ESKİŞEHİR DEVLET MÜHENDİSLİK VE MİMARLIK AKADEMİSİ

AŞIRI REGÜLER FONKSİYON UZAYLARINDA İZOMETRİLER.

DOKTORA TEZİ

Matematik Asistanı

AYNUR ÖZDAŞ

Eskişehir Devlet Mühendislik ve Mimarlık

Akademisi Maden Fakültesi

ESKİŞEHİR-1981

ÖNSÖZ

Benden yardım ve ilgilerini esirgemeyen, tez yöneticim, Sayın Prof. Dr. Ali Nihat Eskioğlu'na teşekkür etmeyi görev sayarım. Geçmiş yıllarda gerek Akademimizde ve gerekse katıldığım Matematik Yüksek Lisans Yaz Okullarında verdiği lisans üstü derslerle bana büyük yardımları dokunan Doç. Dr. Bahattin Cengiz'e, Eskişehir Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisinde göreve başlayalıdan beri daima desteğini gördüğüm Sayın Prof. Dr. Suat Mirza'ya çok şey borçluyum. Başta Başkanımız Sayın Prof. Dr. Battal Kuşhan olmak üzere Okulumuz Yöneticilerine ve Matematik Kürsüsünün tüm elemanlarına, özellikle bana sık sık tartışma olanağı vermiş olan yakın çalışma arkadaşım Mehmet Üreyen'e teşekkürlerimi ifade etmek isterim.Tüm çalışma süresi boyunca bana destek olan ve anlayış gösteren eşim Kudret Özdaş'a şükran borçluyum.

Ö Z E T

X yerel kompakt Hausdorff uzayı ise X üzerinde sonsuzda sıfır olan tüm sürekli kompleks değerli fonksiyonların uzayı $C_o(X)$ ile gösterilmektedir. Eğer X kompakt uzay ise $C_o(X)$ gösterimi yerine $C(X)$ kullanılmaktadır. $C_o(X)$ ve $C(X)$'in her ikisi de vektör uzaylarıdır. Ayrıca $C_o(X)$ ve $C(X)$ $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ ile tanımlanan normla, normlu vektör uzaylarıdırlar. Bu uzaylar, aynı zamanda yukarıdaki norm tarafından üretilen topolojiye göre Banach uzaylarıdırlar. Eğer $C_o(X)$'den $C_o(Y)$'ye bir izometrik izomorfizm varsa Banach-Stone Teoremi X ve Y'nin homeomorfik olduklarını ifade eder. Bu çalışmada X kompakt Hausdorff uzayı ise ve $C(X)$'in aşırı regüler iki alt uzayı arasında bir izometrik izomorfizm varsa, X'in kendisine homeomorfik olduğu gösterilmektedir. Ayrıca bu homeomorfizma ile izometrinin şekli belirlenmektedir.

A B S T R A C T

If X is a locally compact Hausdorff space, the spaces of all continuous complex-valued functions on X, which vanish at infinity, are represented by $C_o(X)$. If X is a compact space then $C(X)$ is used in place of $C_o(X)$. Both $C_o(X)$ and $C(X)$ are the vector spaces. Furthermore, $C_o(X)$ and $C(X)$ are the normed vector spaces with the norm $\|f\|$ defined by $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. These spaces are also Banach spaces with respect to the topology generated by the above norm. If there is a isometric isomorphism from $C_o(X)$ to $C_o(Y)$, Banach-Stone Theorem states that X and Y are homeomorphic. In this thesis, if X is a compact Hausdorff space and if there is a isometric isomorphism between two extremely regular supspaces of $C(X)$, it is shown that X is homeomorphic to itself. The form of the isometry is also determined using this homeomorphism.

İ Ç İ N D E K İ L E R

BÖLÜM 1

GİRİŞ

X bir topolojik uzay olmak üzere, X üzerindeki tüm sınırlı sürekli kompleks değerli fonksiyonların uzayı $C(X)$ ile gösterilir.

