ANADOLU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MOUFANG DÜZLEMLERİNDE KOLİNASYONLARIN CEBİRSEL İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Selahattin UÇAN

Anadolu Üniversitesi Bilecik Meslek Yüksekokulu
Matematik Öğretim Görevlisi

Tez Yöneticisi : Prof.Dr. Rüstem KAYA

ESKİŞEHİR

Şubat-1987

Selahattin UÇAN ' ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "MOUFANG PROJEKTİF DÜZLEMLERİNDE KOLİ - NASYONLARIN CEBİRSEL İNCELENMESİ" başlıklı bu çalış ma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili madde leri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

.11./.2../1987

Başkan

Prof.Dr. Rüstem KAYA

Üye

Doç.Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR

Üye

Yrd.Doç.Dr. Şükrü OLGUN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ... .17.2.1987. gün ve ..149/1.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

İ Ç İ N D E K İ L E R

Bu çalışmayı bana veren ve çalışmalarım sırasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, halen Anadolu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Öğretim Üyesi ve Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü Sayın Hocam; Prof.Dr.Rüstem KAYA'ya teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Selahattin UÇAN

Ö Z E T

Bu çalışma beş bölüm halinde düzenlenmiştir.

Birinci bölüm; projektif düzlemlerin temel kavramlarına ayrılmıştır.

İkinci bölüm üç kısım olup; birinci kısımda projektif düzlemlerin koordinatlanması ve bir projektif düzlemden elde edilen üçlü halkanın bazı toplamsal ve çarpımsal özelikleri üzerinde durulmuştur. Ikinci kısım projektif düzlemlerin cebirsel yapısı ile geçişkenlikler arasındaki ilişkilere ayrılmış olup, üçüncü kısımda ise bir üçlü halka yardımıyla elde edilen alterne yarıcisim veya Moufang düzleminin temel kavramları verilmiştir.

Üçüncü bölüm dört kısım olup; bu kısımlarda perspektiflikler ile kolinasyonlar analitik olarak incelenmiş olup bazı dönüşümlerin matris gösterimleri üzerinde durulmuştur.

Dördüncü bölümde dört kısım olup; bir alterne halkanın bazı temel özelikleri incelenmiş, Cayley sayıları tanımlanarak Cayley-Dickson cebrinin genel yapısı üzerinde durulmuştur.

Son bölümde ise bir alterne yarıcisim örneği olarak Cayley-Dickson cebri incelenip bazı çarpımsal özelikleri sağlanmıştır.

GÖSTERİMLER LİSTESİ

$\mathcal{N}$,	Noktalar kümesi.
$\mathcal{D}$,	Doğrular kümesi.
$\circ$, $\not\circ$	Üzerinde bulunma bağıntısı (üzerinde) , üzerinde değil.
$(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$	Geometrik yapı.
$\mathbb{P}$	Projektif düzlem.
$\in$, $\notin$	Eleman, eleman değil.
$\subset$, $\cup$	Altküme , kümeler için birleşim.
$\vee$, $\wedge$	Noktalar için birleştirme, doğrular için kesişim.
$G(\mathbb{P})$	$\mathbb{P}$ nin kolinasyonlar grubu.
$\{A,B,C\}$	Üçgen.
$a \rightarrow b$	a nın görüntüsü b dir.
$a \leftrightarrow b$	a nın görüntüsü b ve b nin görüntüsü de a dır.
$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$	Gerektirme, çift gerektirme
$G_{ö}(M)$, $G_{ö}(e)$	M merkezli ötelemeler grubu, e eksenli ötelemeler grubu.
$G(M,e)$	M merkezli e eksenli kolinasyonlar grubu.
$d \overset{M}{\barwedge} d_1$	Perspektiflik.
f_A	A matrisi ile temsil edilen f kolinasyonu.
$GL(3,B)$	B üzerinde genel lineer grup.

$f/_d$	f kolinasyonunun d doğrusuna kısıtlanmışı.
$+, \cdot, \odot, \oplus, \ast$	İkili işlemler.
T	Üçlü işlem.
(S,T)	Üçlü halka.
$\mathbb{P}_{(S,T)}$	(S,T) üçlü halkasına karşılık gelen projektif düzlem.
z	[o,o] koordinatlı doğru.
t_a, r_a, i	z doğrusu üzerinde tanımlı bazı izdüşel kolinasyonlar.
δ	Permütasyon.
Sgn(x)	x in işareti.
$\exists$	En az bir tane vardır.
$\equiv$	Denk olma işareti.

1.BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

1.1. PROJEKTİF DÜZLEMLERLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

Çalışmanın bu bölümünde verilen tanım, teorem ve diğer tüm kavramlar için [1] esas alınmıştır.

$\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları, sırayla, noktalar ve doğrular olan ayrık iki küme ve $\circ$ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlı bir üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere aşağıdaki P1, P2, P3 aksiyomlarını gerçekleyen $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemine projektif düzlem denir:

P1: Her $M, N \in \mathcal{N}$, $M \neq N$ için $M \circ d$ ve $N \circ d$ olacak şekilde bir tek $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.

P2: Her $c, d \in \mathcal{D}$, $c \neq d$ için $N \circ c$ ve $N \circ d$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{N}$ noktası vardır.

P3: Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Genel olarak bir projektif düzlem $\mathbb{P}$ ile gösterilir. Bir projektif düzlemde farklı iki doğru üzerinde bulunan bir tek nokta vardır. Ayrıca farklı iki doğrunun hiçbiri üzerinde bulunmayan en az bir nokta vardır.

Her $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan bir n pozitif tam sayısı vardır ve bu tam sayıya ilgili projektif düzlemin mertebesi denir:

(1) $\mathbb{P}$ nin her doğrusu üzerinde $n+1$ nokta vardır.

(2) $\mathbb{P}$ nin her noktasından $n+1$ doğru geçer.

(3) $\mathbb{P}$ deki tüm noktaların sayısı n^2+n+1 dir.

(4) $\mathbb{P}$ deki tüm doğruların sayısı n^2+n+1 dir.

Bir projektif düzlemde her noktadan geçen en az üç doğru ve her doğru üzerinde en az üç nokta vardır. Yani bir projektif düzlemin mertebesi en az 2 olmak zorundadır.

Sonlu bir $(\mathcal{N},\mathcal{D},o)$ sisteminin bir projektif düzlem olması için $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ ayrık kümelerinin eleman sayısının aynı bir λ sayısı olması ve bu λ sayısının bir n pozitif tam sayısı için $\lambda = n^2+n+1$ biçiminde yazılabilmesi gerekir.

TANIM.1.1.1:

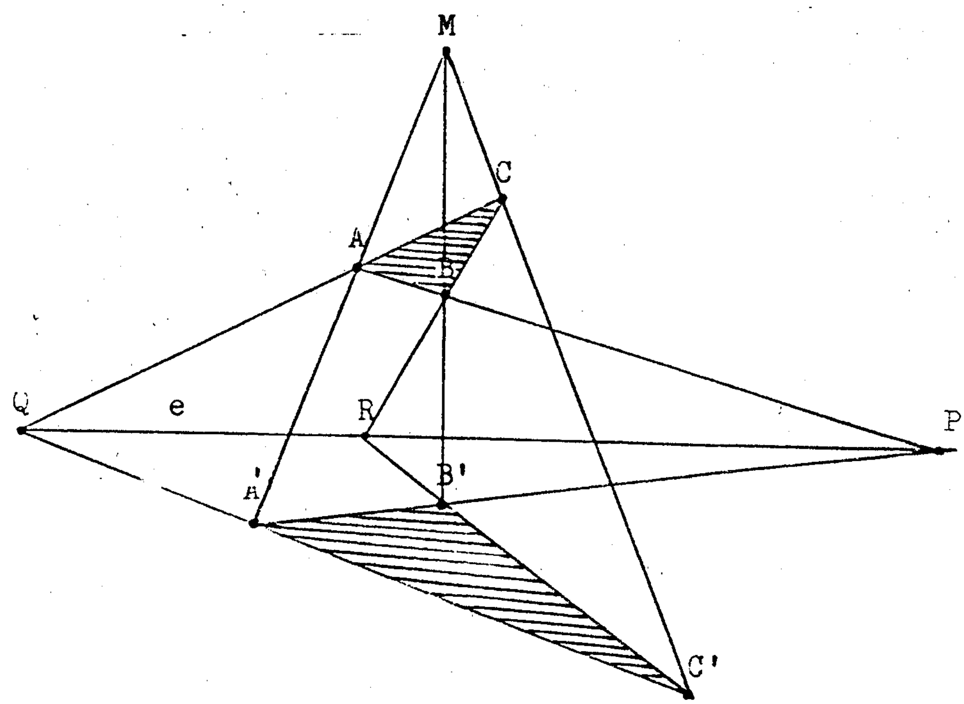
A,B,C,A',B',C' bir geometrik yapının herhangi altı noktası olsun. Eğer A,B,C doğrudaş değilse $\{A,B,C\}$ kümesine bir üçgen denir. $\{A,B,C\}$ ve $\{A',B',C'\}$ iki üçgen olsun. A ve A', B ve B', C ve C' ye üçgenlerin karşılıklı köşeleri denilsin. Eğer M,A,A'; M,B,B'; M,C,C' nokta üçlüleri doğrudaş olacak biçimde bir M noktası varsa bu üçgenler M den perspektiftir denir. Ayrıca M noktasına perspektiflik merkezi ; AB ve A'B', AC ve A'C', BC ve B'C' doğru ikililerine bu üçgenlerin karşılıklı kenarları denir. Bu üçgenlerin karşılıklı kenarlarının $P=AB\wedge A'B'$, $Q=AC\wedge A'C'$, $R=BC\wedge B'C'$ arakesit noktaları doğrudaşsa, bunların üzerinde bulunduğu doğruya perspektiflik ekseni denir. Perspektiflik ekseni e doğrusu olan iki üçgenede e ekseninden perspektif üçgenler denir.

P4(Desargues Aksiyomu): İki üçgenin karşılıklı köşelerini birleştiren doğrular noktadaşsa, bunların karşılıklı kenarlarının arakesit noktaları doğrudaştır.

Desargues Aksiyomu, daha kısaca,"bir noktadan perspektif olan iki üçgen bir doğrudan da perspektif olur" biçiminde ifade edilebilir. (Şekil.1.1.1).

TANIM 1.1.2:

Desargues Aksiyomunu gerçekleyen bir projektif düzleme Desargues düzlemi yada Desarguessel düzlem, gerçeklemeyen bir projektif düzlemede Desarguessel olmayan projektif düzlem denir.



Şekil.1.1.1

TANIM 1.1.3:

$(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ ve $(\mathcal{N}',\mathcal{D}',\circ')$ herhangi iki geometrik yapı olsun. Eğer $f:\mathcal{N}\cup\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{N}'\cup\mathcal{D}'$ fonksiyonu

1) $f(\mathcal{N})\subseteq\mathcal{N}'$,
2) $f(\mathcal{D})\subseteq\mathcal{D}'$,
3) Her $N\in\mathcal{N}$, $d\in\mathcal{D}$ ve $N\circ d \Rightarrow f(N)\circ' f(d)$,

koşullarını da sağlıyorsa f ye $(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ dan $(\mathcal{N}',\mathcal{D}',\circ')$ ya bir homomorfizm denir. Birebir ve örten özeliği bulunan ho -

momorfizme izomorfizm denir. Bir geometrik yapıyı kendisine dönüştüren izomorfizme de kolinasyon veya otomorfizm denir.

Homomorfizmler noktaları noktalara, doğruları doğrulara dönüştüren ve üzerinde bulunma bağıntısını koruyan dönüşümlerdir. Noktadaş doğruları yine noktadaş doğrulara, doğrudaş noktaları yine doğrudaş noktalara, üçgenleri üçgenlere, dörtgenleri dörtgenlere... v.s. dönüştürürler. Bundan başka izomorfizm nokta ve doğruları birebir ve örten biçimde eşlemektedir. Aynı tip iki geometrik yapı arasında bir izomorfizm varsa bunlar izomorftur (eş yapılıdır) denir. Genel olarak izomorf iki geometrik yapı, bir tek geometrik yapının elemanlarının iki farklı şekilde gösterilmişleri olarak düşünülür. Dolayısıyla izomorf geometrik yapılara aynı bir tek yapıymış gibi bakılır.

TEOREM 1.1.1:

Bir $\mathbb{P}$ projektif düzleminin bütün otomorfizmleri fonksiyon bileşimi işlemine göre bir grup oluştururlar. (Bu gruba $\mathbb{P}$ nin otomorfizmler grubu yada kolinasyonlar grubu denir ve $G(\mathbb{P})$ ile gösterilir.)

$\mathbb{P}$ bir projektif düzlem f de $\mathbb{P}$ nin kolinasyonu olsun. Eğer $\mathbb{P}$ deki bir N noktası için $f(N)=N$ ise N için f altında değişmez kalan nokta denir. Eğer $\mathbb{P}$ nin bir d doğrusu için $f(d)=d$ ise d ye f altında değişmez kalan bir doğru denir. Ayrıca, eğer bir d doğrusunun üzerindeki her X noktası için $f(X)=X$ ise yani d nin her noktası f altında değişmez kalıyorsa, f kolinasyonu d yi nokta-nokta değişmez bırakır denir. $\mathbb{P}$ nin her noktası f altında değişmez kalıyorsa f ye birim kolinasyon yada özdeşlik kolinasyonu denir.

TANIM 1.1.4:

d ile d_1 projektif düzlemde herhangi iki doğru ve M de $M \notin d$, $M \notin d_1$ özelliğinde herhangi bir nokta olsun. Her $X \in d$ noktası için $\psi(X)=MX \wedge d_1=Y$ olacak biçimde belirtilen ψ dönüşümüne d doğrusunu d_1 doğrusuna dönüştüren M merkezli bir perspektiflik denir. Bu perspektiflik

$$\psi: d \overset{M}{\overline{\wedge}} d_1 \quad \text{yada kısaca} \quad d \overset{M}{\overline{\wedge}} d_1$$

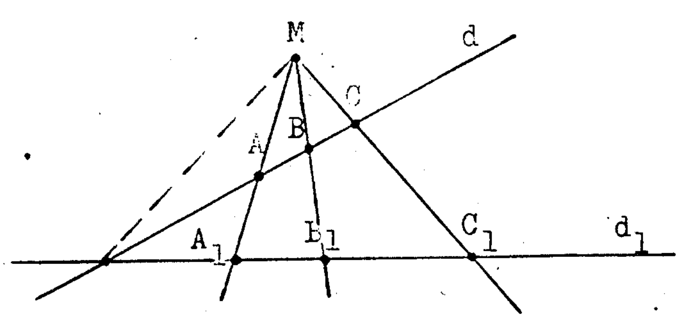
biçiminde gösterilir. Ayrıca eğer ψ, d nin A,B,C,... noktalarını d_1 in sırayla $A_1,B_1,C_1,..$ noktalarına dönüştürüyorsa bu perspektiflik için

$$\psi: ABC... \overset{M}{\overline{\wedge}} A_1B_1C_1...$$

yada daha kısa olan

$$ABC... \overset{M}{\overline{\wedge}} A_1B_1C_1...$$

gösterimleri kullanılır.(Şekil 1.1.2).



Şekil 1.1.2

Bir projektif düzlemde sonlu sayıda perspektiflıklerin bileşkesine izdüşellik (projectivity) denir.

Bir izdüşellik harmonik dörtlüleri harmonik dörtlülere dönüştürür.

$\mathbb{P}$ bir projektif düzlem, M ve e de bu düzlemin sırayla belli bir nokta ve belli bir doğrusu olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeye (M,e)-Desargues teoremi ve bu teoremi gerçekleyen $\mathbb{P}$ projektif düzlemine (M,e)-Desargsel düzlem denir:

$\mathbb{P}$ Desargsel projektif düzleminde M noktasından perspektif herhangi $\{A,B,C\}$ ve $\{A',B',C'\}$ üçgenleri için eğer $P=AB\wedge A'B'$ ve $Q=AC\wedge A'C'$ noktaları e doğrusu üzerinde ise $R=BC\wedge B'C'$ noktasıda e üzerindedir.

TANIM 1.1.5:

f, bir $\mathbb{P}$ projektif düzleminin bir otomorfizmi olsun. $\mathbb{P}$ nin bir M noktasından geçen her x doğrusu için f(x)=x ise M ye f nin merkezi denir. Benzer olarak $\mathbb{P}$ nin bir e doğrusu üzerindeki her X noktası için f(X)=X ise e ye f nin ekseni denir. Eğer f nin bir M merkezi ve bir e ekseni varsa f ye $\mathbb{P}$ nin bir (M,e)-merkezsel kolinasyonu yada (M,e)-perspektifliği denir. Ayrıca eğer $M \in e$ ise f ye öteleme (translation yada elation), $M \notin e$ ise f ye homoloji denir.

Bir kolinasyon merkez ve eksenini (var iseler) değişmez bırakır, yani değiştirmez. Yalnız bir merkezsel kolinasyon bir doğruyu değiştirmeyebilir (örneğin M den geçen her doğruyu değiştirmez) ama bu, söz konusu doğrular üzerindeki noktaları değiştirmez demek değildir.

TEOREM 1.1.2:

$\mathbb{P}$ bir projektif düzlem ve G($\mathbb{P}$) bu düzlemin bütün kolinasyonlarının oluşturduğu grup olsun. M ve e de sırayla $\mathbb{P}$ nin seçimli bir nokta ve seçimli bir doğrusu olsun. Bu durumda $\mathbb{P}$ nin

i) e-eksenli ötelemeler kümesi, $G(\mathbb{P})$ nin bir altgrubudur. (Bu altgruba e-eksenli ötelemeler grubu denir ve $G_ö(e)$ ile gösterilir.);

ii) M merkezli ötelemeler kümesi, $G(\mathbb{P})$ nin bir altgrubudur. (Bu altgruba M merkezli ötelemeler grubu denir ve $G_ö(M)$ ile gösterilir.);

iii) (M,e)-merkezsel kolinasyonların kümesi, $G(\mathbb{P})$ nin bir altgrubudur. (Bu altgruba $\mathbb{P}$ nin (M,e)-merkezsel kolinasyonlar grubu denir ve G(M,e) ile gösterilir.).

TANIM 1.1.6:

$\mathbb{P}$ bir projektif düzlem, M ve e de bu düzlemin sırayla belli bir nokta ve belli bir doğrusu olsun. $\mathbb{P}$ de

1) $X \neq M$ ve $Y \neq M$,

2) $X \notin e$ ve $Y \notin e$,

3) M,X,Y doğrudaş ,

özeliğinde verilen herhangi X ve Y nokta çifti için $f(X)=Y$ olacak biçimde bir $f \in G(M,e)$ merkezsel kolinasyonu varsa $\mathbb{P}$ düzlemi (M,e)-geçişkendir denir. $\mathbb{P}$ düzlemi (M,e)-geçişken ise G(M,e) grubu $\mathbb{P}$ üzerinde geçişkendir denir.

TEOREM 1.1.3:

$\mathbb{P}$ bir projektif düzlem, M ve e de bu düzlemde verilen bir nokta ve bir doğru olsun. $\mathbb{P}$ nin (M,e)-Desarguessel olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{P}$ nin (M,e)-geçişken olmasıdır.

TEOREM 1.1.4:

$\mathbb{P}$ bir projektif düzlem, M ve e de bu düzlemde verilen bir nokta ve bir doğru çifti olsun. Bu düzlemde $N \neq M$, $N \notin e$

özeliklerine uygun bir tek N noktası ve $Y \circ MN$, $Y \neq M$, $Y \not\circ e$ özeliklerine uygun her Y noktası için $f(N)=Y$ olacak biçimde bir $f:(M,e)$ merkezsel kolinasyonu varsa $\mathbb{P}$ düzlemi (M,e)-geçişkendir.

TEOREM 1.1.5:

$N \circ e$ ve $M \circ e$ olmak üzere eğer $\mathbb{P}$ düzlemi hem (M,e)-geçişken hemde (N,e)-geçişken ise bu düzlem her $X \circ e$ noktası için (X,e)-geçişkendir.

TANIM 1.1.7:

$\mathbb{P}$ bir projektif düzlem e de bu düzlemin bir doğrusu olsun. Eğer $\mathbb{P}$ her $X \circ e$ noktası için (X,e)-geçişken ise $\mathbb{P}$ ye (e,e)-geçişken denir. Dual olarak, belli bir M noktası ve bu noktadan geçen her x doğrusu için (M,x)-geçişken ise $\mathbb{P}$ düzlemine (M,M)-geçişkendir denir.

TEOREM 1.1.6 (Küçük Desargues teoremi):

$\mathbb{P}$ bir projektif düzlem olsun. $X \circ x$ özeliğindeki her X noktası ile her x doğrusu ve X noktasından perspektif olan herhangi $\{A,B,C\}$ ve $\{A',B',C'\}$ üçgenleri için $P=AB \wedge A'B'$ ve $Q=AC \wedge A'C'$ noktaları x doğrusu üzerinde ise $R=BC \wedge B'C'$ noktasıda x doğrusu üzerindedir.

