E^3 DE RELATİF PARALELİZM VE RELATİF KONEKSİYON

İsmail Kocayusufoğlu

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Prof.Dr. Ertuğrul Özdamar

Ocak-1988

İsmail Kocayusufoğlu'nun YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "E^3 DE RELATİF PARALELİZM VE RELATİF KONEKSİYON" başlıklı bu çalışma jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

15./.1../.1988

Üye : Prof. Dr. Rüstem KAYA..

Üye : Prof. Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR..

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ali GÖRGÜLÜ..

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 26.1.1988....
gün ve .....165:1.......sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Rüstem KAYA

ÖZET

Bu çalışmada, $E^3 x GL(3,\mathbb{R})$ nin $\overset{\circ}{O}(3)$ alt demeti tanımlanmış ve $\tilde{O}(3)$ demetinde ∇-RPUÇ lifti yatay lift kabul eden $\tilde{\Gamma}$ koneksiyonu verilmiştir. $\alpha(I) x E^3$ birleştirilmiş asli lif demetinde $\tilde{\Gamma}$ yardımıyla $\tilde{\nabla}$ kovaryant türev operatörü elde edilmiş olup, α nın izometrik denklik sınıfından yararlanılarak $E^3 x E^3$ de ∇ ya relatif olan $\tilde{\nabla}$ kovaryant türev operatörü tanımlanmıştır. $\tilde{\nabla}$ ve ∇ arasında Γ nın koneksiyon 1-formu w yardımıyla bir eşitlik elde edilmiş olup, α nın geodezik olması hali incelenmiştir.

SUMMARY

In this thessis, we introduced a subbundle of $E^3 x GL(3,\mathbb{R})$ which is denoted by $\tilde{O}(3)$. On the bundle $\tilde{O}(3)$ we define a connection $\tilde{\Gamma}$ for which the horizontal lifts are ∇-RPUÇ lifts. On the associated principal fibre bundle $\alpha(I) x E^3$, we obtained a covariant derivative $\tilde{\nabla}$ with respect to the connection $\tilde{\Gamma}$ for which we used the equivalance classes of α and named $\tilde{\nabla}$ as ∇-relative covariant derivative. We obtained an equation for $\tilde{\nabla}$ by using ∇ and the connection form w of Γ. Finally, we examined the $\tilde{\nabla}$ when α is a geodesic of E^3.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten ve çalışma boyunca her türlü yardımı esirgemeyen değerli hocam, Uludağ Üniversitesi Fen-Ed. Fakültesi Öğretim Üyesi Sayın Prof.Dr.Ertuğrul Özdamar'a içten teşekkürü bir borç bilirim.

İsmail Kocayusufoğlu

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Bishop (Bishop, 1975) de C^2 sınıfından eğrilerin diferansiyel geometrisi için Serret-Frenet teorisinden daha genel sonuçlara varmıştır. Bishop, bu çalışmasında "Relatif Paralel Vektör Alanı" (RPS) kavramını tanımlamış ve bu kavram yardımıyla "Relatif Paralel Uyarlanmış Çatı Alanı" (RPUÇ) kavramını elde etmiştir. RPS ve RPUÇ yardımıyla da C^2 sınıfından bir eğrinin eğriliklerini tanımlamıştır. Biz bu çalışmada "RPUÇ kavramından hareketle , verilen eğriyi geodezik kabul edecek E^3 ün bir koneksiyonu var mıdır?" sorusuna cevap bulmaya çalıştık. Bu amaçla asli lif demetleri (ALD) üzerinde koneksiyonlar teorisinden hareketle E^3xE^3 birleştirilmiş asli lif demeti (BALD) üzerindeki kovaryant türev için " Relatif Kovaryant Türev" kavramını elde ettik. Bu kovaryant türev bizi aradığımız koneksiyona götürdü.

Çalışma boyunca gösterimler ve kavramlar yönünden (Kobayashi and Nomizu, 1963) esas alınmıştır. Çalışma 4 Bölüm halinde düzenlenmiş olup, son bölüm orijinal sonuçlara aittir.

Bölüm 1 de çalışma boyunca kullanılacak temel kavramlar, açıklayıcı örneklerle verilmiştir. Burada asıl amacımız "Asli Lif Demeti" ve "Koneksiyon" kavramlarını vermektir.

Bölüm 2 de "Birleştirilmiş Asli Lif Demeti" (BALD) kavramı tanıtılmıştır. Ayrıca BALD üzerinde ∇ operatörü tanımlandıktan sonra bu ∇ nın E^3xE^3 teki karşılığının $E^3xGL(3,\mathbb{R})$ ALD üzerindeki standart koneksiyondan elde edilişi bu bölümde verilmiştir.

Bölüm 3 de "Relatif Parelelizm" kavramı ile beraber"Relatif Paralel Kesitler" ele alınmıştır. Bunların özellikleri birkaç teorem ile verilmiştir.

Bölüm 4 de ise "Relatif Koneksiyon" adını verdiğimiz $\tilde{\Gamma}$ koneksiyonu tanımlanmıştır. E^3 ün geodezikleri boyunca Bölüm 2 deki Γ koneksiyonu ile bu $\tilde{\Gamma}$ koneksiyonunun aynı olduğu elde edilmiştir. Ayrıca bu bölümde $\tilde{\Gamma}$ koneksiyonu için $\tilde{\nabla}$ operatörü tanımlanmış olup, bu $\tilde{\nabla}$ nın birkaç özelliği elde edilmiştir.

BÖLÜM 1

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda, tez boyunca kullandığımız bazı temel kavramları hatırlatacağız. Ayrıca, bu kavramlar için gerekli yerlerde birer örnek vereceğiz. Bu bölüm için (Kobayashi and Nomizu, 1963) kaynağı esas alınmış olup kısa bir tanıtım ile yetineceğiz.

Diğer taraftan, C^∞ manifold, tanjant vektör, vektör alanı, Öklid uzayı gibi ilk kavramlar için (Hacısalihoğlu, 1983) kaynağı esas alınmış olup, bu kavramları burada tekrarlamayacağız.

1.1 Tanım. (Lie Grubu)

G bir grup ve aynı zamanda C^∞ manifold olsun. Eğer,

$$\begin{aligned} GxG &\longrightarrow G \\ (a,b) &\longrightarrow ab^{-1} \end{aligned}$$

fonksiyonu C^∞ ise, G ye bir Lie grubu denir (Clark, 1970).

1.1 Örnek.

$\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesini gözönüne alalım. $(\mathbb{R},+)$ bir gruptur. $\mathbb{R}$ nin standart topolojisinin bir bazı,özdeşlik fonksiyonunun kısıtlaması yardımıyla $\mathbb{R}$ de standart C^∞ yapı tanımlar. Bu yapıya göre,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}x\,\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longrightarrow x-y \end{aligned}$$

fonksiyonu C^∞ olduğundan, $(\mathbb{R},+)$ bir Lie grubudur.

1.2 Tanım.

G bir Lie grubu ve M bir manifold olsun.

$$\mathcal{R} : G \times M \xrightarrow{C^\infty} M$$

$$(g,m) \longrightarrow \mathcal{R}(g,m) = \mathcal{R}_g(m)$$

olmak üzere,

i) Her $g \in G$ için,

$$\mathcal{R}g : M \longrightarrow M$$

diffeomorfizm,

ii) $\mathcal{R}g_1g_2 = \mathcal{R}g_2 o \mathcal{R}g_1$

ise, $\mathcal{R}$ ye G nin M üzerine bir sağ etkisi denir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

Tıpkı sağ etki gibi sol etki de,

$$L : G \times M \xrightarrow{C^\infty} M$$

$$(g,m) \longrightarrow L(g,m) = L_g(m)$$

olmak üzere,

a) Her $g \in G$ için,

$$Lg : M \longrightarrow M$$

diffeomorfizm,

b) $Lg_1g_2 = Lg_1 o Lg_2$

özelliklerini sağlayan ve G nin M üzerine sol etkisi adını vereceğimiz L dönüşümü olarak tanımlanır (Kobayashi and Nomizu, 1963).

1.2 Örnek.

$G = M = GL(n,\mathbb{R})$ için,

$$L_A : GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$$

$$B \longrightarrow L_A(B) = AB$$

bir sol etkidir. Hatta bu sol etkinin I_n deki türev dönüşümü,

$$
\begin{aligned}
(L_A)_*\Big|_{I_n}\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_{I_n}\right)(x_{uv}) &= \frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_{I_n}(x_{uv}oL_A) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_{I_n}\left(\sum_{s=1}^{n} a_{us}x_{sv}\right) \\
&= \sum_{s=1}^{n} a_{us}\delta_{is}\delta_{jv} \\
&= a_{ui}\delta_{jv} \\
&= \left(\sum_{t,s=1}^{n} a_{ti}\delta_{js}\frac{\partial}{\partial x_{ts}}\right)(x_{uv})
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow (L_A)_*\Big|_{I_n}\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_{I_n}\right) = \sum_{t=1}^{n} a_{ti}\frac{\partial}{\partial x_{tj}}\Big|_A
$$

dır (Auslander, 1967). (Burada, $(x_{uv}oL_A)(B) = \Sigma\, a_{us}b_{sv}$ $= (\Sigma a_{us}x_{sv})(B)$ dir.)

1.3 Tanım.

$\mathcal{R}$, G nin M üzerine bir sağ etkisi olmak üzere,

" $\exists x (x \in M$ için $\mathcal{R}_a(x) = x \Rightarrow a = e)$"

ise, $\mathcal{R}$ ye sağ serbest etki denir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

1.4 Tanım. (Asli Lif Demeti = ALD)

P, M iki C^∞ manifold ve G bir Lie grubu olsun.

ALD 1) $\mathcal{R} : G\mathrm{x}P \longrightarrow P$ sağ serbest etkidir.

ALD 2) $P/G \cong M$, $\pi : P \xrightarrow{C^\infty} M$ dir.

ALD 3) P lokal aşikârdır.

özellikleri sağlanıyor ise, P ye G etki grubu ile birlikte M üzerinde bir asli lif demeti denir ve P(M,G) ile gösterilir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

P(M,G) asli lif demetinde G yapı grubu, M baz manifold ve P total manifold (demet uzayı) adını alırlar. $x \in M$ için $\pi^{-1}(x)$'e de x üzerindeki fibre denir. Buradaki Lokal Aşikârlık aksiyomu ise aşağıdaki şekilde anlaşılmalıdır:

Her $U \subset M$ açığı için bir

$$\begin{aligned} \Psi \ : \ \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times G \\ u &\longrightarrow \Psi(u) = (\pi(u), \varphi(u)) \end{aligned}$$

diffeomorfizmi bulunabilmelidir, öyle ki, φ dönüşümü $\pi^{-1}(U)$ dan G yapı grubuna, her $a \in G$ için,

$$\varphi(u.a) = \varphi(u).a$$

eşitliğini sağlayacak şekilde tanımlanmalıdır.

1.2 Örnek.

M bir C^{∞} n-manifold olsun.

$$L(M) = \{U_x \mid x \in M,\ U_x \text{ bir lineer çatı}\}$$

olmak üzere, $L(M)(M, GL(n,\mathbb{R}))$ sistemini gözönüne alalım. Bu sistem bir asli lif demetidir:

ALD 1) $\mathcal{R} : L(M) \times GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow L(M)$

$$(U_x, A) \longrightarrow U_x A = \{Y_1, \ldots, Y_n\}_x$$

$Y_i = X_i A$ olmak üzere,

$$Y_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{ni} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$Y_i = \begin{bmatrix} \sum\limits_k x_{ki}a_{k1} \\ \cdot \\ \vdots \\ \sum\limits_k x_{ki}a_{kn} \end{bmatrix} = \sum_{r,k=1}^{n} x_{ki}a_{kr}\frac{\partial}{\partial x_r}$$

etkisi sağ serbest etkidir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

ALD 2) $L(M)/_{GL(n,\mathbb{R})}$ ile M izomorfiktirler.

