos \Gamma = \frac{\sqrt{(k + \varepsilon k^*)^2 + (t + \varepsilon t^*)^2}}{\sqrt{(k + \varepsilon k^*)^2 + (t + \varepsilon t^*)^2 + (\varphi' + \varepsilon \varphi'^*)^2}}$$

$$\cos(\gamma + \varepsilon \gamma^*) = \frac{[k^2 + 2\varepsilon k k^* + t^2 + 2\varepsilon t t^*]^{1/2}}{[k^2 + 2\varepsilon k k^* + t^2 + 2\varepsilon t t^* + \varphi'^2 + 2\varepsilon \varphi' \varphi'^*]^{1/2}}$$

$$\cos \gamma - \varepsilon \gamma^* \sin \gamma = \frac{[k^2 + t^2 + 2\varepsilon(k k^* + t t^*)]^{1/2}}{[k^2 + t^2 + \varphi'^2 + 2\varepsilon(k k^* + t t^* + \varphi' \varphi'^*)]^{1/2}}$$

$$\cos \gamma - \varepsilon \gamma^* \sin \gamma = [k^2 + t^2 + 2\varepsilon(k k^* + t t^*)]^{1/2} [k^2 + t^2 + \varphi'^2 + 2\varepsilon(k k^* + t t^* + \varphi' \varphi'^*)]^{-1/2}$$

$$\cos \gamma - \varepsilon \gamma^* \sin \gamma = \left[(k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon (k^2 + t^2)^{-\frac{1}{2}} (k k^* + t t^*) \right]$$

$$\left[(k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{-\frac{1}{2}} - \varepsilon (k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{-\frac{3}{2}} (k k^* + t t^* + \varphi' \varphi'^*) \right]$$

$$\cos \gamma - \varepsilon \gamma^* \sin \gamma = (k^2 + t^2) (k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{-\frac{1}{2}} - \varepsilon (k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} (k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{-\frac{3}{2}} (k k^* + t t^* + \varphi' \varphi'^*) \\ + \varepsilon (k^2 + t^2)^{-\frac{1}{2}} (k k^* + t t^*) (k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cos \gamma - \varepsilon \gamma^* \sin \gamma = \frac{k^2 + t^2}{(k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{1}{2}}} - \varepsilon \left\{ \frac{(k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} (k k^* + t t^* + \varphi' \varphi'^*)}{(k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{k k^* + t t^*}{(k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} (k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

$$\cos \gamma - \varepsilon \gamma^* \sin \gamma = \frac{k^2 + t^2}{(k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{1}{2}}} - \varepsilon \left\{ \frac{(k^2 + t^2) (k k^* + t t^* + \varphi' \varphi'^*) - (k k^* + t t^*) (k^2 + t^2 + \varphi'^2)}{(k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} (k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$\cos \gamma - \varepsilon \gamma^* \sin \gamma = \frac{(-k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}}{(k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{1}{2}}} - \varepsilon \left\{ \frac{-k^3 k' + k^2 t t' + k^2 \varphi' \varphi'' + t^2 k k' + t^3 t' + t^2 \varphi' \varphi''}{(k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} (k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-k^3 k' - k^2 t^2 k' - k k^* \varphi'^2 - t t^* k^2 - t^2 t' - t t^* \varphi'^2}{(k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} (k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$\cos \gamma - \varepsilon \gamma^* \sin \gamma = \frac{(-k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}}{(k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{1}{2}}} - \varepsilon \left\{ \frac{-k^2 \varphi' \varphi'' + t^2 \varphi' \varphi'' - k k^* \varphi'^2 - t t^* \varphi'^2}{(k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} (k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$\cos \gamma - \varepsilon \gamma^* \sin \gamma = \frac{(-k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}}{(k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{1}{2}}} - \varepsilon \left\{ \frac{\varphi' \varphi'' (-k^2 + t^2) - \varphi'^2 (-k k^* + t t^*)}{(k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} (k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$\cos \gamma = \frac{(-k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}}{(k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{1}{2}}} \implies \gamma = \arccos \frac{(-k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}}{(k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - \frac{k^2 + t^2}{k^2 + t^2 + \varphi'^2}}, \quad \sin \gamma = \frac{\varphi'}{(k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\gamma^* \sin \gamma = \frac{\varphi' [\varphi'' (-k^2 + t^2) - \varphi' (-k k^* + t t^*)]}{(k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} (k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\gamma^* \frac{\varphi'}{(k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\varphi' [\varphi'' (-k^2 + t^2) - \varphi' (-k k^* + t t^*)]}{(k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} (k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\gamma^* = \frac{\varphi'' (-k^2 + t^2) - \varphi' (-k k^* + t t^*)}{(k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} (k^2 + t^2 + \varphi'^2)}$$

dir.

Buradan şu teoremi verebiliriz.

IV. 1. 1. Teorem: Bir birim dual küresel α eğrisinin küresel göstergeleri olan (T), (N), (B) ve (C) eğrilerinin bir t anındaki eğrilik eksenleri arasındaki açılar için

$$(i) \quad \langle \vec{B}_T, \vec{B}_N \rangle = \langle \vec{B}_T, \vec{B}_C \rangle = \langle \vec{B}_N, \vec{B}_B \rangle = \\ \langle \vec{B}_B, \vec{B}_C \rangle = \frac{\|\vec{\omega}\|}{\sqrt{\|\vec{\omega}\|^2 + \phi'^2}}$$

ve

$$(ii) \quad \langle \vec{B}_N, \vec{B}_C \rangle = \langle \vec{B}_T, \vec{B}_B \rangle = 1$$

dir. Burada $\|\vec{\omega}\| = \sqrt{\lambda\phi^2 + \tau^2}$ ve $\lambda\phi$ ile τ da dual küresel α eğrisine ait dual eğriliklerdir, ϕ de α dual eğrisine ait dual binormalin dual Darboux vektörü ile yaptığı dual açıdır, ϕ' ise $\frac{d\phi}{dt}$ dir. Reel küresel geometriden elde ettiğimiz sonuçları dual küresel geometri için de aynen alabiliriz. Ancak, bu durumda karşılaşılan eğrilikler ve açılar birer dual sayıdır.

Study dönüşümü ile çizgiler uzayında aşağıdaki teoremi verebiliriz.

IV. 1. 2. Teorem: Bir α dual küresel eğrisinin birim küre üzerindeki (T), (N), (B) ve (C) küresel göstergelerinin eğrilik eksenleri \vec{B}_T , \vec{B}_N , \vec{B}_B ve \vec{B}_C ye çizgiler uzayında karşılık gelen doğrular için

(i) $(\vec{B}_T, \vec{B}_N), (\vec{B}_T, \vec{B}_C), (\vec{B}_N, \vec{B}_B)$ ve (\vec{B}_B, \vec{B}_C) çiftleri arasındaki açılar ve uzaklıklar, sırası ile,

$$\gamma = \arccos \frac{(-k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}}{(-k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ve

$$\gamma^* = \frac{\varphi'^* (-k^2 + t^2) - \varphi' (-k^2 k^* + t t^*)}{(-k^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} (-k^2 + t^2 + \varphi'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

dir; burada $\mathcal{K} = k + \varepsilon k^*$ ve $\mathcal{C} = t + \varepsilon t^*$ ile α dual küresel eğrisinin dual eğrilikleri ve $\phi = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ da α dual eğrisinin Binormali ile Darboux vektörleri arasındaki dual açıdır ve $\phi' = \frac{d\phi}{dt}$ dir.

$$(ii) \langle \vec{B}_N, \vec{B}_C \rangle = \langle \vec{B}_T, \vec{B}_B \rangle = 1$$

dir. Yani (\vec{B}_N, \vec{B}_C) çifti ve (\vec{B}_T, \vec{B}_B) çifti çakışiktır.

IV. 2. Küresel İnvoluteler

Bir eğrinin teğetlerine dik olan bir yörüngeye o eğrinin bir involütü (involute) denir [2].

Eğer eğriler küre üzerinde ise bu involüteye küresel involüte adı verilir.

Bir α uzay eğrisinin teğetler göstergesi (t), asli-normaller göstergesi (n), binormaller göstergesi (b) ve Darboux vektörünün göstergesi (c) olmak üzere (t) ile (b)

eğrileri (c) için birer küresel involütüdür [2].

Özel olarak α nın küresel olması halinde aynı küresel involüte özelliği geçerlidir. Hatta α nın dual küresel bir eğri olması halinde de küresel involüte vardır. Şu halde dual küresel göstergeler (T), (N), (B) ve (C) olmak üzere (T) ile (B) dual eğrileri (C) için birer küresel involütedir. Yani,

$$\left\langle \frac{d\vec{C}}{dt}, \frac{d\vec{T}}{dt} \right\rangle = 0 \quad \text{ve} \quad \left\langle \frac{d\vec{C}}{dt}, \frac{d\vec{B}}{dt} \right\rangle = 0$$

dır.

Benzer şekilde, (T) ile (B) dual eğrileri (N) için de birer küresel involütedir, Yani

$$\left\langle \frac{d\vec{N}}{dt}, \frac{d\vec{T}}{dt} \right\rangle = 0 \quad \text{ve} \quad \left\langle \frac{d\vec{N}}{dt}, \frac{d\vec{B}}{dt} \right\rangle = 0$$

dır.

Şu halde,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\vec{T}}{dt}, \frac{d\vec{N}}{dt} \right\rangle &= \left\langle \frac{d\vec{B}}{dt}, \frac{d\vec{C}}{dt} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d\vec{T}}{dt}, \frac{d\vec{C}}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d\vec{N}}{dt}, \frac{d\vec{B}}{dt} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan bu dual küresel gösterge çiftlerine ait eğrilik eksenleri arasındaki açılar da eşittir. Yani,

$$\begin{aligned} \langle \vec{B}_T, \vec{B}_N \rangle &= \langle \vec{B}_B, \vec{B}_C \rangle = \langle \vec{B}_T, \vec{B}_C \rangle = \\ &= \langle \vec{B}_N, \vec{B}_B \rangle = \frac{\|\vec{w}\|}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} \end{aligned}$$

dir. Böylece şu teoremi verebiliriz:

IV. 2. 1. Teorem: Bir dual küresel eğrisinin (T), (N), (B) ve (C) dual küresel göstergeleri arasında birbirinin küresel involütü olanların eğrilik eksenleri arasındaki dual açılar eşittir ve bu dual açının kosinüsü

$$\frac{\|\vec{w}\|}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}}$$

dir.

Diğer taraftan (T) ile (B) dual küresel göstergeleri hem (C) nin hem de (N) nin dual küresel involütüdür. Buna karşılık olarak da IV. 1. 1. Teoremden bu eğrilik eksenleri için

$$\langle \vec{B}_N, \vec{B}_C \rangle = 1 \quad \text{ve} \quad \langle \vec{B}_T, \vec{B}_B \rangle = 1$$

dir. Yani (N) ile (C) nin eğrilik eksenleri çakışık ve aynı şekilde (T) ile (B) nin eğrilik eksenleri de çakışık-
tır.

Böylece şu teoremi verebiliriz:

IV. 2. 2. Teorem: (T) ile (B) dual küresel göster-
geleri hem (C) nin ve hem de (N) nin küresel involütüdür.
Buna karşılık olarak da (N) ile (C) nin herbir noktaların-
daki eğrilik eksenleri çakışiktır ve benzer şekilde (T) ile
(B) nin herbir noktalarındaki eğrilik eksenleri çakışiktır.

Bir dual küresel eğrinin bir noktasındaki eğrilik
ekseni bu noktaya ait olan eğrilik çemberinin düzlemine
dik olduğundan (N) ile (C) nin dual eğrilik çemberlerini
taşıyan düzlemler paraleldir. Aynı özellik (T) ile (B) nin
dual eğrilik çemberleri için de geçerlidir. Bu paralelliğin
geometrik tefsirini V.Bölümde vereceğiz.