Küçük Desargues teoremini gerçekleyen bir projektif düzleme Küçük Desarguessel düzlem yada Moufang düzlemi denir.

TEOREM 1.1.7:

Herhangi bir $\mathbb{P}$ projektif düzlemi için aşağıdaki önermeler eş anlamlıdır:

1. IP düzlemi bir Moufang düzlemidir.

2. $M \circ e$ olmak üzere her M noktası ve her e doğrusu için IP düzlemi (M,e)-geçişkendir.

3. Her e doğrusu için $G_{\ddot{o}}(e)$ grubu P üzerinde geçişkendir.

TEOREM 1.1.8:

Herhangi IP projektif düzlemi (M,e)-geçişkense ve f de IP nin f(M)=N ve f(e)=d olacak biçimde bir kolinasyon ise IP düzlemi (N,d)-geçişkendir.

TEOREM 1.1.9:

Herhangi bir IP projektif düzlemi

a) Hem (e,e)-geçişken ve hemde (d,d)-geçişken ise aynı zamanda $x \circ (e \wedge d)$ özeliğinde her x doğrusu için (x,x)-geçişkendir.

b) Hem (M,M)-geçişken hemde (N,N)-geçişken ise aynı zamanda $X \circ MN$ özeliğindeki her X noktası için (X,X)-geçişkendir.

TEOREM 1.1.10:

Herhangi bir IP projektif düzlemi

a) Noktadaş olmayan farklı a,b,c doğruları için (a,a), (b,b), (c,c)-geçişken ise düzlemdeki her x doğrusu içinde (x,x)-geçişkendir, yani IP bir Moufang düzlemidir.

b) Doğrudaş olmayan farklı A,B,C noktaları için (A,A), (B,B), (C,C)-geçişken ise düzlemdeki her X noktası içinde (X,X)-geçişkendir.

Gerçekte teorem 1.1.10'un daha indirgenmişi olan aşağıdaki teorem de geçerlidir. Ancak bunun ispatı için oldukca ağır cebirsel bilgilere ihtiyaç duyulduğundan pek az kullanılmaktadır:

TEOREM 1.1.11:

Herhangi bir $\mathbb{P}$ projektif düzleminin Moufang düzlemi olması için gerek ve yeter koşul d ve e gibi farklı iki doğru için (d,d) ve (e,e)-geçişken olmasıdır.

TANIM 1.1.8:

B , bir küme + ve . da BxB den B ye (yani B üzerinde) sırayla toplama ve çarpma denilen iki işlem olsun. Eğer (B,+,.) sistemi aşağıdaki koşulları gerçeklerse ona bölümlü halka denir:

B1: (B,+) sistemi değişmeli bir gruptur.

B2: $(B-\{0\},.)$ bir gruptur.

B3: . işlemi , + işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılır. Yani her $x,y,z \in B$ için

$$x.(y+z)=x.y+x.z \quad \text{ve} \quad (y+z).x=y.x+z.x$$

dir.

TANIM 1.1.9:

B bir bölümlü halka olsun.

$$\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{p \text{ tane}}=0$$

eşitliğine uyan en küçük $p \geq 2$ tamsayısına B bölümlü halkanın karekteristiği denir. Eğer böyle (sonlu) bir p tamsayısı yoksa B nin karekteristiği sıfırdır denir.

TEOREM 1.1.12:

Bir bölümlü halkanın karekteristiği ya sıfır yada daima bir asal sayıdır.

TANIM 1.1.10:

B herhangi bir bölümlü halka olsun. Bu bölümlü halkanın

$$B_o=\{x:x\in B,\ \text{ve her } y\in B \text{ için } xy=yx\}$$

biçiminde tanımlı altkümesine B nin merkezi denir.

TANIM 1.1.11:

B bir bölümlü halka, $a_{ij}\in B, x_i, x_j, x_i', x_j'\in B$ ve $x_i'=\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j$, $i=1,2,3$ olmak üzere $\mathbb{P}_2B$ projektif düzleminin noktaları arasında $f:(x_1,x_2,x_3)\longrightarrow(x_1',x_2',x_3')$ dönüşümünü düşünelim. Böyle her dönüşümün katsayıları 3x3 tipinde karesel bir $A=(a_{ij})$ matrisi tanımlar. Karşıt olarak girdileri B nin elemanları olan 3x3 tipinde her $A=(a_{ij})$ matrisi için

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$$

ile verilen bir f dönüşümü tanımlıdır. Bu nedenle f ye matrisi A olan dönüşüm yada A matrisinin belirttiği dönüşüm denir, ve bu dönüşüm genel olarak f_A ile gösterilir.

TEOREM 1.1.13:

$A=(a_{ij})$, B bölümlü halkası üzerinde 3x3 tipinde ve tekil olmayan bir matris ise bu matrisin belirttiği f_A dönüşümü $\mathbb{P}_2B$ projektif düzleminin bir otomorfizmidir. (f_A ya $\mathbb{P}_2B$ nin matris gösterimli kolinasyonu denir).

TANIM 1.1.12:

Girdileri bir B bölümlü halkasının elemanları olan ve 3x3 tipinde tekil olmayan matrisler kümesinin matris çarpımı işlemi altında oluşturduğu gruba B üzerinde 3-boyutlu genel lineer grup denir ve GL(3,B) ile gösterilir. Eğer GL(3,B) grubu küme olarak ele alınırsa ve bu küme üzerinde

$$"A\sim A' \Leftrightarrow \exists \lambda \in B_0 \ni \lambda \neq 0 \text{ ve } A'=A\lambda"$$

denklik bağıntısı yardımıyla tanımlanan $GL(3,B)/\sim$ bölüm grubuna B üzerinde projektif genel lineer grup denir ve bu grup PGL(2,B) ile gösterilir.

1.2. İZDÜŞELLİKLER İLE KOLİNASYONLAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER

TEOREM 1.2.1:

$\mathbb{P}$ bir projektif düzlem ve f de $\mathbb{P}$ nin bir kolinasyonu olsun. Eğer f nin bir projektif düzlemin bir d doğrusuna $f_{/d}$ kısıtlanmışı izdüşellikse P deki her bir x doğrusuna $f_{/x}$ kısıtlanmışı da izdüşelliktir.

TANIM 1.2.1:

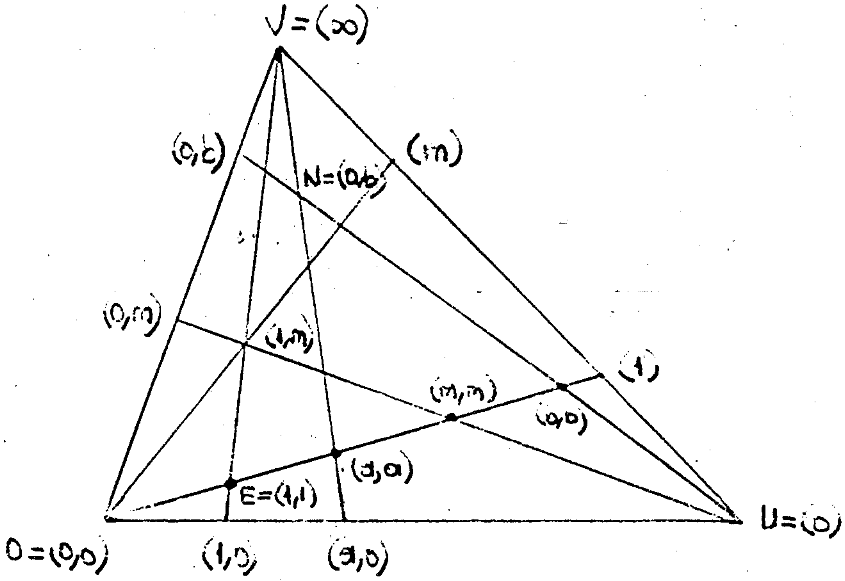
f bir $\mathbb{P}$ projektif düzleminin herhangi bir kolinasyonu, d de $\mathbb{P}$ nin herhangi bir doğrusu ve f(d)=d' olsun. Eğer f nin d ye kısıtlanmışı olan $f_{/d}:d \longrightarrow d'$ dönüşümü bir izdüşellikse f ye izdüşel kolinasyon denir.

2. BÖLÜM

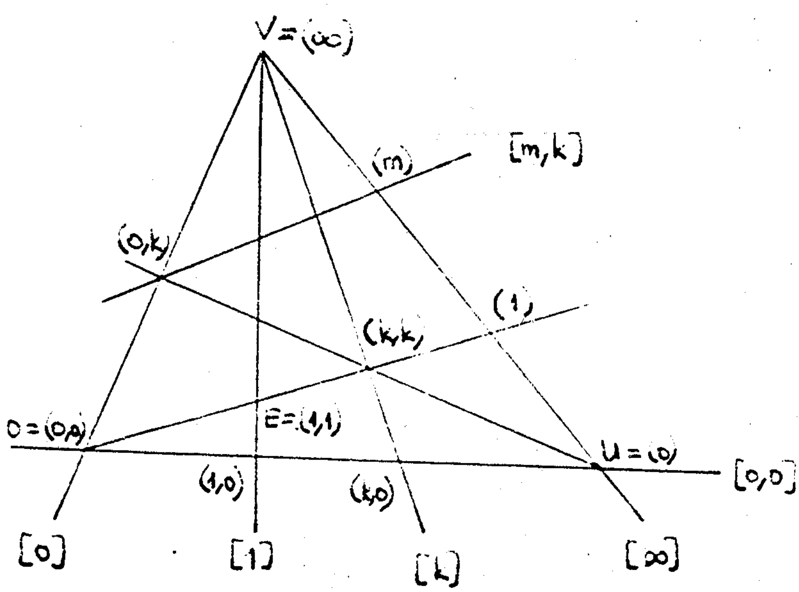
MOUFANG PROJEKTİF DÜZLEMİNİN CEBİRSEL YAPISI

2.1.PROJEKTİF DÜZLEMLERİN KOORDİNATLANMASI VE DÜZLEMSEL ÜÇLÜ HALKALAR

$\mathbb{P}$ mertebesi $n \geq 2$ olan herhangi bir projektif düzlem olsun. Kardinalitesi n olan, 0 ve 1 ile gösterilen iki özel elemanı bulunan herhangi bir S kümesini göz önüne alalım. $\mathbb{P}$ de herhangi üçü doğrudaş olmayan O,E,U,V noktalarının oluşturduğu seçimli bir $\{O,E,U,V\}$ koordinatlama dörtgeni ve S kümesi kullanılarak $\mathbb{P}$ nin noktalarını şöyle koordinatlandıralım. OE doğrusu üzerinde $OE \wedge UV$ den başka her bir noktaya S^2 nin (a,a) biçiminde bir tek elemanını eşleyelim ve özel olarak $O=(0,0)$ ve $E=(1,1)$ alalım. UV üzerinde bulunmayan seçimli bir N noktası için eğer $NU \wedge OE=(b,b)$ ve $NV \wedge OE=(a,a)$ ise $N=(a,b)$ diyelim. Özel olarak OU doğrusu üzerindeki noktalar $(a,0)$ ve OV doğrusu üzerindeki noktalar $(0,b)$ biçiminde koordinatlara sahip olur. UV doğrusunun $[(0,0) \vee (1,m)] \wedge UV$ noktasına (m) koordinatını verelim. Bu yolla $U=(0)$, $OE \wedge UV=(1)$ olacağı açıktır. UV doğrusunun V noktasına $\infty \notin S$ olmak üzere $V=(\infty)$ koordinatını verelim.(Şekil 2.1.1). $\mathbb{P}$ nin doğrularına gelince $V=(\infty)$ noktasından geçmeyen ve dolayısıyla UV ile bir (m) ortak noktasına ve OV ile bir $(0,k)$ ortak noktasına sahip olan doğruya $[m,k]$ koordinatını , $V=(\infty)$ noktasından geçen ve $OU=[0,0]$ doğrusuyla bir $(k,0)$ ortak noktasına sahip olan doğruya $[k]$ koordinatını ve UV doğrusunada $[\infty]$ ko ordinatını tayin edelim.(Şekil 2.1.2).



Şekil 2.1.1



Şekil 2.12

Buradan açık olarak, noktaların doğrular üzerinde bulun bağıntısı her m,k,x,y$\in$S için

$$(\infty)\circ[\infty] \quad ; \quad (\infty)\circ[k] \quad ; \quad (\infty)\not\circ[m,k]$$

$$(x)\circ[\infty] \quad ; \quad (x)\not\circ[k] \quad ; \quad (x)\circ[m,k] \Leftrightarrow m=x$$
$$(x,y)\not\circ[\infty] \quad ; \quad (x,y)\circ[k] \Leftrightarrow x=k$$

dır. Geriye kalan herhangi (x,y) noktasının $[m,k]$ doğrusu üzerinde bulunup bulunmamasını belirlemek için S^3 den S ye " $T:(m,x,k)\longrightarrow y \Leftrightarrow (x,y)\circ[m,k]$" olacak biçimde bir T eşlemesi tanımlamak yeterli olacaktır. Bunun için aşağıdaki teorem verilir.

TEOREM 2.1.1:

S, bir projektif düzlemi koordinatlamakta herhangi bir küme ve T de S^3 den S ye $T(m,x,k)=y \Leftrightarrow (x,y)\circ[m,k]$ özeliğinde bir eşleme olsun. Bu durumda T, S üzerinde bir üçlü işlemdir.

İSPAT:

Her bir (m,x,k) sıralı üçlüsü için $y=T(m,x,k)$ olacak biçimde bir tek $y\in S$ olduğu gösterilmelidir. İlk koordinatı x olan bütün noktalar $(\infty)\vee(x,x)=[x]$ doğrusu üzerindedir. Ayrıca tanımdan $y=T(m,x,k) \Leftrightarrow (x,y)\circ[m,k]$ ve dolayısıyla aynı x ilk koordinatlı nokta $[m,k]$ doğrusununda üzerindedir. Böylece $(x,y)=[x]\wedge[m,k]$ olur. oysa iki doğrunun bir tek (x,y) ortak noktası bulunduğundan bir tek $y\in S$ vardır ■

Böyle elde edilen (S,T) ikilisinin aşağıdaki tanımla verilen bir düzlemsel üçlü halka olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

TANIM 2.1.1:

S, 0 ve 1 ile gösterilen iki elemanıda içinde bulunduran bir küme ve $\infty\not\in S$ olsun. T de S üzerinde

T1: Her $a,b,c\in S$ için $T(0,b,c)=T(a,0,c)=c$, T2: Her $a\in S$ için $T(a,1,0)=T(1,a,0)=a$,

T3: Verilen $a,b,c\in S$ için $T(a,b,x)=c$ olacak biçimde bir tek $x\in S$ vardır.

T4: $a\neq c$ olmak üzere verilen $a,b,c,d\in S$ için $T(a,x,b)=T(c,x,d)$ olacak biçimde bir tek $x\in S$ vardır.

T5: $a\neq c$ olmak üzere verilen $a,b,c,d\in S$ için $T(x,a,y)=b$ ve $T(x,c,y)=d$ olacak biçimde bir tek $(x,y)\in S^2$ vardır.

koşullarını gerçekleyen bir üçlü işlemse (S,T) ikilisine üçlü halka denir. Ayrıca eğer S bir $\mathbb{P}$ projektif düzlemin koordinatlama kümesi ve T de bu koordinatlamadaki üçlü işlemse (S,T) üçlü halkasına $\mathbb{P}$ nin düzlemsel üçlü halkası yada kısaca düzlemsel üçlü halka denir.

2.2. PROJEKTİF DÜZLEMLERİN CEBİRSEL YAPISI İLE GEÇİŞKENLİKLER ARASINDAKİ İLİŞKİLER

TANIM 2.2.1:

L, herhangi bir küme ve $\ast$ da L üzerinde bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki özeliklere sahip $(L,\ast)$ sistemine yarı grup yada loop denir:

L1: Verilen her $a,b\in L$ için $a\ast x=b$ denkleminin bir tek $x\in L$ çözümü vardır.

L2: Verilen her $a,b\in L$ için $x\ast a=b$ denkleminin bir tek $x\in L$ çözümü vardır.

L3: Her $x\in L$ için $x\ast u=u\ast x=x$ olacak biçimde bir tek $u\in L$ elemanı (birim eleman) vardır.

TANIM 2.2.2:

Herhangi bir (S,T) üçlü halkasının T işleminin

$$x+y=T(1,x,y) \quad \text{ve} \quad x.y=T(x,y,0)$$

biçiminde tanımlanan özel hallerine sırayla S üzerinde toplama ve çarpma (ikili) işlemleri denir.

TEOREM 2.2.1:

(S,T) bir üçlü halka + ve . da S üzerinde tanım2.2.2 deki toplama ve çarpma işlemleri ise (S,+) ve $(S-\{0\},.)$ sistemleri birim elemanları sırayla 0 ve 1 olan birer yarıgruptur. Üstelik her $x\in S$ için $0.x=x.0=0$ dır.

TANIM 2.2.3:

(S,T) bir üçlü halka olsun. Eğer T üçlü işlemi her a,b, $c\in S$ için $T(a,b,c)=T(1,T(a,b,0),c)$ özeliğine sahipse yani + ve . tanım2.2.2 deki işlemler olmak üzere

$$T(a,b,c)=a.b+c$$

ise (S,T) ye lineer üçlü halka denir.

TEOREM 2.2.2:

(S,T) üçlü halkasının lineer olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{P}_{(S,T)}$ projektif düzleminde (M,e)-Desargues teoreminin $M=(\infty)$, $e=[\infty]$, $AA'=[0]$, $R=(0)$ özel konumunda geçerli olmasıdır.

TEOREM 2.2.3:

(S,T) üçlü halkasının lineer ve + işleminin birleşimli (dolayısıyla (S,T) nin grup) olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{P}_{(S,T)}$ projektif düzleminin $((\infty),[\infty])$-geçişken olmasıdır.

İSPAT:

(S,T) lineer ve + işlemi birleşimli olsun. A ve A', $\mathbb{P}$ de $[\infty]$ üzerinde bulunmayan ama (∞) ile doğrudaş olan herhangi iki nokta olmak üzere A yı A' ye eşleyen bir $((\infty),[\infty])$ öteleme bulmalıyız. Buna göre $A=(x,y)$ ve $A'=(x,y')$ biçiminde alınabilir. $(S,+)$ bir yarıgrup olduğundan $y+a=y'$ olacak biçimde bir tek $a\in S$ vardır. $\mathbb{P}$ nin bu a ile belirtilen

$$\begin{array}{lll} f_a:(x,y)\longrightarrow(x,y+a) & & f_a:[m,k]\longrightarrow[m,k+a] \\ \quad (m)\longrightarrow(m) & \text{ve} & \quad [k]\longrightarrow[k] \\ \quad (\infty)\longrightarrow(\infty) & & \quad [\infty]\longrightarrow[\infty] \end{array} \qquad (I)$$

eşlemesini göz önüne alalım. f_a nın birebir ve örten olduğu açıktır. Ayrıca (I) den dolayı,

$$f_a((\infty))\circ f_a([\infty])\Leftrightarrow(\infty)\circ[\infty] \; ; \; f_a((\infty))\circ f_a([k])$$
$$\Leftrightarrow(\infty)\circ[k] \; ; \; f_a((m))\circ f_a([\infty])\Leftrightarrow(m)\circ[\infty] \; ;$$
$$f_a((m))\circ f_a([m,k])\Leftrightarrow(m)\circ[m,k+a] \; ; \; f_a((x,y))\circ f_a([k])$$
$$\Leftrightarrow(x,y+a)\circ[k]\Leftrightarrow x=k \; ; \; f_a((x,y))\circ f_a([m,k])\Leftrightarrow$$
$$\begin{aligned}(x,y+a)\circ[m,k+a] &\Leftrightarrow y+a=mx+(k+a)\\ &\Leftrightarrow y+a=(mx+k)+a\\ &\Leftrightarrow y=mx+k\\ &\Leftrightarrow (x,y)\circ[m,k]\end{aligned}$$

bulunur ki bu f_a nın üzerinde bulunma bağıntısını koruduğunu gösterir. Dolayısıyla f_a, $\mathbb{P}$ nin bir kolinasyonudur. Üstelik $[\infty]$ doğrusu üzerindeki her noktayı ve (∞) noktasından geçen her doğruyu değişmez bırakır. Böylece $(\infty)\circ[\infty]$ olduğundan f_a bir $((\infty),[\infty])$-ötelemedir.

