KOMPAKT RIEMANN YÜZEYLERİNDE

RIEMANN-ROCH TEOREMİ VE BAZI SONUÇLARI

Naci Alkış

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yar.Doç.Dr.Coşkun Tayfur

Ağustos-1987

Naci Alkış'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı " KOMPAKT RIEMANN YÜZEYLERİNDE RIEMANN-ROCH TEOREMİ VE BAZI SONUÇLARI" başlıklı bu çalışma jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

25/.9./.87.

Üye : Prof. Dr. Ertuğrul Özdamar

Üye : Yar. Doç. Dr. Mehmet Üreyen

Üye : Yar. Doç. Dr. Coşkun Taylor

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 28.9.987... gün ve ...155-2............ sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Rüstem KAYA

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. İlk üç bölümde, Riemann yüzeyleri ile ilgili temel kavramlar, analitik ve harmonik diferansiyel formlar ve konform invaryantlar üzerinde durulmuştur. Daha sonra dördüncü bölümde, kompakt Riemann yüzeyleri ile ilgili olarak bilinen üç klasik teoremden (Riemann-Roch teoremi, Abel teoremi, Jacobi inversion teoremi) Riemann-Roch teoremi ispatlanmış ve bunun bazı sonuçları verilmiştir.

SUMMARY

This thesis consists of four parts. In the first three chapters are concerned with the basic concepts of Riemann surfaces, analytic and harmonic differential forms on Riemann surfaces, and conformal invariants.

After then, in the fourth chapter, we prove Riemann-Roch theorem which is known to be one of the classical theorems (Riemann-Roch theorem, Abel's theorem, Jacobi inversion theorem) for compact Riemann surfaces. At the end,we give some consequences of this theorem.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten sayın hocam ve Anadolu Üniversitesi Fen-Ed. Fakültesi öğretim üyesi Yar.Doç. Dr. Coşkun Tayfur'a içten teşekkür ederim.

Naci Alkış

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

1. RIEMANN YÜZEYLERİ

S bağlantılı Hausdorff uzay olsun. Bunun üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan bir

$$\Phi = \{\psi_i\}_{i \in I}$$

fonksiyonlar ailesi varsa, S ye Φ konform yapısına sahip Riemann yüzeyi denir.

i. Herbir ψ_i fonksiyonu

$$\psi_i : U_i \to D_i$$

bir $U_i \subset S$ açık kümesinden, kompleks düzlemin bir D_i açık alt kümesi üzerine bir homeomorfizmadır.

ii. ψ_i fonksiyonlarının tanım kümelerinin ailesi S nin bir açık örtülüşünü oluşturur. Yani

$$S = \bigcup_{i \in I} U_i$$

dır.

iii. Φ ailesindeki fonksiyonlar bir birlerine analitik olarak bağlıdırlar. Yani $i,j \in I$ ve $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ için,

$$f_{ij} = \psi_i o \psi_j^{-1} : \psi_j(U_i \cap U_j) \to \psi_i(U_i \cap U_j)$$

geçiş fonksiyonları analitik (holomorf) fonksiyonlardır.

iv. Φ ailesi maksimaldir. Yani ψ bir $U \subset S$ açık kümesinden $\psi(U) \subseteq \mathbb{C}$ açık kümesi üzerine, herbir

$$i \in I \ , \quad U_i \cap U \neq \emptyset \quad \text{ve} \quad z \in \psi(U_i \cap U) \neq \emptyset$$

için,

$$z \to \psi_i o \psi^{-1}(z)$$

dönüşümü analitik olacak şekilde bir homeomorfizma ise,

$\psi \in \Phi$ dır.

Bir Riemann yüzeyi topolojik uzay olarak kompakt ise "kapalı Riemann yüzeyi" , kompakt değilse, " açık Riemann yüzeyi" denir. Biz bu çalışmada kapalı Riemann yüzeyleri ile ilgileneceğiz. Ancak çalışmamızın son bölümünde Riemann-Roch teoreminin sonuçları ile ilgili olarak kompakt kenarlı Riemann yüzeylerine de kısaca değineceğiz.

S Riemann yüzeyi üzerinde bir Φ_o fonksiyonlar ailesi yukarıdaki (i), (ii) ve (iii) koşullarını sağlıyorsa, bu Φ_o ailesi bir Maksimal Φ ailesine genişletilebilir ve S, Φ konform yapısına sahip bir Riemann yüzeyi olur. Ayrıca bu Φ konform yapısı tek olarak belirtilmiştir. Bu şekildeki Φ_o ailesine S üzerindeki konform yapının bir tabanıdır denir. Buna göre bir Riemann yüzeyini belirtmek için, yüzey üzerindeki konform yapının bir tabanını (yani yukarıdaki ilk üç koşulu sağlayan bir fonksiyonlar ailesinin) belirtmek yeterli olacaktır. Bir Riemann yüzeyi Φ konform yapısı ile birlikte (S,Φ) şeklinde göstermek uygunsa da, biz kısalık olsun diye sadece S ile göstereceğiz.

Yukarıdaki tanımdan görüldüğü gibi bir S Riemann yüzeyi yerel olarak kompleks düzlemle aynı yapıya sahiptir. Φ ailesinde bulunan ψ_i fonksiyonlarına yerel parametre (yerel koordinat) denir. Tanım kümesi U olan bir $\psi \in \Phi$ alalım. Bir $P \in U$ noktası $z \in \psi(P)$ ile tek şekilde belirtilmiştir. ψ homeomorfizma olduğundan farklı $z \in \psi(U)$ noktaları farklı $P \in U$ noktalarına karşılık gelir. Bu ise bize $\psi(U)$ da bulunan z nin bir yerel değişken olarak kullanılabileceğini gösterir. Hatta kompleks z noktasının karşılık geldiği $P \in S$ noktası yerine kullanmak mümkündür. Ancak bunu kullanabilmek için, S üzerinde bir z yerel değişkenine göre ifade edilen bir özelliğin yerel koordinatların değişiminden bağımsız olması gerekir.

U_i, S de kapanışı kompakt ve $\psi_i(U_i)$ düzlemde birim disk ise, U_i ye parametrik disk denir.

Teorem 1. S bir Riemann yüzeyi ise, herbir $P \in S$ noktası bir parametrik diskin merkezidir.

İspat. P_o , S Riemann yüzeyi üzerinde bir nokta olsun. Bu durumda P_o , U_i kümelerinin bir çoğunda bulunabilir. Böylece P_o civarında birçok yerel parametreler mevcut olabilir. Bundan başka yeni yerel parametreler de elde edebiliriz. Şöyleki,

$z = \psi_i(P)$, U_i de P_o ın komşuluğunda bir yerel koordinat sistemi ve $w = f(z)$ dönüşümü $\psi_i(U_i)$ den kompleks düzlemin bir açık kümesi üzerine bire-bir konform dönüşüm ise, $f(\psi_i(P)) = w$ dönüşümü de P_o komşuluğunda bir yerel parametredir. Bu yerel parametreye ψ_j diyelim. Özellikle $\psi_i(P_o) = z_o$ ve r yeter derecede küçük seçilirse, $|z-z_o| < r$ diski U_i de bulunur.

$$w = \frac{z-z_o}{r}$$

alınırsa, $w = \psi_j(P)$, P_o komşuluğunda yeni bir yerel parametre olup, $\psi_j(P_o) = 0$ ve $|w| < 1$ dir. Böylece S üzerindeki her nokta bir parametrik diskin ($|w| < 1$) merkezidir.

Riemann yüzeyi üzerindeki bir f fonksiyonu yerel koordinatların bir fonksiyonu olarak gözönüne alınabilir. ve bu fonksiyonun bazı özellikleri yerel koordinatlar cinsinden incelenebilir. Fakat yerel koordinatlar cinsinden incelenen özelliklerin bir kısmı (örneğin integral kavramı) yerel koordinatların değişiminden bağımsız olmayabilir. Bu nedenle incelenen özelliğin yerel koordinatların değişiminden bağımsız olup olmadığı öncelikle araştırılmalıdır.

$$f : S \to \mathbb{C}$$

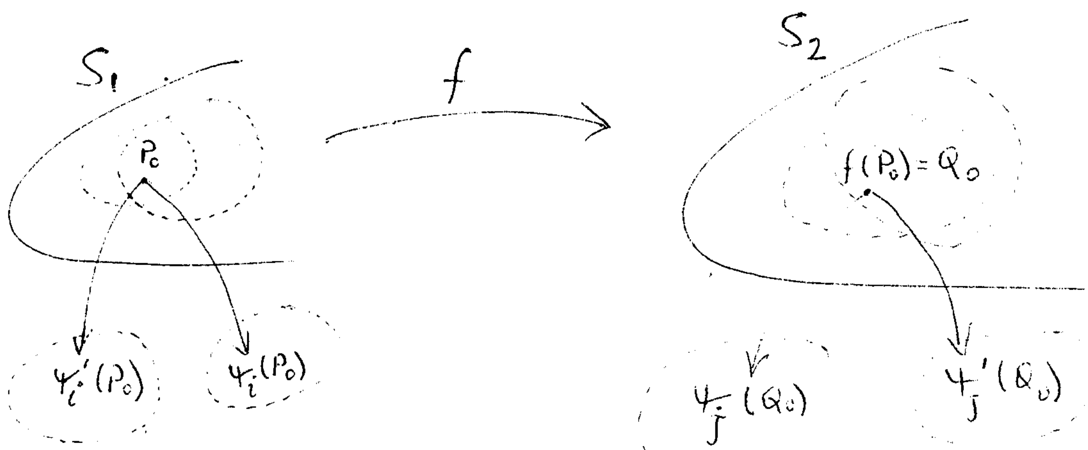
fonksiyonu $\psi_i(P_o) = 0$ ın komşuluğundaki $z = \psi_i(P)$ yerel parametresi cinsinden P_o da analitik ise (yani $0 < |z| < r$ de $f(\psi_i^{-1}(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ise), f ye P_o da regüler analitik (veya holomorf) fonksiyondur denir. Bu analitiklik kavramı yerel koordinatların seçiminden bağımsızdır. Çünkü, bir analitik fonksiyonun analitik fonksiyonu yine bir analitik fonksiyondur.

S bir Riemann yüzeyi ve $u(x,y)$, $G \subset S$ bölgesi üzerinde tanımlı gerçel değerli bir fonksiyon olsun. $u(x,y)$ yerel olarak bu bölge üzerinde tanımlı bir analitik (regüler analitik) fonksiyonun reel kısmı oluyursa, $u(x,y)$ ye "harmonik fonksiyon" denir. Bir sonraki bölümde analitik ve harmonik fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi ayrıntılı bir şekilde inceleyeceğiz. Bu fonksiyonlar arasında bire-bir bir ilişki olmadığı halde analitik diferansiyel formlar ile harmonik diferansiyel formlar arasında bire-bir bir ilişki olduğunu göreceğiz.

S_1 ve S_2 iki Riemann yüzeyi ve $f : S_1 \to S_2$ fonksiyonu verilsin. P_o ve $f(P_o) = Q_o$ ın komşuluğundaki yerel parametreler sırası ile $z = \psi_i(P)$ ve $w = \psi_j(Q)$ olsun.

$$w = (\psi_j o f o \psi_i^{-1})(z) = g(z)$$

fonksiyonu her $P_o \in S_1$ için analitik ise, f fonksiyonuna S_1 üzerinde analitiktir diyeceğiz. Bu tanım yerel koordinatların değişiminden bağımsızdır. Çünkü aşağıdaki diyagramdan görüleceği üzere, P_o ve Q_o komşuluğundaki yeni yerel parametreler sırası ile ψ'_i ve ψ'_j ise,



$$\psi'_j o f o (\psi'_i)^{-1}(z) = \psi'_j o \psi_j^{-1} o \psi_j o f o \psi_i^{-1} o \psi_i o (\psi'_i)^{-1} \ (z)$$

şeklinde yazılabileceğinden, analitiklik kavramının yerel koordinatların değişiminden bağımsız olduğu görülür. Zira yukarıdaki son eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki fonksiyonun bileşkesinin ve son iki fonksiyonun bileşkesinin analitik olduğu Riemann yüzeyinin tanımı gereği bilinmektedir. Ortadaki $\psi_j o f o \psi_i^{-1}$ bileşkesi ise, tanım gereği analitiktir.

S_1 ve S_2 iki Riemann yüzeyi olsun. Bu yüzeyler arasında bire-bir bir analitik dönüşüm varsa, S_1 ve S_2 ye konform eşdeğerdir denir.

BÖLÜM 2

2. RIEMANN YÜZEYİ ÜZERİNDE DİFERANSİYELLER VE İNTEGRALLER

2.1 Birinci Mertebe Diferansiyeller

(x,y) düzleminde
$C = (\alpha, I)$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (x,y)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$
diferansiyellenebilir eğrisi ve bu eğriyi bulunduran bir bölgede kompleks değerli, sürekli $p(x,y)$ ve $q(x,y)$ fonksiyonları verilsin. C eğrisi üzerindeki $\int_C pdx + qdy$ eğrisel integral aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\int_C pdx + qdy = \int_{t=0}^{1} \{p(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \frac{d\alpha_1}{dt} + q(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \frac{d\alpha_2}{dt}\} dt$$

$$= \int_{t=0}^{1} \{p(x,y) \frac{dx}{dt} + q(x,y) \frac{dy}{dt}\} dt \qquad (2.1)$$

Şimdi (x,y) düzlemi yerine bir S Riemann yüzeyi üzerindeki bir C eğrisi boyunca eğrisel integrali tanımlamaya çalışalım.

$z = x + iy$ yerel parametresi cinsinden C eğrisi yine yukarıdaki gibi verilmiş olsun. $w = u + iv$ ve $z = g(w)$ konform dönüşüm olmak üzere yeni değişkenler alındığında C eğrisi $w = g^{-1}(\alpha_1(t) + i\alpha_2(t))$ ile verilmiş olup,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt}$$

dır. Buradan

$$\int_C p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$$

$$= \int_{t=0}^{1} \left\{ \left[p(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \frac{\partial x}{\partial u} + q(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \frac{\partial y}{\partial u} \right] \frac{du}{dt} \right\}$$

$$+ \left\{ \left[p(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \frac{\partial x}{\partial v} + q(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \frac{\partial y}{\partial v} \right] \frac{dv}{dt} \right\} dt$$

$$= \int_{\tilde{C}} \tilde{p}(u,v)\,du + \tilde{q}(u,v)\,dv$$

elde edilir.

$$\tilde{p}(u,v) = p(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial x}{\partial u} + q(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\tilde{q}(u,v) = p(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial x}{\partial v} + q(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial y}{\partial v} \qquad (2.2)$$

yazılırsa,

$$\int_C p(x,y)dx + q(x,y)dy = \int_{\tilde{C}} \tilde{p}(u,v)du + \tilde{q}(u,v)dv$$

bulunur. O halde eğriyi belirten yerel parametreler değiştiğinde eğrisel integralin invaryant kalması için (2.2) bağıntılarının sağlanması gerekir. Şimdi buna dayanarak Riemann yüzeyi üzerindeki birinci mertebe diferansiyel formu (bundan sonra sadece diferansiyel diyeceğiz) tanımlayalım.

S Riemann yüzeyi üzerinde bir G bölgesi ve bu bölgede (x,y) yerel parametresi verilmiş olsun. p(x,y) ve q(x,y) G bölgesinde tanımlı kompleks değerli (veya reel değerli) fonksiyonlar olmak üzere

$$w(x,y) = p(x,y)dx + q(x,y)dy$$

şeklindeki ifadeye birinci mertebe diferansiyel diyeceğiz. Ancak (x,y) yerel parametresi yerine (u,v) yerel parametresi alındığında yukarıdaki diferansiyel

$$w(u,v) = \tilde{p}(u,v)du + \tilde{q}(u,v)dv$$

şekline dönüşeceğinden buradaki $p,q,\tilde{p}$ ve $\tilde{q}$ katsayılarının (2.2) bağıntılarını sağlamaları gerekir. Yani yerel koordinatların değişiminde katsayılar (2.2) bağıntılarını sağlıyorlarsa, $w(x,y) = p(x,y)dx+q(x,y)dy$ ifadesine birinci mertebe diferansiyel diyeceğiz.

f, G bölgesinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon olsun. $\psi(P) = (x,y)$ yerel parametresi cinsinden fw yı,

$$fw = f(\psi^{-1}(x,y))p(x,y)dx + f(\psi^{-1}(x,y))q(x,y)dy$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda fw da birinci mertebe diferansiyeldir. Çünkü $x+iy = g(u+iv)$ yeni değişkeni alındığında, w birinci mertebe diferansiyel olduğundan fw nın katsayıları da (2.2) bağıntılarını sağlayacaktır.