$U_x \in L(M)$ verildiğinde,

$$[U_x] = \{v_x \mid v_x = u_x A\}$$
$$\cong \{x\} x GL(n,\mathbb{R})$$

dir. Böylece $[U_x]$ ile x bire-bir karşılık gelirler. Dolayısıyla $L(M)/_{GL(n,\mathbb{R})} \cong M$ yazılabilir.

π nin C^∞ olması ise Diyagram 1.1 den kolayca elde edilebilir.

$$\pi : L(M) \longrightarrow M$$

$$\begin{tikzcd} U_x \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & x \arrow[d, "v"] \\ E^{n^3} \arrow[r, "F"] & E^n \end{tikzcd}$$

Diyagram 1.1

$F_i((x_1,x_2,\ldots,x_n),A) \longrightarrow (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, C^∞ olduğundan π , C^∞ dur. Burada u ve v sırasıyla L(M) ve M üzerinde koordinat fonksiyonlarıdır.

ALD 3) $U \subset M$ için,

$$\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U x GL(n,\mathbb{R})$$
$$U_x \longrightarrow \psi(U_x) = (x,[x_{ki}])$$

diffeomorfizmdir.

Burada,

$$\begin{aligned} \varphi : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow GL(n,\mathbb{R}) \\ U_x &\longrightarrow \varphi(U_x) = [x_{ki}] \end{aligned}$$

tanımlanırsa,

$$\varphi(U_x A) = \varphi(U_x).A$$

olur. O halde $L(M)(M,GL(n,\mathbb{R}))$ sistemi bir asli lif demetidir. Bu demete lineer çatıların oluşturduğu asli lif demeti denir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

Şimdi ALD yardımıyla yeni bir demet "Birleştirilmiş Asli Lif Demeti" (BALD) kavramını tanıtacağız.

$P(M,G)$ asli lif demeti, F bir C^{∞} manifold olsun.

$$\begin{aligned} L : GxF &\longrightarrow F \\ (a,\xi) &\longrightarrow L(a,\xi) = a\xi \end{aligned}$$

sol etkisi verilsin.

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : (PxF)xG &\longrightarrow PxF \\ ((u,\xi),a) &\longrightarrow (ua,a^{-1}\xi) \end{aligned}$$

bir sağ etkidir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

$(PxF)_{/G} = E$ diyelim.

$$\begin{tikzcd} PxF \arrow[r, "iz_1"] \arrow[d, "iz"'] \arrow[dr, "k"] & P \arrow[d, "\pi"] \\ E = (PxF)_{/G} \arrow[r, "\pi_E"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} k(u,\xi) &= \pi(u) \\ \pi_E o iz &= k \end{aligned}$$

Diyagram 1.2

Diyagram 1.2 den de görüleceği gibi,

$$\begin{aligned} k : PxF &\longrightarrow M \\ (u,\xi) &\longrightarrow k(u,\xi) = \pi(u) \end{aligned}$$

dönüşümü bir,

$$\pi_E : (PxF)_{/G} \longrightarrow M$$

dönüşümünü belirler (Kobayashi and Nomizu, 1963).

$U \subset M$ bir açık alt cümle ise, P(M,G) nin lokâl aşikârlığından $\pi^{-1}(U) \cong UxG$ yazılabilir. Böylece, PxF üzerine G nin etkisinin $\pi^{-1}(U)xF$ üzerine kısıtlaması yardımıyla,

$$[(UxG)xF]xG \longrightarrow UxGxF$$

$$(((x,g),\xi),a) \longrightarrow (x,ga,a^{-1}\xi)$$

etkisi yazılabilir.

Böylece, $\pi^{-1}(U) \cong UxG$ izomorfizmi bir $\pi_E^{-1}(U) \cong UxF$ izomorfizmini indirger (Kobayashi and Nomizu, 1963). $\pi_E^{-1}(U)$, E nin açık alt manifoldu olacak şekilde E üzerinde C^∞ yapı tanımlayalım. Böylece, "$\pi_E^{-1}(U)$ ile UxF diffeomorfiktirler" önermesi bu yapıyı tek türlü belirler (Kobayashi and Nomizu, 1963). Bu yapıya göre,

$$\pi_E : E=(PxF)_{/G} \longrightarrow M$$

C^∞ dur.

E manifolduna P(M,G) ile birleştirilmiş standart fibresi F olan bir asli lif demeti denir ve

$$E(M,F,G,P) \text{ veya } E(P(M,G),F)$$

şeklinde gösterilir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

1.6 Tanım.(Koneksiyon)

P(M,G) asli lif demeti verilsin.

$uG = \{ug \mid g \in G\}$ ve $G_u = T_u(\pi^{-1}(x))$ olmak üzere,

K1) $\Gamma : P \longrightarrow \bigcup_{u \in P} \{Q_u \mid Q_u \subset T_uP \text{ alt uzay}\}$

$$u \longrightarrow \Gamma(u) = Q_u$$

$$\ni T_u(P) = G_u \oplus Q_u$$

K2) $\mathcal{R}$ bir sağ etki olmak üzere,

$$\mathcal{R}_a(Q_u) = Q_{ua} \quad , \quad \text{Her } a \in G \text{ , Her } u \in P$$

K3) $\Gamma \; : \; u \longrightarrow \Gamma(u)$

diferansiyellenebilir ise, Γ ya P üzerinde bir koneksiyon adı verilir. G_u nun elemanlarına düşey , Q_u nun elemanlarına da yatay vektörler denir (Kozsul, 1962).

$X_u \in T_uP = G_u \oplus Q_u$ için, $X_u = X_1 + X_2$, $X_1 \in G_u$, $X_2 \in Q_u$ yazılabileceği 1.6 Tanım K1) den açıktır. Böylece,

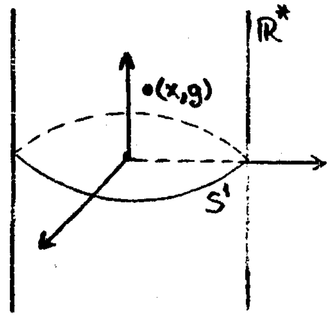
$$\begin{aligned} v \; : \; T_uP &\longrightarrow G_u \\ X_u &\longrightarrow v(X_u) = X_1 \\ h \; : \; T_uP &\longrightarrow Q_u \\ X_u &\longrightarrow h(X_u) = X_2 \end{aligned}$$

olmak üzere v ve h izdüşüm fonksiyonları tanımlıdırlar. v ye düşey izdüşüm fonksiyonu, h ya da yatay izdüşüm fonksiyonu diyeceğiz.

1.3 Örnek

$S' \subset \mathbb{R}^2$ birim çember ve $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere, $(\mathbb{R}^*, .)$ grubunu gözönüne alalım.

$LS' = S' \times \mathbb{R}^*$ olarak tanımlayalım (Şekil 1.1).



$$\begin{aligned} \mathcal{R} \; : \; LS' \times \mathbb{R}^* &\longrightarrow LS' \\ ((x,g),a) &\longrightarrow (x,ga) \end{aligned}$$

sağ etkisi ile $LS'(S',\mathbb{R}^*)$ bir asli lif demetidir (Dotson, 1980).

Şekil 1.1

$u=(x,g) \in LS'$ için,

$T_u LS' = T_{(x,g)}(S' x \mathbb{R}^*)$

$= T_x S' \oplus T_g \mathbb{R}^*$

dır (Şekil 1.2).

$\pi^{-1}(x) = \{x\} x \mathbb{R}^*$

olmak üzere,

$G_u = T_{(x,g)} \pi^{-1}(x) = T_g \mathbb{R}^*$

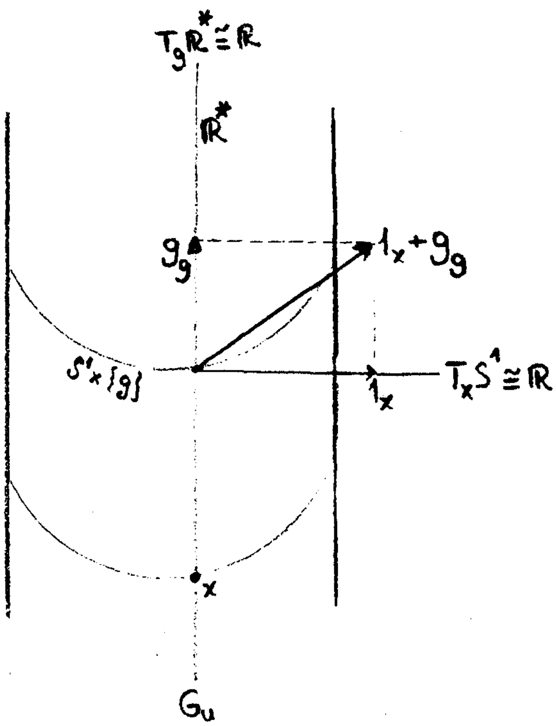
dır.

$Q_u = S_p\{1_x + g_g\} \subset T_u P$

olmak üzere,

$\Gamma : u \longrightarrow Q_u \subset T_u P$

tanımlayalım.



Şekil 1.2

K1) $T_u P = G_u \oplus Q_u$

dır:

$Z_u \in T_u P \Rightarrow Z_u = P_x + q_g$ olup,

$$P_x + q_g = \lambda 1_g + \mu(1_x + g_g) \qquad (1.3.1)$$

olacak şekilde λ ve μ sayıları için,

$$\mu = p \quad , \qquad \lambda = q - pg$$

olduğu kolayca hesaplanabilir. Böylece

$$T_u P = G_u + Q_u$$

dır.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
X \in G_u \cap Q_u &\Rightarrow X = \lambda 1_g \text{ ve } X = \mu(1_x + g_g) \\
&\Rightarrow \mu 1_x + (g\mu - \lambda) 1_g = 0 \\
&\Rightarrow \mu = 0 \quad \text{ve} \quad g\mu - \lambda = 0 \\
&\Rightarrow \mu = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda = 0 \\
&\Rightarrow \quad X = 0
\end{aligned}$$

olur. O halde $T_u P = G_u \oplus Q_u$ dur.

K2) Her $a \in \mathbb{R}^*$ için $\mathcal{R}_a(Q_u) = Q_{ua}$ dır:

$$\mathcal{R}_a(1_x + g_g) = 1_x + (ga)_{ga}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_a : LS' &\longrightarrow LS' \\ (x,g) &\longrightarrow (x,ga) \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\mathcal{R}_{a_*}\big|_{(x,g)} : T_xS' \oplus T_g \mathbb{R}^* \longrightarrow T_xS' \oplus T_g \mathbb{R}^*$$

$$\mathcal{R}_a = (id_s, r_a)$$

$$\mathcal{R}_{a_*} = (id_{T_xS'}, r_{a_*})$$

dır. Burada,

$$\begin{aligned} r_a : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ g &\longrightarrow ga \end{aligned} \Rightarrow r_{a_*}\big|_g \left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_g\right) = a\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{ga}$$

olur. O halde,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{a_*}(1_x + g_g) &= (id_{T_xS'}(1_x), r_{a_*}g_g) \,, \quad g_g = g\frac{\partial}{\partial x}\Big|_g \\ &= 1_x + (ga)_{ga} \end{aligned}$$

dır. Yani,

$$\mathcal{R}_a(Q_u) = Q_{ua}$$

dır.

$$\text{K3)}\quad \Gamma : LS' \longrightarrow \bigcup_{u \in LS'} \{Sp\{1_x + g_g\}\}$$

$$(x,g) \longrightarrow \Gamma(x,g) = Sp\{1_x + g_g\}$$

verilsin. Γ diferansiyellenebilirdir.

Dolayısıyla Γ, LS' de bir koneksiyondur (Dotson, 1980).

$P \times G \longrightarrow P$ etkisi, $u \in P$ olmak üzere, bir $\sigma_u : G \longrightarrow P$ dönüşümünü indirger (Kobayashi and Nomizu, 1963). Bu dönüşümün indirgediği türev dönüşümünün

$\mathfrak{X}_L(G)$ deki herbir A elemanına verdiği resim A^* ile gösterilir. A^* 'a A 'nın karşılık geldiği temel vektör alanı denir (Kobayashi and Nomizu, 1963). Böylece

$$\begin{aligned} \sigma :\ \mathfrak{X}_L(G) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ A &\longrightarrow \sigma(A) = A^* \end{aligned}$$

yazılabilir.