Karşıt olarak $\mathbb{P}$ nin $((\infty),[\infty])$-geçişken olduğunu varsayalım. Bu halde teorem 2.2.2 gereğince (S,T) lineerdir. Varsayım gereğincede $(0,0)$ noktasını herhangi $(0,a)$ noktasına taşıyan bir $f_a=((\infty),[\infty])$-ötelemesi vardır. O zaman her hangi (x,y) noktası için $f_a((x,y))=(x,v)$ diyelim. v nin yalnızca a ve y ye bağlı olduğunu göz önüne alarak $\varphi_a:S\longrightarrow S$ ve $\varphi_a(y)=v$ olacak biçimde birebir ve örten bir φ_a eşlemesi düşünülürse $f_a((x,y))=(x, \varphi_a(y))$ olur. Buradan

$$f_a((0,0))=(0,a) \Leftrightarrow (0, \varphi_a(0))=(0,a)$$

ve buradan da

$$\varphi_a(0)=a \qquad \text{(II)}$$

bulunur. Bu durumda f_a ötelemesinin $\mathbb{P}$ nin noktalarına etkisi tamamen bellidir. Çünkü $f_a:(x,y)\longrightarrow(x, \varphi_a(y))$, $(m)\longrightarrow(m)$ $(\infty)\longrightarrow(\infty)$ dir. Oysa $f_a:(m)\longrightarrow(m)$ ve $f_a:(0,k)\longrightarrow(0, \varphi_a(k))$ olduğundan $f_a:[m,k]\longrightarrow[m, \varphi_a(k)]$ dır. (S,T) nin lineerliği ve f_a nın üzerinde bulunmayı koruyacağı göz önüne alınırsa hem $(x,y)\circ[m,k]$ olduğundan

$$y=mx+k \qquad \text{(III)}$$

hemde $f_a((x,y))\circ f_a([m,k])$ olduğundan $(x, \varphi_a(y))\circ[m, \varphi_a(k)]$ yada daha açık olarak

$$\varphi_a(y)=mx+\varphi_a(k) \qquad \text{(IV)}$$

dır. (III) ve (IV) den her $x,y,k \in S$ için geçerli olan

$$\varphi_a(mx+k)=mx+\varphi_a(k) \qquad \text{(V)}$$

eşitliği bulunur. Özel olarak (V) den $k=0$ ve $m=1$ için $\varphi_a(x)=x+\varphi_a(0)$ ve (I) den hemen

$$\varphi_a(x)=x+a \qquad \text{(VI)}$$

bulunur. (VI) özeliği (V) de kullanılır ve tekrar $m=1$ alınırsa her $a,k,x \in S$ için geçerli

$$(x+k)+a=x+(k+a)$$

sonucuna varılır ki bu + nın birleşimli olduğunu gösterir■

TANIM 2.2.4:

+ işlemi birleşimli olan herhangi (S,T) lineer üçlü halkasına kartezyen grup denir.

TEOREM 2.2.4:

(S,T) bir kartezyen grup olsun. (S,T) nin soldan dağılma özeliğine sahip olması-Yani, her $a,b,c \in S$ için $a(b+c)=ab+ac$ olması-için gerek ve yeter koşul $\mathbb{P}_{(S,T)}$ nin $((0),[\infty])$ geçişken olmasıdır.

İSPAT:

(S,T) kartezyen grubu soldan dağılma kuralını sağlasın. (x,y) seçimli noktasını yine seçimli ama $(0)\vee(x,y)$ doğrusu üzerindeki (x',y) noktasına eşleyen bir $((0),[\infty])$-ötelemesinin varlığını göstermeliyiz. Oysa (S,+) bir grup olduğundan $x'=x+a$ olacak biçimde bir tek $a \in S$ vardır. $\mathbb{P}_{(S,T)}$ üzerinde a ila belirtilen

$$\begin{array}{lll} f_a:(x,y)\longrightarrow(x+a,y) & & f_a:[m,k]\longrightarrow[m,-(m.a)+k] \\ (m)\longrightarrow(m) & \text{ve} & [k]\longrightarrow[k+a] \\ (\infty)\longrightarrow(\infty) & & [\infty]\longrightarrow[\infty] \end{array}$$

eşlemesini göz önüne alalım. f_a nın birebir ve örten olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} f_a((x,y))\circ f_a([m,k]) &\Leftrightarrow (x+a,y)\circ[m,-(m.a)+k] \\ &\Leftrightarrow y=m(x+a)+(-(m.a)+k) \\ &\Leftrightarrow y=mx+ma-ma+k \\ &\Leftrightarrow y=mx+k \\ &\Leftrightarrow (x,y)\circ[m,k] \end{aligned}$$

dir. diyer hallerde de f_a nın üzerinde bulunmayı koruduğunu göstermek-Teorem 2.2.3 dekine benzer yolla-çok kolaydır. böylece f_a, $\mathbb{P}_{(S,T)}$ nin bir kolinasyonudur. Üstelik $f_a:[0,k] \longrightarrow [0,k]$ olduğundan (0) dan geçen her doğru ve $f_a:(m)\longrightarrow(m)$ $(\infty)\longrightarrow(\infty)$ olduğundan $[\infty]$ üzerindeki her nokta f_a altında değişmediğinden f_a bir $((0),[\infty])$-ötelemedir.

Karşıt olarak $\mathbb{P}_{(S,T)}$ projektif düzlemi $((0),[\infty])$-geçişken olsun. Buradan $[0,0]$ doğrusunun (0,0) noktasını yine aynı doğrunun bir (a,0) noktasına eşleyen bir $f_a((0),[\infty])$ ötelemesi vardır. Bundan yararlanarak $f_a((x,y))=(u,y)$ diyelim. u nun yalnızca a ve x e bağlı olduğunu düşünerek $\varphi_a:S\longrightarrow S$ ye $\varphi_a(x)\longrightarrow u$ olacak biçimde birebir ve örten bir eşleme göz önüne alınırsa $f_a((x,y))=(\varphi_a(x),y)$ olur. oysa verilenlerden $f_a((0,0))=(a,0) \Leftrightarrow (\varphi_a(0),0)=(a,0)$ bulunur ki bu

$$\varphi_a(0)=a \qquad (I)$$

demektir. Buradan f_a ötelemesinin noktalara etkisi tamamen bellidir. Çünkü, $f_a:(x,y)\longrightarrow(\varphi(x),y)$, $(m)\longrightarrow(m)$, $(\infty)\longrightarrow(\infty)$ dir. $f_a:(m)\longrightarrow(m)$ ve (I) in kullanılmasıyla $f_a:(0,k)\longrightarrow(\varphi_a(0),k)=(a,k)$ olduğundan ve f_a üzerinde bulunmayı koruyacağından $f_a:[m,k]\longrightarrow[m,h]$ biçiminde olmalıdır. Üstelik $(0,k)\circ[m,k] \Leftrightarrow (a,k)\circ[m,h] \Leftrightarrow k=m.a+h \Leftrightarrow h=-(m.a)+k$ ve dolayısıyla da $f_a:[m,k]\longrightarrow[m,-(m.a)+k]$ dır. f_a nın üzerinde bulunmayı koruyacağını ve (S,T) nin lineerliğini kullanarak

$$(x,y)\circ[m,k] \Leftrightarrow y=mx+k \qquad (II)$$

ve $f_a((x,y))\circ f_a([m,k]) \Leftrightarrow (\varphi_a(x),y)\circ[m,-(ma)+k]$ dan

$$y=m\varphi_a(x)+(-(ma)+k) \qquad (III)$$

bulunur. (II) ve (III) birlikte düşünülürse

$$mx+k=m\,\varphi_a(x)+(-(ma)+k)$$

elde edilir. Burada + nın birleşme özeliğini de kullanarak hemen her m,a,x$\in$S için

$$mx+ma=m\,\varphi_a(x) \qquad \text{(IV)}$$

bulunur. (IV) den m=1 için $\varphi_a(x)=x+a$ elde edilirki bunu tekrar (IV) de kullanarak

$$mx+ma=m(x+a)$$

soldan dağılma kuralına varılır∎

TANIM 2.2.5:

Soldan dağılma özelliği bulunan herhangi bir kartezyen gruba sol yarıcisim ve sağdan dağılma özeligi bulunan herhangi bir kartezyen gruba sağ yarıcisim denir. Hem sağdan hemde soldan dağılma özeliği bulunan herhangi bir kartezyen gruba da yarıcisim denir.

Yarıcisim teriminin karşılığı olarak bir çok eserlerde yaygın olarak " Veblen-Wedbernburn (VW) sistemi " terimide kullanılmaktadır.

SONUÇ 2.2.1:

Herhangi (S,T) üçlü halkasının sol yarıcisim olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{P}_{(S,T)}$ nin ($[\infty]$, $[\infty]$)-Desarguessel olmasıdır.

YARDIMCI TEOREM 2.2.5:

Herhangi bir (S,T) yarıcismi aşağıdaki özelikleri sağlar:

a) Her x,y$\in$S için $x(-y)=-(xy)=(-x)y$ dir.

b) Verilen herhangi $a,b\in S$, $a\neq 1$ için

$$ax+b=x \quad \text{ve} \quad xa+b=x$$

denklemlerinin birer tek $x\in S$ çözümü vardır.

c) Her $x,y\in S$ için $x+y=y+x$ dir.

TEOREM 2.2.6:

Herhangi (S,T) kartezyen grubunun sağ yarıcisim olması yani her $a,b,c\in S$ için $(a+b).c=a.c+b.c$ kuralını gerçeklemesi için gerek ve yeter koşul $\mathbb{P}_{(S,T)}$ projektif düzleminin $((\infty),[0])$-geçişken olmasıdır.

TEOREM 2.2.7:

Herhangi bir (S,T) üçlü halkasının sağ yarıcisim olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{P}_{(S,T)}$nin $((\infty),(\infty))$-geçişken olmasıdır.

İSPAT:

Teorem 2.2.3 gereğince (S,T) nin kartezyen grup olması $P_{(S,T)}$ nin $((\infty),[\infty])$-geçişken olmasına eşdeğerdir. Teorem 2.2.6 dan bu kartezyen grubun sağ yarıcisim olması $\mathbb{P}_{(S,T)}$ nin $((\infty),[0])$-geçişken olmasına eşdeğerdir. $((\infty),[\infty])$ ve $((\infty),[0])$-geçişken olduklarından $((\infty),[\infty]\wedge[0])$-geçişkendir. Buradan $((\infty),(\infty))$-geçişken olduğu görülür■

SONUÇ 2.2.2:

(S,T) üçlü halkasının bir yarıcisim olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{P}_{(S,T)}$ nin $((\infty),[\infty])$, $((0),[\infty])$ ve $((\infty),[0])$-geçişken olmasıdır.

TANIM 2.2.6:

$(L,\ast)$ sistemi bir yarıgrup(loop) olsun. Eğer her $x,y\in L$ için $(y\ast x)\ast x^{-1}=y$ olacak biçimde $x^{-1}\in L$ varsa bu yarıgruba sağ ters birleşimli yarıgrup ve benzer olarak her $x,y \in L$ için $x^{-1} \ast (x \ast y)=y$ olacak biçimde bir $x^{-1} \in L$ varsa bu yarıgruba sol ters birleşimli yarıgrup denir.

YARDIMCI TEOREM 2.2.8:

$(L,\ast)$ sağ (yada sol) ters birleşimli herhangi bir yarıgrup ve u da bu yarıgrubun birim elemanıysa her $x \in L$ için $x^{-1} \ast x=u=x \ast x^{-1}$ ve dolayısıyla $(x^{-1})^{-1}=x$ dir.

YARDIMCI TEOREM 2.2.9:

(S,T) herhangi bir sağ ters birleşimli yarıcisim olsun. Her $x,y,z \in S$ için

$$x((yz)y)=((xy)z)y$$

ve özel olarak sağ alterne kural yani

$$x(yy)=(xy)y$$

eşitlikleri geçerlidir.

TEOREM 2.2.10:

Herhangi bir (S,T) yarıcisminin sağ ters birleşimli olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{P}_{(S,T)}$ nin $((0,0),[0])$-geçişken olmasıdır.

İSPAT:

$\mathbb{P}_{(S,T)}$ projektif düzlemi $((0,0),[0])$-geçişken olsun. Bir ötelemenin bir nokta ve onun görüntüsüyle belirtildiği hatırlanırsa (0) noktasını bir $(b,0), b \in S$ noktasına eşleyen bir $f_b=((0,0),[0])$ ötelemesi vardır, ve her $m \in S$ için $f_b=([m,0])=[m,0]$ dır. $(m)=[\infty]\wedge[m,0]$ ve $f_b([\infty])=[b]$ olduğundan $f_b((m))=f_b([\infty]\wedge[m,0])=[b]\wedge[m,0]=(b,mb)$ bulunur.

$[0]$ doğrusu eksen olduğundan $(0,y)$ biçimindeki her nokta ve $(0,0)$ noktası merkez olduğundan $[0,0]$ doğrusu f_b altında değişmez kalır. Bu nedenle $u,v,x \in S$, $x \neq 0$ olmak koşuluyla

$$f_b((x,0))=(u,0) \text{ ve } f_b([m,-mx])=[n,-mx] \qquad \text{(II)}$$

diyebiliriz. Oysa (m) ve $(x,0)$ noktaları $[m,-mx]$ doğrusu üzerinde olduğu ve f_b üzerinde bulunmayı koruyacağı için (I) ve (II) den $(b,mb) \circ [n,-mx]$ nin karşılığı olarak

$$nb=mb+mx \qquad \text{(III)}$$

ve $(u,0) \circ [n,-mx]$ nin karşılığı olarak

$$nu=mx \qquad \text{(IV)}$$

bulunur. (III) denklemi verilen $b,m,x \in S$ için n yi ve (IV) denklemi u yu belirtir. Özel olarak $m=1$ ve verilen herhangi b,x değerleri için n nin değerine w dersek (III) ve (IV) den

$$wb=b+x \text{ ve } wu=x \qquad \text{(V)}$$

olur ve $b=-1$ için (V) den

$$w=1-x \text{ ve } wu=x \qquad \text{(VI)}$$

(III) den

$$n=m(1-x) \qquad \text{(VII)}$$

bulunur. (VI) ve (VII) den

$$n=mw \qquad \text{(VIII)}$$

olur. Oysa (IV) ve (V) kullanılarak $n=mw = (mw)u=n(u)=mx= m(wu)$ olur. Yani

$$(mw)u=m(wu) \qquad \text{(IX)}$$

bulunur. Düzlem $((0),[0])$-geçişken olduğundan x ve b değiştikçe w, S deki her değeri alır. Dolayısıyla (IX) eşitliği her $m,w \in S$ ve $w+wu=1$ özeliğinde $u \in S$ için geçerlidir. Şimdi $v=1+u$ denilirse $wv=w(1+u)=w+wu=1$ elde edilir. Böylece

$$(mw)u=(mw)(1+u)=mw+(mw)u$$

$$=mw+m(wu) \qquad \text{(IX) dan}$$

$$=m(w(1+u))$$

$$=m(wv) \qquad wv=1 \text{ den}$$

$$=m$$

dir. Oysa w değeri $f_b([1,-x])=[w,-x]$ ile tanımlandığından b, $S-\{0\}$ üzerinde değiştikçe w de $S-\{0\}$ daki her değeri alır. Bu da $(S-\{0\},.)$ nin sağ ters birleşimli olması demektir.

Karşıt olarak (S,T) sağ ters birleşimli olsun. Herhangi $b\in S-\{0\}$ ile $\mathbb{P}_{(S,T)}$ de bir f_b eşlemesini şöyle tanımlayalım:

$$f_b:(x,y)\longrightarrow((b^{-1}+x^{-1})^{-1},(yx^{-1})(b^{-1}+x^{-1})^{-1}),x\neq 0,x=-b$$

$$(0,y)\longrightarrow(0,y)$$

$$(-b,y)\longrightarrow(-yb^{-1}) \qquad ,b\neq 0$$

$$(m)\longrightarrow(b,mb)$$

$$(\infty)\longrightarrow(\infty)$$

ve

$$f_b:[m,k]\longrightarrow[m-kb^{-1},k]$$

$$[k]\longrightarrow[(b^{-1}+k^{-1})^{-1}] \quad , k\neq 0,-b \text{ iken}$$

$$[0]\longrightarrow[0]$$

$$[-b]\longrightarrow[\infty]$$

$$[\infty]\longrightarrow[b]$$

Buna göre f_b eşlemesi $[0]$ doğrusunun her noktasını ve (0,0) dan geçen her doğruyu değişmez bırakır. f_b nin nokta ve doğrular için birebir ve örten olduğu sağ ters birleşme özeliği kullanılarak kolaylıkla görülebilir. Böylece geriye f_b nin üzerinde bulunmayı koruduğunun gösterilmesi kaldı. Önce ilk tip noktayı ele alalım. $x\neq 0$, ve $x=-b$ olmak üzere $f_b((x,y))\circ f_b([m,k])$ olsun. Buradan

$$((b^{-1}+x^{-1})^{-1},(yx^{-1})(b^{-1}+x^{-1})^{-1})\circ [\,m-kb\quad ,k]$$

$$\Leftrightarrow (yx^{-1})(b^{-1}+x^{-1})^{-1}=(m-kb^{-1})(b^{-1}+x^{-1})^{-1}+k$$

$$\Leftrightarrow yx^{-1}=(m-kb^{-1})+k(b^{-1}+x^{-1}) \Leftrightarrow yx^{-1}=m+kx^{-1}$$

$$\Leftrightarrow y=mx+k \Leftrightarrow (x,y)\circ [m,k]$$

bulunur. Bundan başka

$$f_b((x,y))\circ f_b([k]) \Leftrightarrow (b^{-1}+x^{-1})^{-1}=(b^{-1}+x^{-1})^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x=k \Leftrightarrow (x,y)\circ [k]$$

dır. Şimdi geriye kalan nokta ve doğru ikililerini göz önüne alalım.

$$f_b((0,y))\circ f_b([m,k]) \Leftrightarrow (0,y)\circ [m-kb^{-1},k]$$

$$\Leftrightarrow y=k \Leftrightarrow (0,y)\circ [m,k]$$

$$f_b((0,y))\circ\ f_b([0]) \Leftrightarrow (0,y)\circ [0]$$

$$f_b((-b,y))\circ\ f_b([m,k]) \Leftrightarrow (-yb^{-1})\circ [m-kb^{-1},k]$$

$$\Leftrightarrow m-kb^{-1}=-yb^{-1} \Leftrightarrow -(mb)+k=y \Leftrightarrow y=m(-b)+k$$

$$\Leftrightarrow (-b,y)\circ [m,k] \quad ; \quad (-b,y)\circ [-b] \Leftrightarrow (-yb^{-1})\circ [\infty] ;$$

$$f_b((m))\circ f_b([m,k]) \Leftrightarrow (b,mb)\circ [m-kb^{-1},k]$$

$$\Leftrightarrow mb=(m-kb^{-1})b+k \Leftrightarrow mb=mb$$

olur ki bu her zaman doğrudur, çünkü $(m)\circ [m,k]$ dır; $(m)\circ [\infty]$ biliniyor, $(b,mb)\circ [b]$ olduğundan da $f_b((m))\circ f_b([\infty])$ dir; (∞) noktası f_b altında değişmediğinden ve $f_b : [k] \longrightarrow [k']$ biçiminde olduğundan bu nokta ile ilgili üzerinde bulunma zaten korunur∎

SONUÇ 2.2.3:

Herhangi (S,T) yarıcisminin sağ ters birleşimli olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{P}_{(S,T)}$ nin $(\infty)\circ x$ özeliğinde her x doğrusu için (x,x)-geçişken olmasıdır.

İSPAT:

Sonuç 2.2.1 gereğince $\mathbb{P}_{(S,T)}$ nin $([\infty],[\infty])$-geçişken olduğu biliniyor. Sonuç 2.2.2 ve Teorem 1.1.10 nun birleştirilmesiylede bu düzlem $([0],[0])$-geçişkendir. Oysa Teorem 1.1.9 gereğince $[\infty]\wedge[0]=(\infty)$ noktasından geçen her x doğrusu için (x,x)-geçişken olmalıdır■

YARDIMCI TEOREM 2.2.11:

(S,T) sağ ters birleşimli herhangi bir yarıcisim ve $x,y\in S, xy\neq 0$ ise

$$(1-xy)^{-1}-1^{-1}=(xy)^{-1}-1$$

dir.

TEOREM 2.2.12:

(S,T) sağ ters birleşimli herhangi bir yarıcisim olsun. (S,T) nin sol ters birleşimli olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{P}_{(S,T)}$ nin $((0,0),[0,0])$-geçişken olmasıdır.

TEOREM 2.2.13:

Herhangi bir (S,T) sağ ters birleşimli yarıcisim aynı zamanda sol ters birleşimli olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{P}_{(S,T)}$ nin Moufang (Küçük Desarguessel) olmasıdır.

İSPAT:

Sonuç 2.2.3 gereğince düzlem $(\infty)\circ x$ özeliğindeki her x doğrusu için (x,x)-geçişkendir. Özel olarak $([\infty],[\infty])$ ve $([0],[0])$-geçişkendir. Teorem 2.2.12 gereğince f kolinasyonu için $f([\infty])=[0,-1]$ olduğundan düzlem $([0,-1],[0,-1])$-geçişkendir. Böylece $[0]$, $[\infty]$, $[0,-1]$ noktadaş olmayan üç doğrunun herbiri düzlemin öteleme doğrularıdır. Dolayısıyla

Teorem 1.1.10 gereğince düzlem moufang düzlemidir∎

Çalışmanın bu 2.1 ve 2.2 kısımlarında verilen tanım, Teorem ve diğer kavramlar için [1] esas alınmıştır.