$w_1 = p_1dx+q_1dy$, $w_2 = p_2dx+q_2dy$ birinci mertebe diferansiyeller olsun. Bu takdirde

$$w_1 + w_2 = (p_1+p_2)dx + (q_1+q_2)dy$$

toplamı da birinci mertebe diferansiyeldir.

$w = pdx + qdy$ birinci mertebe diferansiyelinde p ve q fonksiyonlarına w nın katsayıları denir. w nın katsayıları sürekli ise, w ya sürekli, w nın katsayıları C^∞ sınıfından ise, w ya C^∞ veya düzgün (smooth) diferansiyel denir. Örneğin f, S üzerinde C^∞ sınıfından ise,

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{2.3}$$

diferansiyeli S üzerinde düzgün birinci mertebe diferansiyeldir. Buna f nin "total diferansiyeli" denir. f S üzerinde C^2 sınıfından ise, f nin total diferansiyeline "tam diferansiyel" denir.

$w = pdx + qdy$ bir tam diferansiyel ise,

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x} \tag{2.4}$$

dır. Tersine basit bağlantılı bir bölgede (2.4) koşulu sağlanıyorsa w bir f fonksiyonunun total diferansiyelidir.

Böylece w diferansiyeli her bir parametrik diskte (2.4) eşitliğini sağlıyorsa, w yerel olarak tam diferansiyeldir. Fakat yerel olarak $w = df$ şeklindeki tam diferansiyel S nin bütününde tek değerli olmayabilir. Böylece w S nin bütününde tek değerli bir fonksiyonun total diferansiyeli olmayacaktır. Bir w diferansiyelinin $G \subset S$ bölgesi üzerinde katsayılarının birinci mertebeden sürekli kısmi türevleri mevcut ve her bir parametrik diskte bu kısmî türevler (2.4) eşitliğini sağlıyorsa, w yerel olarak tam diferansiyel olup, buna G bölgesinde "kapalı diferansiyel" denir.

2.1.1 Eğrisel integral.

$C = (\alpha, I)$, S üzerinde bir tek parametrik diskte bulunan diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Bu parametrik diskteki yerel parametre $\psi(P) = (x,y)$ ve $\psi(C) = (\psi o \alpha, I)$ olsun. w diferansiyeli C yi bulunduran bir bölgede sürekli ise, w nın C üzerindeki integrali

$$\int_C w = \int_{\psi(C)} pdx+qdy$$

şeklinde tanımlanır. Bu ifade (2.2) bağıntısına göre iyi tanımlıdır. Yani yerel koordinatların değişiminden bağımsızdır.

Şimdi C eğrisinin bir tek parametrik disk içinde bulunmadığı durumda eğrisel integrali tanımlayalım. C eğrisi kompakt olduğundan, bunu

$$0 = t_o < t_1 < \dots < t_n = 1, \quad I_i : t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$$

olmak üzere sonlu sayıda $C_i = (\alpha, I_i)$ parçalarına ayırabiliriz. Ancak bu ayırmayı o şekilde yapalım ki her bir C_i bir tek parametrik diskte bulunsun. Buna göre

$$\int_C \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} \omega$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu tanım birim aralığın ve C nin ayrışımından bağımsızdır. Şimdi bunu gösterelim. t_{i-1} ve t_i arasına bir tek t' noktası ilave ederek C_i yi C_i' ve C_i'' parçalarına ayırırsak, integralin toplamsallığı ve bir tek parametrik diskteki integralin koordinat değişiminden bağımsız olduğu gözönüne alınırsa,

$$\int_{C_i} w = \int_{C_i'} w + \int_{C_i''} w$$

elde edilecektir. Böylece $\int_C w$ bu ayrışım ile de aynı değere sahip olacaktır. Herhangi bir ayrışım sıra ile tek noktaların ilavesi ile elde edilebileciğinden, $\int_C w$ herhangi bir ayrışımda da aynı değeri muhafaza edecektir.Birim aralığın ikinci bir ayrışımı

$$0 = t_o' < t_1' < \dots < t_m' = 1$$

ise, birim aralığın bu ayrışımı ile ilk ayrışım C nin bir parçalanışını verecektir. Bu parçalanış ile elde edilen integral orijinal integrallerin her ikisine de eşit olacaktır

C eğrisi parçalı diferansiyellenebilir bir eğri ise, C_i ler diferansiyellenebilir eğriler olmak üzeri $C = C_1 C_2 \dots C_n$ olacağından,

$$\int_C \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} \omega$$

yazılabilir. Böylece sürekli bir diferansiyelin parçalı diferansiyellenebilir bir eğri üzerindeki eğrisel integrali tanımlanmış olur.

C kapalı eğri ise, $\int_C w$ ya w nın C üzerindeki "periyodu" denir.

w kapalı diferansiyel ve $C = (\alpha, I)$, S üzerinde bir D parametrik diskinde bulunan diferansiyellenebilir bir eğri olsun. D de C yi $x=\alpha_1(t)$, $y=\alpha_2(t)$ $(t \in I)$

şeklinde belirtelim ve $w = df(x,y)$ olsun. Buna göre

$$\int_C \omega = \int_C df = \int_{t=0}^{1} df(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = f(\alpha(1)) - f(\alpha(0))$$

dır. $\alpha(0) = P_o$ ve $\alpha(1) = P_1$ ise,

$$\int_C \omega = f(P_1) - f(P_0)$$

olur. Böylece integral sadece f nin, C eğrisinin uç noktalarında aldığı değerlere bağlıdır.

C eğrisi bir tek parametrik disk içinde değilse, C yi,

$0 = t_o < t_1 < \ldots < t_n = 1$ için $I_k : t_{k-1} \leq t \leq t_k$

alt aralığı olmak üzere, $C_k = (\alpha, I_k)$ alt yaylarına ayırabiliriz. Bu ayrışımı o şekilde yapabiliriz ki her bir C_k yayı bir tek parametrik diskte bulunur. C_k yaylarının son noktalarını $\alpha(t_k) = P_k$ ile gösterelim. Bu takdirde $f_k(P)$, $P \in D_k$ için tanımlı olmak üzere, yerel olarak $w = df_k$ şeklinde yazılabilir. D_k diskinde f_k fonksiyonu bir sabit farkı ile belirli olduğundan $P,Q \in D_k$ için $f_k(P)-f_k(Q)$ farkı iyi tanımlıdır ve D_k da kullanılan yerel koordinatlardan bağımsızdır.Şimdi

$$\int_C \omega = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} df_k = \sum_{k=1}^{n} \{f_k(P_k) - f_k(P_{k-1})\} \tag{2.5}$$

diyelim.

Bir w diferansiyelinin eğrisel integralini tanımlarken diferansiyellenebilir (veya parçalı diferansiyellenebilir) eğrileri almıştık. Eğer w, S üzerinde kapalı diferansiyel ise, (2.5) eşitliğini kullanarak w nın eğrisel integralini keyfî eğrilere genişletebiliriz. $C = (\alpha, I)$, S üzerinde bir eğri ve $C_1, C_2, \ldots, C_n$ C nin bir alt böllünüşü ve her bir C_k bir D_k parametrik diskinde bulunsun. w kapalı diferansiyel olduğuna göre herbir D_k da $w = df_k$ şeklindedir. (2.5) e göre

$$\int_C \omega = \sum_{k=1}^{n} \{f_k(P_k) - f_k(P_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{f_k(\alpha(t_k)) - f_k(\alpha(t_{k-1}))\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu tanım C nin alt bölüntüsünden bağımsızdır. (Springer, 1957)

Böylece C herhangi bir eğri ve w kapalı diferansiyel ise, $\int_C w$ nın iyi tanımlı olduğu görülür.

Teorem 2. w, S üzerinde kapalı diferansiyel ve $C = (\alpha, I)$ eğrisi verilsin. Bu takdirde

$$\int_{C^{-1}} w = - \int_C w$$

dır.

İspat.

$$\begin{aligned}\int_{C^{-1}} \omega &= \sum_{k=1}^{n} \{f_{n-k}(P_{n-k}) - f_{n-k}(P_{n-k+1})\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \{f_k(P_{k-1}) - f_k(P_k)\} \\ &= - \sum_{k=1}^{n} \{f_k(P_k) - f_k(P_{k-1})\} \\ &= - \int_C \omega\end{aligned}$$

bulunur.

$C = C_1 C_2$ ise,

$$\int_{C_1 C_2} w = \int_{C_1} w + \int_{C_2} w$$

dır.

$C = (\alpha, I)$ sabit eğri ise, $\alpha(t) \equiv P_o$ dır ve $P_k = P_{k-1} = P_o$ olup,

$$\int_C \omega = 0$$

dır.

ω, S üzerinde tam diferansiyel ise, S de tanımlı bir f fonksiyonu için $\omega = df$ şeklindedir. Herhangi bir $C = (\alpha, I)$ eğrisi için

$$\int_C \omega = \int_C df = f(\alpha(1)) - f(\alpha(0))$$

dır. ω tam ve C kapalı bir eğri ise, $\alpha(1) = \alpha(0)$ olduğundan

$$\int_C \omega = 0$$

bulunur.

Teorem 3. $C_o = (\alpha_o, I)$ ve $C_1 = (\alpha_1, I)$ homotop eğriler ve ω kapalı diferansiyel ise,

$$\int_{C_0} \omega = \int_{C_1} \omega$$

dır.

İspat. C_o eğrisini C_1 eğrisine deforme eden sürekli ϕ dönüşümü,

$$\phi : I \times I \to S$$

ve

$$\phi(t,0) = \alpha_o(t) \ , \ \phi(t,1) = \alpha_1(t) \ , \quad t \in I$$

$$\phi(0,s) = \alpha_o(0) = \alpha_1(0) \ , \ \phi(1,s) = \alpha_o(1) = \alpha_1(1) \ , \quad s \in I$$

olsun.

IxI karesini n^2 sayıda eşit kareye ayıracağız. Ancak bu ayırmayı o şekilde yapacağız ki herbir karenin köşegen uzunluğu $\sqrt{2}/n$ olacak ve bu köşegen uzunluğu, S üzerindeki parametrik disklerin ϕ^{-1} ters dönüşümü altındaki görüntülerinin, IxI karesi üzerinde oluşturduğu örtünün Lebesgue sayısından(1) küçük olsun. Herbir küçük karenin ϕ altındaki görüntüsü bir tek parametrik disk içerisinde bulunacaktır.

---

(1) Lebesgue sayısı: E kompakt bir metrik uzay olsun. E nin her bir $\{U_i\}$ açık örtüsüne, aşağıdaki özelliğe sahip bir $\delta > 0$ sayısı karşılık gelir ve bu sayıya $\{U_i\}$ örtüsüne karşı gelen Lebesgue sayısı denir. Çapı δ dan küçük olan E nin herhangi bir alt kümesi, bir U_i içerisinde bulunur (Springer, 1957).

Köşeleri

$$\left(\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right),\ \left(\frac{j+1}{n},\frac{k}{n}\right),\ \left(\frac{j+1}{n},\frac{k+1}{n}\right),\ \left(\frac{j}{n},\frac{k+1}{n}\right),\qquad j,k=0,1,\ldots,n-1$$

noktalarında olan küçük karelerin çevrelerinin ϕ altındaki görüntülerinin herbiri bir parametrik disk içinde bulunan $\Gamma_{j,k}$ kapalı eğrileridir ve yönleri önceden belirtilmiştir. ω yerel olarak tam olduğundan

$$\int_{\Gamma_{j,k}} \omega = 0$$

dır. IxI içinde bulunan bir karenin herbir kenarı iki bitişik karenin kenarıdır ve bir birlerine göre ters yöne sahiptir. Buna göre,

$C\ :\ \phi(1,s)\ ,\ s\in I$

ve

$\tilde{C}\ :\ \phi(0,s)\ ,\ s\in I$

eğrilerini göstermek üzere

$$0=\sum_{j,k=0}^{n-1}\int_{\Gamma_{j,k}}\omega=\int_{C_0}\omega+\int_{C}\omega+\int_{C_1^{-1}}\omega+\int_{\tilde{C}^{-1}}\omega$$

bulunur.

$\phi(0,s)=\alpha_o(0)$ ve $\phi(1,s)=\alpha_o(1)$ olduğundan

$$\int_{C}\omega=0 \qquad \text{ve} \qquad \int_{\tilde{C}^{-1}}\omega=0$$

dır. O halde

$$\int_{C_0}\omega+\int_{C_1^{-1}}\omega=0$$

bulunur. Teorem 2 gözönüne alınırsa, bu son eşitliğin teoremin ispatı olduğu görülür.

Sonuç. C kapalı eğrisi bir noktaya homotop ve ω kapalı diferansiyel ise,

$$\int_C \omega = 0$$

dır.

Bu sonuca göre kapalı bir diferansiyelin kapalı bir eğri boyunca eğrisel integrali, bu eğrinin homotopi sınıfına bağlıdır.

2.2 İkinci Mertebe Diferansiyeller.

U_k, S Riemann yüzeyi üzerinde bir parametrik disk ve $z_k = x_k + iy_k$ bu parametrik diskte bir yerel parametre olsun. Bu parametrik diskte,

$$\Omega = c_k(z_k)\,dx_k dy_k$$

diferansiyel formunu gözönüne alalım. (Burada $c_k(z_k)$ kompleks değerli veya reel değerli bir fonksiyondur).

$U_k \cap U_j \neq 0$ olmak üzere z_j, U_j de bir yerel parametre ve $z_k \in (U_k \cap U_j)$ de c_k katsayıları

$$c_k = c_j \frac{\partial(x_j, y_j)}{\partial(x_k, y_k)} \tag{2.6}$$

bağıntısını sağlıyorsa, Ω ya ikinci mertebe diferansiyel denir ve kısaca $\Omega = c\,dxdy$ şeklinde yazılır. (Burada z_k ve z_j sırası ile U_k ve U_j parametrik disklerindeki yerel parametrelerdir). c katsayısı sürekli ise, Ω ya sürekli, c reel değerli ise, Ω ya reel, c pozitif ise, Ω ya pozitif ve c yerel olarak integrallenebiliyorsa Ω ya integrallenebilir denir.

f, S üzerinde kompleks değerli bir fonksiyon ve Ω ikinci mertebe diferansiyel ise, $\psi(P) = (x,y)$ yerel parametresi cinsinden

$$f\Omega = f(\psi^{-1}(x,y))\,dxdy$$

olmak üzere $f\Omega$ da ikinci mertebe diferansiyeldir

$\Omega_1 = c_1 dxdy$ ve $\Omega_2 = c_2 dxdy$ iki diferansiyel ise,

$$\Omega_1 + \Omega_2 = (c_1 + c_2)\,dxdy$$

toplamı da ikinci mertebe diferansiyeldir. S üzerindeki ikinci mertebe diferansiyellerin kümesi S üzerindeki sürekli fonksiyonların halkası üzerinde (önceki çarpım ve toplam ile) bir modüldür.

2.2.1 İkinci mertebe diferansiyellerin integrali.

$\Omega = c dx dy$ S üzerinde ikinci mertebeden sürekli diferansiyel olsun. G bölgesi S üzerinde bir tek parametrik disk içinde kalıyorsa, Ω nın G bölgesi üzerindeki integrali

$$\iint_G \Omega = \iint_{\psi(G)} c\,dx\,dy = \iint_{\psi(G)} c(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}du\,dv$$

şeklinde tanımlanır.

G bölgesi kapanışı kompakt ve bir tek parametrik disk içinde kalmıyorsa, $\{e_i\}$ birimin bir ayrışımı olmak üzere

$$\iint_G \Omega = \iint_G \Sigma e_i \Omega = \Sigma \iint_G e_i \Omega$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu son integraller birimin ayrışımından bağımsızdır (Rodin and Sario, 1968).

G bölgesi kapanışı kompakt olmayan bir bölge ise, $V \subset G$ kapanışı kompakt olan bir bölge olmak üzere pozitif Ω diferansiyeli için

$$\iint_G \Omega = \underset{V \subset G}{\text{l.u.b.}} \iint_V \Omega$$

şeklinde tanımlanır.

