

VOLTERRA TİPİ DİNAMİK
SİSTEMLER.

Nezahat Öztürk /

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç.Dr.Şahin Koçak

Şubat, 1988

Nezahat Öztürk'ün YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "VOLTERRA TİPİ DİNAMİK SİSTEMLER" başlıklı bu çalışma jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

.4/4./1988

üye : Prof. Dr. OKAY GELEBİ'

üye : Prof. Dr. RÜSTEM KAYA

üye : Doç. Dr. ŞAHİN KOÇAK

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 11.4.1988.
gün ve 174/7.....sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Rüstem KAYA

ÖZET

Bu çalışmada, Lotka-Volterra dinamik sistemi ya da av-avcı modeli olarak bilinen ve

$$x' = ax - bxy$$

$$y' = cxy - dy \quad a, b, c, d > 0$$

diferansiyel denklem sistemi ile verilen matematiksel model tanıtıldıktan sonra, katsayıların pozitif olması koşulundan vazgeçilmesi durumunda ortaya çıkan bütün ikili etkileşimler incelenmiş ve sınıflandırılmıştır. Bu etkileşimler sembolik olarak "bencil", "fedakâr", "iyimser" ve "karamsar" adını verdiğimiz dört davranış tipinin etkileşimleri olarak karşımıza çıkmaktadırlar. Son bölümde denge noktalarının kararlılığı kavramından farklı bir kavram olan "yapısal kararlılık" kavramı üzerinde durulmuş ve Lotka-Volterra dinamik sisteminin yapısal kararlı olmadığı ayrıntılı bir örnekle gösterilmiştir.

1. GİRİŞ

Uygulamalı matematiğin genel amacının, fiziksel sistemlerin davranışının modellenmesi olduğu söylenebilir. (Kimyasal, biyolojik ve hatta sosyal ve iktisadi sistemlerin dahi, "gerçek sistemler" anlamında "fiziksel sistemler" olarak nitelendirilmesinin kanımızca bir sakıncası yoktur.) Böyle bir modelleme "mekanistik" (ya da "mekanizmaya yönelik") olabildiği gibi, "fenomenolojik" (ya da "davranışa yönelik") de olabilir. Aslında arzu edilen, sistemin gerçek yapısının ve çalışma mekanizmasının çözümlenmesi olmakla birlikte, karmaşık sistemler için bu yaklaşım fevkalade zor (ya da bilimin ulaştığı seviye için henüz erken) olabilir ve böyle durumlarda (sibernetiğin "kara kutu" [black box] yaklaşımına benzer şekilde) gerçek mekanizma gözardı edilerek sadece gözlenen davranış modellenmeğe çalışılır. Ancak bu davranışsal yaklaşımın ciddi bir sakıncası, incelenen sisteme model olarak kurulan teorik sistemin, benzer bir davranış göstermekle birlikte, tamamen farklı ve asıl sistemle ilgisiz bir mekanizmaya sahip olabilmesidir. Analogiler ne kadar faydalı olurlarsa olsunlar, asıl amaç incelenen sistemin deşifre edilmesi olmalıdır ve bu nedenle karmaşık sistemlerde yarı-mekanistik, yarı-fenomenolojik modeller gittikçe daha geniş kabul görmektedirler. Çalışmamızın konusu olan Volterra-sistemlerinin popülerliği, bu türün prototipi olan Lotka-Volterra av-avcı modelinin, davranışsal başarısı kadar, mekanizmayı da gözardı etmemesinde yatar.

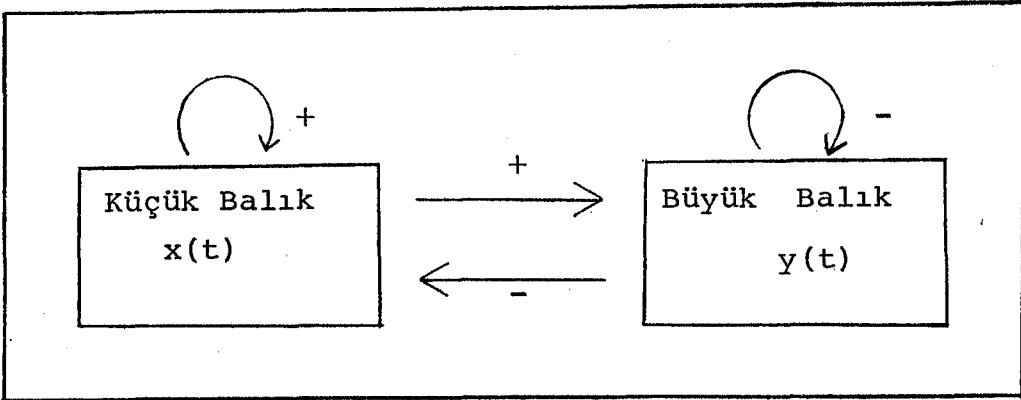
Volterra sistemlerini tanımlamadan önce, genel sistem teorisinin yaklaşımını özetleyelim (Bertalanffy, 1969). Bir sistemin belli bir andaki durumunun, x_1, x_2, \dots, x_n gibi n tane gerçel sayı ile belirlenebildiğini kabul edelim. Değişme

olan kapalı yörüngelerin ve limit sıklüslerinin varlığı hakkında nümerik çözümlerle sonuç çıkarmak çok yanıltıcı olabilir.) Bu konuyu relative eden (ve açık ya da nümerik çözümlere itibar kaybettiren) bir başka önemli husus daha vardır: Komplike sistemlerde tek bir yörüngeyi çok iyi olarak belirlemekten çok, mümkün bütün yörüngelerin durumu ve aralarındaki ilişkiler hakkında bilgi sahibi olmak daha önemlidir. Klasik diferansiyel denklemler teorisinde ihmal edilen, fakat 1940'lı yıllardan itibaren ön plana çıkmaya başlayan ve bugün temel bir yaklaşım haline geldiği için konuya bile isim değiştiren ("diferansiyel denklemler" yerine "dinamik sistemler") bu husus, kantite yerine kalitenin önem kazanmasına yol açmıştır ve tek tek trajektörlerin bulunmasından çok, faz portresinin (bütün trajektörlerin genel görüntüsünün) incelenmesi asıl problem haline gelmiştir. Özellikle, sistem parametrelerinin değişmesi durumunda faz portresinin nasıl değişeceği, trajektörler arasındaki kalitatif ilişkinin korunup korunmayacağı, yani incelenen modelin "yapısal stabil" olup olmadığı, bir model için bir fizibilite testi olma yolundadır. 4. Bölümde teknik tanımını vereceğimiz bu yapısal stabilite kavramı şu temel düşünceyi yansıtmaktadır: Gerçek sistemler sürekli olarak birçok küçük etkilere maruz kaldıkları halde, genel davranışlarında dikkat çekici bir kararlılık göstermektedirler. (Ancak bu kararlılığı "statik" olma şeklinde değil, sürekli regülasyonla sağlanan ve belli bir zaman ve mekan içinde geçerli olan dinamik davranış kararlılığı olarak anlamak gerekir.) Bu nedenle, böyle sistemlerin matematiksel modellerinin de, benzer bir kararlılığa sahip olmaları gerekir. Bu koşulun sağlanması durumunda ise, söz konusu dinamik sistemin trajektörlerinin kesin çözümlerinin bulunması zaten fazla anlam taşımaz (bu bir insanın boyunu belirtirken metre cinsinden virgülden sonra yüz tane rakam vermek kadar anlamsız olabilir) ve trajektörlerin tiplerinin, konumlarının

ve aralarındaki ilişkilerin belirlenmesi daha önemli olur. Bu durumda nümerik çözümlere karşı başka bir tavır takınılabılır ve bunlar faz portresinin illüstrasyonu için çok faydalı bir araç haline gelirler.

Şimdi Lotka-Volterra sistemine dönelim. Bu sistem 1920'li yıllarda Adriyatik denizinde gözlenen balık popülasyonu osilasyonlarını açıklamak için ortaya atılmıştır. Avlanan balık sayılarına bakılarak, bir büyük balık türü ile, bu türün beslendiği bir küçük balık türünün sayılarında, aralarında bir faz kaymasıyla, çok ilginç bir salınım tesbit edilmiş ve bu gözlem Lotka ve Volterra'yı şöyle bir modele sevketmiştir:

Küçük balıkların sayısını x ve büyük balıkların sayısını y ile gösterelim. x ve y , $x(t)$ ve $y(t)$ şeklinde zamanın fonksiyonları olarak düşünülebilir. Küçük ve büyük balıklardan oluşan sistemdeki ilişkiler şöyle şematize edilebilir:



Küçük balıklar büyük balıkların etkisi dışında kaldığında artmakta, büyük balıklar da küçük balıklardan

aynı zamanda davranışsal başarısından dolayıdır. Çünkü katsayıların uygun şekilde ayarlanmasıyla, sadece gözlenen balık popülasyonu salınımları elde edilmekle kalmamış, bu model "av-avcı" modeli adı altında başka bir çok durumlarda da başarıyla kullanılmıştır. Kanada'daki vaşak-tavşan sayıları salınımlarında (Ebenhöh, 1975), beyindeki bazı sinirsel çekirdiklerin etkileşimi yardımıyla beyin dalgalarının ve uyku ritminin açıklanmasına kadar (Hobson, et all., 1975) geniş bir uygulama bulan bu modelin, gene de hassas bir tamire muhtaç olduğuna, yapısal stabilite bölümünde değineceğiz.

İkiden fazla sayıdaki türlerin etkileşimi için de yukarıdaki temel varsayımlar altında diferansiyel denklem takımları yazılabilir:

x_1, x_2, \dots, x_n n türün sayılarını göstermek üzere,

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{1n}x_1x_n$$

$$x_2' = a_{22}x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{2n}x_2x_n$$

⋮

$$x_n' = a_{nn}x_n + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{n(n-1)}x_nx_{n-1}$$

şeklindeki bir denklem takımı, katsayıların pozitif veya negatif olarak seçilişine göre, zengin bir ilişkiler ağını modelleyebilir. Volterra sistemleri olarak bilinen bu sistemler (bazan bu sistemlerde türlerin kendileriyle olan etkileşimleri için karesel x_i^2 terimleri de eklenir) günümüzde etraflı bir incelemeye tabi tutulmaktadırlar (Roy and Solimano, 1987). Ancak, bu sistemlerin davranışı hakkında net bir tablo henüz ortaya çıkmış değildir.

Biz ikinci bölümde Lotka-Volterra sistemi hakkındaki klasik ayrıntıları verdikten sonra, üçüncü bölümde

mümkün bütün ikili Volterra-etkileşimlerini gözönüne alıp sınıflandıracağız. Son bölümde de Lotka-Volterra sisteminin yapısal kararlı olmadığını bir örnekle göstereceğiz.

2. KLASİK LOTKA-VOLTERRA DENKLEMİ

$$\begin{aligned}x' &= (a-by)x \\y' &= (cx-d)y, \quad a,b,c,d > 0\end{aligned}\quad (2.1)$$

Lotka-Volterra denklemini gözönüne alalım.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = (ax-bxy, cxy-dy)$$

fonksiyonu C^1 sınıfından bir fonksiyondur. $(x,y) = z$ gösterimi ile, yukarıda verilen denklem

$$z' = f(z)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Tanımlanan f fonksiyonu altında, görüntüsü sıfır olan noktalar, sistemin denge noktalarıdır ve $Df(z)$ ile göstereceğimiz türev matrisi ile bazı durumlarda bu denge noktalarının stabilliği hakkında karar verilebilir. (2.1) denkleminin denge noktaları yukarıda belirttiğimiz gibi,

$$f(z) = 0$$

eşitliğini sağlayan $z_1 = (0,0)$ ve $z_2 = (d/c, a/b)$ noktalarıdır. Şimdi $Df(z)$ matrisini bularak denge noktalarının durumunu inceleyelim:

$$Df(z) = \begin{bmatrix} a-by & -bx \\ cy & cx-d \end{bmatrix}$$

dir. $z_1 = (0,0)$ ve $z_2 = (d/c, a/b)$ denge noktalarına karşılık gelen matrisler sırasıyla,

$$Df(z_1) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

ve

$$Df(z_2) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleridir. $Df(z_1)$ matrisinin özdeğerlerinin reel kısımları ters işaretli olduklarından, $z_1=(0,0)$ denge noktası bir "eyer" noktasıdır. Bu nedenle de z_1 stabil bir nokta değildir. Buna karşın $Df(z_2)$ matrisinin özdeğerlerinin reel kısımları sıfır olduğundan, $z_2=(d/c, a/b)$ denge noktasının stabilliği için türev matrisi testi yeterli değildir. Bu noktanın stabilliğini (2.1) denkleminin faz portresini pozitif bölgede inceledikten sonra göstereceğiz. (Bu sistem için Hirsch and Smale, 1974 ve Braun, 1978 bkz.)

(2.1) denkleminin faz profilini incelemek için önce,

$x = \frac{d}{c}$ ve $y = \frac{a}{b}$ doğrularını çizelim. Bu doğrular xy -düzleminin pozitif bölgesini dört kadrana ayırır (Şekil 2.1). Herbir kadranda x' ve y' nün işaretleri sabittir.

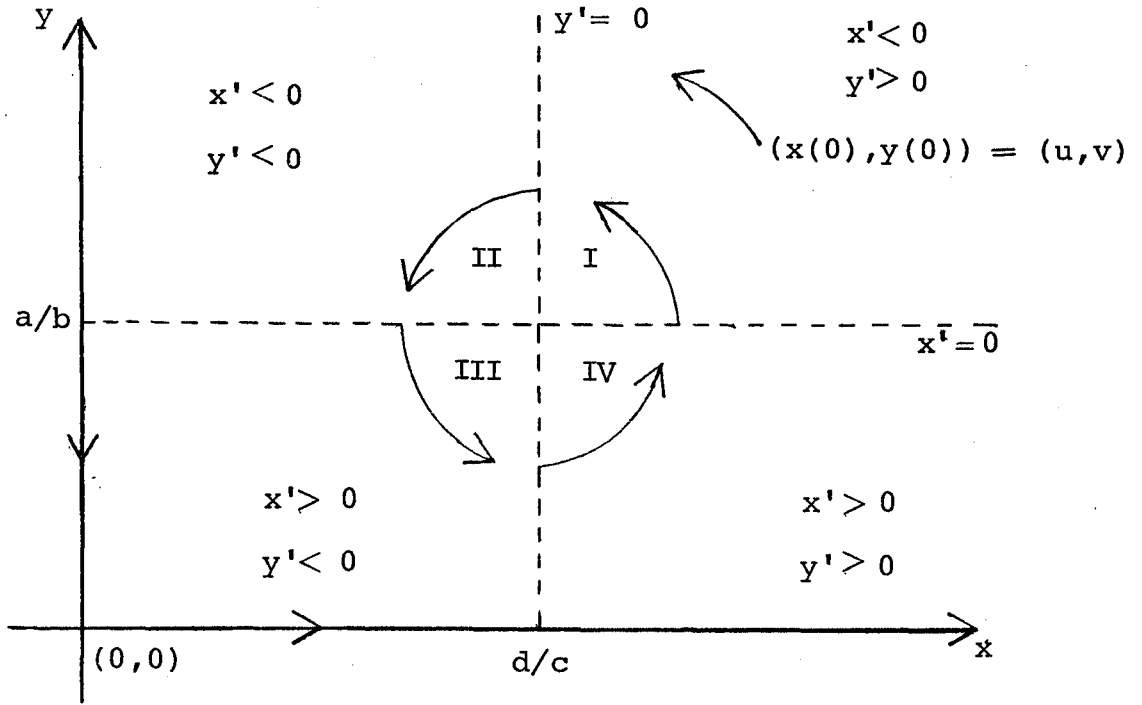
Şimdi başlangıç noktası

$$x(0) = u > \frac{d}{c} > 0 ,$$

$$y(0) = v > \frac{a}{b} > 0$$

olan $(x(t), y(t))$ yörüngesini alalım. Açıkça görüldüğü gibi $(x(0), y(0))$ I. kadrandadır.

$0 \leq t < \tau$ için, $(x(t), y(t))$ I. kadranda olacak şekilde bir $j = [0, \tau)$ maksimal aralığı (burada $\tau = \infty$ olabilir) vardır.



