BİÇİM KATEGORİSİ

Aydın Çakmak

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç.Dr.Şahin Koçak

Eylül,1988

Aydın Çakmak'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "BİÇİM KATEGORİSİ" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

22./9./1988

Üye : Doç. Dr. Şahin KOÇAK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Coşkun TAYFUR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 27.9.1988. gün ve 188-3...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Rüstem KAYA
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmadaki amacımız biçim kategorisinin bir tanımını ve bu kategorinin morfizmleriyle ilgili bir teoremin ispatını vermektir. Bu amaçla, önce birinci bölümde kategoriler ve funktorlarla ilgili genel bilgiler verdikten sonra ikinci bölümde direkt ve invers sistemler ve bunların limitleri üzerinde durduk. Üçüncü bölümde invers sistemler kategorileri ve prokategorileri ele aldık ve son bölümde biçim kategorisini inşa ettik. Son olarak biçim morfizmi temsilcilerini çifte limit olarak ifade eden teoremi ispat ettik.

SUMMARY

In this study we gave the definition of the shape category and the proof of a theorem about the morphisms of this cateory. To this end we obtained in the first chapter the certain general results about categories and functors and about the direct and inverse systems and their limits in the second chapter. In the third chapter we defined the inverse systems categories and pro-categories. Finally in the last chapter we defined the shape category and proved the theorem about the shape morphisms representing them as double limits.

1. KATEGORİLER, FUNKTORLAR VE DOĞAL DÖNÜŞÜMLER

1.1 KATEGORİLER.

1.1.1 Tanım : Bir $\mathcal{C}$ kategorisi aşağıdaki gibi üç unsura sahiptir.

i) $Ob(\mathcal{C})$ ile gösterilen objeler sınıfı,

ii) her $X,Y \in Ob(\mathcal{C})$ obje çifti için $\mathcal{C}(X,Y)$ veya $[X,Y]_{\mathcal{C}}$ ile gösterilen X'den Y'ye bütün morfizmlerin kümesi,

iii) $X,Y,Z \in Ob(\mathcal{C})$ objeleri verildiği takdirde her $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ ve $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ morfizmleri için " f ve g'nin kompozisyonu " denilen ve $g \circ f$ ile gösterilen, $\mathcal{C}(X,Z)$ kümesine ait bir morfizm vardır.

Kompozisyonun bilinen anlamda fonksiyonların bileşkesi olması şart değildir.

Ancak $\mathcal{C}$'nin bir kategori olabilmesi için verilen bu üç unsura bağlı olarak aşağıdaki iki koşulun sağlanması gerekir.

iv) Assosyatiflik : $X,Y,Z,W \in Ob(\mathcal{C})$ objeleri ve $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ $h \in \mathcal{C}(Z,W)$ morfizmleri verildiği takdirde,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

dir.

v) Birim morfizm : Her $X \in Ob(\mathcal{C})$ objesi için, öyle bir $id_X \in \mathcal{C}(X,X)$ morfizmi vardır ki, her $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ ve her $g \in \mathcal{C}(Z,X)$ için $f \circ id_X = f$ ve $id_X \circ g = g$ olur. id_X morfizmine özel olarak " X'in birim morfizmi " denir.

Her X objesi için bir tek birim morfizm vardır. Çünkü,

$$id_X^1 = id_X^1 \circ id_X^2 = id_X^2$$

dir.

<u>ÖRNEKLER</u>

i) Kümeler kategorisi, $\mathcal{Sets}$.

Objeler : Bütün kümeler.

Morfizmler : Her $X,Y \in Ob(\mathcal{Sets})$ kümeleri için X'den Y'ye giden bütün fonksiyonlar.

Kompozisyon : Bilinen anlamda fonksiyonların bileşkesi.

ii) Abelyen gruplar kategorisi, $\mathcal{Ag}$.

Objeler : Bütün abelyen gruplar.

Morfizmler : Abelyen gruplar arasındaki grup homomorfizmleri.

Kompozisyon : Bilinen anlamda fonksiyonların bileşkesi.

iii) Topolojik uzaylar kategorisi, $\mathcal{Top}$.

Objeler : Bütün topolojik uzaylar.

Morfizmler : Topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar.

Kompozisyon : Fonksiyonların bilinen anlamdaki bileşkesi.

iv) Karşıt (opposite, dual) kategori, $\mathcal{C}^{op}$.

Bir $\mathcal{C}$ kategorisi verildiği takdirde $\mathcal{C}$'nin karşıt kategorisi $\mathcal{C}^{op}$, aşağıdaki gibi oluşturulur.

Objeler : $\mathcal{C}$'nın bütün objeleri.

Morfizmler : $\mathcal{C}^{op}(X,Y) = \mathcal{C}(Y,X)$ dir.

Kompozisyon : $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ ve $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ morfizmleri için, $*$; $\mathcal{C}$'deki kompozisyon olmak üzere $f \circ g = g * f$ 'dir.

v) Çarpım kategorisi : $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olmak üzere, $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$'nin çarpım kategorisi $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, aşağıdaki gibi oluşturulur.

Objeler : $X \in Ob(\mathcal{C})$ ve $Y \in Ob(\mathcal{D})$ olmak üzere bütün (X,Y) sıralı-ikilileri.

Morfizmler : $(X,Y),(Z,W) \in Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$ ve $f \in \mathcal{C}(X,Z), g \in \mathcal{D}(Y,W)$ olmak üzere bütün (f,g) sıralı-ikilileri. Burada $(f,g) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}((X,Y),(Z,W))$ dır.

Kompozisyon : $\square$, $\mathcal{C}$'deki ve $*$, $\mathcal{D}$'deki kompozisyonlar olmak üzere,

$$(h,k) \circ (f,g) = (h \square f, k * g)$$

dir.

vi) Küçük (small) kategori : Bir kategoride objelerin sınıfı bir küme ise buna bir küçük kategori denir.

Şimdi buna bir örnek verelim :

Λ yarı-sıralı bir küme olsun.

Objeler : Λ kümesinin bütün elemanları.

Morfizmler : λ ve λ', Λ'nın karşılaştırılamayan iki elemanı ise $\Lambda(\lambda,\lambda') = \emptyset$ ve $\Lambda(\lambda',\lambda) = \emptyset$ olsun. Eğer $\lambda \leq \lambda'$ ise $\Lambda(\lambda,\lambda')$ kümesi bir tek $p_{\lambda\lambda'}$ morfizmini içersin.

Kompozisyon : $p_{\lambda\lambda'}$ ve $p_{\lambda'\lambda''}$ morfizmleri verildiği takdirde

$$p_{\lambda\lambda'} \circ p_{\lambda'\lambda''} = p_{\lambda\lambda''}$$

olsun.

1.1.2 Tanım : $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. Eğer aşağıdaki dört özellik sağlanıyor ve $\mathcal{C}'$ bir kategori oluyor ise $\mathcal{C}'$ 'ye $\mathcal{C}$'nin bir alt kategorisi denir.

i) $Ob(\mathcal{C}') \subseteq Ob(\mathcal{C})$.

ii) Her $X', Y' \in Ob(\mathcal{C}')$ için $\mathcal{C}'(X',Y') \subseteq \mathcal{C}(X',Y')$ dir.

iii) $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C}')$ objeleri verildiği takdirde her $f \in \mathcal{C}'(X',Y')$ ve her $g \in \mathcal{C}(Y',Z')$ morfizmlerinin $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$'deki kompozisyonları çakışıktır.

iv) $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$'deki her $X' \in Ob(\mathcal{C}')$ için birim morfizmler çakışıktır.

Eğer her $X', Y' \in Ob(\mathcal{C}')$ için $\mathcal{C}'(X',Y') = \mathcal{C}(X',Y')$ ise $\mathcal{C}'$'ye $\mathcal{C}$'nin bir dolu alt kategorisi denir. Sonlu kümelerin oluşturduğu kategori kümeler kategorisinin bir dolu alt kategorisidir.

Bir $\mathcal{C}$ kategorisi verildiğinde $g \circ f = id_X$ olacak şekilde $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ ve $g \in \mathcal{C}(Y,X)$ morfizmleri varsa g'ye f'nin sol inversi ve f'ye de g'nin sağ inversi denir. Eğer f, g_1'in sol inversi g_2'nin sağ inversi, yani $f \circ g_1 = id_Y$ ve $g_2 \circ f = id_X$ ise

$$g_2 = g_2 \circ (f \circ g_1) = (g_2 \circ f) \circ g_1 = g_1$$

dir. Bu takdirde f'ye bir denklik veya izomorfizm denir ve $g_2 = g_1$ inversi (invers izomorfizmi) f^{-1} ile gösterilir.

Eğer bir $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ izomorfizmi var ise X ve Y objelerine denktir veya izomorftur denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir.