G bölgesindeki Ω diferansiyelinin mutlak değeri $|\Omega| = |c| dx dy$ şeklinde tanımlanır ve $|\Omega|$ da ikinci mertebe diferansiyeldir. Buna göre Ω reel diferansiyeli için

$$\Omega^+ = \frac{1}{2}(|\Omega| + \Omega), \quad \Omega^- = \frac{1}{2}(|\Omega| - \Omega)$$

olmak üzere

$$\iint_G \Omega = \iint_G \Omega^+ - \iint_G \Omega^-$$

dır.

Ω kompleks diferansiyeli integrallenebilir diferansiyel ise,

$$\iint_G \Omega = \iint_G \mathrm{Re}\,\Omega + i \iint_G \mathrm{Im}\,\Omega$$

şeklinde verilir.

Regüler bölge: $G \subset S$ bölgesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, G ye regüler bölge denir.

i. G nin S deki kapanışı kompakt,

ii. G nin sınırı sonlu sayıda parçalı analitik eğrilerden oluşuyor,

iii. S-G nin hiç bir bileşeni kompakt değil.

Stokes teoremi: R, S üzerinde regüler bir bölge ve ω, $\bar{R}$ de C^1 sınıfından birinci mertebe diferansiyel olsun.Bu takdirde

$$\int_{\partial R} p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\,dy$$

dır. Stokes teoreminin daha kullanışlı bir diğer şekli ise, $\omega = pdx+qdy$, f, $\bar{R}$ de C^1 sınıfından olmak üzere,

$$\int_{\partial R} f(p\,dx + q\,dy) = \iint_R f\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\,dy + \iint_R \left(q\frac{\partial f}{\partial x} - p\frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy$$

dır (Springer, 1957).

2.3 Diferansiyellerin Dış Çarpımı

Daha sonra görüleceği gibi, S Riemann yüzeyi üzerindeki fonksiyonlara sıfırıncı mertebeden diferansiyeller demek uygun olacaktır. Kompleks değerli fonksiyonları f,g,h gibi alfabenin küçük harfleri ile göstereceğiz. Birinci mertebe diferansiyelleri Greek alfabesinin küçük harfleri ile $(\omega, \gamma, \pi, \ldots)$ göstereceğiz. Yerel olarak cdxdy şeklinde ifade edilibilen ikinci mertebe diferansiyelleri ise, Greek alfabesinin büyük harfleri ile $(\Omega, \Gamma, \ldots)$ göstereceğiz.

Şimdi iki diferansiyelin dış çarpımını tanımlayalım. k ıncı mertebeden bir diferansiyel ile n inci mertebeden bir diferansiyelin çarpımı, $k+n \leqslant 2$ ise, $(k+n)$ inci mertebeden bir diferansiyel olacaktır. $(k+n) > 2$ ise, çarpım idantik olarak sıfır olacaktır. Sıfırıncı mertebeden f ve g diferansiyellerinin çarpımı f.g ile gösterilir ve $(f.g)(P) = f(P).g(P)$ şeklinde tanımlanır. Burada $f(P).g(P)$ iki kompleks sayının bilinen çarpımıdır. Sıfırıncı mertebeden f diferansiyeli ile, birinci mertebeden $\omega = pdx+qdy$ diferansiyelinin çarpımı $f\omega = (fp)dx+(fq)dy$ şeklinde tanımlanır.

$$\omega_1 = p_1\,dx + q_1\,dy, \qquad \omega_2 = p_2\,dx + q_2\,dy$$

birinci mertebe diferansiyellerin dış çarpımı,

$$dx\,dx = 0, \qquad dy\,dy = 0, \qquad dx\,dy = -dy\,dx$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \omega_1\omega_2 &= (p_1\,dx + q_1\,dy)(p_2\,dx + q_2\,dy) \\ &= p_1p_2\,dx\,dx + p_1q_2\,dx\,dy + q_1p_2\,dy\,dx + q_1q_2\,dy\,dy \\ &= (p_1q_2 - q_1p_2)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Kolayca görülebileceği gibi $\omega_1\omega_2$ çarpımı ikinci mertebe bir diferansiyeldir. Ayrıca $\omega_1\omega_2 = -\omega_2\omega_1$ dır.

Sıfırıncı mertebeden f diferansiyeli ile $\Omega = cdxdy$ ikinci mertebe diferansiyelinin çarpımı

$$f\Omega = (fc)dxdy$$

şeklinde tanımlanır.

$$d = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)dy$$

lineer diferansiyel operatörünü şu şekilde tanımlayalım.

$f \in C^1$ ise,

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy$$

ve

$\omega \in C^1$ ise,

$$d\omega = (dp)\,dx + (dq)\,dy = \left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial q}{\partial x}dx + \frac{\partial q}{\partial y}dy\right)dy$$
$$= \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)dx\,dy$$

dır.

Görüldüğü gibi d operatörü k. mertebe diferansiyele etki ettiğinde (k+1). mertebeden ($k \leqslant 1$) bir diferansiyel elde ediliyor.

$\Omega = c\,dx\,dy$ ikinci mertebe diferansiyeli için

$$d\Omega = (dc)\,dx\,dy = \left[\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)dy\right]\,dx\,dy = 0$$

dır. O halde d operatörünün aşağıdaki özelliklerini söyleyebiliriz.

i. $dd = 0$

ii. $f \in C^2$ ise, $ddf = 0$

iii. $\omega \in C^2$ ise, $dd\omega = 0$

iv. $d(fg) = fdg + gdf$

v. $d(f\omega) = (df)\omega + f(d\omega) = -\omega(df) + f(d\omega)$

Eşlenik operatör ($*$) ile gösterilir ve sadece birinci mertebe diferansiyeller için aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$*\omega = -q\,dx + p\,dy$$

ω birinci mertebe diferansiyel ise, $*\omega$ da birinci mertebe diferansiyeldir.

Yukarıdaki tanıma göre ($*$) operatörünün aşağıdaki özelliklerini kolayca görebiliriz.

$$\omega_1 = p_1\,dx + q_1\,dy \qquad \omega_2 = p_2\,dx + q_2\,dy$$

olsun.

$$*(\omega_1 + \omega_2) = *\omega_1 + *\omega_2, \qquad *(f\omega) = f(*\omega),$$

$$**\omega = *(*\omega) = -\omega$$

$$\omega_1 * \omega_2 = \omega_2 * \omega_1 = (p_1 p_2 + q_1 q_2)\, dx\, dy$$

$$\omega * \omega = (p^2 + q^2)\, dx\, dy$$

$$d = (\partial/\partial x)\, dx + (\partial/\partial y)\, dy$$ olduğuna göre,

$$*d = -(\partial/\partial y)\, dx + (\partial/\partial x)\, dy$$

şeklinde tanımlanırsa, $f \in C^1$ için,

$$*(df) = *\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = -\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy = (*d)f$$

dır.

$f \in C^2$ ve $\omega = *df$ ise, ω ya co-exact (yan-tam) diferansiyel denir.

Birinci mertebe $\omega = pdx+qdy$ diferansiyeli için,

$$*d\omega = \left(-\frac{\partial}{\partial y} dx + \frac{\partial}{\partial x} dy\right)(p\, dx + q\, dy) = \left(-\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x}\right) dx\, dy$$

ve

$$d*\omega = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)(-q\, dx + p\, dy) = \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\right) dx\, dy$$

olduğuna göre

$$*d\omega = -d*\omega$$

yazabiliriz.

$\omega \in C^1$ ve $d*\omega = 0$ ise, ω ya co-closed (yan-kapalı) diferansiyel denir. $d*\omega = 0$ ise, ω yerel olarak tam ve $\omega = df$ veya $\omega = *d(-f)$ dır. Böylece yan-kapalı diferansiyel yan-tamdır.

$f \in C^2$ ise, $\Delta = d*d$ operatörü

$$\Delta f = d*df = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx\, dy$$

şeklinde tanımlanır. Δ operatörüne Laplace operatörü denir.

2.4 Harmonik ve Analitik Diferansiyeller.

ω diferasiyeli S üzerinde $f \in C^2$ olmak üzere $\omega = df$ şeklinde yazılabiliyorsa, ω ya tam diferansiyel denir.

ω yerel olarak tam diferansiyel ise, yani herbir parametrik diskte C^2 sınıfından bir f fonksiyonunun total diferansiyeli şeklinde yazılabiliyorsa ω ya kapalı diferansiyel denir. $\omega \in C^1$ sınıfından bir diferansiyelin kapalı olması için gerek ve yeter koşul $d\omega = 0$ dır. Her tam diferansiyel kapalı olduğu halde (çünkü $ddf = 0$) her kapalı diferansiyelin tam olduğunu söyleyemeyiz.

ω kapalı diferansiyel ve C, S üzerinde kapalı bir eğri olmak üzere $\int_C \omega$ integraline ω nın periyodu denir. C ve C' bir birine homolog eğriler ise, $\int_C \omega = \int_{C'} \omega$ olduğundan bir eğri boyunca periyod, sadece eğrinin homoloji sınıfına bağlıdır. $C \sim 0$ ise, $\int_C \omega = 0$ dır. ω tam ve C kapalı bir eğri ise, $\int_C \omega = 0$ olduğundan bir tam diferansiyelin bütün periyodları sıfırdır. Buna göre aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem. Kapalı bir ω diferansiyelinin tam olması için gerek ve yeter koşul bütün periyodlarının sıfır olmasıdır.

İspat. Gerekliliği yukarıda ispatlamıştık. Yeterliliği ispatlayalım. Yani bir kapalı diferansiyelin bütün periyodları sıfır ise, tam olduğunu gösterelim.

S üzerinde sabit bir Q noktası seçelim. $\int_Q^P \omega$ integrali Q dan P ye giden herhangi bir yol boyunca iyi tanımlıdır. Çünkü, C_1 ve C_2 Q dan P ye giden herhangi iki yol ise, $C_1 C_2^{-1}$ kapalı bir yoldur ve $\int_{C_1 C_2^{-1}} \omega = 0$ dır. O halde $F(P) = \int_Q^P \omega$ fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Şimdi $F \in C^1$ ve $dF = \omega$ olduğunu gösterelim. S üzerinde bir P_o noktası alalım ve U parametrik diskinde $\psi(P) = (x,y)$ yerel parametresi için $\psi(P_o) = (0,0)$ olsun. U daki herhangi bir P noktası için,

$$F(P) = \int_Q^P \omega + \int_{P_o}^P \omega$$

dır. Burada ikinci integral P_o dan P ye giden doğru parçası üzerinde alınmıştır. Şimdi ω = pdx+qdy olmak üzere $\frac{\partial F}{\partial x}$ ve $\frac{\partial F}{\partial y}$ kısmî türevlerini hesaplayalım.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}[F(\psi^{-1}(x,0)-F(\psi^{-1}(0,0)]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_o^x p(x,0)dx$$

$$= p(0,0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \lim_{y\to 0} [F(\psi^{-1}(0,y))-F(\psi^{-1}(0,0))]$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\int_o^y q(0,y)dy$$

$$= q(0,0)$$

dır.

$\frac{\partial F}{\partial x} = p$, $\frac{\partial F}{\partial q} = q$ olduğuna göre, $F \in C^2$ ve ω =df elde edilir.

2.4.1 Harmonik diferansiyel.

Bir $f \in C^2$ fonksiyonu için. $\Delta f = 0$ ise, yani yerel olarak $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ ise, f ye harmonik fonksiyon denir.

S üzerinde $\omega \in C^1$ diferansiyeli herbir parametrik diskte, harmonik bir f fonksiyonunun total diferansiyeli şeklinde yazılabiliyorsa, (yani ω =df) ω ya "harmonik diferansiyel" denir.

ω harmonik diferansiyel ise, yerel olarak kapalıdır ve $d\omega = 0$ dır. Ayrıca herbir parametrik diskte ω = df ve $d^*df = 0$ olduğundan $d^*\omega = 0$ dır. O halde hem kapalı hem de yan kapalıdır.

Tersine, $d\omega = 0$ ve $d^*\omega = 0$ ise, birinci koşul gereği yerel olarak $\omega = df$ şeklinde yazılabilir. İkinci koşul gereği $d(^*df) = 0$ olup, f harmoniktir. Böylece ω harmonik diferansiyeldir. Buna göre $\omega \in C^1$ diferansiyelinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul $d\omega = 0$ ve $d^*\omega = 0$ dır.

$\omega = p\,dx + q\,dy$ harmonik diferansiyel olsun.

$$d\omega = \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$

$$d{*}\omega = \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$

olduğundan, yerel olarak $\partial p/\partial y = \partial q/\partial x$ ve $\partial p/\partial x = -\partial q/\partial y$ dır. Bu denklemler p ve -q için tam Cauchy-Riemann denklemleridir. Böylece bir $\omega = pdx+qdy$ diferansiyelinin harmonik olması için gerek ve yeter koşul, p-iq fonksiyonunun z=x+iy nin regüler analitik fonksiyonu olmasıdır.

S üzerinde C^1 sınıfından yerel olarak $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ şeklindeki f fonksiyonunun regüler analitik olması için, u ve v nin Cauchy-Riemann denklemlerini sağlaması gerekir.

$df = du+idv$ ve

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = {*}du$$

olduğundan, du ve dv eşlenik diferansiyellerdir. Böylece

$$df = du+i^*du\ , \quad {}^*df = {}^*du-idu = -idf$$

yazılabilir. Bundan başka $f \in C^1$ ve $^*df = -idf$ ise, f regüler analitiktir. Buradan $dv = {}^*du$ elde edilir. Bu da Cauchy-Riemann denklemleridir. Böylece $f \in C^1$ fonksiyonunun regüler analitik olması için gerek ve yeter koşul $^*df = -idf$ dır. Ayrıca reel değerli u ve v fonksiyonları $dv = {}^*du$ koşulunu sağlıyorsa, u ve v eşlenik harmonik fonksiyonlardır.

2.4.2 Analitik diferansiyel.

Bir ω diferansiyeli S üzerindeki herbir parametrik diskte bir analitik fonksiyonun total diferansiyeli olarak yazılabiliyorsa, ω ya analitik (veya holomorf) diferansiyel denir.

Bir $\omega \in C^1$ diferansiyelinin yerel olarak tam diferansiyel olması için gerek ve yeter koşul $d\omega = 0$ dır. Bu durumda $\omega = df$ şeklinde yazılabilir. f analitik ise, $*df = -idf$ (veya $*\omega = -i\omega$) dır. Buna göre bir diferansiyelin analitikliği için aşağıdaki kriteri verebiliriz. $\omega \in C^1$ diferansiyelinin S üzerinde analitik olması için gerek ve yeter koşul $d\omega = 0$ ve $*\omega = -i\omega$ dır.

Teorem 5. ω analitik diferansiyel ise, harmoniktir.

İspat. ω analitik olduğuna göre $d\omega = 0$ ve $d\overset{*}{\omega} = -id\omega = 0$ dır. O halde ω harmoniktir.

ω harmonik diferansiyel ise, $d\omega = 0$ ve $d\overset{*}{\omega} = 0$ dır. Böylece $d(*\omega) = 0$ ve $d^*(*\omega) = -d\omega = 0$ koşulu sağlandığından $*\omega$ da harmonik diferansiyeldir. $*\omega$ a, ω nın eşlenik harmonik diferansiyeli denir. Bu durumda $\gamma = \omega + i*\omega$ analitik diferansiyeldir. Çünkü $d\gamma = d\omega + id*\omega = 0$ ve $*\gamma = *\omega - i\omega = -i\gamma$ dır. Böylece her harmonik diferansiyele $\omega + i*\omega$ şeklinde bir analitik diferansiyel karşılık gelir.

Şimdi bir diferansiyelin kompleks eşleniğini tanımlayalım. $f = g+ih$ kompleks değerli fonksiyonun kompleks eşleniği $\bar{f} = g-ih$ olsun. Bu takdirde $\omega = pdx\ qdy$ diferansiyelinin kompleks eşleniği $\bar{\omega} = \bar{p}dx + \bar{q}dy$ şeklinde tanımlanır. Burada $\bar{p}$ ve $\bar{q}$ kompleks değerli p ve q fonksiyonlarının kompleks eşlenikleridir. Benzer şekilde $\Omega = cdxdy$ ikinci mertebe kompleks diferansiyelinin kompleks eşleniği $\bar{\Omega} = \bar{c}$ dxdy şeklinde tanımlanır. Ayrıca $d\bar{\omega} = \overline{d\omega}$ ve $*\bar{\omega} = \overline{*\omega}$ dır.