Şekil 2.1

I. Kadranda $a-by < 0$ ve $cx-d > 0$ olduğundan,

$$a-by(0) = a-bv = -r < 0 \quad (r > 0)$$

$$cx(0)-d = cu-d = s > 0$$

olur. Yine I.Kadranda $x'(t) < 0$ ve $y'(t) > 0$ olduğundan bu bölgede $x(t)$ azalan, $y(t)$ artan bir fonksiyondur. Bu nedenle, $x(t) \leq u$ ve $y(t) \geq v$ eşitsizliklerinden,

$$\frac{d}{dt} \log x(t) = \frac{x'}{x} = (a-by) \leq -r \quad ,$$

$$\frac{d}{dt} \log y(t) = \frac{y'}{y} = (cx-d) \leq s$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizliklerde her iki tarafın da integrali alınırsa, $0 \leq t < \tau$ için,

$$\frac{d}{c} \leq x(t) \leq ue^{-rt} \quad (2.2)$$

$$\frac{a}{b} \leq y(t) \leq ve^{st} \quad (2.3)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (2.2) nedeniyle τ sonsuz olmaz. Dolayısıyla τ sonlu bir sayıdır. Diğer taraftan (2.2) ve (2.3) eşitsizliklerinden, $t \in j$ için $(x(t), y(t))$ trajektörünün

$$\frac{d}{c} \leq x(t) \leq u$$

$$\frac{a}{b} \leq y(t) \leq ve^{s\tau}$$

kompakt bölgesinde sınırlanmış olduğu görülür. $x(t)$ bu bölgede azalan bir fonksiyon olduğundan ve $[0, \tau)$ aralığı (u, v) noktasından başlayan trajektörün I.kadranda kalabileceği maksimum aralık olduğundan bu trajektör $t = \tau$ anında $x = d/c$ doğrusunu keser ve II.kadrana geçmek zorundadır. Benzer şekilde aynı trajektörün II.kadrandan III. kadrana, III. kadrandan IV.kadrana ve IV. kadrandan I.kadrana geçtiği gösterilir. Fakat buraya kadar yapılan işlemlerle pozitif bölgedeki bir trajektörün $z_2 = (d/c, a/b)$ denge noktasına spiral şeklinde mi yaklaştığı, bir limit siklüsü etrafında mı hareket ettiği veya spiral şeklinde sonsuza doğru mu gittiği hakkında bir şey söylenemez. Bu nedenle bir "Liapunov fonksiyonu" bulmamız gerekir. Fakat bundan önce, Liapunov fonksiyonu nedir ve bize ne gibi kolaylık sağlayacaktır, bunu açıklamaya çalışalım:

W, \mathbb{R}^n nin açık bir alt kümesi ve $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^1 sınıfından bir fonksiyon olmak üzere, $\tilde{x} \in W$ noktası

$$x' = f(x)$$

dinamik sisteminin bir denge noktası olsun. $U \subset W$ kümesi $\tilde{x} \in W$ noktasının bir komşuluğu olmak üzere, U üzerinde sürekli ve $U - \{\tilde{x}\}$ üzerinde türevlenebilen bir $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, bu fonksiyona bir "Liapunov fonksiyonu" denir.

i. $V(\tilde{x}) = 0$ ve $x \neq \tilde{x}$ için $V(x) > 0$,

ii. $\dot{V}(x) = DV(x)(f(x))$ olmak üzere, $U - \{\tilde{x}\}$ üzerinde, $\dot{V} \leq 0$

$x' = f(x)$ dinamik sistemi için böyle bir Liapunov fonksiyonu bulunabilirse, \tilde{x} denge noktası stabil bir denge noktasıdır.

Şimdi bizim problemimize gerekli olan Liapunov fonksiyonunu bulmalıyız. Bunun için önce

$$H(x,y) = cx - d \log x + by - a \log y ; x > 0, y > 0$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım.

Önce $\dot{H} \leq 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\dot{H}(x,y) = cx' - d \frac{x'}{x} + by' - a \frac{y'}{y}$$

dir. Diğer taraftan,

$$x' = (a - by)x$$

ve

$$y' = (cx - d)y$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \dot{H}(x,y) &= c(ax - bxy) - \frac{d(ax - bxy)}{x} + b(cxy - dy) - \frac{a(cxy - dy)}{y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Yani $\dot{H} \equiv 0$ olur. Tanımladığımız H fonksiyonu, aynı zamanda t ye bağlı tek değişkenli bir fonksiyon olarak düşünülebileceğinden ve (2.1) denkleminin çözüm eğrileri üzerinde $\dot{H} \equiv 0$ olduğundan, bu çözüm eğrileri üzerinde H sabittir.

Şimdi, $z_2 = (d/c, a/b)$ noktasının H fonksiyonu için bir yerel minimum nokta olduğunu gösterelim:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = c - \frac{d}{x}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = b - \frac{a}{y}$$

ve

$$x = \frac{d}{c} \quad \text{için} \quad \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad ,$$

$$y = \frac{a}{b} \quad \text{için} \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

olduğundan, z_2 noktası H fonksiyonunun bir kritik noktasıdır.

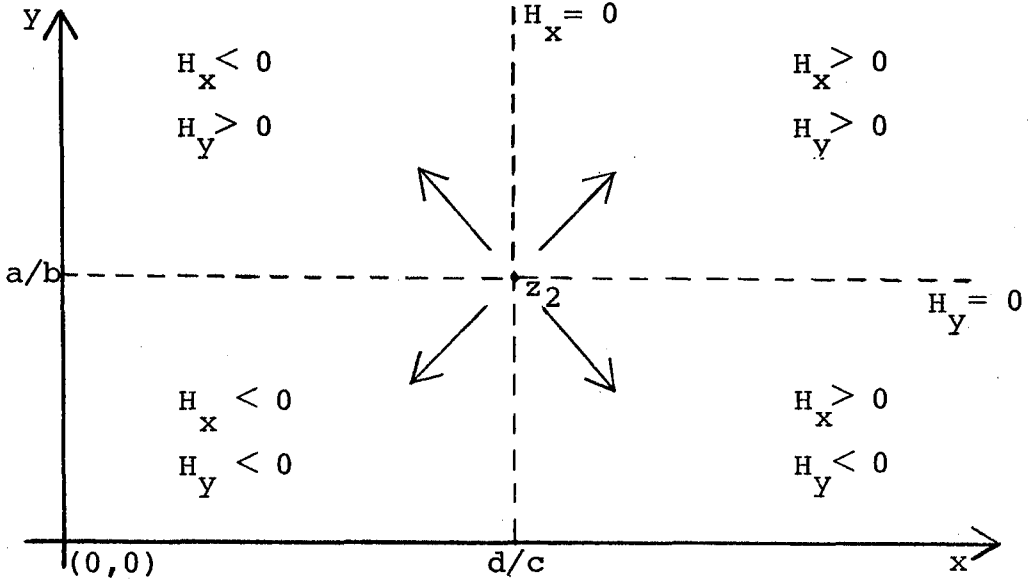
$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right)^2 \\ &= \frac{d}{x^2} \cdot \frac{a}{y^2} - 0 \\ &= \frac{ad}{x^2 y^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

olduğundan $z_2 = (d/c, a/b)$ noktası bir ekstremum noktasıdır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} (d/c, a/b) &= \frac{c^2}{d} \\ &> 0 \end{aligned}$$

eşitsizliği de z_2 noktasının bir yerel minimum noktası olduğunu gösterir. Bizim amacımız z_2 noktasının kesin mutlak minimum noktası olduğunu göstermektir. $z_2 = (d/c, a/b)$ noktası H fonksiyonunun tek ekstremum noktası olduğundan ve H_x , H_y kısmî türevlerinin işaretlerinden dolayı, bu noktanın H fonksiyonu için kesin mutlak minimum bir nokta

olduğu görülür (Şekil 2.2).



Şekil 2.2

$z_2 = (d/c, a/b)$, H'nin kesin mutlak minimum noktası olduğundan, her $(x, y) \neq (d/c, a/b)$ için $H(x, y) > 0$ olur. (Merak edenler için, H fonksiyonuna nasıl ulaşılabileceğini şu şekilde verebiliriz:

$$H(x, y) = F(x) + G(y)$$

olsun. Amacımız istediğimiz şartları sağlayacak şekilde H fonksiyonunu (F ve G fonksiyonlarını) belirlemektir.

Burada x ve y değişkenleri t'nin birer fonksiyonu olarak düşünülürse, aradığımız H fonksiyonu aynı zamanda t'nin bir fonksiyonu olur. Bu durumda, H'nin t'ye göre türevi alınır,

$$\begin{aligned} \dot{H}(x, y) &= \frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) \\ &= \frac{dF}{dx} \cdot x' + \frac{dG}{dy} \cdot y' \end{aligned}$$

bulunur. (2.1) denkleminde,

$$\dot{H}(x,y) = x \frac{dF}{dx} (a-by) + y \frac{dG}{dy} (cx-d)$$

olur. $\dot{H} \equiv 0$ olması için

$$x \frac{dF}{dx} / (cx-d) \equiv y \frac{dG}{dy} / (by-a)$$

olmalıdır. x ve y bağımsız değişkenler olduklarından,

$$x \frac{dF}{dx} / (cx-d) = y \frac{dG}{dy} / (by-a) = \text{sbt.}$$

olmalıdır. Bu sabit sayı l olsun. Bu durumda

$$\frac{dF}{dx} = c - \frac{d}{x} \quad \text{ve} \quad \frac{dG}{dy} = b - \frac{a}{y}$$

olur. Her iki eşitliğin integrali alındığı takdirde,

$$F(x) = cx - d \log x \quad \text{ve} \quad G(y) = by - a \log y$$

olur. Böylece,

$$H(x,y) = cx - d \log x + by - a \log y \quad ; \quad x > 0, \quad y > 0$$

bulunur).

Görüldüğü gibi tanımladığımız H fonksiyonu, $H(z_2) = 0$ olma şartı dışında Liapunov fonksiyonunun diğer şartlarını sağlamaktadır. Bunun için H fonksiyonu yardımıyla $H(z_2) = \alpha$ olmak üzere tanım bölgesi H ile aynı olan

$$H_\ell(x,y) = H(x,y) - \alpha$$

şeklindeki H_ℓ fonksiyonunu tanımlayalım. H_ℓ fonksiyonu aradığımız "Liapunov fonksiyonu" dur. Dolayısıyla $z_2 = (d/c, a/b)$ denge noktası stabil bir denge noktasıdır ve aynı zamanda H_ℓ fonksiyonu hiçbir açık küme üzerinde sabit olmadığından (2.1) dinamik sisteminin düzlemin pozitif bölgesinde limit sıklusları yoktur.

Buraya kadar, z_2 denge noktasının stabil olduğu ve Lotka-Volterra dinamik sisteminin hiçbir limit sıklusunun

olmadığı gösterildi. Aşağıda verilecek teoremle de bu dinamik sistemin trajektörlerinin, bizi ilgilendiren pozitif bölgede birer kapalı orbit olduğu gösterilecektir.

Teorem 2.1: Lotka-Volterra denkleminin düzlemin pozitif bölgesinde, denge noktası hariç her çözümü bir kapalı yörüngedir.

İspat: $u > 0, v > 0$ ve $w \neq z_2 = (d/c, a/b)$ olmak üzere $w = (u, v)$ noktası (2.1) denkleminin $w(t)$ çözüm eğrisi üzerinde olsun. Bu durumda, $\phi_{tn}(w)$ noktaları $x = \frac{d}{c}$ doğrusu üzerinde olacak şekilde bir

$$\dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$$

dizisi vardır.

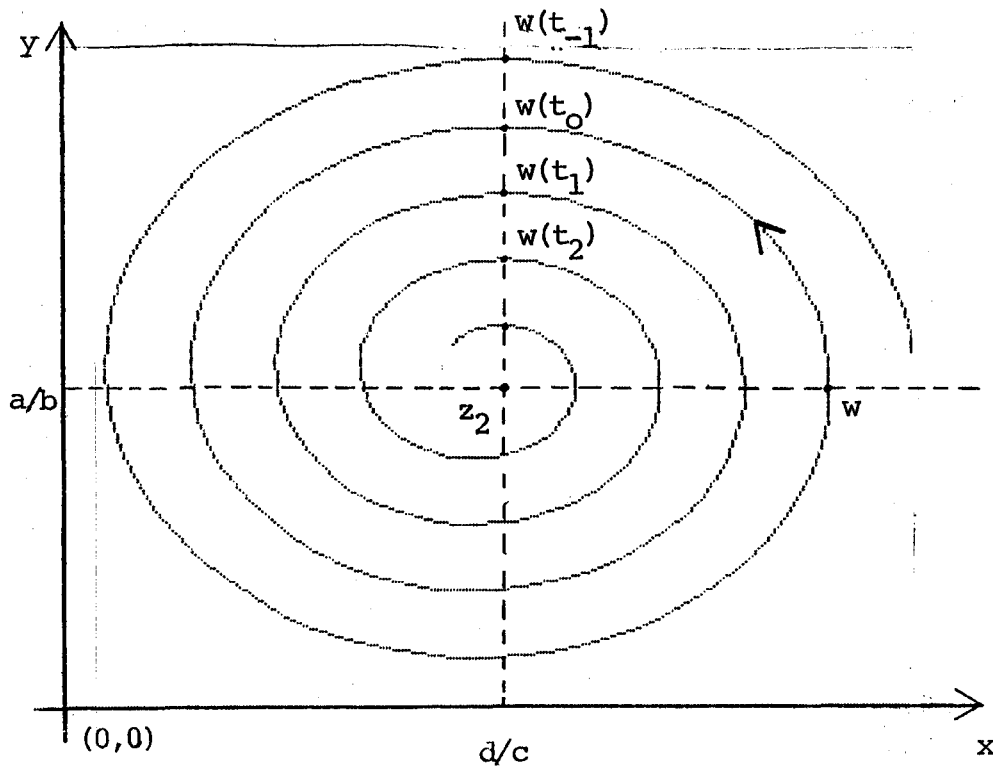
$w(t)$ kapalı bir orbit değilse, $\phi_{tn}(w)$ noktalarının oluşturduğu dizi, $x = \frac{d}{c}$ doğrusu boyunca monotondur ve aynı zamanda bu dinamik sistemde limit sıklusları olmadığından

$$n \rightarrow +\infty \text{ için } \phi_{tn}(w) \rightarrow z_2$$

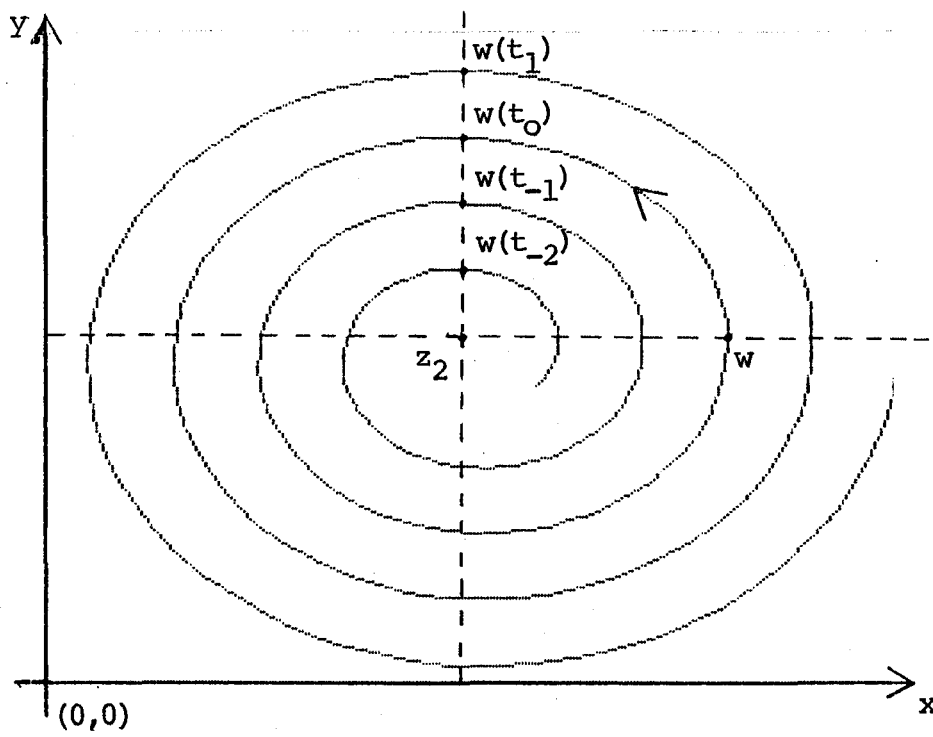
veya

$$n \rightarrow -\infty \text{ için } \phi_{tn}(w) \rightarrow z_2$$

dir. (Şekil 2.3 ve Şekil 2.4). Diğer taraftan H fonksiyonu $w(t)$ trajektörü üzerinde sabit olduğundan $H(w) = H(z_2)$ dir. Fakat bu son bulunan eşitlik $H(z_2)$ nin kesin mutlak minimum olması ile çelişir. O halde $w(t)$ trajektörü bir kapalı orbittir.