IV. 3. Eğrilik Çemberlerinin Study Resimleri

IV. 3. 1. Study Dönüşümü

Dual sayılar halkası \mathbb{D} , birimli ve değışimlidir. Bu
sebepten bütün dual vektörlerin cümlesi, \mathbb{D} üzerinde tanım-
lanan, toplama ve skalarla çarpma işlemleri altında bir
modül haline gelir, biz bu modüle \mathbb{D} -Modül diyoruz.
E- STUDY tarafından sonradan "Study Dönüşümü" adı verilen
dönüşüm

$$\mathbb{D} - \text{Modül} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

olarak tarif edilmiş ve şu teorem verilmiştir:

IV. 3. 1. Teorem: Study dönüşümü, \mathbb{D} - modüldeki bir dual birim kürenin noktaları ile \mathbb{R}^3 deki yönlü doğrular arasında bire-bir dönüşümdür.

K birim dual küreyi, O bu kürenin merkezini ve $\{O; \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$ ise O noktasındaki dual ortonormal çatıyı gösterebilir. Burada,

$$(IV. 3. 1) \quad \vec{E}_i = \vec{e}_i + \varepsilon \vec{e}_i^* ; \quad 1 \leq i \leq 3$$

dır.

$\{1, 2, 3\}$ cümlesinin bütün permütasyonlarının grubu S_3 ise

$$\vec{E}_{\sigma(1)} = \text{sgn}(\sigma) \vec{E}_{\sigma(2)} \wedge \vec{E}_{\sigma(3)}, \quad \text{sgn}(\sigma) = \pm 1$$

$$(IV.3.2) \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \end{pmatrix} \in S_3$$

eşitlikleri mevcuttur. Burada \wedge dışçarpımı gösterir.

$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ortonormal sisteminin \mathbb{R}^3 doğru uzayı sistemi olduğu durumda \vec{e}_i^* moment vektörleri

$$(IV. 3. 3) \quad \vec{e}_i^* = \vec{MO} \wedge \vec{e}_i, \quad 1 \leq i \leq 3$$

şeklinde yazılabilir. Bu moment vektörlerinin \mathbb{R}^3 'ün vektörleri olmaları sebebiyle,

$$(IV. 3. 4) \quad \vec{e}_i^* = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} \vec{e}_j^* \quad , \quad \lambda_{ij} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq 3$$

dır.

(IV. 3. 3) ve (IV.3. 4) eşitliklerinden

$$\lambda_{ii} = 0, \quad \lambda_{ij} = -\lambda_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

ifadeleri elde edilir ve λ_{ij} skalarlarını λ_i ile gösterilir, yani

$$\lambda_{ij} = \lambda_i$$

dır. Buradan (IV. 3. 4) ifadesi

$$(IV. 3.5) \quad \begin{bmatrix} \vec{e}_1^* \\ \vec{e}_2^* \\ \vec{e}_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & -\lambda_3 \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix}$$

ifadesine dönüşür.

Şu halde,

$$K \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

şeklindeki Study dönüşümü, K 'daki dual ortonormal sistemden, \mathbb{R}^3 deki reel ortonormal sisteme bir dönüşüm olarak verilebilir.

(IV. 3. 1) ve (IV.3.5) bağıntılarından faydalanarak, Study dönüşümünü matris formunda ifade edebiliriz:

$$(IV.3.6) \quad \begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \varepsilon & -\lambda_3 \varepsilon \\ -\lambda_1 \varepsilon & 1 & \lambda_2 \varepsilon \\ \lambda_3 \varepsilon & -\lambda_2 \varepsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix}$$

dır. Bu demektir ki Study dönüşümü, bir dual ortogonal matrise tekabül eder. Lineer dönüşümlerle matrisler arasında bire-bir bir tekabül olması sebebiyle şu teoremi verebiliriz:

IV. 3. 2. Teorem: Study dönüşümü bir lineer izomorfizmdir.

\mathbb{R}^3 'deki öklid hareketleri iki doğru arasındaki açıyı ve uzaklığı koruduklarından, \mathbb{D} -modülde bunlara karşı gelen dönüşümler iç çarpımı korurlar.

Bu durum ise, dual katsayılı bir ortogonal matrisin ele alınmasına imkân verir. K dual birim küresinin merkezi sabit tutulduğundan, \mathbb{D} -modüldeki transformasyon grubu (Öklid hareketlerinin tasviri) hiçbir hareketi (yer değiştirmeyi) ihtiva etmez. Öyleyse, Öklid hareketlerini \mathbb{D} -modülde tasvir etmek için şu teoremi uygulayabiliriz:

IV. 3. 3. Teorem: \mathbb{R}^3 'deki Öklid hareketleriyle dual ortogonal matrisler arasında bire-bir bir tekabül mevcuttur.

Bir reel t parametresine bağlı bir dual birim küre

üzerinde diferansiyellenebilir bir eğri,

$$t \in \mathbb{R} \longrightarrow \vec{X}(t) \in K$$

\mathbb{R}^3 'e ait doğruların diferansiyellenebilir bir ailesi olan bir regle yüzeyi temsil eder. $\vec{X}(t)$ doğrularına, regle yüzeyin anadoğruları denir.

K küresinin farklı iki noktası X, Y ve (\vec{OX}, \vec{OY}) dual açısı Φ olsun. Φ dual açısı $\varphi + \varepsilon\varphi^*$ biçiminde bir dual sayıdır. Burada φ açığı ve φ^* ise \vec{X} ve \vec{Y} doğruları arasındaki en kısa mesafeyi gösterir. Buradan şu teoremi verebiliriz:

IV. 3. 4. Teorem:

$$(IV.3. 7) \quad \cos \Phi = \cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \sin \varphi$$

olmak üzere

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \cos \Phi, \quad \forall \vec{X}, \vec{Y} \in K$$

dır.

Bu teoremin şu özel durumlarını ele alalım:

$$(IV. 3. 8) \quad \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = 0 \implies \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ ve } \varphi^* = 0$$

\vec{X} ve \vec{Y} doğruları dik olarak kesişirler.

$$(IV. 3. 9) \quad \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \text{sırf dual} \implies \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ ve } \varphi^* \neq 0$$

\vec{X} ve \vec{Y} doğruları aykırı dik doğrulardır.

(IV. 3. 10) $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \text{sırf reel} \implies \varphi \neq \frac{\pi}{2}$ ve $\varphi^* = 0$
 \vec{X} ve \vec{Y} doğruları aykırı kesişen doğrulardır.

(IV. 3. 11) $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = 1 \implies \varphi^*$ keyfi ve $\varphi = 0$
 \vec{X} ve \vec{Y} doğruları paraleldir. $\varphi^* = 0$ ise doğrular
 çakıştırlar.

(IV. 3 . 12) $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = -1 \implies \varphi^*$ keyfi ve $\varphi = \pi$
 \vec{X} ve \vec{Y} doğruları paralel ancak, zıt yönlü doğrulardır.
 $\varphi^* = 0$ ise doğrular zıt yönde çakışırlar.

IV. 3. 2. Bir Çemberin Study Resmi

\vec{E}_3 birim dual vektörüne tekabül eden g doğrusunu
 alalım. Bu doğru üzerinde seçilen bir M noktası için

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

olur ve (IV. 3. 6) ifadesi,

$$(IV.3.13) \quad \begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \varepsilon & 0 \\ -\lambda_1 \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix}$$

biçimine dönüşür. Bu tasvirin tersi ise

$$(IV.3.14) \quad \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_1 \varepsilon & 0 \\ \lambda_1 \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir.

K birim dual küresi üzerinde

$$S = \{ \vec{X} \mid \langle \vec{X}, \vec{E}_3 \rangle = \cos \Phi = \text{sabit}, \vec{X} \in K \}$$

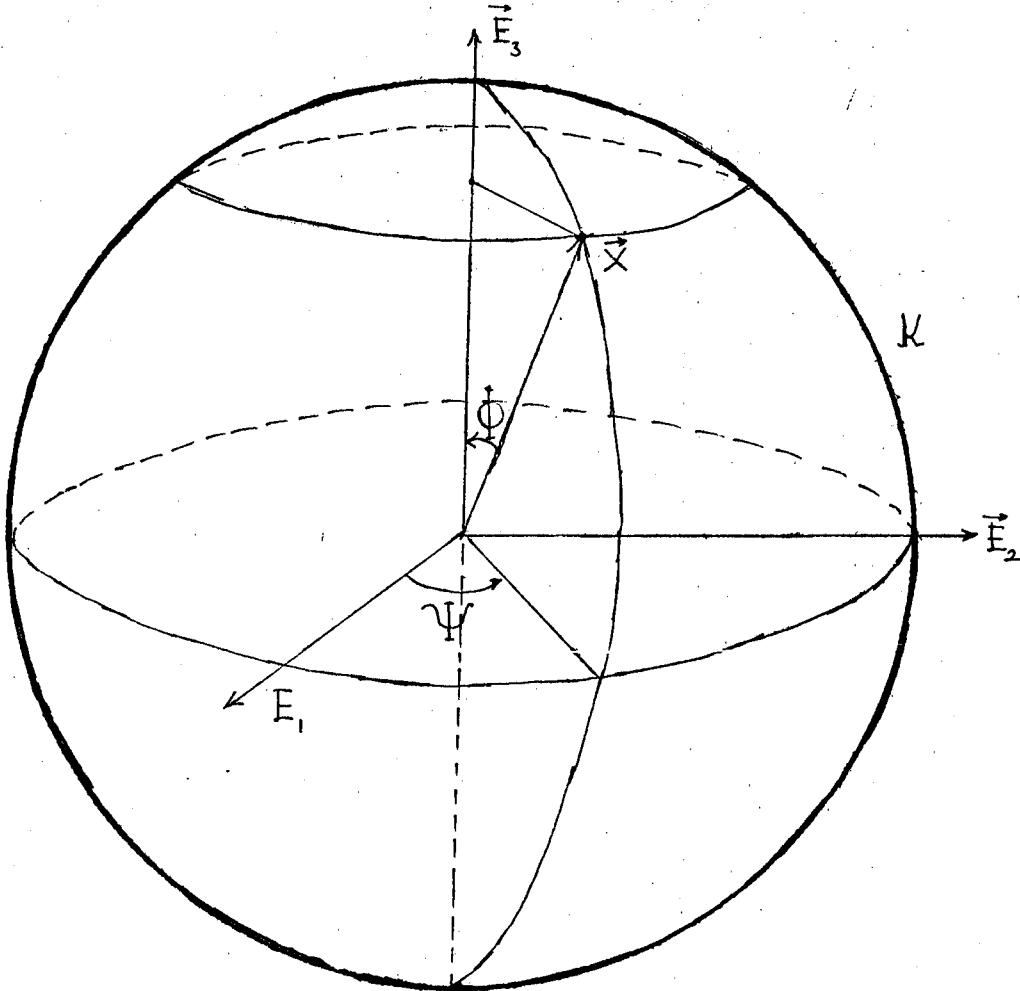
çemberini ve bunun bir X noktasını alalım.

Şu halde, \vec{X} dual vektörü,

$$(IV. 3 .15) \quad \vec{X} = \sin \Phi \cos \Psi \vec{E}_1 + \sin \Phi \sin \Psi \vec{E}_2 + \cos \Phi \vec{E}_3$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\Phi = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ ve $\Psi = \psi + \varepsilon \psi^*$

birer dual açılardır (IV. 3. 1 Şekil).