1.7 Tanım. (Koneksiyon 1-Formu)

P(M,G) asli lif demeti üzerinde Γ koneksiyonu verilsin.

$$\begin{aligned} w :\ P &\longrightarrow \bigcup_{u \in P} \mathrm{Hom}(T_uP, \mathfrak{X}_L(G)) \\ u &\longrightarrow w_u :\ T_uP \longrightarrow \mathfrak{X}_L(G) \\ & \qquad\qquad X_u \longrightarrow w_u(X_u) = A \Longleftrightarrow A_u^* = v(X_u) \end{aligned}$$

ise, w $\mathfrak{X}_L(G)$-değerli dönüşümüne Γ koneksiyonunun koneksiyon 1-formu denir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

1.4 Örnek.

$LS'(S', \mathbb{R}^*)$ asli lif demeti verilsin.

$$\Gamma :\ u \longrightarrow \Gamma(u) = Q_u = Sp\{1_x + g_g\}\ ,\quad u = (x,g)$$

olmak üzere Γ koneksiyonunu gözönüne alalım (1.3 Örnek).

$$\begin{aligned} w_u :\ T_uP = T_xS' \oplus T_g\mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathfrak{X}_L(\mathbb{R}^*) \cong \mathbb{R} \\ X_u &\longrightarrow w_u(X_u) = A \Longleftrightarrow A_u^* = v(X_u) = \sigma_u(A_e) \end{aligned}$$

olmalıdır. Burada,

$$\begin{aligned} \sigma_u :\ \mathbb{R}^* &\longrightarrow LS' \\ a &\longrightarrow \sigma_u(a) = (x, ga) \end{aligned}$$

olarak tanımlıdır. Böylece,

$$\sigma_u : T_1\mathbb{R}^* \longrightarrow T_uP$$
$$A_1 = (1,A) \longrightarrow \sigma_u(A_1) = A_u^*$$
$$\Rightarrow \sigma_u(A_1) = O_x + gA_g$$
$$\Rightarrow \quad A_u^* = O_x + (gA)_g \in T_uP$$

olur. O halde,

$$X_u = P_x + q_g \in T_uP$$

ise,

$$P_x + q_g = (O_x + (q-gp)_g) + (P_x + (gp)_g)$$
$$= [O_x + (q-gp)_g] + [P(1_x + g_g)] \in G_u \oplus Q_u$$

olur. Buna göre,

$$w_u(P_x + q_g) = \left(\frac{q-gp}{g}\right) \in \mathfrak{X}_L(\mathbb{R}^*)$$

bulunur (Dotson, 1980).

1.8 Tanım. (Yatay Lift)

P(M,G) asli lif demeti ve Γ koneksiyonu verilsin. $X^* \in \mathfrak{X}(P)$ ve $X \in \mathfrak{X}(M)$ olsun. Bu takdirde, Her $u \in P$ için,

i) $\pi_*\big|_u (X_u^*) = X_{\pi(u)}$

ii) X_u^* yatay vektör ise, X^*'a X'in yatay lifti denir (Kobayashi and Nomizu, 1963)

1.9 Tanım. (Bir Eğirinin Yatay Lifti)

P(M,G) asli lif demeti ve Γ koneksiyonu verilsin.

$$\alpha : [a,b] \longrightarrow M$$

parçalı diferansiyellenebilir eğrisi verildiğinde,

$$\alpha^* : [a,b] \longrightarrow P$$
$$t \longrightarrow \alpha^*(t)$$

olmak üzere,

i) $\pi \circ \alpha^{*} = \alpha$

ii) Her $t \in [a,b]$ için, $(\alpha^{*})'(t) \in Q_{\alpha^{*}(t)}$

ise, α^{*} 'a α 'nın bir yatay lifti denir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

1.5 Örnek.

$LS'(S',\mathbb{R}^{*})$ için S' eğrisinin parametrik ifadesi,

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

iken 1.4 Örnekteki koneksiyona göre yatay lifti,

$$\alpha^{*}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

dir.

BÖLÜM 2

2. E^3 ÜN STANDART KONEKSİYONU

2.1 $\alpha(I)xGL(3,\mathbb{R})$ Asli Lif Demeti

1.Bölümde $P(M,G)$ asli lif demeti kavramını vermiştik. Şimdi

$$P = \alpha(I)xGL(3,\mathbb{R})$$
$$M = \alpha(I)$$
$$G = GL(3,\mathbb{R})$$

alarak $\alpha(I)xGL(3,\mathbb{R})(\alpha(I),GL(3,\mathbb{R}))$ sisteminin bir A.L.D. olduğunu gösterelim. Bunun için 1.4 Tanımın sağlandığını görmeliyiz.

ALD 1) $\mathcal{R} : (\alpha(I)xGL(3,\mathbb{R}))xGL(3,\mathbb{R}) \longrightarrow \alpha(I)xGL(3,\mathbb{R})$

$$((\alpha(t),A),B) \longrightarrow (\alpha(t),AB)$$

etkisi bir sağ serbest etkidir:

i)
$$\begin{array}{ccccc} (\alpha(I)xGL(3,\mathbb{R}))xGL(3,\mathbb{R}) & & \xrightarrow{\mathcal{R}} & & \alpha(I)xGL(3,\mathbb{R}) \\ \downarrow x \quad \downarrow y \qquad \downarrow y & & & & \downarrow x \quad \downarrow y \\ \mathbb{R} \; x \; \mathbb{R}^3 \quad x \quad \mathbb{R}^3 & & \xrightarrow{F} & & \mathbb{R} \; x \; \mathbb{R}^3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} F(u,v,w) &= [(xxy)o\mathcal{R}\,o(xxyxy^{-1})](u,v,w) \\ &= (xxy)o\mathcal{R}(\alpha(t),A,B) \\ &= (xxy)(\alpha(t),AB) \\ &= (x(\alpha(t),y(AB)) \\ &= (u,(yo\Theta)(A,B)) \\ &= (u,(yo\Theta)(y^{-1}(v),y^{-1}(w)) \\ &= (u,(yo\Theta)(y^{-1}xy^{-1})(v,w)) \\ &= (iz_1x(yo\Theta)(y^{-1}xy^{-1})o(iz_2xiz_3))(u,v,w) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad F = iz_1x[(yo\Theta)(y^{-1}xy^{-1})o(iz_2xiz_3)]$$

olup, bütün bileşenleri C^{∞} olduğundan F, C^{∞} dur. (Burada $u = x(\alpha(t))$, $v = y(A)$, $w = y(B)$ ve

$$\begin{aligned} \Theta : GL(3,\mathbb{R}) \times GL(3,\mathbb{R}) &\longrightarrow GL(3,\mathbb{R}) \\ (A\ ,\ B) &\longrightarrow AB \end{aligned}$$

dır). Böylece,

$$\mathcal{R} = (x \times y)^{-1} o F o (x \times y \times y)$$

etkisi C^{∞} olur.

ii) $\mathcal{R}$ etkisi sağ etkidir:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : (\alpha(I) \times GL(3,\mathbb{R})) \times GL(3,\mathbb{R}) &\longrightarrow \alpha(I) \times GL(3,\mathbb{R}) \\ ((\alpha(t),A),B) &\longrightarrow (\alpha(t),AB) \end{aligned}$$

olmak üzere, her $B \in GL(3,\mathbb{R})$ için,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_B : \alpha(I) \times GL(3,\mathbb{R}) &\longrightarrow \alpha(I) \times GL(3,\mathbb{R}) \\ (\alpha(t),A) &\longrightarrow (\alpha(t),AB) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, her $B,C \in GL(3,\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{BC}(\alpha(t),A) &= (\alpha(t),A(BC)) \\ &= (\alpha(t),(AB)C) \\ &= \mathcal{R}_C(\alpha(t),AB) \\ &= \mathcal{R}_C o \mathcal{R}_B(\alpha(t),A) \\ \Rightarrow \mathcal{R}_{BC} &= \mathcal{R}_C o \mathcal{R}_B \end{aligned}$$

olduğundan $\mathcal{R}$ etkisi sağ etkidir.

iii) $\mathcal{R}$ etkisi serbest etkidir:

$B \in GL(3,\mathbb{R})$ için,

"$\mathcal{R}_B(\alpha(t),A) = (\alpha(t),A) \Rightarrow B = I_n = e$"

olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_B(\alpha(t),A) = (\alpha(t),A) \\ \Rightarrow\ & (\alpha(t),AB) = (\alpha(t),A) \\ \Rightarrow\ & \alpha(t) = \alpha(t) \text{ ve } AB = A \\ \Rightarrow\ & B = I_n = e \end{aligned}$$

olduğundan $\mathcal{R}$ etkisi sağ serbest etkidir.

ALD 2) $\alpha(I)xGL(3,\mathbb{R})/_{GL(3,\mathbb{R})} \cong \alpha(I)$

$$\pi : \alpha(I)xGL(3,\mathbb{R}) \xrightarrow{C^\infty} \alpha(I)$$
$$(\alpha(t),A) \longrightarrow \alpha(t)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\mathcal{R} : (\alpha(I)xGL(3,\mathbb{R}))xGL(3,\mathbb{R}) \longrightarrow \alpha(I)xGL(3,\mathbb{R})$$
$$((\alpha(t),A),B) \longrightarrow (\alpha(t),AB)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\alpha(t)) &= [(\alpha(t),A)] \\ &= \{(\alpha'(t),A') \mid \exists B \in GL(3,\mathbb{R}) \ni \mathcal{R}_B(\alpha'(t),A')=(\alpha(t),A)\} \\ &= \{(\alpha(t),AB^{-1}) \mid B \in GL(3,\mathbb{R})\} \\ &= \{(\alpha(t),C) \mid C \in GL(3,\mathbb{R})\} \\ &= \{(\alpha(t)\}xGL(3,\mathbb{R})\end{aligned}$$

dir. Buna göre $\{\alpha(t)\}xGL(3,\mathbb{R}) \in P/_G$ elemanı $\alpha(t) \in M=\alpha(I)$ ya karşılık tutulabilir. Dolayısıyla, bu karşılık tutma cümle izomorfizmi olup,

$$\alpha(I)xGL(3,\mathbb{R})/_{GL(3,\mathbb{R})} \cong \alpha(I)$$

dır. Diğer taraftan Diyagram 2.1 gereğince

$$\pi : \alpha(I)xGL(3,\mathbb{R}) \longrightarrow \alpha(I)$$

nın koordinat temsilcisi G ile gösterildiğinde,

$$\begin{array}{ccc} \alpha(I)xGL(3,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\pi} & \alpha(I) \\ \downarrow x \quad \downarrow y & & \downarrow x \\ \mathbb{R} \; x \; \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{G} & \mathbb{R} \end{array}$$

Diyagram 2.1

$$G = xo\pi o(xxy)^{-1}$$

olup,

$$G(u,v) = [\, x o \pi o (x x y)^{-1}]\ (u,v)$$
$$= x o \pi(\alpha(t),A)$$
$$= x(\alpha(t))$$
$$= u$$
$$= iz_1(u,v)$$

$\Rightarrow$ G, C^∞ dur. Burada $x^{-1}(u) = \alpha(t)$, $y^{-1}(v) = A$ dır.

Dolayısıyla, $\pi = x^{-1} o G o (x x y)$ fonksiyonu C^∞ dur.

ALD 3) $\alpha(I) x GL(3,\mathbb{R})$ Lokâl aşikârdır.

Bunun için,

$$\Psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U x GL(3,\mathbb{R})$$
$$(\alpha(t),A) \longrightarrow (\pi(\alpha(t),A), \varphi(\alpha(t),A))$$
$$= (\alpha(t), \varphi(\alpha(t),A))$$

dönüşümünü göz önüne alalım.

Burada,

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow GL(3,\mathbb{R})$$
$$(\alpha(t),A) \longrightarrow \varphi(\alpha(t),A) = A$$

olarak tanımlayalım. Böylece,

$$\varphi((\alpha(t),A),B) = \varphi(\alpha(t),AB)$$
$$= AB$$
$$= \varphi(\alpha(t),A).B \qquad ;\ B \in GL(3,\mathbb{R})$$

sağlanır. Bu takdirde,

$$\Psi(\alpha(t),A) = (\alpha(t),A)$$

olduğundan Ψ özdeşlik dönüşümü olup diffeomorfizmdir.