Şekil 2.3



Şekil 2.4

Bu teoremin sonucu olarak, $x(0) \neq 0$, $y(0) \neq 0$ (bunun anlamı x ve y türlerinin başlangıçta belli bir çoğunlukta olması) ve $(x(0), y(0)) \neq z_2$ olmak üzere x ve y türlerinin dairesel bir şekilde hareket ettiklerini, bir başka deyişle, x türü (av) kendini ve y türünü (avcı) arttırmaya çalışırken, y türünün hem kendini hem de x türünü azaltmaya çalıştığı halde, bu etkileşim sonucunda her iki türünde yokolmadan varlıklarını sürdürdüklerini söyleyebiliriz:

Lotka-Volterra dinamik sisteminin vektör alanı hakkında aşağıdaki şekil yardımıyla bir fikir edinilebilir: Bu şekli belirlerken aşağıdaki yol izlenir.

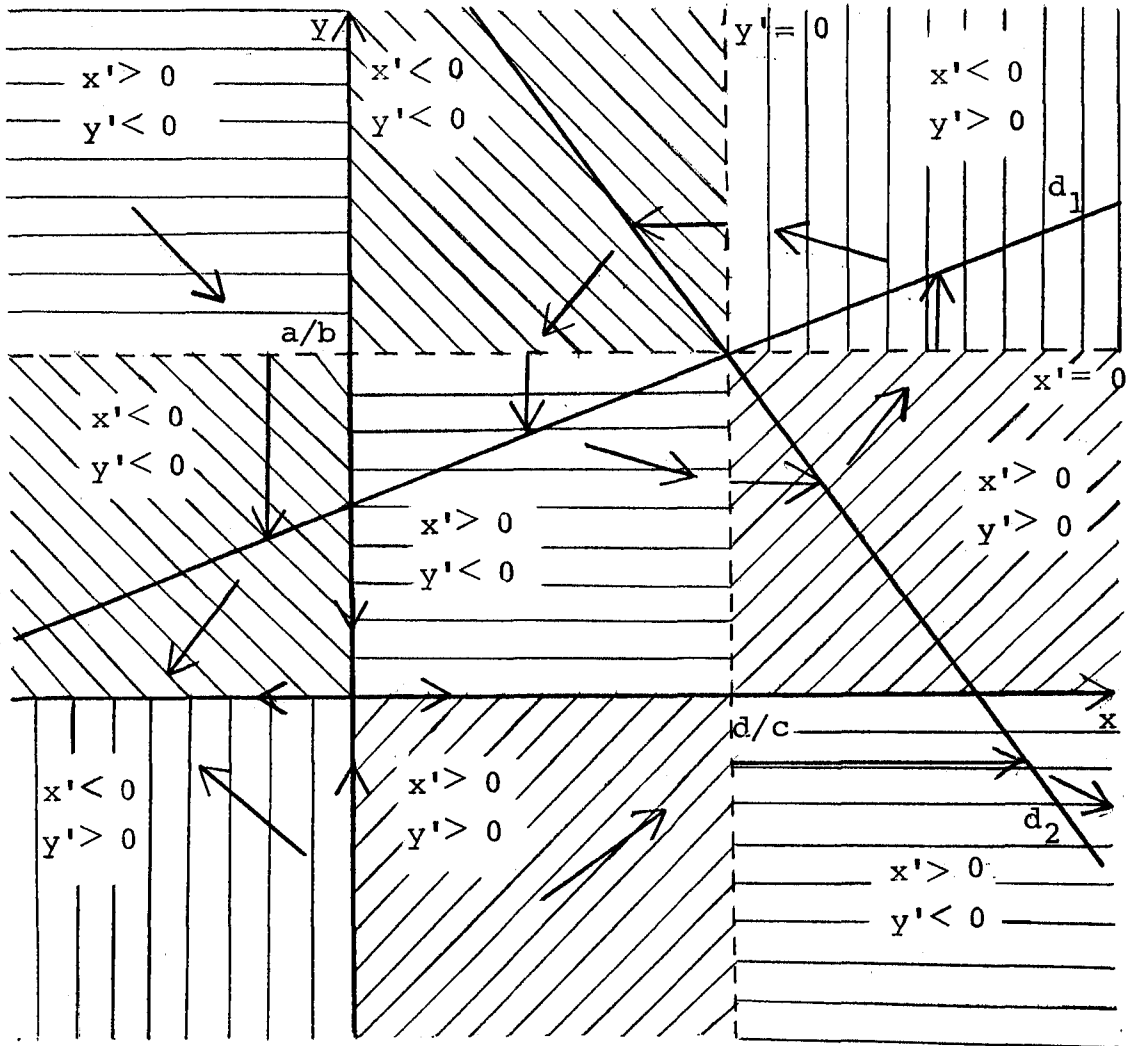
Önce $x = 0$, $x = \frac{d}{c}$, $y = 0$ ve $y = \frac{a}{b}$ doğrularının ayırdığı dokuz bölgede x' ve y' nün işaretleri bulunur. Daha sonra,

$$y = \frac{ac}{b} x + \frac{a}{b} (1-d) \quad (d_1 \text{ doğrusu})$$

ve

$$y = -\frac{c}{bd} x + \frac{(a+1)}{b} \quad (d_2 \text{ doğrusu})$$

doğruları çizilir. Bunlar yardımıyla da vektörlerin yönleri ve uzunlukları belirlenir (Şekil 2.5).



Şekil 2.5

Bu bölümde son olarak, Lotka-Volterra dinamik sistemine bir örnek verilecektir. Bu örnekte, aşağıda başlangıç değerleri ve Çizelge 2.1 de sayısal bilgileri verilen bazı trajektörler, nümerik metodlarla bilgisayara çizdirilmiştir. (Bu çizim ve bundan sonraki faz portresi çizimleri için Koçak, 1986 da verilen "Phaser" programını kullandık.)

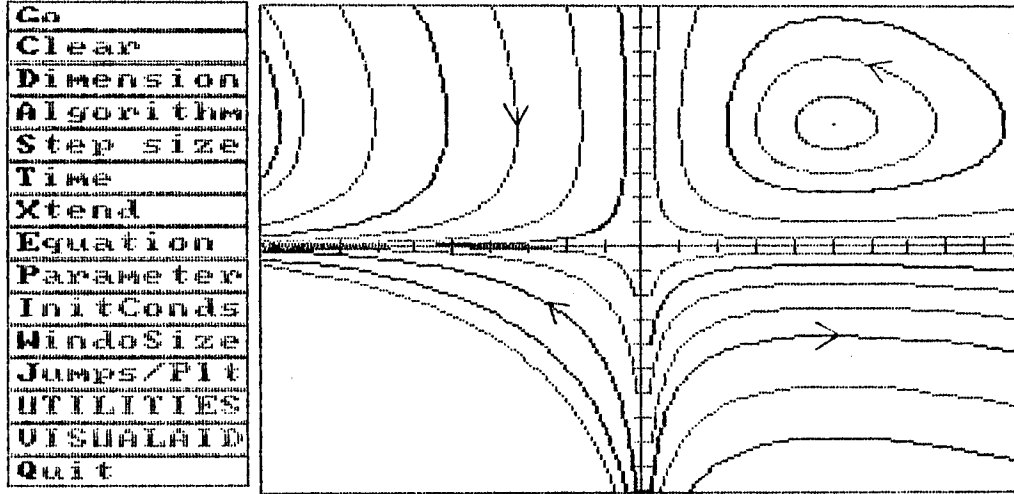
Başlangıç değerleri:

I. Bölge: $(5, 5), (5, 4), (5, 3), (5, 2.2), (0.4, 10), (1.5, 10)$

- II. Bölge: $(-10,10), (-8,10), (-6,10), (-4,10), (-10,8), (-0.6,10)$
 III. Bölge: $(-0.2,-10), (-0.2,-6), (-0.2,-2), (-0.5,-10), (-0.8,-10)$
 IV. Bölge: $(0.2,-10), (0.2,-8), (0.2,-4), (0.2,-2), (0.5,-10), (1.2,-10)$

Çizelge 2.1:

Parametre (Parameter) a,b,c,d	Zaman (Time)	İncelenen Düzlem Parçası (Window size)	Adım Uzunluğu (Stepsize)
5,1,1,5	0 → 1.4	x:-10 → 10 y:-10 → 10	0.05



Şekil 2.6

3. İKİLİ VOLTERRA ETKİLEŞİMLERİNİN SINIFLANDIRILMASI

$$x' = (a-by)x$$

$$y' = (cx-d)y$$

Lotka-Volterra denkleminde, türlerin kendilerine ve bir birlerine olan etkilerinin mahiyeti nedeniyle a, b, c, d katsayıları pozitiftir. Bu katsayıların pozitif olma koşulunun kaldırılması iki tür arasındaki başka tipten etkileşimlerin modellenmesine de imkân verir. Katsayıların bütün işaret olasılıkları gözönüne alınırsa, aşağıdaki on-altı durum ortaya çıkar:

1.DURUM: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ ve $d > 0$ olduğunda ortaya çıkan etkileşimdir (Lotka-Volterra dinamik sistemi). Bu durumda x türü hem kendini hem de y türünü artırmaktadır. y türü ise hem kendini, hem de x türünü azaltmaktadır.

2.DURUM: $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$ ve $d < 0$ olduğunda ortaya çıkan etkileşimdir. Bu durumda x türü hem kendini hem de y türünü azaltmaktadır. y türü ise hem kendini hem de x türünü artırmaktadır.

3.DURUM: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ ve $d < 0$ olduğunda ortaya çıkan etkileşimdir. Bu durumda x türü hem kendini hem de y türünü artırmaktadır. y türü ise kendini artırırken x türünü azaltmaktadır.

4.DURUM: $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$ ve $d > 0$ olduğunda ortaya çıkan etkileşimdir. Bu durumda x türü hem kendini hem de y türünü azaltmaktadır. y türü ise kendini azaltırken x türünü artırmaktadır.

5.DURUM: $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$ ve $d < 0$ olduğunda ortaya çıkan etkileşimdir. Bu durumda x ve y türleri kendilerini

arttırırken birbirlerini azaltmaktadırlar.

6.DURUM: $a < 0, b < 0, c > 0$ ve $d > 0$ olduğunda ortaya çıkan etkileşimdir. Bu durumda x ve y türleri kendilerini azaltırken birbirlerini arttırmaktadırlar.

7.DURUM: $a > 0, b < 0, c < 0$ ve $d < 0$ olduğunda ortaya çıkan etkileşimdir. Bu durumda x türü kendini artırırken y türünü azaltmaktadır. y türü ise hem kendini hem de x türünü arttırmaktadır.

8.DURUM: $a < 0, b > 0, c > 0$ ve $d > 0$ olduğunda ortaya çıkan etkileşimdir. Bu durumda x türü kendini azaltırken, y türünü arttırmaktadır. y türü ise hem kendini hem de x türünü azaltmaktadır.

9.DURUM: $a > 0, b < 0, c > 0$ ve $d > 0$ olduğunda ortaya çıkan etkileşimdir. Bu durumda x türü hem kendini hem de y türünü arttırmaktadır. y türü ise kendini artırırken x türünü azaltmaktadır.

10.DURUM: $a < 0, b > 0, c < 0$ ve $d < 0$ olduğunda ortaya çıkan etkileşimdir. Bu durumda x türü hem kendini hem de y türünü azaltmaktadır. y türü ise, kendini artırırken x türünü azaltmaktadır.

11.DURUM: $a > 0, b < 0, c < 0$ ve $d > 0$ olduğunda ortaya çıkan etkileşimdir. Bu durumda x ve y türleri kendilerini artırırken, birbirlerini azaltmaktadırlar.

12.DURUM: $a < 0, b > 0, c > 0$ ve $d < 0$ olduğunda ortaya çıkan etkileşimdir. Bu durumda, x türü kendini artırırken y türünü azalttığı halde y türü kendini azaltırken, x türünü arttırmaktadır.

13.DURUM: $a > 0, b > 0, c < 0$ ve $d > 0$ olduğunda ortaya

çıkan etkileşimdir. Bu durumda x türü kendini artırırken y türünü azaltmaktadır. y türü ise hem kendini hem de x türünü azaltmaktadır.

14.DURUM: $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$ ve $d < 0$ olduğunda ortaya çıkan etkileşimdir. Bu durumda x türü kendini azaltırken y türünü artırmaktadır. y hem kendini hem de x türünü artırmaktadır.

15.DURUM: $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ ve $d < 0$ olduğunda ortaya çıkan etkileşimdir. Bu durumda x ve y türleri hem kendilerini hem de birbirlerini artırmaktadırlar.

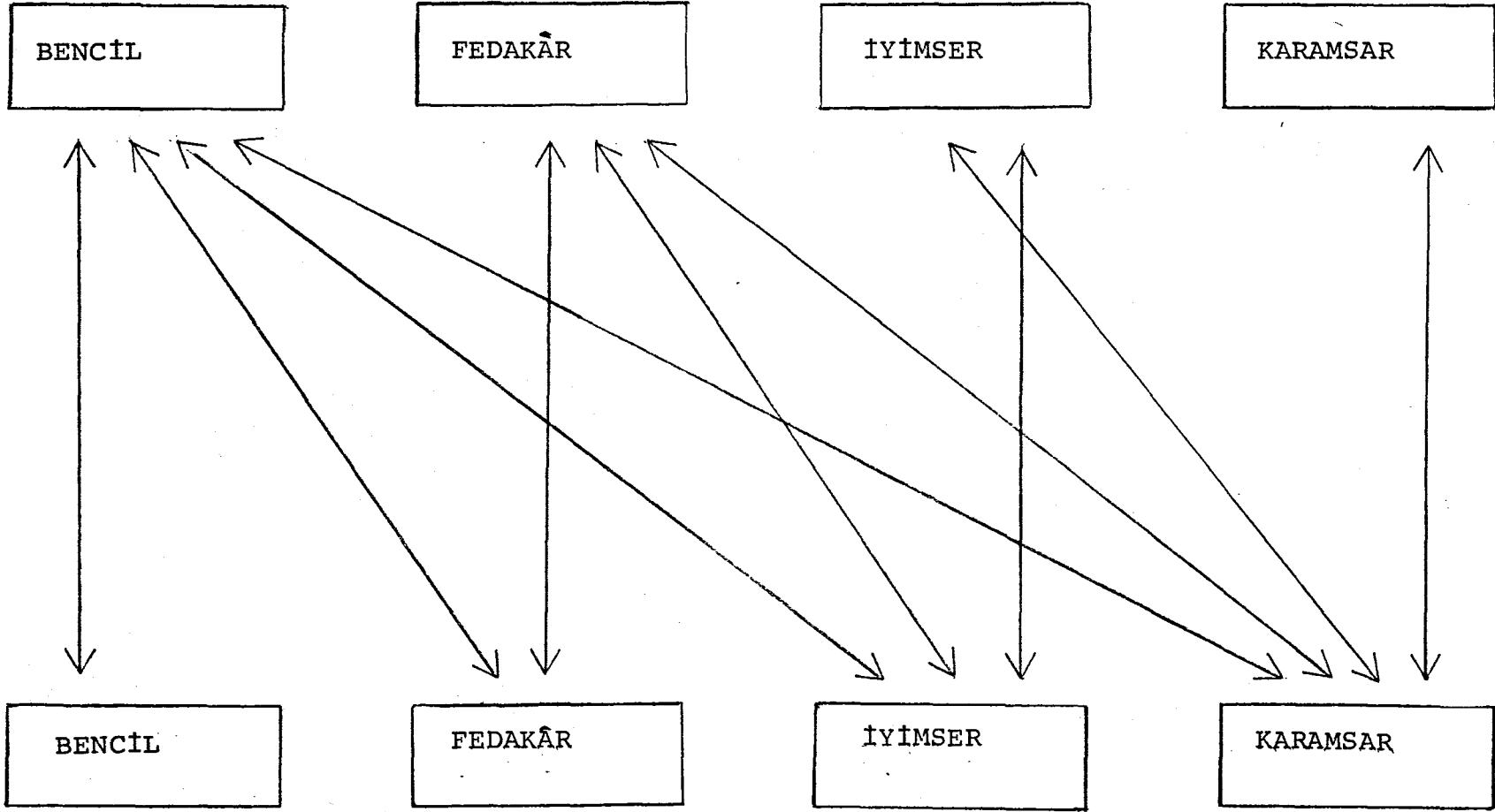
16.DURUM: $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$ ve $d > 0$ olduğunda ortaya çıkan etkileşimdir. Bu durumda x ve y türleri hem kendilerini hem de birbirlerini azaltmaktadırlar.

