KOMBİNATÖRYEL TOPOLOJİ VE RİEMANN YÜZEYLERİNİN ÜÇGENLENMESİ

N. Kemal Erdoğan

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi bilim dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak hazırlanmıştır.

Danışman: Yar.Doç.Dr. Çoşkun Tayfur

Eylül -1988

N.KEMAL ERDOĞAN'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "KOMBİNATÖRYEL TOPOLOJİ VE RİEMANN YÜZEYLERİNİN ÜÇGENLENME-Sİ" başlıklı bu çalışma jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

22/9./1988

Üye : Doç.Dr.Şahin.KOÇAK

Üye : Yar.Doç.Dr.Coşkun.TAYFUR

Üye : Yar.Doç.Dr..Ali..GÖRGÜLÜ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 27.EYLÜL. 1988 gün ve .188/4..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Rüstem KAYA
Enstitü Müdürü

ÖZET

Üç bölümden oluşan bu çalışmada, ilk olarak Riemann yüzeyleri hakkında temel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde, sırasıyla 2-boyutlu manifoldların üçgenlenebilmesi ve üçgenlenebilme ile ilgili özellikler ayrıntılı bir şekilde araştırılmış ve bu özelliklerin üçgenlemeden bağımsız olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu bölümde, temel grup ve yönlendirilebilir kompakt yüzeyler için normal formlar verilmiştir. Son bölümde H^o, H^1 ve H^2 homoloji grupları incelenmiş, daha sonra H^1 homoloji grubu ile temel grup arasındaki ilişki gözden geçirilmiştir. Ayrıca, kompakt yüzeyler için Euler ve Euler-Poincaré karekteristiğinin topolojik invaryant olduğu gösterilmiştir. Çalışmanın sonunda ise Riemann yüzeylerinin üçgenlenebilirliği gözönüne alınarak, Euler-Poincaré karekteristiğinin bir uygulaması olarak Riemann-Hurwitz bağıntısı ispatlanmış ve bazı sonuçları tartışılmıştır. Üstelik, Riemann-Hurwitz bağıntısının bazı kompakt, kenarlı Riemann yüzeylerinde de değişmediği gösterilmitir.

SUMMARY

This thesis contains three chapters. In the first chapter, some basic concepts about Riemann surfaces are introduced. In the second chapter, triangulation of 2-dimension manifolds and properties of triangulation are discussed respectively. It is also shown that these properties are independent upon triangulation. Moreover, normal forms for orientable compact surfaces and fundamental group have been given in this chapter. In the last chapter, H^0, H^1 and H^2 homology groups are discussed and then relationship between H^1 homology group and fundamental group is given. It is also shown that Euler and Euler-Poincaré characteristics are topological invariants. At the end of thesis, as an Euler-Poincaré of the topological invariance of the Euler-Poincaré characteristic, we established the Riemann-Hurwitz relation. Consequently, we discussed some results of this relation. Additionally it is shown that Riemann-Hurwitz relation remains same in some compact bordered Riemann surfaces.

Teşekkür

Bu çalışmayı yöneten, Anadolu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi öğretim üyesi sayın hocam Yar.Doç.Dr. Çoşkun Tayfur'a içten teşekkür ederim.

N. Kemal Erdoğan

İçindekiler

BÖLÜM 1

1. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1. M iki boyutlu bağlantılı bir manifold ve M üzerinde aşağıdaki özelliklere sahip kartların bir maksimal $\{U_i, Z_i\}_{i\in I}$ ailesi varsa, M ye bir Riemann yüzeyi denir.

i) $\{U_i\}_{i\in I}$ M nin bir açık örtüsüdür.

ii) Her bir $Z_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü kompleks düzlemin açık bir alt kümesi üzerine homeomorfizmdir.

iii) $f_{ij} = z_i o z_j^{-1} : z_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow z_i(U_i \cap U_j)$ geçiş fonksiyonları $(U_i \cap U_j \neq \emptyset)$ kümesi üzerinde holomorfiktirler.

Yukardaki koşullardan sadece maksimallik özelliğine sahip olmayan, M nin bir açık örtüsünü oluşturan kartların ailesine "Analitik koordinat kartları" denir.

Literatürde, kompakt Riemann yüzeylerine kapalı, kompakt olmayan Riemann yüzeylerine ise açık Riemann yüzeyleri denir.

M iki boyutlu bağlantılı manifoldu üzerinde analitik koordinat kartlarının $A_1 = \{U_i, Z_i\}_{i\in I}$ $A_2 = \{V_j, Z_j\}_{j\in J}$ gibi iki ailesi verilmiş olsun. M üzerindeki bu analitik koordinat kartlarının kümesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısını şu şekilde tanımlayacağız.

Her $i \in I$ için bir $j \in J$ mevcut ve $U_i \subset U_j$ ve $z_i = z_j|_{U_i}$ ise, $A_1 > A_2$ diyelim. Bu taktirde Zorn lemma[1] gereği analitik koordinat bir maksimal ailesine genişletilebilir. Böylece bir Riemann yüzeyini tanımlamak için analitik koordinat kartlarının bir maksimal ailesinin belirtilmesine gerek olmayıp, sadece analitik koordinat kartlarının bir ailesini belirtmek yeterlidir.

Not: M bir Riemann yüzeyi ve $\{U, Z\}$, M üzerinde bir koordinat olsun. Bu taktirde her $V \subset U$ açık kümesi ve $Z(V)$ üzerinde $f: Z(V) \longrightarrow \mathbb{C}$ 1:1, holomorf fonksiyonu için $\{V, f o (Z|v)\}$ de M üzerinde bir koordinattır.

Örnek 1.1. $\mathbb{C}$ kompleks düzlemi bir açık Riemann yüzeyidir. $(\mathbb{C}, i_d)$ $\mathbb{C}$ üzerinde Riemann yüzeyi yapısı tanımlar ve $(\mathbb{C}, i_d')$ $\mathbb{C}$ üzerinde tek koordinat karttır.

Örnek 1.2. M bir Riemann yüzeyi ve D, M nin açık bağlantılı alt kümesi olsun. Bu taktirde D bir açık Riemann yüzeyidir. Çünkü D üzerindeki koordinat kartları, M üzerindeki koordinat kartlarının D ye kısıtlanmasıyla elde edilmiştir. Buna göre $\mathbb{C}$ deki her bölge (açık ve bağlantılı) bir Riemann yüzeyidir.

Örnek 1.3. $\mathbb{C}$ kompleks düzleminin Alexandroff kompaktifikasyonu (tek nokta kompaktifikasyonu) $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bir kapalı Riemann yüzeyidir.

$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ kümesi üzerindeki kartlar,

$U_1 = \mathbb{C}$ $\qquad U_2 = (\mathbb{C} - \{o\}) \cup \{\infty\}$

$$Z_1(z) = z \qquad z \in U_1 \text{ ise}$$
$$Z_2(z) = \frac{1}{z} \qquad z \in U_2 \text{ ise}$$

---

(1) Zorn Lemma: Boş olmayan her kısmi sıralanmış bir kümenin bir maksimal elemanı vardır.

olmak üzere $\{U_j, Z_j\}_{j=1,2}$ olsun.

Bu taktirde $u_1 \cap u_2 = \mathbb{C} - \{o\} \neq \emptyset$ $Z_1 \circ Z_2^{-1} = \frac{1}{z}$ $Z_2 \circ Z_1^{-1} = \frac{1}{z}$ analitiktir. O halde $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bir kapalı Riemann yüzeyidir.

Not: Koordinat kartlarına yerel parametreler veya yerel koordinatlarda denir. Ayrıca $\{U, Z\}$ yerel koordinatlarını Z dönüşümü ile aynı anlamda kullanacağız.

U, M de açık ve Z(U), $\mathbb{C}$ de birim disk ise U ya bir parametrik disk denir. M bir Riemann yüzeyi ise, her $p \in M$ noktası bir parametrik diskin merkezidir. Çünkü,

P_o, M Riemann yüzeyi üzerinde bir nokta olsun. Bu durumda P_o, U_i kümelerinin bir çoğunda bulunabilir. Böylece P_o civarında bir çok yerel parametreler mevcut olabilir.O haldebaşka yeni parametreler de elde edebiliriz. Şöyleki $z = Z_i(p)$, U_i de Po ın komşuluğunda bir yerel koordinat sistemi ve $w = f(z)$ dönüşümü $Z_i(u_i)$ den kompleks düzlemin bir açık kümesine 1:1 konform dönüşüm ise, $f(Z_i(p)) = w$ dönüşümü de Po ın komşuluğunda bir yerel parametredir. Bu yerel parametreye Z_j diyelim. Özellikle $Z_i(Po) = z_o$ ve r yeter derecede küçük seçilirse, $|z-z_o|<r$ diski U_i de bulunur.

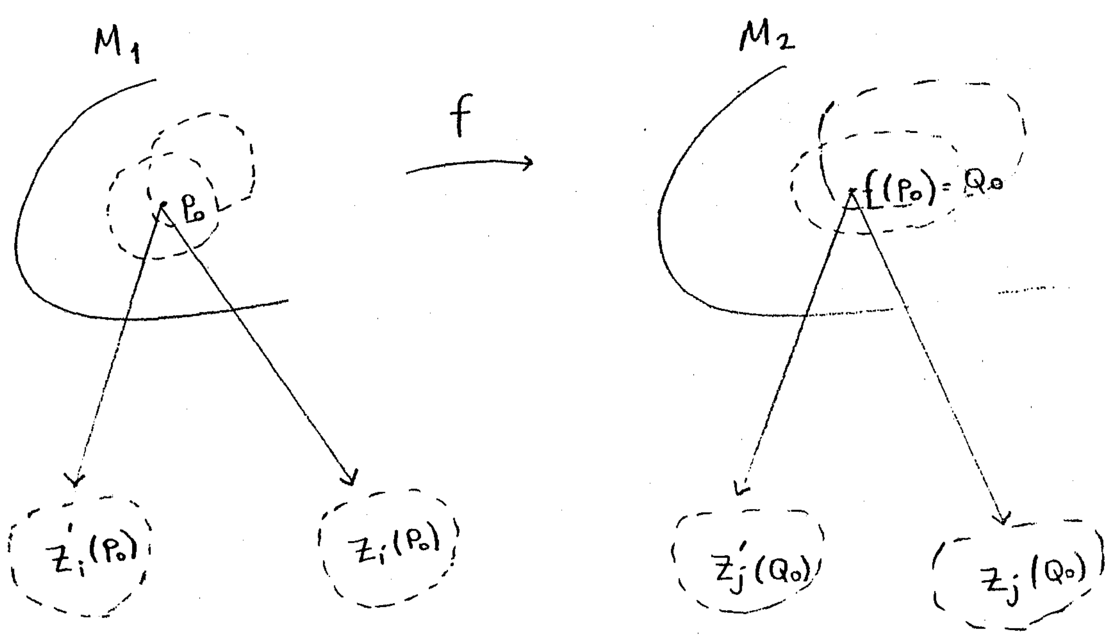
$w = \frac{z-z_o}{r}$ alırınsa $w = Z_j(P)$, Po ın komşuluğunda yeni bir yerel parametre olup, $Z_j(Po) = 0$ ve $|w|<1$ dir. Böylece M üzerindeki her nokta bir parametrik diskin merkezidir.

Riemann yüzeyi üzerindeki bir f fonksiyonu yerel koordinatların bir fonksiyonu olarak gözönüne alınabilir. Bu fonksiyonun bazı özellikleri yerel koordinatlar cinsinden incelenebilir. Fakat yerel koordinatlar cinsinden incelenen özelliklerin bir kısmı, yerel koordinatların değişiminden bağımsız olmayabilir. Bu nedenle incelenen özelliğin yerel koordinatların değişiminden bağımsız olup olmadığı incelenmelidir.

$f: M \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $Z_i(Po) = 0$ ın komşuluğundaki $z = Z_i(P)$ yerel parametresi cinsinden Po da analitik ise $(o<|z|<r \ f(Z_i^{-1}(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n)$ f ye Po da regüler analitik (veya holomorf) fonksiyon denir.

Bu anatiklik yerel koordinatların seçiminden bağımsızdır. Çünkü bir analitik fonksiyonun, analitik fonksiyonuda analitiktir.

M_1 ve M_2 iki Riemann yüzeyi ve $f:M_1 \longrightarrow M_2$ fonksiyonu verilsin. Po ve f(Po)= Qo ın komşuluğundaki yerel parametreler sırasıyla $z = Z_i(P)$ ve $w = Z_j(Q)$ olsun. $w = (z_j \circ f \circ z_i^{-1})(z) = g(z)$ fonksiyonu her $Po \in M_1$ için analitik ise f fonksiyonuna M_1 üzerinde analitiktir denir. Bu tanım yerel koordinatlardan bağımsızdır.



Şekil 1.1

$$[Z_j' \circ f \circ (Z_i')^{-1}](z) = [Z_j' \circ Z_j^{-1} \circ Z_j \circ f \circ Z_i^{-1} \circ Z_i \circ (Z_i')^{-1}](z)$$

şeklinde yazılabileceğinden analitiklik kavramının yerel koordinatların değişiminden bağımsız olduğu görülür. Yukarıdaki son eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki fonksiyonun ve son iki fonksiyonun bileşkesinin analitik olduğu Riemann yüzeyi tanımından dolayı bilinmektedir. Ortadaki $Z_j \circ f \circ Z_j^{-1}$ bileşkesi de analitiktir. O halde $z_j o f o (z_i)^{-1}$ analitiktir.

Tanım 1.2. M_1 ve M_2 iki Riemann yüzeyi olsun. Bu yüzeyler arasında 1:1 bir analitik dönüşüm varsa M_1 ve M_2 ye konform eşdeğerdir denir.

BÖLÜM 2

2. KOMBİNATÖRYEL TOPOLOJİ

2.1. Manifoldların Üçgenlemesi

İlk önce E^2 (Öklid düzlemi) deki geometrik bazı şekillere yeni isimler vereceğiz.

nokta:	öklidyen	0-simpleks
kapalı doğru parçası:	öklidyen	1-simpleks
kapalı üçgen:	öklidyen	2-simpleks

Bir M manifoldu üzerindeki simpleksleri ise E^2 deki simplekslerin M manifoldu içine bir φ homeomorfizması altındaki görüntüleri şeklinde tanımlayacağız. M manifoldu üzerindeki simpleksleri s^n (n=0, 1, 2) şeklinde ve benzer şekilde öklidyen simpleksleri de e^n (n= 0, 1, 2) ile göstereceğiz.

M üzerindeki simpleksler $s^n = [e^n, \varphi]$ veya $\varphi(s^n)=|s^n|$ şeklinde de gösterilir. $s^2 = [e^2, \varphi]$ ye M üzerinde bir üçgen ve e^2 nin kenar ve köşelerinin görüntülerinede s^2 nin kenar ve köşeleri diyeceğiz. s^2 nin her kenarına M üzerinde 1-simpleks ve her köşesinede s^2 de 0-simpleks denir. s^2 üzerinde tanımlı φ dönüşümünün e^2 nin kenar ve köşelerine kısıtlanmışı alınır.

Şimdi bir M manifoldunun üçgenlemesini tanımlayacağız. Δ, M üzerinde tanımlı üçgenlerin (2-simpleks) bir ailesi olsun. Öyleki M ye ait her P noktası Δ daki en az bir üçgene ait olsun.

i) P, Δ da bir s^2 üçgenine ait olsun. Fakat P, s^2 nın kenarları üzerinde olmasın. Bu taktirde P yi içeren Δ daki tek üçgen s^2 dir ve $|s^2|$, P nin bir komşuluğudur.

ii) P, Δ da bir s_1^2 üçgeninin bir s^1 kenarı üzerinde olsun. Fakat P, s_1^2 nin köşeleri üzerinde olmasın. Bu taktirde P yi içeren Δ da yalnız bir s_2^2 üçgeni vardır ve öyleki $|s_1^2| \cap |s_2^2| = |s^1|$ ve $|s_1^2| \cup |s_2^2|$ P nin bir komşuluğudur.

iii) P, s^2 nin herhangi bir köşesi üzerinde bulunsun. Bu taktirde P yi içeren sonlu sayıda s_1^2, s_2^2, ... s_i^2 üçgenleri vardır ki ardışık her üçgen çiftli bir ortak kenara sahip ve s_1^2 ile s_i^2 de ortak bir kenara sahip olsun.

Bu durumda $|s^2| \cup |s^2| \cup \ldots \cup |s^2|$ P nin bir komşuluğudur. Δ da, bu şekildeki üçgenlere bir yıldız diyeceğiz.

M manifoldu üzerindeki Δ ailesi yukardaki i, ii, iii koşullarını sağlıyorsa Δ ya M nin bir üçgenlemesi ve M manifolduna üçgenlenebilir manifold denir.

Yukarıda her üç durumda da P yi içeren bir açık küme sadece sonlu sayıda üçgenle kesişir.

İki boyutlu bütün manifoldların üçgenlenebilir olduğu söylenemez. Örneğin, Prüfer Manifoldu(Springer, 1957) üçgenlenemeyen bir manifolddur. Bundan sonra 2-boyutlu manifoldlara yüzey diyeceğiz ve S harfi ile göstereceğiz. Üçgenlenmiş bir yüzeyide S_Δ şeklinde göstereceğiz.

Teorem 2.2.1. Bir S_Δ yüzeyi üzerindeki herhangi bir kompakt küme Δ daki üçgenlerin yalnız sonlu tanesi ile kesişir.

İspat: Farzedelimki tersi doğru olsun. Yani bir K kompakt kümesi Δ da sonsuz sayıda üçgenle kesişsin. Bu üçgenlerin herbirinden K da olacak şekilde bir iç noktasını seçelim. K kompakt olduğundan bu kümenin K da Po gibi bir yığılma noktası vardır ve bu Po noktasının özelliği gereği, Po içeren herhangi bir açık küme verilen kümedeki üçgenlerin sonsuz tanesi ile kesişir. Fakat üçgenlemenin tanımına göre Po'ı içeren uygun bir açık küme sadece sonlu sayıda üçgenle kesişir. O halde bu kümede yalnız sonlu sayıda nokta vardır. Bu bir çelişkidir. O halde varsayımız yanlıştır. Yani K sadece sonlu sayıda üçgenle kesişir.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak, kompakt bir yüzeyin üçgenlemesi sadece sonlu sayıda üçgen içerir. Tersine her üçgen bir kompakt küme olduğundan ve ayrıca kompakt kümelerin sonlu birleşimi yine kompakt olduğu için sonlu bir üçgenlemesi olan herhangi bir yüzey kompaktır. O halde aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 2.1.2. Bir yüzeyin kompakt olması için gerek ve yeter şart sonlu bir üçgenlemesinin olmasıdır.