O halde $\alpha(I) x GL(3,\mathbb{R}) (\alpha(I), GL(3,\mathbb{R}))$ sistemi bir asli lif demetidir.

Genel olarak, M bir C^∞ manifold ve G bir Lie grubu iken $P = M x G$ olmak üzere,

$$PxG \longrightarrow P$$

$$((m,g),a) \longmapsto (m,ga)$$

şeklinde tanımlı etki ile birlikte P, M üzerinde bir asli lif demeti olur ve bu asli lif demetine aşikâr lif demeti denir (Kozsul, 1962). Bundan sonra bu özelliği doğrudan kullanacağız. Buna göre,

$$\alpha(I)xO(2)(\alpha(I),O(2))$$

bir aşikâr asli lif demeti olarak gözönüne alınabilir. Bu demete, α boyunca uyarlanmış çatıların asli lif demeti diyeceğiz.

Şimdi $\alpha(I)xGL(3,\mathbb{R})$ asli lif demetinin bir koneksiyonunu tanıtacağız.

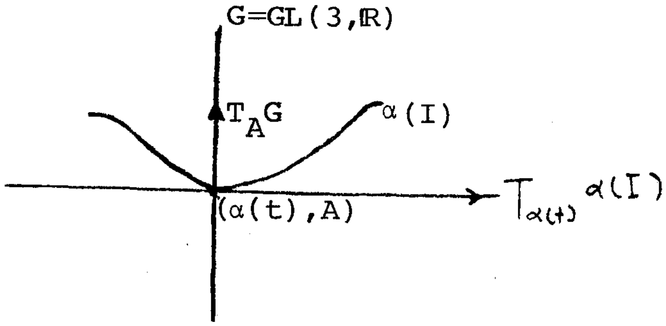
2.1.1 Teorem. $\alpha(I)xGL(3,\mathbb{R})$ $(\alpha(I),GL(3,\mathbb{R}))$ de herbir

$$u = (x,A) \in \alpha(I)xGL(3,\mathbb{R}) \quad \text{için}$$

$$u \longrightarrow \Gamma(u) = Q_u = T_x\alpha(I)$$

bir koneksiyondur.

İspat.



Şekil 2.1

$u = (x,A) \in \alpha(I)xGL(3,\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$uGL(3,\mathbb{R}) = \{(x,A)B \mid B \in GL(3,\mathbb{R})\}$$

$$= \{(x,AB) \mid B \in GL(3,\mathbb{R})\}$$

$$u\,GL(3,\mathbb{R}) = \{(x,C) \mid C \in GL(3,\mathbb{R})\}$$
$$= \{x\} \times GL(3,\mathbb{R})$$
$$\Rightarrow \quad GL(3,\mathbb{R})_u = T_A GL(3,\mathbb{R})$$

dır. Böylece,

$$T_u(\alpha(I) \times GL(3,\mathbb{R})) = GL(3,\mathbb{R})_u \oplus Q_u$$

olur. Ayrıca,

$$\mathcal{R}_B(Q_u) = Q_{uB}$$

olduğu ve $u \longrightarrow Q_u$ fonksiyonun diferansiyellenebilir olduğu aşikârdır.

2.1.1 Sonuç. $\alpha(I) \times GL(3,\mathbb{R})$ de $\Gamma: u \longrightarrow Q_u = T_x\alpha(I)$ koneksiyonuna göre, α eğrisinin $(\alpha(t_o),A)$ dan geçen yatay lifti,

$$U_t = (\alpha(t),A)$$

dır.

İspat. α eğrisinin $(\alpha(t_o),A)$ dan geçen yatay lifti U_t ise, $U_{t_o} = (\alpha(t_o),A)$ ve U_t biriciktir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

$U_t \in \alpha(I) \times GL(3,\mathbb{R})$ olacağından,

$$U_t = (\alpha(t),A(t))$$

şeklinde olmalıdır. Böylece U_t nin yatay olması nedeniyle,

$$U_t' = (\alpha'(t),A'(t)) \in Q_{U_t} = T_{\alpha(t)}\alpha(I)$$
$$\Rightarrow \quad A'(t) = 0$$
$$\Rightarrow \quad A(t) = \text{sabit}$$

bulunur. Halbuki, $A(t_o) = A$ dır. O halde, her $t \in I$ için

$$A(t) = A$$

yani,

$$U_t = (\alpha(t), A)$$

dır.

Daha sonra kullanacağımız için burada Frenet liftinin tanımını ve $\alpha(I)\times GL(3,\mathbb{R})$ nin, bu standart koneksiyonun $\alpha(I)\times O(3)$'e kısıtlanmasının Frenet lifti ile ilgili bir sonucunu vereceğiz.

2.1 Tanım.

$M \subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı,

$$\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_r(s)\}$$

olsun. Buna göre, Frenet çatı alanı F iken,

$$F : \alpha(I) \longrightarrow \mathfrak{F}_0$$
$$\alpha(t) \longrightarrow F(\alpha(t)) = (\alpha'(t); V_1(t), \ldots, V_n(t))$$

olarak tanımlı F fonksiyonuna α nın Frenet lifti denir (Hacısalihoğlu, 1979; Gluck, 1966).

2.1.2 Teorem. $\alpha(I)\times O(3)$ deki standart koneksiyonun koneksiyon 1-formu w ve α nın Frenet lifti F olsun. O zaman,

$$w(F') = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

İspat. $\sigma : P\times O(3) \longrightarrow P$

$$\sigma_{\tilde{F}(t)} : O(3) \longrightarrow P$$
$$B \longrightarrow \tilde{F}(t)B = (\alpha(t), F(t)B)$$

olmak üzere,

$$({}^{\sigma}\tilde{F}(t))_{*}\Big|_{I_3}\left(\begin{bmatrix}0 & -k_1 & 0\\ k_1 & 0 & -k_2\\ 0 & k_2 & 0\end{bmatrix}\right)$$

değerini hesaplayalım. Böylece,

$$w(\tilde{F}'(t)) = A$$

olur. Gerçekten de,

$$({}^{\sigma}\tilde{F}(t))_{*}\Big|_{I_3}\left(\begin{bmatrix}0 & -k_1 & 0\\ k_1 & 0 & -k_2\\ 0 & k_2 & 0\end{bmatrix}\right) = F'(t)$$

verildiğinde

$$A = \begin{bmatrix}0 & -k_1 & 0\\ k_1 & 0 & -k_2\\ 0 & k_2 & 0\end{bmatrix}$$

olmak üzere, A ya karşılık gelen temel vektör alanı

$A^{*} = \tilde{F}'(t)$ olup,

$$\tilde{F}(t) = (\alpha(t), F(t))$$

$$\tilde{F}'(t) = (\alpha'(t), F'(t))$$

için,

$$\nu(\tilde{F}'(t)) = F'(t)$$

dir. Buna göre

$$(L_{F(t)})_{*}\Big|_{I_n}\left(\begin{bmatrix}0 & -k_1 & 0\\ k_1 & 0 & -k_2\\ 0 & k_2 & 0\end{bmatrix}\right) = (L_{F(t)})_{*}\Big|_{I_n}(-k_1\partial_{12}+k_1\partial_{21}-k_2\partial_{23}+k_2\partial_{32})$$

$$= -k_1\sum_{t=1}^{3} f_{t_1}\frac{\partial}{\partial x_{t_2}} + k_1\sum_{t=1}^{3} f_{t_2}\frac{\partial}{\partial x_{t_1}}$$

$$-k_2\sum_{t=1}^{3} f_{t_2}\frac{\partial}{\partial x_{t_3}} + k_2\sum_{t=1}^{3} f_{t_3}\frac{\partial}{\partial x_{t_2}}$$

$$= -k_1 \begin{bmatrix} 0 & f_{11} & 0 \\ 0 & f_{21} & 0 \\ 0 & f_{31} & 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} f_{12} & 0 & 0 \\ f_{22} & 0 & 0 \\ f_{32} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_{12} \\ 0 & 0 & f_{22} \\ 0 & 0 & f_{32} \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & f_{13} & 0 \\ 0 & f_{23} & 0 \\ 0 & f_{33} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [\, k_1 V_2 \ , \ -k_1 V_1 + k_2 V_3 \ , \ -k_2 V_2]$$

$$= F'(t)$$

$$\Rightarrow \quad w(F'(t)) = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Bu şekilde elde edilen k_i fonksiyonlarına α nın eğrilik fonksiyonları denir. Özel olarak, k_1, 1.eğrilik fonksiyonu, k_2 ise 2. eğrilik fonksiyonu adını alır.

2.2 Kovaryant Türev, ∇ operatörü

$E(P(M,G),\mathbb{R}^n)$ birleştirilmiş asli lif demeti verilsin. $U \subset M$ açık alt cümlesi üzerinde E nin kesitlerinin uzayı

$$S(U,E) = \{\varphi \mid \varphi : U \to E \ , \ \pi_E \circ \varphi = id_U\}$$

olmak üzere, herhangi bir $\alpha : I \to U$ eğrisi boyunca φ kesitinin kovaryant türevi,

$$\nabla_{\alpha'(t)} \varphi = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [\, \tau_t^{t+h} \ (\varphi(\alpha(t+h))) - \varphi(\alpha(t))]$$

olarak tanımlanır (Kobayashi and Nomizu, 1963).

Burada $\tau_t^{t+h} = U_t o U_{t+h}^{-1}$ izomorfizmdir. Diğer taraftan herbir $X \in S(U,E)$ kesiti, P üzerinde tanımlı $\mathbb{R}^n$ değerli bir f fonksiyonuna karşılık gelir. Bu f fonksiyonu,

$$f : P \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$U \longrightarrow f(U) = U^{-1}(X_{\pi(U)})$$

şeklinde tanımlıdır (Kobayashi and Nomizu, 1963). Daha fazlası, herbir X vektör alanı ve $\varphi \in S(U,E)$ kesiti için,

$$\nabla_X \varphi = \nabla_{\alpha'(t)} \varphi \quad , \quad \alpha'(t) = X_{\alpha(t)}$$

eşitliği ile,

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) x S(U,E) \longrightarrow S(U,E)$$

olarak düşünülebilir. Buna göre kovaryant türevin yöne göre türev anlamında karşılığını da aşağıdaki teorem ile vermek mümkün olur.

2.2.1 Teorem.

$E(P(M,G),\mathbb{R}^n)$ birleştirilmiş asli lif demetinin $U \subset M$ açık cümlesi üzerindeki herbir φ kesiti için, φ nin karşılık geldiği fonksiyon f olmak üzere,

$$\nabla_X \varphi = U(X^* f)$$

dir. Burada, X^* ile X in yatay lifti gösterilmiştir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

α eğrisi üzerinde,

$$\alpha(I) x \mathbb{R}^3 (\alpha(I) x GL(3,\mathbb{R}) (\alpha(I), GL(3,\mathbb{R})), \mathbb{R}^3)$$

birleştirilmiş asli lif demetini gözönüne alalım. Böylece,

$$E = \alpha(I) x \mathbb{R}^3$$

olup, herbir $Y \in S(\alpha(I),E)$ kesiti,

$$Y_{\alpha(t)} = \Sigma\, \eta_j\big|_{\alpha(t)} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\alpha(t)} \cong (\alpha(t), \eta_1(\alpha(t), \eta_2(\alpha(t), \eta_3(\alpha(t)))$$

şeklindedir. Y nin belirlediği P de tanımlı $\mathbb{R}^3$ değerli fonksiyon f ve $U = (x,g) : \mathbb{R}^3 \to \pi^{-1}(x) \cong T_xE^3 \cong \{\alpha(t)\} \times GL(3,\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f(U) &= U^{-1}(Y_{\pi(U)}) \\ &= U^{-1}(Y_x) \\ &= g^{-1}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan, $X = \alpha'(t)$ nin yatay lifti $X^* = \alpha'(t)$ olup (2.1.1 sonuç),

$$\begin{aligned} \nabla_{X_{\alpha(t)}} Y &= \nabla_{\alpha'(t)} Y \\ &= U(X^*f) \quad , \quad U = (\alpha(t), I_3) \\ &= U(X[\eta_1]\, ,\ X[\eta_2]\, ,\ X[\eta_3]\ ) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \nabla_X Y = \sum_{i=1}^{3} X[\eta_i] \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\alpha(t)} \tag{2.2.1}$$

elde edilir. Bu ise, E^3 ün geometrisinde bilinen standart lineer koneksiyonun α ya kısıtlanmasından başka bir şey değildir (Hacısalihoğlu, 1983).