$\omega = p\,dx + q\,dy$ kompleks diferansiyeli verilsin.

$$\gamma = \frac{\omega + \bar{\omega}}{2} = \frac{p+\bar{p}}{2}dx + \frac{q+\bar{q}}{2}dy$$

diferansiyeline ω nın reel kısmı denir. Her analitik diferansiyelin reel kısmı harmoniktir. Tersine her reel harmonik diferansiyel bir analitik diferansiyelin reel kısmıdır. Reel harmonik diferansiyellerle analitik diferansiyeller arasındaki bu dualite fonksiyonlar arasında yoktur. Çünkü, f, S üzerinde reel harmonik fonksiyon ise, S üzerinde tek değerli ve $\partial f/\partial x = \partial g/\partial y$, $\partial f/\partial y = -\partial g/\partial x$ koşullarını sağlayan tek değerli bir konjuge g harmonik fonksiyonu mevcut olmayabilir. Böylece S üzerinde reel kısmı f olan tek değerli holomorf fonksiyon bulunmayabilir.

Bundan sonra bir Riemann yüzeyi üzerindeki harmonik ve analitik fonksiyonlar ile diferansiyellerin C^1 sınıfından olduğunu kabul edeceğiz ve bunlara regüler fonksiyonlar veya diferansiyeller diyeceğiz. Ayrıca fonksiyonların veya diferansiyellerin C^1 sınıfından olmadığı ayrık noktalar ile de ilgileneceğiz. Böyle noktalarda fonksiyonların veya diferansiyellerin singüleriteleri vardır denir.

h fonksiyonu bir $P_o \in S$ noktasının U komşuluğunda tanımlı ve $U-P_o$ da harmonik (veya analitik) ve regüler olsun. Eğer harmonik (veya analitik) f fonksiyonu için, f-h fonksiyonu U da regüler harmonik (veya analitik) ise, f ye P_o da h singüleritesine sahiptir diyeceğiz. Benzer şekilde bir θ diferansiyeli P_o ın U komşuluğunda tanımlı ve $U-P_o$ da regüler harmonik (veya analitik) olsun. Eğer harmonik (veya analitik) ω diferansiyeli için, $\omega-\theta$ diferansiyeli U da regüler harmonik (veya analitik) ise, ω ya P_o da θ singüleritesine sahiptir denir.

Bir f analitik fonksiyonu, $\psi(P)=z=x+iy$, $\psi(P_o)=0$ yerel parametresi cinsinden,

$$g(z) = f(\varphi^{-1}(z)) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots, \qquad a_n \neq 0$$

şeklindeki bir seri ile ifade edilmiş olsun.

$n > 0$ ise, f nin P_o da n. mertebeden sıfır yeri vardır denir.

$n < 0$ ise, f nin P_o da -n. mertebeden kutup yeri vardır denir.

Sıfır ve kutup yerlerinin mertebesi tanımı koordinat değişiminden bağımsızdır. Yerel olarak n tam sayısı

$$\lim_{z \to 0} z^{-k} g(z)$$

ifadesinin sıfırdan farklı bir sonlu değere sahip olması ile belirtilmiştir. Koordinatları $z = \zeta(w)$, $\zeta(0) = 0$ ve $\zeta'(0) \neq 0$ konform dönüşümü ile değiştirdiğimizi kabul edelim.

$$\tilde{g}(w) = g(\zeta(w))$$

ve

$$\lim_{w \to 0} w^{-n} \tilde{g}(w) = \lim_{w \to 0} w^{-n} g(\zeta(w))$$

$$= \lim_{w \to 0} (w^{-n}/z^{-n})\, z^{-n} g(z)$$

$$= \zeta'(0)^n \lim_{z \to 0} z^{-n} g(z)$$

limit değeri sıfırdan farklı ve sonludur.

f fonksiyonunun P_o da n. mertebeden kutup yeri varsa, f nin singüleritesi (veya esaskısmı)

$$h(\varphi^{-1}(z)) = \frac{a_{-n}}{z^n} + \frac{a_{-n+1}}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z}$$

şeklindedir.

Bir Riemann yüzeyi üzerinde singüler noktaları sadece kutup noktaları olan analitik fonksiyonlara "meromorf fonksiyonlar" denir.

Yerel olarak,

$$\omega = p(z)\,dz = (a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots)\,dz, \qquad a_n \neq 0$$

şeklinde ifade edilen bir analitik diferansiyelde,

$n > 0$ ise, ω nın P_o da n. mertebeden sıfır yeri,

$n < 0$ ise, ω nın P_o da $-n$. mertebeden kutup yeri vardır denir. Bir analitik diferansiyelin sıfır yeri ve kutup yeri tanımı koordinat değişiminden bağımsızdır.(Springer, 1957)

Eğer ω diferansiyelinin n. mertebeden bir kutup yeri varsa, bunun singüleritesi

$$\theta = (a_{-n} z^{-n} + a_{-n+1} z^{-n+1} + \cdots + a_{-1} z^{-1})\,dz$$

şeklindedir.

Birinci mertebeden kutba, basit kutup denir. Singüleriteleri sadece kutuplar olan analitik diferansiyele "meromorf diferansiyel" denir.

$D : (|z| < r)$, P_o komşuluğunda bir parametrik olsun. ω, sadece P_o da bir kutbu ve singüleritesi θ olan bir analitik diferansiyel olsun. Bu takdirde $\omega-\theta$ D de analitiktir ve

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} \theta + \int_{\partial D} (\omega - \theta)$$

dır. Sağ taraftaki ikinci integral Cauchy teoremi gereği sıfırdır. Buna göre,

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} \theta = \sum_{k=1}^{N} \int_{\varphi=0}^{2\pi} i a_{-k} r^{1-k} e^{i(1-k)\varphi} \, d\varphi = 2\pi i a_{-1}$$

dır. $\int_{\partial D} \omega$ integrali koordinat değişiminden bağımsız olduğuna göre, ω nın seriye açılımındaki a_{-1} katsayısı yerel koordinat değişiminden bağımsızdır. a_{-1} katsayısına ω nın P_o daki rezidüsü denir.

Teorem 6. S kompakt Riemann yüzeyi olsun. ω meromorf diferansiyelinin rezidüleri toplamı sıfırdır.

İspat. S kompakt olduğuna göre ω nın sadece sonsayıda $P_1, P_2, \ldots, P_m$ ayrık noktalarda kutbu mevcuttur. ω nın P_k noktasındaki rezidüsü $a_{-1}^{(k)}$ olsun. P_k noktası komşuluğundaki D_k parametrik diskini öyle seçelim ki $j \neq k$ için $D_k \cap D_j = \emptyset$ olsun. Bu takdirde

$G = S - \bigcup_{k=1}^{m} D_k$, S üzerinde regüler bölgedir ve

$\int_{\partial G} \omega = 0$ dır. $\partial G = \bigcup \partial D_k$ olup ∂G, ∂D_k lara göre negatif yönlenmiştir. Böylece

$$\int_{\partial G} \omega = -\sum_{k=1}^{m} \int_{\partial D_k} \omega = -2\pi i \sum_{k=1}^{m} a_{-1}^{(k)} = 0$$

elde edilir.

Teorem 7. $\omega_1 = p_1 dz$ ve $\omega_2 = p_2 dz$ S üzerinde iki meromorf diferansiyel olsun. Bu takdirde,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p_1(z)}{p_2(z)} = f(z)$$

S üzerinde bir meromorf fonksiyondur.

İspat. f(z) nin singüler noktaları sadece ω_1 in kutupları ve ω_2 nin sıfır yerleridir. Buna göre S üzerinde verilen bir noktaya sadece bir değer karşı gelmektedir. Ayrıca bu değer yerel koordinatların seçiminden bağımsızdır. Çünkü $z = \zeta(w)$ koordinat değişimleri arasında bir konform dönüşüm olsun. Bu takdirde

$$\tilde{p}_1(w) = p_1(z)\left(\frac{dz}{dw}\right), \quad \tilde{p}_2(w) = p_2(z)\left(\frac{dz}{dw}\right)$$

ve

$$\tilde{p}_1(w)/\tilde{p}_2(w) = p_1(z)/p_2(z)$$

dır. O halde verilen koordinat sistemine bağlı olmaksızın verilen bir noktaya bir nümerik değer karşı gelmektedir.

f, S üzerinde meromorf bir fonksiyon olsun. Bu takdirde df ve $\frac{df}{f}$ meromorf diferansiyellerdir. f yerel olarak

$$\begin{aligned} g(z) &= f(\varphi^{-1}(z)) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots \\ &= z^n(a_n + a_{n+1} z + \cdots), \qquad a_n \neq 0 \end{aligned}$$

şeklinde seriye açılmış ise, yerel olarak

$$\frac{df}{f} = \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = d(\log g(z)) = \left(\frac{n}{z} + b_0 + b_1 z + \cdots\right) dz$$

dır. Böylece f nin bir sıfır yerinde, $\frac{df}{f}$ nin rezidüsü f nin sıfır yerinin mertebesidir. f nin bir kutup yerinde $\frac{df}{f}$ nin rezidüsü, f nin kutup yerinin mertebesinin negatifidir. Kompakt bir yüzey üzerinde meromorf bir fonksiyonun rezidüleri toplamı sıfır olduğundan, kompakt Riemann yüzeyi üzerinde meromorf bir fonksiyonun sıfır yerleri mertebelerinin toplamı (N), kutup yerleri mertebelerinin toplamına (P) eşittir. Buna göre A bir kompleks sayı olmak üzere, f-A meromorf fonksiyonu kompakt bir Riemann yüzeyi üzerinde A değerini f nin kutuplarının mertebelerinin toplamı kadar alır.

G, S üzerinde bir regüler bölge ve ω, $\bar{G}$ de analitik ve G de $P_1, P_2, \ldots, P_m$ noktalarında kutupları olan bir diferansiyel olsun. ω nın P_k daki rezidüsü $a_{-1}^{(k)}$ olmak üzere,

$$\int_{\partial G} \omega = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} a_{-1}^{(k)}$$

dır.

f, $\bar{G}$ de analitik ve f nin G de sonlu sayıda sıfırları ve kutupları olsun. Ayrıca f, ∂G üzerinde regüler olsun. Bu takdirde $\frac{df}{f}$ nin G deki rezidüleri toplamı

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{df}{f}$$

dır. Böylece $\frac{df}{f}$ nin rezidüleri toplamı N-P ye eşittir. Buna göre

$$\int_{\partial G} \frac{df}{f} = 2\pi i(N-P)$$

olur.

BÖLÜM 3

3. KOMPAKT RIEMANN YÜZEYLERİ

3.1 Regüler Harmonik ve Analitik Diferansiyeller.

Bu kesimde sadece kompakt Riemann yüzeyi üzerindeki harmonik ve analitik fonksiyonları inceleyeceğiz. Burada temel problem, singüleriteleri önceden belirtilmiş analitik fonksiyonları (veya tam analitik diferansiyellerin) mevcut olup olmadığını belirtmek ve eğer mevcutsa ne kadar farklı fonksiyon mevcut ve bu fonksiyonlar arasındaki ilişkilerin ne olduğudur. Bunlar bize kompakt Riemann yüzeyleri ile cebirsel fonksiyonlar arasındaki ilişkileri belirleyecektir. Bunun için önce yüzey üzerinde her yerde regüler harmonik diferansiyelleri inceleyeceğiz.

S bir Riemann yüzeyi ve $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$ S üzerinde sıfırdan farklı diferansiyellerin sonlu bir ailesi olsun. Hepsi birden sıfır olmayan $c_1,c_2,\ldots,c_n$ sayıları F cisminden seçilmek üzere

$$c_1\omega_1+c_2\omega_2+\cdots+c_n\omega_n=0$$

ise, $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$ diferansiyellerine lineer bağımlı denir.. Eğer böyle sayılar mevcut değilse, $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$ diferansiyellerine lineer bağımsız denir. Biz F cismi olarak reel sayılar veya kompleks sayılar cismini alacağız.

Bir Riemann Yüzeyinin cinsi (genus):

Herhangi bir Riemann yüzeyi yerel kompakt Hausdorff uzayıdır. Böyle bir uzay ise daima kompakt yapılabilir. O halde S bir Riemann yüzeyi ve S^* kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere, S den S^* içine, S nin görüntüsü açık ve S^* da yoğun (dense) olacak şekilde bir topolojik eşyapı dönüşümü varsa, S^* a , S nin bir kompaktifikasyonu ve

$$\Delta = S^*-S$$

kümesine de S nin ideal sınırı denir.

Burada özel olarak Kerékjártó-Stoilow kompaktifikasyonunu tanımlayacağız.

$\bar{\mathbb{C}}$ genişletilmiş kompleks düzlemi göstersin. $[0,1]$ kapalı aralığında bulunan Cantor kümesini gözönüne alalım. Δ bu Cantor kümesinin bir kapalı alt kümesi olsun. Üst yarı düzlemde, kapanışları birbirini kesmeyen sonlu ya da sayılabilir sayıda açık Δ_g disklerinin $\{\Delta_g\}$ ailesini, düzlemin bir noktasına yığılmayacak şekilde seçelim. Ancak bu diskler Δ ya ait bazı noktalara yığılabilirler. Şimdi bu Δ_g disklerinin reel eksene göre simetrikleri olan Δ'_g açık disklerinin $\{\Delta'_g\}$ ailesini alalım. Bir Δ_g nin sınırında bulunan her z noktasının $\bar{z}$ ile özdeşlendiğini kabul edersek,

$$S^* = \bar{\mathbb{C}} - \cup \Delta_g \cup \Delta'_g$$

bir kompakt topolojik uzay olur. Herhangi bir S Riemann yüzeyi bu şekilde belirtilmiş olan $S^* - \Delta$ ya homeomorf olur (Richards, 1963).

S^* uzayına S nin Kerékjarto-Stoilow kompaktifikasyonu, Δ ya S nin Kerékjarto-Stoilow ideal sınırı ve Δ_g disklerinin sayısına da S nin cinsi denir.

S kapalı yüzey ise, Δ boş kümedir. Yani ideal sınır sözkonusu değildir ve S nin cinsi sonlu bir sayıdır.

S cinsi g olan bir Riemann yüzeyi ve H, S üzerindeki harmonik diferansiyellerin Hilbert uzayı olsun. S nin normal şekli 4g kenarlı bir poligon olup kenarlar $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ sembolleriyle gösterilir. a_i ve b_i kapalı eğrileri parçalı analitik eğriler olarak alınabilir. Çünkü her Riemann yüzeyinin kenarları analitik eğrilerden müteşekkil üçgenler ile üçgenlenebildiği bilinmektedir(Ahlfors and Sario, 1960). Bundan başka $\{a_i, b_i\}_{i=1}^{g}$ ailesi, S üzerindeki devirler için bir homoloji tabanıdır (Rodin and Sario, 1968). Yani S üzerindeki herhangi bir c deviri a_i ve b_i eğrilerinin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

$\omega \in H$ ve ω kapalı diferansiyel ise, ω nın herhangi bir c deviri üzerindeki periyodu, c ye homolog bir devir üzerindeki periyoduna eşittir. Buna göre,

$c \sim \sum_{i=1}^{g} \lambda_i a_i + \mu_i b_i$ olmak üzere

$$\int_c \omega = \int_{\sum \lambda_i a_i + \mu_i b_i} \omega = \sum_{i=1}^{g} \lambda_i \int_{a_i} \omega + \mu_i \int_{b_i} \omega$$

dır. Böylece ω nın herhangi bir c deviri üzerindeki periyodu a_i, b_i $(i = 1,2,\ldots,g)$ devirlerinin periyodu cinsinden ifade edilebilir. ω nın a_i ve b_i devirleri üzerindeki periyodlarını sırası ile A_i ve B_i ile gösterelim. Yani

$$A_i = \int_{a_i} \omega, \qquad B_i = \int_{b_i} \omega$$

olsun.