1.2 FUNKTORLAR.

1.2.1 Tanım : $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olsun. Bir $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ dönüşümü, yani her $X \in Ob(\mathcal{C})$ objesine bir $F(X) \in Ob(\mathcal{D})$ objesi ve her $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ morfizmine bir $F(f) \in \mathcal{D}(F(X),F(Y))$ morfizmi karşılık getiren bir tekabül gözönüne alındığı takdirde bu dönüşüm aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa, buna bir (kovaryant) funktor denir.

i) Her $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ ve her $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ morfizmleri için

$$F(g \circ f) = F(g)*F(f)$$

dir.

ii) Her $id_X \in \mathcal{C}(X,X)$ birim morfizmi için

$$F(id_X) = id_{F(X)}$$

dir.

Funktorlar objeleri objelere, morfizmleri de morfizmlere taşıyan kategoriler arası dönüşümlerdir.

1.2.2 Tanım : $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olsun. $\mathcal{C}$'den $\mathcal{D}$'ye kofunktor (kontravaryant funktor), $\mathcal{C}$'den $\mathcal{D}^{op}$'ye giden bir funktordur.

ÖRNEKLER

i) Birim funktor : $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. Her $X\in Ob(\mathcal{C})$ için $ID(X)=X$ ve her $f\in\mathcal{C}(X,Y)$ için $ID(f)=f$ olacak şekilde tanımlanan $ID:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$ dönüşümü bir funktordur.

ii) Sabit funktor : $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olsun. $\mathcal{D}$ 'nin sabit bir A objesi alındığı takdirde her $X\in Ob(\mathcal{C})$ ve her $f\in\mathcal{C}(X,Y)$ için $F(X)=A$ ve $F(f)=id_A$ olacak şekilde tanımlanan $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ dönüşümü bir funktordur.

iii) Bileşke funktor : $\mathcal{C},\mathcal{D}$ ve $\mathcal{E}$ birer kategori, $T:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ ve $U:\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{E}$ birer funktor ise $F=U\circ T:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{E}$ dönüşümü de bir funktordur.

iv) Morfizm funktorları : $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori ve A, $\mathcal{C}$ 'nin sabit bir objesi olsun. Her $X\in Ob(\mathcal{C})$ için $\mathcal{C}_A(X)=\mathcal{C}(A,X)$, $\mathcal{C}^A(X)=\mathcal{C}(X,A)$ ve her $\xi\in\mathcal{C}(X,Y)$ için $\mathcal{C}_A(\xi)=\xi\circ$ ve $\mathcal{C}^A(\xi)=\circ\xi$ olmak üzere,

$$\mathcal{C}_A(\xi) : \mathcal{C}(A,X)\longrightarrow\mathcal{C}(A,Y)\ ,\ \alpha\longmapsto\xi\circ\alpha$$

ve

$$\mathcal{C}^A(\xi) : \mathcal{C}(X,A)\longrightarrow\mathcal{C}(Y,A)\ ,\ \alpha\longmapsto\alpha\circ\xi$$

olacak şekilde tanımlanan $\mathcal{C}_A:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{S}ets$ ve $\mathcal{C}^A:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{S}ets^{op}$ dönüşümleri birer funktordur ve bu funktorlara morfizm funktorları denir.

1.3 DOĞAL (NATÜREL) DÖNÜŞÜMLER.

1.3.1 Tanım : $S,T:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ birer funktor olsun. S'den T'ye bir ϕ doğal dönüşümü, her bir $X\in Ob(\mathcal{C})$ ve bütün $\alpha\in\mathcal{C}(X,Y)$ için (1)'deki diyagramı komütatif yapacak şekildeki bir $\phi_X\in\mathcal{D}(S(X),T(X))$ morfizmler kolleksiyonudur.

$$\begin{tikzcd} S(X) \arrow[r, "S(\alpha)"] \arrow[d, "\phi_X"'] & S(Y) \arrow[d, "\phi_Y"] \\ T(X) \arrow[r, "T(\alpha)"'] & T(Y) \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Yani ϕ bir doğal dönüşüm ise $\phi_Y \circ S(\alpha) = T(\alpha) \circ \phi_X$ dir.

Doğal dönüşümlere funktorlar morfizmi de denir. $\mathcal{D}$ 'deki her ϕ_X bileşeninin inversi var ise, ϕ doğal dönüşümüne bir doğal denklik veya bir doğal izomorfizm denir ve $\phi : S \cong T$ ile gösterilir. Bunun bir sonucu olarak, $\mathcal{D}$ 'deki ϕ_X^{-1} inversleri bir $\phi^{-1} : T \longrightarrow S$ doğal izomorfizminin bileşenleridir. Yani ϕ^{-1} de bir doğal denkliktir.

$G \circ F \cong ID : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ ve $F \circ G \cong ID : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ olacak şekilde $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funktorları var ise, $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ 'ye denk kategoriler denir.

<u>ÖRNEKLER</u>

i) $S, T, U : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ birer funktor ve $\phi : S \longrightarrow T$, $\Psi : T \longrightarrow U$ birer doğal dönüşüm ise, $(\Psi \circ \phi)_X = \Psi_X \circ \phi_X$ olmak üzere $\Psi \circ \phi : S \longrightarrow U$ bileşke dönüşümü de bir doğal dönüşümdür. $\alpha \in \mathcal{C}(X,Y)$ verildiği takdirde, (2) deki diyagram komütatiftir.

$$\begin{array}{ccc} S(X) & \xrightarrow{S(\alpha)} & S(Y) \\ \phi_X \downarrow & & \downarrow \phi_Y \\ T(X) & \xrightarrow{T(\alpha)} & T(Y) \\ \Psi_X \downarrow & & \downarrow \Psi_Y \\ U(X) & \xrightarrow[U(\alpha)]{} & U(Y) \end{array} \qquad (2)$$

ii) $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori ve A, $\mathcal{C}$ 'nin sabit bir objesi olmak üzere, bir $S = \mathcal{C}_A : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}ets$ morfizm funktoru verilsin. $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}ets$ herhangi bir funktor ve a, T(A) kümesinin bir sabit elemanı olarak verilsin. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \phi_X^a : S(X) = \mathcal{C}(A,X) &\longrightarrow T(X) \\ \xi &\longmapsto T(\xi)a \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\phi^a : S \longrightarrow T$ doğal dönüşümü tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} (\phi_Y^a \circ S(\alpha))(\xi) &= \phi_Y^a(S(\alpha)(\xi)) \\ &= \phi_Y^a(\alpha \xi) \\ &= T(\alpha \xi)a \end{aligned}$$

$$= T(\alpha)\ T(\xi)a$$
$$= (T(\alpha)\circ\phi^a_X)(\xi)$$

olduğundan (1)'deki diyagram komütatiftir.

Benzer şekilde, $T:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{S}ets$ kofunktorları için $A\in Ob(\mathscr{C})$ ve $a\in T(A)$ ise $\phi^a_X: \mathscr{C}^A(X)=\mathscr{C}(X,A)\longrightarrow T(X)$ ve $\phi^a_X(\xi)=T(\xi)a$ olacak şekilde bir $\phi^a: \mathscr{C}^A\longrightarrow T$ doğal dönüşümü tanımlanabilir.

Teorem 1.3.1 (Yoneda-Lemma) : Eğer $T:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{S}ets$ bir funktor ve $A\in Ob(\mathscr{C})$ olmak üzere $\phi:\mathscr{C}_A\longrightarrow T$ bir doğal dönüşüm ise $a=\phi_A(id_A)$ olmak üzere $\phi=\phi^a$ olacak şekilde bir tek $a\in T(A)$ elemanı vardır.

Yani, $\mathscr{C}_A\longrightarrow T$ doğal dönüşümü $id_A\in\mathscr{C}_A(A)$'daki bu değeriyle iyi-tanımlıdır ve bu $\phi_A(id_A)$ değeri, $T(A)$'dan keyfi olarak seçilmiştir. Aynı şeyler $\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{S}ets$ kofunktorları için de söylenebilir.

İspat : Eğer $\phi:\mathscr{C}_A\longrightarrow T$ bir doğal dönüşüm ise, her $\xi\in\mathscr{C}_A(X)=\mathscr{C}(A,X)$ için (3)'deki diyagram komütatif olmalıdır. Özel olarak,

$$\phi_X(\mathscr{C}_A(\xi)(id_A)) = T(\xi)\phi_A(id_A)$$

dır. Ancak,

$$\mathscr{C}_A(\xi)(id_A) = \xi\circ id_A = \xi$$

dır. Böylece, $a=\phi_A(id_A)$ iken

$$\phi_X(\xi) = T(\xi)a = \phi^a_X(\xi)$$

dir.

$$\begin{tikzcd}
{}_A(A) \arrow[r, "\mathscr{C}_A(\xi)"] \arrow[d, "\phi_A"'] & {}_A(X) \arrow[d, "\phi_X"] \\
T(A) \arrow[r, "T(\xi)"'] & T(X)
\end{tikzcd} \qquad (3)$$

1.3.2 Tanım : $T:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{S}ets$ bir (ko-) funktor ve A, $\mathscr{C}$'nin bir objesi olsun. Eğer $\phi^u:\mathscr{C}_A\longrightarrow T$ bir doğal denklik ise $u\in T(A)$'ya (T için) üniversaldir denir. Her $T:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{S}ets$ (ko-) funktoru için bir üniversal eleman bulunmayabilir. Eğer T için bir üniversal eleman varsa, T'ye temsil edilebilir funktor denir. (A,u) sıralı-ikilisine de T (ko-) fuktorunu temsil eder denir. Denkliğe göre (A,u) sıralı-ikilisi aşağıdaki teoreme göre tek türlü belirlidir.