IV. 3. 1 Şekil.

Şu halde $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$ ve

$$\sin \Phi = \sin \varphi + \varepsilon \varphi^* \cos \varphi, \quad \sin \Psi = \sin \psi + \varepsilon \psi^* \cos \psi$$

$$\cos \Phi = \cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \sin \varphi, \quad \cos \Psi = \cos \psi - \varepsilon \psi^* \sin \psi$$

bağıntılarının mevcut olması için (IV. 3. 13) ve (IV. 3. 15) eşitliklerinden,

$$(IV.3.16) \quad \begin{cases} \vec{X} = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \psi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \\ \vec{x}^* = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] \begin{bmatrix} \varphi^* \cos \varphi \cos \psi - (\psi^* + \lambda_1) \sin \varphi \sin \psi \\ \varphi^* \cos \varphi \sin \psi + (\psi^* + \lambda_1) \sin \varphi \cos \psi \\ -\varphi^* \sin \varphi \end{bmatrix} \end{cases}$$

dır. Öte yandan, \vec{X} noktası, merkezi \vec{E}_3 ekseninde bulunan çember üzerindedir. Şu halde,

$$(IV. 3. 17) \quad \langle \vec{X}, \vec{E}_3 \rangle = \cos \Phi = \cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \sin \varphi = \text{sabit}$$

ifadesi yazılabilir ve bunun anlamı,

$$\varphi = C_1(\text{sabit}), \quad \varphi^* = C_2(\text{sabit})$$

dır.

(IV. 3. 16) ve (IV. 3. 17) denklemlerinden, şu bağıntıları yapabiliriz.

$$(IV.3.18) \quad \begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle &= 1, \\ \langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle &= 0, \\ \langle \vec{x}, \vec{e}_3 \rangle - \cos \varphi &= 0, \\ \langle \vec{x}, \vec{e}_3^* \rangle + \langle \vec{x}^*, \vec{e}_3 \rangle + \varphi^* \sin \varphi &= 0. \end{aligned}$$

(IV. 3. 18) denklemlerinde yalnız φ ve φ^* parametreleri (iki parametre) bulunduğu için, bu denklemler \mathbb{R}^3 de bir doğru kongrüansını temsil ederler.

Şu halde bu kongrüansın Plücker koordinatlarındaki denklemini bulabiliriz. Kongrüansın herhangi bir noktasının yer vektörü \vec{y} ise, denklem,

$$(IV.3.19) \quad \vec{y} = \vec{x}(\varphi, \varphi^*) \wedge \vec{x}'(\varphi, \varphi^*) + v\vec{x}(\varphi, \varphi^*)$$

dır.

\vec{y} nin koordinatları (y_1, y_2, y_3) ise

(IV. 3. 19) dan

$$(IV.3.20) \quad \begin{cases} y_1 = -\varphi^* \sin \varphi - (\varphi^* + \lambda_1) \sin \varphi \cos \varphi \cos \psi + v \sin \varphi \cos \varphi \\ y_2 = \varphi^* \cos \varphi - (\varphi^* + \lambda_1) \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi + v \sin \varphi \sin \varphi \\ y_3 = (\varphi^* + \lambda_1) \sin^2 \varphi + v \cos \varphi \end{cases}$$

dır.

$\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ olduğu durumda, (IV. 3. 20) eşitliklerinden

$$(IV. 3. 21) \quad \frac{y_1^2}{c_2^2} + \frac{y_2^2}{c_2^2} - \frac{[y_3 - (\varphi^* + \lambda_1)]^2}{[c_2 \cotg c_1]^2} = 1$$

denklemini bulunur. Bu denklem φ^* ve λ_1 gibi iki parametre ihtiva ettiği için, ikinci dereceden bir doğru kongrüansını temsil eder.

Bu kongrüansa ait doğruların yeri,

a) Bu doğrular ile g doğrusu arasındaki en kısa mesafe $\varphi^* = c_2$,

b) Bu doğrular ile g doğrusu arasındaki açı $\varphi = c_1$

olacak şekilde tesbit edilir.

Şu halde, bu kongrüansın doğruları, yarıçapı $\varphi^* =$ sabit ve ekseni g olan bir doğuran(generator) doğrularını $\varphi =$ sabit açı altında keserler.

IV. 3. 1 Tanım: Bir doğru kongrüansının bütün doğruları, verilen bir doğru ile sabit bir açı yaparlarsa, bu doğru kongrüansına eğim kongrüansı denir.

Bu tanıma göre (IV. 3. 21) denklemi bir eğim kongrüansını temsil eder. Böylece şu teoremi verebiliriz.

IV. 3. 1. Teorem: Dual birim küre üzerinde iki parametrelili bir S çemberini alalım. S çemberinin Study resmi ikinci dereceden bir eğim kongrüansıdır.

Diğer taraftan, silindirin g ekseni ile kongrüansın doğruları arasındaki en kısa mesafenin c_2 olduğunu biliyoruz. Şu halde bu silindir, kongrüansın doğrularının bir zarfıdır. Şimdi şu teoremi ifade edebiliriz.

IV. 3..2. Teorem: K dual birim küresini ve bu küreye ait

$$S = \{ \vec{X} \mid \langle \vec{X}, \vec{G} \rangle = \cos(\varphi + \varepsilon \varphi^*) = \text{sabit}, \vec{X}, \vec{G} \in K \}$$

çemberini alalım. Ayrıca S ve G nin Study resimleri, \mathcal{G} ve g olsun. \mathcal{G} 'ye ait doğruların zarfı, eksenini g ve yarıçapı c_2 olan bir dairesel silindirdir.

$$\psi^* = -\lambda_1, \quad \varphi \neq 0 \text{ ve } \varphi^* \neq 0 \text{ olduğu durumda}$$

(IV. 3. 21) denklemi, bir kanatlı hiperboloidi temsil eden,

$$(IV. 3. 22) \quad \frac{y_1^2}{c_2^2} + \frac{y_2^2}{c_2^2} - \frac{y_3^2}{k^2} = 1,$$

$$k = c_2 \cotg c_1 = \text{sabit}, \quad c_1 = \varphi \quad c_2 = \varphi^*$$

denkleme dönüşür.

ψ^* ve λ_1 bağımsız iki parametre olduğu için S çemberinin Study resminin, genellikle iki parametrelili bir kanatlı hiperboloid ailesi olduğunu söyleyebiliriz. Buradan, şu teoremi verelim.

IV. 3. 3. Teorem: K dual birim küresi üzerindeki bir S çemberinin Study resmi iki parametrelili, bir kanatlı hiperboloid ailesidir.

Şimdi özel durumları verelim.

(i) $\varphi^* \neq 0$ ve $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olması durumu

Bu durumda, (IV. 3. 21) kongrüansının doğruları, eksenini g ve yarıçapı φ^* olan silindirin ana doğuranlarını dik olarak keserler. Şu halde (IV. 3. 20) denklemleri,

$$(IV. 3. 23) \quad \begin{cases} y_1 = -\varphi^* \sin \psi + v \cos \psi \\ y_2 = \varphi^* \cos \psi + v \sin \psi \\ y_3 = \psi^* + \lambda_1 \end{cases}$$

biçimine ve (IV. 3. 21) denklemi de, $\varphi^* = c_2$ olmak üzere

$$(IV. 3. 24) \quad \begin{cases} y_1^2 + y_2^2 = c_2^2 + v^2 \\ y_3 = \psi^* + \lambda_1 \end{cases}$$

şekline dönüşür.

(ii) $\varphi^* \neq 0$ ve $\varphi = 0$ (veya $\varphi = \pi$) olması durumu

Bu durumda, \mathcal{C} kongrüansına ait doğrular, kendilerinin zarfı olan silindirin doğuranları ile çakışır-
lar. Bu demektir ki S çemberinin Study resmi, silindir-
dir. Silindirin denklemi ise (IV. 3. 20) den

$$(IV. 3.25) \quad \begin{cases} y_1^2 + y_2^2 = c_2^2 \\ y_3 = v \end{cases}$$

dır.

(iii) $\varphi^* = 0$ ve $\varphi = 0$ (veya $\varphi = \pi$) olması durumu

Bu durumda, \mathcal{Q} kongrüansının bütün doğruları, g doğrusu ile çakışır. Gerçekten (IV. 3. 20) denklemi, g doğrusun temsil eden,

$$(IV.3.26) \quad \begin{cases} y_1^2 + y_2^2 = 0 \\ y_3 = v \end{cases}$$

denklemine dönüşür.

(iv) $\varphi^* = 0$ ve $\varphi \neq 0$ olması durumu

Bu durumda, \mathcal{Q} kongrüansının bütün doğruları g eksenini sabit φ açısı altında keserler. Bu doğruların, iki lineer doğru kompleksinin ortak doğruları olduklarını söyleyebiliriz. (IV. 3. 20) den \mathcal{Q} kongrüansının denklemi,

$$y_1^2 + y_2^2 - \left[\frac{y_3 - (\varphi^* + \lambda_1)}{\cot g \varphi_1} \right]^2 = 0$$

dır.

(v) $\varphi^* = 0$ ve $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olması durumu

Bu durumda S çemberi K küresi üzerinde bir büyük çemberdir. Bu demektir ki eğim kongrüansı, eksenini g olan bir lineer doğru kompleksine indirgenir. (IV. 3. 20) denklemlerinden, \mathcal{Q} nin denklemi,

$$(IV. 3. 28) \quad \begin{cases} y_1 = v \cos \psi \\ y_2 = v \sin \psi \\ y_3 = \lambda_1 \end{cases}$$

veya

$$(IV. 3. 29) \quad \begin{cases} y_1^2 + y_2^2 = v^2 \\ y_3 = \lambda_1 \end{cases}$$

dir.

IV. 3. 1. Tanım: Bir doğru kongrüansının tüm doğruları, sabit bir doğruyu dik olarak keserlerse, bu kongrüansa rectikongrüans denir.

Böylece şu teoremi verebiliriz.

IV. 3. 4. Teorem: K küresi üzerinde bir S büyük çemberi,

$$S = \{ \vec{X} \mid \langle \vec{X}, \vec{G} \rangle = 0, \quad \vec{X}, \vec{G} \in K \}$$

olarak verilsin. S çemberinin \mathcal{G} Study resmi bir rectikongrüanstır.

$\lambda_1 = c_3 \psi$ olduğu durumda (IV. 3. 28) denklemleri, bir dik helikoide ait,

$$(IV. 3. 30) \quad \begin{cases} y_1 = v \cos \psi \\ y_2 = v \sin \psi \\ y_3 = c_3 \psi \end{cases}$$

denklemine veya aynı şey demek olan,

$$(IV. 3. 31) \quad y_3 = c_3 \operatorname{arctg} \frac{y_2}{y_1}$$

denklemine dönüşür.

λ_1 bir parametre olduğu için, $\lambda_1 = c_3 \psi$ olarak seçebiliriz ve şu halde tekabül eden dönüşüm altında S nin resmi, bir dik helikoid olur. Buradan, şu teoremi ifade edebiliriz:

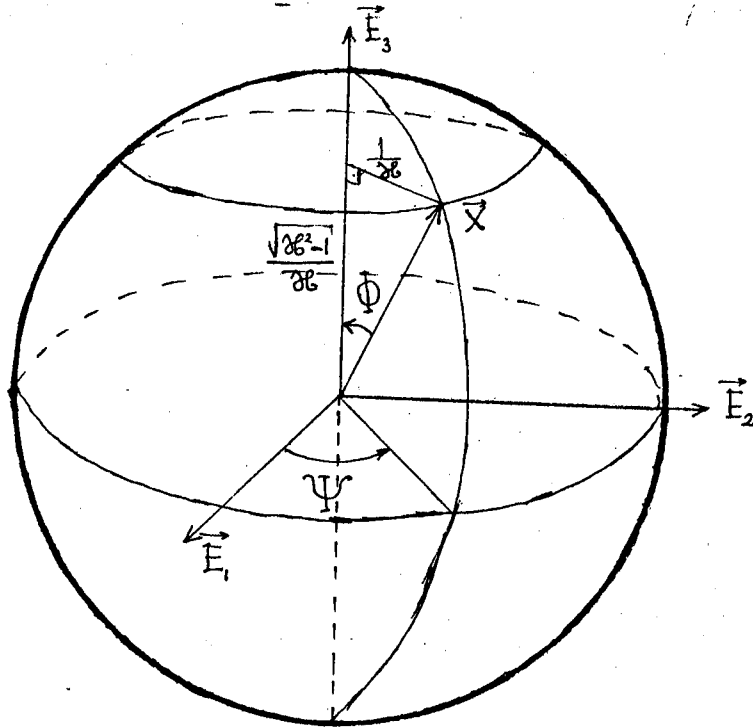
IV. 3. 5. Teorem: Dual çemberlerin Study resmi birer dik helikoid olacak şekilde, Study dönüşümünü seçmek mümkündür.