Yukarıda verilen etkileşimler sonucunda, aşağıda belirtilen dört tip (kişilik, davranış biçimi) ortaya çıkmıştır.

1. "Bencil" Tip: Kendini artırırken diğer türü azaltma yönünde etkisi olan tür.
2. "Fedakâr" Tip: Kendini azaltırken diğer türü artırma yönünde etkisi olan tür.
3. "İyimser" Tip: Hem kendini hem de diğer türü artırma yönünde etkisi olan tür.
4. "Karamsar" Tip: Hem kendini hem de diğer türü azaltma yönünde etkisi olan tür.

Görüldüğü gibi onaltı durumdaki etkileşimlerin çoğu birbirinin ya simetriği veya tam tersidir. (Yani, biri diğerinden ya x ve y nin rollerinin değiştirilmesi ya da katsayıların hepsinin işaretlerinin değiştirilmesi suretiyle elde edilir.) Olaya bu açıdan bakacak olursak aşağıdaki şema yardımıyla etkileşim tiplerinin incelenmesi daha kolay olacaktır. x ve y nin rollerinin değiştirilmesi ne matematiksel açıdan ne de uygulama açısından önem taşıdığından yukarıdaki onaltı etkileşimi önce aşağıda görülen on duruma indirgeyebiliriz (Çizelge 3.1).

Çizelge 3.1



Bu on durumdan dört tanesi diğer dört tanesinden katsayıların tamamının işaretleri değiştirilerek elde edilebilir. (bu durumlara birbirlerinin tersi durumlar diyeceğiz.) Bu durum çiftleri aşağıdaki çizelgede görüldüğü gibidir.

Çizelge 3.2: İşaret Değişikliği İle Birbirine Dönüşen Etkileşimler

(Bencil \leftrightarrow Bencil) \sim (Fedakâr \leftrightarrow Fedakâr)
(İyimser \leftrightarrow İyimser) \sim (Karamsar \leftrightarrow Karamsar)
(İyimser \leftrightarrow Fedakâr) \sim (Karamsar \leftrightarrow Bencil)
(İyimser \leftrightarrow Bencil) \sim (Karamsar \leftrightarrow Fedakâr)

Biri diğerinden işaret değişikliği ile elde edilen iki durum uygulama açısından tamamen farklı iki durum olmakla birlikte, bunlara matematiksel açıdan esas itibariyle aynı durumlar gözüyle bakılabilir. Çünkü bunlardan birinin faz portresi elde edildiğinde diğerinin faz portresi, bu faz portresinde trajektörlerin yönlerini değiştirmek suretiyle elde edilebilir. Bu nedenle matematiksel açıdan yukarıdaki on durumdan sadece aşağıdaki altı durumu incelemek yeterli olacaktır. Bunları Çizelge 3.3 de veriyoruz:

Çizelge 3.3:

1.DURUM:	Bencil	\leftrightarrow	Bencil
2.DURUM:	Bencil	\leftrightarrow	Fedakâr
3.DURUM:	İyimser	\leftrightarrow	Bencil
4.DURUM:	İyimser	\leftrightarrow	Fedakâr
5.DURUM:	İyimser	\leftrightarrow	İyimser
6.DURUM:	İyimser	\leftrightarrow	Karamsar

Şimdi bu durumları inceleyelim:

$$x' = (a-by)x$$

$$y' = (cx-d)y$$

sisteminin denge noktaları $z_1 = (0,0)$ ve $z_2 = (d/c, a/b)$ ve bu noktalara karşılık gelen türev matrisleri de sırasıyla,

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleridir.

1.DURUM: Bu durumda iki bencil tipin etkileşimi sözkonusudur. Bu etkileşimde $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$ ve $d < 0$ olduğundan $z_2 = (d/c, a/b)$ denge noktası I.bölgededir.

$z_1 = (0,0)$ denge noktasında özdeğerler,

$$\alpha_1 = a \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = -d$$

olduğundan özdeğerlerin reel kısımları pozitiftir ve bu nokta bir "kaynak" noktasıdır. $z_2 = (d/c, a/b)$ denge noktasında ise özdeğerler,

$$\beta_1 = \sqrt{ad} \quad \text{ve} \quad \beta_2 = -\sqrt{ad}$$

olduğundan özdeğerler ters işaretlidir ve bu nokta bir "eyer" noktasıdır. Bu sistemde z_1 ve z_2 noktaları stabil değildir. (Bu etkileşimin tersi olan Fedakâr \leftrightarrow Fedakâr etkileşiminde $z_1 = (0,0)$ denge noktası, özdeğerlerin reel kısımları negatif olduğundan bir "kuyu" noktasıdır.

$z_2 = (d/c, a/b)$ noktasında ise yine özdeğerlerin reel kısımları ters işaretli olduğundan, bu nokta bir "eyer" noktasıdır. Dolayısıyla z_1 noktası stabil, z_2 noktası ise stabil değildir.)

Şekil 3.1 bize bu sistemin vektör alanı hakkında bilgi verebilir. Bu şekil belirlenirken, x' ve y' nün işaretleri, $x = 0$, $x = \frac{d}{c}$, $y = 0$ ve $y = \frac{a}{b}$ doğrularınının

Bu etkileşimde bizi ilgilendiren pozitif bölgenin bazı kısımlarında başlayan yörüngelerin akıbetlerini hemen belirlemek mümkündür.

$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in I$. Bölge olsun ve bu noktadan başlayan trajektörün maksimal tanım aralığını $[0, \tau)$ ile göstereyim (burada $0 < \tau \leq \infty$ dur). Eğer (x_0, y_0) başlangıç noktası II. kadranda ise, $y_0 > \frac{a}{b}$ ve y bu kadranda artan olduğundan $a-by \leq -k < 0$ olacak şekilde bir k sayısı vardır ve $x' = (a-by)x$ eşitliğinden $x' \leq (-k)x$ olur. Dolayısıyla $t \rightarrow \tau$ için $x \rightarrow 0$ dır. Diğer taraftan yine II.kadranda $x_0 < \frac{d}{c}$ ve x azalan olduğundan $cx-d \geq \ell > 0$ olacak şekilde sayısı vardır ve $y' = (cx-d)y$ eşitliğinden $y' \geq \ell y$ olur. Bu nedenle $t \rightarrow \tau$ için $y \rightarrow \infty$ dur. Eğer (x_0, y_0) başlangıç anında IV.kadranda ise, $y_0 < \frac{a}{b}$ ve y bu bölgede azalan olduğundan $a-by \geq k > 0$ olacak şekilde bir k sayısı vardır. Benzer şekilde $x_0 > \frac{d}{c}$ ve x artan olduğundan $cx-d \leq -\ell < 0$ olacak şekilde bir sayısı vardır. Bu nedenle $x' \geq kx$ ve $y' \leq (-\ell)y$ dir. Buradan $t \rightarrow \tau$ için $x \rightarrow \infty$ ve $y \rightarrow 0$ olur. (x_0, y_0) noktası I. veya III. kadranda olduğu takdirde, bu kadrandaki ayırıcı trajektörlerin (eyer noktasına yakınsayan trajektörlerin) varlığından dolayı, benzer sınırlamaları yapmak mümkün olmamıştır. Ayrıca trajektörlerin analitik ifadelerinin bulunması ilginç olacaktır.

Bu sisteme, aşağıda başlangıç değerleri ve diğer sayısal bilgileri verilen (Çizelge 3.4) bir örnek verilmiştir (Şekil 3.2).

Başlangıç Değerleri:

I. Bölge: $(5,3), (0.2,0.2), (1,0.2), (0.5,0.2), (0.6,0.2), (0.8,0.2),$
 $(0.8,0.228), (4.9,3.1), (5.1,2.9), (10,10), (10,5), (10,6.6),$
 $(10,7.6), (10,8.5), (10,7.14).$

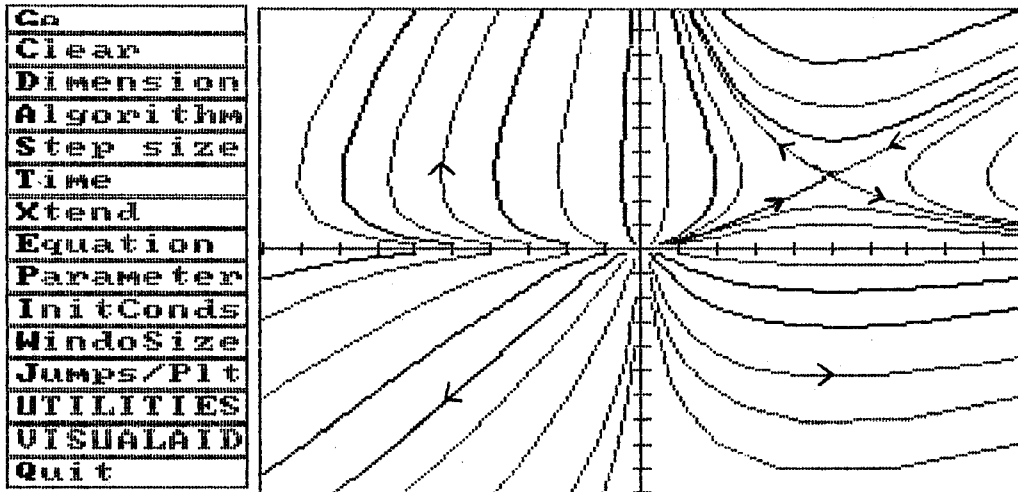
II. Bölge: $(-0.2,0.2), (-1,0.2), (-2,0.2), (-3,0.2), (-4,0.2), (-5,0.2),$
 $(-6,0.2).$

III. Bölge: $(-0.5,-0.2), (-0.5,-0.5), (-0.2,-0.5), (-1,-0.2), (-2,-0.2),$
 $(-4,-0.2), (-6,-0.2), (-0.2,-2), (-0.2,-4).$

IV. Bölge: $(0.2,-0.2), (0.2,-2.2), (1,-0.2), (0.4,-0.2), (0.2,-1.2),$
 $(0.2,-0.6).$

Çizelge 3.4:

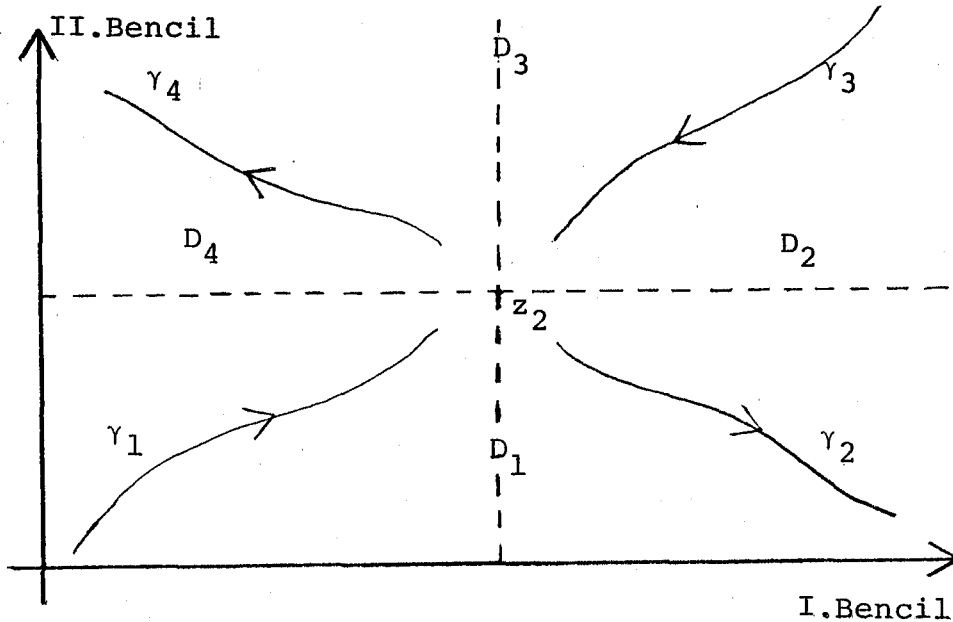
Parameter a,b,c,d	Time	Window size	Stepsize
3,1,-1,5	0 → 1.5	x:-10 → 10 y:-10 → 10	0.05



Şekil 3.2

Uygulamada pozitif bölgedeki davranışlar anlamlı olduğundan Şekil 3.3 de, pozitif bölgedeki yörüngelerin davranışını şöyle yorumlayabiliriz:

Bu sistemin pozitif bölgedeki faz portresinde, γ_1 , γ_2 , γ_3 ve γ_4 diyeceğimiz dört tane kritik trajektör vardır. Bu trajektörlerin ayırdığı dört bölgeye D_1 , D_2 , D_3 ve D_4 dersek (Şekil 3.3), bu bölgelere göre iki bencil tipin galibiyeti değişebilir. Başlangıç durumu D_1 veya D_2 bölgesinde ise, I.Bencil tür galip gelir, D_3 veya D_4 bölgesinde ise II.Bencil tür galip gelir. Aynı şekilde iki türün başlangıç noktaları γ_2 trajektörü üzerinde ise II.Bencil tür yok olur γ_4 trajektörü üzerinde I.Bencil tür yok olur. Diğer taraftan iki türün başlangıç noktaları γ_1 veya γ_3 üzerinde ise z_2 denge noktasına doğru hareket ederler.



Şekil 3.3

Fakat γ_1 ve γ_3 trajektörleri üzerinde ilerlerlerken, dışarıdan gelecek ufak bir etki ile türlerin akıbeti tamamen

değişir. Ya I.bencil tür varlığını sürdürür diğer tür yokolmaya mahkum olur, ya da tam tersi olur. Gördüğünüz gibi iki bencil türün birarada yaşamaya hiç niyetleri yok (!)