Teorem 2.1.3. S_Δ yüzeyi üzerindeki herbir s ve s' üçgen çifti Δ daki üçgenlerin basit bir zinciri ile bağlanabilir.

İspat: İlk önce basit zinciri tanımlayalım. Ardışık her üçgen çifti bir ortak kenara sahip olacak şekilde sonlu sayıda $s_1, s_2, \ldots, s_n$ üçgenlerine bir basit zincir, s_1 ve s_2 üçgenlerinede bu zincir ile bağlanabilir denir.

P ve P' sırasıyla s ve s' üçgenlerinin bir iç noktası olsunlar. S yay bağlantılı olduğu için P ve P' noktaları bir C eğrisi ile bağlanabilir. Burada C eğrisi kompaktır ve Δ da yalnız sonlu sayıda üçgenle kesişir. C boyunca P den P' ye giderken s ile C nin son arakesit noktası P_1 olsun. Eğer P_1 s nin köşesi üzerinde değilse, bu taktirde P_1 içeren yalnız bir üçgen vardır bu üçgene s_1 diyelim. Eğer P_1, s nin bir köşesi üzerinde ise bu taktirde P_1 içeren $s_1, \dots s_n$ üçgenlerinin bir yıldızı vardır. Bu yıldız ile C nin son arakesit noktasına P_2 diyelim. P_2, s üzerinde değildir. Çünkü s ile C nin son arakesit noktası P_1 dir. P_2 içeren ilk üçgen olarak s_k yı alalım. Buradan istediğimiz zincire s, s_1, ..., s_k üçgenleri ile başlamış oluruz. P_2 yi benzer şekilde P_1 gibi kullanarak üçgenlerin bir zincirini oluştururuz. Bu zincir bu inşada seçtiğimiz üçgenlerin herhangi birine asla geri dönmez. Çünkü bu üçgenlerle C nin son arakesit noktasını daima seçebiliyoruz. Bu işlem sonlu sayıda adımda biter. Çünkü s den s' giderken, C yalnız sonlu sayıda üçgenle kesişir.

Teorem 2.1.4. Bir yüzeyin herhangi bir üçgenlemesinde sadece sayılabilir sayıda (yada sonlu sayıda) üçgen vardır.

İspat: Bir Δ üçgenlemesinde keyfi bir s_1 üçgeni seçelim. s_1 ile kesişen (yani s_1 üçgeni ile bir köşesi veya kenarı ortak olan) sonlu sayıda s_2, s_3, ..., s_{n1} üçgeni ile s_1'i birleştirelim. Sonra s_{n1} üçgeni ile benzer şekilde sonlu sayıda s_{n1+1}, s_{n1+2}, ..., s_{n2} üçgenlerini s_{n1} ile birleştirelim. Bu şekilde devam edersek Δ daki bütün üçgenleri ya sonlu sayıda ya da sayılabilir sayıda adımda tüketmiş oluruz. Çünkü Δ da her üçgen sonlu bir zincir ile s_1'e bağlanabilir.

Bir S yüzeyi üzerinde her üçgen bir kompakt küme olduğundan, sonlu sayıda parametrik disk ile örtülebilir. Buna göre yalnız sayılabilir sayıda üçgenin bulunması S nin sayılabilir bir tabanı olması demektir. O halde aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 2.1.5. Her üçgenlenebilir bir S yüzeyinin sayılabilir sayıda bir tabanı vardır.

2.2. Afin Uzaylar ve Afin Uzaylarda Koordinat Değişimi

$A \neq \emptyset$ bir cümle ve V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir,

$$\begin{aligned} \Psi: A \times A &\longrightarrow V \\ (P, Q) &\longrightarrow \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

dönüşümü aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A cümlesine V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

i) Her $P, Q, R, \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

A nın boyutu boy A = boy V olarak tanımlanır.

Bir V vektör uzayı ile birleşen bir A afin uzayında $P_0, P_1, \ldots, P_n \in A$ noktaları için $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}$ vektörlerinin oluşturduğu sistem V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ nokta (n+1)-lisine A afin uzayının bir afin çatısı denir. Burada P_0 başlangıç noktası ve P_i noktalarınada çatının birim noktaları denir.

n-boyutlu bir V vektör uzayı ile birleşen bir A afin uzayının afin çatılarından biri $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ olsun. Bu çatı A da afin koordinat sistemi belirtir. Eğer V nin bir bazı $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ ise $\forall P \in A$ için $\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{P_0P_i}$, $a_i \in F$ şeklinde yazarız. A nın birleştiği V vektör uzayı F cismi üzerinde tanımlandığına göre $X_i : A \longrightarrow F$ $1 \leqslant i \leqslant n$ fonksiyonlarını $\forall P \in A$ için $P \longrightarrow x_i(P) = a_i$ biçiminde tanımlayalım. Böylece $P \in A$ noktasına, F^n standart afin uzayının $(x_1(p), \ldots, x_n(p))$ elemanına karşılık tutmuş oluruz. Bu sıralı n-liye P noktasının koordinatları denir.

A n-boyutlu afin uzay $\{P_i\}$ ve $\{Q_i\}$ $i=0, 1, \ldots, n$ A da iki farklı çatı olsun. $\{Q_i\}$ afin çatısına göre $P_o \in A$ olduğundan $\overrightarrow{Q_oP_o} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{Q_oQ_i}$ ve benzer şekilde $\overrightarrow{P_oP_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \overrightarrow{Q_oQ_j}$ $1\leqslant i\leqslant n$ şeklinde yazabiliriz. Aynı şekilde $\{P_i\}$ afin çatısına göre yazılabilir.

$P \in A$ keyfi bir nokta verildiğinde afin uzayın 1. aksiyonuna göre $\overrightarrow{Q_oP} = \overrightarrow{Q_oP_o} + \overrightarrow{P_oP}$ yazabiliriz. Buradan P nin $\{Q_i\}$ çatısına göre koordinatları $\overrightarrow{Q_oP} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{Q_oQ_i}$ ve $\{P_i\}$ çatısına göre $\overrightarrow{P_oP} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{P_oP_i}$ olsun.

$\overrightarrow{Q_oP} = \overrightarrow{Q_oP_o} + \overrightarrow{P_oP}$ şeklinde yazılabileceğine göre,

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\overrightarrow{Q_oQ_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{Q_oQ_i} + \sum_{j=1}^{n} x_j \overrightarrow{P_oP_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{Q_oQ_i} + \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \overrightarrow{Q_oQ_j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + a_i\right) \overrightarrow{Q_oQ_i}$$

iki vektörün eşitliğinden,

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + a_i \qquad 1\leqslant i\leqslant n \quad \text{olur.}$$

Bu bağıntı afin koordinatlar arasındaki değişimi gösterir.

Şimdi bir A afin uzayının altuzayını tanımlayacağız. $B\subset A$ ve $B \neq \emptyset$ olsun. V ise A afin uzayı ile birleşen vektör uzayı olmak üzere herhangi bir $P \in B$ noktası seçildiğinde $\forall X \in B$ için $W_p(B) = \{\overrightarrow{PX} \mid X \in B\}$ vektör cümlesi, V nin bir altuzayı ise B cümlesine A afin uzayının bir afin altuzayı denir.

2.2.1. Afin uzaylarda parametrik ve barisantrik ifadeler

A, n boyutlu bir afin uzay ve A nın r-boyutlu bir altuzayı B olsun. B de bir afin çatı $\{P_o, P_1, \ldots, P_r\}$

ve bir $O \in A$ noktası tesbit edildiğinde bir $X \in A$ noktasının $X \in B$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP_o} + \sum_{j=1}^{r} t_j \overrightarrow{P_oP_j} \qquad (1) \text{ olmasıdır}$$

bu ifadeye B nin parametrik denklemi ve $X \in B$ noktasının, O noktasına ve $\{P_o, P_1, \ldots, P_r\}$ çatısına göre $(t_1, \ldots, t_r)$ parametreleri denir. $(t_1, \ldots, t_r)$ parametreleri $\{P_o, P_1, \ldots, P_r\}$ çatısına göre B de seçilen afin koordinat sisteminde $X \in B$ noktasının koordinatlarıdır.

(1) denkleminde $1 \leqslant j \leqslant r$ için $\overrightarrow{P_oP_j} = \overrightarrow{OP_j} - \overrightarrow{OP_o}$

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP_o} + \sum_{j=1}^{r} t_j (\overrightarrow{OP_j} - \overrightarrow{OP_o})$$

$$\overrightarrow{OX} = (1 - \sum_{j=1}^{r} t_j) \overrightarrow{OP_o} + \sum_{j=1}^{r} t_j \overrightarrow{OP_j}$$

Buradan $\mu_o = 1 - \sum_{j=1}^{r} t_j$ ve $\mu_j = t_j$ $1 \leqslant j \leqslant r$ konumu yapılırsa (1) denklemi $\sum_{j=o}^{r} \mu_j = 1$ ve $\overrightarrow{OX} = \sum_{j=o}^{r} \mu_j \overrightarrow{OP_j}$ şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.2.1. A n-boyutlu bir afin uzay ve B de A nın r-boyutlu bir afin altuzayı olsun. B deki bir $\{P_o, P_1, \ldots, P_r\}$ çatısına ve bir $O \in A$ noktasına göre bir $X \in B$ noktasını $\overrightarrow{OX} = \sum_{j=o}^{r} \mu_j \overrightarrow{OP_j}$, $\sum_{j=o}^{r} \mu_j = 1$ olarak ifade etmeye yarayan μ_j sayıları $O \in A$ noktasının seçilişinden bağımsızdır.

İspat: $O' \neq O$ olacak şekilde bir $O' \in A$ alalım.

$$\overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OX}$$

$$= \overrightarrow{O'O} + \sum_{j=o}^{r} \mu_j \overrightarrow{OP_j} \qquad \text{ve } \overrightarrow{OP_j} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P_j}$$

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{O'O} + \sum_{j=o}^{r} \mu_j (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P_j})$$

$$= \overrightarrow{O'O} + \sum_{j=o}^{r} \mu_j \overrightarrow{OO'} + \sum_{j=o}^{r} \mu_j \overrightarrow{O'P_j}$$

$\sum_{j=0}^{r} \mu_j = 1$ olduğundan $\overrightarrow{0'X} = \overrightarrow{0'0} + \overrightarrow{00'} + \sum_{j=0}^{r} \mu_j \overrightarrow{0'P_j}$

buradan $\overrightarrow{0'0} + \overrightarrow{00'} = \vec{0}$ olduğundan $\overrightarrow{0'X} = \sum_{j=0}^{r} \mu_j \overrightarrow{0'P_j}$ şekline dönüşür. ($\sum_{j=0}^{r} \mu_j = 1$) Bu teoreme göre B de bir $\{P_0, P_1, \ldots, P_r\}$ çatısı tesbit edildiğinde $X \in B$ noktası için $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_r)$ gibi bir tek $(r+1)$-li vardır öyleki bu $(r+1)$-li $0 \in A$ noktası keyfi seçilmek üzere X in ifade edilmesi için yeterlidir. Bu $(r+1)$ sayıya X noktasının barisantrik koordinatları denir(Hacısalihoğlu, 1980).

2.3. Barisantrik Koordinatlar ve Altbölünme

E^2 Öklid düzleminde e^n n-simpleksin köşeleri $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ $n = 0, 1, 2$ olsun. E^2 de bir (x_1, x_2) koordinat sistemi seçelim ve bu koordinat sistemine göre her bir P_k köşesinin koordinatlarına (x_{1k}, x_{2k}) diyelim.

Ayrıca her bir P_k köşesine negatif olmayan bir μ_k kütlesi karşılık getirelim ve $\sum_{k=0}^{n} \mu_k = 1$ olsun. Bu dağılımın, x_1 ve x_2 koordinatları

$$x_j = \sum_{k=0}^{n} \mu_k x_{jk} \qquad j = 1, 2$$

şeklinde verilen bir $P = (x_1, x_2)$ ağırlık merkezi vardır. Burada $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ sayılarına e^n de P noktasının barisantrik koordinatları denir.

Eğer E^2 de başka bir (y_1, y_2) koordinat sistemi (dik koordinat sistemi olması gerekmez) seçilirse ağırlık merkezinin barisantrik koordinatları değişmeyecektir. Şimdi bu iddiayı ispatlayalım.

(y_1, y_2) E^2 de yeni bir koordinat sistemi olsun. Afin koordinatlar arasında $y_i = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j + b_i$ $i = 1,2$

dönüşümü olduğunu biliyoruz. Bu dönüşümde (x_1, x_2) koordinat sistemine göre P nin koordinatlarını yazarsak,

$$Y_i = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} \sum_{k=0}^{n} \mu_k x_{jk} + b_i$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mu_k \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_{jk} + b_i$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mu_k y_{jk} \quad \text{olur.}$$

Buradan görülür ki P nin barisantrik koordinatları değişmemiştir.

O halde (y_1, y_2) afin koordinatlarını P_0 orjin ve herbir P_k köşesinin koordinatlarını $Y_{jk} = 0$ $j \neq k$ ise, $Y_{kk} = 1$ $j=k$ olacak şekilde seçebiliriz.

Bu taktirde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ E^2 nin e^n yi bulunduran n-boyutlu altuzayında bir koordinat sistemi oluşturur ve $\overrightarrow{P_0 P_k}$ birim taban vektörleridir. Eğer $n<2$ ise e^n deki P noktasının Y_j koordinatları, $j>n$ ise sıfır, $j<n$ ise $\sum_{k=0}^{n} \mu_k Y_{jk} = \mu_j$ dir. Böylece e^n deki bir P noktasının koordinatları $\mu_1, \ldots, \mu_n$ koordinatlarıyla aynıdır.

Şimdi, $r \leq n$ olmak üzere e_1^n n-simpleksinden e_2^r r-simpleksi üzerine bir dönüşüm tanımlayacağız. Eğer bu dönüşüm aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise bu dönüşüme barisantrik dönüşüm denir.

i) e_1^n nin her köşesi e_2^r nin bir köşesi üzerine resmeder.

ii) e_1^n nin en az bir köşesinin görüntüsü e_2^r nin bir köşesidir.

iii) e_1^n nin köşeleri üzerindeki $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ kütleleri dönüşüm altında aynı değeri muhafaza eder ve ağırlık merkezi, ağırlık merkezine karşılık gelir.

Eğer $r<n$ ise bu dönüşüme dejenere dönüşümdür denir. Bu durumda e_1^n nin en az iki köşesi, e_2^r nin aynı köşesine resmedilir.

Eğer $r=n$ ise bu dönüşüm bir homeomorfizmadır.

Teorem 2.3.1. e_1^n ve e_2^r sırasıyla n ve r boyutlu simpleksler olsun. e_1^n den e_2^r üzerine barisantrik dönüşüm e_1^n içeren E^2 nin n-boyutlu uzayından e_2^r yi içeren r-boyutlu altuzayına bir afin dönüşüm ile yapılır.

İspat: e_1^n nin altuzayındaki afin koordinatlarının kümesi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve e_2^r nin afin koordinatlarının kümesi $y_1, y_2, \ldots, y_r$ olsun. Bu durumda e_1^n nin P_k $k=0, 1, \ldots, n$ köşesinin koordinatları $x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}$ ve e_2^r de P_k nin görüntüsü olan P_k' nün koordinatlarıda $y_{1k}, \ldots, y_{rk}$ şeklinde olur. Eğer $P_o, \ldots, P_n$ köşeleri üzerine μ_o, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ kütlelerini koyarsak P ağırlık merkezinin koordinatları,

$$x_i = \sum_{k=o}^{n} \mu_k x_{ik} \quad i=1, \ldots, n \qquad (1)$$

ve P nin görüntüsü olan P' nün koordanitları ise

$$Y_j = \sum_{k=o}^{n} \mu_k Y_{jk} \quad j=1, \ldots, r \qquad (2)$$

olsun. $\overrightarrow{P_oP_k}$ $k=1,\ldots,$ n vektörleri lineer bağımsız olduğu için (1) denkleminden μ_k ları x_i ler cinsinden çözebiliriz. Bulduğumuz bu μ_k değerlerini (2) denkleminde kullanırsak,

$$Y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \quad j=1, \ldots, r$$

denklemini elde ederiz. Bu ise e_1^n altuzayından e_2^r altuzayı üzerine istediğimiz afin dönüşümü verir.

e^n bir n-simpleks alalım. Bu n-simpleksde barisantrik koordinatları eşit olan noktaya orta noktası denir. Örnek olarak bir 2-simpleksde, köşeler üzerindeki barisantrik koordinatlar (1,0,0), (0,1,0) ve (0,0,1) olsun. Bu taktirde kenarlar üzerindeki barisantrik koordinatlardan biri sıfıra eşittir. Yani $\overline{P_oP_1}$ kenarı üzerinde $(\mu_o, \mu_1, 0)$ dır. Eğer $\overline{P_oP_1}$ i 1-simpleks olarak düşünürsek barisantrik koordinatları (μ_o, μ_1) olur. P_2 köşesinden $\overline{P_oP_1}$ kenarına çizilen kenar ortay üzerindeki noktaların barisantrik koordinatları ise $\mu_o = \mu_1$ dir. Genel olarak diyeceğizki e^n de herhangi iki barisantrik koordinatı eşit olan noktalar n-simpleksi (n+1)! eşit n-simplekse böler. Buna e^n n-simpleksinin barisantrik altbölünmesi denir.

0-simpleks için barisantrik altbölünme aynı 0-simplekstir. e^1 1-simpleksi için barisantrik koordinatları eşit olan yalnız bir nokta vardır ve bu 1-simpleks e^1 i iki eşit parçaya ayırır. Bir e^2 2-simpleksi ise üç kenar ortay tarafından altı üçgene ayrılır.