IV. 4. Bir α Dual Küresel Eğrisinin Eğrilik Çemberinin Study Resmi

Bir α dual küresel eğrisinin herhangi bir X noktasındaki dual eğriliği $\mathcal{K} = \mathcal{K} + \varepsilon \mathcal{K}^*$ olsun. Böylece dual eğrilik yarıçapı $\rho = \frac{1}{\mathcal{K}}$ olur. K birim dual küresi üzerinde dual eğrilik çemberini

$$S = \left\{ \vec{X} \mid \langle \vec{X}, \vec{E}_3 \rangle = \cos \Phi = \frac{\sqrt{\mathcal{K}^2 - 1}}{\mathcal{K}}, \vec{X} \in K \right\}$$

alalım (IV. 4 Şekil).



IV. 4 Şekil.

Şu halde \vec{X} dual vektörü,

$$\vec{X} = \sin \Phi \cos \Psi \vec{E}_1 + \sin \Phi \sin \Psi \vec{E}_2 + \cos \Phi \vec{E}_3$$

veya

$$\cos \Phi = \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k}, \quad \sin \Phi = \frac{1}{k}$$

konumu yapılırsa

$$\vec{X} = \frac{1}{k} (\cos \Psi \vec{E}_1 + \sin \Psi \vec{E}_2 + \sqrt{k^2 - 1} \vec{E}_3)$$

dır.

Şimdi dual düzlemde, $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon x^*$ dual vektörünü

hesaplayalım:

$$\sin \Phi = \sin(\varphi + \varepsilon \varphi^*)$$

$$\begin{aligned} \sin \varphi + \varepsilon \varphi^* \cos \varphi &= \frac{1}{k - \varepsilon k^*} \\ &= \frac{k - \varepsilon k^*}{k^2} \end{aligned}$$

$$\sin \varphi + \varepsilon \varphi^* \cos \varphi = \frac{1}{k} - \varepsilon \frac{k^*}{k^2} \implies \sin \varphi = \frac{1}{k}, \quad \cos \varphi = \frac{(k^2 - 1)^{1/2}}{k}$$

$$\varphi^* \cos \varphi = - \frac{k^*}{k^2}$$

$$\varphi^* \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k} = - \frac{k^*}{k^2} \implies \varphi^* = - \frac{k^*}{k(k^2 - 1)^{1/2}}$$

\vec{X} in ifadesi

$$\vec{x} = \frac{1}{k} [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ (k^2 - 1)^{1/2} \end{bmatrix}$$

ve \vec{x}^* in ifadesi

$$\vec{x}^* = \frac{1}{k} [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] \begin{bmatrix} -\frac{k^*}{k} \cos \psi - (\psi^* + \lambda_1) \sin \psi \\ -\frac{k^*}{k} \sin \psi + (\psi^* + \lambda_1) \cos \psi \\ \frac{k^*}{k(k^2-1)^{1/2}} \end{bmatrix}$$

Doğru kongrüansının Plücker koordinatlarındaki denklemini bulalım. Bunun herhangi bir noktasının yer vektörü,

$$\vec{y} = \vec{x}(\psi, \psi^*) \wedge \vec{x}^*(\psi, \psi^*) + v \vec{x}(\psi, \psi^*)$$

dır. y nin koordinatları (y_1, y_2, y_3) ise

$$y_1 = \frac{k^*}{k(k^2-1)^{1/2}} \sin \psi - (\psi^* + \lambda_1) \frac{(k^2-1)^{1/2}}{k^2} \cos \psi + v \frac{1}{k} \cos \psi$$

$$y_2 = -\frac{k^*}{k(k^2-1)^{1/2}} \cos \psi - (\psi^* + \lambda_1) \frac{(k^2-1)^{1/2}}{k^2} \sin \psi + v \frac{1}{k} \sin \psi$$

$$y_3 = (\psi^* + \lambda_1) \frac{1}{k^2} + v \frac{(k^2-1)^{1/2}}{k}$$

dır.

$\psi \neq \frac{\pi}{2}$ veya $k^2 \neq 1$ olduğu durumda,

$$(IV. 4. 2) \quad \frac{y_1^2}{\frac{k^*^2}{k^2(k^2-1)}} + \frac{y_2^2}{\frac{k^*^2}{k^2(k^2-1)}} - \frac{[y_3 - (\psi^* + \lambda_1)]^2}{\frac{k^*^2}{k^2}} = 1$$

denklemini bulunur. Bu denklem, ψ^* ve λ_1 gibi iki parametre ihtiva ettiği için, ikinci dereceden bir doğru kongrüansını temsil eder.

\bar{E}_3 birim dual vektörüne tekabül eden doğru g olmak üzere bu kongrüansa ait doğruların yeri

- a) Doğrular ile g doğrusu arasındaki en kısa mesafe

$$\varphi^* = - \frac{k^*}{k(k^2-1)^{1/2}}$$

- b) Doğrular ile g doğrusu arasındaki açı

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{k}$$

olacak şekilde tesbit edilir.

Şu halde bu kongrüansın doğruları, yarıçapı

$\varphi^* = -\frac{k^*}{k(k^2-1)^{1/2}}$ ve eksenini g olan bir silindirin doğruan doğrularını $\varphi = \arcsin \frac{1}{k}$ açısı altında keserler.

$\psi^* = -\lambda_1, \psi^* \neq 0, \varphi \neq 0$ olduğu durumda (IV. 4. 2) den

$$(IV. 4. 3) \quad \frac{y_1^2}{\frac{k^*}{k^2(k^2-1)}} + \frac{y_2^2}{\frac{k^*}{k^2(k^2-1)}} - \frac{y_3^2}{\frac{k^{*2}}{k^2}} = 1$$

bir kanatlı hiperboloid denklemi bulunur. Burada,

$$y_1 = \frac{k^*}{k(k^2-1)^{1/2}} \sin \psi + V \frac{1}{k} \cos \psi$$

$$y_2 = - \frac{k^*}{k(k^2-1)^{1/2}} \cos \psi + V \frac{1}{k} \sin \psi$$

$$y_3 = V \frac{(k^2-1)^{1/2}}{k}$$

dır.

ψ^* ve λ , bağımsız iki parametre oldukları için, S çemberinin Study resmi bir kanatlı hiperboloidlerin iki parametrelili ailesidir.

Şimdi bazı özel durumları ele alalım.

1°) $\psi^* \neq 0$ ve $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olması durumu

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \implies \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{k} = 1 \implies k=1, \sqrt{k^2-1} = 0$$

$$\psi^* = -\frac{k^*}{k\sqrt{k^2-1}} \text{ tanımsız}$$

2°) $\psi^* \neq 0$ ve $\varphi=0$ (veya $\varphi=\pi$) olması durumu

$$\varphi=0 \implies \cos \varphi = \frac{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}}{k} = 1 \text{ mümkün değil.}$$

3°) $\psi^*=0$ ve $\varphi=0$ (veya $\varphi=\pi$) olması durumu

$$\varphi=0 \implies \cos \varphi = \frac{\sqrt{k^2-1}}{k} = 1 \text{ mümkün değil.}$$

4°) $\psi^*=0$ ve $\varphi \neq 0$ olması durumu

$$\psi^* = -\frac{k^*}{k(k^2-1)^{\frac{1}{2}}} = 0 \implies k^* = 0$$

$$\cos \varphi = \frac{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}}{k} \neq 1$$

Bu durumda \mathcal{G} kongrüansının bütün doğruları g eksenini $\varphi = \arcsin \frac{1}{k}$ sabit açısı altında keserler.

\mathcal{G} kongrüansının denklemi,

$$\begin{aligned} y_1 &= \left[-(\psi^* + \lambda_1) \frac{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}}{k} + v \right] \frac{1}{k} \cos \psi \\ y_2 &= \left[-(\psi^* + \lambda_1) \frac{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}}{k} + v \right] \frac{1}{k} \sin \psi \\ y_3 &= \left[(\psi^* + \lambda_1) \frac{1}{k} + v (k^2-1)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{1}{k} \end{aligned}$$

veya

$$y_1^2 + y_2^2 - \frac{[y_3 - (\psi^* + \lambda_1)]^2}{k^2 - 1} = 0$$

dır.

5°) $\psi^* = 0$ ve $\psi = \frac{\pi}{2}$ olması durumu

$$\psi^* = -\frac{k^*}{k(k^2-1)^{1/2}} = 0 \implies k^* = 0$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} \implies \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{k} \implies k = 1$$

Bu durumda S çemberi K küresi üzerinde bir

büyük çemberdir. Eğim kongrüansı, ekseni g olan bir lineer

doğru kompleksine indirgenir. \mathcal{Q} nin denklemi

$$y_1 = v \cos \psi$$

$$y_2 = v \sin \psi$$

$$y_3 = \lambda_1$$

veya

$$y_1^2 + y_2^2 = v^2$$

$$y_3 = \lambda_1$$

dır.

Burada $\lambda_1 = c_3 \psi$ ise son denklem dik helikoid

temsil eden,

$$y_3 = c_3 \operatorname{arctg} \frac{y_2}{y_1}$$

denklemine dönüşür.

IV. 4. 1. α_T Teğetler Göstergesinin Eğrilik Çemberinin Study Resmi.

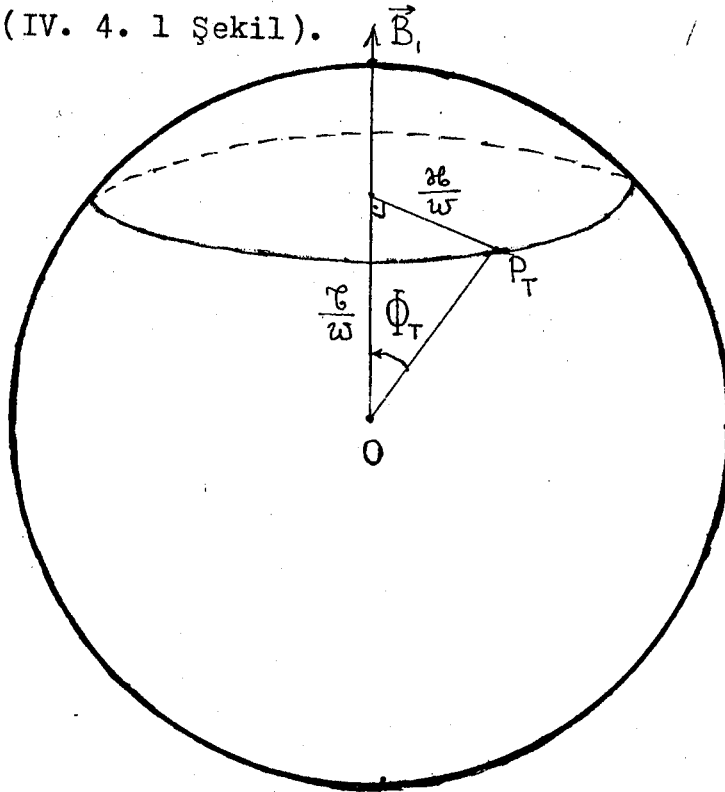
Bir α dual küresel eğrisinin α_T teğetler göstergesini alalım. α_T nin eğrilik yarıçapının

$$\rho_T = \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \tau^2)^{1/2}}$$

olduğunu biliyoruz. K birim dual küre üzerinde α_T nin eğrilik çemberini

$$S_T = \left\{ \vec{P}_T \mid \langle \vec{P}_T, \vec{B}_1 \rangle = \cos \Phi_T = \frac{\tau}{(\alpha^2 + \tau^2)^{1/2}}, \vec{P}_T \in K \right\}$$

alalım (IV. 4. 1 Şekil).