Teorem 1.3.2 : $T:\mathcal{C}\longrightarrow Sets$, $u\in A$ üniversal elemanıyla bir temsil edilebilir funktor olsun. Eğer C, $\mathcal{C}$'nin bir objesi ve c T(C) ise, u'nun üniversalliğinden dolayı $T(\gamma)u=c$ olacak şekilde bir tek $\gamma : A \longrightarrow C$ morfizmi vardır. Eğer c de bir üniversal ise γ bir denkliktir. Benzer şeyler kofunktorlar için de söylenebilir.

İspat : Eğer c de bir üniversal ise $T(\beta)c = u$ olacak şekilde $\beta : C \longrightarrow A$ morfizmi vardır. Böylece,

$$\begin{aligned} T(\beta\circ\gamma)u &= T(\beta)\,T(\gamma)u \\ &= u \end{aligned}$$

dir. u'nun üniversalliğinden dolayı $\beta\circ\gamma = id_A$ dır. Benzer şekilde $\gamma\circ\beta = id_C$ dir.

Denkliğe göre $\mathcal{C}$'deki objeleri tanımlamak için $T:\mathcal{C}\longrightarrow Sets$ (ko-) funktorları kullanılabilir. " Üniversal özelliklerle tanım " ın bu metodu matematiğin birçok dalında önemli bir araç olarak kullanılır.

2. DİREKT VE İNVERS SİSTEMLER VE LİMİTLERİ

2.1 DİREKT VE İNVERS SİSTEMLER.

2.1.1 Tanım : Bir Λ kümesi ve Λ kümesi üzerinde bir $\leq$ ikili bağıntısı verilsin. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa, $\leq$ ikili bağıntısına bir " yarı-sıralama " ve $(\Lambda,\leq)$ sıralı-ikilisine de bir " yarı-sıralı küme " denir.

i) Her $\lambda\in\Lambda$ için $\lambda\leq\lambda$ dır.

ii) $\lambda\leq\lambda'$ ve $\lambda'\leq\lambda''$ ise $\lambda\leq\lambda''$ dır.

Bir $(\Lambda,\leq)$ yarı-sıralı kümesi verildiğinde her $\lambda',\lambda''\in\Lambda$ için $\lambda'\leq\lambda$ ve $\lambda''\leq\lambda$ olacak şekilde bir $\lambda\in\Lambda$ varsa $(\Lambda,\leq)$ yarı-sıralı kümesine bir " yönlendirilmiş küme " denir. Bir yarı-sıralama anti-simetrik, yani

" $\lambda\leq\lambda'$ ve $\lambda'\leq\lambda$ ise $\lambda=\lambda'$ dir "

ise bir " sıralama " ve $(\Lambda,\leq)$ yarı-sıralı kümesine de " sıralı küme " denir.

Bir $\leq$ sıralamsı her $\lambda',\lambda''\in\Lambda$ için $\lambda'\leq\lambda''$ veya $\lambda''\leq\lambda'$ oluyor, yani bütün elemanlar $\leq$ bağıntısına göre karşılaştırılabiliyorsa $\leq$ sıralama bağıntısına " tam sıralama " ve $(\Lambda,\leq)$ sıralı kümesine de " tam sıralı küme " denir. Tam sıralı her küme yönlendirilmiş bir kümedir.

Örnek : Bir X topolojik uzayında sabit bir x_0 noktasının bütün $\mathcal{U}$ komşulukları verilsin. Eğer $\leq$ ikili bağıntısı yerine $\supseteq$ ikili bağıntısı alındığı takdirde $\mathcal{U}$ komşuluklarının oluşturduğu küme yönlendirilmiş bir kümedir.

2.1.2 Tanım : Eğer $(\Lambda,\leq)$ yarı-sıralı bir küme ve $\Lambda'\subseteq\Lambda$ ise $\leq$, Λ' alt kümesi üzerinde de bir yarı-sıralamadır ve $(\Lambda',\leq)$ sıralı-ikilisine bir " yarı-sıralı alt küme " denir. Eğer her $\lambda\in\Lambda$ için $\lambda\leq\lambda'$ olacak şekilde daima bir $\lambda'\in\Lambda'$ elemanı bulunabiliyorsa yarı-sıralı Λ' alt kümesine Λ üzerinde kofinaldir denir.

Eğer Λ', Λ üzerinde kofinal ise, Λ 'nın yönlendirilmiş bir küme olabilmesi için gerek ve yeter koşul Λ' 'nin yönlendirilmiş bir küme olmasıdır.

Özellik : Eğer $(\Lambda,\leq)$ bir yarı-sıralı bir küme ise "$\lambda_1\leq\lambda_2$ ve $\lambda_2\leq\lambda_1$ " olması $\lambda_1\sim\lambda_2$ ile gösterilir ise, $\sim$ bir denklik bağıntısıdır. Λ', Λ 'nın denklik sınıflarının her birinden bir tek elemanı içeren bir alt kümesi olduğu takdirde $(\Lambda',\leq)$, $(\Lambda,\leq)$ 'nın bir sıralı alt kümesidir ve Λ', Λ üzerinde kofinaldir.

2.1.3 Tanım : $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori ve Λ yönlendirilmiş bir küme olsun. Her $\lambda\in\Lambda$ için bir $X_\lambda\in Ob(\mathcal{C})$ objesi ve her $\lambda\leq\lambda'$ için bir $p_{\lambda'\lambda}\in\mathcal{C}(X_\lambda,X_{\lambda'})$ morfizmi alınsın. Eğer bu şekilde seçilen morfizmler $\lambda\leq\lambda'$ ve $\lambda'\leq\lambda''$ olduğu zaman, $p_{\lambda''\lambda'}\circ p_{\lambda'\lambda} = p_{\lambda''\lambda}$ ve $p_{\lambda\lambda} = id_X$ özelliğini taşıyorlar ise $(X_\lambda,p_{\lambda'\lambda},\Lambda)$ sıralı-üçlüsüne, $\mathcal{C}$ üzerinde bir direkt sistem denir ve kısaca $\overline{X}$ ile gösterilir.

2.1.4 Tanım : $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori ve Λ yönlendirilmiş bir küme olsun. Her $\lambda\in\Lambda$ için bir $X_\lambda\in Ob(\mathcal{C})$ objesi ve her $\lambda\leq\lambda'$ için bir $p_{\lambda\lambda'}\in\mathcal{C}(X_{\lambda'},X_\lambda)$ morfizmi alınsın. Eğer bu şekilde seçilen morfizmler $\lambda\leq\lambda'$ ve $\lambda'\leq\lambda''$ olduğu zaman, $p_{\lambda\lambda'}\circ p_{\lambda'\lambda''} = p_{\lambda\lambda''}$ ve $p_{\lambda\lambda} = id_{X_\lambda}$ özelliğini taşıyorlar ise $(X_\lambda,p_{\lambda\lambda'},\Lambda)$ sıralı-üçlüsüne, $\mathcal{C}$ üzerinde bir invers sistem denir ve kısaca $\underline{X}$ ile gösterilir. X_λ objelerine $\underline{X}$'in terimleri ve $p_{\lambda\lambda'}$ morfizmlerine de $\underline{X}$'in bonding morfizmleri denir.

2.1.5 Tanım : Doğal sayılarla indislenmiş bir invers sisteme bir invers dizi denir ve (X_n,p_{nn+1}) ile gösterilir. Tek bir elemanla indislenmiş, yani bir tek terimi ve bir tek (birim) morfizme sahip bir invers sisteme bir rudimenter sistem denir ve kısaca (X) ile gösterilir.

2.2 DİREKT VE İNVERS LİMİTLER.

2.2.1 Tanım : $\overline{X}=(X_\lambda,p_{\lambda'\lambda},\Lambda)$ bir direkt sistem ve $u:\overline{X} \longrightarrow X$ bir üniversal dönüşüm ise X 'e $\overline{X}$ 'in direkt limiti denir ve $X=\varinjlim\overline{X}$ ile gösterilir. Direkt limit, $X=\varinjlim_\lambda\{X_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ veya $X=\varinjlim_\lambda\{X_\lambda\}$ şeklinde de gösterilir.

Dual olarak, $\underline{X}=(X_\lambda,p_{\lambda\lambda'},\Lambda)$ bir invers sistem ve $u:X \longrightarrow \underline{X}$ bir üniversal dönüşüm ise, X 'e $\underline{X}$ 'in invers limiti denir ve $X=\varprojlim\underline{X}$ ile gösterilir. İnvers limit, $X=\varprojlim_\lambda\{X_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ veya $X=\varprojlim_\lambda\{X_\lambda\}$ şeklinde de gösterilir.

<u>Özellik :</u> $u:\overline{X} \longrightarrow X$ ve $u':\overline{X} \longrightarrow X'$ birer üniversal dönüşüm ise $k.u=u'$ olacak şekilde bir tek $k:X \longrightarrow X'$ morfizmi vardır ve k bir denkliktir. Yani $X\cong X'$ dir.