2. DURUM: Bu durumda Bencil ile Fedakâr tiplerin etkileşimi söz konusudur. Bu etkileşimde $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$ ve $d > 0$ olduğundan $z_2 = (d/c, a/b)$ denge noktası III.Bölgededir. $z_1 = (0,0)$ denge noktasında özdeğerler

$$\alpha_1 = a \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = -d$$

olduğundan bu denge noktası bir "eyer" noktasıdır. $z_2 = (d/c, a/b)$ denge noktasında ise özdeğerler

$$\beta_1 = i \sqrt{ad} \quad \text{ve} \quad \beta_2 = -i \sqrt{ad}$$

olduğundan, özdeğerlerin reel kısımları sıfırdır. Bu nedenle bu noktanın stabilliği hakkında türev matrisi yardımıyla birşey söyleyemeyiz. Fakat burada da Lotka-Volterra sistemini incelerken izlediğimiz yol uygulanırsa, bu noktanın stabil bir nokta olduğu ve bu etkileşimin III.Bölgedeki trajektörlerinin birer kapalı orbit olduğu görülür. Bu sistemin vektör alanı hakkında bilgi edinmek için de aşağıdaki şekli veriyoruz (Şekil 3.4). Bu şekil belirlenirken, x' ve y' nün işaretleri dokuz bölgede incelenerek,

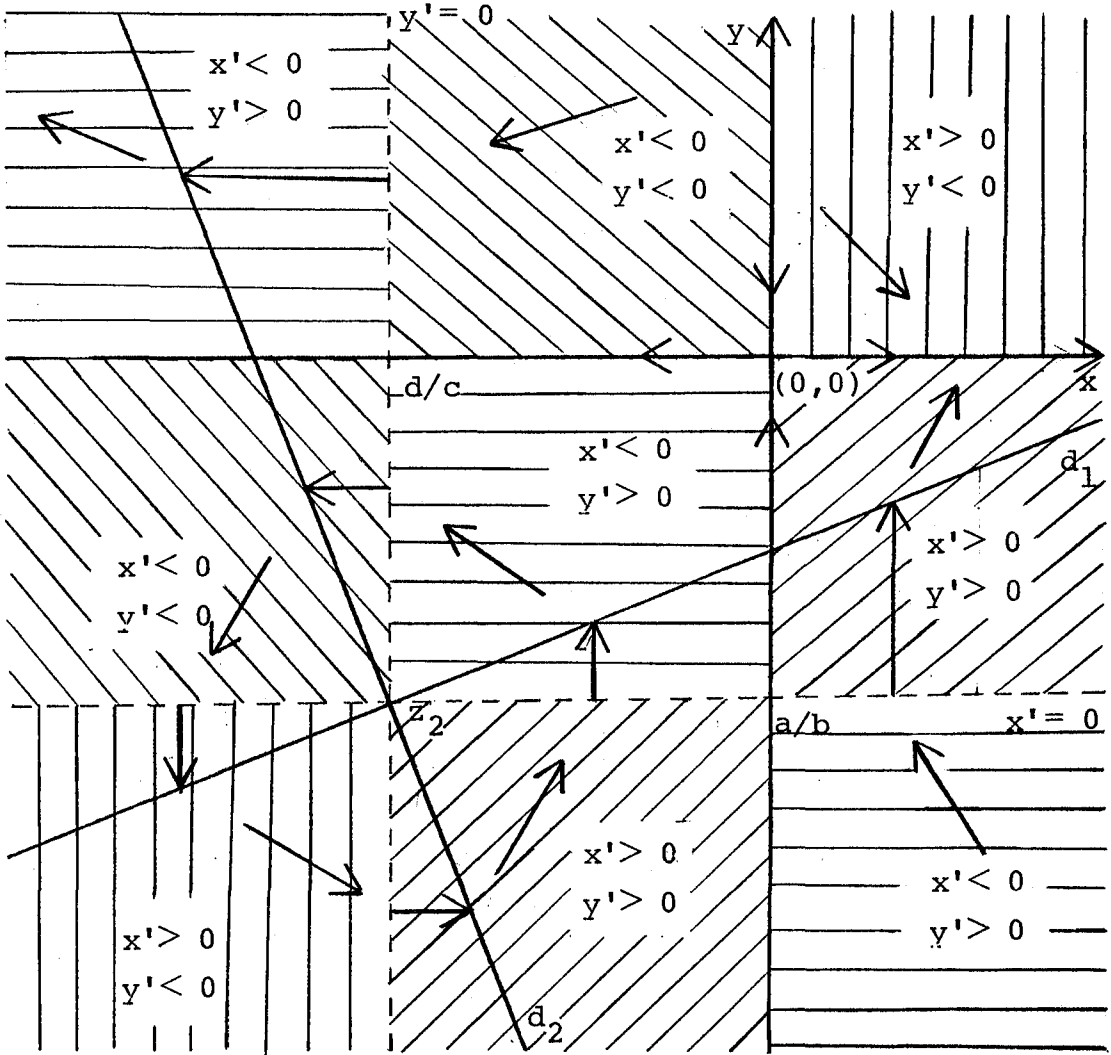
$$y = \frac{ac}{b} x + \frac{a}{b} (1-d) \quad (d_1 \text{ doğrusu})$$

ve

$$y = -\frac{c}{bd} x + \frac{(a+1)}{b} \quad (d_2 \text{ doğrusu})$$

doğrularından faydalanılmıştır.

(Bu durumda pozitif bölgedeki bir (x_0, y_0) başlangıç noktasından başlayan trajektör için $x' \geq ax$ ve $y' \leq (-d)y$ olur. Bundan dolayı $t \rightarrow \tau$ için $x \rightarrow \infty$ ve $y \rightarrow 0$ olur.)



Şekil 3.4

Aşağıda bu sisteme bir örnek verilmiştir (Şekil 3.5).
Örnekle ilgili sayısal bilgiler Çizelge 3.5 de verilmiştir.

Başlangıç Değerleri

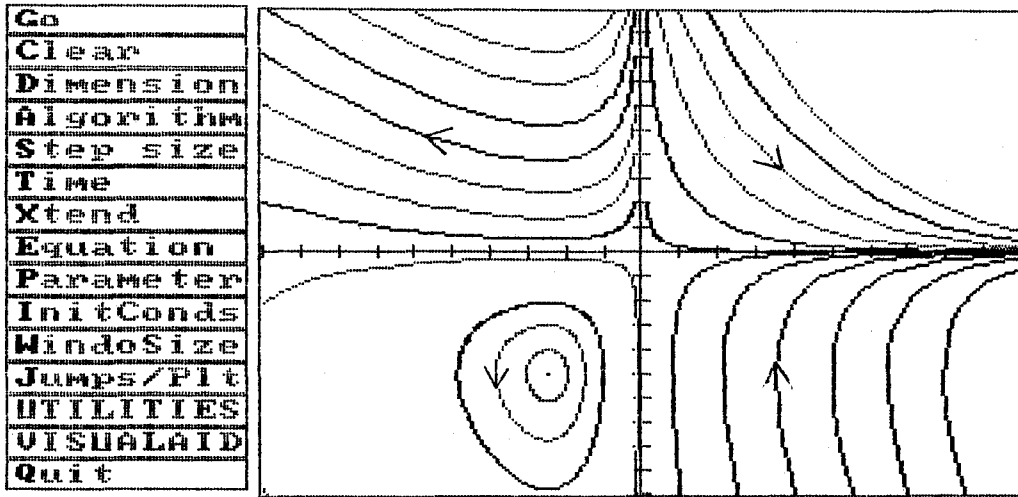
- I. Bölge : $(0.1, 10), (0.4, 10), (1, 10), (1.7, 10), (2.5, 10), (0.1, 2)$
 II. Bölge : $(-0.2, 10), (-0.4, 10), (-0.7, 10), (-0.2, 8), (-0.2, 6),$
 $(-0.2, 4), (-0.2, 2)$

III. Bölge : $(-2.5,-5), (-2.5,-4), (-2.5,-3), (-2.5,-2.1), (-0.2,-10)$

IV. Bölge : $(1,-10), (2.5,-10), (4,-10), (5.5,-10), (7,-10), (8.5,-10)$

Çizelge 3.5

Parameter a,b,c,d	Time	Window size	Stepsize
5,-1,-2,5	0 → 1.3	x:-10 → 10 y:-10 → 10	0.05



Şekil 3.5

Şekil 3.5'deki faz portresinden de görüldüğü gibi, pozitif bölgedeki fedakâr tip ile bencil tipin etkileşiminde bu iki tipin başlangıç noktaları nerede olursa olsunlar sonuçta bencil tür fedakâr türü yoketmektedir.

3.DURUM: Bu durumda iyimser ile bencil türlerin etkileşimi söz konusudur. Bu etkileşimde $a > 0, b > 0, c > 0$ ve $d < 0$ olduğundan $z_2 = (d/c, a/b)$ denge noktası II.bölgededir. $z_1 = (0, 0)$ noktasında özdeğerler,

$$\alpha_1 = a \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = -d$$

olduğundan, bu sistemde özdeğerlerin reel kısımları pozitifdir ($a > 0$ ve $d < 0$ ise $-d > 0$) ve bu nokta bir "kaynak" noktasıdır. $z_2 = (d/c, a/b)$ noktasında ise özdeğerler,

$$\beta_1 = \sqrt{ad} \quad \text{ve} \quad \beta_2 = -\sqrt{ad}$$

olduğundan özdeğerlerin reel kısımları ters işaretlidir ve bu nokta bir "eyer" noktasıdır. Bu sistemde z_1 ve z_2 denge noktaları stabil değildir. (Bu etkileşimin tersi olan karamsar \leftrightarrow fedakâr etkileşiminde $z_1 = (0,0)$ denge noktası, özdeğerlerin reel kısımları negatif olduğundan bir "kuyu" noktasıdır. $z_2 = (d/c, a/b)$ denge noktasında ise yine özdeğerlerin reel kısımları ters işaretli olduğundan, bu noktada bir "eyer" noktasıdır. Dolayısıyla z_1 noktası stabil z_2 noktası ise stabil değildir.)

Şekil 3.6 bize bu sistemin vektör alanı hakkında bilgi verir. Bu şekil belirlenirken de x' ve y' nün işaretleri tesbit edilip,

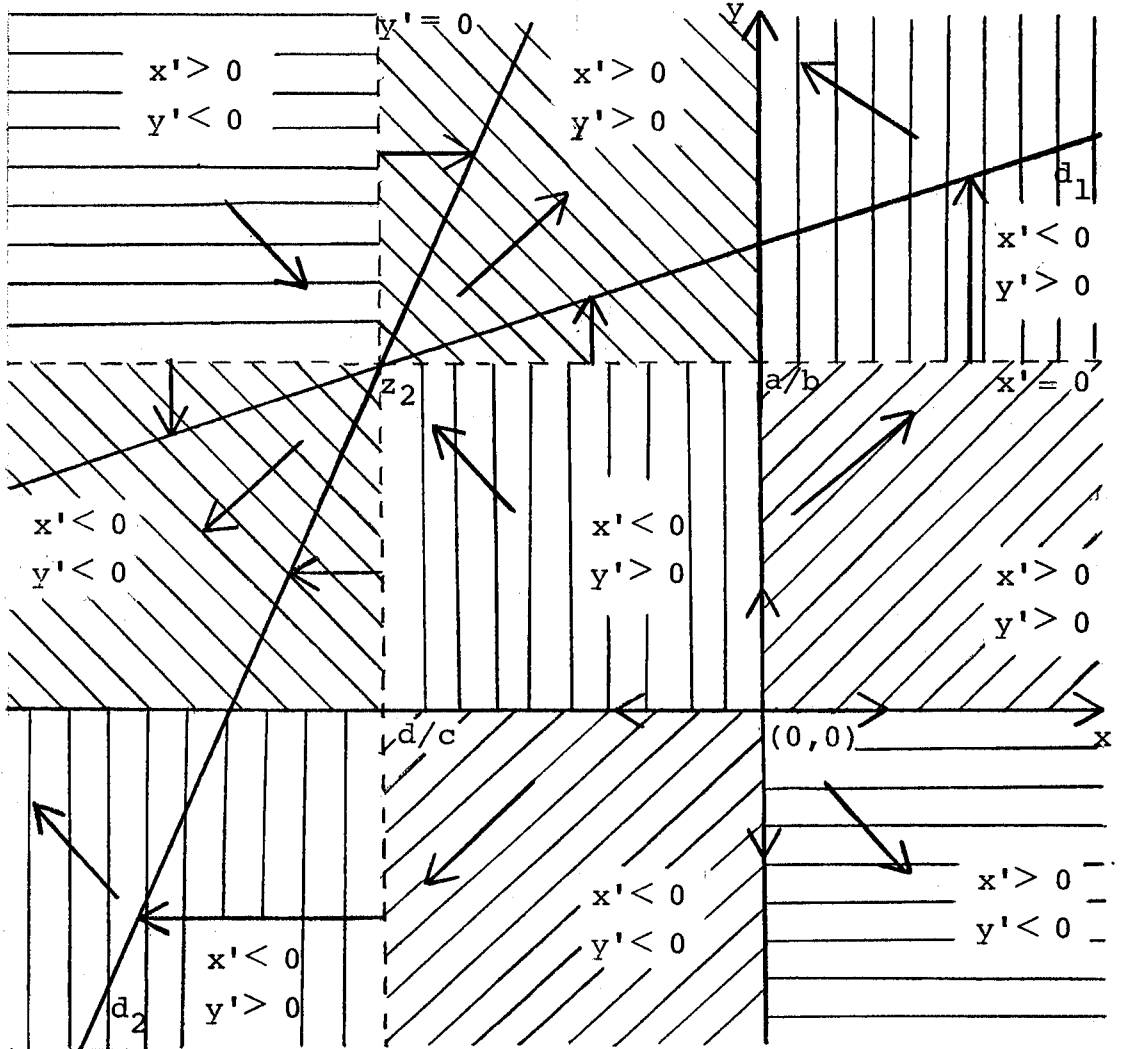
$$y = \frac{ac}{b} x + \frac{a}{b} (1-d) \quad (d_1 \text{ doğrusu})$$

ve

$$y = -\frac{c}{bd} x + \frac{(a+1)}{b} \quad (d_2 \text{ doğrusu})$$

doğrularından yararlanılmıştır.

(Bu durumda pozitif bölgedeki bir (x_0, y_0) başlangıç noktasında başlayan bir trajektör için, $(a-by) \leq -k < 0$ olacak şekilde bir k sayısı bulunabilir ve $x' = (a-by)x$ olduğundan $x \leq (-k)x$ bulunur. Buradan da $t \rightarrow \tau$ için $x \rightarrow 0$ olur. Diğer taraftan $y' \geq (-d)y$ olduğundan $t \rightarrow \tau$ için $y \rightarrow \infty$ olur.)



Şekil 3.6

Yukarıda incelediğimiz sisteme aşağıda başlangıç değerleri ve Çizelge 3.6 da diğer sayısal bilgileri verilen bir örnek verilmiştir (Şekil 3.7).

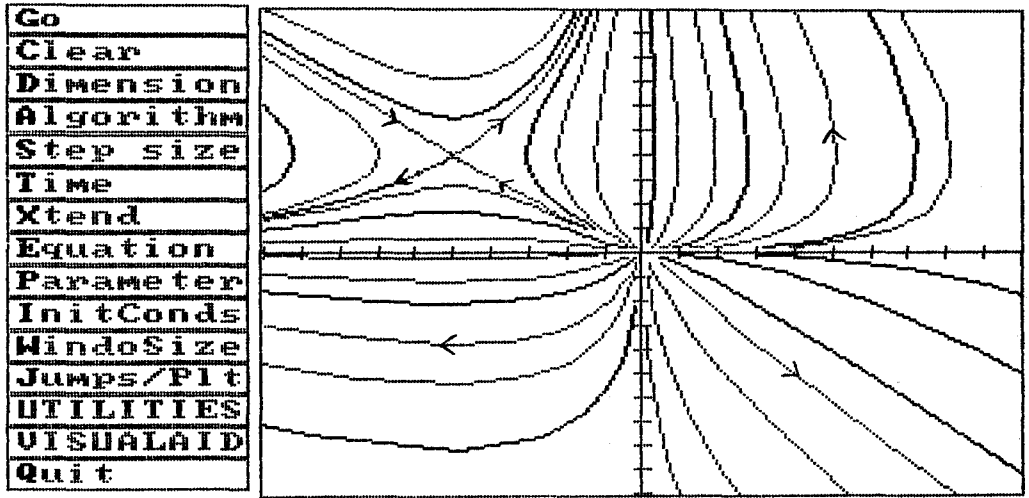
Başlangıç Değerleri:

I. Bölge : $(0.1, 0.4), (0.2, 0.2), (0.5, 0.2), (0.8, 0.2), (1.2, 0.2),$
 $(1.9, 0.2), (2.5, 0.2), (3.2, 0.2), (3.8, 0.2)$

- II. Bölge : $(-5,4), (-0.2,0.2), (-1,0.2), (-0.5,0.2), (-0.3,0.2), (-10,10),$
 $(-10,9), (-4.9,4.1), (-10,8), (-5.1,3.9), (-10,8.59),$
 $(-1.49,1), (-1.3,1), (-1.6,1), (-10,6).$
- III. Bölge : $(-0.2,-0.2), (-1.2,-0.1), (-0.4,-0.2), (-0.2,-2.2), (-0.2,-0.5),$
 $(-0.2,-1).$
- IV. Bölge : $(0.5,-0.2), (0.5,-0.5), (0.2,-0.5), (1,-0.1), (0.1,-1), (0.1,-3),$
 $(3,-0.1).$

Çizelge 3.6:

Parameter a,b,c,d	Time	Window size	Stepsize
4,1,1,-5	0 → 1.1	x: -10 → 10 y: -10 → 10	0.05



Şekil 3.7

Bu etkileşimin pozitif bölgedeki faz portresine baktığımızda, iyimser tür ile bencil türün belli bir zamana kadar nüfuslarını artırarak yaşadıklarını fakat daha sonra bencil türün iyimser türü yokettiğini söyleyebiliriz.