IV. 4. 1 Şekil.

$$\cos \Phi_T = \cos(\varphi_T + \varepsilon \varphi_T^*) = \frac{t + \varepsilon t^*}{[(k + \varepsilon k^*)^2 + (t + \varepsilon t^*)^2]^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi_T = \frac{t}{(k^2 + t^2)^{1/2}}, \quad \sin \varphi_T = \frac{k}{(k^2 + t^2)^{1/2}}, \quad \varphi_T^* = \frac{k^* t - k t^*}{k^2 + t^2}$$

Doğru kongrüansının Plücker koordinatlarıdaki denklemini bulalım. Bunun herhangi bir noktasının yer vektörü,

$$\vec{Y} = \vec{P}_T(\psi_T, \psi_T^*) \wedge \vec{P}_T^*(\psi_T, \psi_T^*) + V_T \vec{P}_T(\psi_T, \psi_T^*)$$

dir. Y'nin koordinatları (Y_1, Y_2, Y_3) ise

$$Y_1 = -\frac{k^*t - kt^*}{k^2 + t^2} \sin \psi_T - (\psi_T^* + \lambda_1) \frac{kt}{k^2 + t^2} \cos \psi_T + V_T \frac{k}{(k^2 + t^2)^{1/2}} \cos \psi_T$$

$$Y_2 = \frac{k^*t - kt^*}{k^2 + t^2} \cos \psi_T - (\psi_T^* + \lambda_1) \frac{kt}{k^2 + t^2} \sin \psi_T + V_T \frac{k}{(k^2 + t^2)^{1/2}} \sin \psi_T$$

$$Y_3 = (\psi_T^* + \lambda_1) \frac{k^2}{k^2 + t^2} + V_T \frac{t}{(k^2 + t^2)^{1/2}}$$

dir. $\psi_T \neq \frac{\pi}{2}$ durumunda

$$\frac{Y_1^2}{\left(\frac{k^*t - kt^*}{k^2 + t^2}\right)^2} + \frac{Y_2^2}{\left(\frac{k^*t - kt^*}{k^2 + t^2}\right)^2} - \frac{[Y_3 - (\psi_T^* + \lambda_1)]^2}{\left(\frac{k^*t - kt^*}{k^2 + t^2} \frac{t}{k}\right)^2} = 1$$

denklemini bulunur. Bu denklem ikinci dereceden bir doğru kongrüansını temsil eder.

$\psi_T^* = -\lambda_1$, $\psi_T^* \neq 0$, $\psi_T \neq 0$ olduğu durumda bir kanatlı hiperboloidi temsil eden

$$\frac{Y_1^2}{\left(\frac{k^*t - kt^*}{k^2 + t^2}\right)^2} + \frac{Y_2^2}{\left(\frac{k^*t - kt^*}{k^2 + t^2}\right)^2} - \frac{Y_3^2}{\left(\frac{t}{k} \frac{k^*t - kt^*}{k^2 + t^2}\right)^2} = 1$$

denklemini elde edilir.

Bazı özel durumları alalım.

1°) $\psi_T^* \neq 0$ ve $\psi_T = \frac{\pi}{2}$ olması durumu:

$$\psi_T = \frac{\pi}{2} \implies \cos \psi_T = \frac{t}{(k^2 + t^2)^{1/2}} = 0 \implies t = 0$$

$$\psi_T^* \neq -\frac{t^*}{k} \neq 0$$

Bu durumda kongrüansın doğruları, eksenini g ve yarıçapı $\varrho_T^* = -\frac{t^*}{k}$ olan silindirin doğrularını dik keserler. Denklem,

$$Y_1 = \frac{t^*}{-k} \sin \psi_T + v_T \cos \psi_T$$

$$Y_2 = -\frac{t^*}{-k} \cos \psi_T + v_T \sin \psi_T$$

$$Y_3 = \psi_T^* + \lambda_1$$

veya

$$Y_1^2 + Y_2^2 = \frac{t^{*2}}{k^2} + v_T^2$$

$$Y_3 = \psi_T^* + \lambda_1$$

olarak bulunur. Burada g , \vec{B}_1 birim dual vektörüne tekbül eder.

2°) $\varrho_T^* \neq 0$ ve $\varrho_T = 0$ olması durumu:

$$\varrho_T = 0 \Rightarrow \sin \varrho_T = \frac{-k}{(k^2 + t^2)^{1/2}} = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$\varrho_T^* = \frac{k^*}{t} \neq 0$$

Bu durumda \mathcal{Q} kongrüansına ait doğrular, kendilerinin zarfı olan silindirin doğruları ile çakışır. S_T çemberinin Study resmi silindirdir. Silindirin denklemi:

$$Y_1 = -\frac{k^*}{t} \sin \psi_T$$

$$Y_2 = \frac{k^*}{t} \cos \psi_T$$

$$Y_3 = v_T$$

veya

$$Y_1^2 + Y_2^2 = \frac{k^2}{t^2}$$

$$Y_3 = V_T$$

dır.

3°) $\varphi_T^* = 0$ ve $\varphi_T = 0$ olması durumu:

$$\varphi_T = 0 \Rightarrow \sin \varphi_T = \frac{k}{(k^2+t^2)^{1/2}} = 0 \Rightarrow k=0$$

$$\varphi_T^* = \frac{k^*}{t} = 0 \Rightarrow k^* = 0$$

$k=0$ olması gerekir. Bu ise mümkün değildir.

4°) $\varphi_T^* = 0$ ve $\varphi_T \neq 0$ olması durumu:

$$\varphi_T^* = 0 \Rightarrow k^*t = -kt^*$$

Bu durumda, \mathcal{G} kongrüansına ait bütün doğrular, g

eksenini $\varphi_T = \arcsin \frac{k}{(k^2+t^2)^{1/2}}$ açısı altında keser-

ler. \mathcal{G} 'nin denklemi,

$$Y_1 = -(\varphi_T^* + \lambda_1) \frac{kt}{k^2+t^2} \cos \varphi_T + V_T \frac{k}{(k^2+t^2)^{1/2}} \cos \varphi_T$$

$$Y_2 = -(\varphi_T^* + \lambda_1) \frac{kt}{k^2+t^2} \sin \varphi_T + V_T \frac{k}{(k^2+t^2)^{1/2}} \sin \varphi_T$$

$$Y_3 = (\varphi_T^* + \lambda_1) \frac{k^2}{k^2+t^2} + V_T \frac{t}{(k^2+t^2)^{1/2}}$$

veya

$$Y_1^2 + Y_2^2 - \frac{[Y_3 - (\varphi_T^* + \lambda_1)]^2}{\frac{t^2}{k^2}} = 0$$

dır.

5°) $\varphi_T^* = 0$ ve $\varphi_T = \frac{\pi}{2}$ olması durumu:

$$\varphi_T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi_T = \frac{t}{(k^2+t^2)^{1/2}} = 0 \Rightarrow t=0$$

$$\varphi_T^* = -\frac{t^*}{k} = 0 \Rightarrow t^* = 0$$

Bu durumda, S_T çemberi, K küresi üzerinde bir büyük çemberdir. Eğim kongrüansı, eksenini g olan bir lineer doğru kompleksi olur. \mathcal{Q} 'nin denklemi,

$$Y_1 = v_T \cos \psi_T$$

$$Y_2 = v_T \sin \psi_T$$

$$Y_3 = \lambda_1$$

veya

$$Y_1^2 + Y_2^2 = v_T^2$$

$$Y_3 = \lambda_1$$

dır. Burada $\lambda_1 = c_3 \psi_T$ ise son denklem, dik helikoid temsil eden

$$Y_3 = c_3 \operatorname{arctg} \frac{Y_2}{Y_1}$$

denklemine dönüşür.

IV. 4. 2. α_N Asli Normaller Göstergesinin

Eğrilik Çemberinin Study Resmi.

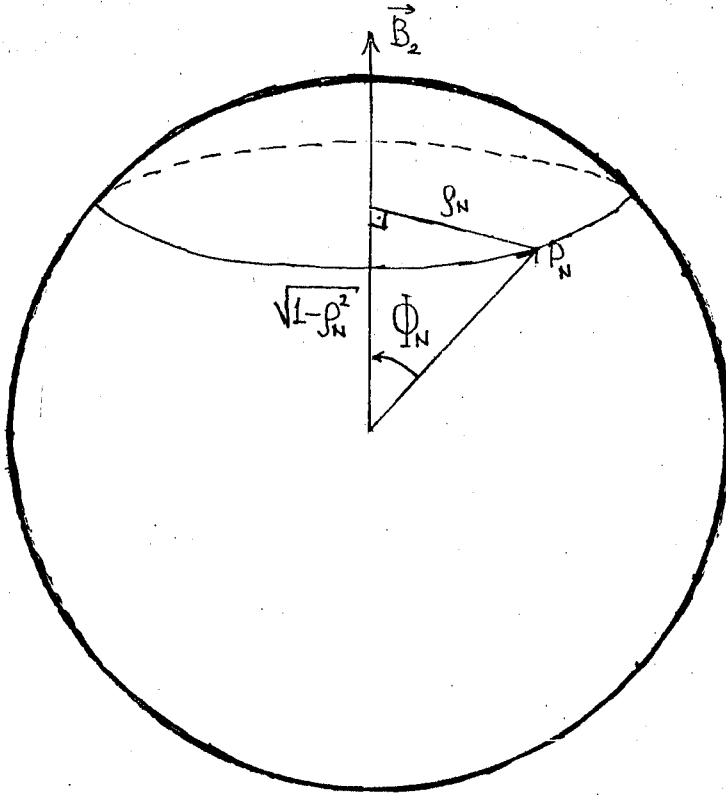
Bir α dual küresel eğrisinin α_N asli normaller göstergesini alalım. α_N nin eğrilik yarıçapının

$$\rho_N = \frac{(\mathcal{R}^2 + \mathcal{C}^2)^{3/2}}{[(\mathcal{R}^2 + \mathcal{C}^2)^3 + (\mathcal{R}\mathcal{C}' - \mathcal{C}\mathcal{R}')]^2}$$

olduğunu biliyoruz. K birim dual küresi üzerinde α_N nin eğrilik çemberini,

$$S_N = \left\{ \vec{P}_N \mid \langle \vec{P}_N, \vec{B}_2 \rangle = \cos \Phi_N = \frac{\partial \mathcal{E} - \mathcal{E} \partial}{[(\partial \mathcal{E}^2 + \mathcal{E}^2)^3 + (\partial \mathcal{E} - \mathcal{E} \partial)^2]^{1/2}}, \vec{P}_N \in \mathcal{K} \right\}$$

alalım (IV. 4. 2 Şekil).