Şimdi bir koneksiyonun eğrilik ve torsion tensörlerini tanımlayacağız. Bunun için "Kanonik 1-Form" kavramını tanıtarak işe başlayacağız.

2.2 Tanım. (Kanonik 1-Form)

P(M,G) A.L.D. verilsin.

$$\begin{aligned} \theta : P &\longrightarrow \bigcup_{u\in P} \mathrm{Hom}(T_uP, \mathbb{R}^n) \\ u &\longrightarrow \theta_u : T_uP \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ &\qquad\qquad X_u \longrightarrow \theta_u(X_u) = U^{-1}(\pi(X_u)) \end{aligned}$$

olarak tanımlı $\mathbb{R}^n$ değerli 1-formuna P nin kanonik 1-formu denir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

2.3 Tanım.

θ , P(M,G) A.L.D. nin kanonik 1-formu olsun.

$\Theta = D\theta = d\theta \circ h$ ya Γ koneksiyonunun torsion formu denir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

Γ koneksiyonu ve w koneksiyon 1-formu verildiğinde, Γ nın eğrilik 1-formu

$$\Omega = Dw$$

olarak tanımlanır (Kobayashi and Nomizu, 1963).

2.4 Tanım.

P(M,G) asli lif demeti ve Γ koneksiyonu verilsin.

i) Her $X_x, Y_x \in T_xM$ için,

$$T(X_x, Y_x) = U(2\Theta_U(X_x^*, Y_x^*))$$

olmak üzere, tanımlı T fonksiyonuna Γ nın torsion tensörü,

ii) Her $X_x, Y_x, Z_x \in T_xM$ için,

$$\mathcal{R}(X_x, Y_x)Z_x = U[(2\Omega(X_x^*, Y_x^*))(U^{-1}(Z_x))] \in T_xM$$

olarak tanımlı $\mathcal{R}$ fonksiyonuna da Γ nın eğrilik tensörü denir. (Burada $*$ ile yatay lift işaret edilmektedir ve $\pi(U) = X$ dir) (Kobayashi and Nomizu, 1963).

Γ koneksiyonunun torsiyon ve eğrilik tensörlerinin ∇ cinsinden değerlerini aşağıdaki teoremde vereceğiz. Biz teoremin ispatını vermiyoruz ancak, ispatın (Kobayashi and Nomizu, 1963) da açıkça bulunabileceğini belirtelim.

2.2.2 Teorem.

i) $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$

ii) $\mathcal{R}(X,Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z$

$= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$

dir.

2.2.1 Sonuç.

$\alpha(I)xGL(3,\mathbb{R})$ de

$$\Gamma : u \longrightarrow Q_u = T_x\alpha(I) \quad , \quad u = (x,g)$$

koneksiyonu için,

$$T = 0 \quad , \ \mathcal{R} = 0$$

dır.

İspat. 2.2.2 Teorem ve (2.2.1) eşitliği gereğince ispat (Hacısalihoğlu, 1983) deki ispatın tekrarından ibarettir.

BÖLÜM 3

3. $\alpha(I) \times \mathbb{R}^3$ DE RELATİF PARALEL KESİTLER

$\alpha(I) \times \mathbb{R}^3$ $(\alpha(I) xGL(3,\mathbb{R})(\alpha(I), GL(3,\mathbb{R}), \mathbb{R}^3)$ B.A.L.D. için kesitlerin cümlesi $S = S(\alpha(I), \alpha(I) \times \mathbb{R}^3)$ olsun.

S de her $\Phi, \Psi \in S$ ve her $a \in \mathbb{R}$ için,

$(\Phi+\Psi)(x) = \Phi(x) + \Psi(x)$, her $x \in \alpha(I)$

$(a\Phi)(x) = a.\Phi(x)$, her $x \in \alpha(I)$

olarak tanımlanırsa, herhangi bir B.A.L.D. için geçerli olan vektör uzayı yapısı burada da vardır (Kobayashi and Nomizu, 1963). Bu uzayda iç-çarpım fonksiyonu T_xE^3 deki iç-çarpımın indirgediği iç-çarpım olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

3.1 Tanım.

$\Phi, \Psi \in S(\alpha(I), \alpha(I) \times \mathbb{R}^3) = S$ için

$$\begin{aligned} \langle\, ,\rangle : S \times S &\longrightarrow C(\alpha(I), \mathbb{R}) \\ (\Phi, \Psi) &\longrightarrow \langle\Phi, \Psi\rangle \end{aligned}$$

dönüşümü her $t \in I$ için,

$$\langle\Phi, \Psi\rangle(\alpha(t)) = \langle \Phi(\alpha(t)), \Psi(\alpha(t))\rangle$$

olarak tanımlanır ve bu dönüşüme S de bir iç-çarpım denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Burada, $\Phi(\alpha(t))$ ve $\Psi(\alpha(t)) \in T_{\alpha(t)}E^3$ ve $\langle\, ,\rangle$ de E^3 ün Riemann metriğidir. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \|\ \| : S &\longrightarrow C(\alpha(I), \mathbb{R}) \\ \Phi &\longrightarrow \|\Phi\| = \sqrt{\langle\Phi, \Phi\rangle} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır ve $\|\Phi\|$ ye Φ nin normu denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Kolayca görülebileceği gibi, iki kesit arasındaki açı Θ olmak üzere,

$$\cos\Theta = \frac{<\Phi,\Psi>}{\|\Phi\| \ \|\Psi\|}$$

dır (Hacısalihoğlu, 1983). Böylece iki kesitin dikliği ile,iç-çarpımlarının sıfır olmasını anlayacağız.

(Bishop, 1975) daki relatif paralel vektör alanı kavramını $\alpha(I)xGL(3,\mathbb{R})$ nin kesitleri için aşağıdaki şekilde tanımlayacağız:

3.2 Tanım.

$\alpha(I)x\ \mathbb{R}^3(\alpha(I)xGL(3,\mathbb{R})(\alpha(I),GL(3,\mathbb{R})),\mathbb{R}^3)$ B.A.L.D. de α ya dik herbir Φ kesitinin α boyunca kovaryant türevi daima eğriye teğet kalıyor ise, Φ ye relatif paralel vektör alanı denir (Bishop, 1975).

$$\Phi \in S(\alpha(I),\alpha(I)x\ \mathbb{R}^3)$$

kesiti için,

$$< \Phi(\alpha(t),\alpha'(t)> = 0 \quad , \quad \text{her } t \in I$$

iken

$$\nabla_{\alpha'(t)}\Phi = c.\alpha'(t)$$

ise, Φ kesiti α boyunca relatif paraleldir.

3.3 Tanım.

$\alpha(I)xGL(3,\mathbb{R})((\alpha(I),GL(3,\mathbb{R})),\ \mathbb{R}^3)$ B.A.L.D. de α' ile lineer bağımlı (α' ye paralel) herbir Φ kesiti, α boyunca daima eğrinin birim teğetinin sabit bir katı ise,

Φ ye relatif paralel vektör alanı denir (Bishop, 1975)

Bu iki tanım,

$$T_{\alpha(t)}\pi_E^{-1}(\alpha(t) = T_{\alpha(t)}\alpha\ (I) \oplus \perp_{\alpha(t)}\alpha\ (I)$$

olduğu gözönüne alınarak birleştirilebilir. Burada, $\perp_{\alpha(t)}\alpha\ (I)$ ile $T_{\alpha(t)}\alpha(I)$ nın $T_{\alpha(t)}E^3$ deki ortogonal tümleyeni gösterilmiştir.

3.4 Tanım.

$\Phi \in S$ kesiti verilsin. $\Phi_1 \in T_{\alpha(t)}\alpha(I)$, $\Phi_2 \in \perp_{\alpha(t)}\alpha(I)$ ve $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ olmak üzere, Φ_1 ve Φ_2 kesitleri α boyunca relatif paralel iseler, Φ kesitine α boyunca relatif paralel denir (Bishop, 1975).

Notasyon:

Bundan sonra, $S = S(\alpha(I), \alpha(I) x E^3)$ deki relatif paralel kesitlerin cümlesini ∇-RPS ile göstereceğiz.

3.1 Teoerm.

∇-RPS cümlesi bir reel vektör uzayıdır.

İspat.

Her $\Phi, \Psi \in S$ ve $\Phi, \Psi \perp \alpha$

için,

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha'(t)}(\Phi+\Psi) &= \nabla_{\alpha'(t)}\Phi + \nabla_{\bar{\alpha}'(t)}\Psi \\ &= c_1\alpha'(t) + c_2\alpha'(t) \\ &= (c_1+c_2)\alpha'(t) \\ &= c.\alpha'(t) \end{aligned}$$

dir.

(.) dış-işlemi için ise, $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\nabla_{\alpha'(t)}\lambda\Phi = \lambda \nabla_{\alpha'(t)}\Phi$$

$$= \lambda c.\alpha'(t)$$

$$= k.\alpha'(t)$$

dır. Böylece, ∇-RPS cümlesi S nin bir alt vektör uzayıdır.

3.2 Teoerem.

$\alpha \in E^3$ eğrisi üzerinde herhangi iki ∇-RPS arasındaki açı sabittir.

İspat.

$\Phi, \Psi \in \nabla$-RPS verilsin. Bu iki kesit arasındaki açı 3.4 Tanım gereğince,

$$\cos\Theta = \frac{\langle\Phi , \Psi\rangle}{\|\Phi\| \ \|\Psi\|}$$

dır. Burada Φ ve Ψ yi birim almak genelliği bozmaz. Üstelik, $\Phi, \Psi \in \perp_{\alpha(t)}\alpha(I)$ iken,

$\left(\cos\Theta = \langle\Phi, \Psi\rangle\right.$

yazılabileceğinden$\left.\right)$,

$$(\cos\Theta)' = \langle\Phi', \Psi\rangle + \langle\Phi, \Psi'\rangle$$

olur. Burada

$$\langle\Phi', \Psi\rangle = 0 \quad \text{ve} \quad \langle\Phi, \Psi'\rangle = 0$$

olduğundan,

$$(\cos\Theta)' = 0$$

$$\Rightarrow \cos\Theta = \text{sabit}$$

$$\Rightarrow \Theta \ \text{sabittir.}$$

Diğer taraftan $\Phi, \Psi \in \chi(\alpha')$ iken $\measuredangle\Theta(\Phi, \Psi) = 0$ olacağından ispat açıktır.

3.3 Teorem.

Herbir $\Phi \in \nabla$-RPS nin uzunluğu sabittir (Bishop, 1975).

İspat. $\Phi \in \nabla$-RPS i verilsin. Φ kesitinin uzunluğu k ise 3.1 Tanım gereğince,

$$\langle \Phi, \Phi \rangle = k^2 \quad : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

dir.

i) $\Phi \perp \alpha(I)$ hali:

$$\langle \Phi, \Phi \rangle = k^2 \Rightarrow 2\langle \nabla_{\alpha'(t)} \Phi, \Phi \rangle = 2kk'$$

$$\Rightarrow 2 \langle c\alpha'(t), \Phi \rangle = 2kk'$$

$$\Rightarrow 2c \langle \alpha', \Phi \rangle = 2kk'$$

$$\overset{\Phi \perp \alpha(I)}{\Rightarrow} \quad 0 = kk'$$

$$\Rightarrow \quad k = \text{sabit}$$

olur.

ii) $\Phi // \alpha(I)$ hali:

$$\Phi // \alpha(I) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \ni c = \text{sabit} \quad \text{ve } \Phi = c\alpha'(t)$$

dir.

$$\| \alpha'(t) \| = 1 \Rightarrow \| \Phi \| = |c| . \| \alpha'(t) \|$$

$$= |c| = \text{sabit}$$

olur. Dolayısıyla her iki halde de uzunluk sabittir.