İspat : u 'nun üniversalliğinden dolayı $k.u=u'$ olacak şekilde bir tek $k:X \longrightarrow X'$ vardır. Benzer şekilde, u' 'nün üniversalliğinden dolayı $k'.u'=u$ olacak şekilde bir tek $k':X' \longrightarrow X$ vardır. $k'.(k.u)=u$ olduğundan $k'.k=id_X$ dir. Aynı şekilde, $k.(k'.u')=u$ olduğundan $k.k'=id_{X'}$ dir.

<u>Özellik</u> : $u:X \longrightarrow \underline{X}$ ve $u':X' \longrightarrow \underline{X}$ birer üniversal dönüşüm ise $u.k=u'$ olacak şekilde bir tek $k:X' \longrightarrow X$ morfizmi vardır ve k bir denkliktir. Yani $X \cong X'$ dir.

İspat : Bir önceki özelliğin ispatına benzer şekilde gösterilir.

Önceki iki özelliğin bir sonucu olarak direkt limitler varsa izomorftur ve invers limitler varsa izomorftur denir.

<u>Örnek</u> (Grupların direkt limiti): Λ yönlendirilmiş bir küme olmak üzere her $\lambda \in \Lambda$ için G_λ bir grup ve $\lambda \leq \lambda'$ ise $p_{\lambda'\lambda}:G_\lambda \longrightarrow G_{\lambda'}$ bir grup homomorfizmi olacak şekilde bir $\overline{G}=(G_\lambda, p_{\lambda'\lambda}, \Lambda)$ direkt sistemi verilsin.

$\lambda \leq \lambda'$ iken $p_{\lambda'\lambda}(x_\lambda)=x_{\lambda'}$ ise x_λ ile $x_{\lambda'}$ denktir denilsin ve bu denklik $\sim$ ile gösterilsin. Buna göre $\sim$ bir denklik bağıntısıdır. x_λ 'nın $\sim$ denklik bağıntısına göre denklik sınıfı $\overline{x}_\lambda$ ile gösterilsin. Bu şekildeki bütün denklik sınıflarının kümesi G olsun. G 'nin bir grup olduğu görülebilir.

$\overline{G}$ 'nin direkt limiti, her $\lambda \leq \lambda'$ için

$$p_{\lambda'} \cdot p_{\lambda'\lambda} = p_\lambda$$

olacak şekilde $p_\lambda:G_\lambda \longrightarrow G$ grup homomorfizmlerini ve G grubunu içerir.

Her $\lambda \leq \lambda'$ için $p'_{\lambda'} \cdot p_{\lambda'\lambda} = p'_\lambda$ olacak şekilde $p'_\lambda:G_\lambda \longrightarrow G'$ grup homomorfizmlerinin bir başka kolleksiyonu verilsin. Bu takdirde her $\lambda \in \Lambda$ için $g.p_\lambda = p'_\lambda$ olacak şekilde bir tek $g:G \longrightarrow G'$ homomorfizmi vardır. Aynı şekilde, her $\lambda \in \Lambda$ için $g'.p'_\lambda = p_\lambda$ olacak şekilde bir tek $g':G' \longrightarrow G$ homomorfizmi vardır.

$$g.p_\lambda = p'_\lambda \iff g.(g'.p'_\lambda) = p'_\lambda$$

$$\Longleftrightarrow (g.g').p'_\lambda = p'_\lambda$$

olur. Bu takdirde $g.g' = id_{G'}$ olur. Benzer şekilde $g'.g = id_G$ olduğu kolayca görülebilir. O halde $g:G \longrightarrow G'$ bir izomorfizmdir, yani G ile G' izomorftur.

<u>Örnek</u> (Grupların invers limiti): Λ yönlendirilmiş bir küme olmak üzere her $\lambda\in\Lambda$ için G_λ bir grup ve $\lambda\leq\lambda'$ ise $p_{\lambda\lambda'}:G_{\lambda'}\longrightarrow G_\lambda$ bir grup homomorfizmi olacak şekilde bir $\underline{G}=(G_\lambda,p_{\lambda\lambda'},\Lambda)$ invers sistemi verilsin.

Bir $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in\prod_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ elemanını gözönüne alalım. Eğer $\lambda\leq\lambda'$ için $p_{\lambda\lambda'}(x_{\lambda'})=x_\lambda$ ise, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ elemanına bir koherent sistem denir. $\underline{G}$ invers sisteminden elde edilen bütün koherent sistemlerin oluşturduğu küme G olsun. G 'nin bir grup olduğu görülebilir. $G\subseteq\prod_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ dir.

Her $\lambda\in\Lambda$ için $p_\lambda((x_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda})=x_\lambda$ olacak şekilde $p_\lambda:G\longrightarrow G_\lambda$ fonksiyonları tanımlansın. Burada p λ-yıncı izdüşüm fonksiyonudur ve p_λ izdüşüm fonksiyonları birer grup homomorfizmidir.

$\underline{G}$ 'nin invers limiti, her $\lambda\leq\lambda'$ için

$$p_\lambda = p_{\lambda\lambda'}.p_{\lambda'}$$

olacak şekilde $p_\lambda:G\longrightarrow G_\lambda$ izdüşüm fonksiyonlarını ve G grubunu içerir.

Her $\lambda\leq\lambda'$ için $p_{\lambda\lambda'}.p'_{\lambda'} = p'_\lambda$ olacak şekilde $p'_\lambda:G'\longrightarrow G_\lambda$ grup homomorfizmlerinin bir başka kolleksiyonu verilsin. Bu takdirde her $\lambda\in\Lambda$ için $p'_\lambda.g=p_\lambda$ olacak şekilde bir tek $g:G\longrightarrow G'$ grup homomorfizmi vardır. Aynı şekilde, her $\lambda\in\Lambda$ için $p_\lambda.g'=p'_\lambda$ olacak şekilde bir tek $g':G'\longrightarrow G$ grup homomorfizmi vardır.

$$p'_\lambda.g=p_\lambda \Longleftrightarrow (p_\lambda.g').g=p_\lambda$$
$$\Longleftrightarrow p_\lambda.(g'.g)=p_\lambda$$

olur. Bu takdirde $g'.g=id_G$ olur. Benzer şekilde $g.g'=id_{G'}$ olduğu kolayca görülebilir. O halde $g:G\longrightarrow G'$ bir izomorfizmdir, yani G ile G' izomorftur.

3. İNVERS KATEGORİLER VE PRO-KATEGORİLER

3.1 İNVERS KATEGORİLER.

3.1.1 Tanım : $\underline{X}=(X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ ve $\underline{Y}=(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M)$ aynı $\mathcal{C}$ kategorisinden elde edilmiş birer invers sistem olsun. Bir $\phi \in \mathcal{S}ets(M,\Lambda)$ fonksiyonu ve her $\mu,\mu' \in M$ için bir $f_\mu \in \mathcal{C}(X_{\phi(\mu)}, Y_\mu)$ morfizmi verilsin. Eğer $\mu \leq \mu'$ olmak üzere her $\mu,\mu' \in M$ için

$$f_\mu \circ p_{\phi(\mu)\lambda} = q_{\mu\mu'} \circ f \circ p_{\phi(\mu')\lambda}$$

eşitliğini sağlayan ve $\phi(\mu),\phi(\mu') \leq \lambda$ olacak şekilde bir $\lambda \in \Lambda$ bulunabiliyorsa $(\phi, f_\mu):\underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ 'ye bir invers sistemler morfizmi denir. Yani, $(\phi.f_\mu)$ bir invers sistemler morfizmi ise, $\mu \leq \mu'$ olmak üzere her $\mu,\mu' \in M$ için (1)'deki diyagramı komütatif yapan ve $\phi(\mu),\phi(\mu') \leq \lambda$ koşulunu sağlayan bir $\lambda \in \Lambda$ daima vardır.

$$\begin{tikzcd}
X_{\phi(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"'] & X_\lambda \arrow[l, "p_{\phi(\mu)\lambda}"'] \arrow[r, "p_{\phi(\mu')\lambda}"] & X_{\phi(\ )} \arrow[d, "f_{\mu'}"] \\
Y_\mu & & Y_{\mu'} \arrow[ll, "q_{\mu\mu'}"]
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

İki invers dizi arasındaki bir invers sistemler morfizmine örnek olarak ,

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[l] \arrow[d, "f_2"'] & X_3 \arrow[l] \arrow[d, "f_3"'] & \cdots \arrow[l] \\
Y_1 & Y_2 \arrow[l] & Y_3 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

formundaki komütatif bir diyagram verilebilir.

Bir (X) rudimenter sisteminden bir invers diziye giden bir invers sistemler morfizmine örnek olarak,

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] \arrow[drr, "f_3"] & & & \\
X_1 & X_2 \arrow[l] & X_3 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

formundaki komütatif bir diyagram verilebilir.

Bir invers diziden bir rudimenter sisteme giden bir invers sistemler morfizmine örnek olarak,

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, "f"'] & X_2 \arrow[l] & X_3 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] \\
Y & & &
\end{tikzcd}
$$

formundaki bir diyagram verilebilir.