IV.4.2 Şekil

$$\cos \Phi_N = \cos(\varphi_N + \varepsilon \varphi_N^*) = \frac{(k + \varepsilon k^*)(t + \varepsilon t^*) - (t + \varepsilon t^*)(k + \varepsilon k^*)}{\left\{ [(-k + \varepsilon k^*)^2 + (t + \varepsilon t^*)^2]^3 + [(k + \varepsilon k^*)(t + \varepsilon t^*) - (t + \varepsilon t^*)(k + \varepsilon k^*)]^2 \right\}^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi_N = \frac{k t - t k}{[(k^2 + t^2)^3 + (k t - t k)^2]^{1/2}}, \quad \sin \varphi_N = \frac{(k^2 + t^2)^{3/2}}{[(k^2 + t^2)^3 + (k t - t k)^2]^{1/2}}$$

$$\varphi_N^* = \frac{t k^* - t^* k - k^* t - k t^* + 3(k t - t k)(k k^* + t t^*)}{(k^2 + t^2) [(k^2 + t^2)^3 + (k t - t k)^2]}$$

Doğru kongrüansının Plücker koordinatlarındaki denklemini bulalım. Bunun herhangi bir noktasının yer vektörü,

$$\vec{Z} = \vec{P}_N(\varphi_N, \psi_N^*) \wedge \vec{P}_N^*(\varphi_N, \psi_N^*) + v_N \vec{P}_N(\varphi_N, \psi_N^*)$$

dir. Z nin koordinatları (Z_1, Z_2, Z_3) ise

$$Z_1 = -\varphi_N^* \sin \varphi_N - (\psi_N^* + \lambda_1) \sin \varphi_N \cos \varphi_N \cos \varphi_N + v_N \sin \varphi_N \cos \varphi_N$$

$$Z_2 = \varphi_N^* \cos \varphi_N - (\psi_N^* + \lambda_1) \sin \varphi_N \cos \varphi_N \sin \varphi_N + v_N \sin \varphi_N \sin \varphi_N$$

$$Z_3 = (\psi_N^* + \lambda_1) \sin^2 \varphi_N + v_N \cos \varphi_N$$

dir.

$\varphi_N \neq 0$ durumunda

$$\frac{Z_1^2}{\varphi_N^{*2}} + \frac{Z_2^2}{\varphi_N^{*2}} - \frac{[Z_3 - (\psi_N^* + \lambda_1)]^2}{(\varphi_N^* \cot \varphi_N)^2} = 1$$

denklemini bulunur. Bu denklem ikinci dereceden bir doğru kongrüansını temsil eder.

$\psi_N^* = -\lambda_1$, $\varphi_N \neq 0$ ve $\varphi_N^* \neq 0$ olduğu durumda, bir kanatlı hiperboloidi temsil eden

$$\frac{Z_1^2}{\varphi_N^{*2}} + \frac{Z_2^2}{\varphi_N^{*2}} - \frac{Z_3^2}{(\varphi_N^* \cot \varphi_N)^2} = 1$$

denklemini elde edilir.

Bazı özel durumları ele alalım.

1°) $\varphi_N^* \neq 0$ ve $\varphi_N = \frac{\pi}{2}$ olması durumu:

$$\varphi_N = \frac{\pi}{2} \implies \cos \varphi_N = \frac{kt - tk}{[(k^2 + t^2)^2 + (kt - tk)^2]^{1/2}} = 0 \implies kt = tk$$

Bu durumda, kongrüansın doğruları, eksenini g ve yarıçapı φ_N^* olan silindirin doğrularını dik keserler.

Denklem,

$$Z_1 = - \frac{\dot{k}^*t - \dot{k}t^* + \dot{k}^*t + \dot{k}t^*}{(k^2 + t^2)^{3/2}} \sin \psi_N + v_N \cos \psi_N$$

$$Z_2 = \frac{\dot{k}^*t - \dot{k}t^* + \dot{k}^*t + \dot{k}t^*}{(k^2 + t^2)^{3/2}} \cos \psi_N + v_N \sin \psi_N$$

$$Z_3 = \psi_N^* + \lambda_1$$

veya

$$Z_1^2 + Z_2^2 = \frac{(\dot{k}^*t - \dot{k}t^* + \dot{k}^*t + \dot{k}t^*)^2}{(k^2 + t^2)^3} + v_N^2$$

$$Z_3 = \psi_N^* + \lambda_1$$

olarak bulunur. Burada g , \vec{B}_2 birim dual vektörüne tekbül eder.

2^o) $\varphi_N^* \neq 0$ ve $\varphi_N = 0$ olması durumu:

$$\varphi_N = 0 \implies \sin \varphi_N = \frac{(k^2 + t^2)^{3/2}}{[(k^2 + t^2)^3 + (\dot{k}t - \dot{k}^*t)^2]^{1/2}} = 0$$

bu ise mümkün değildir. Zira bu halde φ_N^* tanımlı olmaz.

3^o) $\varphi_N^* = 0$ ve $\varphi_N = 0$ olması durumu:

Bu durum da mümkün değildir. Zira bu halde φ_N^* tanımlı olmaz.

4^o) $\varphi_N^* = 0$ ve $\varphi_N \neq 0$ olması durumu:

$$\varphi_N^* = 0 \implies 3(\dot{k}t - \dot{k}^*t)(k\dot{k}^* + t\dot{t}) = \dot{k}^*t + \dot{k}t^* - \dot{k}^*t - \dot{k}t^*.$$

Bu durumda, \mathcal{Q} kongrüansının doğruları, g eksenini

$$\varphi_N = \arcsin \frac{(k^2+t^2)^{3/2}}{[(k^2+t^2)^3 + (kt - \dot{k}t)^2]^{1/2}}$$

açısı altında keserler. \mathcal{Q} nin denklemi

$$Z_1 = -(\psi_N^* + \lambda_1) \frac{(kt - \dot{k}t)(k^2+t^2)^{3/2}}{(k^2+t^2)^3 + (kt - \dot{k}t)^2} \cos \psi_N + v_N \frac{(k^2+t^2)^{3/2}}{[(k^2+t^2)^3 + (kt - \dot{k}t)^2]^{1/2}} \cos \psi_N$$

$$Z_2 = -(\psi_N^* + \lambda_1) \frac{(kt - \dot{k}t)(k^2+t^2)^{3/2}}{(k^2+t^2)^3 + (kt - \dot{k}t)^2} \sin \psi_N + v_N$$

$$Z_3 = (\psi_N^* + \lambda_1) \frac{(k^2+t^2)^3}{(k^2+t^2)^3 + (kt - \dot{k}t)^2} + v_N \frac{kt - \dot{k}t}{[(k^2+t^2)^3 + (kt - \dot{k}t)^2]^{1/2}}$$

veya

$$Z_1^2 + Z_2^2 - \frac{[Z_3 - (\psi_N^* + \lambda_1)]^2}{\frac{(kt - \dot{k}t)^2}{(k^2+t^2)^3}} = 0$$

dır.

5°) $\varphi_N^* = 0$ ve $\varphi_N = \frac{\pi}{2}$ olması durumu:

$$\varphi_N = \frac{\pi}{2} \implies \cos \varphi_N = \frac{kt - \dot{k}t}{[(k^2+t^2)^3 + (kt - \dot{k}t)^2]^{1/2}} = 0 \implies kt - \dot{k}t = 0$$

$$\varphi_N^* = \frac{\dot{k}t + k\dot{t} - k^*t - \dot{k}t^*}{(k^2+t^2)^{3/2}} = 0 \implies \dot{k}t + k\dot{t} = k^*t + \dot{k}t^*$$

Bu durumda, S_N çemberi, K küresi üzerinde bir büyük çemberdir. Eğim kongrüansı, eksenini g olan bir lineer doğru kompleksidir. \mathcal{Q} nin denklemi,

$$Z_1 = v_N \cos \psi_N$$

$$Z_2 = v_N \sin \psi_N$$

$$Z_3 = \lambda_1$$

veya

$$z_1^2 + z_2^2 = v_N^2$$

$$z_3 = \lambda_1$$

dır. Burada, $\lambda_1 = c_3 \psi_N$ alınırsa son denklem, dik helikoid temsil eden,

$$z_3 = c_3 \arctg \frac{z_2}{z_1}$$

denkleme dönüşür.

IV. 4. 3. \mathcal{L}_B Binormaller Göstergesinin Eğrilik Çemberinin Study Resmi.

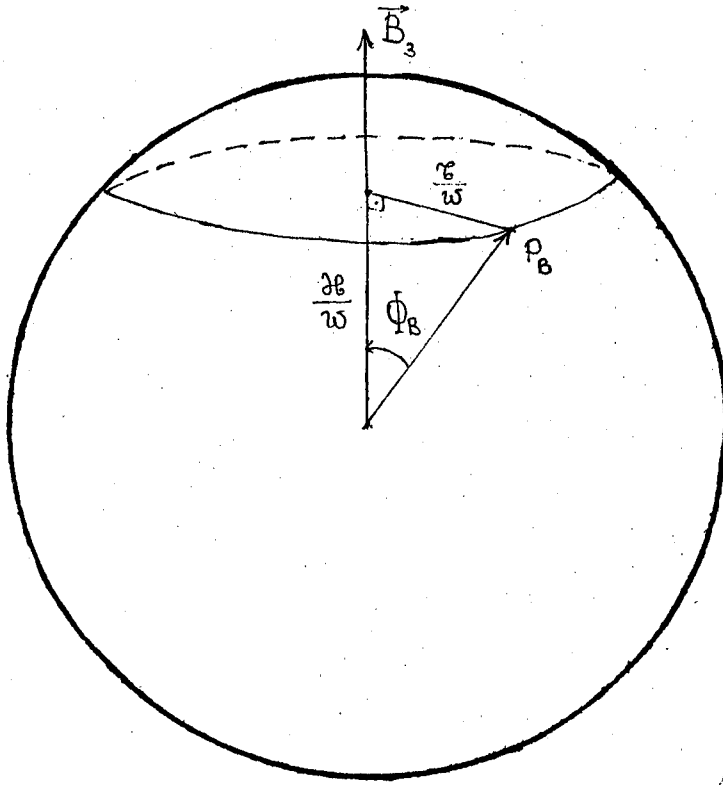
Bir \mathcal{L} dual küresel eğrisinin \mathcal{L}_B binormaller göstergesini ele alalım. \mathcal{L}_B nin eğrilik yarıçapının,

$$\rho_B = \frac{\tau}{(\partial \ell^2 + \tau^2)^{1/2}}$$

olduğunu biliyoruz. K birim dual küresi üzerinde \mathcal{L}_B nin eğrilik çemberini,

$$S_B = \left\{ \vec{P}_B \mid \langle \vec{P}_B, \vec{B}_3 \rangle = \cos \Phi_B = \frac{\partial \ell}{(\partial \ell^2 + \tau^2)^{1/2}} \right.$$

ele alalım (IV. 4. 3 Şekil).



IV. 4. 3 Şekil.

$$\cos \Phi_B = \cos(\varphi_B + \varepsilon \varphi_B^*) = \frac{k + \varepsilon k^*}{[(k + \varepsilon k^*)^2 + (t + \varepsilon t^*)^2]^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi_B = \frac{k}{(k^2 + t^2)^{1/2}}, \quad \sin \varphi_B = \frac{t}{(k^2 + t^2)^{1/2}}$$

$$\varphi_B^* = \frac{kt^* - k^*t}{k^2 + t^2}.$$

Doğru kongrüansının Plücker koordinatlarındaki denklemini bulalım. Bunun herhangi bir noktasının yer vektörü,

$$\vec{\xi} = \vec{P}_B(\psi_B, \psi_B^*) \wedge \vec{P}_B^*(\psi_B, \psi_B^*) + v_B \vec{P}_B(\psi_B, \psi_B^*)$$

dır. $\vec{\xi}$ nin koordinatları (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ise

$$\xi_1 = -\frac{k^*t^* - k^*t}{k^2 + t^2} \sin \psi_B - (\psi_B^* + \lambda_1) \frac{k^*t}{k^2 + t^2} \cos \psi_B + v_B \frac{t}{(k^2 + t^2)^{1/2}} \cos \psi_B$$

$$\xi_2 = \frac{k^*t^* - k^*t}{k^2 + t^2} \cos \psi_B - (\psi_B^* + \lambda_1) \frac{k^*t}{k^2 + t^2} \sin \psi_B + v_B \frac{t}{(k^2 + t^2)^{1/2}} \sin \psi_B$$

$$\xi_3 = (\psi_B^* + \lambda_1) \frac{t^2}{k^2 + t^2} + v_B \frac{k}{(k^2 + t^2)^{1/2}}$$

dir. $\varphi_B \neq \frac{\pi}{2}$ olması durumunda,

$$\frac{\xi_1^2}{\left(\frac{k^*t^* - k^*t}{k^2 + t^2}\right)^2} + \frac{\xi_2^2}{\left(\frac{k^*t^* - k^*t}{k^2 + t^2}\right)^2} - \frac{[\xi_3 - (\psi_B^* + \lambda_1)]^2}{\left(\frac{k^*t^* - k^*t}{k^2 + t^2} \cdot \frac{k}{t}\right)^2} = 1,$$

denklemini elde edilir. Bu denklem, ikinci dereceden bir doğru kongrüansını temsil eder.