$i = 1,2,\ldots,g$ için $A_i = 0$ ve $B_i = 0$ ise, ω tam diferansiyeldir. Fakat kompakt Riemann yüzeyi üzerinde tam harmonik diferansiyeller idantik olarak sıfır olmak zorundadır.

Bir ω diferansiyelinin herhangi bir c deviri boyunca periyodu A_i ve B_i periyodları ile tam olarak belirtilmiştir. Şimdi harmonik diferansiyellerin H vektör uzayının en çok 2g boyutlu bir kompleks vektör uzayı olduğunu ispatlayalım.

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ H da harmonik diferansiyeller ve

$$A_{i,j} = \int_{a_j} \omega_i, \qquad B_{i,j} = \int_{b_j} \omega_i$$

olsun.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ bilinmeyenleri için,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 A_{1,1} + \lambda_2 A_{2,1} + \cdots + \lambda_n A_{n,1} &= 0\\
\lambda_1 A_{1,2} + \lambda_2 A_{2,2} + \cdots + \lambda_n A_{n,2} &= 0\\
&\vdots\\
\lambda_1 A_{1,g} + \lambda_2 A_{2,g} + \cdots + \lambda_n A_{n,g} &= 0\\
\lambda_1 B_{1,1} + \lambda_2 B_{2,1} + \cdots + \lambda_n B_{n,1} &= 0\\
&\vdots\\
\lambda_1 B_{1,g} + \lambda_2 B_{2,g} + \cdots + \lambda_n B_{n,g} &= 0
\end{aligned}$$

lineer homojen denklem sistemini gözönüne alalım.

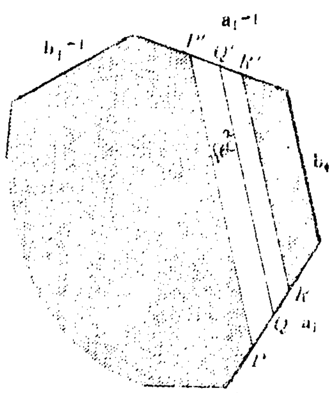
$n > 2g$ ise, n bilinmeyen ve 2g sayıdaki denklemden oluşan bu sistemin trivial olmayan bir çözümü vardır. Böyle bir çözüm için λ_i lerin hepsi birden sıfır değildir. Bu takdirde

$$\omega = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \cdots + \lambda_n\omega_n$$

diferansiyelinin bütün periyodları sıfırdır. Böylece $\omega \equiv 0$ dır. O halde $n > 2g$ ise n sayıda harmonik diferansiyelden oluşan bir sistem kompleks sayılar cismi üzerinde lineer bağımlıdır. Buna göre H nın kompleks sayılar cismi üzerindeki boyutu en fazla 2g dir. Özellikle $g = 0$ ise, $\dim H = 0$ olduğundan, cinsi sıfır olan kompakt Riemann yüzeyi üzerinde regüler harmonik diferansiyel yoktur.

H nın boyutunun tam 2g olduğunu görmek için 2g sayıda lineer bağımsız harmonik diferansiyel inşa edelim. ω_i $(i = 1,2,\ldots,2g)$ harmonik diferansiyellerini o şekilde oluşturalımki ω_i nin a_i üzerindeki periyodu 1, $i \neq j$ ise, 0 ve ω_{g+i} ,$(i=1,2,\ldots,g)$ için, ω_{g+i} nin b_i üzerindeki periyodu 1 ve $i \neq j$ için b_j üzerindeki 0 olsun. Örnek olarak ω_1 diferansiyelini inşa edelim diğerleri benzer şekilde inşa edilir.

S Riemann yüzeyinin normal şekli aşağıdaki gibi olsun.



a_1 eğrisi üzerinde P,Q ve R noktalarını ve a_1^{-1} eğrisi üzerinde P',Q' ve R' noktalarını seçerek bunların karşılıklı olarak çakıştığını düşünelim. PP', QQ' ve RR' doğru parçalarını çizelim ve bunları S üzerine taşımış olalım. S üzernide f fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

a) PP'R'RP dörtgeni dışında $f \equiv 0$

b) QQ'R'RP dörtgeni üzerinde $f \equiv 1$

c) PP'Q'QP dörtgeni üzerinde ve PP' , QQ' doğru parçaları üzerinde f sürekli ikinci mertebeden türevlere sahip olsun.

f nin RR' boyunca 1 sıçraması var fakat RR' nün her iki tarafında sabittir. RR' hariç olmak üzere S üzerinde $\pi_1 = df$ diyelim. RR' üzerinde $\pi_1 = 0$ olsun. π_1 kapalı diferansiyeldir, Çünkü PP'Q'QP dörtgeni dışında $\pi_1 = 0$ ve içinde $\pi_1 = df$ ve $d\pi_1 = ddf = 0$ dır.

π_1 in a_1 üzerindeki periyodu

$$\int_{a_1} \pi_1 = \int_P^Q df = f(Q) - f(P) = 1 - 0 = 1$$

dir. Çünkü a_1 in PQ doğru parçası dışında $\pi_1 = 0$ dır. Bundan başka bütün $a_i (i=1,\ldots,g)$ ler ve b_i $(i=1,\ldots,g)$ ler üzerinde $\pi_1 = 0$ dır. Böylece π_1 in bu devirler boyunca periyodu 0 dır. π_1 kapalı diferansiyeli reel harmonik ω_h diferansiyeli ile tam df diferansiyellerinin toplamı şeklinde yazılabileceğinden (Springer, 1957) π_1 kapalı diferansiyeli ile aynı periyoda sahip ω_1 reel harmonik diferansiyeli buluruz. Bu şekilde oluşturacağımız 2g sayıdaki $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2g}$ diferansiyelleri lineer bağımsızdır. Çünkü,

$$\omega = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \cdots + \lambda_{2g}\omega_{2g} = 0$$

ise, ω nın a_i $(i \leqslant g)$ üzerindeki periyodu λ_i olur ve böylece $\lambda_i = 0$, ω nın b_i $(i \leqslant g)$ üzerindeki periyodu λ_{g+i} ve böylece $\lambda_{g+i} = 0$ olur. Yani $i = 1,\ldots,2g$ için $\lambda_i = 0$ bulunur. O halde ω_i $(i = 1,\ldots,2g)$ diferansiyelleri lineer bağımsızdırlar. Buradan cinsi g olan kompakt Riemann yüzeyi üzerindeki regüler harmonik diferansiyellerin kompleks sayılar cismi üzerindeki boyutunun 2g olduğu görülür.

3.2 Riemann'ın Bilineer Bağıntıları.

Herhangi bir $\omega \in H$ harmonik diferansiyeli 2g sayıdaki $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2g}$ diferansiyellerinin

$$\omega = A_1\omega_1 + \cdots + A_g\omega_g + B_1\omega_{g+1} + \cdots + B_g\omega_{2g}$$

şeklinde bir lineer toplamı olarak yazılabilir. Burada A_i katsayıları ω nın a_i devirleri boyunca periyodunu, B_i katsayıları ω nın b_i devirleri boyunca periyodunu göstermektedir. Bundan sonra bu periyodlara ω nın sırası ile A-periyodları ve B-periyodları diyeceğiz.

$\{\omega_i\}_{i=1}^{2g}$ kümesine, S üzerindeki harmonik diferansiyellerin kanonik tabanı denir. Bir ω harmonik diferansiyeli kanonik tabanın $A_1,\ldots,A_g,B_1,\ldots B_g$ periyodları ile tamamen belirtilmiştir.

Şimdi S üzerinde analitik diferansiyellerin $\Lambda_a \subset H$ alt uzayını gözönüne alalım. Herbir ω harmonik diferansiyeline $\varphi = \omega + i{*\omega}$ şeklinde bir analitik diferansiyel karşılık gelir. H nın bir diğer alt uzayı analitik diferansiyellerin kompleks eşleniklerinden oluşan $\bar{\Lambda}_a$ uzayıdır. Yani $\varphi \in \Lambda_a$ ise $\bar{\varphi} \in \bar{\Lambda}_a$ dır. $\omega \in H$ ise $\bar{\omega} \in H$ dır ve $\varphi' = \bar{\omega} + i{*\bar{\omega}} \in \Lambda_a$ dır. Bu takdirde

$\bar{\varphi}' = \omega - i{*\omega} \in \bar{\Lambda}_a$ olur. Ayrıca $\omega = \varphi/2 + \bar{\varphi}'/2$ yazılabilir. Böylece harmonik bir diferansiyel Λ_a ve $\bar{\Lambda}_a$ deki diferansiyellerin direkt toplamı şeklinde ifade edilebilir. O halde Λ_a ve $\bar{\Lambda}_a$ alt uzayları H yı gerer.

Teorem 8. Λ_a ve $\bar{\Lambda}_a$, H nın ortogonal alt uzaylarıdır ve $H = \Lambda_a \oplus \bar{\Lambda}_a$ dır.

İspat. $\varphi \in \Lambda_a$ ve $\bar{\varphi}' \in \bar{\Lambda}_a$ alalım. Bu takdirde

$*\varphi = -i\varphi$ ve $*\varphi' = -i\varphi'$ veya $*\bar{\varphi}' = i\bar{\varphi}'$ olduğundan,

$$(\varphi, \bar{\varphi}') = (*\varphi, *\bar{\varphi}') = (-i\varphi, i\bar{\varphi}') = (-i)(-i)(\varphi, \bar{\varphi}') = -(\varphi, \bar{\varphi}')$$

elde edilir. Böylece $(\varphi, \bar{\varphi}') = 0$ ve $\Lambda_a \perp \bar{\Lambda}_a$ bulunur.

(-) kompleks eşlenik operatörü Λ_a dan $\bar{\Lambda}_a$ ya bir izomorfizma tanımlar. Buna göre

$$\dim\Lambda_a = \dim\bar{\Lambda}_a \quad \text{ve} \quad \dim\Lambda_a + \dim\bar{\Lambda}_a = 2g$$

olur. Buradan $\dim\Lambda_a = g$ olduğu görülür. O halde aşağıdaki özelliği ifade edebiliriz:

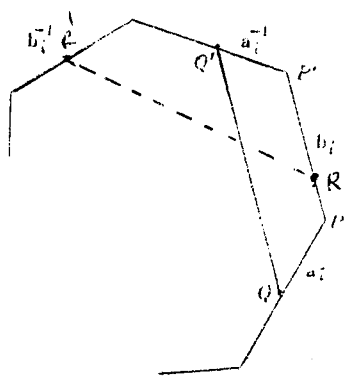
Kompakt Riemann yüzeyi üzerindeki analitik (holomorf) diferansiyellerin boyutu yüzeyin g cinsine eşittir.

S Riemann yüzeyi üzerindeki holomorf diferansiyellere "birinci tür abeliyen diferansiyeller" denir.

S üzerindeki kapalı η diferansiyeli, a_i ve b_i $(i=1,2,\ldots,g)$ devirlerinin her noktasının bir komşuluğunda C^1 sınıfından olsun.

$$\int_{a_i}\omega = A_i,\ \int_{b_i}\omega = B_i,\ \int_{a_i}\eta = A_i', \qquad \int_{b_i}\eta = B_i'$$

ile gösterelim. S nin Π normal şeklinin içi basit bağlantılıdır. S üzerindeki bir bölgeye karşı gelen kısmı yine Π ile gösterelim. Π deki her ω kapalı diferansiyeli tamdır. Çünkü Π basit bağlantılıdır ve basit bağlantılı bir bölgede her devir bir noktaya homotoptur. Böylece ω nın Π deki bütün devirler boyunca periyodu sıfırdır. Buna göre Π de $\omega=df$ şeklinde yazılabilir. Buradaki f nin Π de ikinci mertebeden sürekli türevleri mevcut ve hatta f nin ikinci mertebeden sürekli türevleri $\partial\Pi$ ye genişletilebilir ve yine $\omega=df$ olur. Fakat f, S üzerinde tek değerli değildir. S nin normal şekli aşağıdaki şekilde olsun.



a_i üzerindeki herbir Q noktası a_i^{-1} üzerindeki Q' ile çakıştırılmıştır. QQ', Π de Q yu Q' ye birleştiren doğru parçası olsun. Bu takdirde QQ' ye S üzerinde bir devir karşılık gelir ve

$$\int_{QQ'}\omega = \int_{QQ'} df = f(Q') - f(Q)$$

şeklinde hesaplanabilir.

QQ' deviri , $(QP) + (PP') + (P'Q')$ ye homologdur. Böylece

$$f(Q')-f(Q) = \int_{QP}\omega + \int_{b_i}\omega + \int_{P'Q'}\omega$$

olur. QP ve $Q'P'$, S üzerinde aynı yay olduğu hatırlanırsa,

$$\int_{QP}\omega = -\int_{P'Q'}\omega \quad \text{ve} \quad \int_{b_i}\omega = B_i \quad \text{olduğundan,}$$

$$f(Q')-F(Q) = B_i$$

elde edilir.

Benzer şekilde b_i üzerindeki R noktası ile b_i^{-1} üzerindeki R' noktası çakıştırılırsa,

$$f(R')-f(R) = -A_i$$

bulunur.

Şimdi $\int_{\partial\Pi} f\eta$ integralini hesaplayalım.

$$\int_{a_i+b_i+a_i^{-1}+b_i^{-1}} f\eta = \int_{a_i} f\eta + \int_{b_i} f\eta - \int_{a_i}(f+B_i)\eta - \int_{b_i}(f-A_i)\eta$$

$$= -B_i\int_{a_i}\eta + A_i\int_{b_i}\eta = A_iB'_i - B_iA'_i$$

dır. Böylece

$$\int_{\partial\Pi} f\eta = \sum_{i=1}^{g}(A_iB'_i - B_iA'_i) \qquad (*)$$

elde edilir. Bu bağıntıyı aşağıdaki tartışmada kullanacağız.

φ ve φ', S üzerinde birinci tür abeliyen diferansiyeller olsun. φ ve φ' ortogonaldir. $(\varphi,\bar{\varphi}')$ yü φ nin A_j, B_j $(j=1,2,\ldots,g)$ periyodları ve φ' nün A'_j, B'_j periyodları cinsinden hesaplayabiliriz.

$$(\varphi,\bar{\varphi}') = \iint_S \varphi * \bar{\varphi}' = -i\iint_S \varphi\bar{\varphi}' = -i\iint_\Pi \varphi\bar{\varphi}'$$

dır. Fakat φ ; S üzerinde kapalı olduğundan Π de de kapalıdır ve $d\varphi' = 0$ iken $\varphi = df$ dır.

a_j, b_j parçalı analitik ve Π, S üzerinde kompakt olsa bile, Π regüler bölge değildir. Çünkü Π, a_j ve b_j nin her iki tarafında da bulunur ve Stokes teoremini uygulayamayız. Fakat Π yi (4g) sayıda regüler bölgelere ayırabiliriz (Π nin herbir köşegeni ile bir iç noktayı birleştirerek). Stokes teoremini bu alt bölgelerin her birine uygularsak ki bunların bileşimi için de geçerli olacaktır. Buna göre

$$(\varphi, \bar{\varphi}') = -i\int_{\partial\Pi} f\varphi' = i\sum_{j=1}^{g}(A_j B'_j - B_j A'_j)$$

elde edilir. O halde teorem 8 gözönüne alınırsa, aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 9. Birinci tür φ ve φ' abeliyen diferansiyellerin A ve B-periyodları

$$i(\varphi, \bar{\varphi}') = \sum_{j=1}^{g}(A_j B'_j - B_j A'_j) = 0 \tag{3.1}$$

bağıntısını sağlar.

Benzer şekilde (φ, φ') çarpımı hesaplanırsa,

$$(\varphi, \varphi') = \iint_S \varphi * \bar{\varphi}' = i\iint_S \varphi\bar{\varphi}' = i\int_{\partial\Pi} f\bar{\varphi}' = i\sum_{j=1}^{g}(A_j \bar{B}'_j - B_j \bar{A}'_j)$$

elde edilir. Bu sonuç $\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi)$ çarpımına uygulanırsa,

$$\|\varphi\|^2 = i\sum_{j=1}^{g}(A_j \bar{B}_j - B_j \bar{A}_j) \geq 0 \tag{3.2}$$

bulunur. Yani birinci tür bir abeliyen diferansiyelin A ve B periyodları (3.2) bağıntısını sağlar. (3.1) ve (3.2) bağıntılarına birinci tür abeliyen diferansiyeller için Riemann'ın bilineer bağıntıları denir.