2.3. ALTERNE YARICİSİMLER VE MOUFANG DÜZLEMLERİ

TANIM 2.3.1:

Bir $(S,+,.)$ düzlemsel halkasının bir alterne halka olması için gerek ve yeter koşul

1) Her $a,b \in S$ için $a(ab)=(aa)b$,

2) Her $a,b \in S$ için $(ab)b=a(bb)$,

kurallarını sağlayan bir yarıcisim olmasıdır. Bu kurallara sırasıyla sol ve sağ alterne kurallar denir [2].

Alterne yarıcisimlerle ilgili olarak şu özeliklerde bilinmektedir [3]:

TEOREM 2.3.1:

Her sağ ters birleşimli yarıcisim aynı zamanda alterne yarıcisimdir.

TOEREM 2.3.2:

Her alterne yarıcisim sağ ve sol ters birleşme özeliklerine de sahiptir.

SONUÇ 2.3.1:

Bir yarıcisim de sağ ters birleşme özeliği sol ters birleşme özeliğini gerektirir.

SONUÇ 2.3.2:

(S,T) yarıcisminin alterne yarıcisim olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{P}_{(S,T)}$ nin Moufang düzlemi olmasıdır.

Bir (S,+,.) alterne yarıcisminin yani Moufang düzleminin bir kısım özeliklerini topluca verelim:

1) (S,+,.) bir Abel gruptur.

2) $(S-\{0\},.)$ ters birleşimli bir yarıgruptur.

3) Her $x\in S$ için $x.0=0.x=0$ dır.

4) Her $x,y\in$ için $x(-y)=-(xy)=(-x)y$ dir.

5) Her $x\in S-\{0\}$ için $(x^{-1})^{-1}=x$ dir

6) Her $x,y\in S-\{0\}$ için

$$(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1} \quad , \quad (1-xy)^{-1}-1\ ^{-1}=(xy)^{-1}-1 \quad ,$$

$$x(xy)=(xx)y \quad , \quad (xy)y=x(yy) \ .$$

7) Her $x,y,z\in S$ için $x((yz)y)=((xy)z)y$ dir.

TEOREM 2.3.3:

Bir alterne yarıcismin herhangi iki elemanıyla üretilen altcebir birleşimlidir [3].

TEOREM 2.3.4:

A=(S,+,.) karekteristiği 2 den farklı bir alterne yarı cisim ise bu durumda ya **A** birleşimlidir ya da A kendi merkezi üzerinde bir Cayley-Dickson cebiridir [3].

Ileride EK 5.BÖLÜM de bir alterne yarıcisim örneği verilmiştir.

3. BÖLÜM

MOUFANG PROJEKTİF DÜZLEMLERİNDE KOLİNASYONLARIN ANALİTİK İNCELENMESİ.

Bu bölümde Moufang projektif düzleminin üçlü halkaları nın özeliklerinden yararlanarak düzlemin kolinasyonları analitik olarak incelenmektedir. Kolinasyonların analitik incelenmesinden önce bir boyutlu dönüşümler olan perspektiflikler ve izdüşellikler üzerinde durulmakta ve örnekler verilmektedir.

3.1. MOUFANG PROJEKTİF DÜZLEMLERİNDE BAZI PERSPEKTİFLİKLER

Herhangi bir projektif düzlemde de geçerli olan aşağıdaki dönüşümleri göz önüne alalım. Bunlar daha sonra 3.4.1 de tekrar ele alınacaktır.

ÖRNEK 3.1.1:

Bir $\mathbb{P}_{(S,T)}$ projektif düzleminde

$$\varphi : [1,0] \overset{(\infty)}{\overline{\wedge}} [0,0]$$

$$\varphi : (0,0)(1,1)(a,a)(1) \overset{(\infty)}{\overline{\wedge}} (0,0)(1,0)(a,0)(0)$$

dönüşümünü alalım.

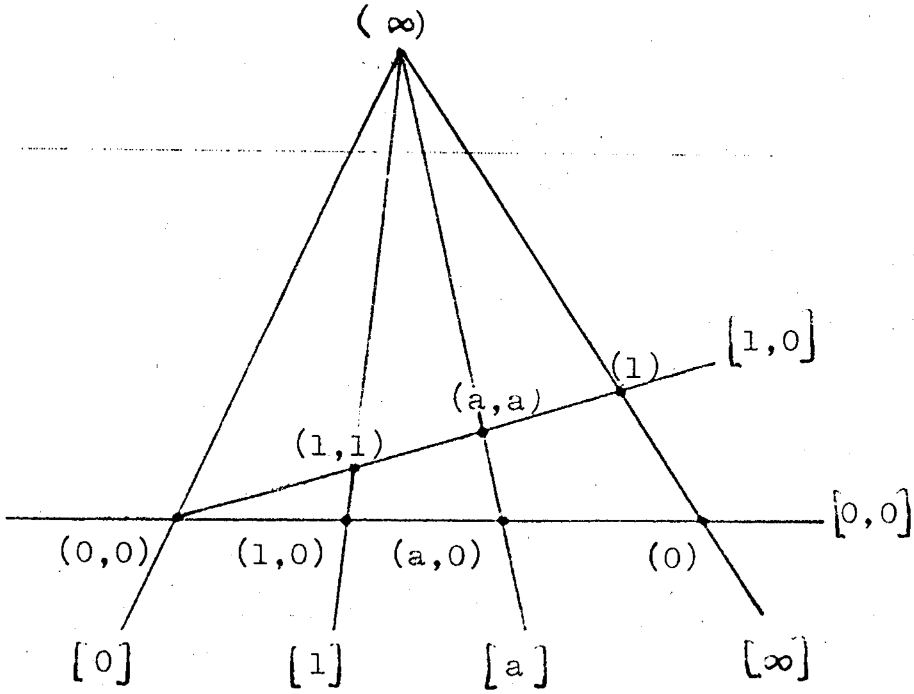
$(\infty) \not\in [1,0]$ ve $(\infty) \not\in [0,0]$ olduğundan perspektiflik tanımından

$$\varphi((0,0)) = [(\infty) \vee (0,0)] \wedge [0,0] = [0] \wedge [0,0] = (0,0)$$
$$\varphi((1,1)) = [(\infty) \vee (1,1)] \wedge [0,0] = [1] \wedge [0,0] = (1,0)$$
$$\varphi((a,a)) = [(\infty) \vee (a,a)] \wedge [0,0] = [a] \wedge [0,0] = (a,0)$$
$$\varphi((1)) = [(\infty) \vee (1)] \wedge [0,0] = [\infty] \wedge [0,0] = (0)$$

olduğundan

$$\varphi : [1,0] \overset{(\infty)}{\overline{\overline{\wedge}}} [0,0]$$

dönüşümü bir perspektifliktir (Şekil 3.1.1).



Şekil 3.1.1

ÖRNEK 3.1.2:

Bir $\mathbb{P}_{(S,T)}$ projektif düzleminde

$$\psi : [0] \overset{(-1)}{\overline{\overline{\wedge}}} [0,0]$$

$$\psi : (0,0)(0,1)(0,a)(\infty) \overset{(-1)}{\overline{\overline{\wedge}}} (0,0)(1,0)(a,0)(0)$$

dönüşümünü alalım.

$(-1)\notin[0]$ ve $(-1)\notin[0,0]$ olduğuna göre perspektiflik tanımından

$$\psi((0,0)) = [(-1)\vee(0,0)]\wedge[0,0] = [-1,0]\wedge[0,0] = (0,0)$$

$$\psi((0,1)) = [(-1)\vee(0,1)]\wedge[0,0] = [-1,1]\wedge[0,0] = (1,0)$$

$$\psi((0,a))=[(-1)\vee(0,a)]\wedge[0,0]=[-1,a]\wedge[0,0]=(a,0)$$
$$\psi((\infty))=[(-1)\vee(\infty)]\wedge[0,0]=[\infty]\wedge[0,0]=(0)$$

olduğundan

$$\psi:[0]\overset{(-1)}{\overline{\overline{\wedge}}}[0,0]$$

dönüşümü bir perspektifliktir.

ÖRNEK 3.1.3:

Bir $\mathbb{P}_{(S,T)}$ projektif düzleminde

$$\emptyset:[0,0]\overset{(0,-1)}{\overline{\overline{\wedge}}}[\infty]$$
$$\emptyset:(0,0)(1,0)(a,0)(0)\overset{(0,-1)}{\overline{\overline{\wedge}}}(\infty)(1)(a^{-1})(0)$$

dönüşümünü alalım.

$(0,-1)\not\in[0,0]$ ve $(0,-1)\not\in[\infty]$ olduğundan perspektiflik tanımından

$$\emptyset:((0,0))=[(0,-1)\vee(0,0)]\wedge[\infty]=[0]\wedge[\infty]=(\infty)$$
$$\emptyset:((1,0))=[(0,-1)\vee(1,0)]\wedge[\infty]=[1,-1]\wedge[\infty]=(1)$$
$$\emptyset:((a,0))=[(0,-1)\vee(a,0)]\wedge[\infty]=[a^{-1},-1]\wedge[\infty]=(a^{-1})$$
$$\emptyset:((0))=[(0,-1)\vee(0)]\wedge[\infty]=[0,-1]\wedge[\infty]=(0)$$

olduğundan

$$\emptyset:[0,0]\overset{(0,-1)}{\overline{\overline{\wedge}}}[\infty]$$

dönüşümü bir perspektifliktir.

3.2. MOUFANG PROJEKTİF DÜZLEMLERİNDE BAZI KOLİNASYONLAR

ÖRNEK 3.2.1:

Bir $\mathbb{P}_{(S,T)}$ Moufang projektif düzleminde

$$\begin{aligned} İ_x:(x,y)&\longrightarrow(x^{-1},yx^{-1}) &,\quad [m,k]&\longrightarrow[k,m] &, x\neq 0\\ (0,y)&\longleftrightarrow(y) &,\quad [k]&\longrightarrow[k^{-1}] &, k\neq 0\\ (\infty)&\longrightarrow(\infty) &,\quad [0]&\longleftrightarrow[\infty] & \end{aligned}$$

dönüşümü bir kolinasyondur [3].

$$İ_x((\infty))\circ İ_x([\infty]) \Leftrightarrow (\infty)\circ[0] \quad ;$$

$$İ_x((\infty))\circ İ_x([k]) \Leftrightarrow (\infty)\circ[k^{-1}] \quad ;$$

$$İ_x((y))\circ İ_x([\infty]) \Leftrightarrow (0,y)\circ[0] \Leftrightarrow 0=0 \quad ;$$

$$\begin{aligned} İ_x((y))\circ İ_x([m,k]) &\Leftrightarrow (0,y)\circ[k,m] \Leftrightarrow y=k.0+m\\ &\Leftrightarrow y=m \Leftrightarrow (y)\circ[m,k] \quad ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} İ_x((x,y))\circ İ_x([k]) &\Leftrightarrow (x^{-1},yx^{-1})\circ[k^{-1}]\\ &\Leftrightarrow x^{-1}=k^{-1} \Leftrightarrow 1=xk^{-1} \Leftrightarrow k=x\\ &\Leftrightarrow x=k \Leftrightarrow (x,y)\circ[k] \quad ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} İ_x((x,y))\circ İ_x([m,k]) &\Leftrightarrow (x^{-1},yx^{-1})\circ[k,m]\\ &\Leftrightarrow yx^{-1}=kx^{-1}+m\\ &\Leftrightarrow y=k+mx \Leftrightarrow y=mx+k\\ &\Leftrightarrow (x,y)\circ[m,k] \end{aligned}$$

olur ki bu $İ_x$ kolinasyonunun Moufang düzleminin özelikleri yardımıyla üzerinde bulunma bağıntısını koruduğunu gösterir. Birebir ve örten olduğu açıktır. Dolayısıyla $İ_x$ dönüşümü Moufang düzleminin bir kolinasyonudur.

ÖRNEK 3.2.2:

Bir $\mathbb{P}_{(S,T)}$ Moufang projektif düzleminde

$$K:(-x,y)\longrightarrow(-(x^{-1}+1)^{-1},(x^{-1}+1)^{-1}(x^{-1}y)) \quad ,x\neq 0$$
$$(0,y)\longrightarrow(0,y)$$
$$(1,y)\longrightarrow(y)$$
$$(-x)\longrightarrow(-1,x)$$
$$(\infty)\longrightarrow(\infty)$$

ve

$$K:[m,-k]\longrightarrow[m-k,-k]$$
$$[-k]\longrightarrow[-(k^{-1}+1)^{-1}] \quad ,k\neq 0$$
$$[0]\longrightarrow[0]$$
$$[1]\longrightarrow[\infty]$$
$$[\infty]\longrightarrow[-1]$$

dönüşümü bir kolinasyondur [2].

$$K((\infty))\circ K([\infty]) \Leftrightarrow (\infty)\circ[-1] \quad ;$$
$$K((\infty))\circ K([1]) \Leftrightarrow (\infty)\circ[\infty] \quad ;$$
$$K((\infty))\circ K([0]) \Leftrightarrow (\infty)\circ[0] \quad ;$$
$$K((\infty))\circ K([-k]) \Leftrightarrow (\infty)\circ[-(k^{-1}+1)^{-1}] \quad ;$$
$$K((-x))\circ K([\infty]) \Leftrightarrow (-1,x)\circ[-1] \Leftrightarrow -1=-1 \quad ;$$
$$K((-x))\circ K([m,-k]) \Leftrightarrow (-1,x)\circ[m-k,-k]$$
$$\Leftrightarrow x=(-1).(m-k)+(-k) \Leftrightarrow x=-m$$
$$\Leftrightarrow -x=m \Leftrightarrow (-x)\circ[m,-k] \quad ;$$
$$K((1,y))\circ K([1]) \Leftrightarrow (y)\circ[\infty] \quad ;$$
$$K((1,y))\circ K([m,-k]) \Leftrightarrow (y)\circ[m-k,-k] \Leftrightarrow y=m-k$$
$$\Leftrightarrow y=1.m+(-k) \Leftrightarrow (1,y)\circ[m,-k] \quad ;$$
$$K((0,y))\circ K([0]) \Leftrightarrow (0,y)\circ[0] \Leftrightarrow 0=0 \quad ;$$

$K:((0,y))\circ K([m,-k]) \Leftrightarrow (0,y)\circ[m-k,-k]$

$\Leftrightarrow y=(m-k).0-k \Leftrightarrow y=-k$

$\Leftrightarrow y=m.0-k \Leftrightarrow (0,y)\circ[m,-k]$;

$K((-x,y))\circ K([-k]) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-(x^{-1}+1)^{-1},(x^{-1}+1)^{-1}(x^{-1}y))\circ[-(k^{-1}+1)^{-1}]$

$\Leftrightarrow -(x^{-1}+1)^{-1}=-(k^{-1}+1)^{-1} \Leftrightarrow -1=-(k^{-1}+1)^{-1}.(x^{-1}+1)$

$\Leftrightarrow -(k^{-1}+1)=-(x^{-1}+1) \Leftrightarrow -k^{-1}-1=-x^{-1}-1$

$\Leftrightarrow -x=-k \Leftrightarrow (-x,y)\circ[-k]$;

$K((-x,y))\circ K(m,-k) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-(x^{-1}+1)^{-1},(x^{-1}+1)^{-1}(x^{-1}y))\circ[m-k,-k]$

$\Leftrightarrow (x^{-1}+1)^{-1}(x^{-1}y)=-(x^{-1}+1)^{-1}(m-k)+(-k)$

$\Leftrightarrow (x^{-1}y)=-(m-k)+(x^{-1}+1)(-k)$

$\Leftrightarrow x^{-1}y=-m+k-x^{-1}k -k \Leftrightarrow x^{-1}y=-m-x^{-1}k$

$\Leftrightarrow y=-xm-k \Leftrightarrow y=(-x).m+(-k) \Leftrightarrow (-x,y)\circ[m,-k]$

olur ki bu K kolinasyonunun Moufang düzleminin özelikleri yardımıyla üzerinde bulunma bağıntısını koruduğunu gösterir. Dolayısıyla K , $\mathbb{P}_{(S,T)}$ Moufang düzleminin bir kolinasyonudur.

ÖRNEK 3.2.3:

Bir $\mathbb{P}_{(S,T)}$ Moufang projektif düzleminde

$$
\begin{aligned}
T_{a,b}:(x,y) &\longrightarrow (x+a,y+b) \quad ; \quad [m,k] \longrightarrow [m,-ma+k+b] \\
(x) &\longrightarrow (x) \quad ; \quad [k] \longrightarrow [k+a] \\
(\infty) &\longrightarrow (\infty) \quad ; \quad [\infty] \longrightarrow [\infty]
\end{aligned}
$$

dönüşümü bir kolinasyondur [3].

$$T_{a,b}((\infty))\circ T_{a,b}([\infty]) \Leftrightarrow (\infty)\circ[\infty] \quad ;$$

$$T_{a,b}((\infty))\circ T_{a,b}([k]) \Leftrightarrow (\infty)\circ[k+a] \quad ;$$

$$T_{a,b}((x))\circ T_{a,b}([\infty]) \Leftrightarrow (x)\circ[\infty] \quad ;$$

$$T_{a,b}((x))\circ T_{a,b}([m,k]) \Leftrightarrow (x)\circ[m,-ma+k+b]$$
$$\Leftrightarrow x=m \Leftrightarrow (x)\circ[m,k] \quad ;$$

$$T_{a,b}((x,y))\circ T_{a,b}([k]) \Leftrightarrow (x+a,y+b)\circ[k+a]$$
$$\Leftrightarrow x+a=k+a \Leftrightarrow x=k \Leftrightarrow (x,y)\circ[k] \quad ;$$

$$T_{a,b}((x,y))\circ T_{a,b}([m,k]) \Leftrightarrow (x+a,y+b)\circ[m,-ma+k+b]$$
$$\Leftrightarrow y+b=m.(x+a)+(-ma)+k+b$$
$$\Leftrightarrow y+b=mx+ma-ma+k+b$$
$$\Leftrightarrow y=mx+k \Leftrightarrow (x,y)\circ[m,k]$$

olur ki bu $T_{a,b}$ dönüşümünün Moufang düzleminin özelikleri yardımıyla üzerinde bulunma bağıntısını koruduğunu gösterir. Birebir ve örten olduğu açıktır. Dolayısıyla $T_{a,b}$ dönüşümü Moufang düzleminin bir kolinasyonudur.

ÖRNEK 3.2.4:

Bir $\mathbb{P}_{(S,T)}$ Moufang projektif düzleminde

$$\begin{array}{lll} K_a:(x,y)\longrightarrow(a^{-1}xa,ya) & ; & [m,k]\longrightarrow[ma,ka] \\ (x)\longrightarrow(ya) & ; & [k]\longrightarrow[a^{-1}ka] \\ (\infty)\longrightarrow(\infty) & ; & [\infty]\longrightarrow[\infty] \end{array}$$

dönüşümü bir kolinasyon değildir [3].

$$K_a((\infty))\circ K_a([\infty]) \Leftrightarrow (\infty)\circ[\infty] \quad ;$$

$$K_a((\infty))\circ K_a([k]) \Leftrightarrow (\infty)\circ[a^{-1}ka] \quad ;$$

$$K_a((y))\circ K_a([\infty]) \Leftrightarrow (ya)\circ[\infty] \quad ;$$

$$K_a((y))\circ K_a([m,k]) \Leftrightarrow (ya)\circ[ma,ka] \Leftrightarrow ya=ma$$
$$\Leftrightarrow y=m \Leftrightarrow (y)\circ[m,k] \quad ;$$

$$K_a((x,y)) \circ K_a([k]) \Leftrightarrow (a^{-1}xa, ya) \circ [a^{-1}ka]$$
$$\Leftrightarrow a^{-1}xa = a^{-1}ka \Leftrightarrow xa = ka$$
$$\Leftrightarrow x = k \Leftrightarrow (x,y) \circ [k] \quad ;$$
$$K_a((x,y)) \circ K_a([m,k]) \Leftrightarrow (a^{-1}xa, ya) \circ [ma, ka]$$
$$\Leftrightarrow ya = (ma)(a^{-1}xa) + ka$$

olur ki bu durumda K_a dönüşümünün üzerinde bulunma bağıntısını koruması için çarpımın birleşme özeliğine ihtiyaç vardır. Moufang projektif düzlemi ise çarpmaya göre birleşimli değildir. Dolayısıyla K_a, Moufang düzleminin bir kolinasyonu değildir.