Bir üçgenin orta noktası herhangi bir köşesinden kenar ortayın $\frac{2}{3}$'ü uzaklıktadır, bu yüzden altbölünmedeki bir üçgenin çapı(2) orjinal üçgenin çapının en çok $\frac{2}{3}$'ü kadardır. Bir üçgene N kez altbölünme işlemi uygularsak N. barisantrik altbölümündeki her üçgenin çapı orjinal üçgenin çapının en çok $(\frac{2}{3})^N$ kadardır.

Δ, bir S yüzeyi üzerinde bir üçgenleme olsun. Her $s_j = [e_j^2, \varphi_j]$ üçgeni bir e_j^2 den s_j^2 üzerine bir φ_j homeomorfizması vardır. Öyleki s_j nin her P noktasındaki barisantrik koordinatları e_j^2 ile $\varphi_j^{-1}(P)$ de aynıdır. Bu ise Δ da her s_j üzerinde bir afin yapı tanımlar.

---

(2) Bir üçgenin çapı en uzun kenarının uzunluğuna denir.

Teorem 2.3.2. Bir S yüzeyi için $\Delta=\{s_j^2\}$, $s_j^2=[e^2, \varphi_j]$ üçgenlemesi verilsin. S yüzeyi üzerinde φ_j dönüşümlerini öyle seçebeliriz ki her bir kenar üzerindeki bir P noktasının koordinatları P yi içeren üçgenlerin hepsinde aynıdır.

İspat: Bundan sonra S üzerindeki barisantrik koordinatları, normal koordinatlar olarak adlandıracağız. S üzerindeki normal koordinatlar yardımıyla Δ daki her ardışık üçgen çiftinin, ardışık öklidyen üçgen çiftine homeomorf olduğunu ve her yıldızın bir öklidyen yıldıza homeomorf olduğu söylenebilir.

O halde S üzerindeki normal koordinatları elde etmeliyiz. $s_1^2=[e_1^2, \varphi_1]$ köşeleri P_o, P_1, P_2 olan keyfi bir üçgen olsun. e_1^2 yi eşkenar üçgen olarak alabiliriz, çünkü barisantrik koordinatlar afin invaryanttır. Bu üçgenin köşeleride p_o, p_1, p_2, olsun ve bunları sırasıyla P_o, P_1, P_2 köşelerine karşılık getirelim. Şimdi s_1^2 ile $\overline{P_1P_2}$ ortak kenara sahip olan üçgen $s_2^2=[e_2^2, \varphi_2]$ olsun. s_2^2 nin diğer köşesini P_3 ile gösterelim.

φ_1 ile $\overline{p_op_1}$ görüntüsü olarak $\overline{P_1P_2}$ üzerindeki barisantrik koordinatları tanımlamıştık, bunu s_2^2 üzerine genişleteceğiz. s_2^2 nin φ_2 altındaki ters görüntüsü $\varphi_2^{-1}(s_2)=e_2$ olsun. e_2^2 nin köşelerinide P_1, P_2, P_3 uygun olarak p_1', p_2', p_3' karşılık getirelim. Aynı şekilde e_2^2 yi eşkenar üçgen seçebiliriz.

Bu taktirde $\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1$ dönüşümü $\overline{p_1p_2}$ den $\overline{p_1'\,p_2'}$ üzerine bir homeomorfizmdir. Bu homeomorfizmayı $p_1p_2p_3$ den $p_1'\,p_2'\,p_3'$ üzerine χ homeomorfizmasıyla aşağıdaki gibi genişletebiliriz.

$p_1p_2p_3$ her q noktası $p_1'\,p_2'\,p_3'$ içinde bir $q'=\chi(q)$ noktasına götürsün. p_3 ile q noktasını birleştiren doğru parçası p_1p_2 doğrusu ile arakesit noktası P olsun. Bu taktirde $p' = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ (p) ve q' belirtmek için

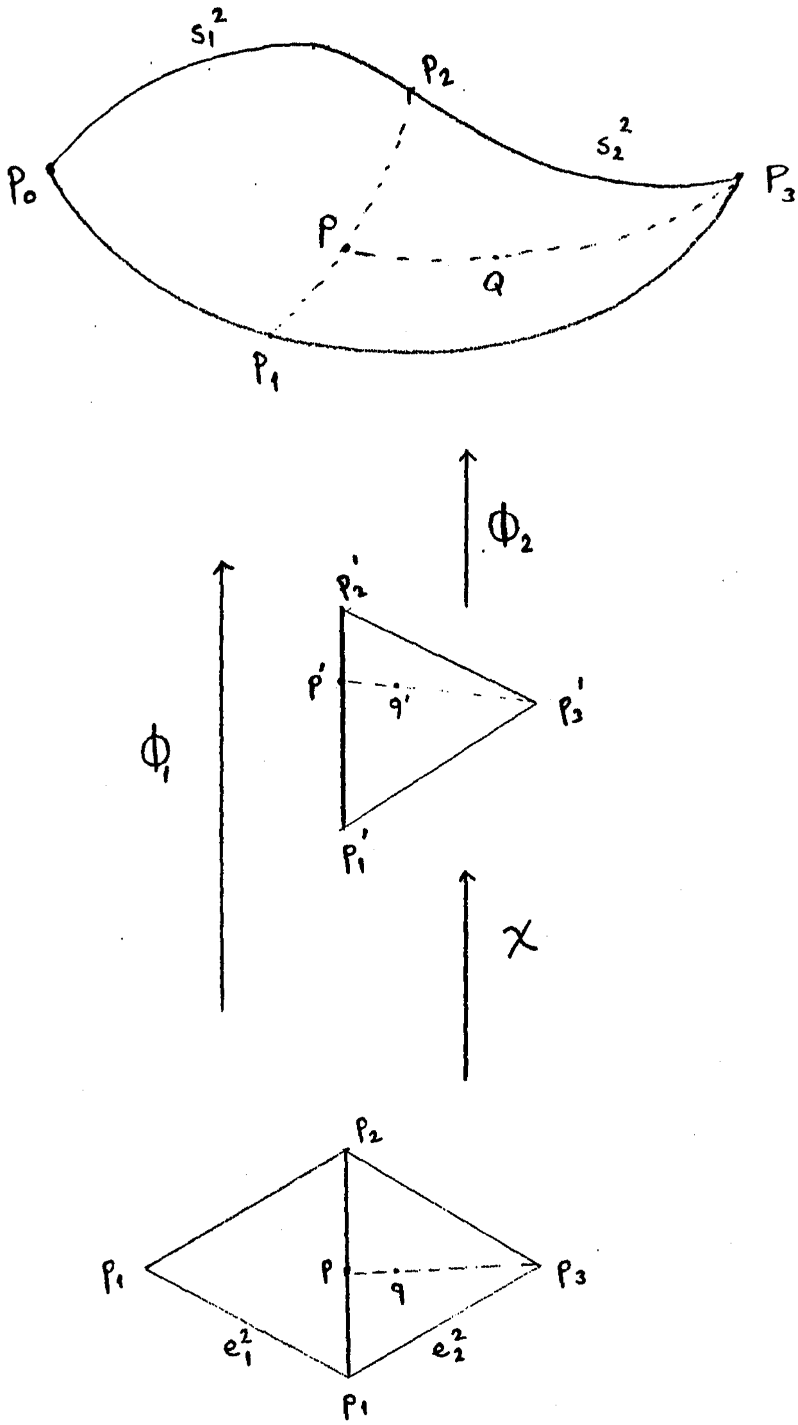
$$\frac{\overline{p_3 q'}}{\overline{p_3' p'}} = \frac{\overline{p_3 q}}{\overline{p_3 p}}$$ olur.

Şimdi $p_0p_1p_2p_3$ dörtgeninden $|s_1^2| \cup |s_2^2|$ üzerine $\Psi_{1,2}$ homeomorfizmasını tanımlayalım.

$$\Psi_{1,2} = \begin{cases} \varphi_1(p) , & p \in p_0p_1p_3 \\ \varphi_2 \circ \chi(p) , & p \in p_1p_2p_3 \end{cases}$$

$p_0p_1p_2p_3$ üzerindeki barisantrik koordinatları $|s_1^2| \cup |s_2^2|$ üzerine taşımak için $\Psi_{1,2}$ yi kullanırız. s_1^2 ile kesişen başka bir üçgen üzerindeki normal koordinatları aynı metodu kullanarak tanımlayabiliriz. Böylece seçilmiş olan üçgenlerle kesişen üçgenler üzerinde de aynı metodu kullanarak Δ daki bütün üçgenleri tüketmiş oluruz. Eğer seçtiğimiz üçgenlerle bir ortak kenara sahip birden fazla üçgen karşılık gelirse χ dönüşümü $\overline{p_1p_3}$ ve $\overline{p_2p_3}$ üzerinde değişmeyeceğinden bu işlemi herbir kenar üzerinde tekrarlayarak herbir kenar için normal koordinatları tanımlarız. Sonuç olarak Δ da bütün üçgenler üzerinde normal koordinatlar tanımlanmış olur.

T, Δ da bir yıldız ve t öklidyen bir yıldız olsun. T, homeoform olarak t üzerine dönüştürülebileceğinden, her $P \in T$ üzerinde (μ_0, μ_1, μ_2) normal koordinatları, t de bu noktaya karşı gelen p noktası üzerindeki barisantrik koordinatlar aynı olacaktır. Δ daki her üçgeni altbölümlere ayırdığımızda oluşacak yeni üçgenlemede de barisantrik koordinatlar aynı kalacaktır.


s_1^2
p_2
s_2^2
p_0
p_3
p
Q
p_1
Φ_2
Φ_1
p_2'
p'
q'
p_3'
p_1'
χ
p_2
p_1
p
q
p_3
e_1^2
e_2^2
p_1

Şekil 2.1.

Teorem 2.3.3. M üzerindeki üçgenlerin herhangi bir sonlu T zincirine karşılık, bir N tamsayısı vardır, öyleki T nin N barisantrik alt bölümü içindeki herhangi birleşik iki üçgen çifti aynı parametrik disk içinde kalır.

İspata geçmeden önce bazı tanımlamalar üzerinde duracağız. E keyfi bir metrik uzay olsun. $P \in E$ noktası için $d(p, q) < r$ $(r>0)$ ilişkisini sağlayan $q \in E$ noktalarına q nun r yarıçaplı bir küresel komşuluğu denir ve $S(p, q)$ ile gösterilir. $A \subset E$ olmak üzere, A nın çapı; her $p \in A$, $q \in A$ için $d(p, q)$ nun en küçük üst sınırı olarak tanımlanır. Ayrıca aşağıdaki yardımcı teoremi ispatlayacağız.

Yardımcı Teorem 2.1. Bir E metrik uzayından herbir $\{U_i\}$ örtülüşüne bir pozitif δ sayısı karşılık gelir, öyleki E nin δ dan küçük herhangi bir alt kümesi tamamen $\{U_i\}$ kümelerinden birinin içinde kalır. δ sayısına örtülüşün Lebesque sayısı denir. $\{A_i\}$ alt kümelerinin bir dizisi olsun. Öyleki A_n nın çapı $\frac{1}{n}$ den küçük ve her bir A_n örtülüşdeki bir küme içerisinde olmasın. Herbir A_n de keyfi bir q_n noktası alalım. E kompakt olduğundan (q_n) dizisinin bir $q \in E$ yığılma noktası vardır. (q_n) nin bir (q_{nk}) $k=1, 2, \ldots$ alt dizisini alalım. Burada n_k pozitif sayıların bir artan dizisi olsun. Bu taktirde $d(q_{nk}, q) < \frac{1}{k}$ dır ve q noktası bir $U_j \in \{U_i\}$ açık kümesi içinde olacaktır. Buradan q nun bir r pozitif sayısı için $S(q, p) \subset U_j$ komşuluğunu oluşturabiliriz.

Eğer $\frac{1}{k} < \frac{r}{2}$ ise A_{nk} nın çapı $\frac{1}{n} < \frac{1}{k} < \frac{r}{2}$ den küçük olacaktır, ve A_{nk} tamamen $S(q, p)$ içinde kalır. Dolayısıyla U_j içinde kalacaktır. Bu ise bir çelişkidir.

İspat: Uzunlukları σ olan $e_1^2 \cup e_2^2$ eşkenar üçgenlerini alırsak, N-barisantrik altbölümdeki üçgenler çapı $(\frac{2}{3})^N \sigma$

$0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant u \leqslant 1$ kapalı karesinden S ye aşağıdaki koşulları sağlayan sürekli bir F dönüşümü varsa γ_1, γ_2 ye deforma edilmiştir denir.

$$\left.\begin{aligned} (1)\ F(t,o) &= f_1(t) \\ F(t,1) &= f_2(t) \end{aligned}\right\} \quad \forall\, t \text{ için,}$$

$$\left.\begin{aligned} (2)\ F(o,u) &= P_1 \\ F(1,u) &= P_2 \end{aligned}\right\} \quad \forall\, u \text{ için,}$$

Eğer γ_1 ve γ_2 arasında böyle bir deformasyon mevcut ise γ_1 ve γ_2 ye homotop yaylar denir. Homotopiyi $\approx$ işareti ile göstereceğiz.

Homotopi bağıntısının denklik bağıntısı (yansıma, simetrik, geçişme) olduğunu gösterelim.

1) Yansıma: $F(t,u) = f(t)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $F = fop$ dir. Burada p, ($0\leqslant t\leqslant 1$, $0\leqslant u\leqslant 1$) kapalı karesinden $0\leqslant t\leqslant 1$ üzerine izdüşümdür. p izdüşüm fonksiyonu sürekli ve f de sürekli olduğundan F süreklidir.

$$F(t,o) = f(t) = F(t,1) \qquad \text{ve } \forall t \text{ için}$$
$$F(t,u) = f(t) \text{ olduğuna göre } f \approx f \text{ dir.}$$

2) Simetrik: $f_1 \approx f_2$ ise $f_2 \approx f_1$ dir.

$$f_1 \approx f_2 \text{ ise} \quad \begin{aligned} F(t,o) &= f_1(t)\ , & F(o,u) &= P_1 \\ F(t,1) &= f_2(t)\ , & F(1,u) &= P_2 \end{aligned}$$

olacak şekilde sürekli bir F fonksiyonu vardır. ($0\leqslant t\leqslant 1$, $0\leqslant u\leqslant 1$ kapalı karesinden S ye) $G(t,u) = f(t,1-u)$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $G(t,u)$ süreklidir.

$$G(t,o) = f_2(t) \qquad G(o,u) = P_2$$
$$G(t,1) = f_1(t) \quad \text{ve} \quad G(1,u) = P_1$$

olur. O halde $f_2 \approx f_1$ dir.

3) Geçişme: $f_1 \approx f_2$ ve $f_2 \approx f_3$ $f_1 \approx f_3$ dir.

$f_1 \approx f_2$ ve $f_2 \approx f_1$ ise $F(t,o) = f_1(t)$ $F(o,u) = P_1$

$F(t,1) = f_2(t)$ $F(1,u) = P_2$

ve $G(t,o) = f_2$ $G(o,u) = P_2$

$G(t,1) = f_3$ $G(1,u) = P_3$ olacak şekilde

F ve G sürekli fonksiyonları vardır.

Şimdi, bir $H(t,u) = F(t,2u)$, $u \leqslant 1/2$

$H(t,u) = G(t,2u-1)$, $u \geqslant 1/2$

F ve G sürekli olduğundan H süreklidir.

$$H(t,o) = F(t,o) = f_1 \qquad H(o,u) = P_1$$
$$\text{ve}$$
$$H(t,1) = G(t,1) = f_3 \qquad H(1,u) = P_3$$

olduğundan $f_1 \approx f_3$ dür.

O halde $\approx$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

$$o \leqslant t \leqslant 1 \quad \text{için} \quad \begin{cases} t \longrightarrow \dot{J}(t) \\ \dot{J}(o)=0 \quad \dot{J}(1)=1 \end{cases} \quad \text{dönüşümü}$$

sürekli, reel değerli azalmayan bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $t \longrightarrow f(\dot{J}(t))$ dönüşümüne $t \longrightarrow f(t)$ nin reparametrizasyonu denir.

Reparametrize edilmiş yay, orjinal yaya homotoptur. Gerçekten de $(t,u) \longrightarrow F((1-u)t+u\dot{J}(t))$ dönüşümü $t \longrightarrow f(t)$ yayını $t \longrightarrow f(j(t))$ yayına deforme eder.

$$(t,u) \longrightarrow F((1-u)t+uJ(t))$$

$$F(t,o) = f(t)$$

$$F(t,1) = f(J(t))$$

Buradan bir yayın homotopi sınıfını belirtmek için, bu yayı veren denklemlerden özel birisi yerine yayın kendisi alınır.

Örneğin bir Jordan yayının son noktalarından biri başlangıç noktası olarak belirtildiğinde, bu yayın homotopi sınıfı bir nokta kümesi olarak belirtilmiştir. Yani f ve g aynı Jordan yayını belirtiyorsa g, f nin bir reparametrizasyonudur.

Şimdi S yüzeyi üzerindeki bir O noktasından geçen kapalı eğrilerin bir ailesini gözönüne alalım. Bu ailedeki eğrilerin çarpımı ve tersi daima tanımlıdır. Bunlar homotopi sınıfları üzerinde de tanımlıdır.

$\alpha \approx \alpha'$ ve $\beta \approx \beta'$ ise,

i) $\alpha\beta \approx \alpha'\beta'$ ii) $\alpha^{-1} \approx \alpha'^{-1}$

İspat(i): $\alpha\beta$ tanımlı olduğundan $\alpha(1) = \beta(0)$ dır. $\alpha \approx \alpha'$ ve $\beta \approx \beta'$, olduğundan $\alpha(1) = \alpha'(1)$ ve $\beta(0) = \beta'(0)$ dır. Buradan $\alpha'(1) = \beta'(0)$ olur. O halde $\alpha'\beta'$ mevcuttur ve $\alpha \approx \alpha'$ olduğu için

$$F(t,o) = \alpha(t) \qquad F(t,1) = \alpha'(t)$$

$$F(o,u) = \alpha(o) = \alpha'(o) \qquad F(1,u) = \alpha(1) = \alpha'(1)$$

olacak şekilde F sürekli fonksiyonu vardır.