3.4 Teoerm.

$\alpha : I \longrightarrow E^n$ eğrisi verilsin.

$P = \alpha(t_o)$, $t_o \in I$ olmak üzere, $v_p \in T_p E^n$ için,

$\Phi(\alpha(t_o)) = v_p$ olacak şekilde bir tek $\Phi \in \nabla$-RPS vardır (Bishop, 1975).

İspat. (Varlık)

$v_p \in T_pE^n$ tanjant vektörü, $v_1 \in T_{\alpha(t)}\alpha(I)$ ve $v_2 \in \perp_{\alpha(t)}\alpha(I)$ olmak üzere,

$$v_p = v_1 + v_2$$

şeklinde,bir tek yazılışa sahiptir. Buna göre,

$$\Phi_1 = \|v_1\| T$$

şeklinde tanımlı Φ_1 kesiti α boyunca relatif paraleldir. Diğer taraftan, Φ_2 kesitini,

$$\nabla_{\alpha'(t)}\Phi_2 = - \langle \Phi_2(\alpha(t),\alpha''(t)\rangle T \qquad (3.4.1)$$

diferansiyel denklem sisteminin $\Phi_2(\alpha(t_o)) = v_2$ başlangıç şartları ile çözümü olarak tanımlayalım. (3.4.1) denkleminin verilen başlangıç şartları ile çözümünün var ve tek olması nedeniyle Φ_2 var ve tektir. Diğer taraftan,

$$\langle \Phi_2(\alpha(t)),\alpha'(t)\rangle = f(t)$$

$$\Rightarrow \langle \nabla_{\alpha'(t)}\Phi_2,\alpha'(t)\rangle + \langle \Phi_2(\alpha(t)),\alpha''(t)\rangle = f'(t)$$

$$\Rightarrow \quad -\langle \Phi_2(\alpha(t)),\alpha''(t)\rangle \cdot \langle \alpha'(t),\alpha'(t)\rangle + \langle \Phi_2(\alpha(t),\alpha''(t)\rangle = f'(t)$$

$$\Rightarrow \quad -\langle \Phi_2(\alpha(t)),\alpha''(t)\rangle + \langle \Phi_2(\alpha(t)),\alpha''(t)\rangle = f'(t)$$

$$\Rightarrow \quad f'(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \text{sabit}$$

dır. Halbuki,

$$\begin{aligned} f(t_o) &= \langle \Phi_2(\alpha(t_o)),\alpha'(t_o)\rangle \\ &= \langle v_2,\alpha'(t_o)\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. O halde, Φ_2 , α ya diktir. Böylece

$$\Phi_2 \perp \alpha \quad , \quad \nabla_{\alpha'(t)}\Phi_2 = cT$$

olduğundan Φ_2 , α-boyunca relatif paraleldir. Sonuç olarak,

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

α-boyunca relatif paralel, üstelik

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha(t_0)) &= \Phi_1(\alpha(t_0)) + \Phi_2(\alpha(t_0)) \\ &= v_1 + v_2 \\ &= v_p \end{aligned}$$

dir. O halde, teoremde istenilen Φ kesiti mevcuttur.

Teklik: Φ ve Ψ istenilen şartlarda iki relatif paralel kesit olsun. O zaman,

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$
$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

$\Phi_1, \Psi_1 \in T_{\alpha(t)}\alpha(I)$ ve $\Phi_2, \Psi_2 \in \perp_{\alpha(t)}\alpha(I)$ olmak üzere,

$$\nabla_{\alpha'}(\Phi_2 - \Psi_2) = 0$$
$$\Rightarrow \Phi_2 - \Psi_2 = \text{sabit} = a$$

olup,

$$\Phi_2(\alpha(t_0)) - \Psi_2(\alpha(t_0)) = v_2 - v_2 = 0$$

olduğundan, $a = 0$, yani,

$$\Phi_2 = \Psi_2$$

dir.

$$\Phi_1 = b_1 T \quad , \quad \Psi_1 = b_2 T$$

olmak üzere,

$$b_1 T = \Phi - \Phi_2$$
$$b_2 T = \Psi - \Psi_2$$

dır. Buradan,

$$b_1T-b_2T = \Phi-\Psi$$

$$\Rightarrow (b_1-b_2)T = \Phi-\Psi$$

$$\Rightarrow |b_1-b_2| = \|\Phi-\Psi\|(\alpha(t)) \quad , \quad \text{her } t\in I$$

yazabiliriz. Φ ve $\Psi \in \nabla$ -RPS olduğundan $\|\Phi\|$ ve $\|\Psi\|$ sabit olup (3.3 Teorem), $\|\Phi-\Psi\|$ sabittir. Halbuki bu halde,

$$\|\Phi-\Psi\|(\alpha(t_o)) = \|v_p-v_p\| = 0$$

$$\Rightarrow |b_1-b_2| = 0$$

$$\Rightarrow b_1 = b_2$$

$$\Rightarrow \Phi_1 = \Psi_1$$

dir. Böylece, $\Phi = \Psi$ elde edilir. O halde, istenilen şartlarda ∇-RPS tektir.

BÖLÜM 4

4. RELATİF PARALEL ÇATI ALANLARI VE RELATİF PARALEL KONEKSİYON

4.1 Tanım.

$\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisi ve $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \in \nabla$-RPS verilsin. $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ sistemi her $\alpha(t) \in \alpha(I)$ da $T_{\alpha(t)}E^3$ ün bir bazı ise, $(\alpha(t), \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ sistemine α-boyunca ∇ ya göre bir relatif paralel çatı alanı (∇-RPÇ) veya α nın $\alpha(I)xGL(3,\mathbb{R})$ deki bir ∇-RPÇ lifti denir.

4.1 Teorem.

$\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisinin $u_{t_o} = (\alpha(t_o), v_1, v_2, v_3)$ den geçen ∇-RPÇ lifti var ve tektir.

İspat. 3.4 Teorem gereğince $v_i = \Phi_i(t_o)$, $i=1,2,3$ başlangıç şartı ile $\Phi_i \in \nabla$-RPS var ve tek olduğundan ispat açıktır.

Bundan sonraki kısımda, $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisinin $\alpha(I)xO(2)$ deki özel bir liftini inceleyebilmek için, $\alpha(I)xO(3)$ asli lif demetinin yapı grubunu kısıtlayarak,

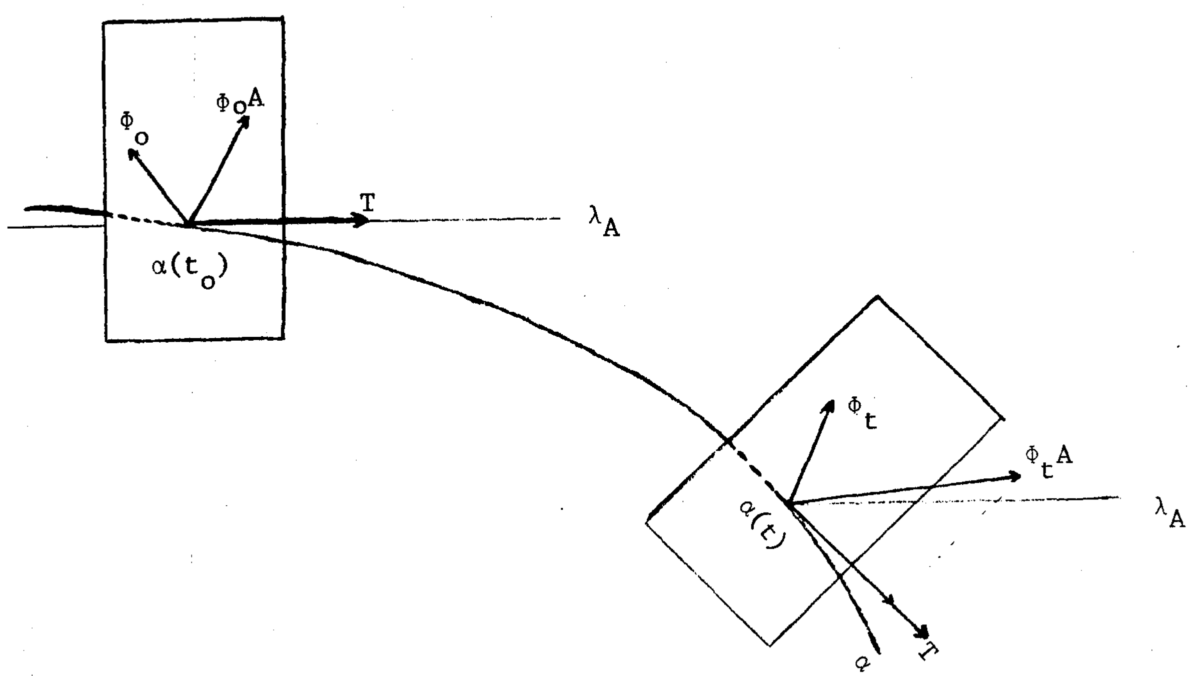
$$\alpha(I)xO(3)(\alpha(I), O(2))$$

asli lif demetini ve nihayet $\alpha(I)xO(3)$ ün $\alpha(I)xO(2)$ alt demetini tanımlayacağız.

$\alpha(I)xO(3)(\alpha(I), O(3))$ ortonormal çatıların aşikâr asli lif demetini gözönüne alalım. α nın $\alpha(I)xO(3)$ deki bir ∇-RPÇ lifti $u_t = (\alpha(t),\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)$ verilsin. Aşıkâr olarak $A \in O(3)$ herhangi bir eleman iken,

$$v_t = R_A u_t = (\alpha(t),\Phi_1 A,\Phi_2 A,\Phi_3 A)$$

olmak üzere v_t bir ∇-RPÇ lift olmak zorunda değildir. Gerçekten de,



Şekil 4.1

$A \in O(3)$ ün karakteristik uzayı λ_A iken $t_o,t_1 \in I$ için $Sp\alpha'(t_o) = \lambda_A$, $Sp\alpha'(t_1) \neq \lambda_A$ olmak üzere, $\alpha(t_o)$ da $\Phi_o A$ nın teğet bileşeni sıfırdır. Fakat $\alpha(t_1)$ de $\Phi_t A$ nın teğet bileşeni sıfır değildir (Şekil 4.1).

O halde $\Phi_t A \notin \nabla$-RPS dır. Böylece, $v_t \notin \nabla$-RPÇ olur.

4.2 Tanım. (∇-RPUÇ=∇-Relatif Paralel Uyarlanmış Çatı Alanı)

$\alpha(t)$ noktasında $u_t = (\alpha(t),T,X,Y,) \in \nabla$-RPÇ lifti verilsin. Eğer her $\alpha(t)$ noktasında $\{T,X,Y\}$ ortonormal ise, u_t liftine ∇-RPUÇ denir.

Bu tanım (Bishop, 1975) da aynı isimle bir eğri üzerinde çatı alanı olarak verilmektedir. Bu çatı alanı için aşağıdaki özelliği verebiliriz:

4.2 Teorem.

α nın bir ∇-RPUÇ lifti u_t olmak üzere, E^3 deki standart koneksiyonun koneksiyon 1-formu w olmak üzere,

$$w_{u_t}(u_t') = \begin{bmatrix} 0 & r_1 & r_2 \\ -r_1 & 0 & 0 \\ -r_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \qquad r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

dır.

İspat. 2.1.2 Teorem de F yerine u_t alınarak doğrudan işlem yapmak suretiyle eşitlik kolayca elde edilir.

4.3 Tanım.

α nın bir ∇-RPUÇ lifti u_t olsun. O zaman, $w_{u_t}(u_t')$ nin (1,2)-nci bileşeni ve (1,3)-ncü bileşenleri yardımıyla tanımlı $r_1, r_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarına, α nın $\alpha(t)$ noktasındaki u_t ye göre birinci ve ikinci eğrilik fonksiyonları denir.