Sonuç 1. Her yerde analitik bir diferansiyelin A-periyodları (veya B-periyodları) sıfır ise, diferansiyel idantik olarak sıfırdır. Bu sonuç (3.2) bağıntısından kolayca elde edilebilir

Sonuç 2. Birinci tür bir abeliyen diferansiyelin bütün periyodları reel ise, diferansiyel idantik olarak sıfırdır.

$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_g$ birinci tür abeliyen diferansiyeller için bir taban olsun. ψ_i nin a_i-periyodunu $A_{i,j}$ ile gösterelim.

$$|(A_{i,j})| \neq 0$$

dır. Çünkü bu determinant sıfır olsaydı,

$$\sum_{i=1}^{g} \lambda_i A_{i,j} = 0, \quad j = 1, \ldots, g$$

homojen denklem sisteminin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_g$ şeklinde trivial olmayan bir çözümü olurdu. Fakat $\lambda_1\psi_1 + \cdots + \lambda_g\psi_g$ holomorf diferansiyelinin A-periyodları sıfır olduğundan, bu diferansiyel idantik olarak sıfır olur. Bu ise, ψ_i lerin lineer bağımsızlığı ile çelişir. Böylece

$$\sum_{i=1}^{g} \lambda_{i,k} A_{i,j} = \delta_{j,k}, \quad j = 1, 2, \ldots, g \quad k = 1, 2, \ldots, g$$

denklem sistemini çözebiliriz. $\varphi_k = \sum_{i=1}^{g} \lambda_{i,k} \psi_i, \; k = 1, \ldots, g$ diyelim. φ_k lar birinci tür abeliyen diferansiyeller için yine bir taban oluştururlar. Bundan başka φ_k nın a_k-periyodu 1 ve $j \neq k$ için a_j-periyodu 0 dır. φ_k nın b_j-periyodlarını $B_{k,j}$ ile gösterirsek $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_g$ tabanı için aşağıdaki periyod tablosunu elde ederiz.

	a_1	a_2	$\ldots$	a_g	b_1	b_2	$\ldots$	b_g
φ_1	1	0	$\ldots$	0	$B_{1,1}$	$B_{1,2}$	$\ldots$	$B_{1,g}$
φ_2	0	1	$\ldots$	0	$B_{2,1}$	$B_{2,2}$	$\ldots$	$B_{2,g}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
φ_g	0	0	$\ldots$	1	$B_{g,1}$	$B_{g,2}$	$\ldots$	$B_{g,g}$

Buradaki $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_g$ tabanına birinci tür abeliyen diferansiyeller için "kanonik taban" denir. Kanonik tabanın B-periyodlarının (B_{ij}) matrisi simetriktir.

$$(B_{i,j}) = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,g} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{g,1} & B_{g,2} & \dots & B_{g,g} \end{bmatrix}$$

Çünkü $\varphi = \varphi_i$ ve $\varphi' = \varphi_j$ alarak (3.1) bağıntısını uygularsak,

$$\sum_{k=1}^{g} (A_{i,k}B_{j,k} - B_{i,k}A_{j,k}) = 0$$

buluruz. $A_{i,j} = \delta_{i,j}$ olduğundan $B_{j,i} - B_{i,j} = 0$, $(B_{i,j})$ matrisi simetrik olur.

Şimdi

$$(\operatorname{Im} B_{i,j}) = \begin{bmatrix} \operatorname{Im} B_{1,1} & \operatorname{Im} B_{1,2} & \dots & \operatorname{Im} B_{1,g} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \operatorname{Im} B_{g,1} & \operatorname{Im} B_{g,2} & \dots & \operatorname{Im} B_{g,g} \end{bmatrix}$$

matrisinin pozitif tanımlı olduğunu görelim. Bunun için x_i lerin hepsi birden sıfır olmayan reel sayılar olmak üzere, $\varphi = x_1\varphi_1 + \cdots + x_g\varphi_g$ diferansiyeline (3.2) bağıntısını uygulayalım. Bu takdirde $\|\varphi\|^2 > 0$ ve $A_k = x_k$ ve

$$B_k = x_1 B_{1,k} + x_2 B_{2,k} + \cdots + x_g B_{g,k}$$

dır. Buradan

$$0 < i \sum_{j=1}^{g} x_j(\overline{x_1 B_{1,j} + \cdots + x_g B_{g,j}}) - x_j(x_1 B_{1,j} + \cdots + x_g B_{g,j})$$

veya

$$0 < \sum_{j=1}^{g} \sum_{k=1}^{g} x_j x_k \operatorname{Im} B_{j,k}$$

elde edilir. Bu da $(\operatorname{Im} B_{j,k})$ nin pozitif tanımlı olduğunu gösterir.

3.2.1 Singüleritelere sahip diferansiyeller için bilineer bağıntılar.

Bu kesimde singüleriteleri olan analitik diferansiyelleri inceleyeceğiz. Daha önce görüldüğü gibi g=0 ise yüzey üzerinde her yerde analitik olan diferansiyel yoktur. Bunun için, bu trivial durumu gözönüne almayacağız. Burada singüleriteleri z=x+iy yerel değişkenine göre

$$\left(\frac{a_n}{z^n} + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{z^1}\right) dz$$

şeklinde ifade edilebilen meromorf diferansiyelleri inceleyeceğiz. Bir kompakt Riemann yüzeyi üzerinde bir meromorf diferansiyel bu şekilde, sadece sonlu sayıda singüleriteye sahip olabilir. Çünkü yerel olarak $w = f(z)dz$ olup, sonsuz sayıda singüler nokta mevcut olsa, bu noktaların bir yığılma noktası olurdu ve bu da kutup noktası olmayıp esaslı singüler nokta olurdu.

Genel olarak bir Riemann yüzeyi üzerindeki holomorf veya meromorf diferansiyellere "abeliyen diferansiyeller" denir.

S Riemann yüzeyi üzerinde bir tek noktada

$$\left(\frac{a_n}{z^n} + \cdots + \frac{a_2}{z^2}\right) dz, \quad n \geq 2$$

şeklinde singüleriteye sahip diferansiyel ile, P ve Q S üzerinde farklı iki nokta olmak üzere P de $(a_1/z)\,dz$ Q da $(-a_1/z)\,dz$ singüleritesine sahip diferansiyelin varlığı bilinmektedir (Springer, 1957).

ω_1 ve ω_2 S üzerinde aynı singüleriteye sahip iki meromorf diferansiyel ise, $\varphi = \omega_1 - \omega_2$ holomorf diferansiyeldir. φ nin A-periyodları $A_1, A_2, \ldots, A_g$ ise, $\varphi - A_1\varphi_1 - A_2\varphi_2 - \cdots - A_g\varphi_g$ nın A-periyodları sıfır ve diferansiyel idantik olarak sıfırdır. Böylece

$$\omega_1 = \omega_2 + A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + \cdots + A_g\varphi_g$$

dır. Buna göre bir ω_1 abeliyen diferansiyeli A-periyodları ve singüleriteleri ile tamamen belirtilmiştir.

Bir meromorf diferansiyelin bütün singüleriteleri en az 2. mertebeden ise bu diferansiyele "ikinci tür abeliyen diferansiyel" denir. Bir başka deyişle bir diferansiyelin bütün rezidüleri sıfır ise, buna ikinci tür abeliyen diferansiyel denir. Bir Riemann yüzeyi üzerindeki bütün abeliyen diferansiyellere de üçüncü tür abeliyen diferansiyeller denir. Buna göre üçüncü tür abeliyen diferansiyeller kümesi birinci tür ve ikinci tür abeliyen diferansiyelleri kapsar. İkinci tür abeliyen diferansiyeller kümesi ise, birinci tür abeliyen diferansiyelleri kapsar.

ω abeliyen diferansiyelinin A-periyodları $A_1, A_2, \ldots, A_g$ olsun.

$$\omega' = \omega - A_1\varphi_1 - A_2\varphi_2 - \cdots - A_g\varphi_g$$

diferansiyeli ω ile aynı singüleriteye sahip ve A-periyodları sıfır olan bir abeliyen diferansiyeldir. Böyle bir diferansiyele A-periyodları sıfır olan normalleştirilmiş abeliyen diferansiyel denir. S Riemann yüzeyi üzerinde P_1 ve P_2 noktaları verildiğinde, P_1 de $(1/z)dz$, P_2 de $(-1/z)dz$ singüleritesine sahip normalleştirilmiş bir $\omega_{1,2}$ diferansiyeli inşa edebiliriz. Buna üçüncü tür normalleştirilmiş diferansiyel denir.

Keyfi bir ω abeliyen diferansiyeli, normalleştirilmiş ikinci tür bir diferansiyel, üçüncü tür normal diferansiyellerin sonlu bir toplamı ve birinci tür normal diferansiyellerin sonlu bir toplamı şeklinde ifade edilebilir. Şöyleki, ω diferansiyelinin $P_1, P_2, \ldots, P_n$ noktalarındaki rezidüleri $c_1, c_2, \ldots, c_n$ olsun. S üzerinde bir $P_o \neq P_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ noktası seçelim ve $\omega_{1,0}, \omega_{2,0}, \ldots, \omega_{n,0}$ üçüncü tür normal diferansiyellerini inşa edelim. $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$ olduğundan $\sum_{j=1}^{n} c_j\omega_{j,0}$ diferansiyeli P_o da regülerdir ve P_j deki rezidüsü c_j dir.

$\omega - \sum_{j=1}^{n} c_j\omega_{j,0}$ diferansiyelinin A-periyodları $A_1,\ldots,A_g$ ise,

$$\omega_2 = \omega - \sum_{j=1}^{n} c_j\omega_{j,0} - \sum_{k=1}^{g} A_k\varphi_k$$

diferansiyeli A-periyodları sıfır olan ikinci tür bir abeliyen diferansiyeldir. Böylece

$$\omega = \omega_2 + \sum_{j=1}^{n} c_j\omega_{j,0} + \sum_{k=1}^{g} A_k\varphi_k$$

şeklinde, keyfi abeliyen diferansiyelin istenen ayrışımı elde edilir.

Teorem 10. ω_3 sadece P_i $(i=1,\ldots,m)$ noktalarında basit kutuplara sahip ve bu noktalardaki rezidüleri c_i olan üçüncü tür bir diferansiyel olsun. ω_1 birinci tür keyfi bir diferansiyel olsun. ω_3 ün a_i veya b_i devirleri üzerinde hiç kutbu olmayacak şekilde $a_1,b_1,\ldots,$ a_g,b_g kanonik tabanını seçelim.

$$A_i = \int_{a_i}\omega_1,\; B_i = \int_{b_i}\omega_1,\; A'_i = \int_{a_i}\omega_3,\quad B'_i = \int_{b_i}\omega_3,\qquad i = 1, 2, \ldots, g$$

diyelim. Π normal poligonda sabit bir P_o noktası seçelim ve L_i , P_o dan P_i ye giden sabit bir yol olsun. Bu takdirde

$$\sum_{i=1}^{g}(A_iB'_i - B_iA'_i) = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} c_k\int_{L_k}\omega_1$$

dır. Buna birinci ve üçüncü tür diferansiyeller arasındaki bilineer bağıntı denir.

İspat. ω_3 ün sonlu sayıda kutbu olduğu için kutuplardan geçmeyen kanonik devirler bulunabilir. f, Π de tanımlı holomorf bir fonksiyon ve $\omega_1 = df$ olsun. Π nin sabit bir P_o noktası için $f(P_o) = 0$ dır. 3.2 kesimdeki (*) bağıntısına göre

$$\sum_{i=1}^{g} (A_i B'_i - B_i A'_i) = \int_{\partial\Pi} f\omega_3 = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}_{P_k}(f\omega_3)$$

dır. $f\omega_3$ ün P_i deki rezidüsü $f(P_i) = \int_{l_i} \omega_1$ olmak üzere $f(P_i) = c_i$ ile verilmiştir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç. ω_3 normalleştirilmiş üçüncü tür diferansiyel olsun. $\omega_1 = \varphi_k$, Q_k üzerindeki periyodu 1, diğer A-periyodları sıfır olan birinci tür bir diferansiyel olsun. Bu takdirde $c_j = \mathrm{res}_{P_j}\, \omega_3$ olmak üzere

$$\int_{b_k} \omega_3 = B'_k = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} c_j \int_{l_j} \varphi_k$$

dır.

Şimdi birinci tür ve ikinci tür diferansiyeller için bilineer bağıntıyı elde edelim. ω_1 birinci tür, ω_2 ikinci tür bir diferansiyel olsun. ω_2 nin sadece P_o da bir kutbunun olduğunu ve $\psi(P) = z$, $\psi(P_o) = 0$ yerel parametresi cinsinden esas kısmının (singüleritesinin) $(1/z^n)dz$ olduğunu kabul edelim. Aynı yerel koordinat sisteminde ω_1

$$\omega_1 = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots)\, dz$$

şeklinde seriye açılmış olsun.

$$A_i = \int_{a_i} \omega_1, \quad B_i = \int_{b_i} \omega_1, \quad A'_i = \int_{a_i} \omega_2, \quad B'_i = \int_{b_i} \omega_2$$

ve Π de $\omega = df$ yazalım. 3.2 kesim (✱) bağıntısına göre

$$\Sigma(A_i B'_i - B_i A'_i) = \int_{\partial\Pi} f\omega_2 = 2\pi i\, \mathrm{res}_{P_0}(f\omega_2)$$

dır. P_o komşuluğunda

$$f(z) = c + c_0 z + \frac{c_1}{2} z^2 + \frac{c_2}{3} z^3 + \cdots + \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} + \cdots$$

olduğundan, $f\omega_2$ nin P_o daki rezidüsü $c_{n-2}/n-1$ dir. Böylece aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 11. ω_2 sadece P_o da kutba sahip ve singüleritesi $(1/z^n)dz$ olan ikinci tür bir diferansiyel olsun. ω_1 ise P_o komşuluğunda $\omega_1 = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots)dz$ şeklinde ifade edilebilen birinci tür bir diferansiyel olsun. Bu takdirde

$$\sum_{i=1}^{g} (A_j B'_j - B_j A'_j) = 2\pi i \frac{c_{n-2}}{n-1}$$

dır.

Sonuç. ω_2 normalleştirilmiş ikinci tür bir diferansiyel ve $\omega_1 = \varphi_k$, a_k üzerindeki periyodu 1, diğer A-periyodları sıfır olan birinci tür bir diferansiyel olsun. Bu takdirde

$$\int_{b_k} \omega_2 = 2\pi i \frac{c_{n-2}^{(k)}}{n-1}$$

dır. Burada $\varphi_k = (\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} z^n)\, dz$ ve P_o komşuluğunda $\omega_2 = (1/z^n)\, dz$ dır.

3.3 Bölenler.

İkinci tür diferansiyellerin sıfır olmayan periyodları mevcutsa, bunlar tam değildir. İkinci türden bir tam diferansiyel bulmak mümkündür. Çünkü iki abeliyen diferansiyelin bölümü bir f meromorf fonksiyonudur. ve bu meromorf fonksiyonun df diferansiyeli ikinci tür bir diferansiyeldir. Bu inşaadaki zorluk f nin singüleritelerinin yerlerinin belirlenemeyişidir. Şimdi bir meromorf fonksiyonun (veya ikinci tür tam diferansiyelin) kutuplarının belirlenmesinde ne kadar serbest olduğumuzu belirleyeceğiz. En azından bir kutup mevcut olması gerektiğinden dolayı tamamen de serbest değiliz. Çünkü kompakt Riemann yüzeyleri üzerinde her yerde analitik ve sabit olmayan fonksiyonların mevcut olmadığını göstermiştik. Bu tartışmayı sadeliştirmek için bir takım yeni kavramlar vereceğiz.

S Riemann yüzeyi üzerinde bir P noktası komşuluğunda analitik f fonksiyonu

$$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots, \quad a_n \neq 0$$

şeklinde seriye açılmış olsun. f nin P deki mertebesi n dir diyeceğiz ve $\nu_P(f) = n$ şeklinde göstereceğiz. Bu gösterim cebirsel geometrideki f nin P deki valuasyonu teriminden gelmektedir. S üzerinde $f \equiv 0$ ise, $\nu_P(f) = +\infty$ yazmak uygun olacaktır. Daha önce gördüğümüz gibi yerel koordinatlar değiştiğinde $\nu_P(f)$ invaryant kalmaktadır.

f_1 ve f_2, S üzerinde iki analitik fonksiyon olsun. Bu takdirde kuvvet serilerinin çarpımından $f_1(P).f_2(P)$ çarpımı için,

$$\nu_P(f_1 f_2) = \nu_P(f_1) + \nu_P(f_2)$$

dır. Benzer şekilde

$$\nu_P(f_1\ f_2) = \min\{\nu_P(f_1), \nu_P(f_2)\}$$

olduğu kolayca görülebilir.