Benzer şekilde $\beta \approx \beta'$ olduğundan,

$$G(t,o) = \beta(t) \qquad G(t,1) = \beta'(t)$$

$$G(o,u) = \beta(o) = \beta'(o) \qquad G(1,u) = \beta(1) = \beta'(1)$$

olacak şekilde bir G sürekli fonksiyonu vardır. Şimdi,

$$H(t,u) = F(2t,u) \quad , \quad o\leqslant t\leqslant 1/2$$
$$H(t,u) = G(2t-1,u) \quad , \quad 1/2\leqslant t\leqslant 1$$

dönüşümü tanımlayalım. Bu fonksiyon süreklidir. Çünkü F ve G fonksiyonları süreklidir.

$$H(t,o) = \alpha(2t) \quad , \quad 0\leqslant t\leqslant 1/2$$
$$H(t,o) = \beta(2t-1) \quad , \quad 1/2\leqslant t\leqslant 1$$
$$H(t,1) = \alpha'(2u) \quad , \quad 0\leqslant t\leqslant 1/2$$
$$H(t,1) = \beta'(2t-1) \quad , \quad 1/2\leqslant t\leqslant 1$$
$$H(o,u) = F(o,u) = \alpha(0) = \alpha'(0)$$
$$H(1,u) = G(1,u) = \beta(1) = \beta'(1)$$

Buradan $\alpha\beta\approx\alpha'\beta'$ olur.

İspat(ii): $\alpha\approx\alpha'$ ise $\alpha^{-1}\approx\alpha'^{-1}$ dir.

$\alpha\approx\alpha'$ olduğundan

$$F(t,o) = \alpha(t) \qquad F(t,1) = \alpha'(t)$$
$$F(o,u) = \alpha(o) = \alpha'(o)$$
$$F(1,u) = \alpha(1) = \alpha'(1)$$

olacak şekilde bir sürekli F fonksiyonu vardır.

$G(t,u) = F(1-t,u)$ şeklinde tanımlarsak G sürekli olur ve

$$G(t,o) = \alpha(t-1) \qquad G(t,1) = \alpha'(1-u)$$
$$G(0,u) = F(1,u) = \alpha(1) = \alpha'(1)$$
$$G(1,u) = F(o,u) = \alpha(o) = \alpha'(o)$$

dır. Buradan $\alpha^{-1}\approx\alpha'^{-1}$ olur.

$(\alpha\beta)\gamma$ ve $\alpha(\beta\gamma)$ eğrileri idantik değildir, fakat biri diğerinin reparametrizasyonudur. Homotopi sınıflarının çarpımı ise assosyatiftir. Kapalı eğrilerin homotopi sınıflarının çarpımsal birim elemanı vardır ve 1 ile gösterilir. Bu birim eleman 0 noktasına indirgenebilen kapalı eğrilerin homotopi sınıfıdır. Ayrıca $\alpha 1 = 1\alpha = 1$ ve $\alpha\alpha^{-1} = 1$ dir.

Bu son eşitlikler aşağıdaki deformasyondan elde edilebilir.

$$(t,u) = \begin{cases} f(2t)\ , & 0 \leqslant t \leqslant \frac{(1-u)}{2} \\ f(1-u)\ , & (1-u)/2 \leqslant t \leqslant (1+u)/2 \\ f(2-2t)\ , & 1+u/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

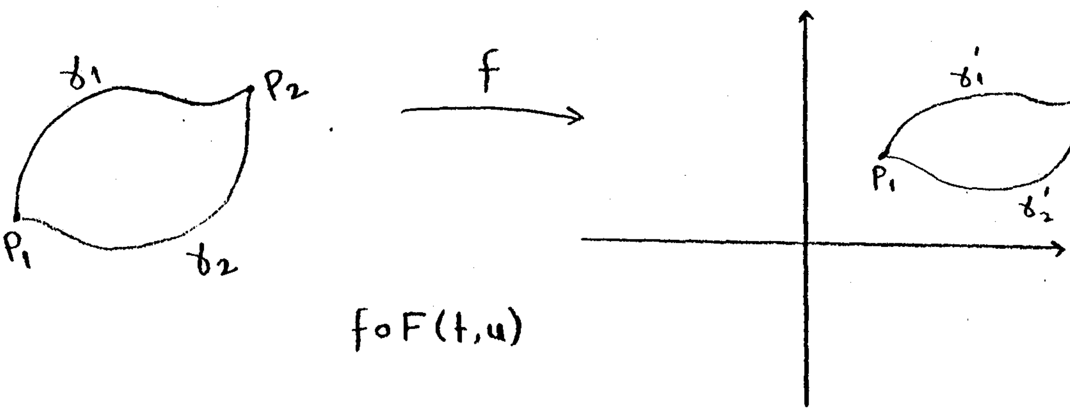
Böylece homotopi sınıfları bir grup oluştururlar. Bu gruba 0 noktasına bağlı olan temel grup denir ve $\mathfrak{F}_0(S)$ ile gösterilir.

S yüzeyi bağlantılı olduğuna göre farklı noktalar izomorf temel gruplar belirtir. Çünkü $0'$, S üzerinde ikinci bir nokta olsun. $0'$yü 0 ile bir σ yayı ile birleştirelim. 0 daki her kapalı eğriye, $0'$de $\alpha' = \sigma\alpha\sigma^{-1}$ kapalı eğrisi karşılık gelir.

Ayrıca α'nün homotopi sınıfının, yalnız α nın homotopi sınıfına bağlı olduğu kolayca görülür. Böylece 0 daki homotopi sınıflarının, $\alpha \longrightarrow \sigma\alpha\sigma^{-1}$ şeklinde bir dönüşümü elde edilir. Bu dönüşüm çarpımı korur çünkü $\sigma\alpha\sigma^{-1} .. \sigma\beta\sigma^{-1} \approx \sigma(\alpha\beta)\sigma^{-1}$ dir. Aynı zamanda 1:1 ve üzerindedir. Çünkü $\alpha' \approx \sigma\alpha'\sigma^{-1}$ iken $\alpha \approx \sigma^{-1}\alpha\sigma$ ve $\sigma^{-1}\alpha'\sigma, \alpha'$ üzerine resmedilir. O halde σ, $\mathfrak{F}_0(S) \longrightarrow \mathfrak{F}_{0'}(S)$ üzerine bir izomorfizm belirtir.

$\mathfrak{F}(S)$ abstrak grubu, bütün $\mathfrak{F}_0(S)$ gruplarına izomorftur ve bu gruba, S nin temel grubu denir.

$\Phi : S \longrightarrow S'$ sürekli dönüşümünü göz önüne alalım. S üzerindeki her $\gamma : t \longrightarrow f(t)$ yayına, S' üzerinde $\Phi_o f$ dönüşümü ile bir γ' yayı karşılık gelir. Homotop yaylar homotop yaylara gideceğinden $O' = \Phi(O)$ dır. Ayrıca bu dönüşüm (çarpımları koruyacağından) bir homomorfizmadır. Eğer Φ topolojik dönüşüm ise, temel gruplar arasında buna karşı gelen dönüşüm bir izomorfizmdir yani $\mathcal{F}_O(S) \cong \mathcal{F}_{O'}(S)$ dir.



Şekil 2.2.

O halde aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 2.4.1. Bir yüzeyin temel grubu topolojik invaryanttır.

<u>Not</u>: temel grubun sadece bir elemanı mevcut ise, bu birim eleman olacaktır. Bu durumda aynı son noktalara sahip herhangi iki yay homotop olacaktır. Böyle yüzeylere "basit bağlantılı" denir.

O halde şu tanımı verebiliriz. Bir yüzeyin temel grubu sadece bir tek eleman ihtiva ediyorsa, bu yüzeye basit bağlantılı denir.

2.5. Yönlendirme

2.5.1. Bir eğrinin indeksi

Düzlemdeki bir γ kapalı eğrisinin γ üzerinde bulunmayan bir z noktasına göre indeksini (veya dönme sayısını) tanımlayalım.

γ eğrisi $\gamma: f(t)=z$ $0\leqslant t\leqslant 1$ denklemi ile verilmiş olsun. Her t için $Z_0 \neq f(t)$ ise $0\leqslant t\leqslant 1$ aralığında $|f(z)-z_0|>r$ olacak şekilde bir r>0 sayısı vardır. $[0,1]$ kapalı aralığında f düzgün sürekli olduğundan $[0,1]$ aralığını sonlu sayıda $[t_i, t_i+1]$ alt aralıklarına bölebiliriz.

$$t \in [t_i, t_i+1] \quad \text{için} \quad |f(t)-f(t_i)|<r$$

$$w_i = \frac{f(t_i+1) - f(Z_0)}{f(t_i) - Z_0}$$

kompleks sayısının reel kısmı $|W_i-1|<1$ için pozitiftir. Bu yüzden $\arg w_i$ nin bir tek θ_i değeri vardır ve $-\frac{\pi}{2}<\theta_i<\frac{\pi}{2}$ eşitsizliğini sağlar. $\sum\theta_i$, 2π nin bir tam katıdır.

$$\eta(\gamma, Z_0) = \frac{1}{2\pi}\sum\theta_i$$

denirse bu sayıya γnın z_0'a göre indeksi denir.

Şimdi $\eta(\gamma, z_0)$ tamsayısının $[0,1]$ kapalı aralığının bölünüşüne bağlı olmadığını görmeliyiz. Bunun için $[t_i, t_{i+1}]$ aralığını $t_i<J<t_{i+1}$ olmak üzere $[t_i, J]$ ve $[J, t_{i+1}]$ şekline dönüştürelim. Bu taktirde $\theta_i=\theta_i' + \theta_i'' + 2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$ dir. Bütün argümanlar mutlak değerce $\frac{\pi}{2}$ den küçük olduğundan $|k|<\frac{3}{4}$ bulunur ve böylece k=0 dır.

Şimdi aşağıdaki özelliği ispat edelim. $\eta(\gamma, z_o)$ indeksi, z_o'ın bir fonksiyonu olarak, γ nın komplementi üzerinde sürekli bir fonksiyondur ve böylece komplementin herbir komponenti de sabittir. İspat için önceki rotasyonları kullanacağız.

Z'_o, Z_o a $|Z_o - Z'_o| < r$ ve $|f(t) - Z'_o| > r$ (her t için) şeklinde yakın bir nokta olsun. Bu taktirde $\eta(\gamma, Z_o)$ ve $\eta(\gamma, Z'_o)$ tanımlamak için aynı alt bölmeyi kullanabiliriz.

$$v_i = \frac{f(t_i) - Z'_o}{f(t_i) - Z_o}$$ yazarak $|v_i - 1| < 1$ elde ederiz.

$\alpha_i = \arg v_i$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$ arasına yaymak mümkündür.

Yani θ'_i argümanı ile θ_i arasında

$$\theta'_i = \theta_i + \alpha_{i+1} - \alpha_i + 2k\pi$$ bağıntısı vardır.

$|k| < 1$ olduğu düşünülürse $\sum \theta'_i = \sum \theta_i$ bulunur. Bu da yukarıdaki iddiayı ispatlar.

Z_o, γ nın sınırsız bir komponentinde bulunuyorsa $\eta(\gamma, Z_o)$ sıfırdır. Bunu görmek için $r > 2 \, \mathrm{Max}|f(t)|$ ve $|Z_o| > \frac{3}{2} r$ olduğunu farzedelim. Bu taktirde her $t \in [0,1]$ için,

$$|f(t) - Z_o| > r > |f(t) - f(o)| \text{ dır.}$$

Bunun anlamı $\eta(\gamma, Z_o)$, intervali alt bölmelere ayırmaksızın hesaplanabilir. $t_o = 0$ $t_1 = 1$ alırsak $w_o = 1$ $\theta_o = 0$ ve böylece $\eta(\gamma, Z_o) = 0$ olur.

γ, Z_o dan geçmemek şartı ile deforme edildiğinde $\eta(\gamma, Z_o)$ değişmediğini gösterelim. $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq u \leq 1$ için $f(t,u) \neq Z_o$ fonksiyonu bir deformasyon tanımlasın. Öyle bir $r > 0$ sayısı ve $[t_i, t_{i+1}]$, $[u_j, u_{j+1}]$ alt intervallerini bulabiliriz ki $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ve $u \in [u_j, u_{j+1}]$ için

$|f(t,u)-Z_0|>r$ ve $|f(t,u)-f(t_i, u_j)|<r$ olur. θ_i, θ'_i sırasıyla $u=u_j$, $u=u_{j+1}$ karşılık gelen argümanlar olsun. Bu taktirde,

$$\beta_i = \arg \frac{f(t_i, u_{j+1}) - Z_0}{f(t_i, u_j) - Z_0}$$

seçebiliriz. Böylece $-\frac{\pi}{2} < \beta_i < \frac{\pi}{2}$ olur.

$\theta'_i - \theta_i = \beta_{i+1} - \beta_i + 2k\pi$ bağıntısından $k=0$ olduğu görülür. Buradan $\sum \theta'_i = \sum \theta_i$ bulunur. Bunun anlamı u_j den u_{j+1} geçildiğinde indeksin değişmeyeceğidir. Buradan $u=0$ ve $u=1$ karşı gelen indekslerin aynı olduğu söylenebilir.

2.5.2. Bir dönüşümün derecesi

$f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. $Z_0 \in D$ nin bir V komşuluğunda $z \neq z_0$ için $f(Z) = f(Z_0)$ ise f ye z_0 da regüler denir. Bu koşul gerçekleşdiğinde f nin Z_0 daki derecesini tanımlayacağız.

f fonksiyonu $\Omega = \{ z \mid 0 < |z-z_0| < r \} \subset V$ delikli diskini, tanım gereği $w_0 = f(z_0)$ noktası çıkarılmış Ω' delikli düzlemine resmeder. f dönüşümü, $\mathcal{F}(\Omega)$ dan $\mathcal{F}(\Omega')$ ye temel grupları arasında bir homomorfizma tanımlar. Çünkü her iki grup sonsuz devirli grup olup, doğal homomorfizma kolayca tanımlanabilir. Gerçekten her iki grup sırasıyla $z-z_0 = (a-z_0)e^{2\pi i t}$, $w-w_0 = (b-w_0)e^{2\pi i t}$ denklemleriyle verilmiş α ve β çemberleri ile doğrulmuştur. Burada $b = f(a)$ dır.

$\mathcal{F}(\Omega)$ ile $\mathcal{F}(\Omega')$ arasındaki homomorfizmayı ϕ ile gösterelim ve $\phi(\alpha) = \beta^d$ olduğunu farzedelim. Bu dönüşüm homomorfizmayı tam olarak belirtir. Çünkü $\phi(\alpha^m) = \beta^{md}$ dır ve eğer $d=0$ ise $\mathcal{F}(\Omega)$ grubu $\mathcal{F}(\Omega')$ nün birim elemanına dönüşür. Eğer $d \neq 0$ ise $\mathcal{F}(\Omega)$ nın β^d ile doğrulmuş bir alt grubuna bir izomorfizması elde edilir, çünkü $\phi(\alpha^m) = \beta^{md} = 1$ ise $m=0$ dır.

$d=d(f)$ sayısanı f dönüşümün z_0 daki derecesi denir. Bu sayı a nın seçiminden bağımsızdır. O halde Ω nın seçimindende bağımsız olacaktır.

f dönüşümü $z_0 \in D$ noktasında regüler ve ψ, dönüşümü $w_0 = f(Z_0)$ noktasında regüler olsun. Bu taktirde $d(\psi o f) = d(\psi)\ d(f)$ dir. Buradaki dereceler sırasıyla z_0 ve w_0 da hesaplanmıştır. Bunun ispatı hemen hemen açıktır. Bunun için sadece Ω' yi önceki sonucu değiştirmeyecek şekilde w_0 komşuluğunda yeteri derecede küçük bir delikli disk ile değiştirilebileceğini düşünürsek, yeter derecede küçük $|\alpha - z_0|$ diskinde $f(\alpha)$ nın görüntüsü, $\beta^{d(f)}$ nin homotopi sınıfına ait olan delikli diskte bulunur. Diğer taraftan ψ dönüşümü β yı, $\gamma^{d(\psi)}$ nin homotopi sınıfında bir eleman üzerine dönüştürür.

$$\psi(f(\alpha)) \approx \psi(\beta^{d(f)}) = \gamma^{d(f)\, d(\psi)}$$

olduğundan çarpım özelliği gerçeklenir.

D bir bölge ve f, D den bir $f(D)$ kümesi üzerine bir homomorfizma olsun. Eğer $f(D)$ açık ise, ters dönüşümün derecesini tanımlayabiliriz. Çünkü idantik dönüşümün derecesi 1 olduğundan $d(f)\ d(f^{-1}) = 1$ ve buradan $d(f^{-1}) = \mp 1$ dir.

Böylece bir bölgenin topolojik dönüşümünün derecesi yön korunuyorsa +1, yön korunmuyorsa -1 dir.

2.5.3. Yönlendirme

Bir S yüzeyi üzerindeki bir V bölgesi, düzlemin bir kümesine topolojik olarak dönüştürülebiliyorsa V ye planar(düzlemsel) bölge denir. Bu şekildeki homeomorfizmalar ailesi iki sınıfa ayrılabilir. h_1 ve h_2 gibi iki homeomorfizmanın aynı sınıfta olması için gerek ve yeter koşul $h_1 o h_2^{-1}$ in yön korumasıdır. Bir h dönüşümü için $\bar{h}(p)$ ye h(p) nın kompleks eşleniği olarak tanımlanırsa $ho\bar{h}^{-1}$ yön korumadığından derecesi -1 dir. h ile $\bar{h}$ farklı sınıftadırlar.

Herhangi bir h_1 dönüşümü ya hoh_1^{-1} yada $\bar{h}oh_1^{-1}$ sınıfına ait olur. Yani tam tamına iki sınıf vardır.