4.DURUM: Bu durumda iyimser ile fedakâr tiplerin etkileşimi söz konusudur. Bu etkileşimde $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ ve $d > 0$ olduğundan $z_2 = (d/c, a/b)$ denge noktası IV. Bölgededir. $z_1 = (0, 0)$ denge noktasında özdeğerler,

$$\alpha_1 = a \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = -d$$

olduğundan bu denge noktası bir "eyer" noktasıdır.

$z_2 = (d/c, a/b)$ denge noktasında ise özdeğerler

$$\beta_1 = i\sqrt{ad} \quad \text{ve} \quad \beta_2 = -i\sqrt{ad}$$

olduğundan, özdeğerlerin reel kısımları sıfırdır. Bu nedenle bu noktanın stabilliği hakkında türev matrisi yardımıyla birşey söyleyemeyiz. Yine burada da Lotka-Volterra sistemini incelerken izlediğimiz yol uygulanırsa, bu noktanın stabil olduğu ve bu etkileşimin IV. bölgedeki trajektörlerinin birer kapalı orbit olduğu görülür. (Bu durumun tersi olan karamsar ile bencil etkileşiminde de $z_1 = (0, 0)$ denge noktası bir "eyer" noktasıdır ve stabil değildir.)

$z_2 = (d/c, a/b)$ noktası ise stabil bir noktadır.)

Aşağıdaki şekil yardımıyla bu sistemin vektör alanı hakkında bir fikir edinebiliriz (Şekil 3.8). Bu şekli belirlerken x' ve y' nün işaretleri incelenmiş ve

$$y = \frac{ac}{b} x + \frac{a}{b} (1-d) \quad (d_1 \text{ doğrusu})$$

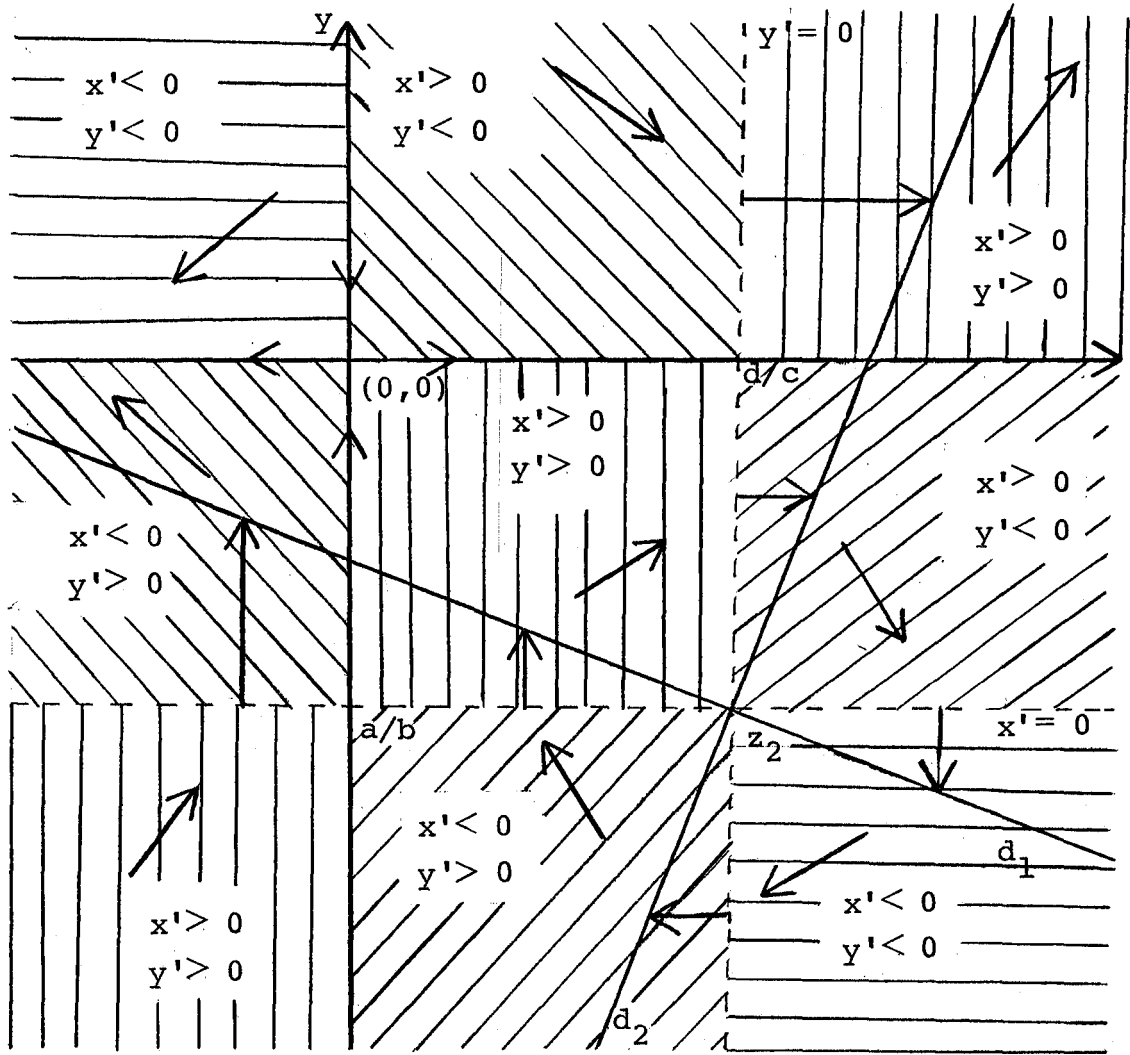
ve

$$y = -\frac{c}{bd} x + \frac{(a+1)}{b} \quad (d_2 \text{ doğrusu})$$

doğrularından yararlanılmıştır.

(Bu durumda pozitif bölgedeki bir (x_0, y_0) noktasından başlayan bir trajektör için $x' \geq ax$ ve dolayısıyla $t \rightarrow \infty$ için $x \rightarrow \infty$ olur. Diğer yandan $y' = (cx-d)y$ dir ve $(cx-d) \geq k > 0$ olacak şekilde bir k sayısı bulunabilir. Bu nedenle $y' \geq ky$.

olur ve $t \rightarrow \tau$ için $y \rightarrow \infty$ olur.)



Şekil 3.8

Yukarıda incelediğimiz sisteme, aşağıdaki başlangıç değerleri ve Çizelge 3.7 de diğer sayısal bilgileri verilen bir örnek verilmiştir (Şekil 3.9).

Başlangıç Değerleri:

I. Bölge : $(0.1, 10), (0.25, 10), (2, 10), (0.5, 10), (1, 10), (0.05, 7)$

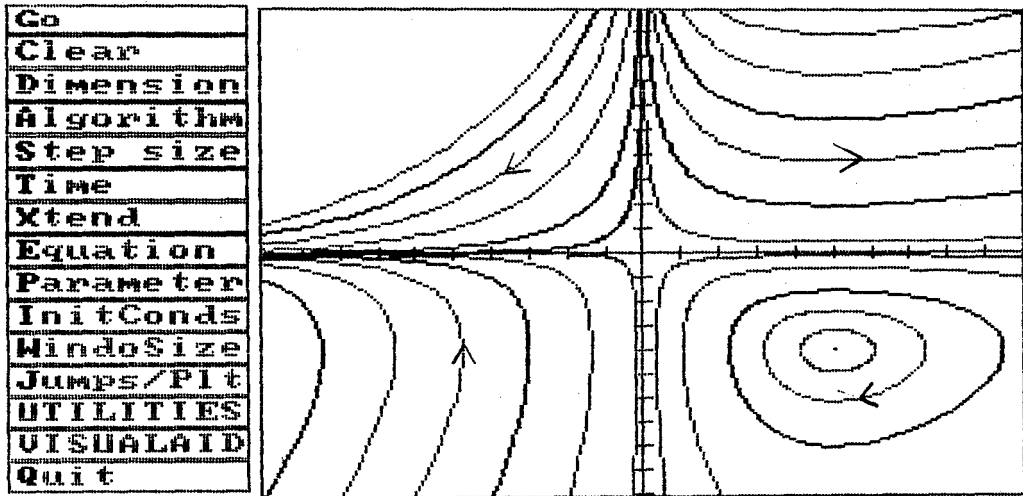
II. Bölge : $(-0.1, 10), (-0.35, 10), (-0.7, 10), (-1.2, 10), (-1.7, 10), (-0.1, 5)$.

III. Bölge : $(-10,-10), (-8,-10), (-6,-10), (-4,-10), (-2,-10), (-0.3,-10)$

IV. Bölge : $(5,-4), (5,-3.2), (5,-2.4), (5,-1.6), (0.5,-10), (2,-10)$

Çizelge 3.7:

Parameter a,b,c,d	Time	Window size	Stepsize
4,-1,1,5	0 → 1.4	x:-10 → 10 y:-10 → 10	0.05



Şekil 3.9

Bu sistemin pozitif bölgedeki faz portresine göre, belli bir yere kadar fedakâr tür azalmakta, iyimser tür artmaktadır. Fakat daha sonra iyimser türün gayretleriyle (!) fedakâr tür yokılmaktan kurtulup her iki tür de varlıklarını sürdürmektedirler.

5. DURUM: Bu durumda iki iyimser tipin etkileşimi sözkonusudur. Bu etkileşimde $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ ve $d < 0$ olduğundan $z_2 = (d/c, a/b)$ denge noktası III. Bölgededir.

$z_1 = (0, 0)$ denge noktasında özdeğerler,

$$\alpha_1 = a \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = -d$$

olduğundan, özdeğerlerin reel kısımları pozitiftir ($a > 0$ ve $d < 0$ ise $-d > 0$) ve bu nokta bir "kaynak" noktasıdır. $z_2 = (d/c, a/b)$ denge noktasında ise özdeğerler,

$$\beta_1 = \sqrt{ad} \quad \text{ve} \quad \beta_2 = -\sqrt{ad}$$

olduğundan özdeğerlerin reel kısımları ters işaretlidir ve bu nokta bir "eyer" noktasıdır. Bu sistemde z_1 ve z_2 noktaları stabil değildir. (Bu etkileşimin tersi olan iki karamsar tipin etkileşiminde $z_1 = (0, 0)$ denge noktası özdeğerlerin reel kısımları negatif olduğundan bir "kuyu" noktasıdır. $z_2 = (d/c, a/b)$ noktasında ise, yine özdeğerlerin reel kısımları ters işaretli olduğundan, bu nokta bir "eyer" noktasıdır. Dolayısıyla z_1 noktası stabil, z_2 noktası ise stabil değildir.)

Şekil 3.10 bize bu sistemin vektör alanı hakkında bilgi verecektir. Bu şekil belirlenirken, diğer durumlarda olduğu gibi x' ve y' nün dokuz bölgedeki işaretlerinden ve

$$y = \frac{ac}{b} x + \frac{a}{b} (1-d) \quad (d_1 \text{ doğrusu})$$

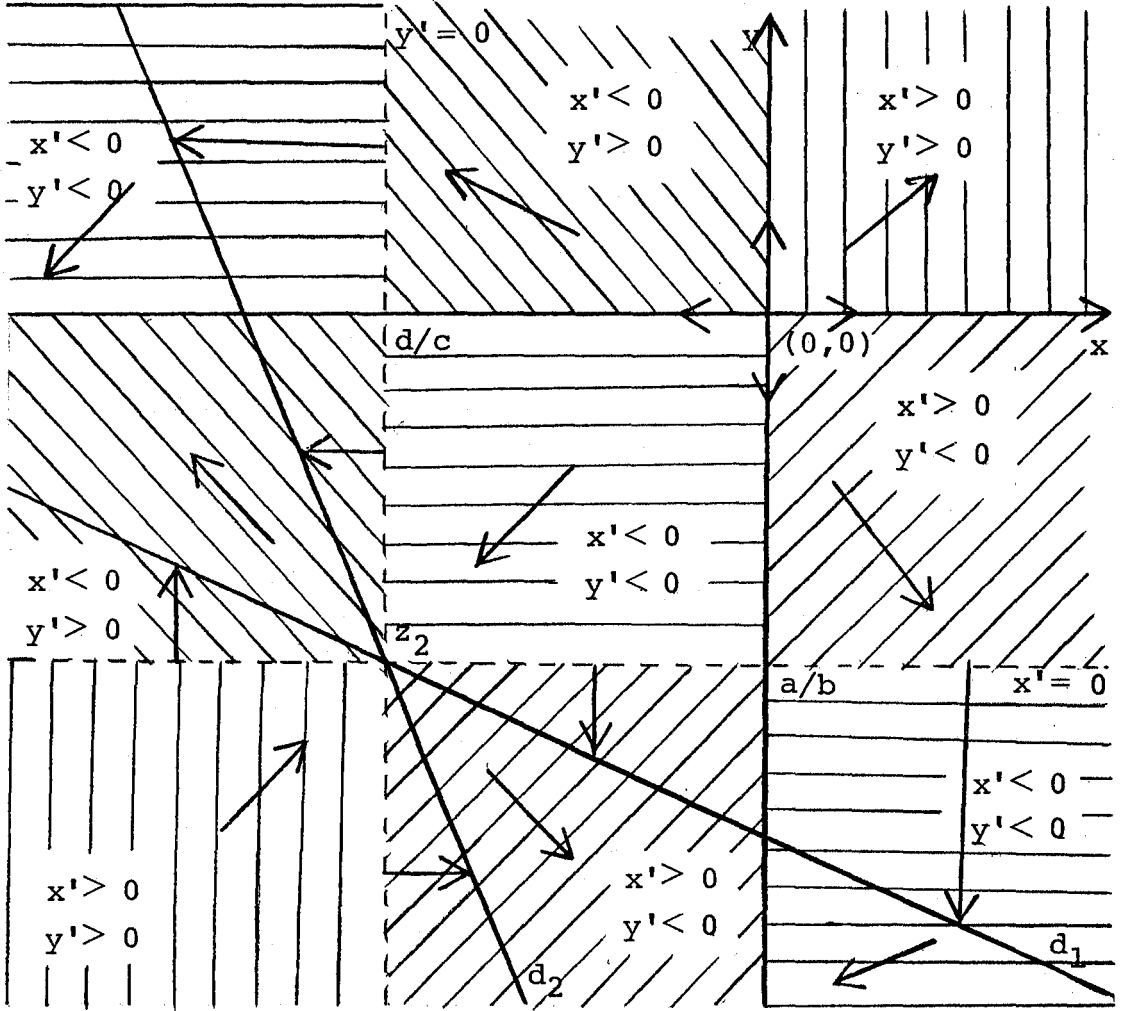
ve

$$y = -\frac{c}{bd} x + \frac{(a+1)}{b} \quad (d_2 \text{ doğrusu})$$

doğrularından yararlanılmıştır.

(Bu durumda pozitif bölgedeki bir (x_0, y_0) noktasından

başlayan bir trajektör için $x' \geq ax$ ve $y' \geq (-d)y$ olduğundan $t \rightarrow \tau$ için $x \rightarrow \infty$ ve $y \rightarrow \infty$ olur.



Şekil 3.10

Bu sisteme de, aşağıdaki başlangıç değerlere ve diğer sayısal bilgileri (Çizelge 3.8) verilen bir örnek verilmiştir (Şekil 3.11).