Bu tanım (Bishop, 1975) da verilen tanım ile denktir.

4.3 Teorem.

α nın iki ∇-RPUÇ lifti u_t ve v_t olsun. O zaman α nın u_t ye göre eğrilik fonksiyonları r_1, r_2 ve v_t ye göre k_1, k_2 ise, bir tek $\theta \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

dir.

İspat. $u_t = (\alpha(t),T,X,Y)$, $v_t = (\alpha(t),T,Z,W)$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} : \{Z,W\} \longrightarrow \{X,Y\}$$

baz değişim matrisinin varlık ve tekliğinden ispat açıktır.

Şimdi $\alpha(I)xO(3)$ ün yapı grubunu $O(2)$ ye kısıtlayacağız. Burada,

$$O(2)=\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \middle| \; \Theta \in \mathbb{R} \right\}$$

olarak alınmalıdır. Böylece,

$$\alpha(I)xO(3)(\alpha(I),O(2))$$

de $u_t \in \nabla$-RPUÇ lifti $O(2)$ nin etkisi altında invaryanttır. Bunu bir teorem ile verelim:

4.4 Teorem.

$u_t \in \nabla$-RPUÇ verilsin. O zaman, her $A \in O(2)$ için, $\mathcal{R}_A u_t \in \nabla$-RPUÇ dur.

İspat. $u_t = (\alpha(t),T,X,Y) \in \nabla$-RPUÇ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} , \; \Theta \in \mathbb{R}$$

olmak üzere,

$$\mathcal{R}_A u_t = u_t A = (\alpha(t),T,\cos\Theta X-\sin\Theta Y,\sin\Theta X + \cos\Theta Y)$$

dir. Böylece,

$$\nabla_{\alpha'(t)}(\cos\Theta X-\sin\Theta Y) = \cos\Theta\nabla_{\alpha'(t)}X-\sin\Theta\nabla_{\alpha'(t)}Y$$

$$= \cos\Theta . c_1 T-\sin\Theta . c_2 T$$

$$\nabla_{\alpha'(t)}(\cos\theta X-\sin\theta Y) = (c_1\cos\theta-c_2\sin\theta)T$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta X-\sin\theta Y \in \nabla\text{-RPS}$$

dir.

Benzer şekilde, $\sin\theta.X + \cos\theta.Y \in \nabla$-RPS olur. Dolayısıyla, $\mathcal{R}_A u_t \in \nabla$-RPUÇ dur.

$u_t = (\alpha(t),T,X,Y) \in \nabla$-RPUÇ verildiğinde sütun vektörleri sırasıyla (T,X,Y) olan bir

$$B_t = [T \quad X \quad Y] \in O(3)$$

matrisi tek türlü bellidir. Böylece, $\alpha(I)xO(3)$ deki $u_t \in \nabla$-RPUÇ lifti $O(3)$ ün bir $t \longrightarrow B_t$ eğrisini tanımlar. Bu nedenle u_t liftini $(\alpha(t),B_t)$ olarak anlayacağız. O halde, $\alpha(I)xO(3)$ ün u_t deki tanjant uzayı $(\alpha(t),B_t)$ deki tanjant uzayından ibaret olacaktır.

4.1 Örnek.

$$\alpha : [-\pi,\pi] \longrightarrow E^3$$
$$t \longrightarrow \alpha(t)=(\cos t,\sin t,0)$$

eğrisi verilsin.

$$X_{\alpha(t)} = \cos t \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{\alpha(t)} + \sin t \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{\alpha(t)}$$

$$T_{\alpha(t)} = -\sin t \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{\alpha(t)} + \cos t \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{\alpha(t)}$$

$$Y_{\alpha(t)} = \left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_{\alpha(t)}$$

olmak üzere,

$$u_t = (\alpha(t),T,X,Y) \in \nabla\text{-RPUÇ}$$

olup,

$$B_t = \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t & 0 \\ \cos t & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in O(3)$$

dır. Burada,

$$B_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow T_{\alpha(t)}E^3$$

baz izomorfizmi olduğunu, yani B_t lineer dönüşümü için,

$$B_t(e_1) = T$$
$$B_t(e_2) = X$$
$$B_t(e_3) = Y$$

yazılabileceğini de burada ifade etmiş olalım. Böylece $u_t = (\alpha(t), B_t)$ yazılabilir.

Şimdi, $\alpha(I)xO(3)$ ün $O(2)$ etki grubuyla bir alt demetini tanıtacağız.

$$\tilde{O}(3)(t) = \{A \mid TA = e_1\} \subset O(3)$$

alt cümlesi $O(3)$ ün bir Lie altgrubu, dolayısıyla bir alt manifoldudur.

$$\tilde{O}(3) = \bigcup_{t\in I} \{\alpha(t)\} x\tilde{O}(3)(t) \subset \alpha(I)xO(3)$$

alt manifoldu $O(2)$ nin $\alpha(I)xO(3)$ e etkisiyle birlikte bir asli lif demetidir.

4.4 Tanım.

$\tilde{O}(3)(\alpha(I), O(2))$ asli lif demetine ∇-relatif çatıların demeti denir.

4.5 Teorem.

$u = (\alpha(t_o), A) \in \tilde{O}(3)$ ise, u dan geçen biricik $\tilde{u}_t \in \nabla$-RPUÇ lifti mevcuttur.

İspat. $T_o A = e_1$, $A \in O(3)$ olduğundan,

$$A = [T_o \quad X_o \quad Y_o]$$

yazılabilir. (T_o, X_o, Y_o) başlangıç şartlarıyla,

$\tilde{u}_t = (\alpha(t), B_t) \in \nabla$-RPUÇ lifti 4.1 Teorem gereğince tek türlü mevcuttur.

Diğer taraftan, T_o başlangıç şartlarıyla $T \in \nabla$-RPS tek türlü belli olup, B_t nin birinci sütunudur. O halde $TB_t = e_1$ dir. Yani, $B_t \in \tilde{O}(3)(t)$ dir. Bu ise $\tilde{u}_t \in \tilde{O}(3)$ demektir.

4.6 Teorem.

$\tilde{O}(3)(\alpha(I), O(2))$ asli lif demeti üzerinde,

$$\tilde{\Gamma} : \tilde{O}(3) \longrightarrow \{\tilde{Q}_{\tilde{u}} \mid \tilde{Q}_{\tilde{u}} \subset T_{\tilde{u}}\tilde{O}(3)\}$$

$$\tilde{u} = (\alpha(t_o), A) \longrightarrow \tilde{\Gamma}(\tilde{u}) = \tilde{Q}_{\tilde{u}}$$

dönüşümü, $\tilde{u}$ dan geçen ∇-RPUÇ lift $\tilde{u}_t = (\alpha(t), B_t)$ ve

$$\tilde{Q}_{\tilde{u}} = Sp\{\alpha'(t) + B_t'\}$$

olarak tanımlansın. $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{O}(3)$ de bir koneksiyondur.

İspat. $\tilde{P} = \tilde{O}(3)$ diyelim.

K1) $\tilde{\Gamma} : \tilde{P} \longrightarrow \{\tilde{Q}_{\tilde{u}} \mid \tilde{Q}_{\tilde{u}} \subset T_{\tilde{u}}\tilde{P}\}$

$$\tilde{u} \longrightarrow \tilde{Q}_{\tilde{u}}$$

öyleki,

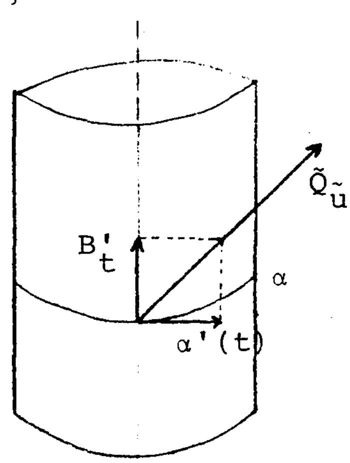
$$T_{\tilde{u}}\tilde{P} = \tilde{G}_{\tilde{u}} \oplus \tilde{Q}_{\tilde{u}}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$\tilde{u} = (\alpha(t_o), A)$ dan geçen

$\tilde{u}_t = (\alpha(t), B_t) \in \nabla$-RPUÇ lifti

ve $Z_{\tilde{u}} \in T_{\tilde{u}}\tilde{P}$ verilsin.



Şekil 4.2

$$Z_{\tilde{u}} = p\alpha'(t_o) + qB_{t_o}' \quad , \quad (B_{t_o} = A)$$

$$\Rightarrow \quad p\alpha'(t_o) + q.B_{t_o}' = \lambda B_{t_o}' + \mu(\alpha'(t_o) + B_{t_o}')$$

olacak şekilde λ ve μ sayılarını bulabilmeliyiz.

O halde,

$$p\alpha'(t) + q\,B'_{t_o} = \lambda B'_{t_o} + \mu(\alpha'(t_o) + B'_{t_o})$$

$$= \mu\alpha'(t_o) + (\lambda+\mu)B'_{t_o}$$

$$\Rightarrow \quad p = \mu \quad \text{ve} \quad q = \lambda+\mu$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = q-\mu = q-p$$

$$\Rightarrow \quad Z_{\tilde{u}} = (q-p)B'_{t_o} + p(\alpha'(t_o) + B'_{t_o})$$

$$\Rightarrow T_{\tilde{u}_t}\tilde{P} = \tilde{G}_{\tilde{u}_t} + \tilde{Q}_{\tilde{u}_t}$$

olur.

$$X \in \tilde{G}_{\tilde{u}} \cap \tilde{Q}_{\tilde{u}} \Rightarrow X = \lambda B'_{t_o} \quad \text{ve} \quad X = \mu(\alpha'(t_o) + B'_{t_o})$$

$$\Rightarrow \mu(\alpha'(t_o)) + (\mu-\lambda)B'_{t_o} = 0$$

$$\Rightarrow \mu = 0 \quad \text{ve} \quad \mu-\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \mu = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda = 0$$

$$\Rightarrow X = 0$$

olur. O halde,

$$T_{\tilde{u}}\tilde{P} = \tilde{G}_{\tilde{u}} \oplus \tilde{Q}_{\tilde{u}}$$

dır.

K2) $A \in O(2)$ için,

$$\mathcal{R}_A : \tilde{O}(3) \longrightarrow \tilde{O}(3)$$

$$(\alpha(t), B_t) \longrightarrow (\alpha(t), B_t A)$$

dır. O halde,

$$\mathcal{R}_A(\tilde{Q}_{\tilde{u}}) = \tilde{Q}_{\tilde{u}A}$$

yazılabilir.

K3) $$\tilde{\Gamma} : \tilde{O}(3) \longrightarrow \{ \tilde{Q}_{\tilde{u}_t} \mid \tilde{Q}_{\tilde{u}_t} \subset T_{\tilde{u}_t}\tilde{P} \}$$

$$\tilde{u}_t \longrightarrow \tilde{\Gamma}(\tilde{u}_t) = \tilde{Q}_{\tilde{u}_t}$$

diferansiyellenebilirdir. (Çünkü, $\tilde{Q}_{\tilde{u}_t}$ nin bir bazı $\alpha'(t) + B'_t$ olup diferansiyellenebilirdir).

Dolayısıyla $\tilde{\Gamma}$ bir koneksiyondur.

4.5 Tanım.

4.6 Teoremde verilen $\tilde{\Gamma}$ koneksiyonuna, α eğrisi boyunca,

$$\Gamma \ : u \longrightarrow \Gamma(u) = Q_u = T_x E^3$$

şeklinde tanımlı olan Γ koneksiyonuna relatif paralel koneksiyon denir.

Γ koneksiyonuna karşılık gelen ∇-operatörünü Bölüm 2 de incelemiştik. Şimdi $\tilde{\Gamma}$ ya karşılık gelen $\tilde{\nabla}$-operatörünü tanımlayalım:

$$Z = \sum_j (\eta_j o \alpha) \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{X}(E^3)$$

olarak verilsin.