$\psi_B^* = -\lambda_1$, $\varphi_B \neq 0$ ve $\varphi_B^* \neq 0$ olduğu durumda,

bir kanatlı hiperboloidi temsil eden,

$$\frac{\xi_1^2}{\left(\frac{k^*t^* - k^*t}{k^2 + t^2}\right)^2} + \frac{\xi_2^2}{\left(\frac{k^*t^* - k^*t}{k^2 + t^2}\right)^2} - \frac{\xi_3^2}{\left(\frac{k^*t^* - k^*t}{k^2 + t^2} \cdot \frac{k}{t}\right)^2} = 1$$

denklemini elde edilir.

Bazı özel durumları ele alalım.

1°) $\varphi_B^* \neq 0$ ve $\varphi_B = \frac{\pi}{2}$ olması durumu:

$$\varphi_B = \frac{\pi}{2} \implies \cos \varphi_B = \frac{k}{(k^2 + t^2)^{1/2}} = 0 \implies k = 0$$

$$\varphi_B^* = -\frac{k^*}{t} \neq 0 .$$

Bu durumda, kongrüansın doğruları, ekseni g ve yarıçapı $\varphi_B^* = -\frac{k^*}{t}$ olan silindirin doğuranlarını dik keserler. Burada g , \vec{B}_3 birim dual vektörüne tekabül eder.

Denklem,

$$\xi_1 = \frac{-k^*}{t} \sin \psi_B + V_B \cos \psi_B$$

$$\xi_2 = -\frac{k^*}{t} \cos \psi_B + V_B \sin \psi_B$$

$$\xi_3 = \psi_B^* + \lambda_1$$

veya

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = \frac{k^{*2}}{t^2} + V_B^2$$

$$\xi_3 = \psi_B^* + \lambda_1$$

olarak elde edilir.

2^o) $\varphi_B^* \neq 0$ ve $\varphi_B = 0$ olması durumu:

$$\varphi_B = 0 \implies \sin \varphi_B = \frac{t}{(k^2 + t^2)} = 0 \implies t = 0$$

$$\varphi_B^* = \frac{t^*}{k} \neq 0 .$$

Bu durumda, \mathcal{G} kongrüansının doğruları, kendilerinin zarfı olan silindirin doğuranları ile çakışır. S_B çemberinin Study resmi silindirdir. Silindirin denklemi,

$$\xi_1 = -\frac{t^*}{k} \sin \psi_B$$

$$\xi_2 = \frac{t^*}{k} \cos \psi_B$$

$$\xi_3 = V_B$$

veya

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = \frac{t^{*2}}{k^2}$$

$$\xi_3 = v_B$$

dir.

3^o) $\varphi_B^* = 0$ ve $\varphi_B = 0$ olması durumu:

$$\varphi_B = 0 \Rightarrow \sin \varphi_B = \frac{t}{(k^2 + t^2)^{1/2}} = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$\varphi_B^* = 0 \Rightarrow \frac{t^*}{k} = 0 \Rightarrow t^* = 0$$

Bu ise $\mathcal{C} = 0$ olması demektir. Bu halde α_B bir büyük çemberdir.

Bu durumda, \mathcal{Q} kongrüansının doğruları, g doğrusu ile çakışiktir. Kongrüansın denklemi g doğrusunu temsil eden,

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0 \Rightarrow \xi_1 = \xi_2 = 0$$

$$\xi_3 = v_B$$

den ibarettir.

4^o) $\varphi_B^* = 0$ ve $\varphi_B \neq 0$ olması durumu:

$$\varphi_B^* = 0 \Rightarrow kt^* - k^*t = 0 \Rightarrow kt^* = k^*t$$

Bu durumda, \mathcal{Q} kongrüansının doğruları, g eksenini

$$\varphi_B = \arcsin \frac{t}{(k^2 + t^2)^{1/2}} \text{ açısı altında keserler.}$$

\mathcal{Q} 'nin denklemi,

$$\xi_1 = -(\psi_B^* + \lambda_1) \frac{kt}{k^2 + t^2} \cos \psi_B + v_B \frac{t}{(k^2 + t^2)^{1/2}} \cos \psi_B$$

$$\xi_2 = -(\psi_B^* + \lambda_1) \frac{kt}{k^2 + t^2} \sin \psi_B + v_B \frac{t}{(k^2 + t^2)^{1/2}} \sin \psi_B$$

$$\xi_3 = (\psi_B^* + \lambda_1) \frac{t^2}{k^2 + t^2} + v_B \frac{k}{(k^2 + t^2)^{1/2}}$$

veya

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \frac{[\xi_3 - (\psi_B^* + \lambda_1)]^2}{\frac{k^2}{t^2}} = 0$$

dır.

5^o) $\psi_B^* = 0$ ve $\psi_B = \frac{\pi}{2}$ olması durumu:

$$\psi_B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \psi_B = \frac{k}{(k^2 + t^2)^{1/2}} = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$\psi_B^* = 0 \Rightarrow -\frac{k^*}{t} = 0 \Rightarrow k^* = 0$$

Bu ise, $\partial \ell = 0$ olması demektir. Bu ise küresel bir eğri için mümkün değildir.

IV. 4. 4. \mathcal{L}_c Sabit Pol Eğrisinin Eğrilik Çemberinin Study Resmi

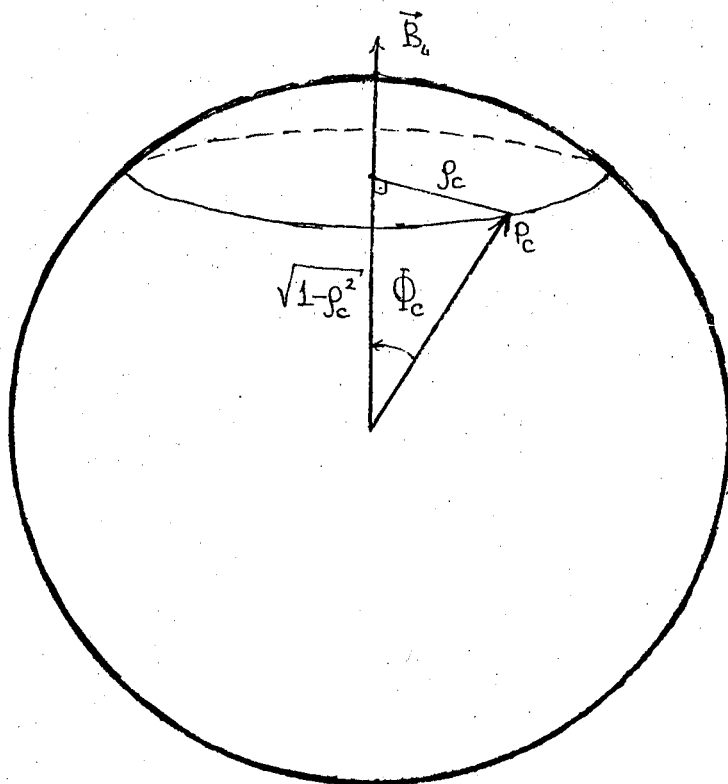
Bir \mathcal{L} dual küresel eğrisinin \mathcal{L}_c sabit pol eğrisini ele alalım. \mathcal{L}_c nin eğrilik yarıçapının

$$\rho_c = \frac{k\dot{t} - \dot{k}t}{\sqrt{(k^2 + t^2)^3 + (k\dot{t} - \dot{k}t)^2}}$$

olduğunu biliyoruz. K birim dual küresi üzerinde \mathcal{L}_c nin eğrilik çemberini,

$$S_c = \left\{ \vec{P}_c \mid \langle \vec{P}_c, \vec{B}_4 \rangle = \cos \Phi_c = \frac{(k^2 + t^2)^{3/2}}{[(k^2 + t^2)^3 + (k\dot{t} - \dot{k}t)^2]^{1/2}}, \vec{P}_c \in K \right\}$$

alalım (IV. 4. 4. Şekil).



IV.4.4. Şekil

$$\cos \Phi_c = \cos(\varphi_c + \varepsilon \varphi_c^*) = \frac{[(k + \varepsilon k^*)^2 + (t + \varepsilon t^*)^2]^{3/2}}{\left\{ \left[(k + \varepsilon k^*)^2 + (t + \varepsilon t^*)^2 \right]^3 + \left[(k + \varepsilon k^*)(t + \varepsilon t^*) - (\bar{k} + \varepsilon \bar{k}^*)(\bar{t} + \varepsilon \bar{t}^*) \right]^2 \right\}^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi_c = \frac{(k^2 + t^2)^{3/2}}{\left[(k^2 + t^2)^3 + (k\bar{t} - \bar{k}t)^2 \right]^{1/2}}, \quad \sin \varphi_c = \frac{k\bar{t} - \bar{k}t}{\left[(k^2 + t^2)^3 + (k\bar{t} - \bar{k}t)^2 \right]^{1/2}}$$

$$\varphi_c^* = \frac{(k^2 + t^2)^{1/2} \left[(k^2 + t^2)(k\bar{t} + \bar{k}t - \bar{k}t - \bar{k}t) + 3(k\bar{k}^* + t\bar{t}^*)(k\bar{t} - \bar{k}t)^2 \right]}{(k\bar{t} - \bar{k}t) \left[(k^2 + t^2)^3 + (k\bar{t} - \bar{k}t)^2 \right]}$$

Doğru kongrüansının Plücker koordinatlarındaki denklemini bulalım. Bunun herhangi bir noktasının yer vektörü,

$$\vec{\eta} = P_c(\psi_c, \psi_c^*) \wedge \vec{P}_c^*(\psi_c, \psi_c^*) + v_c \vec{P}_c(\psi_c, \psi_c^*)$$

dir. η nın koordinatları (η_1, η_2, η_3) ise

$$\eta_1 = -g_c^* \sin \psi_c - (\psi_c^* + \lambda_1) \sin \psi_c \cos g_c \cos \psi_c + v_c \sin g_c \cos \psi_c$$

$$\eta_2 = g_c^* \cos \psi_c - (\psi_c^* + \lambda_1) \sin g_c \cos g_c \sin \psi_c + v_c \sin g_c \cos \psi_c$$

$$\eta_3 = (\psi_c^* + \lambda_1) \sin^2 g_c + v_c \cos g_c$$

dir. $g_c \neq \frac{\pi}{2}$ olması durumunda

$$\frac{\eta_1^2}{g_c^{*2}} + \frac{\eta_2^2}{g_c^{*2}} - \frac{[\eta_3 - (\psi_c^* + \lambda_1)]^2}{g_c^{*2} \frac{(k^2 + t^2)^3}{(kt - kt)^2}} = 1$$

denklemini elde edilir. Bu denklem ikinci dereceden bir doğru kongrüansını temsil eder.

$\psi_c^* = -\lambda_1$, $g_c \neq 0$ ve $g_c^* \neq 0$ olduğu durumda, bir

kanatlı hiperboloidi temsil eden

$$\frac{\eta_1^2}{g_c^{*2}} + \frac{\eta_2^2}{g_c^*} - \frac{\eta_3^2}{g_c^{*2} \frac{(k^2 + t^2)^3}{(kt - kt)^2}} = 1$$

denklemini elde edilir.