ω analitik diferansiyel ve yerel olarak

$$\omega = (a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots)\, dz, \quad a_n \neq 0$$

şeklinde ifade edilmiş olsun. ω nın P deki mertebesi n dir denir ve $\nu_P(\omega) = n$ şeklinde yazılır.

Şimdi S üzerindeki fonksiyonların kutuplarının mertebeleri ve kutup yerlerinin belirtilmesi ile ilgileneceğiz. Yani bazı $P_1, P_2, \ldots, P_n$ noktalarını belirtmek ve bu noktalara $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ mertebelerini karşılık getirmek istiyoruz. $P_1, P_2, \ldots, P_n$ noktalarına $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tam sayılarının karşıgeldiğini belirtmek için

$$P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_n^{\alpha_n}$$

gösterimini kullanacağız. $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_n^{\alpha_n}$ sembolüne bir "bölen" (divisor) denir. Bölenleri d, d_1, d_2 gibi harflerle göstereceğiz ve

$$d = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_n^{\alpha_n}$$

şeklinde yazacağız. α_k tam sayısına d böleninin P_k daki mertebesi denir ve $\nu_{P_k}(d) = \alpha_k$ ile gösterilir.

Bir d böleninin mertebeleri toplamına, yani $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ toplamına d nin derecesi denir ve $\deg[d]$ ile gösterilir.

$$d_1 = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_n^{\alpha_n} \qquad \text{ve} \qquad d_2 = Q_1^{\beta_1} Q_2^{\beta_2} \ldots Q_m^{\beta_m}$$

bölenlerinin çarpımı

$$d_1 d_2 = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_n^{\alpha_n} Q_1^{\beta_1} Q_2^{\beta_2} \ldots Q_m^{\beta_m}$$

şeklinde tanımlanır. Burada çarpımın komütatif ve $P_1^{\alpha} P_1^{\beta} = P_1^{\alpha+\beta}$ koşulunu sağlaması gerekir. Benzer şekilde

$$d^{-1} = \frac{1}{d} = P_1^{-\alpha_1} P_2^{-\alpha_2} \ldots P_n^{-\alpha_n}$$

şeklinde tanımlanır ve d_1 ile d_2 nin bölümü

$$\frac{d_1}{d_2} = d_1 d_2^{-1}$$

bölenidir.

Bu tanımlardan

$$\deg[d_1 . d_2] = \deg[d_1] + \deg[d_2]$$
$$\deg\left[\frac{d_1}{d_2}\right] = \deg[d_1] - \deg[d_2]$$

eşitliklerini yazabiliriz.

Her yerde mertebesi 0 (sıfır) olan böleni 1 ile göstereceğiz. Buna göre $\frac{d}{d} = 1$ dir.

$d = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n}$ böleni için $\alpha_k \geqslant 0$ $(k=1,\dots,n)$ ise, d ye tam bölen denir. $\frac{d_1}{d_2}$ böleni tam ise, d_2, d_1 i böler (veya d_1, d_2 nin katıdır) denir ve $d_2 | d_1$ şeklinde yazılır. İki tam bölenin her ikiside hiçbir tam bölen tarafından bölünemiyorsa, bunlara aralarında asaldır denir.

$f \not\equiv 0$, S üzerinde bir meromorf fonksiyon, $\omega \not\equiv 0$ S üzerinde bir abeliyen diferansiyel olsun. f nin (f) böleni ile, ω nın (ω) böleni sırasıyla,

$$(f) = \prod_{P \in S} P^{\nu_P(f)}$$

ve

$$(\omega) = \prod_{P \in S} P^{\nu_P(\omega)}$$

şeklinde tanımlanır.

f_1 ve f_2 iki meromorf fonksiyon olsun. $\nu_P(f_1 f_2) = \nu_P(f_1) + \nu_P(f_2)$ olduğundan $(f_1)(f_2) = (f_1 f_2)$ dir. Benzer şekilde $(f\omega) = (f)(\omega)$ yazabiliriz.

$f \equiv c =$ Sabit, $c \neq 0$ ise, $(f) = 1$ dir.

$d | (f)$ ise, f ye d böleninin katıdır denir. Buna göre d deki her P_i için $\nu_{P_i}(f) \geqslant \nu_{P_i}(d)$ dir.

Kompakt Riemann yüzeyi üzerinde bir meromorf fonksiyonun, sıfırlarının mertebeleri toplamı, kutuplarının mertebeleri toplamına eşit olduğundan, herhangi bir meromorf fonksiyon için $deg[(f)] = 0$ dır. (Daha sonra bütün bölenlerin meromorf fonksiyonların bölenleri olmadığını göreceğiz.) Sıfıra özdeş olmayan meromorf fonksiyonların bölenlerine "temel" bölenler diyeceğiz.

Bir Riemann yüzeyi üzerindeki bütün bölenlerin kümesi, yukarıda tanımladığımız çarpım, birim, ters işlemlerine göre komütatif bir grup oluştururlar. $d_1=(f)$, $d_2=(g)$ ise, $d_1^{-1} = (\frac{1}{f})$ ve $d_1d_2 = (fg)$ dir. Böylece temel bölenler bütün bölenler grubunun bir alt grubunu oluştururlar. O halde bütün bölenler grubunun, temel bölenler alt grubu üzerinde bir bölüm grubunu oluşturabiliriz. Bölüm grubunun her elemanı bölenlerin bir kosetidir. d_1 ve d_2 nin aynı kosette olması için (bunu $d_1 \sim d_2$ şeklinde göstereceğiz) gerek ve yeterli koşul, S üzerindeki bir f meromorf fonksiyonu için $\frac{d_1}{d_2} = (f)$ olmasıdır. Yani bölüm bir meromorf fonksiyonun böleni olmasıdır. Bölenlerin bu şekildeki her kosetine bir bölen sınıfı denir.

$d_1 \sim d_2$ ise, $deg\left[\frac{d_1}{d_2}\right] = deg[(f)] = 0$ veya $deg[d_1] = deg[d_2]$ dır. ve d_1, d_2 ye eşdeğerdir denir.

ω_1 ve ω_2, S üzerinde iki abeliyen diferansiyel ise, $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ bir meromorf fonksiyondur ve böylece $(\omega_1) \sim (\omega_2)$ dir. Buna göre bütün abeliyen diferansiyellerin bölenleri aynı bölen sınıfındadır. Bir abeliyen diferansiyelin, (ω) böleninin derecesi ω ya bağlı olmayıp S yüzeyinin cinsine bağlıdır. Bununla ilgili teoremi son bölümde vereceğiz.

S üzerinde d böleninin katı olan meromorf fonksiyonların kümesini L(d) ile gösterelim. $\nu_P(d) = n$ ise, P noktası komşuluğunda

$$f(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \cdots, \quad k \geq n$$

dır. λ kompleks sabit olmak üzere $f \in L(d)$ ise, $\lambda f \in L(d)$ dır. $\nu_P(f_1+f_2) \geqslant \min\{\nu_P(f_1), \nu_P(f_2)\}$ olduğundan, $f_1, f_2 \in L(d)$ ise, $f_1+f_2 \in L(d)$ dır. Böylece L(d) bir kompleks vektör uzayıdır. Bu vektör uzayının boyutunu $r[d]$ ile gösterelim.

$d_2 | d_1$ ise, (yani d_1, d_2 nin katı) $\nu_P(d_2) \leqslant \nu_P(d_1)$ ve böylece $L(d_1) \subset L(d_2)$ ve $r[d_2] \geqslant r[d_1]$ elde edilir.

$d = 1$ ise, her P için $\nu_P(1) = 0$ olup $\nu_P(f) \geqslant 0$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar sadece sabit fonksiyonlardır. Böylece L(1), kompleks sayılar cismi üzerinde 1-boyutludur ve $r[1] = 1$ dir.

$\deg[d] > 0$ ise, $f \in L(d)$ için, $\deg[(f)] > 0$ dır. Fakat $\deg[(f)] = 0$ olduğundan, $\deg[d] > 0$ ise, $\deg[(f)] = 0$ olmalıdır.

$r[d]$ nin bilinmesi sadece d nin katı olan fonksiyonların mevcut olup olmadığını değil, bunlardan lineer bağımsız kaç tane olduğunu da belirtecektir.

Böleni d böleninin katı olan ω abeliyen diferansiyellerinin vektör uzayını $\Omega(d)$ ile ve bunun boyutunu $i[d]$ ile gösterelim. $i[d]$ ve $r[d]$ sadece d nin bölen sınıfına bağlıdır. Çünkü, $d_1 \sim d_2$ ise, $\frac{d_1}{d_2} = (h)$ olacak şekilde bir h meromorf fonksiyonu mevcuttur. Her bir $g \in L(d_1)$ için $\frac{(g)}{d_2}$ bir tam bölendir ve böylece $(gh) = \left(\frac{(g)}{d_2}\right) d_1$, d_1 in bir katıdır. O halde $gh \in L(d_1)$ dir. $g \to gh$ dönüşümü, $L(d_2)$ den $L(d_1)$ e lineer bir dönüşümdür. $gh \equiv 0$ ise, $g \equiv 0$ olduğundan bu dönüşüm birebir dir. Her bir $f \in L(d_1)$, $\frac{f}{h} \in L(d_2)$ nin görüntüsüdür. Böylece $r[d_1] = r[d_2]$ elde edilir. Benzer şekilde $i[d_1] = i[d_2]$ olduğu kolayca görülebilir. O halde aşağıdaki yardımcı teoremi kolayca ifade edebiliriz.

Yardımcı teorem 1. $deg[d]$, $r[d]$ ve $i[d]$ sadece d nin bölen sınıfına bağlıdır.

Teorem 12. ω herhangi bir abeliyen diferansiyel ve $\omega \neq 0$ olsun. Herhangi bir d böleni için,

$$i[d] = r\left[\frac{d}{(\omega)}\right]$$

dır.

İspat. $\omega \in \Omega(d)$ alalım. Bu takdirde $\frac{(\pi)}{d}$ bir tam bölen ve $\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{(\pi)}{d}\,\frac{(d)}{(\omega)}$ olup, $\frac{(\pi)}{d}$, $\frac{d}{(\omega)}$ nın katıdır.
$\frac{\pi}{\omega} \in L\left(\frac{d}{(\omega)}\right)$ olduğundan, $\pi \to \frac{\pi}{\omega}$ dönüşümü,

$\Omega(d) \rightarrow L\left(\frac{d}{(\omega)}\right)$ ya bire-bir, üzerine ve lineer bir dönüşümdür. Bu da teoremi ispatlar.

BÖLÜM 4

4. RIEMANN-ROCH TEOREMİ ve SONUÇLARI

Riemann-Roch teoremi.

S cinsi g olan kompakt Riemann yüzeyi olsun. Derecesi deg[d] olan bir d böleni verilsin. d^{-1} in katı olan meromorf fonksiyonların vektör uzayını $L(d^{-1})$ ve bu vektör uzayının boyutunu $r[d^{-1}]$ ile gösterelim. d nin katı olan abeliyen diferansiyellerin vektör uzayının boyutunu i[d] ile gösterelim. Bu takdirde

$$r[d^{-1}] = \deg[d] + i[d] - g + 1 \tag{4.1}$$

dır.

İspat. Teoremi önce d nin bir tam bölen olması durumunda ispatlayacağız ve daha sonra bu şartı kaldıracağız.

$$d = P_1^{n_1} P_2^{n_2} \dots P_m^{n_m}$$

olsun. $\omega_k^{(n)}$, P_k da esaskısmı $1/z^n$ ve diğer yerlerde regüler olan ikinci tür normal diferansiyel olsun.

$f \in L(d^{-1})$ ise, df ikinci tür diferansiyeldir ve P_k daki aynı yerel parametre cinsinden

$$df = \left(\sum_{j=-n_k-1}^{\infty} c_j^{(k)} z^j \right) dz, \quad c_{-1}^{(k)} = 0$$

yazabiliriz.

$$\omega_k = c_{-n_k-1}^{(k)} \omega_k^{(n_k+1)} + c_{-n_k}^{(k)} \omega_k^{(n_k)} + \dots + c_{-2}^{(k)} \omega_k^{(2)}$$

diferansiyeli ile df nin P_k daki esas kısımları aynıdır. Böylece,

$$\varphi = df - \sum_{k=1}^{m} \omega_k = df - \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^{(k)} \omega_k^{(j)} \tag{4.2}$$

birinci tür bir diferansiyeldir. Eğer

$$\{c_{-j}^{(k)}\},\ k = 1, 2, \ldots, m,\ j = 2, \ldots, n_k + 1$$

sayıları verilir ve birinci tür bir φ diferansiyelini

$$\omega = \varphi + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^{(k)} \omega_k^{(j)}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bulabilirsek, ω = df ve f $\in$ L(d^{-1}) olur.

$\{c_{-j}^{(k)}\},\ k = 1, \ldots, m,\ j = 2, \ldots, n_k + 1$ kompleks sayılar kümesi bir V kompleks vektör uzayının elemanları olarak alınabilir. Çünkü $\{c_{-j}^{(k)}\}$ ve $\{d_{-j}^{(k)}\}$ sayı kümeleri L(d^{-1}) deki fonksiyonların diferansiyellerine karşı gelirse, $\{\lambda c_{-j}^{(k)} + \mu d_{-j}^{(k)}\}$ kümesi de L(d^{-1}) deki bir fonksiyonun diferansiyeline karşı gelir.

Herbir f $\in$ L(d^{-1}) fonksiyonuna $\{c_{-j}^{(k)}\},\ k = 1, \ldots, m,$ $j = 2, \ldots, n_k + 1$ kompleks sayılarının bir kümesi karşılık gelir. f_1, f_2 $\in$ L(d^{-1}) fonksiyonlarına aynı $\{c_{-j}^{(k)}\}$ kümesi karşılık gelirse, f_1 ve f_2 bir sabit kadar farkederler. Böylece L(d^{-1}) den V üzerine bir lineer dönüşüm elde ederiz. Bu lineer dönüşümün çekirdeği S üzerindeki sabit fonksiyonlardan ibarettir (boyutu 1 dir). Böylece

$$r\left[\frac{1}{d}\right] = \dim L\left(\frac{1}{d}\right) = \dim V + 1$$

buluruz. Şimdi dimV yi hesaplayalım.

$\{c_{-j}^{(k)}\},\ k = 1, \ldots, m,\ j = 2, \ldots, n_k + 1$ V nin bir elemanı ise, (4.2) ye göre

$$\sigma = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^{(k)} \omega_k^{(j)}$$

diferansiyeli φ diferansiyeli ile aynı periyodlara sahiptir. Tersine σ birinci tür bir diferansiyel ile aynı periyodlara sahip ise, $\{c_j^{(k)}\} \in V$ dır. $\omega_k^{(j)}$ nin b_ℓ periyodları $B_{k,l}^{(j)}$ ise, σ nın b_ℓ periyodları

$$B_l = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=2}^{n_k+1} c_j^{(k)} B_{k,l}^{(j)}$$

ile verilmiştir. σ birinci tür φ diferansiyeli ile aynı periyodlara sahip ise, bunun A-periyodlarının sıfır olması halinde $\varphi = 0$ olur. Bu takdirde $B_l = 0,\ l = 1, \ldots, g$ veya

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=2}^{n_k+1} c_j^{(k)} B_{k,l}^{(j)} = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, g \tag{4.3}$$

dır. Tersine $\{c_j^{(k)}\}$ böyle bir lineer denklem sistemini sağlarsa, $c_j^{(k)}$ lar ile oluşturulmuş σ nın periyodları sıfır ve σ tamdır. Böylece $\{c_j^{(k)}\} \in V$ dır. Buna göre $\{c_j^{(k)}\}$ nın V ye ait olması için gerek ve yeter koşul $\{c_j^{(k)}\}$ nın (4.3) denklem sistemini sağlamasıdır.