Z nin belirlediği ∇-RPUÇ ta tanımlı $\mathbb{R}^3$ değerli fonksiyon $\tilde{f}$ ve $\tilde{u}_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow T_{\alpha(t)}E^3$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{\tilde{u}_t} &= \tilde{u}_t^{-1}(Z(\pi(\tilde{u}_t))) \\
&= \tilde{u}_t^{-1}(Z(\alpha(t)) \\
&= (\alpha(t), B_t)^{-1}(Z(\alpha(t))) \\
&= B_t^{-1}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)
\end{aligned}$$

dır. Burada,

$$B_t : \{e_1, e_2, e_3\} \longrightarrow \{T, X_t, Y_t\}$$

olmak üzere,

$$B_t \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

dır. Buna göre,

$$Z = z_1 T + z_2 X_t + z_3 Y_t$$

olur. O zaman, $\nabla_{\alpha'(t)} Z$ nin karşılık geldiği $\mathbb{R}^3$ değerli ve ∇-RPUÇ üzerinde tanımlı olan fonksiyon $(\alpha'(t))^*[\tilde{f}]$ dir. Burada, $\tilde{u}_t = (\alpha(t), B_t)$ olmak üzere,

$$(\alpha'(t))^* = \tilde{u}_t' = (\alpha'(t), B_t')$$

dir. Buna göre,

$$(\alpha'(t))^*[\tilde{f}] = \frac{d(\tilde{f}o(\alpha(t), B_t))}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(B_t^{-1}[\eta])$$

$$= (B_t^{-1})'[\eta] + B_t^{-1}[\eta']$$

elde edilir. Burada,

$$[\eta] = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}, \quad [\eta'] = \begin{bmatrix} \eta_1' \\ \eta_2' \\ \eta_3' \end{bmatrix}, \quad \eta_i' = \frac{d(\eta_i o\alpha)}{dt}$$

dir. Bu takdirde,

$$\tilde{\nabla}_{\alpha'(t)} Z = \tilde{u}_t((\alpha'(t))^*[\tilde{f}])$$

$$= B_t (B_t^{-1})'[\eta] + [\eta']$$

bulunur.

4.7 Teorem.

Γ koneksiyonunun koneksiyon 1-formu w ve kovaryant türev operatörü ∇, $\tilde{\Gamma}$ koneksiyonunun koneksiyon 1-formu $\tilde{w}$ ve kovaryant türev operatörü $\tilde{\nabla}$ olmak üzere,

$$\tilde{\nabla}_{\alpha'(t)} = -w_{\tilde{u}_t}(\tilde{u}_t') + \nabla_{\alpha'(t)}$$

dır.

İspat. $\tilde{u}_t = (\alpha(t), B_t)$ olmak üzere, $\tilde{u}_t'$ yatay olduğundan,

$$\tilde{w}_{\tilde{u}_t}(\tilde{u}_t') = \tilde{w}_{\tilde{u}_t}(\alpha'(t), B_t') = 0$$

dır.

$$\begin{aligned} w_{\tilde{u}_t}(\tilde{u}_t') &= w_{\tilde{u}_t}(\alpha'(t), B_t') \\ &= w_{\tilde{u}_t}((\alpha'(t),0) + (0,B_t')) \\ &= w_{\tilde{u}_t}(0,B_t') \\ &= B_t^{-1}\, B_t' \end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\alpha'(t)} Z_t &= B_t (B_t^{-1})'[\eta_t] + [\eta_t'] \\ &= -B_t'\, B_t^{-1}[\eta_t] + [\eta_t'] \\ &= -w_{\tilde{u}_t}(\tilde{u}_t')[\eta_t] + \nabla_{\alpha'(t)} Z_t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\nabla}_{\alpha'(t)} = -w_{\tilde{u}_t}(\tilde{u}_t') + \nabla_{\alpha'(t)}$$

dir.

4.8 Teorem.

$\tilde{\Gamma}$ koneksiyonunun $\tilde{w}$ koneksiyon 1-formu verilsin. $u_t \in \nabla$-RPUÇ ise,

$$\tilde{w}(u_t') = 0$$

dır.

İspat. u_t, $\tilde{\Gamma}$-yatay olduğundan $v(u_t') = 0$ dır. Bu takdirde,

$$\sigma_{u_t} A = A^* = 0$$

olur. Halbuki, σ_{u_t} izomorfizmdir. O halde $A=0$ yani,

$$\tilde{w}(u_t') = 0$$

dır.

4.9 Teorem.

Z α-boyunca ∇-relatif paralel ve α ya dik ise,

$$\tilde{\nabla}_{\alpha'} Z = 0$$

dır.

İspat. $u_t = (\alpha(t), T, X, Y)$ bir relatif paralel çatı alanı olsun. $Z \in \nabla$-RPS olduğundan,

$$Z = \langle Z, T\rangle T + \langle Z, X\rangle X + \langle Z, Y\rangle Y$$

eşitliği gereğince,

$$Z = z_1 T + z_2 X + z_3 Y \quad ,(z_1, z_2 \text{ ve } z_3 \text{ sabit})$$

dır. Böylece,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\alpha'} Z &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\tau_t^{t+h}(Z_{t+h}) - Z_t] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[(u_t o u_{t+h}^{-1})(Z_{t+h}) - Z_t] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[u_t(z_1, z_2, z_3) - Z_t] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[z_1 T_t + z_2 X_t + z_3 Y_t - Z_t] \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur.

4.10 Teorem.

Z α-boyunca $\tilde{\nabla}$-paralel ve α ya dik ise,

$$Z \in \nabla\text{-RPS}$$

dir.

İspat. Z α-boyunca $\tilde{\nabla}$-paralel ise,

$$\tilde{\nabla}_{\alpha'(t)} Z = 0$$

dır. O halde,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\tilde{\tau}_t^{t+h}(Z_{t+h})-Z_t] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\ (\tilde{u}_t o \tilde{u}_{t+h}^{-1})(Z_{t+h})-Z_t] = 0$$

dır. $\tilde{u}_t = (\alpha(t),T,X,Y)$ $\tilde{\Gamma}$-yatay lifti yardımıyla,

$$Z_{t+h} = z_1^{t+h}\ T_{t+h} + z_2^{t+h}\ X_{t+h} + z_3^{t+h}\ Y_{t+h}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{u}_{t+h}^{-1} Z_{t+h} = (z_1^{t+h}\ ,\ z_2^{t+h},\ z_3^{t+h})$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\tau}_t^{t+h}(Z_{t+h}) = z_1^{t+h} T_t + z_2^{t+h}\ X_t + z_3^{t+h}\ Y_t$$

Böylece,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(z_1^{t+h} - z_1^t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{dz_1}{dt}\right|_t = 0$$

$$\Rightarrow \quad z_1 = c_1 = \text{sabit}\ ,\quad c_1 = 0$$

bulunur. Benzer şekilde, $z_2 = c_2$ = sabit ve $z_3 = c_3$ = sabit elde edilir. Dolayısıyla,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\ \tau_t^{t+h}\ (Z_{t+h})-Z_t] = \nabla_{\alpha'(t)}\left(c_2 X_t + c_3 Y_t\right)$$

$$(c_1, c_2 \text{ ve } c_3 \text{ sabit})$$

olur. O halde

$$Z \in \nabla\text{-RPS}$$

dir.

Bir $\alpha : I \longrightarrow E^3$, $I = [t_o, t_1]$, eğrisi verildiğinde, $\|\alpha'(t)\| = 1$ olmak üzere, verilen bir $v_p \in T_p E^3$ birim tanjant vektörü için, $F_*(\alpha'(t_o)) = v_p$ olacak şekilde bir $F : E^3 \longrightarrow E^3$ izometrisi vardır(O'Neill,1966).

Bu izometri biricik değildir. Eğer, T_a ötelemesi $p-\alpha(t_o)\in \mathbb{R}^3$ vektörü ile öteleme ve E^3 ün p den geçen $\alpha'(t_o)\wedge v_p$ doğrultusuna paralel doğru etrafında, pozitif yönde, $\theta = \measuredangle(v_p,\alpha'(t_o))$ radyanlık dönmesi de G ile gösterilirse,

$$F = GoT_a : E^3 \longrightarrow E^3$$

izometrisi için,

$$F_*(\alpha'(t_o)) = v_p$$

dir. Bundan böyle, v_p ve α verildiğinde (α,v_p) nin belirlediği izometri diye bu izometriyi anlayacağız. Açıkça, (α,v_p) nin belirlediği izometri F iken,$Fo\alpha=\beta:I\longrightarrow E^n$, p den geçen bir eğridir. Böylece v_p yönünde kovaryant türev β boyunca ∇-Relatif Koneksiyon anlamında iyi tanımlıdır.

Sonuç olarak, herhangi iki $X,Y\in \mathfrak{X}(E^3)$ için,

$$(\tilde{\nabla}_X Y)(p) = \|X_p\| \; \tilde{\nabla}_{\frac{1}{\|X_p\|}X_p} Y$$

olarak tanımlanır. Böylece, E^3xE^3 BALD deki kesitlerin yine bu kesitler yönünde kovaryant türevleri tanımlanmış olur. Bu kovaryant türevin $E^3xGL(3,\mathbb{R})$ ALD de belirlediği $\tilde{\Gamma}$ koneksiyonuna Γ-Relatif Koneksiyon diyeceğiz.

$\tilde{\Gamma}$ koneksiyonunun bir özelliğini aşağıdaki teorem ile vereceğiz.

4.11 Teorem.

E^3 ün geodezikleri boyunca, $\Gamma = \tilde{\Gamma}$ dır.

İspat. $\alpha : I \longrightarrow E^3$, E^3 de bir geodezik olsun. O zaman, her $t \in I$ için,

$$\alpha'(t) = T = \sum_{i=1}^{3} b_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(t)} \quad , \quad b_i \in \mathbb{R},\ i=1,2,3$$

dir.

$$X = \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad a_i \in \mathbb{R}\ ,\ i=1,2,3$$

öyle ki, $<X,T> = 0$ olsun. O zaman,

$$\nabla_{\alpha'(t)} X = 0 = 0.T$$

olup, $X \in \nabla$-RPS dir. Buna göre, $X, Y \in \mathfrak{X}(E^3)$ birim vektör alanları için,

$$X = \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad a_i \in \mathbb{R}\ ,\ i=1,2,3$$

$$Y = \sum_{i=1}^{3} c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad c_i \in \mathbb{R}\ ,\ i=1,2,3$$

ve $<T,X> = <T,Y> = 0$ seçilirse,

$$u_t = (\alpha(t), T, X, Y) \in \nabla\text{-RPUÇ}$$

ve $\alpha(I) x GL(3,\mathbb{R})$ de ∇ ya göre yatay lifttir.

Başka bir deyişle, Γ ve $\tilde{\Gamma}$ ye göre yatay liftler aynıdırlar. Böylece, α ∇-geodezik olmak üzere $\Gamma = \tilde{\Gamma}$ dir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Auslander, L., Differential Geometry, A Harper International Edition Jointly Published by Harper and Row. New York and London, 1967.

Bishop, R.L., There is more than one way to frame a curve, Proc. Amer. Math. Soc., 1975.

Clark, R.S. and Brickell, F., Differentiable Manifolds, An Introduction., Van-Nostrand Reinhold Coms. 1970.

Dotson, C.T.J., Categories, Bundles and Spacetime Topology, Shiva Pub. Ltd., 1980.

Gluck, H., Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space, Amer.Math.Month., 73(1966).pp:699-704.

Hacısalihoğlu, H.H., Yüksek Diferensiyel Geometri, Frat Üniv. Fen Fak. Yayını, 1979.

Hacısalihoğlu,H.H., Diferensiyel Geometri, İnönü Üniv. Fen-Ed. Fak. Yayınları, Mat. No:2, 1983.

Kobayashi,S. and Nomizu,K., Foundations of Differential Geometry, Vol.1., Interscience Publishers, 1963.

Kozsul, J.L., Theory of Connections., Maniscripcs.

O'Neill, B., Elementary Differential Geometry., Academic Press., New York, 1967.

Sabuncuoğlu, A. and Hacısalihoğlu, H.H., On higher curvatures of a curve., Communications de la Fac. Sci. Üni. Ankara, Tome 24-A, 1/4 Année, 1975.

İNDEKS