X yerel kompakt Hausdorff uzayı olsun. X üzerinde tanımlı sonsuzda sıfır olan sürekli kompleks değerli tüm fonksiyonların kümesi $C_o(X)$ ile gösterilir (f, X'den kompleks sayılara bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $|f(x)|$ bir kompakt kümenin dışında ε'dan küçük kalıyorsa f'ye sonsuzda sıfır olan fonksiyon denir). $C_o(X) \subset C(X)$ olup X kompakt uzay ise $C_o(X) = C(X)$ dir. Gerçek değerli fonksiyonlar için yukarıda ifade edilen gösterimler yerine $C_o^r(X)$ ve $C^r(X)$ gösterimleri kullanılır. Bu kümelerin her biri bir vektör uzayı olup $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ olarak tanımlanan norm ile normlu vektör uzayı ve bu normun ürettiği topolojiye göre de Banach uzayı olurlar. A, $C_o(X)$'in kapalı altuzayı olmak üzere her bir $x_o \in X$ için, x_o'ın her U komşuluğu verildiğinde A'da $1 = \|f\| = f(x_o) > \sup\{|f(x)| : x \in X \setminus U\}$ koşulunu sağlayan bir f fonksiyonu varsa A'ya regüler fonksiyon uzayı denir. A, $C_o(X)$'in kapalı altuzayı olmak üzere her bir $x_o \in X$ için, x_o'ın her U komşuluğu ve $\varepsilon \in (0,1)$ verildiğinde A'da $1 = \|f\| = f(x_o) > \varepsilon \geq \sup\{|f(x)| : x \in X \setminus U\}$ koşulunu sağlayan bir f fonksiyonu varsa A'ya $C_o(X)$'in aşırı regüler altuzadenir.

Bu çalışmada, $C(X)$'in aşırı regüler iki alt uzayı arasında bir izometrik izomorfizm varsa, X'in kendisine homeomorfik olduğu gösterilmektedir. Ayrıca bu homeomorfizma ile izometrinin şekli belirlenmektedir. Banach-Stone Teoremi $C_o(X)$ ve $C_o(Y)$ arasında bir izometrik izomorfizm varsa X ve Y'nin homeomorfik olduğunu ifade eder. Bu teoremin bazı genellemeleri yapılmıştır. Myers /1/, $C^r(X)$'in regüler altuzayı ve $C^r(Y)$'nin regüler altuzayı arasında bir izometrik izomorfizm varsa X ve Y'nin homeomorfik olduklarını göstermiştir. Cambern'nın /2/, genellemesi şöyledir: $C_o(X)$'ten $C_o(Y)$'ye $\|\psi\| \, \|\psi^{-1}\| < 2$ eşitsizliğini sağlayan bir izomorfizm varsa X, Y'ye homeomorfiktir. Amir /3/, bu sonucu Cambern'dan bağımsız olarak $C^r(X)$ ve $C^r(Y)$ için bulmuştur. Myers ve Cambern'nın sonuçları Cengiz /4/ tarafından birleştirilerek yeni bir genelleme yapılmıştır. Bu sonuç şöyledir: $C_o(X)$'in aşırı regüler altuzayı ile $C_o(Y)$'nin aşırı regüler altuzayı arasında $\|\psi\| \, \|\psi^{-1}\| < 2$ eşitsizliğini sağlayan bir izomorfizm varsa X, Y'ye homeomorfiktir. Görüldüğü gibi bu sonuçların amacı $C_o(X)$

/1/ Myers, S. B., Banach Spaces of continuous Function, Annals of Math. 49(1948), 132-140.

/2/ Cambern, M., On Isomorphism with Small Bound, Proc. Amer. Math. Soc. 18(1967), 1062-1066.

/3/ Amir, D., On Isomorphism of Continuous Function Spaces, Israel J. Math. 3(1965), 205-210.

/4/ Cengiz, B., A Generalization of the Banach-Stone Theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 40(1973), 426-430.

ve $C_o(Y)$ ile bunların bazı öz altuzayları arasındaki izomorfizmlerin varlığı kullanılarak X ve Y uzayları arasında bir homeomorfizm elde etmektir.

Bölüm 2, 3, 4 bu çalışmada kullanılacak kavramlardan ve genel sonuçlardan oluşmuştur. Bölüm 5'de $C(X)$'in aşırı regüler iki altuzayı arasında bir izometrik izomorfizm varsa X'in kendisine homeomorfik olduğu gösterilmiş olup bu homeomorfizma ile izometrinin şekli belirtilmiştir. İspatın akışını bozmamak için bazı ara ispatlar Ek'ler kısmında verilmiştir.

B Ö L Ü M 2

TOPOLOJİK KAVRAM VE TEOREMLER

2.1 Topolojiye Giriş

Bir X kümesinin altkümelerinin bir τ ailesi aşağıdaki özellikleri gerçekliyorsa bu aileye X üzerinde bir topoloji denir.

(i) $\emptyset, X \in \tau$,

(ii) τ , herhangi bileşim işlemine göre kapalı,

(iii) τ , sonlu arakesit işlemine göre kapalı.

(X, τ) çiftine topolojik uzay denir. Genellikle bu çift yerine "X bir topolojik uzay" ifadesi kullanılır. τ'nun elemanlarına açık kümeler, açık kümelerin tümleyenlerine de kapalı kümeler denir.