Şimdi (4.3) denklem sistemini sağlayan lineer bağımsız $\{c_j^{(k)}\}$ sayılarını bulmaya çalışalım. Burada deg[d] sayıda bilinmeyenler, $\{c_j^{(k)}\}$ olmak üzere g denklem vardır. Böylece enazından deg[d]-g sayıda lineer bağımsız çözüm vardır. $\dim V \geqslant \deg[d]-g$ veya

$$r\left[\frac{1}{d}\right] \geqslant \deg[d]-g+1 \tag{4.4}$$

dır. Buna Riemann eşitsizliği denir. Bu eşitsizliğe göre farklı m sayıdaki P_k $(k=1,2,\ldots,m)$ noktalarında ençok n_k mertebeden kutba sahip lineer bağımsız meromorf fonksiyonların sayısı enazından $\sum_{k=1}^{m} n_k - g + 1$ dır. Böylece S üzerinde sabit olmayan g+1 noktada ençok 1. mertebeden kutba sahip enazından bir meromorf fonksiyon mevcuttur. (4.3) denklem sisteminin matrisi

$$\begin{bmatrix} B_{1,1}^{(2)} & B_{1,1}^{(3)} & \cdots & B_{1,1}^{(n_1+1)} & B_{2,1}^{(2)} & \cdots & B_{m,1}^{(n_m+1)} \\ B_{1,2}^{(2)} & B_{1,2}^{(3)} & \cdots & B_{1,2}^{(n_1+1)} & B_{2,2}^{(2)} & \cdots & B_{m,2}^{(n_m+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{1,g}^{(2)} & B_{1,g}^{(3)} & \cdots & B_{1,g}^{(n_1+1)} & B_{2,g}^{(2)} & \cdots & B_{m,g}^{(n_m+1)} \end{bmatrix} = (B_{k,l}^{(j)}) \tag{4.5}$$

dır.

$(B^{(j)}_{k,l})$ matrisinin satır rankı ρ ise, (4.3) denklem sisteminin sadece ρ sayıdaki denklemi lineer bağımsızdır. Buna göre lineer bağımsız $\{c^{(k)}_{-j}\}$ çözümlerinin sayısı tam olarak deg[d] − ρ olur. O halde

$$r\,[\tfrac{1}{d}] = \deg[d] - \rho + 1$$

dir.

φ_ℓ , kanonik tabandan seçilen a_ℓ periyodu 1, diğer A-periyodları sıfır olan birinci tür bir diferansiyel olsun. P_k noktalarında φ_ℓ ,

$$\varphi_l = (\alpha^{(k)}_{l,0} + \alpha^{(k)}_{l,1}z + \alpha^{(k)}_{l,2}z^2 + \cdots)\,dz$$

şeklinde seriye açılmış olsun. Aynı yerel parametre cinsinden $\omega_k^{(n)} = (1/z^n)dz$ şeklinde olsun. Bu takdirde teorem 11 in sonucuna göre

$$B^{(j)}_{k,l} = 2\pi i\,\frac{\alpha^{(k)}_{l,j-2}}{j-1}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{bmatrix} \alpha^{(1)}_{1,0} & \frac{1}{2}\alpha^{(1)}_{1,1} & \cdots & \frac{1}{n_1}\alpha^{(1)}_{1,n_1-1} & \alpha^{(2)}_{1,0} & \cdots & \frac{1}{n_m}\alpha^{(m)}_{1,n_m-1} \\ \alpha^{(1)}_{2,0} & \frac{1}{2}\alpha^{(1)}_{2,1} & \cdots & \frac{1}{n_1}\alpha^{(1)}_{2,n_1-1} & \alpha^{(2)}_{2,0} & \cdots & \frac{1}{n_m}\alpha^{(m)}_{2,n_m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha^{(1)}_{g,0} & \frac{1}{2}\alpha^{(1)}_{g,1} & \cdots & \frac{1}{n_1}\alpha^{(1)}_{g,n_1-1} & \alpha^{(2)}_{g,0} & \cdots & \frac{1}{n_m}\alpha^{(m)}_{g,n_m-1} \end{bmatrix} = (B^{(j)}_{k,l})$$

matrisinin sütun rankı ρ dur. Böylece g−ρ tane lineer bağımsız $(e_1, e_2, \ldots, e_g)$ vektörleri vardır ve

$$\textstyle\sum_{l=1}^{g} e_l\alpha^{(k)}_{l,j} = 0, \text{ for } j = 0, 1, \ldots, n_k - 1, \quad k = 1, \ldots, m$$

dır. $(e_1, e_2, \ldots, e_g)$ vektörleri ile P_k da mertebesi n_k dan büyük olan birinci tür $\varphi = \sum_{l=1}^{g} e_l\varphi_l$ diferansiyeller arasında bire-bir karşılaşma vardır. Buna göre d|(φ) dir. O halde d nin katı olan birinci tür lineer bağımsız diferansiyellerin sayısı tam olarak g−ρ tanedir. Yani g−ρ = i[d] dır. Böylece d tam bölen olduğunda Riemann-Roch teoremi ispatlanmış olur.

Şimdi Riemann-Roch teoremini keyfi bölenler için ispatlamadan önce bir yardımcı teorem ispatlayalım.

Yardımcı toerem 2. S cinsi g olan kompakt bir Riemann yüzeyi ve ω keyfi bir abeliyen diferansiyel olsun. Bu takdirde

$$\deg[(\omega)] = 2g-2$$

dir.

İspat. $g > 0$ olsun.

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_g$ birinci tür diferansiyeller için bir taban olsun. (φ_1) bir tam bölendir. Bu durumda teorem 12 gerçeklenir ve

$$r\left[\frac{1}{(\varphi_1)}\right] = \deg[(\varphi_1)] - g + 1 + i[(\varphi_1)]$$

dır. ω_1, (φ_1) in katı olan bir başka diferansiyel ise, $\frac{\omega_1}{\varphi_1}$ bir fonksiyondur ve S kompakt Riemann yüzeyi üzerinde hiç singüleritesi yoktur.ve böylece sabittir. O halde $\omega_1 = c\varphi_1$ $i[(\varphi_1)] = 1$ yazabiliriz.Bundan başka $r[(\varphi_1)^{-1}] = g$ dir. Çünkü g sayıdaki

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_1}, \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \ldots, \frac{\varphi_g}{\varphi_1}$$

fonksiyonları $1/(\varphi_1)$ in katıdır ve lineer bağımsızdırlar. Bu takdirde $f\varphi_1$ birinci tür bir diferansiyeldir ve

$$f\varphi_1 = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_g\varphi_g$$

veya

$$f = c_1\frac{\varphi_1}{\varphi_1} + c_2\frac{\varphi_2}{\varphi_1} + \cdots + c_g\frac{\varphi_g}{\varphi_1}$$

yazılabilir. Böylece

$$g = \deg[(\varphi_1)] - g + 1 + 1 \quad \text{veya} \quad \deg[(\varphi_1)] = 2g - 2$$

elde edilir. Bu teoreme göre herhangi bir abeliyen diferansiyelin derecesi sadece yüzeyin cinsine bağlı olduğu görülür. Eğer S yüzeyinin cinsi sıfır ise, herhangi bir ikinci tür diferansiyel tamdır. Böylece sadece P_o da bir kutbu bulunan ikinci tür bir ω diferansiyeli inşa edebiliriz. Bu takdirde $\omega = df$ ve f nin sadece P_o da $(1/z)$ basit kutbu vardır. f fonksiyonu S üzerinde her kompleks değeri aynı sayıda aldığından, f, S nin w-küresi üzerine birebir bir konform dönüşümünü verir.ve $P_0 \to w = \infty$ a gider. Böylece $w = f(P)$ yi S üzerindeki P_o noktası hariç her nokta için yerel parametre olarak kullanabiliriz. dw nın hiç sıfırı olmayıp, P_o da ikinci mertebeden kutbu vardır. O halde $\deg[(\omega)] = -2$ dir. Yani yardımcı teorem 2, $g = 0$ için de ispatlanmış olur.

Şimdi Riemann-Roch teoremini keyfi bir d böleni için ispatlayalım.

ω bir abeliyen diferansiyel ve böleni (ω) olsun. Bu takdirde teorem 12 ye göre

$$i[d] = r\left[\frac{d}{(\omega)}\right]$$

dır.

$$\deg[d^{-1}] = -\deg[d] \quad , \quad \deg\left[\frac{d}{(\omega)}\right] = \deg[d] - \deg[(\omega)]$$

ve $\deg[(\omega)] = 2g-2$ olduğundan, (4.1) eşitliği

$$r\left[\frac{1}{d}\right] + \frac{1}{2}\deg\left[\frac{1}{d}\right] = r\left[\frac{d}{(\omega)}\right] + \frac{1}{2}\deg\left[\frac{d}{(\omega)}\right] \tag{4.6}$$

şeklinde yazılabilir.

d böleni $\frac{(\omega)}{d}$ böleni ile değiştirildiğinde (4.6) ifadesi değişmez. Buna göre d veya $\frac{(\omega)}{d}$ bir tam bölen ise, (4.6) ifadesi ispatlanmış olur. Ayrıca i,r ve deg sadece d nin bölen sınıfına bağlı olduğuna göre Riemann-Roch teoremi d veya $\frac{(\omega)}{d}$ tam bölen olduğunda d ye eşdeğer olan bir bölen için de geçerlidir. d veya $\frac{(\omega)}{d}$ tam bölen değilse, $r[d^{-1}] = 0$ ve $i[d] = r\left[\frac{d}{(\omega)}\right] = 0$ dır.

Bir d_1 böleni için $r[d_1] = 0$ ise, bir f meromorf fonksiyonu vardır ve $f \in L(d_1)$ olur. Ayrıcı $d_2 = \frac{(f)}{d_1}$

bir tam bölendir. Bu takdirde

$$\frac{d_2}{d_1^{-1}} = (f) \quad \text{veya} \quad \frac{1}{d_1} \sim d_2$$

dır. O halde $r[d_1] \neq 0$ ise, $\frac{1}{d_1}$ bir tam bölene eşdeğerdir. Sonuç olarak ne d nede $\frac{(\omega)}{d}$ bir tam bölen değilse, $\deg[d] = g-1$ olduğunu görmekle Riemann-Roch teoremini ispatlamış oluruz.

$$r[d^{-1}] = 0 \text{ ve } r[\frac{d}{(\omega)}] = i[d] = 0 \text{ olsun.}$$

$d = \frac{d_1}{d_2}$, d_1 ve d_2 tam ve aralarında asal bölenler olsun.

$$\deg[d] = \deg[d_1] - \deg[d_2]$$

ve

$$r\left[\frac{1}{d_1}\right] \geqslant \deg[d_1] - g + 1 = \deg[d_2] + \deg[d] - g + 1$$

dir. Buna göre $\deg[d] \geqslant g$ ise,

$$r\left[\frac{1}{d_1}\right] \geqslant \deg[d_2] + 1$$

olur.

$$d_2 = Q_1^{n_1} \ldots Q_k^{n_k} \quad \text{şeklinde olduğunu farzedelim.}$$

Bir meromorf fonksiyon için gerekli şey Q_j de n_j. mertebeden sıfırı olmasıdır. $L(d_1^{-1})$ de en azından $\deg[d_2] + 1$ tane lineer bağımsız fonksiyon vardır ve Q_j ,$j=1,2,\ldots,k$ noktalarında regülerdir ve bir f için $f \in L(d_1^{-1})$ ve $\nu_{P_j}(f) \geqslant n_j$ $(j=1,2,\ldots,k)$ dır. Sonuç olarak

$$f \in L\left(\frac{d_2}{d_1}\right) = L(d^{-1})$$

dır. Fakat hipotez gereği $r[d^{-1}] = 0$ olup bu çelişkidir.

Yani $\deg[d] < g$ dir. Bu takdirde, $r[\frac{d}{(\omega)}] = 0$ ise, $\deg[\frac{(\omega)}{d}] < g$ veya $\deg[(\omega)] - \deg[d] < g$ dir. $\deg[(\omega)] = 2g-2$ olduğundan $\deg[d] > g-2$ dir. Böylece $\deg[d] = g-1$ elde edilir. Bu da Riemann-Roch teoremini ispatlar.

Riemann-Roch teoremi bize singüleriteleri önceden belirtilmiş meromorf fonksiyonların varlığını söylemektedir. Herhangi bir d böleni verildiğinde d^{-1} in katı olan meromorf fonksiyonların vektör uzayının boyutu ile d nin katı olan abeliyen diferansiyellerin vektör uzayının boyutu arasındaki bu ilişki, kompakt Riemann yüzeylerinin konform dönüşümleri için kullanıldığı gibi, kenarlı kompakt planar Riemann yüzeylerinin konform dönüşümleri için de kullanılabilir. Şimdi yüzeyin g cinsine bağlı olarak Riemann-Roch teoreminin bazı sonuçlarını verelim.

Sonuç 1. S cinsi 1 olan bir Riemann yüzeyi ise, bir fonksiyonun sadece bir tek noktada basit kutbu mevcut olamaz.

$g = 1$ ise S yüzeyi topolojik olarak bir tordur. Bu durumda herhangi bir abeliyen diferansiyelin derecesi $\deg[(\omega)] = 0$ dır. d böleni olarak keyfi bir P noktası alırsak $(d = P)$ Riemann-Roch teoremi gereği $r[P^{-1}] = 1$ dir. Çünkü, $\deg[P] = 1$ ve $i[P] = 0$ dır. Şayet $i[P] > 0$ olsaydı yani $\omega \in \Omega(P)$ mevcut olsaydı, $\deg[(\omega)] \geq \deg[P] = 1$ olurdu. Bu ise $\deg[(\omega)] = 0$ oluşu ile çelişkidir. O halde $r[P^{-1}] = 1$ dir. Sabit fonksiyonlar $L(P^{-1})$ vektör uzayının elemanlarıdır ve sabit fonksiyonların kompleks boyutu 1 olduğuna göre $L(P^{-1})$ sadece sabit fonksiyonlardan ibarettir.

Sonuç 2. Bir d böleni için $\deg[d] > 2g-2$ ise, $i[d] = 0$ dır. Çünkü herhangi bir ω diferansiyeli için

$\deg[(\omega)] = 2g-2$ olduğuna göre $\omega \in \Omega(d)$ ise, $d[(\omega)] = 2g-2 \geqslant 2g-2$ olması gerekir. Oysa bu çelişkidir ve $i[d] = 0$ dır. Böylece $\deg[d] \geqslant 2g-2$ ise, Riemann-Roch teoremi,

$$r[d^{-1}] = \deg[d] - g+1$$

şeklini alır ki bu da, Riemann eşitsizliğinin eşitlik halidir.

Sonuç 3. S cinsi g olan bir kompakt Riemann yüzeyi olsun. Bu durumda birinci tür abeliyen diferansiyellerin hepsinin sıfır olduğu bir P noktası mevcut değildir. Böylece $i[P] < g$ olur.

Sıfıra özdeş olmayan bütün ω diferansiyelleri için $\nu_P(\omega) > 0$ olduğunu kabul edelim. Yani ω diferansiyellerinin hepsi P noktasında sıfır olsunlar. Bu durumda $i[P] = g$ olduğuna göre, Riemann-Roch teoremi gereği

$$r[P^{-1}] = \deg[P] + g-g+1 = \deg[P] + 1 = 2$$

elde edilir. Bunun anlamı, P de basit kutbu olan ve sabit olmayan meromorf fonksiyonun mevcut olduğudur. Böylece f fonksiyonu her kompleks değeri sadece bir kere alır. Bu da S nin küre üzerine 1-1 konform dönüşümünü verecektir. O halde S nin cinsi kürenin cinsi ile aynı olur. Halbuki kürenin cinsi sıfır olduğuna göre bu teoremdeki varsayım ile çelişkidir. O halde $i[P] < g$ dir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ahlfors, L.V. and Sario,L., Riemann Surfaces, Princeton Univ. Press, Princeton N.J., 1960.

Richards, I., On the classification of noncompact surfaces. Trans. Amer. Math. Soc. (106) 259-269 1963.

Rodin, B. and Sario, L., Principal Functions.D. Van Nostrand Com. Inc. 1968.

Springer,G., Introduction to Riemann Surfaces, Addison-Wesley Publishing Com. Inc. Massachusetts, U.S.A., 1957