Şimdi özel durumları ele alalım.

1°) $\varphi_c^* \neq 0$ ve $\varphi_c = \frac{\pi}{2}$ olması durumu:

$$\varphi_c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi_c = \frac{(-k^2 + t^2)^{3/2}}{[(k^2 + t^2)^3 + (kt - \dot{k}t)^2]^{1/2}} = 0.$$

Bu ise mümkün değildir. Zira φ_c^* de 0 olur.

2°) $\varphi_c^* \neq 0$ ve $\varphi_c = 0$ olması durumu:

$$\varphi_c = 0 \Rightarrow \sin \varphi_c = \frac{-kt - \dot{k}t}{[(k^2 + t^2)^3 + (kt - \dot{k}t)^2]^{1/2}} = 0 \Rightarrow kt - \dot{k}t = 0$$

Bu durumda ise φ_c^* tanımlı değildir.

3°) $\varphi_c^* = 0$ ve $\varphi_c = 0$ olması durumu:

$$\varphi_c = 0 \Rightarrow \sin \varphi_c = 0 \Rightarrow kt - \dot{k}t = 0$$

Bu halde φ_c^* tanımlı değildir.

4°) $\varphi_c^* = 0$ ve $\varphi_c \neq 0$ olması durumu:

$$\varphi_c^* = 0 \Rightarrow (-k^2 + t^2)(-k^*t + kt^* - \dot{k}t^* - \dot{k}t) + 3(kk^* + tt^*)(kt - \dot{k}t)^2 = 0$$

Bu durumda, \mathcal{Q} kongrüansının doğruları g eksenini

$$\varphi_c = \arcsin \frac{kt - \dot{k}t}{[(k^2 + t^2)^3 + (kt - \dot{k}t)^2]^{1/2}}$$

açısı altında keserler. Burada g, \vec{B}_4 birim dual vektörüne tekabül eder. \mathcal{Q} ' nin denklemi,

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 - \frac{[\eta_3 - (\varphi_c^* + \lambda_1)]^2}{\frac{(k^2 + t^2)^3}{(kt - \dot{k}t)^2}} = 0$$

dir.

5^o) $\varphi_c^* = 0$ ve $\varphi_c = \frac{\pi}{2}$ olması durumu:

$$\varphi_c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi_c = \frac{(k^2 + t^2)^{1/2}}{[(k^2 + t^2)^3 + (kt - kt)^2]^{1/2}} = 0$$

olur. Bu halde

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 = \infty$$

olur. Bu da mümkün değildir.

V. BÖLÜM

Küresel Involütenin Çizgiler UzayındakiKarşılığı

Bu bölümde, biri diğerinin küresel involütesi olan iki dual küresel eğrinin mütekabil noktalarındaki eğrilik eksenleri arasındaki ilgiyi "küresel involütelerin çizgiler uzayındaki karşılıkları" olarak ortaya koyacağız.

$$\langle \vec{B}_1, \vec{B}_3 \rangle = 1$$

olduğu için α_T ve α_B ye ait eğrilik eksenleri çakışık-
tır. α_T ile α_B nin eğrilik yarıçapları da

$$\rho_T = \frac{\partial \ell}{(\partial \ell^2 + \tau^2)^{1/2}}$$

$$\rho_B = \frac{\tau}{(\partial \ell^2 + \tau^2)^{1/2}}$$

dır.

Eğrilik yarıçapları farklı olduklarından dolayı, α_T ve α_B ye ait eğrilik çemberleri paralel iki düzlem içinde yer alırlar ama çakışmazlar. Dolayısıyla, çizgiler uzayındaki karşılıkları için de sadece eksenleri ortaktır fakat kendileri birbirlerinden farklıdır diyebiliriz.

İç içe iki tek kanatlı hiperboloid görünümü arz ederler.

Aynı şeyleri,

$$\langle \vec{B}_2, \vec{B}_4 \rangle = 1$$

ve

$$\rho_N = \frac{(\alpha^2 + \tau^2)^{3/2}}{[(\alpha^2 + \tau^2)^3 + (\alpha\tau - \alpha\tau)^2]^{1/2}}$$

$$\rho_C = \frac{\alpha\tau - \alpha\tau}{[(\alpha^2 + \tau^2)^3 + (\alpha\tau - \alpha\tau)^2]^{1/2}}$$

bağıntılarını gözönüne alarak, α_N ve α_C için de ifade edebiliriz. α_N ve α_C nin eğrilik eksenleri çakışık fakat eğrilik çemberlerinin yarıçapları farklıdır. Dolayısıyla bu çemberler de paralel iki düzlem içinde yer alırlar, bu çemberlerin çizgiler uzayındaki karşılıkları olan kongrüanslar için sadece eksenlerinin çakışık olduğunu ifade edebiliriz. İç içe iki tek kanatlı hiperboloid görünümü arz ederler.

α_T ile α_B küresel göstergeleri hem α_C nin ve hem de α_N nin küresel involütüdür. Bunun karşılığı olarak α_T ile α_B nin eğrilik çemberlerinin çizgiler uzayındaki karşılıkları aynı eksenli fakat birbirinden farklı iki kongrüanstır. İç içe iki tek kanatlı hiperboloid görünümü arz ederler.

Aynı şekilde, \mathcal{L}_N ile \mathcal{L}_C de \mathcal{L}_T ile \mathcal{L}_S nin küresel involütleri olduklarından bunların da eğrilik eksenleri çakışmıştır. Dolayısıyla \mathcal{L}_N ile \mathcal{L}_C nin eğrilik çemberleri paralel iki düzlem içinde yatarlar. Bu çemberlerin eğrilik yarıçapları farklı olduğundan çakışmazlar ve çizgiler uzayındaki karşılıkları da aynı eksenli fakat birbirinden farklı iki kongrüanstır. İç içe iki tek kanatlı hiperboloid manzarası arzederler. Böylece şu teoremi verebiliriz:

V. 1. Teorem: Birim dual küre üzerindeki bir \mathcal{L} eğrisine eşlik eden dual gösterge eğrileri arasında biri diğerinin dual küresel involütü olan göstergelerin çizgiler uzayındaki karşılıkları eğrilik eksenleri aynı fakat, kendileri özel halde iç içe tek kanatlı hiperboloid görünümü arzeden birer doğru kongrüansıdır.

ÖZEL HAL:

\vec{B}_1 ile \vec{B}_2 nin çakışması durumunu ele alalım.

$$\langle \vec{B}_1, \vec{B}_2 \rangle = \frac{\|\vec{w}\|}{\sqrt{\|\vec{w}\|^2 + \phi'^2}} = 1$$

olması için

$$\phi' = 0 \implies \phi = \text{sabit}$$

olmalıdır.

Bu da $\vec{\omega}$ dual Darboux vektörünün $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ sistemine sıkı surette bağlı olması demektir. Böylece şu teoremleri verebiliriz.

V. 2. Teorem: Eğer bir α dual küresel eğrisine ait $\vec{\omega}$ dual Darboux vektörü $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ sistemine sıkı surette bağlı ise bu eğrinin $\alpha_T, \alpha_N, \alpha_B, \alpha_C$ küresel göstergelerine ait eğrilik eksenleri çakışır. Yani,

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_2 = \vec{B}_3 = \vec{B}_4$$

dır. Fakat, eğrilik çemberlerinin yarıçapları farklı olduklarından eğrilik çemberleri çakışık değildir.

V. 3. Teorem: Eğer bir α dual küresel eğrisine ait $\vec{\omega}$ dual Darboux vektörü $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ sistemine sıkı surette bağlı ise bu eğrinin $\alpha_T, \alpha_N, \alpha_B, \alpha_C$ küresel göstergelerine ait eğrilik çemberlerinin uzaydaki karşılıkları eksenleri aynı olan fakat kendileri farklı olan birer doğru kongrüansıdır. Bu kongrüanslar, özel halde iç içe dört adet tek kanatlı hiperboloid manzarası arzederler.

S O N U Ç L A R

1) Birim dual küre üzerindeki bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin bir $\alpha(s)$ noktasında aynı hız vektörüne sahip olan bütün α_i eğrilerinin herbirinin $\alpha(s)$ deki eğrilik çemberleri aynı birim dual küre üzerinde bulunurlar.

⊙ Bu dual eğrilik çemberlerinden herbirine 3- boyutlu çizgiler uzayında birer eğim kongrüansı te- kabul eder. Bu eğim kongrüanslarının herbiri birer iki parametrelili tek kanatlı hiperboloid aileleridir.

⊙ Bu ailelerin herbirinde $\alpha(s)$ doğrusu ortaktır.

2) α_i dual eğrilerinin $\alpha(s)$ dual noktasındaki eğrilik eksenlerinin herbirinin 3- boyutlu çizgiler uzayındaki karşılıkları:

$$(a) \alpha_i = \alpha_T \quad \text{için} \quad \vec{Q}_T = (\sin \phi + \lambda) \vec{B}_T$$

$$(b) \alpha_i = \alpha_N \quad \text{için} \quad \vec{Q}_N = \left(\frac{\phi'}{\sqrt{\|\vec{\omega}\|^2 + \phi'^2}} + \lambda \right) \vec{B}_N$$

$$(c) \alpha_i = \alpha_B \quad \text{için} \quad \vec{Q}_B = (\cos \phi + \lambda) \vec{B}_B$$

$$(d) \alpha_i = \alpha_C \quad \text{için} \quad \vec{Q}_C = \left(\frac{\|\vec{\omega}\|}{\sqrt{\|\vec{\omega}\|^2 + \phi'^2}} + \lambda \right) \vec{B}_C$$

dir.

3) Eğrilik eksenlerinin birbirlerine göre durumları:

$$\langle \vec{B}_T, \vec{B}_B \rangle = 1$$

$$\langle \vec{B}_N, \vec{B}_C \rangle = 1$$

$$\langle \vec{B}_T, \vec{B}_N \rangle = \frac{\|\vec{\omega}\|}{\sqrt{\|\vec{\omega}\|^2 + \phi'^2}}$$

$$\langle \vec{B}_N, \vec{B}_B \rangle = \frac{\|\vec{\omega}\|}{\sqrt{\|\vec{\omega}\|^2 + \phi'^2}}$$

$$\langle \vec{B}_B, \vec{B}_C \rangle = \frac{\|\vec{\omega}\|}{\sqrt{\|\vec{\omega}\|^2 + \phi'^2}}$$

ile bellidir.

4) Eğrilik eksenlerinin cümlesi

Bir α dual küresel eğrisinin (N) ile (C) küresel göstergelerinin eğrilik çemberlerine çizgiler uzayında karşılık gelen doğru kongrüanslarının eksenleri çakışık-tır. Benzer özellik (T) ile (B) küresel göstergeleri için de geçerlidir.

K A Y N A K L A R

- (1) Weatherburn, C. E, 1955, Differential Geometry of Three Dimensions. Cambridge University Press.
- (2) Hacısalihoğlu, H.H, 1982, Diferansiyel Geometri, İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi yayınları Mat. No:2.
- (3) Hacısalihoğlu, H. H, 1983, Hareket Geometrisi ve Kuarterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat No:2.
- (4) Hacısalihoğlu, H. H, 1977, The Consequences of Meusnier's Theorem and the real spherical motions. Journal of the Fac.Sc.of the KTÜ, Vol.I, Fasc.7, pp.41-51.
- (5) Müller, H.R, 1963, Kinematik Dersleri, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları Mat No:27
- (6) Hacısalihoğlu, H. H, 1977, Study Map of a Circle, Journal of The Fac.Sc. of the KTÜ, Vol.I, Fasc.7, pp. 69-80.
- (7) Tanrıöver, N., Hiperyüzeyler için Meusnier Teoremi, 1976, Doktora tezi, Ankara.Üniversitesi, Fen-Fakültesi, Ankara.