ÖRNEK 3.2.5:

Bir $\mathbb{P}_{(S,T)}$ Moufang projektif düzleminde

$$\begin{aligned} U:(x,y) &\longrightarrow (s^{-1}xs, s^{-1}ys) \;, & [m,k] &\longrightarrow [s^{-1}ms, s^{-1}ks] \\ (y) &\longrightarrow (s^{-1}ys) \;, & [k] &\longrightarrow [s^{-1}ks] \\ (\infty) &\longrightarrow (\infty) \;, & [\infty] &\longrightarrow [\infty] \end{aligned}$$

dönüşümü bir kolinasyon değildir.

$$U((\infty)) \circ U([\infty]) \Leftrightarrow (\infty) \circ [\infty] \quad ;$$
$$U((\infty)) \circ U([k]) \Leftrightarrow (\infty) \circ [s^{-1}ks] \quad ;$$
$$U((y)) \circ U([\infty]) \Leftrightarrow (s^{-1}ys) \circ [\infty] \quad ;$$
$$U((y)) \circ U([m,k]) \Leftrightarrow (s^{-1}ys) \circ [s^{-1}ms, s^{-1}ks]$$
$$\Leftrightarrow s^{-1}ys = s^{-1}ms \Leftrightarrow ys = ms$$
$$\Leftrightarrow y = m \Leftrightarrow (y) \circ [m,k] \quad ;$$
$$U((x,y)) \circ U([k]) \Leftrightarrow (s^{-1}xs, s^{-1}ys) \circ [s^{-1}ks]$$
$$\Leftrightarrow s^{-1}xs = s^{-1}ks \Leftrightarrow x = k \Leftrightarrow (x,y) \circ [k] \;;$$

$$U((x,y))\circ U([m,k]) \Leftrightarrow (s^{-1}xs, s^{-1}ys)\circ [s^{-1}ms, s^{-1}ks];$$

$$\Leftrightarrow s^{-1}ys=(s^{-1}ms)(s^{-1}xs)+s^{-1}ks$$

$$\Leftrightarrow ys=s.\ (s^{-1}ms)(s^{-1}xs)\ +ks$$

olur ki bu durumda U dönüşümünün üzerinde bulunma bağıntısını koruması için çarpımın birleşme özeliğine ihtiyaç vardır. Moufang projektif düzlemi ise çarpmaya göre birleşimli değildir. Dolayısıyla U, Moufang düzleminin bir kolinasyonu değildir.

ÖRNEK 3.2.6:

Bir $\mathbb{P}_{(S,T)}$ Moufang projektif düzleminde

$$\begin{array}{llll}
T_{a,b}: & (x,y)\longrightarrow(x+a,y+b) & , & [m,k]\longrightarrow[m,-ma+k+b] \\
 & (x)\longrightarrow(x) & , & [k]\longrightarrow[k+a] \\
 & (\infty)\longrightarrow(\infty) & , & [\infty]\longrightarrow[\infty] \\
 & & & \\
R_a: & (x,y)\longrightarrow(xa,aya & , & [m,k]\longrightarrow[am,aka] \quad ,a\neq 0 \\
 & (x)\longrightarrow(ax) & , & [k]\longrightarrow[ka] \\
 & (\infty)\longrightarrow(\infty) & , & [\infty]\longrightarrow[\infty] \\
 & & & \\
S_{\alpha,\beta}: & (x,y)\longrightarrow(x\beta,y\alpha) & , & [m,k]\longrightarrow[m\alpha\beta^{-1},k] \\
 & (x)\longrightarrow(x\alpha\beta^{-1}) & , & [k]\longrightarrow[k] \\
 & (\infty)\longrightarrow(\infty) & , & [\infty]\longrightarrow[\infty] \\
 & & & \\
F_a: & (x,y)\longrightarrow(axa,ya) & , & [m,k]\longrightarrow[ma^{-1},ka] \quad ,a\neq 0 \\
 & (x)\longrightarrow(xa^{-1}) & , & [k]\longrightarrow[aka] \\
 & (\infty)\longrightarrow(\infty) & , & [\infty]\longrightarrow[\infty]
\end{array}$$

dönüşümleride Moufang düzlemleri için birer kolinasyondur[4].

Moufang projektif düzlemlerinin herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta üzerinde geçişken olduğu dolaylı olarak bilinmekle birlikte bunun direk bir geometrik ispatı henüz verilememiştir. Aşağıdaki Teoremle bu gerçeğin doğrudan bir cebirsel ispatı verilmektedir.

TEOREM 3.2.1:

$\mathbb{P}_{(S,T)}$ Moufang düzleminin $G(\mathbb{P})$ grubu dört nokta üzerinde geçişkendir. [4]

İSPAT:

A,B,C,D noktaları $\mathbb{P}_{(S,T)}$ Moufang düzleminde herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta olsun. Bu noktaları sırayla $(0),(\infty),(1,1),(0,0)$ koordinatlama noktalarına dönüştüren bir kolinasyonun varlığının gösterilmesi yeterlidir. A,B,C noktalarını sırayla $(0),(\infty),(0,1)$ noktalarına dönüştüren bir kolinasyon vardır. Bu kolinasyon $\emptyset$ olsun. $AD \wedge BC = E$ olmak üzere $\emptyset(E) \in (\infty)(0,1)$ dir. Böylece $\emptyset(E)=(0,b) \ni b \neq 1,\ b \in R$. Benzer olarak $\emptyset(D) \in (0)(0,b)$ ve $\emptyset(D)=(a,b) \ni a \neq 0,\ a \in R$. Buradan

$$\emptyset : A,B,C,D \longrightarrow (0),(\infty),(0,1),(a,b)$$

olur.

$$T_{-a,-b} : (0),(\infty),(0,1),(a,b) \longrightarrow (0),(\infty),(-a,1-b),(0,0)$$

$$R_{\bar{a}} : (0)(\infty)(-a,1-b)(0,0) \longrightarrow (0)(\infty)(-a\bar{a},\bar{a}(1-b)\bar{a})(0,0)$$

$$\longrightarrow (0),(\infty),(-n(a),c),(0,0) \ni n(a)=a\bar{a},\ c=\bar{a}(1-b)\bar{a} \qquad \text{(I)}$$

$$S_{1,(-n(a))^{-1}} : (0),(\infty),(-n(a),c),(0,0)$$

$$\longrightarrow (0),(\infty),(-n(a).(-n(a))^{-1},c.1),(0,0)$$

$$\longrightarrow (0),(\infty),(1,c),(0,0)$$

bulunur.

Şimdi R de (R Cayley-Dickson cebri) $t(x)=\frac{1}{2}\cdot(x+\bar{x})$ şeklinde tanımlanmış lineer formu düşünelim. Bu durumda t(c) için iki hal mümkündür.

1.HAL: $t(c)=0$, $(c^2=-n(c))$ ise

$$F_c:(0),(\infty),(1,c),(0,0)\longrightarrow(0),(\infty),(c.1.c,c.c),(0,0)$$

$$\longrightarrow(0),(\infty),(c^2,c^2),(0,0)$$

$$\longrightarrow(0),(\infty),(-n(c),-n(c)),(0,0)$$

olur. Buradanda

$$S_{(-n(c))^{-1},(-n(c))^{-1}}:(0),(\infty),(-n(c),-n(c)),(0,0)$$

$$\longrightarrow(0),(\infty),(-n(c).(-n(c))^{-1},-n(c).(-n(c))^{-1}),(0,0)$$

$$\longrightarrow(0),(\infty),(1,1),(0,0)$$

bulunur.

2.HAL: $t(c)\neq0$ ise $d\neq0$, $d\in R$ olmak üzere $t(cd)=0=t(d)$ olacak şekilde bir tek d vardır.

$$F_d:(0),(\infty),(1,c),(0,0)\longrightarrow(0),(\infty),(d.1d,c.d),(0,0)$$

$$\longrightarrow(0),(\infty),(d^2,cd),(0,0)$$

$$\longrightarrow(0),(\infty),(-n(c),cd),(0,0)$$

dir. Böylece (I) ve 1.HAL den yararlanarak

$$S_{(-n(c))^{-1},(cd)^{-1}}:(0),(\infty),(-n(c),cd),(0,0)$$

$$\longrightarrow(0),(\infty),(1,1),(0,0)$$

bulunur ■

3.3. MOUFANG PROJEKTİF DÜZLEMLERİNDE İZDÜŞELLİKLER

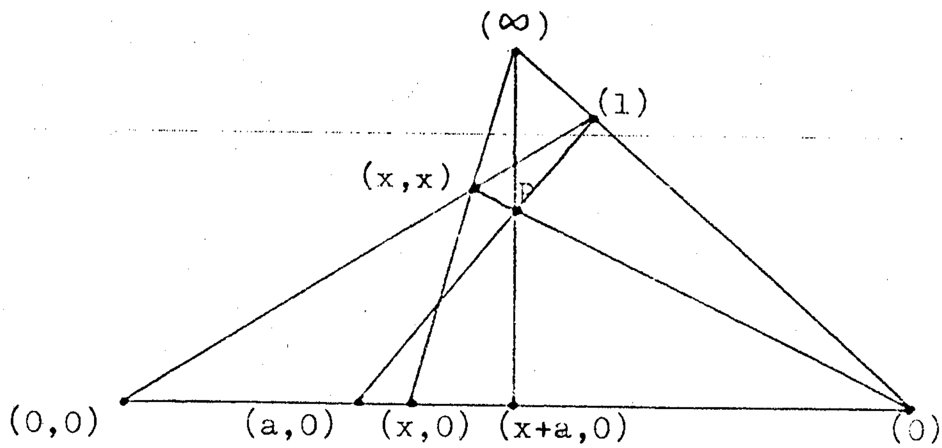
Bir $\mathbb{P}_{(S,T)}$ Moufang projektif düzleminde

$$t_2:(1)(P)(a,0)\ldots \overset{(0)}{\underset{\wedge}{=}} (1)(x,x)(0,0)\ldots$$

$$t_3:[1,0] \overset{(\infty)}{\underset{\wedge}{=}} z$$

$$:(1)(x,x)(0,0)\ldots \overset{(\infty)}{\underset{\wedge}{=}} (0)(x,0)(0,0)\ldots$$

perspektifliklerini alalım.(Şekil 3.3.1).



Şekil 3.3.1

Bu durumda

$$t_a = t_3 . t_2 . t_1$$

izdüşelliği kurulabilir. Buna göre

$$t_a:z \overset{(\infty)}{\underset{\wedge}{=}} [1,-a] \overset{(0)}{\underset{\wedge}{=}} [1,0] \overset{(\infty)}{\underset{\wedge}{=}} z$$

$$t_a=z \overset{(\infty)}{\underset{\wedge}{=}} [1,0] \overset{(0)}{\underset{\wedge}{=}} [1,-a] \overset{(\infty)}{\underset{\wedge}{=}} z$$

olur. Bunun anlamı

$$t_a:(0)(x+a,0)(a,0) \longrightarrow (0)(x,0)(0,0)$$

dır. Yani

$$t_a:z \dashrightarrow z$$

dir. Gerçekten bu izdüşelliğin z doğrusunun noktalarını yine z doğrusunun noktalarına dönüştürdüğünü gösterebiliriz:

$$t_a = t_3 . t_2 . t_1$$

olduğundan

$$t_a((0)) = t_3(t_2(t_1(0))) = t_3(t_2(1)) = t_3(1) = (0)$$

$$t_a((x+a,0)) = t_3(t_2(t_1(x+a,0))) = t_3(t_2(P)) = t_3(x,x) = (x,0)$$

$$t_a((a,0)) = t_3(t_2(t_1(a,0))) = t_3(t_2(a,0)) = t_3(0,0) = (0,0)$$

olur. t_a izdüşelliğinin üzerinde bulunma bağıntısını koruduğu gösterilirse

$$t_a((0)) \circ t_a([0,0]) \Leftrightarrow (0) \circ [0,0]$$

$$t_a((x+a,0)) \circ t_a([0,0]) \Leftrightarrow (x,0) \circ [0,0] \Leftrightarrow 0=0$$
$$\Leftrightarrow 0=0.(x+a)+0 \Leftrightarrow (x+a,0) \circ [0,0]$$

$$t_a((a,0)) \circ t_a([0,0]) \Leftrightarrow (0,0) \circ [0,0] \Leftrightarrow 0=0.a+0$$
$$\Leftrightarrow (a,0) \circ [0,0]$$

olur.

Bunun yanında

$$r_a = z \overset{(\infty)}{\overline{\overline{\wedge}}} [1,-1] \overset{(0,0)}{\overline{\overline{\wedge}}} [1,-a] \overset{(\infty)}{\overline{\overline{\wedge}}} z$$

$$i = z \overset{(\infty)}{\overline{\overline{\wedge}}} [1,-1] \overset{(0,0)}{\overline{\overline{\wedge}}} [1] \overset{(1)}{\overline{\overline{\wedge}}} z$$

izdüşellikleride aynı biçimde incelenebilirler.

3.4. MOUFANG PROJEKTİF DÜZLEMLERİNDE BAZI DÖNÜŞÜMLERİN MATRİS GÖSTERİMLERİ

Bir $\mathbb{P}_{(S,T)}$ projektif düzleminde dönüşümleri matris gösterimli olarak ifade etmek için kartezyen koordinatlardan üçlü koordinatlara geçişi veren

$$f:(x,y)\longrightarrow(-x,y,1)\quad,\quad [a,b]\longrightarrow[a,1,-b]$$
$$(x)\longrightarrow(1,-x,0)\quad,\quad [a]\longrightarrow[1,0,a]$$
$$(\infty)\longrightarrow(0,1,0)\quad,\quad [\infty]\longrightarrow[0,0,1]$$

dönüşümü kullanılabilir [3]. Daha önce belirtildiği gibi her dönüşüm 3x3 tipinde karesel bir $A=(a_{ij})$ matrisi tanımlar. Bu tür dönüşümlere matris gösterimli dönüşümler denir. Moufang projektif düzlemlerinde genel olarak matris gösterimli dönüşümlerin olmadıkları bilinmektedir [3]. Şimdi Moufang düzlemlerinde bu tür dönüşümlerin var olabildiğini gösteren birkaç örnek verelim.

3.4.1. Moufang projektif düzlemlerinde matris gösterimli perspektiflikler

ÖRNEK 3.4.1.1:

Bir $\mathbb{P}_{(S,T)}$ Moufang projektif düzleminde

$$\tau:(0,0)(1,1)(a,a)(1)\ldots\overset{(\infty)}{\underset{\wedge}{=\!=}}(0,0)(1,0)(a,0)(0)\ldots$$

yani

$$\tau:(0\ 0\ 1)(-1,1,1)(-a,0,1)\ldots\overset{(0,1,0)}{\underset{\wedge}{=\!=}}(0,0,1)(-1,0,1)(-a,0,1)\ldots$$

perspektifliği

$$A=\begin{bmatrix}1+u & u & 0\\ s & s & 0\\ r & r & 1\end{bmatrix}$$

matrisi ile temsil edilir.

τ nin Moufang düzleminde bir perspektiflik olduğu daha önce örnek 3.1.1 de gösterilmişti. Şimdi A matrisi ile temsil edilebileceğini gösterelim.

$$\begin{bmatrix} 1+u & u & 0 \\ s & s & 0 \\ r & r & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathcal{T}(0,0,1)=(0,0,1)$$

$$\begin{bmatrix} 1+u & u & 0 \\ s & s & 0 \\ r & r & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathcal{T}(-1,1,1)=(-1,0,1)$$

$$\begin{bmatrix} 1+u & u & 0 \\ s & s & 0 \\ r & r & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -a \\ a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathcal{T}(-a,a,1)=(-a,0,1)$$

$$\begin{bmatrix} 1+u & u & 0 \\ s & s & 0 \\ r & r & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathcal{T}(1,-1,0)=(1,0,0)$$

olur. Ayrıca S , $\lambda \neq 0$ için

$$\begin{bmatrix} 1+u & u & 0 \\ s & s & 0 \\ r & r & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathcal{T}(0,0,\lambda)=(0,0,\lambda)$$

$$\begin{bmatrix} 1+u & u & 0 \\ s & s & 0 \\ r & r & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathcal{T}(-\lambda,\lambda,\lambda)=(-\lambda,0,\lambda)$$

$$\begin{bmatrix} 1+u & u & 0 \\ s & s & 0 \\ r & r & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -\lambda a \\ \lambda a \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda a \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathcal{T}(-\lambda a,\lambda a,\lambda)=(-\lambda a,0,\lambda)$$

$$\begin{bmatrix} 1+u & u & 0 \\ s & s & 0 \\ r & r & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathcal{T}(\lambda,-\lambda,0)=(\lambda,0,0)$$

dir. A matrisi ile temsil edilen perspektifliğin doğrulara etkisi de

$$[1,1,0].A^{-1}=[0,1,0] \Leftrightarrow [1,1,0]=[0,1,0].A$$

olduğundan

$$[0,1,0].\begin{bmatrix} 1+u & u & 0 \\ s & s & 0 \\ r & r & 1 \end{bmatrix} = [0+s+0,0+s+0,0+0+0] = [s,s,0]$$

$$= s.[1,1,0]$$

$$\equiv [1,1,0]$$

$$[0,\lambda,0].\begin{bmatrix} 1+u & u & 0 \\ s & s & 0 \\ r & r & 1 \end{bmatrix} = [0+\lambda s+0,0+\lambda s+0,0+0+0] = [\lambda s,\lambda s,0]$$

$$= \lambda s.[1,1,0]$$

$$\equiv [1,1,0]$$

biçimindedir. Yani A matrisi ve τ dönüşümü $[1,1,0]$ doğrusu ve bunun üzerindeki noktalara aynı etkiyi yaparlar. Dolayısıyla A matrisi τ yi temsil etmekte kullanılabilir.

ÖRNEK 3.4.1.2:

Bir $\mathbb{P}_{(S,T)}$ Moufang projektif düzleminde

$$\beta:(0,0)(0,1)(0,a)(\infty)\ldots \overset{(-1)}{\underset{\wedge}{=}} (0,0)(1,0)(a,0)(0)\ldots$$

yani

$$\beta:(0,0,1)(0,1,1)(0,a,1)\ldots \overset{(1,1,0)}{\underset{\wedge}{=}} (0,0,1)(-1,0,1)(-a,0,1)\ldots$$

perspektifliği

$$B = \begin{bmatrix} u & -1 & 0 \\ w & 0 & 0 \\ q & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi ile temsil edilir.

3.4.2. Moufang projektif düzlemlerinde matris gösterimli kolinasyonlardan söz edilebilir mi?

Aşağıdaki örnek Moufang projektif düzlemlerinde kolinasyonların genel olarak matris gösterimli olmadıklarını gösterir.

ÖRNEK 3.4.2.1:

Bir $\mathbb{P}_{(S,T)}$ Moufang düzleminde

$$\begin{aligned} f:(x,y,1)&\longrightarrow(x,y+xs,1) &,\quad [a,1,b]&\longrightarrow[a-s,1,b] \\ (1,x,0)&\longrightarrow(1,x+s,0) &,\quad [1,0,b]&\longrightarrow[1,0,b] \\ (0,1,0)&\longrightarrow(0,1,0) &,\quad [0,0,1]&\longrightarrow[0,0,1] \end{aligned}$$

dönüşümü bir kolinasyondur. f matris gösterimli olamaz. Çünkü f matris gösterimli olsaydı

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & xs-sx \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi ile temsil edilmesi gerekirdi. Oysa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & xs-sx \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ sx+y+xs-sx \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y+xs \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\equiv (x,y+xs,1)$$

olur. Fakat

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & xs-sx \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x\lambda \\ y\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\lambda \\ s(x\lambda)+y\lambda+(xs-sx)\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$\equiv (x\lambda, s(x\lambda)+y\lambda+(xs)\lambda-(sx)\lambda, \lambda)$$

dir. Moufang düzleminde $s(x\lambda)\neq(sx)\lambda$ olduğundan f kolinasyonu matris gösterimli olamaz.

ÖRNEK 3.4.2.2:

$$A=\begin{bmatrix}0 & m & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},m\neq 0$$

matrisini göz önüne alarak, bu matrisle temsil edilen dönüşümü bulalım.

Bu dönüşümün noktalara etkisi

$$\begin{bmatrix}0 & m & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-x\lambda\\ y\lambda\\ \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m(y\lambda)\\ \lambda\\ -x\lambda\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & m & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\lambda\\ -x\lambda\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m(-x\lambda)\\ 0\\ \lambda\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & m & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\ \lambda\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m\lambda\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

biçiminde; doğrulara etkisi de

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ m^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

olduğundan

$$[\lambda'a,\lambda',-\lambda'b].\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ m^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=[\lambda'm^{-1},-\lambda'b,\lambda'a]$$

$$[\lambda',0,-\lambda' a]\cdot\begin{bmatrix}0&0&1\\m^{-1}&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=[0,-\lambda' a,\lambda']$$

$$[0,0,\lambda']\cdot\begin{bmatrix}0&0&1\\m^{-1}&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=[0,\lambda',0]$$

biçiminde bellidir.

Buna göre **A** matrisi ile elde edilen dönüşüm f_A ise bu dönüşüm

$$\begin{aligned}f_A:(-x,y,1)&\longrightarrow(my,1,-x)\ , & [a,1,-b]&\longrightarrow[m^{-1},-b,a]\\(1,-x,0)&\longrightarrow(-mx,0,1)\ , & [1,0,-a]&\longrightarrow[0,-a,1]\\(0,1,0)&\longrightarrow(m,0,0)\ , & [0,0,1]&\longrightarrow[0,1,0]\end{aligned}$$

olarak ifade edilir. Şimdi f_A dönüşümünün Moufang projektif düzleminde bir matris gösterimli kolinasyon olmadığını gösterelim. f_A dönüşümü Moufang projektif düzleminde matris gösterimli bir kolinasyon ise üzerinde bulunma bağıntısını koruması gerekir.

$$\begin{aligned}&f_A((-x\lambda,y\lambda,\lambda))\circ f_A([\lambda' a,\lambda',-\lambda' b])\\\Leftrightarrow\ &((m(y\lambda),\lambda,-x\lambda))\circ([\lambda' m^{-1},-\lambda' b,\lambda' a])\\\Leftrightarrow\ &(\lambda' m^{-1}).(m(y\lambda))+(-\lambda' b).(\lambda)+(\lambda' a).(-x\lambda)=0\end{aligned}$$

ifadesinde görüldüğü gibi üzerinde bulunma bağıntısının korunması için çarpma işleminin birleşme özeleğine ihtiyaç vardır. Oysa Moufang projektif düzlemi çarpma işlemine göre birleşimli değildir. Dolayısıyla f_A dönüşümü Moufang projektif düzlemi için matris gösterimli bir kolinasyon değildir.