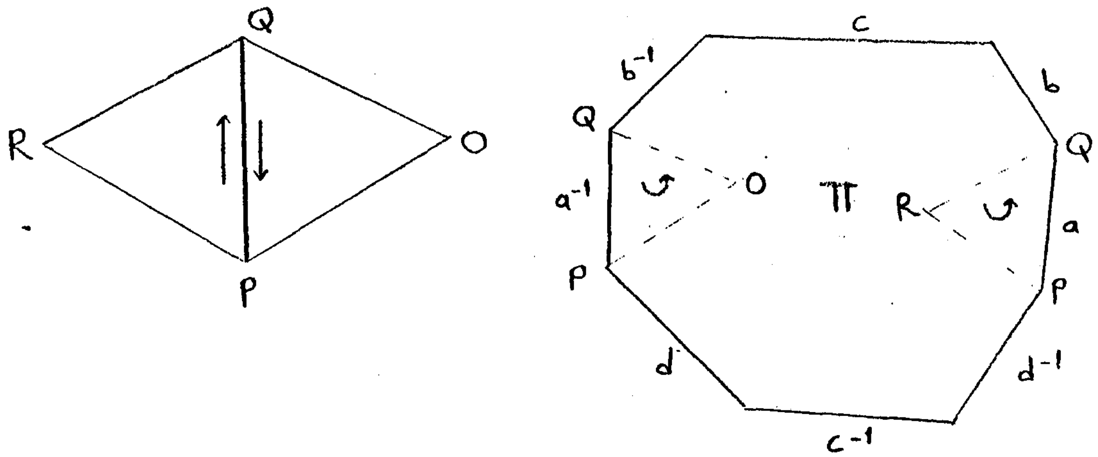
Bu iki sınıftan birini pozitif yön olarak seçersek bu V nin bir yönlendirilmesini oluşturur. V nin bir pozitif yönlendirilişi, $V' \subset V$ alt kümesine de bir pozitif yön indirger.

Ayrıca V_1 ve V_2 arakesitleri boş olmayan iki düzlemsel bölge üzerindeki yönler, arakesitleri üzerine aynı yönü indirgiyorlarsa bu düzlemsel bölgelere uyumludur diyeceğiz.

2.6. Yönlendirilebilir Kompakt Yüzeylerin Normal Formları

Bir S kompakt yüzeyi üzerinde herhangi bir Δ üçgenlemesi verilsin. S kompakt olduğu için Δ da sadece sonlu sayıda üçgen bulunur. Bu üçgelemeyi kullanarak yüzey için basit bir topolojik model bulabiliriz.

s_1^2, Δ da bir üçgen olsun. s_1^2 ye karşılık gelen öklidyen 2-simpleks e_1^2 diyelim. s_1^2 ile ortak bir kenara sahip olan bir s_2^2 üçgeni alalım, buna karşılık gelen e_2^2 öklidyen 2-simplekside e_1^2 ile ortak kenara sahip olsun. $|s_1^2| \vee |s_2^2|$ nin sınırındaki yönlendirme s_1^2 ve s_2^2 üzerindeki yönlendirmeye göre belirlenecektir. Aynı şekilde e_1^2ve e_2^2 üzerindeki yönlendirmede e_1^2 ve e_2^2 üzerindeki yönlendirmeye göre belirlenir. e_1^2 u e_2^2 topolojik olarak bir kareye dönüştürülebileceğinden eğer Δda n üçgen varsa bu (n+2) kenarlı bir düzgün poligona dönüştürülebilir. Δ da herbir kenar tam olarak iki üçgene ait olacağından poligonun bir kenarı, başka bir kenarı ile aynıdır. O halde poligon çift sayıda kenara sahiptir. Bu poligonu Π ile göstereceğiz.



Şekil 2.3.

Teorem 2.6.1. Kompakt bir yüzeyin normal formu

i) aa^{-1} veya

ii) $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots\ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ sembolü

ile ifade edilen düzgün bir poligondur. Burada a ve b harfleri poligonun kenarlarını gösterir.

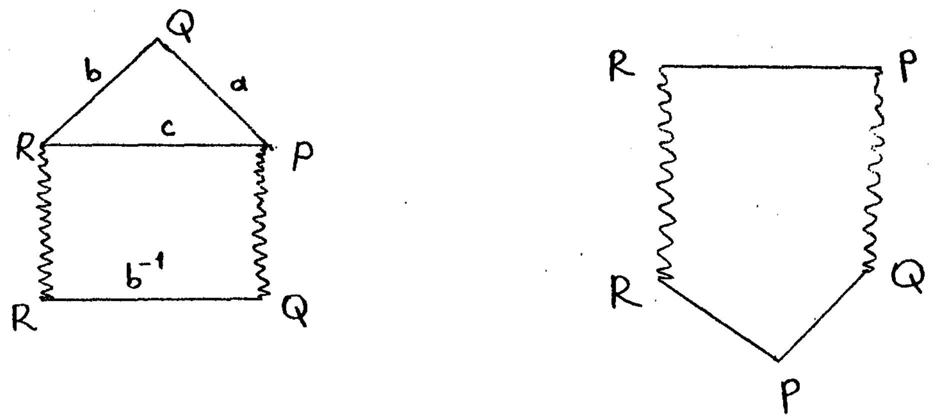
İspat: Π nin iki kenarına karşılık gelen, Δ da bir $s^1=\langle p,q\rangle$ kenar olsun. s^1 in p köşesi, Π nin iki köşesine karşılık gelir, bu köşelere P diyelim. Benzer şekilde diğer köşesine karşılık gelen köşelerede Q diyelim. Poligonun sınırında belli bir yönde ilerlerken $\langle P,Q\rangle$ kenarından bir kere ve $\langle Q,P\rangle$ kenarından da bir kere geçeriz. Kenarlardan birine a, diğerine a^{-1} sembolünü kullanalım. Π nin sınırındaki kenarlar benzer şekilde isimlendirilirse poligon için bir sembol elde ederiz. Bunu şekil 2.3. için yazarsak $abcb^{-1}a^{-1}dc^{-1}d^{-1}$ π için bir sembol teşkil eder.

Eğer π poligonunu iki köşesini birleştiren bir doğru boyunca kesip tekrar aynı tanımlı kenarları ve denk noktaları karşılık gelecek şekilde birleştirirsek yeni bir π' poligonu elde ederiz. Bu iki π ve π' poligonları S yüzeyini gösterir. Çünkü bu işlem noktaların tanımlanmasını değiştirmemiştir. Bundan sonraki işlemlerimizde π yi daha basit olarak yazmaya çalışacağız.

Şimdi farzedelim ki π nin en az dört kenarı olsun. ...... aa^{-1} ..... de π nin bir sembolünü göstersin. Bu demektir ki Q, PQ ve QP kenarlarının ortak bir köşesidir. Bu taktirde S nin topolojik tasvirinde p, bir tek P köşesine pq ise bir tek PQ kenarına dönüşür, dolayısıyla bu kenar P ler birleştirilerek elde edilen kenar, yeni π' poligonunun içinde kalır. O halde sembolden aa^{-1} şeklindekiler kaldırılır.

Şimdi ise poligonunu bütün köşeleri aynı tanımlı bir poligona dönüştüreceğiz. S de aynı noktaya karşı gelen π nin bütün köşelerini P ile gösterelim. π nin sınırında bulunan bir a kenarının P ile gösterilmeyen köşesi varsa, o köşeye Q diyelim. Q ya eşdeğer, π nin diğer köşelerinede Q diyelim. Şimdi Q ile gösterilen köşelerin sayısını 1 adet küçülterek, P köşelerinin sayısını 1 adet artırabileceğimizi göstereceğiz.

a=PQ ve b ise a ile ortak köşesi Q olan π nin diğer kenarı olsun. Biliyoruzki b burada a^{-1} değildir. Çünkü ilk yaptığımız basitleştirmede aa^{-1}'i yok etmiştik. b=QR (R, P veya Q olabilir) olsun. P ile R yi bir c doğrusu ile birleştirelim. π yi c boyunca keserek b kenarını b^{-1} kenarı üzerine getirerek birleştirelim. Böylece yeni π' poligonu elde ediriz. π' poligonunda kenar sayısı aynı kalmış yalnız poligonunda Q kaldırılmış yenisine P ilave edilmiştir. Bu şekilde devamla bütün köşeleri aynı olan bir poligonu elde edilir(Şekil 2.4)



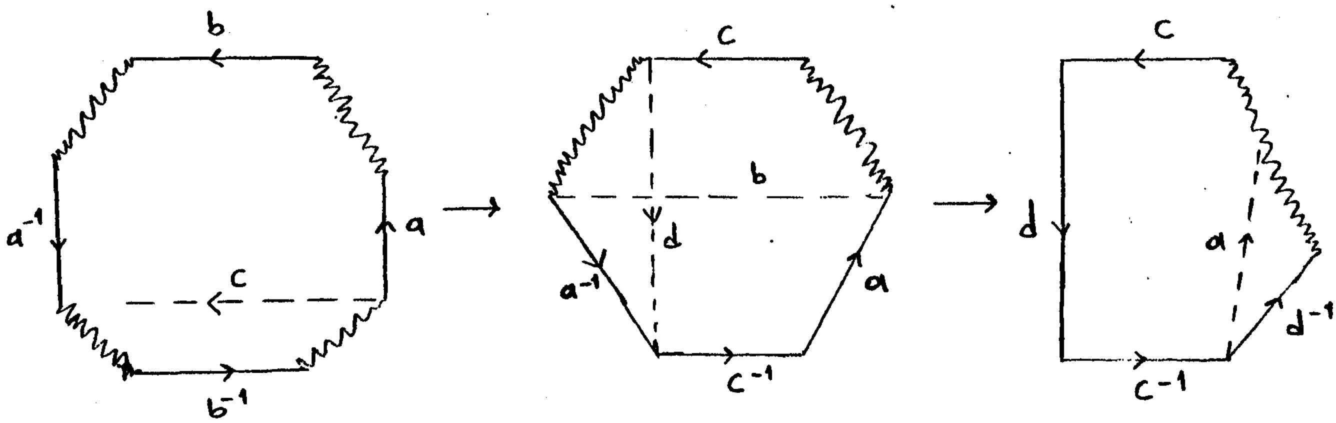
Şekil 2.4.

Üçüncü olarak, birbirine bağlanan kenarlar Π nin sembolünde, $\ldots a \ldots b \ldots a^{-1} \ldots b^{-1}$ sırasında bulunuyorsa a ve b kenarları birleştirilebilir diyeceğiz. Birleştirilen kenar çiftleri biraraya getirilebilir. Π nin $\ldots a \ldots b \ldots a^{-1} \ldots b^{-1}$ poligonunda, a nın pozitif yönde rastlanan ilk P köşesini, a^{-1} in son köşesine bir c doğru parçasıyla birleştirelim. Π yi c boyunca keserek Π_1, Π_2 poligonlarına bölelim. Bu poligonlardan biri b yi, diğeri ise b^{-1} ihtiva eder. b, b^{-1} üzerine getirilirse

$\Pi_1 \vee \Pi_2 = \Pi'$ ün sembolü

$$\ldots c \ldots a^{-1} c^{-1} \ldots a$$

olur. Aynı şekilde Π' de, pozitif yönde rastlanan c nin son köşesini, c^{-1} in ilk köşesine bir d doğrusuyla birleştirelim. Π' yü d boyunca keserek, Π_1' ve Π_2' poligonlarına ayıralım. Bunları tekrar a yı a^{-1} üzerinde birleştirirsek, $\Pi_1' \vee \Pi_2' = \Pi''$ poligonun sembolünün : $\ldots cdc^{-1}d^{-1}$ olduğu görülür. Şekil 2.5. de gösterilmiştir.



Şekil 2.5.

BÖLÜM 3

3. HOMOLOJİ GRUPLARI

3.1. Homoloji Grupları ve Betti Sayıları

S yüzeyi üzerinde bir Δ üçgenlemesi verilmiş olsun. Δ daki bütün yönlenmiş simplekleri $\mp s_1^n$, $\mp s_2^n \ldots\ldots \mp s_k^n \ldots\ldots$ $n=0,1,2$ ile gösterelim. Δ da n-simpleksler üzerinde bir c^n n-zinciri tamsayı değerli bir fonksiyon olarak tanımlanır. Aşağıdaki özellikleri sağlayan c^n n-zinciri, sonlu sayıda simpleks dışında sıfır değeri alır.

i) $c^n(-s^n)=-c^n(s^n)$

ii) $(c_1^n+c_2^n)(s^n)=c_1^n(s^n)+c_2^n(s^n)$

c^n n-zincirler kümesi $C^n=C^n(S_\Delta)$ ile göstereceğiz. Bu küme yukarda tanımladığımız toplama işlemine göre bir grup oluşturur. Bu grubun toplamsal birim elemanı; bütün $s^n \in S_\Delta$ simpleksler üzerinde sıfır değerini alan zincir olarak tanımlanır ve bunu 0 ile göstereceğiz.

Her bir $S_k^n \in S_\Delta$ simpleksine, S_k^n üzerinde 1, $-S_k^n$ üzerinde -1 ve $j \neq k$ için s_j^n üzerinde 0 değerini alan özel bir n-zinciri karşılık getirebiliriz. Bu n-zinciri tekrar S_k^n ile gösterelim. Buna göre herbir s_k^n n-simpleksi bir n-zincir olarak düşünülebilir. O halde s_j^n n-simpleksleri a_j değerlerini alıyorsa bir c^n n-zinciri $c^n=\sum a_i S_i^n$ şeklinde yazılabilir. Burada toplam sonlu sayıda terim üzerinden alınmıştır.

Çünkü a_i değerleri sadece sonlu sayıda simpleks üzerinde sıfırdan farklı değerler almaktadır. Böylece her n-zincir, n-simplekslerin tamsayı katsayılı sonlu bir lineer kombinezonudur,

$$c_1^n=\sum a_i s_i^n \quad \text{ve} \quad c_2^n=\sum b_i s_i^n$$

ise

$$c_i^n+c_2^n=\sum (a_i+b_i)s_i^n \quad \text{dir.}$$

Şimde $\partial: C^n \longrightarrow C^{n-1}$ bir sınır operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanacaktır. Yukarda belirttiğimiz gibi herbir n-simpleks bir n-zincir olarak düşünüldüğünden, ∂ sınır operatörü ilk önce n-simpleksleri üzerinde tanımlanacak.

0-simpleks $<P_o>$ için $\partial<P_o>=0$

yönlenmiş 1-simpleks $<P_o,P_1>$ için $\partial<P_o,P_1>=<P_1>-<P_o>$

yönlenmiş 2-simpleks $<P_o, P_1, P_2>$ için ise

$$\partial<P_o, P_1, P_2)=<P_1, P_2>-<P_o, P_2>+<P_o, P_1>$$

şeklinde tanımlanır.

Bir yönlenmiş simpleksin sınırı, simpleksi belirten noktaların permütasyonundan bağımsızdır. Bu nedenle simpleksler üzerinde tanımlı sınır operatörü iyi tanımlıdır. Ayrıca her bir s^n n-simpleksi için $\partial(-s^n)=-\partial(s^n)$ olduğu açıktır.

∂ operatörü lineer olduğundan bir n-zincir $c^n=\sum a_i s_i^n$ üzerinde $\partial c^n=\sum a_i \partial s_i^n$ şeklinde ifade edilir. $\partial:C^n \longrightarrow C^{n-1}$ bir homomorfizmadır. Çünkü $\partial(c_1^n+c_2^n)=\partial c_1^n+\partial c_2^n$ dir.

$\partial c^n=0$ özelliğini sağlayan c^n n-zincirlerine n-devir veya kapalı n-zincir denir. Bu şekildeki n-devirler C^nnın çekirdeğini oluşturur. Bu grup C^n nin bir alt grubudur, bu grubu Z^n ile göstereceğiz.

Bir c^n n-zinciri, $c^n=\partial c^{n+1}$ olacak şekilde bir c^{n+1} (n+1)-zincirinin sınırı ise bu n-zincire n-sınır veya tam n-zincir denir. Bu şekildeki zincirler C^n nin bir alt grubunu oluşturur. Bu grubuda B^n ile göstereceğiz. n>2 için $C^n=0$ ve $B^2=0$ dır. Ayrıca B^n, Z^n nin bir alt grubudur: Eğer bir $b^n=\partial c^{n+1}$ ise $\partial b^n=\partial c^{n+1}=0$ olduğunu görmeliyiz. Bu özelliği sadece simpleksler için göstermek yeterlidir.

s^o 0-simpleks $s^o=\langle P_o\rangle$ $\quad\partial s^o=\partial\langle P_o\rangle=0$ olduğu için $\partial\partial s^o=0$ dır.

s^1 1-simpleks $s^1=\langle P_o, P_1\rangle$ için $\partial\langle P_o, P_1)=\langle P_1\rangle-\langle P_o\rangle$ ve $\partial(\langle P_1\rangle-\langle P_o\rangle)=\partial\langle P_1\rangle-\partial\langle P_o\rangle$

$$=0$$

s^2 2 simpleks $\quad s^2=\langle P_o, P_1, P_2\rangle$

$$\partial s^2=\langle P_o, P_1, P_2\rangle=\langle P_1, P_2\rangle-\langle P_o, P_2\rangle+\langle P_o, P_1\rangle$$

$$\partial\partial s^2=\partial(\langle P_1, P_2\rangle-\langle P_o, P_2\rangle+\langle P_o, P_1\rangle)$$

$$=\partial\langle P_1, P_2\rangle-\ \langle P_o, P_2\rangle+\ \langle P_o, P_1\rangle$$

$$=\langle P_2\rangle-\langle P_1\rangle-\langle P_2\rangle+\langle P_o\rangle+\langle P_1\rangle-\langle P_o\rangle$$

$$=0$$

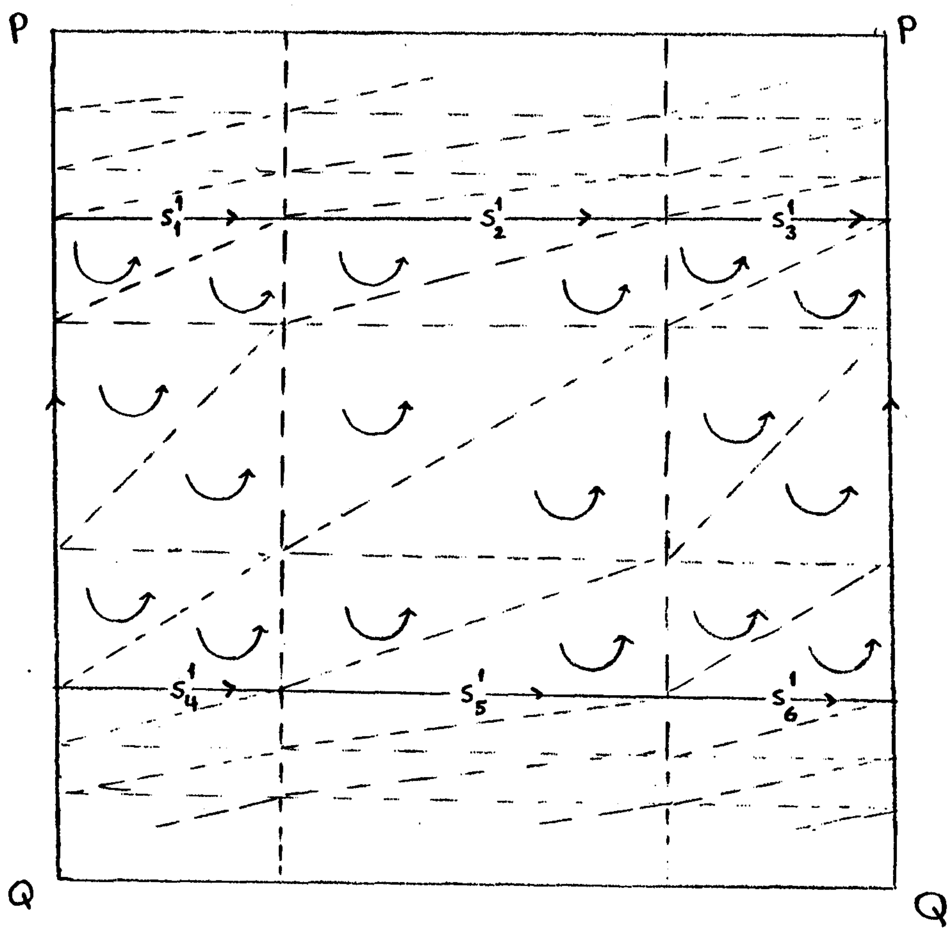
∂ homomorfizmi C^n den B^{n-1} üzerine bir dönüşüm olup çekirdeği Z^n dir. O halde $\dfrac{C^n}{Z^n}$ bölüm grubu B^{n-1} grubuna izomorftur.