Eğer $\underline{Z}=(Z_v, r_{vv'}, N)$ de bir invers sistem ve $(\Psi, g_v):\underline{Y} \longrightarrow \underline{Z}$ de birinvers sistemler morfizmi olarak verilirse,

$$(\Psi, g_v)\circ(\phi, f_\mu) = (\chi, h_v): \underline{X} \longrightarrow \underline{Z}$$

kompozisyonu da $\chi=\Psi\circ\phi : N \longrightarrow \Lambda$ ve $h_v = g_v f_{\Psi(v)}: X_{\chi(v)} \longrightarrow Z_v$ olması koşullarıyla bir invers sistemler morfizmidir. Yani, $v \leq v'$ olarak verildiği takdirde, (2)'deki diyagramı komütatif yapan ve

$$\chi(v), \chi(v'), \phi(\mu), \lambda, \lambda' \leq \lambda''$$

olacak şekilde bir $\lambda'' \in \Lambda$ vardır. (2)'deki diyagramda (ϕ, f_μ) ve (Ψ, g_v)'nin birer invers sistemler morfizmi olmasından dolayı μ, λ ve λ' elemanları $\mu \geq \Psi(v), \Psi(v')$ ve $\lambda \geq \chi(v), \phi(\mu)$ ve $\lambda' \geq \phi(\mu), \chi(v')$ olacak şekilde seçilmişlerdir. İnvers sistemler morfizmine kısaca sistemler morfizmi de denir.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & X_{\lambda''} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
X_{\chi(\nu)} \arrow[d, "f_{\psi(\nu)}"'] & X_{\lambda} \arrow[l] \arrow[r] & X_{\phi(\mu)} \arrow[d, "f_{\mu}"] & X_{\lambda'} \arrow[l] \arrow[r] & X_{\chi(\nu')} \arrow[d, "f_{\psi(\nu')}"] \\
Y_{\psi(\nu)} \arrow[d, "g_{\nu}"'] & & Y_{\mu} \arrow[ll] \arrow[rr] & & Y_{\psi(\nu')} \arrow[d, "g_{\nu'}"] \\
Z_{\nu} & & & & Z_{\nu'} \arrow[llll]
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

Sistemler morfizmlerinin uygun şekildeki kompozisyonu assosyatiftir. $(\chi, h_\alpha): \underline{Z} \longrightarrow \underline{W} = (W_\alpha, t_{\alpha\alpha'}, K)$ bir invers sistemler morfizmi olarak verilsin. $\chi \in \mathcal{S}ets(K,N), \psi \in \mathcal{S}ets(N,M), \phi \in \mathcal{S}ets(M,\Lambda)$ ve $\mathcal{S}ets$'in bir kategori olmasından dolayı $(\phi\circ\psi)\circ\chi = \phi\circ(\psi\circ\chi)$ dir. Aynı şekilde, $\mathcal{C}$'nin bir kategori olmasından dolayı da

$$(h_\alpha g_{\chi(\alpha)})\, f_{(\psi\circ\chi)(\alpha)} = h_\alpha (g_{\chi(\alpha)}\, f_{(\psi\circ\chi)(\alpha)})$$

dır.

$id_{X_\lambda}: X_\lambda \longrightarrow X_\lambda$ birim morfizmleri ve $id_\Lambda : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ birim fonksiyonuyla bir $(id_\Lambda, id_{X_\lambda}): \underline{X} \longrightarrow \underline{X}$ birim sistemler morfizmi tanımlanabilir. Her $(\phi, f_\mu): \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ sistemler morfizmi için

$$(\phi, f_\mu)\circ(id_\Lambda, id_{X_\lambda}) = (\phi, f_\mu)$$

ve

$$(id_M, id_{Y_\mu})\circ(\phi, f_\mu) = (\phi, f_\mu)$$

dir.

3.1.2 Tanım : Objeleri, $\mathcal{C}$ kategorisinden elde edilen bütün invers sistemler ve morfizmleri de sistemler morfizmi olan ve kompozisyon da yukarıda tanımlandığı gibi olan bir kategori elde etmek mümkündür. Bu kategoriye, $\mathcal{C}$'nin invers sistemler kategorisi denir ve kısaca inv-$\mathcal{C}$ ile gösterilir.

Şimdi, $\underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ sistemler morfizmleri üzerinde bir $\sim$ denklik bağıntısı tanımlayalım. Her $\mu \in M$ için (3)'deki diyagramı komütatif yapacak şekilde $\lambda \geq \phi(\mu), \phi'(\mu)$ koşulunu sağlayan bir $\lambda \in \Lambda$ varsa $(\phi, f_\mu) \sim (\phi', f'_\mu)$ olsun.

$$\begin{tikzcd}
X_{\phi(\mu)} \arrow[dr, "f_\mu"'] & X_\lambda \arrow[l] \arrow[r] & X_{\phi'(\mu)} \arrow[dl, "f'_\mu"] \\
& Y_\mu &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

$(\phi, f_\mu) \sim (\phi, f_\mu)$ dir. $(\phi, f_\mu) \sim (\phi', f'_\mu)$ ise $(\phi', f'_\mu) \sim (\phi, f_\mu)$ olduğu açıktır. Her $\mu \in M$ için (4)'deki diyagramı komütatif yapan ve $\lambda \geq \phi(\mu), \phi'(\mu)$; $\lambda' \geq \phi'(\mu), \phi''(\mu)$ ve $\lambda, \lambda' \leq \lambda''$ olacak şekilde bir $\lambda'' \in \Lambda$ vardır. Bu, $\sim$ bağıntısının geçişken olduğunu gösterir.

$$\begin{tikzcd}
& & X_{\lambda''} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
X_{\phi(\mu)} \arrow[drr, dashed, "f'_\mu"'] & X_\lambda \arrow[l] \arrow[r] & X_{\phi'(\mu)} \arrow[d, "f'_\mu"] & X_{\lambda'} \arrow[l] \arrow[r] & X_{\phi''(\mu)} \arrow[dll, dashed, "f''_\mu"] \\
& & Y_\mu & &
\end{tikzcd} \tag{4}$$

$\sim$ 'nın bu şekilde bir denklik bağıntısı olduğu gösterildikten sonra şu sonuçlar elde edilebilir:

i) $(\phi, f_\mu) \sim (\phi', f'_\mu)$ ise $(\Psi, g_v) \circ (\phi, f_\mu) \sim (\Psi, g_v) \circ (\phi', f'_\mu)$ dir.

ii) $(\Psi, g_v) \sim (\Psi', g'_v)$ ise $(\Psi, g_v) \circ (\phi, f_\mu) \sim (\Psi', g'_v) \circ (\phi, f_\mu)$ dir.

iii) $(\phi, f_\mu) \sim (\phi', f'_\mu)$ ve $(\Psi, g_v) \sim (\Psi', g'_v)$ ise

$$(\Psi, g_v) \circ (\phi, f_\mu) \sim (\Psi', g'_v) \circ (\phi', f'_\mu)$$

dir.

Her $v \in N$ için (5)'deki diyagramı komütatif yapan ve $\lambda \geq \phi(\Psi(v))$ ve $\lambda \geq \phi'(\Psi(v))$ olacak şekilde daima bir $\lambda \in \Lambda$ vardır ve i) ispatlanır.

$$\begin{tikzcd}
X_{\phi(\psi(v))} \arrow[dr, dashed, "f_{\psi(v)}"'] & X_\lambda \arrow[l] \arrow[r] & X_{\phi'(\psi(v))} \arrow[dl, "f'_{\psi(v)}"] \\
& Y_{\psi(v)} \arrow[d, "g_v"] & \\
& Z_v &
\end{tikzcd} \qquad (5)$$

Her $v \in N$ için (6)'daki diyagramı komütatif yapacak, $\mu \geq \psi(v), \psi'(v)$, $\lambda' \geq \phi(\psi'(v)), \phi(\mu)$ ve $\lambda \geq \phi(\psi(v)), \phi(\mu)$ ve $\lambda, \lambda' \leq \lambda''$ olacak şekilde bir $\lambda'' \in \Lambda$ vardır ve ii) ispatlanır.

$$\begin{tikzcd}
& & X_{\lambda''} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
X_{\phi(\psi(v))} \arrow[d, "f_{\psi(v)}"'] & X_\lambda \arrow[l] \arrow[r] & X_{\phi(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"] & X_{\lambda'} \arrow[l] \arrow[r] & X_{\phi(\psi'(v))} \arrow[d, "f_{\psi'(v)}"] \\
Y_{\psi(v)} \arrow[drr, "g_v"'] & & Y_\mu \arrow[ll] \arrow[rr] & & Y_{\psi'(v)} \arrow[dll, dashed, "g'_v"] \\
& & Z_v & &
\end{tikzcd} \qquad (6)$$

iii) 'nin ispatı i) ve ii) 'nin yardımıyla gösterilebilir.