4. BÖLÜM

CAYLEY SAYILARININ TANIMLANMASI

4.1. GİRİŞ

Çalışmanın bu bölümünde verilen tanım, teorem ve diğer tüm kavramlar için [6] esas alınmıştır.

Alterne halkalar konusunun Cayley sayıları ile başladığı ve sona erdiği söylenebilir.

Cayley sayıları ilk olarak 1845 te ortaya konmuştur. Bu sayılar o zaman ne Cayley sayıları ne de "C" sayıları olarak isimlendirilmemiştir. 4.4 te bölümlü alterne halkaların sınıflandırılmasında aktüel olarak gözükünceye kadar bu sayıları tanımlamayacağız. Cayley sayıları, kuaterniyonların, kompleks ve reel sayıların özeliklerinin birçoğunu sağlar. Ancak burada çarpım genelde birleşimli değildir. Yani x,y,z Cayley sayıları için

$$(xy)z \neq x(yz)$$

dir.

4.2. TANIMLAR VE İLK HESAPLAR

(x,y,z) birleştiricisi çarpmanın birleşimli kuralına uymayan bir lineer fonksiyondur. Birleştirici

$$(x,y,z)=(xy)z-x(yz)$$

olarak tanımlanır. Benzer olarak (x,y) değiştiricisi

$$(x,y)=xy-yx$$

olarak tanımlanır. S bir alterne halka ise $x,y \in S$ için

$$(x,y,y)=0=(y,y,x) \qquad \text{(I)}$$

dir.

ÖNERME 4.2.1:

(x,y,z) birleştiricisi üçlü değişkende ters simetrik ve değişkenlerden herhangi ikisinin aynı olması halinde daima sıfıra eşittir.

İSPAT:

$$(x,y+z,y+z)=0 \quad \text{ve} \quad (y+z,y+z,x)=0$$

olduklarından

$$(x,y,z)+(x,z,y)=0 \text{ ve } (z,y,x)+(y,z,x)=0$$

dır. Buradan

$$(x,y,z)=-(x,z,y)=(z,x,y)=-(z,y,x)$$

olur. Buradan (x,y,z) ters simetriktir. (I) eşitliğinden ise $(x,x,y)=0$ olduğu görülür∎

Şimdi S alterne halkası üzerinde

$$f(w,x,y,z)=(wx,y,z)-x(w,y,z)-(x,y,z)w$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonunu göz önüne alalım.

ÖNERME 4.2.2:

$f(w,x,y,z)$ fonksiyonu ters simetrik, dört değişkende lineer ve herhangi iki değişkenin eşit olması halinde sıfıra eşit olur.

İSPAT:

$f(w,x,y,z)$ fonksiyonu birleştiricinin lineerliği ve f nin tanımından lineer olmalıdır. Bu f fonksiyonu biraz fazla şaşırtıcı olan ters simetrik olabilir. Bir keyfi halkada

$$g(w,x,y,z)=(wx,y,z)-(w,xy,z)+(w,x,yz) \qquad \text{(II)}$$
$$-w(x,y,z)-(w,x,y)z=0$$

olduğu ispat edilebilir. Önerme 4.2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}-f(z,w,x,y)&=g(w,x,y,z)-f(z,w,x,y)\\ &=(wx,y,z)-(w,xy,z)+(w,x,yz)-w(x,y,z)\\ &\quad-(w,x,y)z-(zw,x,y)+w(z,x,y)+(w,x,y)z\\ &=(wx,y,z)-(xy,z,w)+(yz,w,x)-(zw,x,y)\end{aligned}$$

dir. Diğer bir deyişle

$$-f(z,w,x,y)=(wx,y,z)-(xy,z,w)+(yz,w,x)-(zw,x,y)$$

dir. Diğer yandan w,x,y,z harflerindeki sıra değişikliği fonksiyonu negatif olarak değiştirir ve

$$f(w,x,y,z)=-f(z,w,x,y)$$

olur. f fonksiyonunun tanımından da

$$f(w,x,y,y)=(wx,y,y)-x(w,y,y)-(x,y,y)w$$

yazılır. Burada (I) özdeştiği kullanılırsa

$$f(w,x,y,y)=0$$

olarak bulunur. $f(w,x,y,y)=0$ eşitliğinde y yerine $y+z$ konursa

$$f(w,x,y,z)=-f(w,x,z,y)$$

elde edilir ki bu da f nin ters simetrikliğini verir ∎

Aşağıdaki üç özdeşlik önerme 4.2.2 nin sonuçlarıdır ve onların ispatları kolaylıkla verilebilir.

$$(x^2,y,z)=(x,y,z)x+x(x,y,z) \qquad \text{(III)}$$

$$(x,xy,z)=(x,y,xz)=(x,y,z)x \qquad \text{(IV)}$$

$$(x,yx,z)=(x,y,zx)=x(x,y,z) \qquad (V)$$

ÖNERME 4.2.3:

$u=(x,y,z)$ ve $v=(x,y)$ ise $(u,x,y)=vu=-uv$ dir.

İSPAT :

(III) ve (IV) sırasıyla kullanılarak

$$(x^2,y,yz)=(x^2,y,z)y=(xu)y+(ux)y$$

yazılır. Aynı zamanda bu aynı iki eşitlik kullanılarak

$$(x^2,y,yz)=x(x,y,yz)+(x,y,yz)x$$
$$=x(uy)+(uy)x$$

olur, fakat sıraları terstir. Buradan

$$(xu)y+(ux)y=x(uy)+(uy)x$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$(x,u,y)=(xu)y-x(uy)=(uy)x-(ux)y$$

dir. Buradan da

$$(uy)x-(ux)y=(u,y,x)+u(yx)-(u,x,y)-u(xy)$$
$$=-2(u,x,y)-uv$$

olur. Netice olarak

$$(x,u,y)=-2(u,x,y)-uv$$

olduğu gösterilir. $(x,u,y)=-(u,x,y)$ olduğundan önerme 4.2.1 in bir sonucu olarak

$$(u,x,y)=-uv$$

bulunur. Benzer olarak (x^2,y,zy) nin iki genişlemesinden hareketle

$$(u,x,y)=vu$$

bulunur■

TANIM 4.2.1:

S nin N çekirdeği, S de $(n,S,S)=0$ özeliğine sahip bütün n elemanlarının kümesidir. S nin C merkezi ise N de $(c,S)=0$ özeliğine sahip bütün c elemanlarının oluşturduğu kümedir.

N nin S de bir alt halka olduğu önerme 4.2.2 nin kullanılmasıyla kolaylıkla ispatlanır. Kullanışlı diğer bir özdeşlik de değiştirici ve birleştiricileri birlikte kapsar. Şöyleki:

$$\begin{aligned}(xy,z)-x(y,z)-(x,z)y &= (xy)z-z(xy)-x(yz)+x(zy)-(xz)y \\ &\quad +(zx)y \\ &= (x,y,z)-(x,z,y)+(z,x,y) \\ &= 3(x,y,z)\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$(xy,z)-x(y,z)-(x,z)y=3(x,y,z) \qquad \text{(VI)}$$

elde edilir.

Buradan x ve y C ye ait ve z de S nin herhangi bir elemanı ise (VI) nın bir sonuçu olarak $(xy,z)=0$ bulunur. f nin tanımından $f(x,y,z,w)=0$ dır. O halde C, N nin bir althalkası olmalıdır.

Dikkat edilirse $N=S \Leftrightarrow S$ bir birleşimli halka ve $C=S \Leftrightarrow S$ birleşimli ve değişimli bir halkadır.

4.3. BÖLÜMLÜ ALTERNE HALKALARIN ANA ÖZELİKLERİ

Bu altbölümde S nin bir bölümlü alterne halkayı gösterdiği varsayılacaktır. Yani S, her $x,y \in S$ için

$x.y=0$ ise $x=0$ veya $y=0$

özeliğine sahiptir. Şimdi S nin " 1 " birim elemanına sahip olduğu gösterilebilir. Varsayalım ki a, S nin sıfırdan farklı bir elemanı olsun. O zaman S de bir $b\neq 0$ elemanı olmalıdır. Şöyleki $b.a=a$ ve dolayısıyla

$$b^2a=b(ba)=ba$$

dır. Buna göre $b^2=b$ olduğundan, $(b^2-b).a=0$ olur. Bu halde

$$(b^2-b)x=b(bx-x)=0$$

dır. Buradan $bx=x$, $x\in S$ bulunur. Buna benzer olarak

$$x(b^2-b)=(xb-x)b=0$$

ve buradan $xb=x$ olur. O halde b, S nin bir tek "1" elemanı olmalıdır.

y, $yx=1$ sağlarsa $0=(x,y,x)=(xy)x-x=(xy-1)x$ olur. $x\neq 0$ olduğundan $xy=1$ olmalıdır. Böylece her $x\neq 0$ için x^{-1} ile gösterilen bir tersi vardır. S de keyfi bir z için

$$\begin{aligned}(x,x^{-1},z)x&=(x,xx^{-1},z)\\&=(x,1,z)\\&=0\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $(x,x^{-1},z)=0$ olur. Konu boyunca $1+1\neq 0$ varsayacağız. Şimdi bir bölümlü alterne halkanın çekirdeğinin bazı özelikleri belirlenebilir.

ÖNERME 4.3.1:

Ya $N=S$ ya da $N=C=$Cisimdir.

İSPAT :

$n,n'\in N$, $w,x,y,z\in S$ elemanları keyfi olarak seçilmiş olsun.

$$f(x,y,z,n)=(xy,z,n)-y(x,z,n)-(y,z,n)x=0$$

olduğu aşikardır. Önerme 4.2.2 den $f(n,x,y,z)=0$ dır. Fakat

$$f(n,x,y,z)=(nx,y,z)-(x,y,z)n-x(n,y,z)$$

dir. Neticede $(nx,y,z)=(x,y,z)n$ olur. Buna benzer olarak da $(xn,y,z)=n(x,y,z)$ bulunur. (II) nin bir sonuçu olarak

$$\begin{aligned} g(x,n,y,z)&=(xn,y,z)-(x,ny,z)+(x,n,yz)-x(n,y,z)\\ &\quad-(x,n,y)z=0\\ &=(xn,yz)-(x,ny,z)=0 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$(x,ny,z)=(ny,z,x)=(y,z,x)n=(x,y,z)n$$

dir. Böylece $n(x,y,z)=(x,y,z)$ ve yine $((n,x),y,z)=0$ olur. Buradan da $((N,S),S,S)=0$ bulunur. Öyleki $(N,S)\subset N$ dir. (VI) nedeniyle

$$(wx,n)=w(x,n)+(w,n)x+3(w,x,n)=w(x,n)+(w,n)x$$

dir. Bu durumda

$$((wx,n),y,z)=(w(x,n),y,z)+((w,n)x,y,z)=0$$

olur. $(x,n),(w,n)$ N, $(w(x,n),y,z)=(x,n)(w,y,z)$ ve sonra da $((w,n)x,y,z)=(w,n)(x,y,z)$ den.

$$(x,n)(w,y,z)+(w,n)(x,y,z)=0$$

elde ederiz. $1+1\neq 0$ varsaydığımızdan $w=x$ alabiliriz. Bu durumda $2(x,n)(x,y,z)=0$ dır. $x\in N$ ise $(x,y,z)\neq 0$ olacak şekilde her zaman y,z vardır. Netice olarak $(x,n)=0$ dır. Öte yandan $w=n'$ olsun. Bu halde $(n,n')(x,y,z)=0$ olur. $N\neq S$ varsayalım. O zaman $(n,n')=0$ dır. Böylece ne bu ne de öteki halde

$(S,n)=0$ ve buradan $N=C$ dir. $1 \in C$, $C \neq 0$. C nin değişimli ve birleşimli ve S nin bir althalkası olduğu görülmüş olur. Böylece her $c \in C$, $c^{-1} \in C$ olduğunun gösterilmesi önermenin ispatını tamamlarki bu oldukça kolaydır■

ÖNERME 4.3.2:

$N \neq S$ ve $(a,b,S)=0$ ise $(a,b)=0$ dır.

İSPAT:

$(a,b,S)=0$ olduğundan $f(a,b,S,S)=0$ olduğu görülür. Çünkü

$$f(x,y,a,b)=(xy,a,b)-y(x,a,b)-(y,a,b)x=0$$

dır. $r,s \in S$ ise

$$g(a,b,r,s)+f(b,r,s,a)-f(b,a,r,s)=0$$

$$(ab,r,s)-(a,br,s)+(a,b,rs)-a(b,r,s)-(a,b,r)s$$

$$+(br,s,a)-r(b,s,a)-(r,s,a)b-(ba,r,s)+a(b,r,s)$$

$$+(a,r,s)b=0$$

$$((a,b),r,s)=0$$

olur. Buradan $(a,b) \in N$. Fakat $(a,b,S)=0$ olduğundan (IV) den yine $(a,ab,S)=0$ doğru olmalıdır. O zaman b yerine geçen ab ile aynı düşünceyle $(a,ab) \in N$ yazılır. Buna göre

$$\begin{aligned}(a,ab)&=a(ab)-(ab)a\\&=a(ab)-a(ba)\\&=a(a,b)\end{aligned}$$

dir. önerme 4.3.1 den dolayı $N=C$ olur. Burada $(a(a,b),b)=0$ dır. Öte yandan (VI) özdeşliği $(a(a,b),b)=(a,b)^2$ ifade eder ve $(a,b) \in C$ olur. Böylece $(a,b)^2=0$ ve S bir bölümlü halka olduğundan $(a,b)=0$ dır. Bu ise önermenin ispatını tamamlar■

ÖNERME 4.3.3:

S değişimli ise birleşimli ve dolayısıyla bir cisimdir.

İSPAT:

$S \neq N$ olduğunu varsayalım. (III) den $(x^2,x,S)=0$ dır. Bu durumda $f(x^2,x,S,S)=0$ olduğu gösterilebilir. (III) le beraber değişimlilik kullanılarak

$$(x^3,y,z)=f(x^2,x,y,z)+(x,y,z)x^2+x(x^2,y,z)$$
$$=2x.x(x,y,z)+x^2(x,y,z)$$

yazılır. $x.x(x,y,z)=x^2(x,y,z)$ olduğundan $(x^3,y,z)=3x^2(x,y,z)$ olduğunu göstermiş oluruz. Diğer yandan değişimlilikle beraber (VI) özdeşliği $3(x,y,z)=0$ olduğunu gösterir. $S \neq N$ olduğundan $3=0$ olmalıdır. Netice olarak her $x \in S$ için

$$(x^3,y,z)=0 \quad , \quad x^3 \in N=C$$

elde edilir. $a,b \in S$ ise değişimlilik nedeniyle $(a-b)^3=a^3-b^3$ ve gerçekten $3=0$ dır. $a=(xy)z$ ve $b=x(yz)$ alırsak

$$u^3= (xy)z\ ^3- \ x(yz)\ ^3=(xy)^3z^3-x^3(yz)^3$$
$$=(x^3y^3)z^3-x^3(y^3z^3)=0 \quad , \quad x^3 \in N.$$

Böylece $u^3=0$ olduğunu göstermiş oluruz. Buradan $u=0$ olur. Bu ise $S=N$ varsayımla çelişir. Böylece önermenin ispatı tamamlanır ∎

ÖNERME 4.3.4:

a,b,c ikişer ikişer değişimli olmayan elemanlarsa a,b,c nin her δ permutasyonu için

(1) $\delta(a).\delta(b)\delta(c)=sgn\,\delta(a.bc)$

(2) $\delta(a)\delta(b).\delta(c)=sgn\,\delta(ab.c)$

dır.

İSPAT:

$(a,b,c)+(b,a,c)=0$ olduğundan

$$(a,b,c)+(b,a,c)-(ab+ba)c=0$$

$$(ab)c-a(bc)+(ba)c-b(ac)-(ab)c-(ba)c=0$$

$$-a(bc)-b(ac)=0$$

olur. Dolayısıyla $a(bc)=-b(ac)$ dir. Böylece (1) ispat edilmiş olur. Buna benzer olarak (2) nin ispatı da yapılır∎

ÖNERME 4.3.5:

$v=(x,y)$ ise $v^2 \in N$ dir.

İSPAT:

z yerine (x,z) konursa önerme 4.2.3 den

$$v(x,y,(x,z))+(x,y,(x,z))v=0 \quad ,$$

(4) ve (5) in bir sonucu olarak, buradan

$$(x,y,(x,z))=(x,(x,y),z)=(x,v,z)$$

olur. (III) kullanılarak

$$(x,v^2,z)=v(x,v,z)+(x,v,z)v=0$$

dır. z tekrar yerine konulabileceğinden $f(v^2,x,S,S)=0$ olur. Diğer yandan bu özdeşlik

$$(v^2,xy,z)=-f(v^2,x,y,z)+y(v^2,x,z)+(v^2,y,z)x$$

yazılabilir. Buradan $(v^2,xy,z)=0$ olur. Geçen özdeşlikte iki elemanın keyfi bir çarpımı yerine z konulabilir. Öyleki $f(v^2,xy,S,S)=0$ dır. $r,s \in S$ keyfi elemanları için (III) ve (IV) ile (V) kullanılarak

$$(v^2,(x,r,y),s)=v(v,(x,r,y),s)+(v,(x,r,y),s)v$$
$$=(v,v(x,r,y)+(x,r,y)v,s)$$

olur. Önerme 4.2.3 ün bir sonucu olarak $v(x,r,y)+(x,r,y)v=0$ dır. Buradan $(v^2,(x,r,y),s)=0$ bulunur. Şimdi

$$\begin{aligned}(v^2,(xr)y,s)&=-f(v^2,xr,y,s)+y(v^2,xr,s)+(v^2,y,s).xr\\ &=y(v^2,xr,s)\\ &=-yf(v^2,x,r,s)+y.r(v^2,x,s)+y.(v^2,r,s)x\\ &=y.(v^2,r,s)x\end{aligned}$$

ve yine

$$\begin{aligned}(v^2,x(ry),s)&=-f(v^2,x,ry,s)+ry.(v^2,x,s)+(v^2,ry,s)x\\ &=(v^2,ry,s)x\\ &=-f(v^2,r,y,s)x+y(v^2,r,s).x+(v^2,y,s)r.x\\ &=y(v^2,r,s).x\end{aligned}$$

dir. $(v^2,(xr)y,s)=(v^2,x(ry),s)$ den $y.(v^2,r,s)x=y(v^2,r,s).x$ doğru olmak zorundadır. Buradan $((v^2,r,s),y,x)=0$ olarak elde edilir. $(v^2,(x,r,y),s)=0$ özdeşliğine geri dönülerek $(v^2,(x,y,r),s)=0$ olduğu ifade edilir. Buradan şimdi

$$\begin{aligned}(v^2,(xy)r,s)&=-f(v^2,xy,r,s)+r(v^2,xy,s)+(v^2,r,s).xy\\ &=(v^2,r,s).xy\end{aligned}$$

ve yine

$$\begin{aligned}(v^2,x(yr),s)&=-f(v^2,x,yr,s)+yr.(v^2,x,s)+(v^2,yr,s)x\\ &=(v^2,yr,s)x\\ &=-f(v^2,y,r,s)x+r(v^2,y,s).x+(v^2,r,s)y.x\\ &=(v^2,r,s)y.x\end{aligned}$$

ve dolayısıyla $(v^2,r,s)y.x=(v^2,r,s).xy$ dir. Fakat $((v^2,r,s),y,x)=0$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$(v^2,r,s).xy=(v^2,r,s).yx$$

dir. Bir önceki özdeştik $(v^2,r,s)v=0$ eşitliğine denktir. S sıfırın bölenlerine sahip olmadığından ya $v=0$ ya da $(v^2,r,s)=0$ dır. Her iki halde $(v^2,r,s)=0$ olur ki $v^2 \in N$ dir. Böylece önerme ispatlanmış olur■

Önerme 4.3.5 in ispatı bir adım daha ileriye götürülerek gösterilebilir ki keyfi bir alterne halka , bölümlü halka olmak zorunda değildir.

ÖNERME 4.3.6:

$u=(x,y,z)$ ise $u^2 \in N$ dir.