Bu söylediklerimizi özet olarak aşağıdaki teoremle ifade edebiliriz.

Teorem 3.1.1. Herhangi bir c^n n-zinciri için $\partial\partial c^n=0$ olduğundan $B^n\subset Z^n$ ve $B^{n-1}\cong\dfrac{C^n}{Z^n}$ dir.

Yukarıda her sınırın bir devir olduğunu gördük, yani her sınırın ∂ altındaki görüntüsü sıfırdır. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Bunu aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 3.1.1.



Şekil 3.1.

Şekil 3.1. de sol ve sağ kenarları aynı tanımlı bir dikdörtgenin üçgenlemesinin sonsuz bir üçgenlemesi verilmiştir. Burada 1-devir $c_1^1 = \sum_{i=1}^{3} s_i^1$ olsun. c_1^1 herhangi bir 2-zincirin tam olarak sınırı değildir. Çünkü, eğer $c_1^1 = \partial c^2$ ise c_2^2 s_1^1 bir ortak kenara sahip s^2 2-simpleksi üzerinde sıfırdan farklı bir değer almalıdır. Bu taktirde c^2 de, ∂c^2 içinde s^2 nin bazı kenarlarının c_1^1 de olmaması için s_1^1 nin aynı kenarı üzerindeki bütün 2-simpleksler üzerinde aynı değeri almalıdır. Bunun anlamı ise c^2 sonsuz sayıda 2-simpleks üzerinde sıfırdan farklı değer alması demektir. Bu bir çelişkidir. O halde c_1^1 bir sınır değildir.

Şimdi yeni bir grup tanımlayacağız. C^n komütatif olduğundan B^n, Z^n nin normal alt grubudur. Buradan $H^n = \frac{Z^n}{B^n}$ grubunu oluşturacağız ve bu gruba S_Δ nın n-homoloji grubu diyeceğiz.

Herhangi bir $z^n \in B^n$ ise buna H^n nin sıfır elemanı denir. Bu tür z^n n-devirlerine (bu bir sınırdır) sıfıra homologdur diyeceğiz ve $z^n \sim 0$ yazacağız.

z_1^n ve z_2^n, $z_1^n - z_2^n \sim 0$ ise bu iki devire Z^n nin aynı kosetindedir, diyeceğiz ve $z_1^n \sim z_2^n$ yazacağız. Bunlar H^n nin aynı elemanını temsil ederler.

Aşağıdaki iki özelliği sağlayan n-devirlerin, z_i^n $i=1,2,\ldots b_n$ ailesini gözönüne alalım. z_i^n ler lineer bağımsızdır yani $\sum_{i=1}^{b_n} a_i z_i^n \sim 0$ ise $a_i = 0 (i=1,2,\ldots, b_n)$ sıfırdır.

i) $\{z_1^n, z_2^n, \ldots, z_{b_n}^n\}$

ii) z^n deki her z^n deviri,

$$Z^n \sim \sum_{i=1}^{b_n} a_i z_i^n \qquad , (a_i \text{ ler tamsayı}) \text{ şeklinde}$$

ifade edilir. b_n sayısına S_Δ yüzeyinin n. Betti sayısı denir. Betti sayısı homoloji cinsinden tanımlandığına göre H^n nin elemanları cinsindende ifade edilebilir.

$[Z^n]$, Z^n devirinin homoloji sınıfını gösteriyorsa, bu taktirde $[z^n]$, H^n nin bir elemanıdır. Eğer H^n nin aşağıdaki iki özelliği sağlayan b_n tane elemanı varsa Bu elemanları Z_i^n , $i=1,2,\ldots, b_n$ ile gösterelim.

i) $\sum_{i=1}^{b_n} a_i [Z_i^n] = 0$, a_i tamsayı ve $a_i=0$ $i=1,2,\ldots,b_n$ olması gerekir.

ii) Herbir $[Z^n]$ eleman H^n için $Z^n = \sum_{i=1}^{b_n} a_i [Z_i^n]$ dir.

Bu taktirde b_n sayısına S_Δ nın n-Betti sayısı denir. $[Z_i^n]$ $i=1,2,\ldots,b_n$ ler H^n için bir taban oluşturur.

3.2. Homoloji Gruplarının İnvaryantlığı

Yukarıda tanımladığımız n-homoloji grubu ve n-Betti sayısı, S yüzeyinin Δ üçgenlemesine bağlıdır. Fakat S yüzeyinin Δ dan farklı bir Δ' üçgenlemesi alındığında, $H^n(S_\Delta)$ homoloji grubu $H^n(S_{\Delta'})$ homoloji grubuna izomorf olacaktır ve dolayısıyla Betti sayısı invaryant kalacaktır. Böylece birazdan görüleceği gibi homoloji grupları ve Betti sayıları sadece yüzeye bağlı olacaktır. Çünkü S ile S' yüzeyleri homeomorf ise bu homeomorfizma S nin bir Δ üçgenlemesini S' nin bir Δ' üçgenlemesine, üçgenler arasındaki ilişkiyi koruyacak şekilde ve $H^n(S'_{\Delta'}) \cong H^n(S_\Delta)$ olacak şekilde taşır.

Şimdi ilk önce H^0 ve H^2 grupları için b_0 ve b_2 sayılarını hesaplayalım. Bunların sadece yüzeye bağlı olduğunu gösterelim. H^1 in incelenmesi daha sonra ele alınacaktır. Her yüzey bağlantılı olduğu için $b_0=1$ dir. Çünkü her 0-zincir bir 0-devirdir. Şimdi ise bir 0-zincir ne zaman bir sınır olacağını araştıralım. $c^1 = \sum_j a_j s_j^1$ 1-zincir olsun. Bu taktirde $\partial c^1 = \sum_j a_j \partial s_j^1 = \sum_j a_j(s_j^0 - \bar{s}_j^0)$ olur. Burada dikkat edilirse a_j katsayısı bir kere (+) işaretli bir kerede(-) işaretli gözükmektedir.

∂c^1 de bütün katsayıların toplamı sıfıra eşit olur. Böylece bir 0-devirin bir sınır olması için gerekli koşul, bütün 0-simplekslerin katsayılarının toplamının sıfıra eşit olmasıdır. Buradan diyebiliriz ki bir tek s^0 0-simpleksinden oluşan 0-deviri bir sınır değildir. Şimdi herhangi bir s_1^0 0-simpleksin, s^0'a homolog olduğunu görelim. S bağlantılı olduğundan s^0 ve s_1 köşeleri Δ daki üçgenlerin kenarlarının sonlu bir zinciri ile birleştirilebilir. Bu kenarları sırasıyla $s_1^1, s_2^1, \ldots, s_k^1$ ile gösterelim ve bunları s^0 dan s_1^0'a doğru yönlendirelim. Bu taktirde $\partial \sum_{j=1}^{k} s_j^1 = s_1^0 - s^0$ ve $s_1^0 \sim s^0$ dır. O halde s^0 ın homoloji sınıfı H^0 için bir tabanı oluşturur ve $b_0=1$ olduğu görülür.

H^2 için inceleme yapacağız. Δ da üçgenler üzerinde uygun bir yönlendirme alalım. $c^2 = \sum_{j=1}^{N} a_j s_j^2$ de S_Δ üzerinde bir 2-zincir olsun. Eğer c^2 bir 2-devir ise, bu durumda ya bütün a_j ler sıfır ya da 3 tane 2-simpleks ile ortak kenara sahip olan her s_j^2 2-simpleksi c^2 de bulunmalıdır ve bu 3 tane 2-simpleks s_j^2 ile aynı katsayıya sahip olmalıdırlar. Bu ise c^2 de bütün üçgenlerin bulundurulması halinde mümkün olur. Eğer S kompakt değilse, Δ sonsuz sayıda üçgen içerir ve c^2 de bu üçgenlerin sonlu tanesini içermeyecektir. Buna göre sıfırdan başka 2-devir mevcut olmayacaktır. Yani kompakt olmayan yönlendirilebilir yüzey üzerinde sıfırdan farklı 2-devir yoktur ve bu durumda $b_2=0$ dır.

Eğer S kompakt ise, c^2 nin bir devir olması için $c^2 = a \sum_{j=1}^{N} S_j^2$ olmalı ve bu toplam Δ daki bütün 2-simpleksler üzerinden alınmalıdır. $\bar{c}^2 = \sum_{j=1}^{N} S_j^2$ de bir 2-devirdir. Çünkü $\partial \bar{c}^2$ deki herbir 1-simpleks uygun yönlendirilmiş bir üçgenin kenarıdır. Ayrıca $B^2=0$ olduğundan $\bar{c}^2$ sıfıra homolog değildir. Böylece $\bar{c}^2$, H^2 homoloji grubu için bir taban olup $b_2=1$ dir.

Bu sonuçları aşağıdaki teoremle ifade edelim.

Teorem 3.2.1. i) Herhangi bir yüzey için $b_0=1$,

ii) Herhangi bir kompakt yönlendirilebilir yüzey için $b_2=1$,

iii) Kompakt olmayan yönlendirilebilir yüzey için $b_2=0$ dır.

3.3. Temel Grup ve Birinci Homoloji Grubu

Buraya kadar yaptığımız incelemelerde, bir S_Δ yüzeyi üzerindeki eğrilerin iki önemli grubunu gördük. Bunlar $\mathcal{F}$ temel grubu ve H^1 birinci homoloji grubudur. H^1 in tanımı gereği bu homoloji grubu Δ üçgenlenmesine bağlı olduğu görülmektedir. H^1 in üçgenlemeden bağımsız olduğunu (yani sadece yüzeye bağlı) görmek için H^1 ile $\mathcal{F}$ arasındaki ilişkiyi göstereceğiz.

$\mathcal{F}$ temel grubu her zaman komütatif değildir. Yani C_1C_2 nin C_2C_1 e homotop olması gerekmez. Bir C eğrisine homotop olan eğrilerin sınıfını $\bar{C}$ ile gösterelim. Bilindiği gibi bu $\bar{C}$ denklik sınıfı $\mathcal{F}$ nın bir elemanıdır. $\bar{C}_1\bar{C}_2\bar{C}_1^{-1}\bar{C}_2^{-1}$ şeklindeki elemana komütatör denir ve $[C_1, C_2]$ şeklinde gösterilir. Bir grubun komütatif olması için gerek ve yeter koşul her bir komütatörün, grubun birim elemanına eşit olmasıdır.

$[\bar{C}_1, \bar{C}_2]$ nın tersi, $[\bar{C}_1, \bar{C}_2]^{-1} = \bar{C}_2\bar{C}_1\bar{C}_2^{-1}\bar{C}_1^{-1} = [\bar{C}_2, \bar{C}_1]$ de bir komütatördür. Komütatörlerin mümkün bütün çarpımları alınarak elde edilen gruba komütatör grubu denir ve bu $\mathcal{F}$ nin bir altgrubudur. Bu komütatör altgrubu $[\mathcal{F},\mathcal{F}]$ ile göstereceğiz. Komütator altgrup normal altgruptur. $\bar{C}\,[\bar{C}_1, \bar{C}_2]\,\bar{C}^{-1} = [\bar{C}\bar{C}_1\bar{C}^{-1}, \bar{C}\bar{C}_2\bar{C}^{-1}]$ dir.

Buna göre $\mathcal{F}/[\mathcal{F},\mathcal{F}]$ bölüm grubunu oluşturabiliriz. Bu grup komütatiftir. $\mathcal{F}/[\mathcal{F},\mathcal{F}]$ grubuna abelyenleştirilmiş temel grup denir.

Teorem 3.3.1. $H^1 \cong \mathcal{F}/[\mathcal{F},\mathcal{F}]$. Yani birinci homoloji grubu, abelyenleştirilmiş temel gruba izomorftur.

Δ üçgenlemisinde sabit bir P_0 köşesi alalım ve $s_i{}'=\langle P_i, P_{i+1}\rangle$ $i=0,1,\ldots,n-1$ $P_0=P_n$ Δ da 1-simpleksler olsun. Bir 1-zincir,

$$\gamma' = \sum_{i=1}^{n-1} s_i{}' = \langle P_0, P_1\rangle + \ldots + \langle P_{n-1}, P_0\rangle$$

başlangıç ve bitim noktası P_0 olan bir kapalı eğri oluşturur. Böyle 1-devirlere S üzerinde temel devirler denir. Herhangi bir devir temel devirlerin tamsayı katsayılı bir lineer kombinezonu olarak yazılabilir. Gerçektende $c^1 = \sum_{i=1}^{N} a_i s_i{}^1$ olsun. Eğer $s_1{}^1=\langle P_1, P_2\rangle$ ve $c^1=0$ olduğundan P_2 c^1 de olmayacaktır ve $c^1-s_1{}^1$ de $\langle P_1, P_3\rangle$ simpleksi olmak zorundadır. Bu şekilde devam edersek c^1 de $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_2, P_3\rangle$ $\ldots$, $\langle P_k, P_{k+1}\rangle\ldots$ simplekslerinin bir dizisini elde ederiz. c^1 yalnız sonlu sayıda simpleks içereceğinden bu dizi tekrar P_1 e dönmek zorundadır. Buradan c^1 de $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_2, P_3\rangle$, $\ldots$, $\langle P_m, P_1\rangle$ simplekslerinin bir dizisini oluşturabiliriz.

Buradan $\tilde{c}^1 = c^1-a_1(\langle P_1, P_2\rangle+\langle P_2, P_3\rangle + \ldots +\langle P_m, P_1\rangle)$ bir devirdir, bu $s_1{}^1$ içermez ayrıca c^1 de olmayan hiçbir simplekside içermeyecektir. Yukardaki işlemi $\tilde{c}^1$ üzerinde tekrarlarsak $\tilde{c}^1$ deki simplekslerin sayısını indirgemiş oluruz ve bu şekilde devam edilirse yalnız bir s^1 simpleksi içeren bir 1-devir elde ederiz. Burada s^1 in 1-devir olması için $\partial s^1=0$ olmalıdır.

Şimdi P_1 ile P_0 ı, Δ da ardışık köşeleri Q_0, $Q_1\ldots Q_n$ $Q_0=P_0$ ve $Q_n=P_1$ olan bir poligonal yol ile birleştirelim. $\lambda(P_1)=\langle Q_0, Q_1\rangle+\ldots+\langle Q_{n-1}, Q_n\rangle$ alalım ve $\langle P_1, P_2\rangle+\ldots+\langle P_m, P_1\rangle$ 1-devirini yeniden $\lambda(P_1)+\langle P_1, P_2\rangle+\ldots+\langle P_m, P_1\rangle-\lambda(P_1)$ olarak yazarsak bu da bir temel devir oluşturur.

Orjinal c^1 1-deviri, bu temel devirlerin tamsayı katsayılı bir lineer birleşimidir.

Herbir 1-simpleks s^1 bir φ dönüşümü ile bir I birim intervaline homeomorftur, öyleki bu bir $C=(\varphi,I)$ eğrisini belirtir, bu parametrizasyon s^1 in yönlendirilmesiyle de uyumludur. Eğer 1-simpleks $<P_i, P_{i+1}>$ P_i den P_{i+1}'e bir C_i eğrisi ile gösterilirse, bu taktirde bir $\gamma^1=<P_o, P_1>+<P_1, P_2>+....+<P_{n-1}, P_o>$ 1-deviri P_o dan geçen kapalı bir eğriyi gösterir. Bu kapalı eğri $\Gamma(\gamma')=C_oC_1....C_{n-1}$ ile gösterilir. Hatta herbir 1-devir c^1 temel devirlerin tamsayı katsayılı bir lineer kombinezonudur, yani

$c^1=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\gamma_i^1$ dir ve $\Gamma(c^1)=\Gamma(\gamma_1^1)^{\alpha_1}\ldots\ldots\Gamma(\gamma_m^1)^{\alpha_m}$

bir kapalı eğri belirtir. Bir C kapalı eğrisinin 1-devir olması demek Δ daki bazı 1-devir c^1 için $C=\Gamma(c^1)$ anlamındadır.