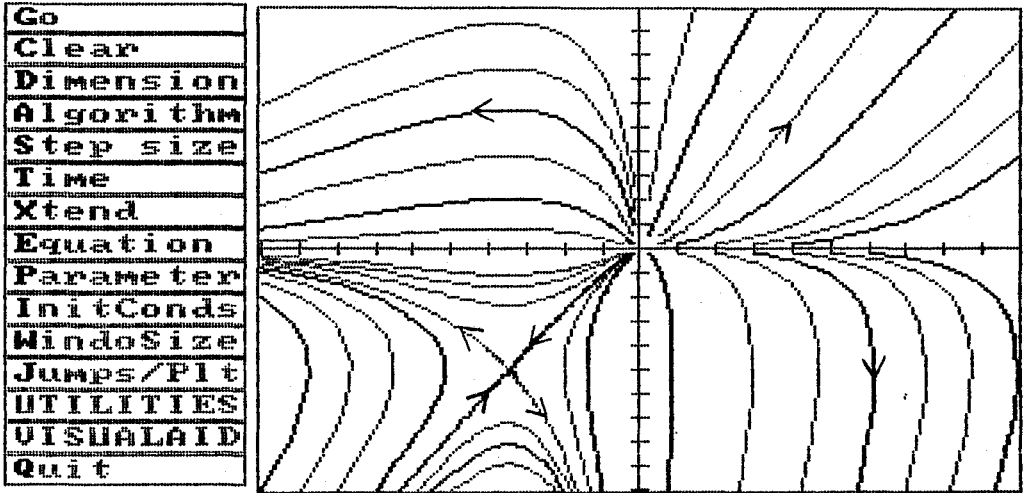
Başlangıç Değerleri:

I. Bölge : $(0.2, 0.5), (0.5, 0.5), (0.5, 0.2), (1, 0.2), (2, 0.2), (3, 0.2), (4, 0.2), (0.2, 2)$.

- II. Bölge : $(-0.2, 0.2), (-0.2, 2.5), (-0.2, 0.5), (-0.2, 1), (-0.2, 1.6), (-0.5, 0.2)$.
- III. Bölge : $(-3.5, -5), (-3.6, -4.9), (-3.4, -5.1), (-0.2, -0.2), (-0.5, -0.2), (-0.4, -0.2), (-0.2775, -0.2), (-1.2, -1), (-0.8, -1), (-10, -10), (-9, -10), (-8, -10), (-7, -10), (-5.9, -10), (-5.5, -10), (-5, -10), (-6.352, -10)$.
- IV. Bölge : $(0.2, -0.2), (1, -0.2), (2, -0.2), (3, -0.2), (4, -0.2), (5, -0.2), (6, -0.2)$.

Çizelge 3.8:

Parameter a,b,c,d	Time	Window size	Stepsize
5,-1,2,-7	0 → 1.1	x:-10→ 10 y:-10→ 10	0.05



Şekil 3.11

Bu etkileşimde pozitif bölgedeki faz portresini yorumlayacak olursak, iki iyimser tip sürekli birbirlerini artırarak, yokolmadan yaşamlarını sürdürmektedirler.

6. DURUM: Bu durumda iyimser ile karamsar tiplerin etkileşimi sözkonusudur. Yani $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ ve $d > 0$ dır. Bu etkileşim 2.Bölümde ayrıntılı olarak incelenen Lotka-Volterra etkileşimidir.

İncelediğimiz etkileşimlerde dikkati çeken bir husus, bencil türün bulunduğu her etkileşimde diğer türlerin varlıklarını sürdürememeleridir. Yani bencil bir tür ile etkileşime maruz kalan diğer bir tür savaşı baştan kaybetmiş demektir.

4. YAPISAL KARARLILIK (STABİLLİK)

Bu bölümde yapısal stabilite kavramının tanımı verilecek, daha sonra Lotka-Volterra dinamik sisteminin ve diğer Volterra etkileşimlerinin yapısal stabilitesi incelenecektir. Fakat önce yapısal stabilite tanımında kullandığımız "pertürbasyon" ve "iki sistemin denkleği" kavramlarına değineceğiz.

Tanım 4.1: $W \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^1 sınıfından bir vektör alanı olsun. $\epsilon > 0$ olmak üzere, her $x \in W$ için,

$$\|f(x) - g(x)\| < \epsilon \quad \text{ve} \quad \|Df(x) - Dg(x)\| < \epsilon$$

eşitsizliklerini sağlayan, W üzerinde tanımlı C^1 sınıfından bir g vektör alanına f vektör alanının bir ϵ -pertürbasyonu denir.

Tanım 4.2: $W \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme olsun. $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $g : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^1 sınıfından iki vektör alanı ve bu vektör alanlarının belirlediği dinamik sistemler,

$$x' = f(x) \quad \text{ve} \quad x' = g(x)$$

olsun. Eğer bu iki sistemin trajektörlerini (yönlerini koruyarak) birbirlerine taşıyan bir

$$\psi : W \rightarrow W$$

homeomorfizmi (bire-bir, örten, sürekli ve tersi sürekli fonksiyon) varsa bu iki sisteme denk denir.

Bu tanımlardan sonra, artık "yapısal stabilite" kavramını verebiliriz.

Tanım 4.3: $W \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme, $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ ye C^1

sınıfından bir vektör alanı ve

$$x' = f(x)$$

bu vektör alanının belirlediği dinamik sistem olsun. Eğer uygun bir $\varepsilon > 0$ için f vektör alanının her ε -pertürbasyonu f nin belirlediği dinamik sisteme denk bir dinamik sistem verirse, f vektör alanına ya da f nin belirlediği dinamik sisteme yapısal stabildir denir.

İki dinamik sistem arasındaki bir denklik homeomorfizminin, denge noktalarını denge noktalarına ve kapalı orbitleri kapalı orbitlere göndereceği açıktır. Bu özellikten birçok durumlarda iki dinamik sistemin denk olmadığını görmek mümkün olur. Ancak iki dinamik sistemin denkleğinin gösterilmesi ve bununla ilgili olarak bir dinamik sistemin yapısal stabilliğinin gösterilmesi çok zor bir problemdir ve bu konuda başvurulabilecek çok az sayıda teorem vardır.

Şimdi, klasik Lotka-Volterra sisteminin yapısal stabil olmadığını tanımdan hareketle gösterelim: Hatırlanacağı gibi,

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

olmak üzere,

$$f(x, y) = (ax - bxy, cxy - dy)$$

şeklinde tanımladığımız f vektör alanı Lotka-Volterra dinamik sistemini belirleyen vektör alanıdır. Şimdi, μ parametresine bağlı,

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(x, y) = \left((ax - bxy) + \mu \left(x - \frac{d}{c}\right) e^{-\left(x - \frac{d}{c}\right)^2}, (cxy - dy) + \mu \left(y - \frac{a}{b}\right) e^{-\left(y - \frac{a}{b}\right)^2} \right)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. g fonksiyonu C^1 sınıfından

bir fonksiyondur. Önce keyfi $\epsilon > 0$ için $|\mu|$ sıfıra yeterince yakın alındığında,

$$\|f(x,y) - g(x,y)\| < \epsilon \quad \text{ve} \quad \|Df(x,y) - Dg(x,y)\| < \epsilon$$

eşitsizliklerinin sağlandığını (yani g vektör alanının f vektör alanına "çok yakın" olduğunu) gösterelim.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \|f(x,y) - g(x,y)\| &= \left\| \left(-\mu \left(x - \frac{d}{c}\right) e^{-\left(x - \frac{d}{c}\right)^2}, -\mu \left(y - \frac{a}{b}\right) e^{-\left(y - \frac{a}{b}\right)^2} \right) \right\| \\ &= |\mu| \left\| \left(\left(x - \frac{d}{c}\right) e^{-\left(x - \frac{d}{c}\right)^2}, \left(y - \frac{a}{b}\right) e^{-\left(y - \frac{a}{b}\right)^2} \right) \right\| \\ &= |\mu| \sqrt{\left(x - \frac{d}{c}\right)^2 e^{-2\left(x - \frac{d}{c}\right)^2} + \left(y - \frac{a}{b}\right)^2 e^{-2\left(y - \frac{a}{b}\right)^2}} \\ &< |\mu| 3 \end{aligned}$$

olur. Burada $|\mu| = \frac{\epsilon}{3}$ seçersek,

$$\|f(x,y) - g(x,y)\| < \epsilon \quad (4.2)$$

bulunur.

$$\text{(ii)} \quad Df(x,y) = \begin{bmatrix} a-by & -bx \\ cy & cx-d \end{bmatrix}$$

ve

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} (a-by) + \mu(1 - 2\left(x - \frac{d}{c}\right)^2) e^{-\left(x - \frac{d}{c}\right)^2} & -bx \\ cy & (cx-d) + \mu(1 - 2\left(y - \frac{a}{b}\right)^2) e^{-\left(y - \frac{a}{b}\right)^2} \end{bmatrix}$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned}
 \|Df(x,y) - Dg(x,y)\| &= \|(-\mu(1-2(x-\frac{d}{c})^2)e^{-(x-\frac{d}{c})^2}, -\mu(1-2(y-\frac{a}{b})^2)e^{-(y-\frac{a}{b})^2})\| \\
 &= |\mu| \|((1-2(x-\frac{d}{c})^2)e^{-(x-\frac{d}{c})^2}, (1-2(y-\frac{a}{b})^2)e^{-(y-\frac{a}{b})^2})\| \\
 &= |\mu| \sqrt{(1-2(x-\frac{d}{c})^2)^2 e^{-2(x-\frac{d}{c})^2} + (1-2(y-\frac{a}{b})^2)^2 e^{-2(y-\frac{a}{b})^2}} \\
 &< |\mu| \cdot 3
 \end{aligned}$$

olur. $|\mu| = \frac{\varepsilon}{3}$ seçersek,

$$\|Df(x,y) - Dg(x,y)\| < \varepsilon \quad (4.3)$$

bulunur. (4.2) ve (4.3) eşitsizliklerinden istenilen gösterilmiş olur. Bilindiği gibi Lotka-Volterra dinamik sisteminin denge noktaları $z_1 = (0,0)$ ve $z_2 = (d/c, a/b)$ noktalarıdır. İkinci bölümde z_2 denge noktasının stabil olduğu ve bu denge noktasının bulunduğu bölgede trajektörlerin her birinin birer kapalı yörünge olduğu gösterilmiştir. Yukarıda tanımladığımız g fonksiyonu tarafından belirlenen dinamik sistem ise,

$$\begin{aligned}
 x' &= (a-by)x + \mu(x - \frac{d}{c}) e^{-(x-\frac{d}{c})^2} \\
 y' &= (cx-d)y + \mu(y - \frac{a}{b}) e^{-(y-\frac{a}{b})^2}
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

sistemidir ve $z_2 = (d/c, a/b)$ noktası bu sistemin de bir denge noktasıdır. Şimdi bu denge noktasının durumunu inceleyelim:

z_2 denge noktasına karşılık gelen türev matrisi,

$$Dg(d/c, a/b) = \begin{bmatrix} \mu & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & \mu \end{bmatrix}$$

dir. Bu matrisin özdeğerleri,

$$\lambda_1 = \mu + i\sqrt{ad}$$

$$\lambda_2 = \mu - i\sqrt{ad}$$

olur. $\mu < 0$ olması durumunda z_2 denge noktası bir "kuyu" noktasıdır ve bu bölgedeki trajektörler $z_2 = (d/c, a/b)$ noktasına bir spiral şeklinde yaklaşır. Yani bu nokta asimtotik stabil bir noktadır. $\mu > 0$ olması durumunda z_2 denge noktası bir "Kaynak" noktasıdır ve bu bölgedeki trajektörler $z_2 = (d/c, a/b)$ noktasından spiral şeklinde uzaklaşır. Dolayısıyla bu denge noktası stabil değildir.

Yukarıda gösterildiği gibi, μ parametresi sıfıra ne kadar yakın tutulursa tutulsun buna karşılık gelen her bir pertürbasyonun faz portresi hala orijinal sistemimizin faz portresinden farklı kalmaktadır. Görülüyor ki, f vektör alanında çok küçük değişiklikler yapıldığı takdirde sistemin durumu tamamen değişiyor. Bu da bize gösteriyor ki bu iki dinamik sistem arasında bir homeomorfizm kurulamaz. Bu nedenle Lotka-Volterra dinamik sistemi yapısal stabil değildir.

Aşağıda, $\mu < 0$, $\mu = 0$ ve $\mu > 0$ olduğu durumlarda, trajektörlerin davranışlarında nasıl bir değişiklik olduğunu gözleyebileceğimiz bir örnek verilmiştir (Şekil 4.1.a \leftrightarrow 4.1.i). Bu şekillere ait sayısal bilgiler Çizelge 4.1, 4.2, 4.3 de gösterilmiştir.

Çizelge 4.1

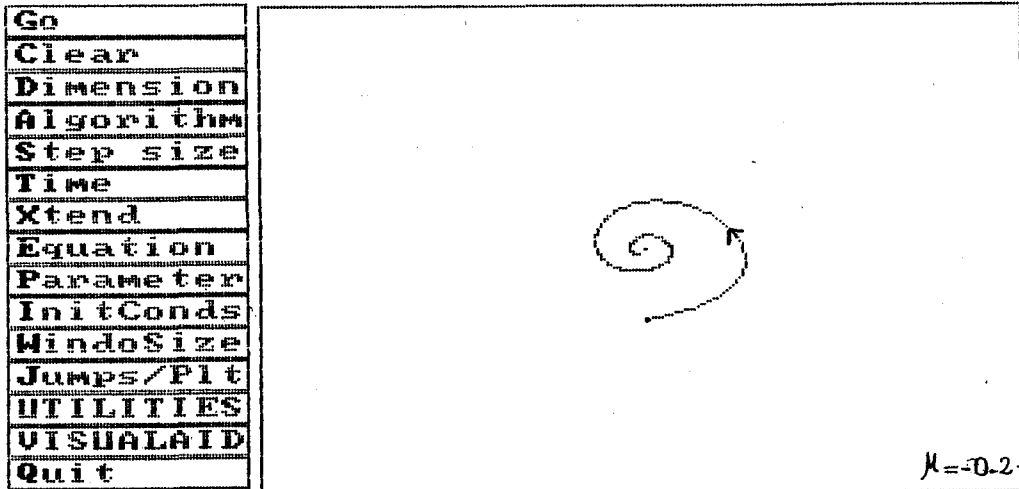
	Şekil 1.a	Şekil 1.b	Şekil 1.c
Parameter a,b,c,d, μ	1,1,1,1,-0.2	1,1,1,1,-0.15	1,1,1,1,-0.1
Init Conds	(1,1);(1,0.7)	(1,1);(1,0.7)	(1,1);(1,0.7)
Time	0 \rightarrow 12	0 \rightarrow 14.5	0 \rightarrow 20
WindowSize	x: 0 \rightarrow 2 y: 0 \rightarrow 2	x:0 \rightarrow 2 y:0 \rightarrow 2	x: 0 \rightarrow 2 y: 0 \rightarrow 2
Stepsize	0.05	0.05	0.05