3.2 PRO-KATEGORİLER.

3.2.1 Tanım : Bir $\mathcal{C}$ kategorisi üzerindeki bir pro-$\mathcal{C}$ kategorisi şu şekilde tanımlanır: Objeleri, inv-$\mathcal{C}$'nin bütün objeleri ve morfizmleri de, $\underline{X}$ ve $\underline{Y}$ birer invers sistem olmak üzere $\underline{X}$'den $\underline{Y}$'ye giden bütün invers sistemlerin yukarıda tanımlandığı gibi $\sim$ bağıntısına göre bütün denklik sınıflarının kümesidir. (ϕ, f_μ) invers sistemler morfizminin denklik sınıfı kısaca f ile gösterilir. Eğer $f:\underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ ve $g:\underline{Y} \longrightarrow \underline{Z}$, pro-$\mathcal{C}$ 'nin birer morfizmi ise $g \circ f:\underline{X} \longrightarrow \underline{Z}$ kompozisyonu, inv-$\mathcal{C}$ kategorisindeki $(\psi, g_v) \circ (\phi, f_\mu)$ morfizminin pro-$\mathcal{C}$ kategorisindeki denklik sınıfıdır. $g \circ f$ kompozisyonu (iii)'den dolayı iyi-tanımlıdır. $(id_\Lambda, id_{X_\lambda})$ 'yi içeren pro-$\mathcal{C}$ kategorisindeki $id_{\underline{X}}: \underline{X} \longrightarrow \underline{X}$ morfizmi, $\underline{X}$ invers sisteminin pro-$\mathcal{C}$ kategorisindeki birim morfizmidir.

Teorem 3.2.1 : Eğer (X) bir rudimenter sistem ve (ϕ, f_μ) ile (ϕ', f'_μ), (X) rudimenter sisteminden $\underline{Y}$ invers sistemine giden ve pro-$\mathcal{C}$ kategorisi içerisinde aynı morfizmin birer temsilcileri ise, her $\mu \in M$ için $f_\mu = f'_\mu$ dir ve $\phi = \phi'$ dir. Sonuç olarak, pro-$\mathcal{C}$ 'deki

$$f:(X) \longrightarrow \underline{Y}$$

morfizmleri inv-$\mathcal{C}$ 'deki $(f_\mu):(X) \longrightarrow Y$ morfizmleriyle çakışıktır yani $f = (f_\mu)$ dir.

İspat : $(\phi, f_\mu) \sim (\phi', f')$ ise, her $\mu \in M$ için (3)'deki diyagram komütatiftir. (X) bir rudimenter sistem olduğundan $X = X_\lambda = X_{\phi(\mu)} = X_{\phi'(\mu)}$ ve $\phi(\mu) = \phi'(\mu) = \lambda$ olur. Dolayısıyla her $\mu \in M$ için $f_\mu = f'_\mu$ dir.

Teorem 3.2.2 : $\lambda \leq \lambda'$ olmak üzere bütün $p_{\lambda\lambda'}$ bonding morfizmleri birer izomorfizm ve $\lambda_0 \in \Lambda$ ise $id_{X_{\lambda_0}}$ birim morfizmi, $\underline{X}$ invers sistemi ile (X_{λ_0}) rudimenter sistemi arasında pro-$\mathcal{C}$ 'de bir

$$f: \underline{X} \longrightarrow (X_{\lambda_0})$$

izomorfizmini tanımlar.

İspat : $\lambda \leq \lambda'$ olmak üzere her $p_{\lambda\lambda'}$ bonding morfizminin $\mathcal{C}$ kategorisi içerisinde bir ters morfizmi vardır ve bu morfizm $(p_{\lambda\lambda'})^{-1}$ ile gösterilsin. Her $\lambda \in \Lambda$ için $\lambda_1 \geq \lambda_0, \lambda$ olacak şekilde seçilen her $\lambda_1 \in \Lambda$ için $g_\lambda = p_{\lambda\lambda_1}(p_{\lambda_0\lambda_1})^{-1}$ olmak üzere $g_\lambda : X_{\lambda_0} \longrightarrow X_\lambda$ morfizmi tanımlanabilir. g_λ, λ_1'in seçiminden bağımsızdır. $\lambda \leq \lambda'$ olmak üzere $g_\lambda = p_{\lambda\lambda'} g_{\lambda'}$ dir. Bu şekilde g_λ morfizmleri, pro-$\mathcal{C}$'de bir $g: X_{\lambda_0} \longrightarrow \underline{X}$ morfizmini tanımlar. g morfizminin, f morfizminin inversi olduğu gösterilebilir.

4. BİÇİM KATEGORİSİ

4.1 İNVERS SİSTEM GENİŞLEMESİ.

4.1.1 Tanım : $\mathcal{T}$ bir kategori ve $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$ 'nin bir alt kategorisi olsun. Bir $X \in Ob(\mathcal{T})$ ve bir $p \in$ pro-$\mathcal{T}(X,\underline{X})$ verildiği takdirde her $\underline{Y} \in Ob($pro-$\mathcal{P})$ ve her $h \in$ pro-$\mathcal{T}(X,\underline{Y})$ için aşağıdaki diyagramı komütatif yapacak şekilde bir tek $f \in$ pro-$\mathcal{T}(\underline{X},\underline{Y})$ morfizmi var ise p 'ye X 'in bir genişlemesi denir.

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "h"] \\ & \underline{Y} \end{tikzcd}$$

Eğer $\underline{X} \in Ob($pro-$\mathcal{P})$ ve $f \in$ pro-$\mathcal{P}(\underline{X},\underline{Y})$ ise p 'ye X'in bir $\mathcal{P}$-genişlemesi denir.

Theorem 4.1.1 : $p: X \longrightarrow \underline{X}$ ve $p': X \longrightarrow \underline{X}'$, aynı X objesinin birer $\mathcal{P}$-genişlemesi ise $i \circ p = p'$ olacak şekilde bir tek $i: \underline{X} \longrightarrow \underline{X}'$ izomorfizmi vardır.

İspat : p bir $\mathcal{P}$-genişlemesi olduğundan aşağıdaki diyagramı komütatif yapacak şekilde bir tek $i: \underline{X} \longrightarrow \underline{X}'$ morfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[dr, "i"'] & X \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "p'"] \\ & \underline{X}' \end{tikzcd}$$

Üstteki diyagramın komütatif olması

$$i \circ p = p' \qquad \ldots(1)$$

demektir. Benzer olarak, p' bir $\mathcal{P}$-genişlemesi olduğundan aşağıdaki diyagramı komütatif yapacak şekilde bir tek $i': \underline{X}' \longrightarrow \underline{X}$ morfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd} \underline{X}' \arrow[dr, "i'"'] & X \arrow[l, "p'"'] \arrow[d, "p"] \\ & \underline{X} \end{tikzcd}$$

En son diyagramın komütatif olması

$$i' \circ p' = p \qquad \ldots(2)$$

demektir. (2)' deki eşitliğin sol tarafını (1)' deki eşitlikteki p 'nin yerine koyulduğu takdirde,

$$i \circ (i' \circ p') = p' \qquad \ldots(3)$$

elde edilir. pro-$\mathcal{T}$ bir kategori olduğundan (3) deki eşitlik,

$$(i \circ i') \circ p' = p' \qquad \ldots(4)$$

haline getirilebilir. pro-$\mathcal{T}$ bir kategori olduğundan (4) deki eşitlikte $i \circ i' = id_{\underline{X}'}$ olmak zorundadır.

(1) deki eşitliğin sol tarafını (2) deki eşitlikteki p' 'nün yerine koyulduğu takdirde, benzer şekilde $i' \circ i = id_{\underline{X}}$ elde edilir.

4.1.2 Tanım : $\mathcal{T}$ bir kategori ve $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$'nin bir alt kategorisi olsun. Eğer her $X \in \mathcal{T}$ objesi için $p: X \longrightarrow \underline{X}$ olacak şekilde bir $\mathcal{P}$-genişlemesi var ise $\mathcal{P}$ alt kategorisine $\mathcal{T}$ kategorisinde yoğundur denir.

$\mathcal{T}$ herhangi bir kategori ve $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$ 'nin bir yoğun alt kategorisi olsun. $p: X \longrightarrow \underline{X}$, $p': X \longrightarrow \underline{X}'$ morfizmleri X 'in ve $q: Y \longrightarrow \underline{Y}$, $q': Y \longrightarrow \underline{Y}'$ morfizmleri de Y 'nin birer $\mathcal{P}$-genişlemeleri olsun. i ve j birer izomorfizm olmak üzere, aşağıdaki diyagram komütatif ise $f: \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ ve $f': \underline{X}' \longrightarrow \underline{Y}'$ morfizmleri denktir denilsin ve bu denklik $\sim$ ile gösterilsin.

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \underline{X}' \arrow[d, "f'"] \\ \underline{Y} \arrow[r, "j"'] & \underline{Y}' \end{tikzcd}$$

Theorem 4.1.2 : Yukarıda tanımlanan $\sim$ bir denklik bağıntısıdır.

İspat : $p: X \longrightarrow \underline{X}$, X 'in ve $q: Y \longrightarrow \underline{Y}$, Y 'nin bir $\mathcal{P}$-genişlemesi olsun. Bu takdirde aşağıdaki diyagramı komütatif yapan bir tek izomorfizm vardır ki, bu $id_{\underline{X}}$ dir.