Bu açıklamadan sonra H^1 in $\mathcal{F}/[\mathcal{F},\mathcal{F}]$ ye izomorf olduğunu görmek için aşağıdaki iki yardımcı teoremi ifade edelim.

Yardımcı Teorem 3.1. S yüzeyi üzerinde bir P_o noktasından geçen kapalı bir C eğrisi, Δ üçgenlemesindeki bir 1-devire homotop olarak deforme edilebilir.

Yardımcı Teorem 3.2. S yüzeyi üzerindeki 1-devir bir noktaya homotop ise, bu devir sıfıra homologdur.

Aşağıda $\mathcal{F}$ den H^1 e bir homomorfizm tanımlayacağız. P_o dan geçen herhangi bir C_1 kapalı eğrisi için $h(C_1)$ bir devire eşittir ve bu 1-devir C_1 e homotoptur. C_1^{-1} ve C_1C_2 eğrileri için ise $h(C_1^{-1})=-h(C_1)$ ve $h(C_1C_2)=h(C_1)+h(C_2)$ dır.

Eğer $C_1\approx C_2$ ise $C_1C_2^{-1}\approx 1$ ve $h(C_1C_2^{-1})\sim 0$ veya $h(C_1)\sim h(C_2)$ dir. Böylece h, $\mathcal{F}(P_o)$ dan H^1 e bir homomorfizm tanımlar. h örtendir. Herhangi bir c^1 1-deviri temel devirlerin tamsayı katsayılı bir lineer birleşimi olarak yazılacağından $c^1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_i^1$ şeklinde gösterilir, öyleki P_o dan geçen bir eğri $\Gamma_i = \Gamma(\gamma_i^1)$ şeklindedir ve $h(\Gamma_i) \sim \gamma_i^1$ dir. Buradan $h(\prod_{i=1}^{n} \Gamma_i^{\alpha_i}) = \sum_{i=1} a_i h(\Gamma_i) \sim \sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_i^1 = c^1$ olduğundan h örtendir.

İspatı tamamlamak için h homomorfizminin çekirdeğinin $[\mathcal{F},\mathcal{F}]$ olduğunu göstermeliyiz. H^1 Kommütatif olduğundan h nın çekirdiği $[\mathcal{F},\mathcal{F}]$ yi içerir. Bundan dolayı göstermeliyiz ki $h(C) \sim 0$ ise C nin $[\mathcal{F},\mathcal{F}]$ nin bir elemanı olduğunu görmeliyiz.

Bunu gösterirken C nin bir 1-devire homotop olduğunu, yani $C = \Gamma(c^1)$ ve $h(C) = c^1$ olduğunu kabul edebiliriz. Herbir $s^2 = \langle Q_o, Q_1, Q_2 \rangle$ için $\Lambda(\partial s^2) = \Lambda(Q_o)\overline{Q_oQ_1}\ \overline{Q_1Q_2}\ \overline{Q_2Q_o}\ \Lambda^{-1}(Q_o)$ şeklinde bir yol karşılık getirelim, burada $\Lambda(Q_o)$ P_o ile Q_o ı birleştiren Δ da poligonal bir yoldur. Hatta herhangi bir 1-simpleks $s^1 = \langle Q_o, Q_1 \rangle$ içinde, $\Lambda(s^1) = \Lambda(Q_o)\overline{Q_oQ_1}\ \Lambda^{-1}(Q_1)$ karşılık getirelim. Bu taktirde $\lambda(Q_i)$, $\Lambda(Q_i)$ simplekslerinin 1-zinciri olarak alalım. O zaman

(1) $h(\Lambda(\partial s^2)) = \lambda(Q_o) + \partial s^2 - \lambda(Q_o) = \partial s^2$ elde ederiz,

$\overline{Q_oQ_1}\ \overline{Q_1Q_2}\ \overline{Q_2Q_o}$ yolu bir noktaya homotoptur, bunun anlamı $\Lambda(\partial s^2)$ ninde bir noktaya homotop olması demektir ve bu $\mathcal{F}$ nin birim elemanını gösterir.

Herhangi bir C eğirisi $C = \Gamma(c^1) = \overline{P_oP_1}\ \overline{P_1P_2} \cdots \overline{P_{n-1}P_n}$

$P_n = P_o$ dır, $C = \Lambda(P_o)\overline{P_oP_1}\ \Lambda^{-1}(P_1)\ \Lambda(P_1)\ \overline{P_1P_2}\ \Lambda^{-1}(P_2) \cdots\cdots$ $\Lambda(P_{n-1})\ \overline{P_{n-1}P_n}\ \Lambda^{-1}(P_o)$ yazılabilir, burada $\Lambda(P_o) = \overline{P_oP_o}$ dır.

(2) $C = \Lambda(\overline{P_oP_1})\Lambda(\overline{P_1P_2}) \cdots \Lambda(\overline{P_{n-1}P_n})$.

Her bir $\overline{P_iP_{i+1}}$ için $h(\Lambda(\overline{P_iP_{i+1}})) = \lambda(P_i) + \langle P_i, P_{i+1} \rangle - \lambda(P_{i+1})$

$$= \langle P_i, P_{i+1} \rangle - \lambda(\partial \langle P_i, P_{i+1} \rangle)$$

elde edilir.

Bundan dolayı $h(C)=\sum_{i=0}^{n-1} \langle P_i, P_{i+1}\rangle - \lambda(\partial \sum_{i=1}^{n-1} \langle P_i, P_{i+1}\rangle)$, ve $\sum_{i=1}^{n-1} \langle P_i, P_{i+1}\rangle$ bir devir olduğundan sınırı sıfırdır ve son terim yok edilmiştir.

Eğer $h(C)=\sum_{n=1}^{N} a_n s_n^{\,1}$ ise, an C nin (2) deki gösteriminde $(s_n^{\,1})$ lerin üstlerinin toplamını verir.

Şimdi $h(C)\sim 0$ farzedersek, buradan

$$h(C)=\partial \sum_{n=1}^{N} b_n s_n^{\,2} = \sum_{n=1}^{N} b_n \partial s^2 \qquad \text{elde edilir.}$$

$A=\prod_{n=1}^{N} [\Lambda(\partial s_n^{\,2})]^{bn}$ şeklinde tanımlı eğri olsun. (1)'e göre $h(A)=h(\prod_{n=1}^{N} [\Lambda(\partial s_n^{\,2})^{bn}) = \sum_{n=1}^{N} bn\, h(\Lambda(\partial s_n^{\,2}))$

$$= \sum_{n=1}^{N} bn\, \partial s_n^{\,2} = h(C)$$

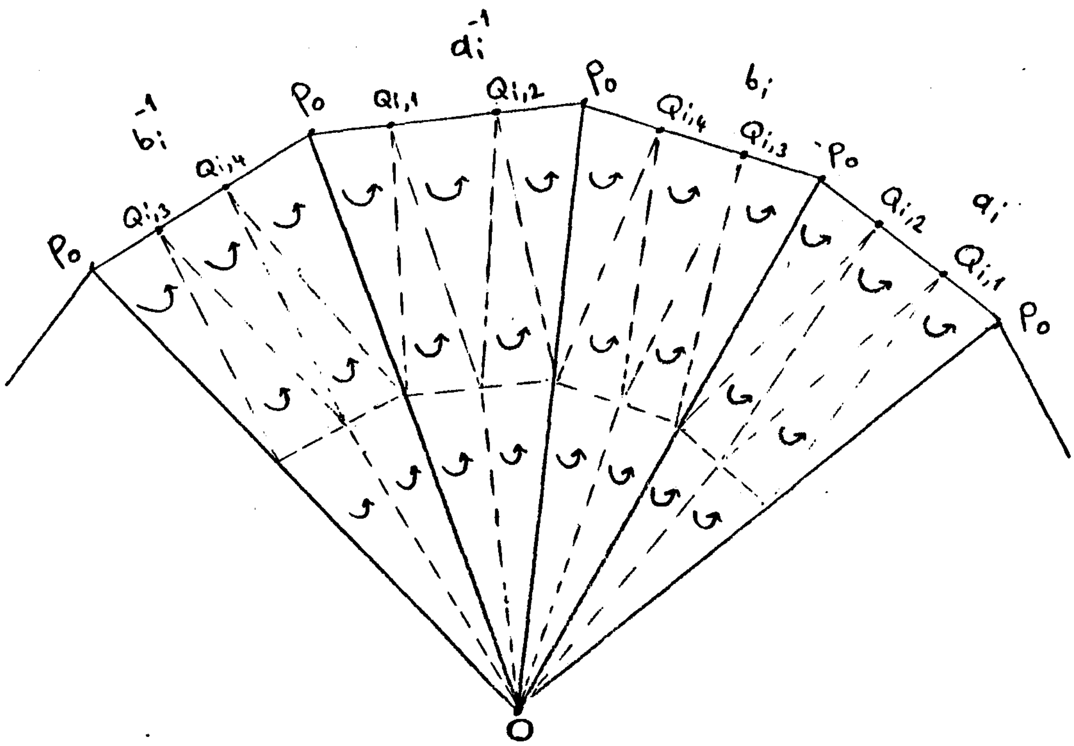
ve $h(CA^{-1})=h(C)-h(A)=0$ dır. Böylece CA^{-1}, $\Lambda(s_n^{\,1})$ kapalı eğrilerinin bir çarpımıdır, herbirinin üstlerinin toplamı sıfıra eşittir. Fakat bu sadece CA^{-1} in komütatör altgrubun bir elemanı olması için kriterdir. Herbir $\Lambda(\partial s_n^{\,2})\approx 1$ olduğundan, $A\approx 1$ ve $CA^{-1}\approx C$ elde edilir, böylece C, $[\mathcal{F},\mathcal{F}]$ ninde bir elemanıdır. Bu, $H^1 \cong \mathcal{F}/[\mathcal{F},\mathcal{F}]$ nin ispatını tamamlar.

3.4. Kompakt Yüzeylerde Homoloji

Şimdiye kadar yaptığımız incelemelerde H^0 ve H^2 homoloji gruplarını inceledik, $b_0=1$ ve $b_2=1$ olduğunu gösterdik. Homoloji grupları topolojik invaryant olduğundan, H^1 i hesaplamak için (üçgenlemeden bağımsız olduğu için) sadece uygun bir üçgenlemeye sahip olan normal formu (bütün kenarları aynı olan poligon)gözönüne alabiliriz.

Cinsi $g\geqslant 1$ olan kompakt bir yüzeyin normal formu $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ldots\ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$ sembolü ile gösterilen

4g-kenarlı bir poligondur. Buradaki uygun üçgenleme (Şekil 3.2.) deki gibi alınacaktır. Bu üçgenlemenin özelliği, köşeleri aynı kümede olan iki simpleks yoktur. a_i, b_i kenarlarıda P_o dan P_o a giden 1-devirlerdir. Şimdi 2g sayıdaki 1-devirlerin H^1 homoloji grubu için bir homoloji tabanı olduğunu ispatlayacağız.



Şekil 3.2.

Önce $a_1b^1a_2b_2$....agbg kapalı eğrilerinin temel grubu doğurduğunu gösterelim. C, S üzerinde kapalı bir eğri olsun. Yardımcı teorem 3.1 gereği C, Δ daki bir simpleksel γ 1-devirine homotoptur. Δ üçgenlemesinde bir üçgenin keyfi bir Q iç noktasını seçelim. α, I birim aralığından Π normal poligon içine bir dönüşüm olmak üzere $\gamma=(\alpha,I)$ olsun. Herhangi bir $t\in I$ için γ, a_i veya b_i ile kesişmez. Çünkü bu durumda $\alpha(t)$ iyi tanımlı olmayacaktır. Ayrıca cinsi g olan bir kompakt yüzeyin Π normal formu eşdeğer kenarların çakıştırılması ile elde edilmiştir. Uygunluk için eğer γ kesişiyorsa kesişen bu noktadan sadece birini alacağız, onu $\alpha(t)$ ile göstereceğiz. Q dan $\alpha(t)$ ye giden yarı doğru Π nin sınırını bir noktada keser, bu noktaya $\beta(t)$ diyelim. $\alpha(t)$ den $\beta(t)$ ye giden doğru parçası üzerinde bu doğru parçasını s/1-s oranında $(0\leqslant s\leqslant 1)$ bölen noktayı $\theta(t,s)$ ile gösterelim. Bu taktirde,

$$\theta(t,s)=(1-s)\alpha(t)+s\beta(t) \quad \text{dir.}$$

Π nin sınırı üzerindeki $\alpha(t)$ noktaları için $\theta(t,s)=\alpha(t)$ dir. Böylece θ , γ nın S üzerindeki kapalı bir C' eğrisine homotop deformasyonunu belirtir ve C' tamamen a_i ve b_i $(i=1,\ldots.g)$ üzerinde kalır. Yardımcı teorem 3.1 gereği C' yi tekrar Δ da 1-simplekslerden meydana gelen γ' 1-devirine homotop yapabiliriz ve bu γ' 1-deviri a_i ve b_i üzerindeki 1-simplekslerden oluşur.

Buna göre şekil 3.2. deki γ' 1-devirini

$$\gamma'=\sum_{i=1}^{g}\Big[\mu_1^{(i)}\langle P_0,\ Q_{i,1}\rangle+\ \mu_2^{(i)}\langle Q_{i,1},\ Q_{i,2}\rangle+\ \mu_3^{(i)}\langle Q_{i,2},\ P_0\rangle$$

$$+\ \mu_4^{(i)}\langle P_0,\ Q_{i,3}\rangle+\ \mu_5^{(i)}\langle Q_{i,3},\ Q_{i,4}\rangle+\ \mu_6^{(i)}\langle Q_{i,4},\ P_0\rangle$$

burada $\mu_j^{(i)}$ tamsayı ve

$$\partial\gamma'=\sum_{i=1}^{g}(\ \mu_1^{(i)}-\mu_2^{(i)}\ )\langle Q_{i,1}\rangle+(\ \mu_2^{(i)}-\mu_3^{(i)}\ )\langle Q_{i,2}\rangle+\ \cdots\cdots$$

$$\cdots+(\ \mu_5^{(i)}-\mu_6^{(i)}\ )\langle P_0\rangle$$

$\partial\gamma'=0$ olduğundan $\mu_1^{(i)}=\ \mu_2^{(i)}=\mu_3^{(i)}$ ve $\mu_4^{(i)}=\ \mu_5^{(i)}=\mu_6^{(i)}$ dir, ve

$$a_i=\langle P_0,\ Q_{i,1}\rangle+\langle Q_{i,1},\ Q_{i,2}\rangle+\langle Q_{i,2},\ P_0\rangle$$

$$b_i=\langle P_0,\ Q_{i,3}\rangle+\langle Q_{i,3},\ Q_{i,4}\rangle+\langle Q_{i,4},\ P_0\rangle$$

olduğundan $\gamma'=\sum_{i=1}^{g}\ \mu_1^{(i)}a_i+\ \mu_4^{(i)}b_i$ elde edilir.

$C \approx \gamma'$ olduğundan C, a_i ve b_i lerin tamsayı katsayılı bir lineer birleşimine homotoptur. O halde a_i ve b_i temel grubu gerer.

$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ basit bağlantılı Π poligonunun sınırını oluşturduğuna göre 2g sayıdaki doğuraylar $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \approx 1$ homotopi ilişkisi sağlar.

H^1 abelyerleştirilmiş temel grup olduğundan a_i, b_i $(i=1,2,\ldots,g)$ homoloji grubunuda doğurur. Göstermeliyizki bunlar homolog olarak lineer bağımsızdır. Varsayalım ki $\sum_{i=1}^{g} \lambda_i a_i + \mu_i b_i \sim 0$ olsun. Bu durumda $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} v_i s_i^2$ ve s^2 ler Δ da 2-simpleksler olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{g} \lambda_i a_i + \mu_i b_i = \partial \sigma^2 \text{ dir.}$$

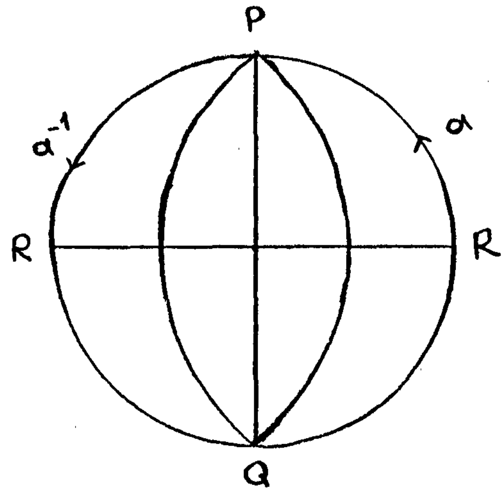
Eğer s_1^2, σ^2 de v_1 katsayısı ile bulunuyorsa Π de s_1^2 ile ortak bir kenara sahip üçgenlerde(bu ortak kenar $\partial\sigma^2$ olmayacağından) aynı katsayı ile bulunmalıdır. Δ daki herhangi bir üçgen s_1^2 ye ardışık üçgenlerin bir zinciriyle bağlanabilir, bu üçgenler ikişer ikişer bir kenar boyunca kesişir. Buradan görülürki Δ daki her üçgen σ^2 de aynı katsayı ile bir kere görünmektedir. Bu katsayıya v diyelim. Bu taktirde $\sigma^2 = v \sum_{i=1}^{N} s_i^2$, burada s_i^2 $i=1,2,\ldots,N$ Δ da herbir üçgeni bir kere gösterir ve

$$\partial\sigma^2 = v \sum_{i=1}^{g} a_i + b_i - a_i - b_i = 0 \text{ dır.}$$

Buradan $\sum_{i=1}^{g} \lambda_i a_i + \mu_i b_i = 0$ ve $\lambda_i = \mu_i = 0$ $(i=1,2,\ldots,g)$ olup, bu ise a_i, b_i lineer bağımsız olduğunu gösterir.

Bu $g \geqslant 1$ iken a_i, b_i $(i=1,2,\ldots,g)$ nin bir homoloji tabanı olduğunu belirtir. O halde 1.Betti sayısı $b_1 = 2g$ dir.

g=0 durumunda normal poligon a ve a^{-1} kenarlarına sahiptir.



Şekil 3.3.