İSPAT :

$v=(x,y)\neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman önerme 4.3.5 in bir sonucu olarak $v^2 \in N$ ve $(u,v) \in N$ dir. Yine önerme 4.2.3 den $uv+vu=0$ olur. Bu durumda

$$(u,v)^2=(2uv)^2=-4u^2v^2$$

dir. $-4v^2\neq 0$ olduğundan $u^2 \in N$ yi göstermek gerekir. $(x,y)=0$, $(x,z)=0$ ve $(y,z)=0$ olarak kısaltalım. Bu durumda (VI) nın bir sonucu olarak

$$(xy,z)=3(x,y,z) \quad \text{ve} \quad (yx,z)=3(y,x,z)$$

dir. Buradan $6(x,y,z)=0$ olur. Tekrar $3=0$ olması haline indirgemiş oluruz. Şimdi (VI) ve tümevarımdan x,y ve z nin ürettiği halka değişimlidir. Bu noktada $u=0$ ın ispatı olan önerme 4.3.3 yeterlidir. Bu ise önermenin ispatıdır■

4.4. CAYLEY-DİCKSON CEBRİNİN YAPISI

Cayley-Dickson cebri aşağıda çarpım tablosundaki terimlere göre tanımlanır. Bir Cayley-Dickson cebri F cismi üzerinde 8-boyutlu bir vektör uzayı ve taban elemanları u_0, u_1,

$u_2, u_3, \ldots, u_7$ dir. Burada u_o birim eleman olarak rol oynar. Çarpım tablosunun geri kalan kısmı aşağıdaki biçimdedir.

$\odot$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
u_1	αu_o	u_3	αu_2	u_5	αu_4	$-u_7$	$-\alpha u_6$
u_2	$-u_3$	βu_o	$-\beta u_1$	u_6	u_7	βu_4	βu_5
u_3	$-\alpha u_2$	βu_1	$-\alpha\beta u_o$	u_7	αu_6	$-\beta u_5$	$-\alpha\beta u_4$
u_4	$-u_5$	$-u_6$	$-u_7$	γu_o	$-\gamma u_1$	$-\gamma u_2$	$-\gamma u_3$
u_5	$-\alpha u_4$	$-u_7$	$-\alpha u_6$	γu_1	$-\alpha\gamma u_o$	γu_3	$\alpha\gamma u_2$
u_6	u_7	$-\beta u_4$	βu_5	γu_2	$-\gamma u_3$	$-\beta\gamma u_o$	$-\beta\gamma u_1$
u_7	αu_6	$-\beta u_5$	$\alpha\beta u_4$	γu_3	$-\alpha\gamma u_2$	$\beta\gamma u_1$	$\alpha\beta\gamma u_o$

α, β, γ lar sıfırdan farklı skalerdirler.

Güç olmakla beraber gösterilebilir ki bu cebir alterne kuralları gerçekler. $i,j>0$ ve $i\neq j$ olmak üzere çarpım tablosundan $u_i u_j + u_j u_i = 0$ olduğu görülebilir. Bu tablo yardımıyla bir elemanın karesi kolaylıkla alınabilir ve her zaman $Fu_o = F$ üzerinde bir kuadratik polinom denklemini sağladığı gözlenebilir.

Genelde Cayley-Dickson cebri bir bölümlü cebir olmak zorunda değildir. Onun bir bölümlü cebir olması için α, β, γ elemanları ile F cismini sağlaması gereken şartlar [7] de bulunabilir. Bir Cayley-Dickson cebrinde , Cayley sayıları F yi reel sayılar cismi olarak ve $\alpha = \beta = \gamma = -1$ alındığında elde edilir. Karşıt olarak reel sayılar cismi üzerinde bir

Cayley-Dickson bölümlü cebri verilse α, β, γ elemanları - nın negatif sayılar olacakları görülebilir. Fakat genelliği bozmaksızın onları -1 olarak seçebiliriz. Böylece bilinen Cayley sayı sistemi elde edilir. Her eleman çifti değişimli olmayan Cayley sayıları kuaterniyonlara izomorf bir cebir meydana getirirler. İlave olarak Cayley sayıları reel sayı - lar cismi üzerinde bölümlü bir cebir oluştururlar.

TEOREM 4.4.1:

$S \neq N$ ise S, Cayley-Dickson cebrine izomorfik bir althalka meydana getirir.

İSPAT :

Altbölüm 4.3 den S nin bir birim elemana sahip olduğu bilinmektedir. Bu birim eleman u_0 ile gösterilir.
Önerme 4.3.3 den S değişimli olamaz. S de $v=(x,y)\neq 0$ özeliğinde x,y elemanlarını alalım. Bu halde önerme 4.3.2 den S $u=(x,y,z)\neq 0$ özeliğinde bir z elemanı vardır. Bu durumda ise önerme 4.2.3 den $uv+vu=0$ yazılabilir. Buna göre $uv-vu\neq 0$ dır. Netice olarak önerme 4.3.2 den S de $w=(u,v,t)\neq 0$ özeliğinde t elemanı vardır. Bu durumda $u_1=u, u_2=v, u_3=uv, u_4=w$, $u_5=uw, u_6=vw, u_7=(uv)w$ olarak tanımlanır. Dikkat edilirse

$$uw=u(u,v,t)=(u,vu,t)=-(u,uv,t)=-(u,v,t)u=-wu$$

olur. Benzer olarak $vw=-wv$ olduğu gösterilebilir. Bu durumda u,v,w elemanları önerme 4.3.4 ün hipotezini sağlarlar ve buradan

$$\delta(u)\delta(v).\delta(w)=\operatorname{sgn}\delta(uv.w) \text{ ve } \delta(u).\delta(v)\delta(w)$$
$$=\operatorname{sgn}\delta(u.vw)$$

dir. Önerme 4.2.3 den tekrar $(u,v)(u,v,t)+(u,v,t)(u,v)=0$ yazılabilir. Burada $uv+vu=0$ olduğundan $(u,v)=2uv$ ve $(u,v,t)=w$ olur. Böylece

$$2uv.w+2w.uv=0$$

bulunur. Bu halde $(uv)w=-w(uv)$ olur. Permutasyon özeliği kullanılarak $-w(uv)=-u(vw)$ ve $(uv)w=-u(vw)$ biçiminde yazılır. Kısaca özetleyebiliriz ki

$$\begin{aligned}\gamma(u)\gamma(v).\gamma(w) &= -\gamma(u).\gamma(v)\gamma(w)\\ &= \mathrm{Sgn}\,\gamma(uv.w)\end{aligned}$$

dir. Önerme 4.3.1 , önerme 4.3.5 ve önerme 4.3.6 nin sonuçları olarak $u^2,v^2,w^2 \in C$ dir. $u^2=\alpha, v^2=\beta, w^2=\gamma$ alınarak u_j nin çarpım tablosunun tam bir tanımını yapabilmek için yeterli bilgiye sahip oluruz. Buna göre örnek olarak u_7u_5 in çarpımını yapalım.

$$\begin{aligned}u_7u_5 &= (uv.w)(uw)=(v.uw)(uw)=v((uw)(uw))\\ &= v(uw)^2=v(-u^2w^2)\\ &= -\alpha\gamma v=-\alpha\gamma u_2\end{aligned}$$

Böylece çarpım tablosunu kolaylıkla sağlamak mümkün olur.

$u_o,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7$ nin C üzerinde lineer bağımsız vektörler olduğu gösterilirse bu vektörlerle meydana getirilmiş olan althalka Cayley-Dickson cebrine izomorf olacaktır. Varsayalımki $k_j \in C$ olmak üzere

$$s=k_ou_o+k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3+k_4u_4+k_5u_5+k_6u_6+k_7u_7$$

olsun. $0=u_is+su_i=2u_i(k_ou_o+k_iu_i)$ dan $k_ou_o+k_iu_i=0$ olur. $k_ou_o \in C$ ve $i>0$ için $u_i \notin C$ olduğundan $k_i=0$ elde edilir.

O zaman $k_o u_o=0$ olur ki buradan $k_o=0$ dır. O halde bu vektörler C üzerinde lineer bağımsızdırlar. Böylece teoremin ispatı tamamlanır∎

TEOREM 4.4.2:

$N \neq S$ ise S bir Cayley-Dickson bölümlü cebridir.

İSPAT :

Teorem 4.4.1 in bir sonucu olarak D , S nin C merkezi üzerinde bir Cayley-Dickson cebri olsun. Buna göre D=S olduğunu göstermek gerekir. Varsayalım ki $D \neq S$ olsun. O zaman D de olmayan fakat S de olan bir p elemanı vardır. $p \notin C$ olmak üzere $C \subset D$ olduğundan $u=(p,q,r) \neq 0$ özeliğinde $q,r \in S$ elemanları vardır. Her p elemanının C üzerinde bir monic kuadratik polinom denklemini sağladığını ispatlayacağız. İlk olarak yazılabilir ki

$$u^2p^2-(upu+u^2p)p+(up)^2=0$$

$up=(p,q,r)p=(p,pq,r)$ olduğundan önerme 4.3.1 ve önerme 4.3.6 kullanılarak $(up)^2=(p,pq,r)^2 \in C$ dir. Aynı şekilde $u^2 \in C$ ve yine

$$\begin{aligned}(p,pq+q,r)^2-(p,q,r)^2-(p,pq,r)^2 &= (p,pq,r)(p,q,r) \\ &\quad +(p,q,r)(p,pq,r) \\ &= upu+u^2p \in C\end{aligned}$$

dir. O zaman p, C üzerinde bir kuadratik polinom denklemini sağlar. p^{-2} ile çarpılarak monic yapılır. $a,b \in C$ olmak üzere $p^2-ap+b=0$ ise $(p-a/2)^2 \in C$ dir. Böylece $p^2 \in C$ olan bir $p \notin D$ seçebiliriz. Bu durumda çarpım tablosunda tanımlanmış D nin temel elemanları $u_0,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7$ olsun.

O zaman $p+u_i$ ve $p-u_i$ D nin elemanı değildirler. Buradan onlarda C üzerinde kuadratik polinom denklemlerini sağlarlar. Varsayalımki $c_j \in C$ olmak üzere $(p+u_i)^2=c_1(p+u_i)+c_2$ ve $(p-u_i)^2= c_3(p-u_i)+c_4$ olsun. Bu iki eşitlik hesaplanarak

$$(c_1+c_3)p+(c_1-c_3)u_i+c_5=0$$

elde edilir, burada $c_5=c_2+c_4-2p^2-2u_i^2 \in C$ dir. $p \notin D$ olduğundan $c_1+c_3=0$ olur. $u_i \notin C$ olduğundan da $c_1-c_3=0$ olmaladır. Netice olarak $c_1=c_3=0$ ve $(p+u_i)^2=c_2$ dir. O zaman açıkca

$$pu_i+u_ip=c_2-p^2-u_i^2 \in C$$

olur. $pu_i+u_ip=d_i \in C$ alalım ve $m=p-(d_1/2u_1^2)u_1-\ldots-(d_7/2u_7^2)u_7$ seçilsin. Bu durumda

$$mu_j+u_jm=pu_j+u_jp-d_j=0$$

dır. Böylece $m \notin D$ tanımlanmış oldu. m,u_1,u_4 elemanları ikişer ikişer değişimli değil ve dolayısıyla önerme 4.3.4 uygulanabilir. Buna göre

$$u_1(mu_4)=m(u_4u_1)=-mu_5=u_5m=-(u_4u_1)m$$
$$=-(mu_4)u_1$$

bulunur. Benzer olarak $u_2(mu_4)=-(mu_4)u_2$ hesaplanır. Dolayısıyla önerme 4.3.4 ikişer ikişer değişimli olmayan u_1, u_2 ve mu_4 elemanlarına da uygulanır. Bu noktada sonuçlar çelişir çünkü çok basit değişimli olmayan elemanlar vardır. Tekrar önerme 4.3.4 kullanılırsa

$$mu_7=-u_7m=-(u_3u_4)m=(mu_4)u_3=(mu_4)(u_1u_2)=-u_1[(mu_4)u_2]$$
$$=u_1[(u_2u_4)m]=u_1(u_6m)=m(u_1u_6)=-mu_7$$

bulunur. Bu durumda $2mu_7=0$ olur. $2u_7\neq 0$, $m=0$ olurki $m\notin D$ çelişir.Bu çelişme $D\neq S$ varsayımının yanlış olduğunu gösterir. O halde $S=D$ dir.Böylece S bir Cayley-Dickson cebridir. S bölümlü halka olduğundan bu Cayley-Dickson cebri gerçekte bölümlü Cayley-Dickson cebri olmalıdır.Bu ise teoremin ispatını tamamlar∎

5.BÖLÜM

EK

BİR ALTERNE YARICİSİM ÖRNEĞİ

Bir $(S,\oplus,\odot)$ sistemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$S=\{(a_0+a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+a_4u_4+a_5u_5+a_6u_6+a_7u_7):a_k\in R,\ k=0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

olsun. Bu küme üzerinde eşitlik,

$$a_0+a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+a_4u_4+a_5u_5+a_6u_6+a_7u_7=b_0+b_1u_1+b_2u_2+b_3u_3+b_4u_4+b_5u_5+b_6u_6+b_7u_7$$

$$\Leftrightarrow a_i=b_i \quad ,\quad i=0,1,2,3,4,5,6,7.$$

Toplama işlemi,

$$(a_0+a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+a_4u_4+a_5u_5+a_6u_6+a_7u_7)\oplus(b_0+b_1u_1+b_2u_2+b_3u_3+b_4u_4+b_5u_5+b_6u_6+b_7u_7)$$
$$=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)u_1+(a_2+b_2)u_2+(a_3+b_3)u_3+(a_4+b_4)u_4+(a_5+b_5)u_5+(a_6+b_6)u_6+(a_7+b_7)u_7.$$

Çarpma işlemi ise aşağıdaki tablo yardımıyla tanımlanır.

$\odot$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
u_1	-1	u_3	$-u_2$	u_5	$-u_4$	$-u_7$	u_6
u_2		-1	u_1	u_6	u_7	$-u_4$	$-u_5$
u_3			-1	u_7	$-u_6$	u_5	$-u_4$
u_4				-1	u_1	u_2	u_3
u_5					-1	$-u_3$	u_2
u_6						-1	$-u_1$
u_7							-1

1) $u_j\odot u_i=-u_i\odot u_j$
2) Sağdan ve soldan dağılma özelikleri vardır.
3) $au_k=a\odot u_k=u_k\odot a$, a bir reel sayı.
4) $a\odot(bu_k)=(ab)\odot u_k$, a ve b reel sayılardır.

Bu sekizlilere CAYLEY sayıları denir. Dikkat edilirse, $\{(a_0+a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+0\cdot u_4+0\cdot u_5+0\cdot u_6+0\cdot u_7):a_k\in R\}$ kümesi kuaternlyonlar bölümlü halkasına izomorftur.

Bir $\mathcal{X} \in S$ alınırsa,

$$\mathcal{X} = x_0 + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 + x_5u_5 + x_6u_6 + x_7u_7$$
$$= x_0 + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + u_4 \cdot (x_4 - x_5u_1 - x_6u_2 - x_7u_3)$$

yazılabilir. $u_4 = \lambda$, $x = x_0 + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$ ve $y = x_4 - x_5u_1 - x_6u_2 - x_7u_3$ denirse $\mathcal{X} = x + \lambda y$ olarak yazılır. Buna benzer olarak bir $\mathcal{Y} \in S$ elemanıda $\mathcal{Y} = u + \lambda v$ yazılabilir. Bu durumda x, y, u, v birer kuaterniyon olmak üzere toplama ve çarpma işlemleri,

$$\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} = (x + \lambda y) \oplus (u + \lambda v)$$
$$= (x + u) \oplus \lambda (y + v)$$
$$\mathcal{X} \odot \mathcal{Y} = (x + \lambda y) \odot (u + \lambda v)$$
$$= (xu - v\bar{y}) \oplus \lambda (uy + \bar{x} v)$$

olarak tanımlanır.

Genelde bu şekilde tanımlanan $(S, \oplus, \odot)$ alterne halkası bir "Cayley-Dickson cebri" olarak adlandırılır. Şimdi $\mathcal{X} \odot \mathcal{Y} = (xu - v\bar{y}) \oplus \lambda (uy + \bar{x} v)$ olduğunu gösterelim.

$\mathcal{Y} = y_0 + y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3 + y_4u_4 + y_5u_5 + y_6u_6 + y_7u_7$ olsun. $\mathcal{X} \odot \mathcal{Y}$ çarpımını yukarıdaki tablo yardımıyla yaparsak,

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} \odot \mathcal{Y} = {} & (x_0 + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 + x_5u_5 + x_6u_6 + x_7u_7) \odot (y_0 + y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3 + y_4u_4 + y_5u_5 + y_6u_6 + y_7u_7) \\
= {} & x_0y_0 + x_0y_1u_1 + x_0y_2u_2 + x_0y_3u_3 + x_0y_4u_4 + x_0y_5u_5 + x_0y_6u_6 + x_0y_7u_7 + x_1y_0u_1 + x_1y_2u_3 + \\
& - x_1y_1 - x_1y_3u_2 + x_1y_4u_5 + x_1y_7u_6 - x_1y_5u_4 - x_1y_6u_7 + x_2y_0u_2 - x_2y_1u_3 - x_2y_2 + x_2y_3u_1 + \\
& + x_2y_4u_6 + x_2y_5u_7 - x_2y_6u_4 - x_2y_7u_5 + x_3y_0u_3 + x_3y_1u_2 - x_3y_2u_1 - x_3y_3 + x_3y_4u_7 - x_3y_5u_6 + \\
& + x_3y_6u_5 - x_3y_7u_4 + x_4y_0u_4 - x_4y_1u_5 - x_4y_2u_6 - x_4y_3u_7 - x_4y_4 + x_4y_5u_1 + x_4y_6u_2 + x_4y_7u_3 + \\
& + x_5y_0u_5 + x_5y_1u_4 - x_5y_2u_7 + x_5y_3u_6 - x_5y_4u_1 - x_5y_5 - x_5y_6u_3 + x_5y_7u_2 + x_6y_0u_6 + x_6y_1u_7 + \\
& + x_6y_2u_4 - x_6y_3u_5 - x_6y_4u_2 + x_6y_5u_3 - x_6y_6 - x_6y_7u_1 + x_7y_0u_7 - x_7y_1u_6 + x_7y_2u_5 + x_7y_3u_4 \\
& - x_7y_4u_3 - x_7y_5u_2 + x_7y_6u_1 - x_7y_7 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= {} & (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 - x_5y_5 - x_6y_6 - x_7y_7) + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_5 - x_5y_4 \\
& - x_6y_7 + x_7y_6)u_1 + (x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1 + x_4y_6 + x_5y_7 - x_6y_4 - x_7y_5)u_2 + (x_0y_3 + x_1y_2 - \\
& - x_2y_1 + x_3y_0 + x_4y_7 - x_5y_6 + x_6y_5 - x_7y_4)u_3 + (x_0y_4 - x_1y_5 - x_2y_6 - x_3y_7 + x_4y_0 + x_5y_1 + x_6y_2 \\
& + x_7y_3)u_4 + (x_0y_5 + x_1y_4 - x_2y_7 + x_3y_6 - x_4y_1 + x_5y_0 - x_6y_3 + x_7y_2)u_5 + (x_0y_6 + x_1y_7 + x_2y_4 \\
& - x_3y_5 - x_4y_2 + x_5y_3 + x_6y_0 - x_7y_1)u_6 + (x_0y_7 - x_1y_6 + x_2y_5 + x_3y_4 - x_4y_3 - x_5y_2 + x_6y_1 + x_7y_0)u_7
\end{aligned}$$

----- (1)

olarak bulunur. Şimdi $\mathcal{X} \odot \mathcal{Y} = (xu - v\bar{y}) + \lambda (uy + \bar{x} v)$ değerini bulalım.