Çizelge 4.2

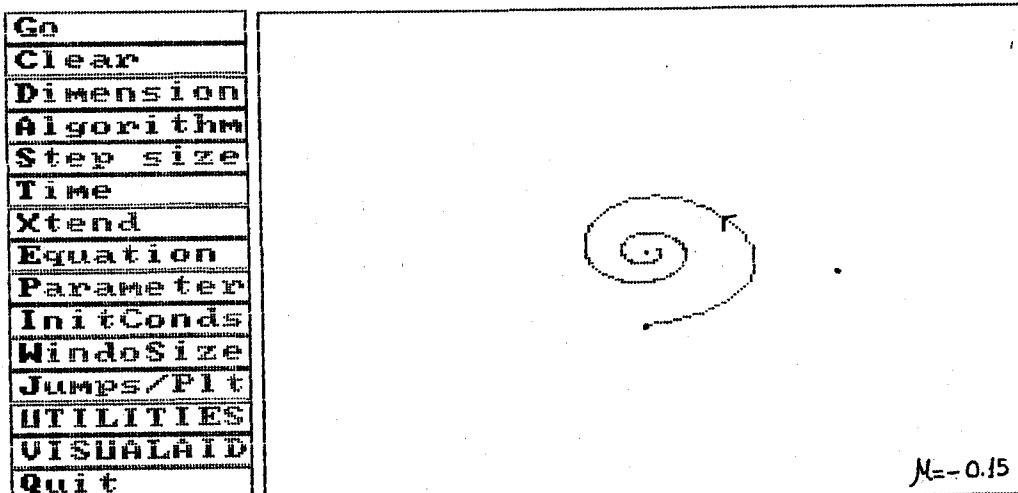
	Şekil 1.d	Şekil 1.e	Şekil 1.f
Parameter a,b,c,d, μ	1,1,1,1,-0.05	1,1,1,1,0	1,1,1,1,0.05
Init Conds	(1,1);(1,0.7)	(1,1);(1,0.7)	(1,1);(1,0.7)
Time	0 \rightarrow 33	0 \rightarrow 6.35	0 \rightarrow 14.5
WindowSize	x: 0 \rightarrow 2 y: 0 \rightarrow 2	x: 0 \rightarrow 2 y: 0 \rightarrow 2	x: 0 \rightarrow 2 y: 0 \rightarrow 2
Stepsize	0.05	0.05	0.05

Çizelge 4.3

	Şekil 1.g	Şekil 1.h	Şekil 1.i
Parameter a, b, c, d, μ	1,1,1,1,0.1	1,1,1,1,0.15	1,1,1,1,0.2
Init Conds	(1,1);(1,0.7)	(1,1);(1,0.7)	(1,1);(1,0.7)
Time	0 \rightarrow 8	0 \rightarrow 7	0 \rightarrow 5
Window size	x: 0 \rightarrow 2 y: 0 \rightarrow 2	x: 0 \rightarrow 2 y: 0 \rightarrow 2	x: 0 \rightarrow 2 y: 0 \rightarrow 2
Stepsize	0.05	0.05	0.05

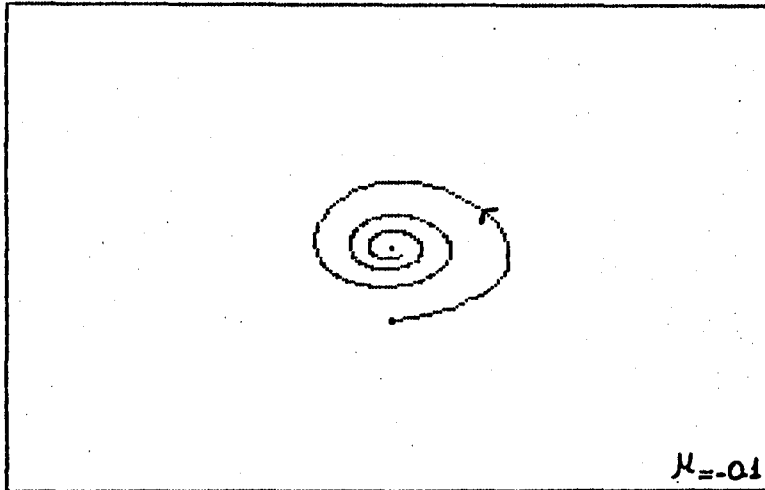


Şekil 4.1.a



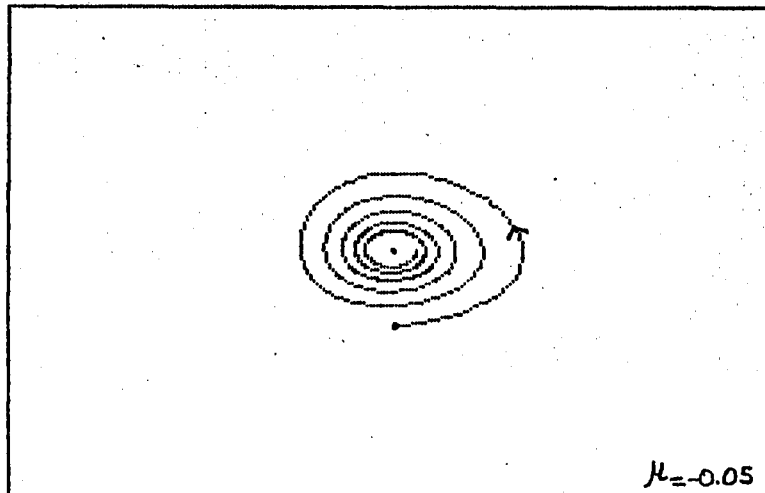
Şekil 4.1.b

Go
Clear
Dimension
Algorithm
Step size
Time
Xtend
Equation
Parameter
InitConds
WindowSize
Jumps/Plt
UTILITIES
VISUALAID
Quit



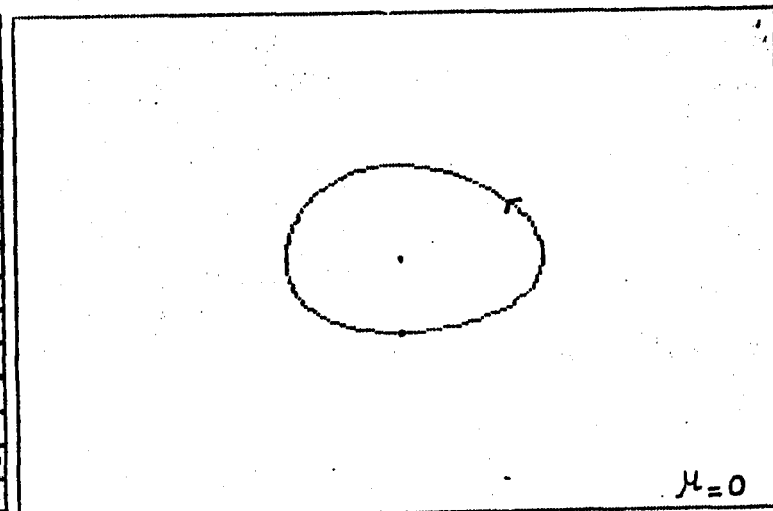
Şekil 4.1.c

Go
Clear
Dimension
Algorithm
Step size
Time
Xtend
Equation
Parameter
InitConds
WindowSize
Jumps/Plt
UTILITIES
VISUALAID
Quit

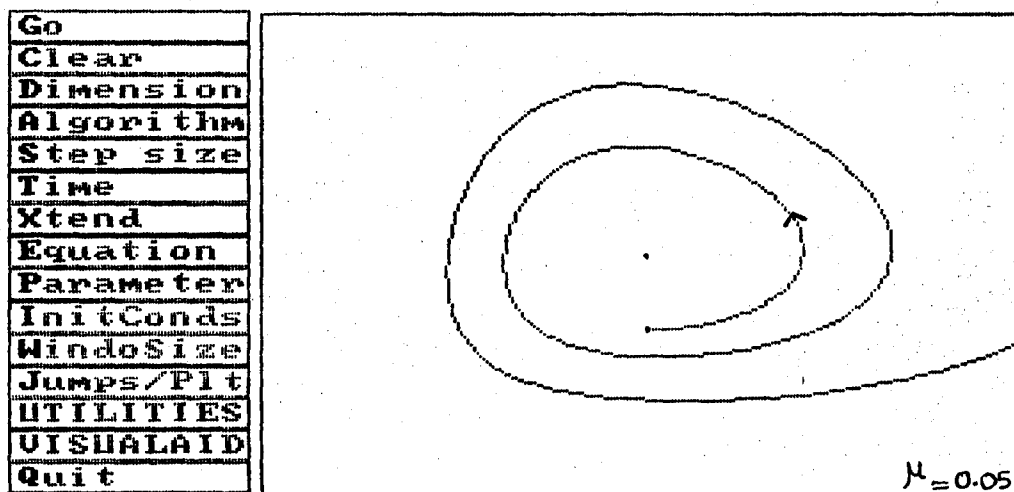


Şekil 4.1.d

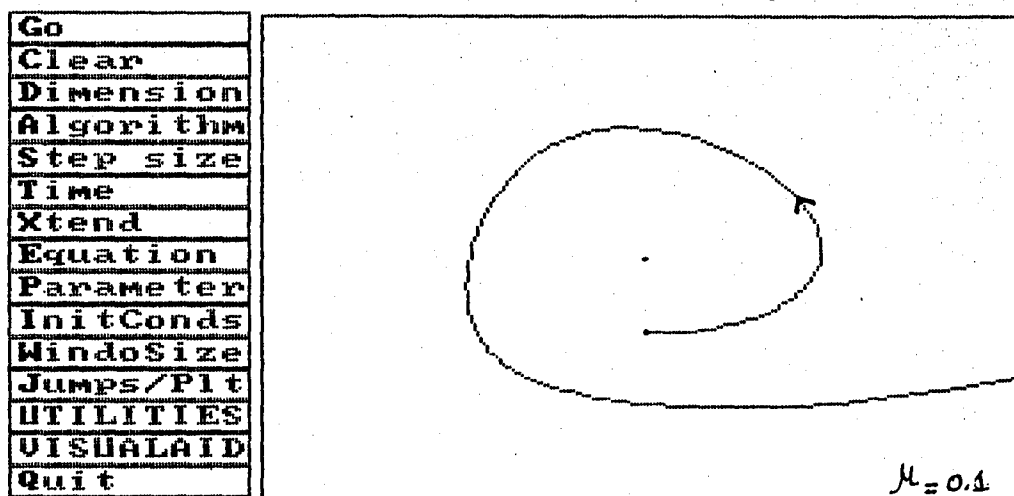
Go
Clear
Dimension
Algorithm
Step size
Time
Xtend
Equation
Parameter
InitConds
WindowSize
Jumps/Plt
UTILITIES
VISUALAID
Quit



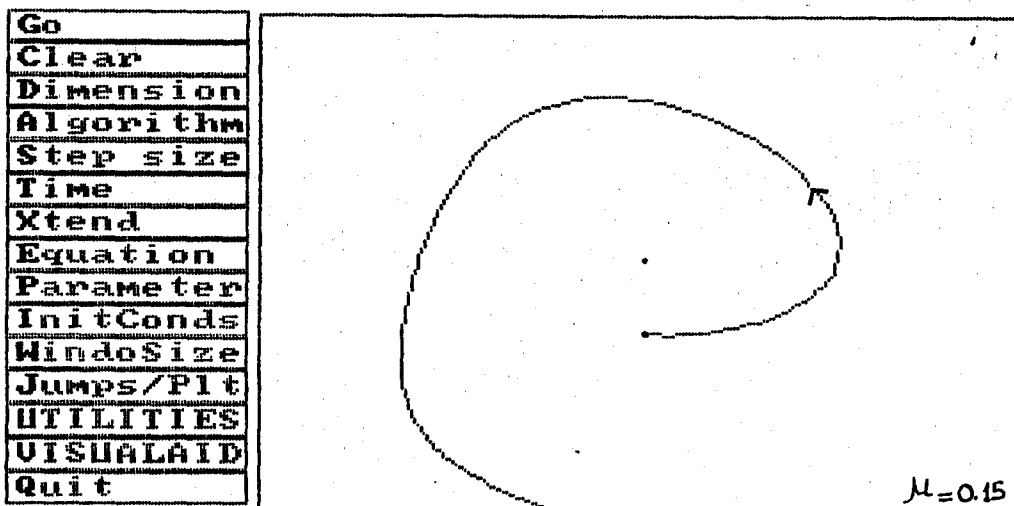
Şekil 4.1.e



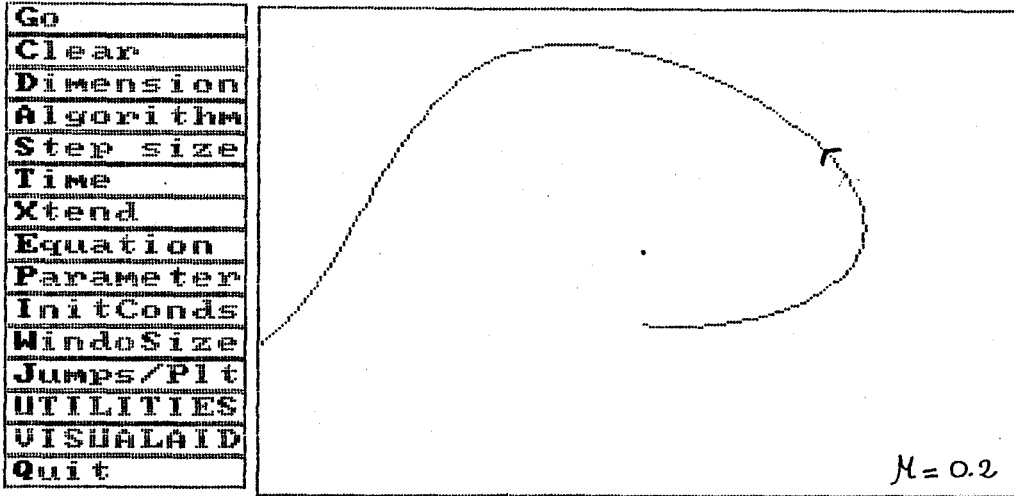
Şekil 4.1.f



Şekil 4.1.g



Şekil 4.1.h



Şekil 4.1.i

İkili Volterra etkileşimlerinden hareketle elde ettiğimiz altı durumdan ikinci, dördüncü ve altıncı (Lotka-Volterra etkileşimi) durumların yapısal stabil olmadığını Lotka-Volterra dinamik sistemine benzer şekilde gösterebiliriz. Diğer üç durumun yapısal stabilliği hakkında şimdilik birşey söyleyemiyoruz. Genel olarak bir dinamik sistemin yapısal stabilliğinin gösterilmesi son derece zor bir problemdir ve bu konuda başvurulabilecek çok az sayıdaki teorem de dinamik sistemin tanım bölgesinin kompakt olduğu durumlarda ifade edilmişlerdir. Örneğin, bunların en meşhur olanı Pontryagin-Andronow teoremi (Andronow, et, all., 1969) bir disk üzerinde tanımlı sistemler için formüle edilmiştir. Bizim gözönüne aldığımız sistemler düzlem üzerinde ya da düzlemin kompakt olmayan pozitif bölgesinde tanımlıdırlar ve literatürde henüz böyle bölgeler için ifade edilmiş yapısal stabillik teoremleri mevcut değildir. Ancak tahminimiz incelediğimiz durumlardan birinci, üçüncü ve beşinci durumların yapısal stabil olduğu şeklindedir. Nümerik pertürbasyon deneylerimiz buna işaret etmekle birlikte şimdilik bir ispat veremiyoruz.

Yapısal stabillik doğal sistemlerin matematiksel

modelleri için ileri sürülmesi çok anlamlı bir koşul olduğundan klasik Lotka-Volterra sistemi kanaatimizce kendisine atfedilen önemi taşımamaktadır ve bu sistemin literatürde verilen bir çok modifikasyonu, yapısal stabilliği sağlamak amacıyla yapılmamış da olsa bunun gereğinin hissedildiğini göstermektedir. Bu örnekte de görüldüğü gibi yapısal stabilite kavramı matematiksel model arayışında yol gösterici olabilecek bir kavramdır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Andronow, A.A., Witt, A.A. and Chaikin, S.E., Theorie der Schwingungen, Akademie-Verlag, Berlin, 413 s. 1969.
- Bertalanffy, L., General System Theory, New York, G. Braziller, 1969.
- Braun, M., Differential Equations and Their Applications, Springer-Verlag, New York, Inc., 518 p. 1978.
- Ebenhöh, W., Mathematik für Biologen und Mediziner, Quelle und Meyer, Heidelberg, 193s., 1975.
- Hirsch, M.W. and Smale, S., Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, By Academic Press, Inc., 358 p., 1974.
- Hobson, J.A., Mc Carley, R.W. and Wyzinski, P.W., Sleep cycle oscillation: Reciprocal discharge by two brain stem neuronal groups, Science, 189, 55-58, 1975.
- Koçak, H., Differential and Difference Equations, Springer Verlag, 1986.
- Roy, A.B. and Solimano, F., Global Stability and Oscillations in Classical Lotka-Volterra loops, J. Math. Biol., 24, 603-617, 1987.