Şekildeki gibi bir üçgenleme verilsin. Önceki gibi herhangi bir C kapalı eğrisi Π nin kenarlarının bir lineer birleşimine homotop olarak deforme edilebilir. Bu yüzden $C \approx ua+va^{-1}=(u-v)a$ dır. $(u-v)a$ nın bir devir olması için $\partial[(u-v)a] = (u-v)\,[\langle P\rangle-\langle Q\rangle] = 0$ bu ise $u=v$ veya $C\approx 0$ demektir. Böylece g=0 durumu için $b_1=0$ dır.

O halde genel olarak diyebiliriz ki yönlendirilebilir $g\geqslant 0$ cinsli bir yüzey için $b_1=2g$ dir.

Buradan şunu söyleyebiliriz; iki kompakt yönlendirilebilir yüzeyin topolojik olarak denk olması için gerek ve yeter koşul aynı cinsli olmasıdır. Çünkü Betti sayıları topolojik invaryanttır ve farklı cinsli normal formlar homeomorf değildir.

Kompakt yönlendirilebilir bir S yüzeyi üzerinde keyfi bir Δ üçgenlemesi alalım. a_n, Δ da n-simplekslerin sayısını göstermek üzere $\sum_{n=0}^{2} (-1)^n a_n = \chi$ toplamına S yüzeyinin Euler karekteristiği denir.

İspatlayacağız ki χ topolojik invaryanttır ve g cinsli bir kompakt yüzey için $\chi=2-2g$ dir.

a_n n-simpleksler $C^n(S_\triangle)$ n-zincirler grubu için bir taban oluşturur. Z^n, C^n nin bir altgrubu olduğuna göre Z_1^n, Z_2^n, ..., Z_{kn} n-devirlerini bir taban olarak seçebiliriz. Bu tabanı C^n için bir taban olacak şekilde $Z_1^n, \ldots, Z_{an}$ genişletebiliriz. Ayrıca $B^{n-1} = \frac{C^n}{Z^n}$ olduğundan, B^{n-1} $Z_{k+1}, \ldots, Z_{an}$ tarafından gerilen bir alt gruptur. Yani $B^{N,1}$, $r_{n-1}=a_n-k_n$ elemanı içeren bir taban tarafından gerilir. Ayrıca $C^0=Z^0$ olduğuna göre $r_{-1}=0$ dır.

Buradan $H^n = \dfrac{Z^n}{B^n}$, b_n $(b_n=k_n-r_n)$ elemanlı bir tabana sahiptir. Ayrıca $a_n=b_n+r_{n-1}+r_n$ dir.

O halde $\chi = \sum_{n=0}^{2} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{2} (-1)^n b_n + r_2$ şeklinde yazılacaktır. Sıfır dışında hiçbir 2-sınır mevcut olmadığından $B^2=0$ dır. Buradan $r_2=0$ olacağından $\chi = \sum_{n=0}^{2} (-1)^n b_n$ olacaktır. Bu formüle Euler-Poincare formülü denir.

χ nin topolojik invaryant olduğu açıktır. g cinsli bir kompakt yönlendirilebilir yüzey üzerinde $b_0=1$ $b_1=2g$ $b_2=1$ ve $\chi=2-2g$ dir.

Teorem 3.4.1. Cinsi g olan bir yüzeyde, yüzeyi bölmiyen basit 1-devirlerin maksimum sayısı 2g dir.

İspat: $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ r>2g ortak 1-simpleksi olmayan 1-devirlerden oluşan bir sistem olsun. Göstereceğiz ki S-C bağlantılı değildir, burada $C=|Z_1|V|Z_2|V \ldots\ldots V|Z_r|$ dir.

$b_1=2g$ olduğuna göre z_1, z_2, ..., z_r homolog olarak bağımlıdır. Yani hepsi sıfır olmayan u_1, u_2, ... , u_r tamsayıları vardır ve $u_1z_1+ \ldots\ldots +u_rz_r \approx 0$ dır. Bu demektir ki c^2 2-zinciri vardır, öyleki

$$u_1z_1+u_2z_2+ \ldots\ldots + u_rz_r = \partial c^2 \text{ dir.}$$

Herhangi iki z_i ve z_j ortak bir 1-simplekse sahip olmadığından $\partial c^2 \neq 0$ dır. Dolayısıyla $|C^2| \neq \emptyset$ dur.

Eğer $|c^2|$, S nin tamamını kapsıyorsa, bu taktirde Δ da herbir uygun yönlendirilmiş 2-simpleksler üzerinde 1 değeri alan bir $\bar{C}^2$ 2-zinciri alalım. Eğer $c^2 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i s_i^2$ ise $\gamma^2 = C^2 - \lambda_1 \bar{C}^2 = \sum_{i=2}^{N} \mu_i s_i^2$ 2-zinciri s_1^2 yi içermez. $\partial c^{-2}=0$ olduğu için $k_1z_1+k_2z_2+ \ldots\ldots + k_rz_r = \partial \gamma^2$ elde edilir. Burada γ^2 ne boştur nede S nin tamamıdır.

$G_1=|\gamma^2|-|\partial\gamma^2|$ ve $G_2=S-|\gamma^2|$ alırsak, $G_1 \cup G_2 = S - |\partial\gamma^2|$ olur. G_1 ve G_2 açık kümelerdir ve $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ dur. $|\partial\gamma^2| \subset C$ olduğuna göre S-C bağlantılı değildir ve $z_1z_2\ldots z_r$ r tane 1-devirlerin sistemi S yi böler. Böylece ispatladık ki, g cinsli bir yüzeyin, basit 1-devirlerin bölmeyenlerinin bir sistemindeki devirlerin maksimum sayısı 2g dir.

3.5. Riemann Yüzeylerinin Üçgenlenmesi

Herhangi bir Riemann yüzeyinin üçgenlenebilir olduğunu görmek için önce örtü manifoldlarından söz edeceğiz.

M ve M* iki boyutlu manifoldlar olsun. $f: M^* \longrightarrow M$ sürekli bir f fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, M*'a M nin iki boyutlu bir örtü manifoldu denir. Her $P_o^* \in M^*$ için $f(P_o^*) = P_o \in M$ dir.

i. M^* üzerinde P_o^* da sıfır değerini alan bir lokal koordinat z^* olsun.

ii. M üzerinde P_o da sıfır değeri alan bir lokal koordinat z olsun.

iii. $n>0$ tamsayısı için $z^*=0$ komşuluğunda f dönüşümü, z ve z^* cinsinden ifade edildiğinde, $z=z^{*n}$ şeklinde olsun.

P_o noktasına, M üzerinde P_o^* ın izdüşümü denir. P_o ın komşuluğundaki herbir noktaya P_o^* ın komşuluğunda n nokta karşılık gelir. n birden büyükse P_o^* noktasına M^* ın, M ye göre $(n-1)$. mertebeden dal noktası, $n=1$ ise P_o^* a regüler nokta denir.

$z^{*n}=z$ dönüşümü, herbir $z_1^*=0$ ($z^*\neq 0$ içermeyen) noktasının uygun bir komşuluğunu z_1^{*n} nin bir komşuluğu üzerine 1:1 ve sürekli olarak dönüştürür. Böylece P_o^* ın delikli bir komşuluğundaki noktalar regüler, dal noktalarıda ayrık notkalardır.

Teorem 3.5.1. Her Riemann yüzeyi, kenarları analitik yaylardan oluşan üçgenlerle üçgenlenebilir.

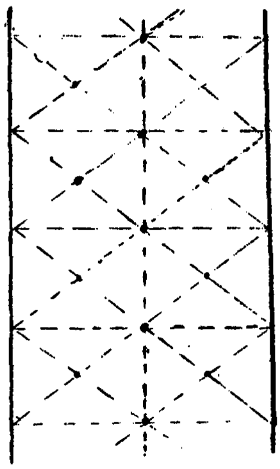
İspat: M keyfi bir Riemann yüzeyi ve bunun evrensel örtme yüzeyi $\hat{S}$ olsun. $\hat{S}$ yı w-küresi üzerinde kanonik bir G bölgesine dönüştürelim. (Bu dönüşümün varlığı Riemann dönüşüm teoreminden bilinmektedir(Springer, 1957).) Bu durumda üç hal söz konusudur.

i. Eğer G kürenin tamamı ise, M konform olarak küreye denktir ve bu küre iki ortogonal meridyen ve ekvator kullanılarak üçgenlenebilir.

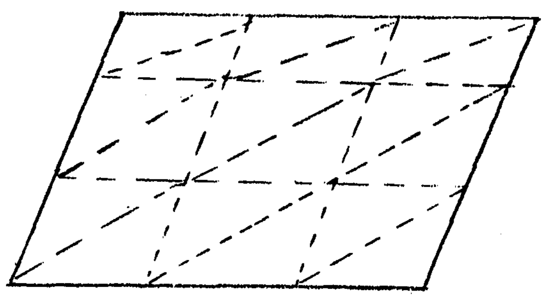
ii. G bütün sonlu düzlem olsun.

a) M, G ye konform eşdeğer ise, G önce dikdörtgenler ve sonrada köşegenler çizilerek üçgenlenebilir.

b) G bölgesi sonsuz bir şerit ise, bunun üçgenlemesi şekil 3.4 de görüldüğü gibi yapılabilir. Burada kenarlar üzerindeki eşdeğer noktalar idantik yapılarak M nin bir üçgenlemesi elde edilir.



Şekil 3.4.



Şekil 3.5.

c) G bölgesi, bir köşe ve bu köşede kesişen iki kenar bulunduran bir paralel kenar ise, üçgenlenmesi şekil 3.5 deki gibi yapılabilir. Burada da kenarlar üzerindeki eşdeğer noktalar idantik olarak M nin bir üçgenlemesi elde edilir.

iii. G birim disk olsun. Bu halde M nin N_0 normal poligonu sınırlı veya sınırsız olabilir bu durumda düzlem geometrideki öklidyen olmayan yaylar kullanılarak M nin üçgenlenebilir olduğu görülür(Springer, 1957). Burada verdiğimiz üçgenleme teoremi veya bir Riemann yüzeyinin üçgenlenebilir olduğu her Riemann yüzeyi üzerinde sabit olmayan meramorf fonksiyonlar mevcut oluşundan yararlanarak da gösterilebilir. Ancak bunun içinde Riemann yüzeyi üzerinde meromorf fonksiyonlar ve diferansiyellerin incelemesi gerekmektedir(Farkas-Kra, 1983).

3.6. Riemann-Hurwitz Bağıntısı

Şimdi, Euler ve Euler-Poincare karekteristiklerinin topolojik invaryant oluşundan faydalanarak kompakt Riemann yüzeyleri arasında, Riemann-Hurwitz bağıntısı olarak bilinen teoremi ifade ve ispat edeceğiz. Daha sonra bu bağıntının kompakt kenarlı Riemann yüzeyleri arasında ne şekil aldığını inceleyeceğiz.

Teorem 3.6.1. M ve N sırasıyla cinsi g ve γ olan iki kompakt Riemann yüzeyi ve $f:M \longrightarrow N$ sabit olmayan holomorf dönüşümü verilsin. Hemen hemen her $Q \in N$ için f nin derecesi n, f nin dallanma sayılarının toplamı $B=\sum_{P\in M} b_f(P)$ olsun. Bu taktirde, $g=n(\gamma-1)+1+\frac{B}{2}$ dir.

İspat: $S=\{f(x)\,|\,x\in M,\ b_f(x)>0\}$ olsun. S sonlu bir küme olduğundan, S nin herbir noktası üçgenlerin bir köşesi olacak şekilde N yüzeyi üçgenlenebilir. Farzedelim ki bu üçgenlemede F tane üçgen yüzeyi, E kenar ve V köşe olsun. f dönüşümü yardımıyla bu üçgenlemeyi M üzerine taşırsak, M nin bu üçgenlemesinde nF tane üçgen yüzeyi, nE kenar ve nV-B köşe bulunur. Şimdi her iki yüzey için Euler-Poincaré karekteristiğini yazarsak,

$$F-E+V=2-2\gamma$$

$$nF-nE+nV-B=2-2g$$

buradan

$$n(F-E+V)-B=2-2g$$

$$n(2-2\gamma)=2-2g$$

$$g=n(\gamma-1)+1+\frac{B}{2}$$

elde edilir.

Şimdi bu teoremden elde edebileceğimiz bazı sonuçları verelim.

Sonuç 1. B, toplam dal sayısı daima çifttir.

$$g=n(\gamma-1)+1+\frac{B}{2}$$

$$g-n(\gamma-1)-1=\frac{B}{2}$$

$$2(g-n(\gamma-1)-1)=B$$

O halde B daima çifttir.

Sonuç 2. Farzedelim ki f nin dal noktası olmasın. Bu taktirde B=0 dır.

i. $g=0$ ise $n=1$ ve $\gamma=0$ dır.

$$0=n(\gamma-1)+1$$
$$1=n(1-\gamma)$$

f nin dal noktası olmadığından $n=1$ dir. O halde $1-\gamma=1$ ve $\gamma=0$ elde edilir.

ii. $g=1$ ise $\gamma=1$ dir.

$$1-g=n(1-\gamma)$$
$$0=n(1-\gamma), \text{ buradan } 1-\gamma=0 \quad \gamma=1 \text{ dir.}$$

Burada n sayısı keyfi olarak seçilebilir.

iii. $g>1$ ise $n=1$ için $g=\gamma$ dır.

$$1-g=n(1-\gamma)$$
$$n=1 \text{ olduğuna göre } 1-g=1-\gamma\ , \quad g=\gamma$$

elde edilir. Bu sonuca göre iki Riemann yüzeyinin homeomorf olması için cinslerinin eşit olması gerektiğini söyleyebiliriz.

iv. $g>1$ ise $n>1$ için $g>\gamma>1$ ve n sayısı $g-1$'i böler.

$$1-g=n(1-\gamma)$$

$g-1=n(\gamma-1)$ eşitsizliğini gözönüne alırsak, $g>\gamma>1$, $n>1$ olduğuna göre (iv) gerçeklenir.

Sonuç 3. $g=0$ ise $\gamma=0$ dır.

$g=0$ ise M nin bir üçgenlemesi için $\chi(M)=2$ dir. Bu üçgenlemede farzedelimki F üçgen yüzeyi, E kenar, V köşe olsun. Bu taktirde $\chi(M)=F-E+V=2$ elde edilir. Euler karekteristiği invaryant olduğundan, M nin f yardımıyla indirgenen üçgenlemesi için Euler karekteristiği yazarsak, $\chi(M)=2n-B=2$ olacaktır. Buradan, $g=0$ ise

$$1=n(1-\gamma)-\frac{B}{2}$$

$$2=2n-2n\gamma-B$$

$$2+B=2n-2n\gamma$$

$$2n=2n-2n\gamma$$

$$\gamma = 0$$

elde edilir.

Kompakt Riemann yüzeyleri için söylediğimiz Riemann-Hurwitz bağıntısını kompakt kenarlı Riemann yüzeylerine de genişletebiliriz.

M kompakt Riemann yüzeyi ve Δ bir üçgenlemesi olsun. s_i, Δ da bir üçgen olmak üzere s_i nin içini M yüzeyinden çıkarırsak kompakt kenarlı bir Riemann yüzeyi elde ederiz. Benzer şekilde sonlu k sayıda ayrık s_i üçgenlerinin içleri

M yüzeyinden çıkarılırsa, k çevreye sahip kompakt kenarlı Riemann yüzeyi elde edilir. Ancak kanımızca herhangi bir kompakt kenarlı Riemann yüzeyi yukarıdaki şekilde elde edeceğimiz kompakt kenarlı Riemann yüzeyine homeomorf olacaktır. Fakat biz burada sadece yukarıdaki şekilde sonlu sayıda üçgenlerin çıkarılması ile elde edilen kompakt kenarlı Riemann yüzeylerini alacağız. Bu şekilde elde ettiğimiz kompakt kenarlı Riemann yüzeyini M* ile gösterelim.

M kompakt Riemann yüzeyi ve Euler karekteristiği $\chi(M)$ olsun. Eğer M nin Δ üçgenlemesinden bir üçgenin içi çıkarılırsa elde edilen kompakt kenarlı Riemann yüzeyinin Euler karekteristiği $\chi(M)-1$ dir. Şayet k tane ayrık üçgen çıkarılırsa elde edilen kompakt kenarlı Riemann yüzeyinin Euler karekteristiği $\chi(M)-k$ olacaktır.

M, kompakt Riemann yüzeyinin cinsine, M* kompakt kenarlı Riemann yüzeyinin cinsi denir(Massey, 1977).

M ve N sırası ile cinsleri g ve γ olan iki kompakt Riemann yüzeyi ve $f:M \longrightarrow N$ derecesi n olan holomorf(sabit olmayan) dönüşüm olsun. N nin Δ üçgenlemesinden 1 tane üçgenin içini çıkararak N*, kompakt kenarlı Riemann yüzeyi elde edilir. N* için Euler-Poincare eşitliği $F-E+V-1=2-2\gamma$ şeklinde olacaktır. N*, f yardımıyla M ye indirgenirse, M üzerindeki üçgenlemede n tane üçgenin içi çıkarılmış olacaktır. Bu şekilde elde edilen M*, kompakt kenarlı Riemann yüzeyi için Euler-Poincare eşitliği ise $n(F-1)-nE+nV-B=2-2g$ olacaktır.

Bu taktirde, $n(F-E+V-1)-B=2-2g$ ve $F-E+V-1=2-2\gamma$ olduğundan, bu iki eşitlik birleştirilerek

$$g=n(\gamma-1)+1+\frac{B}{2}$$

elde edilir. Bu ise bilinen Riemann-Hurwitz bağıntısıdır. N den k tane üçgenin çıkarılmasıyla elde edilen kompakt kenarlı Riemann yüzeyler içinde aynı bağıntı elde edilecektir.

KAYNAKLAR

1. Farkas, M.H.-Kra, I., Riemann Surfaces. Springer-Verlag, Newyork. 1983.

2. Hacısalihoğlu, H.H., Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler. Matbaa Teknisyenleri Basımevi. Divanyolu, Bişki yurdu sok. No:12. İstanbul. 1980.

3. Massey, W.S., Algebraic Topology: An Introduction. Springer-Verlag, Newyork. 1977.

4. Springer, G., Introduction to Riemann Surfaces. Addison-Wesley Pub. Comp. Massachusetts, U.S.A. 1957.