$x=x_0+x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3$, $y=x_4-x_5u_1-x_6u_2-x_7u_3$, $u=y_0+y_1u_1+y_2u_2+y_3u_3$ ve $\vartheta=y_4-y_5u_1-y_6u_2-y_7u_3$ birer kuaterniyon olduklarından $X\odot Y$ çarpımı, kuaterniyonlar bölümlü halkasındaki kuaterniyon çarpımına göre bulunursa,

$$\begin{aligned}
xu &= x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3+(x_0y_1+x_1y_0+x_2y_3-x_3y_2)u_1+(x_0y_2-x_1y_3+x_2y_0+x_3y_1)u_2+(x_0y_3+\\
&\quad +x_1y_2-x_2y_1+x_3y_0)u_3 .\\
\vartheta\bar{y} &= y_4x_4+y_5x_5+y_6x_6+y_7x_7+(y_4x_5-y_5x_4-y_6x_7+y_7x_6)u_1+(y_4x_6+y_5x_7-y_6x_4-y_7x_5)u_2+(y_4x_7-\\
&\quad -y_5x_6+y_6x_5-y_7x_4)u_3\\
uy &= y_0x_4+y_1x_5+y_2x_6+y_3x_7+(-y_0x_5+y_1x_4-y_2x_7+y_3x_6)u_1+(-y_0x_6+y_1x_7+y_2x_4-y_3x_5)u_2+(-y_0x_7-\\
&\quad -y_1x_6+y_2x_5+y_3x_4)u_3 .\\
\bar{x}\vartheta &= x_0y_4-x_1y_5-x_2y_6-x_3y_7+(-x_0y_5-x_1y_4+x_2y_7-x_3y_6)u_1+(-x_0y_6-x_1y_7-x_2y_4+x_3y_5)u_2+(-x_0y_7+\\
&\quad +x_1y_6-x_2y_5-x_3y_4)u_3 .
\end{aligned}$$

$X\odot Y=(xu-\vartheta\bar{y})\oplus\lambda(uy+\bar{x}\vartheta)$ den

$$\begin{aligned}
&=[x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4-x_5y_5-x_6y_6-x_7y_7+(x_0y_1+x_1y_0+x_2y_3-x_3y_2-y_4x_5+y_5x_4+y_6x_7-\\
&\quad -y_7x_6)u_1+(x_0y_2-x_1y_3+x_2y_0+x_3y_1-y_4x_6-y_5x_7+y_6x_4+y_7x_5)u_2+(x_0y_3+x_1y_2-x_2y_1+x_3y_0-y_4x_7+\\
&\quad +y_5x_6-y_6x_5+y_7x_4)u_3]+\lambda[y_0x_4+y_1x_5+y_2x_6+y_3x_7+x_0y_4-x_1y_5-x_2y_6-x_3y_7+(-y_0x_5+y_1x_4-\\
&\quad -y_2x_7+y_3x_6-x_0y_5-x_1y_4+x_2y_7-x_3y_6)u_1+(-y_0x_6+y_1x_7+y_2x_4-y_3x_5-x_0y_6-x_1y_7-x_2y_4+x_3y_5)u_2+\\
&\quad +(-y_0x_7-y_1x_6+y_2x_5+y_3x_4-x_0y_7+x_1y_6-x_2y_5-x_3y_4)u_3]
\end{aligned}$$

olur. $u_4=\lambda$ değeri yerine konularak devam edilirse,

$$\begin{aligned}
X\odot Y &= x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4-x_5y_5-x_6y_6-x_7y_7+(x_0y_1+x_1y_0+x_2y_3-x_3y_2-y_4x_5+y_5x_4+y_6x_7-y_7x_6)u_1+\\
&\quad +(x_0y_2-x_1y_3+x_2y_0+x_3y_1-y_4x_6-y_5x_7+y_6x_4+y_7x_5)u_2+(x_0y_3+x_1y_2-x_2y_1+x_3y_0-y_4x_7+y_5x_6-y_6x_5+\\
&\quad +y_7x_4)u_3+(y_0x_4+y_1x_5+y_2x_6+y_3x_7+x_0y_4-x_1y_5-x_2y_6-x_3y_7)u_4+(y_0x_5-y_1x_4+y_2x_7-y_3x_6+x_0y_5+\\
&\quad +x_1y_4-x_2y_7+x_3y_6)u_5+(y_0x_6-y_1x_7-y_2x_4+y_3x_5+x_0y_6+x_1y_7+x_2y_4-x_3y_5)u_6+(y_0x_7+y_1x_6-y_2x_5\\
&\quad -y_3x_4+x_0y_7-x_1y_6+x_2y_5+x_3y_4)u_7 . \quad \ldots\ldots (2)
\end{aligned}$$

bulunur. (1) ve (2) sonuçları aynı olduklarından,

$$X\odot Y=(xu-\vartheta\bar{y})\oplus\lambda(uy+\bar{x}\vartheta)$$

olarak yazılabileceği görülür. Yine buna benzer olarak $u_4=i$ olmak üzere,

$$X\odot Y=(xu-\bar{\vartheta}y)\oplus(\vartheta x+y\bar{u})i$$

olduğuda görülür.

Şimdi $(S,\oplus,\odot)$ sisteminin bazı çarpımsal özelikleri sağladığı gösterilebilir. Her $X,Y,A\in S$ için

$$X\odot(Y\oplus A)=(X\odot Y)\oplus(X\odot A)$$

olduğunu gösterelim.

$$\mathcal{A}=a_0+a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+a_4u_4+a_5u_5+a_6u_6+a_7u_7=a_0+a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+u_4(a_4-a_5u_1-a_6u_2-a_7u_3)$$

$$=a_0+a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+\lambda(a_4-a_5u_1-a_6u_2-a_7u_3).$$

$a=a_0+a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3$ ve $b=a_4-a_5u_1-a_6u_2-a_7u_3$ denirse, $\mathcal{A}=a+\lambda b$ olur.

$$\mathcal{Y}\oplus\mathcal{A}=(u+\lambda v)\oplus(a+\lambda b)=(u+a)\oplus\lambda(v+b)$$

$$=[y_0+a_0+(y_1+a_1)u_1+(y_2+a_2)u_2+(y_3+a_3)u_3]\oplus\lambda[y_4+a_4-(y_5+a_5)u_1+(-y_6-a_6)u_2-(y_7+a_7)u_3]$$

olur. $s=y_0+a_0+(y_1+a_1)u_1+(y_2+a_2)u_2+(y_3+a_3)u_3$ ve $t=y_4+a_4-(y_5+a_5)u_1-(y_6+a_6)u_2-(y_7+a_7)u_3$ ise

$$\mathcal{X}\odot(\mathcal{Y}\oplus\mathcal{A})=(x+\lambda y)\odot(s+\lambda t)=(xs-t\bar{y})\oplus\lambda(sy+\bar{x}t)$$

$$xs=[x_0(y_0+a_0)-x_1(y_1+a_1)-x_2(y_2+a_2)-x_3(y_3+a_3)]+[x_0(y_1+a_1)+x_1(y_0+a_0)+x_2(y_3+a_3)-x_3(y_2+a_2)]u_1+[x_0(y_2+a_2)+(y_0+a_0)x_2+x_3(y_1+a_1)-x_1(y_3+a_3)]u_2+[x_0(y_3+a_3)+x_3(y_0+a_0)+x_1(y_2+a_2)-x_2(y_1+a_1)]u_3.$$

$$t\bar{y}=[(y_4+a_4)x_4+(y_5+a_5)x_5+(y_6+a_6)x_6+(y_7+a_7)x_7]+[(y_4+a_4)x_5-x_4(y_5+a_5)-x_7(y_6+a_6)+x_6(y_7+a_7)]u_1+[x_6(y_4+a_4)-x_4(y_6+a_6)+x_7(y_5+a_5)-x_5(y_7+a_7)]u_2+[x_7(y_4+a_4)+x_5(y_6+a_6)-x_4(y_7+a_7)-x_6(y_5+a_5)]u_3.$$

$$sy=[x_4(y_0+a_0)+x_5(y_1+a_1)+x_6(y_2+a_2)+x_7(y_3+a_3)]+[-x_5(y_0+a_0)+x_4(y_1+a_1)-x_7(y_2+a_2)+x_6(y_3+a_3)]u_1+[-x_6(y_0+a_0)+x_4(y_2+a_2)+x_7(y_1+a_1)-x_5(y_3+a_3)]u_2+[-x_7(y_0+a_0)+x_4(y_3+a_3)-x_6(y_1+a_1)+x_5(y_2+a_2)]u_3$$

$$\bar{x}t=[x_0(y_4+a_4)-x_1(y_5+a_5)-x_2(y_6+a_6)-x_3(y_7+a_7)]+[x_0(-y_5-a_5)-x_1(y_4+a_4)+x_2(y_7+a_7)-x_3(y_6+a_6)]u_1+[x_0(-y_6-a_6)-x_2(y_4+a_4)-x_1(y_7+a_7)+x_3(y_5+a_5)]u_2+[x_0(-y_7-a_7)-x_3(y_4+a_4)+x_1(y_6+a_6)-x_2(y_5+a_5)]u_3.$$

$$\mathcal{X}\odot(\mathcal{Y}\oplus\mathcal{A})=[x_0y_0+x_0a_0-x_1y_1-x_1a_1-x_2y_2-x_2a_2-x_3y_3-x_3a_3-x_4y_4-x_4a_4-x_5y_5-x_5a_5-x_6y_6-x_6a_6-x_7y_7-x_7a_7+(x_0y_1+x_0a_1+x_1y_0+x_1a_0+x_2y_3+x_2a_3-x_3y_2-x_3a_2-x_5y_4-x_5a_4+x_4y_5+x_4a_5+x_7y_6+x_7a_6-x_6y_7-x_6a_7)u_1+(x_0y_2+x_0a_2+x_2y_0+x_2a_0-x_1y_3-x_1a_3+x_3y_1+x_3a_1-x_6y_4-x_6a_4+x_4y_6+x_4a_6-x_7y_5-x_7a_5+x_5y_7+x_5a_7)u_2+(x_0y_3+x_0a_3+x_3y_0+x_3a_0+x_1y_2+x_1a_2-x_2y_1-x_2a_1-x_7y_4-x_7a_4+x_4y_7+x_4a_7+x_6y_5+x_6a_5-x_5y_6-x_5a_6)u_3]\oplus\lambda[x_4y_0+x_4a_0+x_5y_1+x_5a_1+x_6y_2+x_6a_2+x_7y_3+x_7a_3+x_0y_4+x_0a_4-x_1y_5-x_1a_5-x_2y_6-x_2a_6-x_3y_7-x_3a_7+(-x_5y_0-x_5a_0+x_4y_1+x_4a_1-x_7y_2-x_7a_2+x_6y_3+x_6a_3-x_0y_5-x_0a_5-x_1y_4-x_1a_4+x_2y_7+x_2a_7-x_3y_6-x_3a_6)u_1+(-x_6y_0-x_6a_0+x_4y_2+x_4a_2+x_7y_1+x_7a_1-x_5y_3-x_5a_3-x_0y_6-x_0a_6-x_2y_4-x_2a_4-x_1y_7-x_1a_7+x_3y_5+x_3a_5)u_2+(-x_7y_0-x_7a_0+x_4y_3+x_4a_3-x_6y_1-x_6a_1+x_5y_2+x_5a_2-x_0y_7-x_0a_7-x_3y_4-x_3a_4+x_1y_6+x_1a_6-x_2y_5-x_2a_5)u_3]$$

.... (3)

$$\mathcal{X}\odot\mathcal{Y}=[x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4-x_5y_5-x_6y_6-x_7y_7+(x_0y_1+x_1y_0+x_2y_3-x_3y_2-y_4x_5+y_5x_4+y_6x_7-y_7x_6)u_1+(x_0y_2-x_1y_3+x_2y_0+x_3y_1-y_4x_6-y_5x_7+y_6x_4+y_7x_5)u_2+(x_0y_3+x_1y_2-x_2y_1+x_3y_0-y_4x_7+y_5x_6-y_6x_5+y_7x_4)u_3]\oplus\lambda[y_0x_4+y_1x_5+y_2x_6+y_3x_7+x_0y_4-x_1y_5-x_2y_6-x_3y_7+(-y_0x_5+$$

$$+y_1x_4-y_2x_7+y_3x_6-x_0y_5-x_1y_4+x_2y_7-x_3y_6)u_1+(-y_0x_6+y_1x_7+y_2x_4-y_3x_5-x_0y_6-x_1y_7-x_2y_4+$$
$$+x_3y_5)u_2+(-y_0x_7-y_1x_6+y_2x_5+y_3x_4-x_0y_7+x_1y_6-x_2y_5-x_3y_4)u_3].$$

$$\mathcal{X}\odot\mathcal{A}=[x_0a_0-x_1a_1-x_2a_2-x_3a_3-x_4a_4-x_5a_5-x_6a_6-x_7a_7+(x_0a_1+x_1a_0+x_2a_3+x_4a_5-x_3a_2-x_5a_4+x_7a_6$$
$$-x_6a_7)u_1+(x_0a_2-x_1a_3+x_2a_0+x_3a_1-x_6a_4-x_7a_5-x_4a_6+x_5a_7)u_2+(x_0a_3+x_1a_2-x_2a_1+x_3a_0-x_7a_4$$
$$+x_6a_5-x_5a_6+x_4a_7)u_3]\oplus\lambda[x_4a_0+x_5a_1+x_6a_2+x_7a_3+x_0a_4-x_1a_5-x_2a_6-x_3a_7+(-x_5a_0+x_4a_1-$$
$$-x_7a_2+x_6a_3-x_0a_5-x_1a_4+x_2a_7-x_3a_6)u_1+(-x_6a_0+x_7a_1+x_4a_2-x_5a_3-x_0a_6-x_1a_7-x_2a_4+x_3a_5)u_2$$
$$+(-x_7a_0-x_6a_1+x_5a_2+x_4a_3-x_0a_7+x_1a_6-x_2a_5-x_3a_4)u_3]$$

olur. Böylece,

$$(\mathcal{X}\odot\mathcal{Y})\oplus(\mathcal{X}\odot\mathcal{A})=[x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4-x_5y_5-x_6y_6-x_7y_7+x_0a_0-x_1a_1-x_2a_2-x_3a_3-x_4a_4$$
$$-x_5a_5-x_6a_6-x_7a_7+(x_0y_1+x_1y_0+x_2y_3-x_3y_2+x_4y_5-y_4x_5+y_6x_7-y_7x_6+x_0a_1+x_1a_0+x_2a_3-x_3a_2-$$
$$-x_5a_4+x_4a_5+x_7a_6-x_6a_7)u_1+(x_0y_2-x_1y_3+x_2y_0+x_3y_1-x_6y_4-y_5x_7+y_6x_4+y_7x_5+x_0a_2-x_1a_3$$
$$+x_2a_0+x_3a_1-x_6a_4-x_7a_5+x_7a_6+x_5a_7)u_2+(x_0y_3+x_1y_2-x_2y_1+x_3y_0-y_4x_7+y_5x_6-y_6x_5+y_7x_4+x_0a_3$$
$$+x_1a_2-x_2a_1+x_3a_0-x_7a_4+x_6a_0-x_5a_6+x_4a_7)u_3]\oplus\lambda[y_0x_4+y_1x_5+y_2x_6+y_3x_7+x_0y_4-x_1y_5-x_2y_6$$
$$-x_3y_7+x_4a_0+x_5a_1+x_6a_2+x_7a_3+x_0a_4-x_1a_5-x_2a_6-x_3a_7+(-y_0x_5+y_1x_4-y_2x_7+y_3x_6-x_0y_5-x_1y_4$$
$$+x_2y_7-x_3y_6-x_5a_0+x_4a_1-x_7a_2+x_6a_3-x_0a_5-x_1a_4+x_2a_7-x_3a_6)u_1+(y_0x_6+y_1x_7+y_2x_4-y_3x_5-x_0y_6-$$
$$-x_1y_7-x_2y_4+x_3y_5-x_6a_0+x_7a_1+x_4a_2-x_5a_3-x_0a_6-x_1a_7-x_2a_4+x_3a_5)u_2+(-y_0x_7-y_1x_6+y_2x_5+$$
$$+y_3x_4-x_0y_7+x_1y_6-x_2y_5-x_3y_4-x_7a_0-x_6a_1+x_5a_2+x_4a_3-x_0a_7-x_1a_6-x_2a_5-x_3a_4)u_3] \quad \dots (4)$$

bulunur. (3) ve (4) ten

$$\mathcal{X}\odot(\mathcal{Y}\oplus\mathcal{A})=(\mathcal{X}\odot\mathcal{Y})\oplus(\mathcal{X}\odot\mathcal{A})$$

olduğu görülür. Buna benzer olarak,

$$(\mathcal{Y}\oplus\mathcal{A})\odot\mathcal{X}=(\mathcal{Y}\odot\mathcal{X})\oplus(\mathcal{A}\odot\mathcal{X})$$

olduguda görülebilir. Böylece soldan dağılma ve sağdan dağılma özeliklerinin sağlandığı gösterilmiş olur.

Şimdi de her $\mathcal{X},\mathcal{Y}\in S$ için

$$(\mathcal{X}\odot\mathcal{Y})\odot\mathcal{Y}=\mathcal{X}\odot(\mathcal{Y}\odot\mathcal{Y})$$

sağ alterne kuralın gerçeklendiğini gösterelim.

$$\mathcal{X}\odot\mathcal{Y}=(x+\lambda y)\odot(u+\lambda v)=(xu-v\bar{y})\oplus\lambda(uy+\bar{x}v) \quad \text{den}$$

$$\mathcal{X}\odot\mathcal{Y}=[x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4-x_5y_5-x_6y_6-x_7y_7+(x_0y_1+x_1y_0+x_2y_3-x_3y_2-y_4x_5+y_5x_4+y_6x_7$$
$$-y_7x_6)u_1+(x_0y_2-x_1y_3+x_2y_0+x_3y_1-y_4x_6-y_5x_7+y_6x_4+y_7x_5)u_2+(x_0y_3+x_1y_2-x_2y_1+x_3y_0-$$
$$-y_4x_7+y_5x_6-y_6x_5+y_7x_4)u_3]\oplus\lambda[y_0x_4+y_1x_5+y_2x_6+y_3x_7+x_0y_4-x_1y_5-x_2y_6-x_3y_7+(-y_0x_5+$$
$$y_1x_4-y_2x_7+y_3x_6-x_0y_5-x_1y_4+y_7x_2-x_3y_6)u_1+(y_0x_6+y_1x_7+y_2x_4-y_3x_5-x_0y_6-x_1y_4-x_2y_4$$
$$+x_3y_5)u_2+(-y_0x_7-y_1x_6+y_2x_5+y_3x_4-x_0y_4+x_1y_6-x_2y_5-x_3y_4)u_3]$$

olur. Buradan $(\mathcal{X}\odot\mathcal{Y})\odot\mathcal{Y}$ çarpımına geçilirse

$$
\begin{aligned}
&+x_2y_0^2-x_2y_1^2-x_2y_2^2-x_2y_3^2-x_2y_4^2-x_2y_5^2-x_2y_6^2-x_2y_7^2-2y_0y_3x_1+2y_0y_1x_3-2y_0y_4x_6+2y_0y_6x_4\\
&-2y_0y_5x_7+2y_0y_7x_5)u_2+(2y_0y_3x_0+x_3y_0^2-x_3y_1^2-x_3y_2^2-x_3y_3^2-x_3y_4^2-x_3y_5^2-x_3y_6^2-x_3y_7^2+2y_0y_2x_1\\
&-2y_0y_1x_2-2y_0y_4x_7+2y_0y_7x_4+2y_0y_5x_6-2y_0y_6x_5)u_3]\oplus\lambda[x_4y_0^2-x_4y_1^2-x_4y_2^2-x_4y_3^2-x_4y_4^2\\
&-x_4y_5^2-x_4y_6^2-x_4y_7^2+2y_0y_1x_5+2y_0y_2x_6+2y_0y_3x_7+2y_0y_4x_0-2y_0y_5x_1-2y_0y_6x_2-2y_0y_7x_3\\
&+(-x_5y_0^2+x_5y_1^2+x_5y_2^2+x_5y_3^2+x_5y_4^2+x_5y_5^2+x_5y_6^2+x_5y_7^2+2y_0y_1x_4-2y_0y_2x_7+2y_0y_3x_6-\\
&-2y_0y_5x_0-2y_0y_4x_1+2y_0y_7x_2-2y_0y_6x_3)u_1+(-x_6y_0^2+x_6y_1^2+x_6y_2^2+x_6y_3^2+x_6y_4^2+x_6y_5^2+\\
&+x_6y_6^2+x_6y_7^2+2y_0y_2x_4+2y_0y_1x_7-2y_0y_3x_5-2y_0y_6x_0-2y_0y_4x_2-2y_0y_7x_1+2y_0y_5x_3)u_2+\\
&+(-x_7y_0^2+x_7y_1^2+x_7y_2^2+x_7y_3^2+x_7y_4^2+x_7y_5^2+x_7y_6^2+x_7y_7^2+2y_0y_3x_4-2y_0y_1x_6+2y_0y_2x_5-2y_0y_7x_0\\
&-2y_0y_4x_3+2y_0y_6x_1-2y_0y_5x_2)u_3] \quad \cdots\cdots (6)
\end{aligned}
$$

olur. Buradan (5) ve (6) değerleri karşılaştırılırsa,

$$(x\odot y)\odot y = x\odot(y\odot y)$$

sağ alterne kuralın doğrulandığı görülür. Buna benzer olarak,

$$(x\odot x)\odot y = x\odot(x\odot y)$$

sol alterne kuralında doğru olduğu görülür ■

K A Y N A K L A R

[1] KAYA,R. :Projektif Geometri, Frat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Mat.1, 16-360, Elazığ, 1978.

[2] STEVENSON,F.W. :Projective Planes,By W.H. Freeman And Compa y, San Francisco, U.S.A., 271-402.

[3] ÇİFTÇİ,S. :Moufang Düzlemleri Üzerine, Frat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,Doktara tezi,Elazığ,1984.

[4] ÇİFTÇİ,S.-KAYA,R.-FERRAR,j.C. : On 4-Transitivity In The Moufang Planes, Journal of Geometry, (To Appear).

[5] FERRAR,J.C. :Cross-Ration In Projective And Affine Planes, Geometry-Von Staudt's Point of View-Nato Advanced study Institute,Bad Windsheim, July 21-Auqust 1980.

[6] KLEİNFELD,E. : A Characterization of The Cayley Numbers,Studies In Modern Algebra,Volum 2, M.A.A. Studies In Mathematical,1963.

[7] SCHFER,R.D. : Alternative Algebras Over An Arbitrary Field,Bulletia of The American Mathematical Society, Vol.49 (1943) ,pp.549-555.