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[dr, "id_{X}"'] & X \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "p"] \\
 & \underline{X}
\end{tikzcd}$$

Aşağıdaki diyagramı komütatif yapan bir tek izomorfizm vardır ki, bu $id_{\underline{Y}}$ dir.

$$\begin{tikzcd}
\underline{Y} \arrow[dr, "id_{\underline{Y}}"'] & Y \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "q"] \\
 & \underline{Y}
\end{tikzcd}$$

Bu takdirde her $f\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ morfizmi için aşağıdaki diyagram daima komütatiftir ve $f \sim f$ dir.

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[r, "id_{\underline{X}}"] \arrow[d, "f"'] & \underline{X} \arrow[d, "f"] \\
\underline{Y} \arrow[r, "id_{\underline{Y}}"'] & \underline{Y}
\end{tikzcd}$$

$f \sim f'$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki diyagram komütatiftir ve $f' \circ i = j \circ f$ dir.

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \underline{X}' \arrow[d, "f'"] \\
\underline{Y} \arrow[r, "j"'] & \underline{Y}'
\end{tikzcd}$$

$i\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{X}'$ bir izomorfizm olduğundan $i'\colon \underline{X}' \longrightarrow \underline{X}$ olacak şekilde bir izomorfizm vardır. $j\colon \underline{Y} \longrightarrow \underline{Y}'$ bir izomorfizm olduğundan $j'\colon \underline{Y}' \longrightarrow \underline{Y}$ olacak şekilde bir izomorfizm vardır.

$$\begin{aligned}
f' \circ i = j \circ f &\iff f' \circ i \circ i' = j \circ f \circ i' \\
&\iff f' \circ id_{\underline{X}'} = j \circ f \circ i' \\
&\iff f' = j \circ f \circ i'
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow j' \circ f' = j' \circ j \circ f \circ i'$$

$$\Leftrightarrow j' \circ f' = id_{\underline{X}} \circ f \circ i'$$

$$\Leftrightarrow j' \circ f' = f \circ i'$$

olur. Yani aşağıdaki diyagram komütatiftir ve $f' \sim f$ dir.

$$\begin{tikzcd} \underline{X}' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "f'"'] & \underline{X} \arrow[d, "f"] \\ \underline{Y}' \arrow[r, "j'"'] & \underline{Y} \end{tikzcd}$$

$f \sim f'$ ve $f' \sim f''$ verilsin. Buna göre aşağıdaki iki diyagram komütatiftir.

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \underline{X}' \arrow[d, "f'"] \\ \underline{Y} \arrow[r, "j"'] & \underline{Y}' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \underline{X}' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f'"'] & \underline{X}'' \arrow[d, "f''"] \\ \underline{Y}' \arrow[r, "k"'] & \underline{Y}'' \end{tikzcd}$$

i, j, h ve k birer izomorfizm olduğundan $h \circ i$ ve $k \circ j$ de birer izomorfizmdir. Buna göre, aşağıdaki diyagram komütatiftir ve $f \sim f''$ dir.

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "h\circ i"] \arrow[d, "f"'] & \underline{X}'' \arrow[d, "f''"] \\ \underline{Y} \arrow[r, "k\circ j"'] & \underline{Y}'' \end{tikzcd}$$

<u>Özellik</u> : $f \sim f'$ ve $g \sim g'$ ise $g\circ f \sim g'\circ f'$ dir.

İspat : Aşağıdaki diyagramın komütatif olmasından dolayı ispat açıktır.

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \underline{X}' \arrow[d, "f'"] \\ \underline{Y} \arrow[r, "j"'] \arrow[d, "g"'] & \underline{Y}' \arrow[d, "g'"] \\ \underline{Z} \arrow[r, "k"'] & \underline{Z}' \end{tikzcd}$$

4.2 BİÇİM KATEGORİSİ.

$\mathcal{T}$ bir kategori ve $\mathcal{R}$, $\mathcal{T}$ 'nin yoğun bir alt kategorisi olsun. Biçim kategorisi denilen ve $Sh_{(\mathcal{T},\mathcal{R})}$ ile gösterilen kategorinin objeleri $\mathcal{T}$ 'nin bütün objeleridir. $Sh_{(\mathcal{T},\mathcal{R})}(X,Y)$ 'nin elemanları ise, pro-$\mathcal{R}$ kategorisindeki $f:\underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ morfizmlerinin yukarıda tanımlanan denklik bağıntısına göre, denklik sınıflarıdır. En son özelliğe göre de biçim morfizmlerinin kompozisyonunun iyi-tanımlı olduğu görülür. Sonuç olarak, bir $F:X \longrightarrow Y$ biçim morfizmi aşağıdaki diyagramla verilir.

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[d, "f"'] & X \arrow[l, "f"'] \\ \underline{Y} & Y \arrow[l, "q"] \end{tikzcd}$$

$F: X \longrightarrow Y$ ve $G: Y \longrightarrow Z$ biçim morfizmlerinin kompozisyonu, $f:\underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ ve $g:\underline{Y} \longrightarrow \underline{Z}$ morfizmlerinin $g \circ f$ kompozisyonuyla tanımlanır. Kompozisyon son özellikten dolayı iyi-tanımlıdır.

$Sh_{(\mathcal{T}, \mathcal{P})}$ kategorisi kısaca Sh ile gösterilir. Sh kategorisinde morfizmlerin assosyatif olduğu pro-$\mathcal{P}$ 'nin bir kategori olmasından elde edilir. $id_X : X \longrightarrow X$ birim biçim morfizmi, $id_{\underline{X}} : \underline{X} \longrightarrow \underline{X}$ ile temsil edilir.

Şimdi, biçim kategorisi morfizmlerinin temsilcileri için, bunları doğrudan doğruya ilk kategorinin morfizmlerinin çifte limiti olarak ifade etmeye yarayan bir teorem ispat edeceğiz.

Teorem 4.2.1 : pro-$\mathcal{C}(\underline{X},\underline{Y}) = \varinjlim_{\lambda} \varprojlim_{\mu} (X_\lambda, Y_\mu)$

İspat : $\underline{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ ve $\underline{Y} = (Y_\mu, q_{\mu\mu'}, N)$ birer invers sistem olsun. Yönlendirilmiş bir küme olan N'den sabit bir μ_0'a karşılık, $\underline{Y}$ invers sisteminden Y_{μ_0} terimi alınsın. Bu takdirde terimleri, her $\lambda \in \Lambda$ için $A_\lambda = \mathcal{C}(X_\lambda, Y_{\mu_0})$ olan ve morfizmleri de, $\lambda \leq \lambda'$ ve $f \in A_\lambda$ iken $F_{\lambda'\lambda}(f) = f \circ p_{\lambda\lambda'}$ olacak şekilde A_λ'dan $A_{\lambda'}$ 'ne giden $F_{\lambda'\lambda}$ 'lerle tanımlanan bir direkt sistem oluşturulabilir.

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[d, "f"'] & X_{\lambda'} \arrow[l, "p_{\lambda\lambda'}"'] \arrow[dl, "F_{\lambda'\lambda}(f)"] \\ Y_{\mu_0} & \end{tikzcd} \qquad (1)$$

$\mathscr{C}$ 'nin bir kategori olmasından dolayı (1)'deki diyagram komütatiftir. Yani, her $f \in A_\lambda = \mathscr{C}(X_\lambda, Y_{\mu_0})$ için

$$F_{\lambda'\lambda}(f) = f \circ p_{\lambda\lambda'}$$

olacak şekilde bir $F_{\lambda'\lambda}(f) \in A_{\lambda'} = \mathscr{C}(X_{\lambda'}, Y_{\mu_0})$ vardır. Bu $F_{\lambda'\lambda}$ morfizmlerinin iyi-tanımlı olması demektir. $\lambda \leq \lambda' \leq \lambda''$ olmak üzere $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \Lambda$ verildiği takdirde her $f \in A_\lambda$ için (2)'deki diyagram daima komütatiftir.

$$\begin{tikzcd}
X_\lambda \arrow[d, "f"'] & X_{\lambda'} \arrow[l] \arrow[dl, "F_{\lambda'\lambda}(f)"] & X_{\lambda''} \arrow[l] \arrow[dll, "F_{\lambda''\lambda'}(F_{\lambda'\lambda}(f))"] \\
Y_{\mu_0} & &
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

(2)'deki diyagramın komütatif olmasından dolayı

$$F_{\lambda''\lambda} = F_{\lambda''\lambda'} \circ F_{\lambda'\lambda}$$

dir. Gerçekten her $f \in A_\lambda$ için

$$\begin{aligned}
(F_{\lambda''\lambda'} \circ F_{\lambda'\lambda})(f) &= F_{\lambda''\lambda'}(F_{\lambda'\lambda}(f)) \\
&= F_{\lambda''\lambda'}(f \circ p_{\lambda\lambda'}) \\
&= (f \circ p_{\lambda\lambda'}) \circ p_{\lambda'\lambda''} \\
&= f \circ (p_{\lambda\lambda'} \circ p_{\lambda'\lambda''}) \\
&= f \circ p_{\lambda\lambda''} \\
&= F_{\lambda''\lambda}(f)
\end{aligned}$$

dir. Buradan, inşa edilen direkt sistemin morfizmlerinin kompozisyonunun iyi-tanımlı olduğu söylenebilir. $F_{\lambda'\lambda}$ morfizmlerinin assosyatif olduğu $\mathscr{C}$'nin bir kategori olduğu kullanılarak gösterilebilir. Her $\lambda \in \Lambda$ için $F_{\lambda\lambda}$ morfizmlerinin, direkt sistemin birim morfizmleri olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

İnşa edilen direkt sistemin direkt limiti

$$\varinjlim A_\lambda = \varinjlim \mathscr{C}(X_\lambda, Y_{\mu_0})$$

dir. $[f] \in \varinjlim A_\lambda$ verildiği takdirde, $[f]$ denklik sınıfının elemanları şu şekilde tanımlıdır: $f \in A_\lambda$ verildiği takdirde $\lambda \leq \lambda'$ olmak üzere $f = g \circ p_{\lambda\lambda'}$ veya $\lambda' \leq \lambda$ olmak üzere $g = f \circ p_{\lambda\lambda'}$ olacak şekilde bir $\lambda' \in \Lambda$ bulunabiliyorsa $g \in A_{\lambda'}$ morfizmi ile f aynı denklik sınıfındadır. Bu şu şekilde de söylenebilir: $f \in A_\lambda$ ve $g \in A_{\lambda'}$ verildiği takdirde (3)'deki diyagramı komütatif yapan ve $\lambda, \lambda' \leq \lambda''$ olacak şekilde bir $\lambda'' \in \Lambda$ elemanı bulunabiliyorsa $g \in [f]$ dir.

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[dr, dotted, "f"'] & X_{\lambda''} \arrow[l] \arrow[r] & X_{\lambda'} \arrow[dl, "g"] \\ & Y_{\mu_0} & \end{tikzcd} \qquad (3)$$

(3)'deki diyagramın komütatif olmasından dolayı, aynı zamanda da

$$\varinjlim A_\lambda = (\text{pro-}\mathcal{C})(\underline{X}, (Y_{\mu_0}))$$

dir.

Başlangıçta $\mu_0 \in N$ sabit olarak seçilmişti. Her $\mu \in N$ için benzer şekilde direkt sistemler oluşturulup direkt limitleri alınabilir.

Terimleri $B_\mu = \varinjlim_\lambda (X_\lambda, Y_\mu)$ şeklinde ve $\mu \leq \mu'$ ve $[f] \in B_\mu$ verildiği takdirde $G_{\mu\mu'}([f]) = [q_{\mu\mu'} \circ f]$ olmak üzere bonding morfizmleri $G_{\mu\mu'}$ olan bir invers sistem oluşturulabilir.

$g \in [f]$ verildiği takdirde (4)'deki diyagramı komütatif yapacak ve $\lambda, \lambda' \leq \lambda''$ olacak şekilde bir $\lambda'' \in \Lambda$ vardır.

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[dr, "f"'] & X_{\lambda''} \arrow[l] \arrow[r] & X_{\lambda'} \arrow[dl, dotted, "g"] \\ & Y_{\mu'} & \end{tikzcd} \qquad (4)$$

(4)'deki diyagramın komütatif olması $f \circ p_{\lambda\lambda''} = g \circ p_{\lambda'\lambda''}$ olması demektir. $\mathcal{C}$'nin bir kategori olmasından da

$$q_{\mu\mu'} \circ (f \circ p_{\lambda\lambda''}) = q_{\mu\mu'} \circ (g \circ p_{\lambda'\lambda''})$$

dir. Yani, $[q_{\mu\mu'} \circ f]$, $[q_{\mu\mu'} \circ g] \in B_{\mu'}$ ve $g \in [f]$ verildiği takdirde (5)'deki diyagram komütatiftir ve diyagramın komütatif olması da

$$[q_{\mu\mu'} \circ f] = [q_{\mu\mu'} \circ g]$$

demektir.

$$\begin{tikzcd}
X_{\phi(\mu)} \arrow[d, "\theta_\mu"'] & X_\lambda \arrow[l] \arrow[r] & X_{\phi(\mu')} \arrow[d, "\theta_{\mu'}"] \\
Y_\mu & & Y_{\mu'} \arrow[ll]
\end{tikzcd} \qquad (6)$$

$(\phi,\theta_\mu),(\phi',\theta'_\mu)\in h$ verildiği zaman her $\mu\in N$ için (7)'deki diyagramı komütatif yapacak ve $\phi(\mu),\phi'(\mu)\leq\lambda$ olacak şekilde enaz bir $\lambda\in\Lambda$ vardır.

$$\begin{tikzcd}
X_{\phi(\mu)} \arrow[dr, "\theta_\mu"'] & X_\lambda \arrow[l] \arrow[r] & X_{\phi'(\mu)} \arrow[dl, "\theta'_\mu"] \\
& Y_\mu &
\end{tikzcd} \qquad (7)$$

(7)'deki diyagramın komütatif olmasından dolayı her $\mu\in N$ için $[\theta_\mu] = [\theta'_\mu]$ dir. Bu ise H dönüşümünün iyi-tanımlı olması demektir. Farklı olmak üzere $h,h'\in(\text{pro-}\mathcal{C})(\underline{X},\underline{Y})$ verilsin. h ve h' nin farklı olması şu demektir: her $(\phi,\theta_\mu)\in h$ ve her $(\phi',\theta'_\mu)\in h'$ için enaz bir $\mu\in N$ vardır ki (7)'deki diyagramı komütatif yapacak ve $\phi(\mu),\phi'(\mu)\leq\lambda$ olacak şekilde hiçbir $\lambda\in\Lambda$ bulunamaz. Bu ise $\theta'_\mu\notin[\theta_\mu]$ demektir. Bu takdirde $\mu\leq\mu'$ olmak üzere bir $\mu\in N$ verilirse $\phi(\mu),\phi'(\mu)\leq\lambda$ ve $\phi(\mu'),\phi'(\mu')\leq\lambda'$ olmak üzere (8)'deki diyagramı komütatif yapacak ve $\lambda,\lambda'\leq\lambda''$ olacak şekilde hiçbir $\lambda\in\Lambda$ bulunamaz ki, bu durumda $([\theta_\mu])\neq([\theta'_\mu])$ dir. Bu ise H dönüşümünün bire-bir olması demektir.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & & X_{\lambda''} \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
X_{\phi(\mu)} \arrow[dr, "\theta_\mu"'] & X_\lambda \arrow[l] \arrow[r] & X_{\phi'(\mu)} \arrow[dl, "\theta'_\mu"] & X_{\phi(\mu')} \arrow[dr, "\theta_{\mu'}"'] & X_{\lambda'} \arrow[l] \arrow[r] & X_{\phi'(\mu')} \arrow[dl, "\theta'_{\mu'}"] \\
& Y_\mu & & & Y_{\mu'} \arrow[lll] &
\end{tikzcd} \qquad (8)$$

Her $([f]) \in \varprojlim_{\mu} \varinjlim_{\lambda} \mathcal{C}(X_{\lambda}, Y_{\mu})$ ve her $\mu \leq \mu'$ için $f' \in [f]$ verildiği takdirde, (9)'daki diyagramı komütatif yapacak ve $\lambda, \lambda' \leq \lambda''$ olacak şekilde daima bir $\lambda'' \in \Lambda$ vardır.

$$\begin{tikzcd}
X_{\lambda} \arrow[drr, "f"'] & X_{\lambda''} \arrow[l] \arrow[r] & X_{\lambda'} \arrow[d, "f'"] \\
Y_{\mu} & & Y_{\mu'} \arrow[ll]
\end{tikzcd} \qquad (9)$$

Buna göre N'den Λ'ya, (9)'daki diyagramda olduğu gibi $\mu \leq \mu'$ olacak şekilde verilecek her $\mu, \mu' \in N$ için $\phi(\mu)=\lambda$, $\phi(\mu')=\lambda$, $\phi'(\mu)=\lambda'$, $\phi'(\mu')=\lambda'$ olacak şekilde $\phi, \phi' : N \longrightarrow \Lambda$ fonksiyonları tanımlanabilir. (ϕ, f_{μ}) ve (ϕ', f'_{μ}) birer invers sistemler morfizmidir ve pro-$\mathcal{C}$ kategorisinde aynı denklik sınıfındadır. Bu şekilde, $([f]) \in \varprojlim_{\mu} \varinjlim_{\lambda} (X_{\lambda}, Y_{\mu})$ verildiği takdirde H dönüşümü altındaki görüntüsü $([f])$ olacak şekilde (pro-$\mathcal{C}$)$(\underline{X}, \underline{Y})$ 'nin bir elemanı vardır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Dold,A., Lectures on Algebraic Topology, Springer-Verlag. Berlin,377 p. 1972.

Hilton,P.J.,and Stammbach,U., A Course in Homological Algebra, Springer-Verlag, 338 p. 1971.

Mac Lane,S., Categories for the Working Mathematician, Springer-Verlag. 262 p. 1971.

Mardešić,S. and Segal,J., Shape Theory, North-Holland, 378 p. 1982.