X topolojik uzayındaki bir x noktasını içeren açık kümeye x'in açık komşuluğu, x'in açık komşuluğunu içeren herhangi bir kümeye de x'in bir komşuluğu denir. Bir x noktasının tüm komşuluklarının ailesini $\mathcal{N}(x)$ ile göstereceğiz. $\beta(x)$, $\mathcal{N}(x)$'in bir altkümesi olsun. $\mathcal{N}(x)$'in her elemanı $\beta(x)$'in bir elemanını içeriyorsa $\beta(x)$ ailesine x noktasında bir komşuluk tabanı denir. $\beta(x)$'in elemanlarına da temel komşuluklar adı verilir.

Teorem 2.1.1. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin açık olması için gerek ve yeter koşul A'nın içerdiği her elemanın komşuluğu olmasıdır /1/.

/1/ Bourbaki, N., Elements of Mathematics General Topology Part I, Hermann, 1966., sf: 18.

X bir topolojik uzay ve A, X'de bir küme olmak üzere; (i) A'daki tüm açık kümelerin bileşimlerine A'nın içi denir ve $\text{int}A$ ile gösterilir. Böylece $\text{int}A$, A'nın içerdiği en büyük açık kümedir. (ii) A'yı kapsayan kapalı kümelerin arakesitine A'nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. $\overline{A}$, A'yı kapsayan en küçük kapalı kümedir. (iii) $\overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$ kümesine A'nın sınırı denir ve $\text{Bd}A$ ile gösterilir. X topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. x elemanının $\overline{A}$'da olması için gerek ve yeter koşul x'in her komşuluğunun A ile buluşmasıdır. Böylece şu özellikleri hemen söyleyebiliriz:

a) A açık $\Longleftrightarrow$ $\text{int}A = A$

b) A kapalı $\Longleftrightarrow$ $\overline{A} = A$

c) $x \in \text{Bd}A \Longleftrightarrow$ Her $U \in \mathcal{N}(x)$ için $U \cap A \neq \emptyset$ ve $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

τ, X kümesi üzerinde bir topoloji ve $\beta \subset \tau$ olsun. τ'nun her elemanı β'nın bazı elemanlarının bileşimleri şeklinde yazılabiliyorsa β ya τ topolojisinin bir tabanı denir. Ayrıca $\mathcal{G} \subset \tau$ olmak üzere $\mathcal{G}$ nin elemanlarının sonlu arakesiklerinin ailesi τ için bir taban ise $\mathcal{G}$' ye τ'nun bir alttabanı denir. τ_1, τ_2 X kümesi üzerinde iki topoloji ve $\tau_1 \subset \tau_2$ ise τ_1, τ_2'den daha zayıf veya τ_2, τ_1'den daha kuvvetlidir denir.

Teorem 2.1.2. $\mathcal{G} = \{A_\alpha : \alpha \in I\}$, bir X kümesinin altkümelerinin herhangi bir ailesi olsun. $\mathcal{G}$ yi içeren daima bir tek en zayıf $\tau(\mathcal{G})$ topolojisi vardır. Bu $\tau(\mathcal{G})$ ailesi şöyle belirlenir: $\emptyset$, X, A_α ların tüm sonlu kesişimleri ve bu sonlu kesişimlerin tüm herhangi bileşimlerinden oluşmuştur. $\mathcal{G}$, $\tau(\mathcal{G})$ için alttaban olup, $\tau(\mathcal{G})$ ye $\mathcal{G}$ nin ürettiği en zayıf topoloji denir /1/.

Bir X topolojik uzayında, her noktanın sayılabilir bir komşuluk tabanı varsa X'e sayılabilirliğin birinci aksiyomunu, topolojinin sayılabilir bir tabanı varsa X'e sayılabilirliğin ikinci aksiyomunu sağlıyor denir. $K \subset X$ ve $\bar{K} = X$ ise, K'ya X'in yoğun altkümesi denir. X'in sayılabilir yoğun altkümesi varsa X'e ayrılabilir uzay denir.

A, X topolojik uzayının bir altkümesi olsun. X'deki açık kümelerin A ile arakesitleri, A üzerinde bir topoloji oluştururlar. Bu topolojiye A'daki altuzay topolojisi denir.

2.2 Süreklilik

f, X topolojik uzayından Y topolojik uzayına herhangi bir fonksiyon ve $x_o \in X$ olsun. Eğer $f(x_o)$'ın herhangi bir U komşuluğu verildiğinde, $f(V) \subset U$ olacak şekilde x_o'ın bir V komşuluğu varsa, f'ye x_o'da süreklidir denir. f, her $x \in X$ için sürekli ise f, X üzerinde süreklidir denir. f bire-bir sürekli olmak üzere f^{-1}de sürekli ise f'ye homeomorfizm denir.

Teorem 2.2.1. f, X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bir fonksiyon ise aşağıdaki ifadeler denktir /2/.

(i) f, X üzerinde süreklidir.

(ii) Y'nin her kapalı kümesinin f^{-1} altındaki görüntüsü kapalıdır.

(iii) Y'nin her açık kümesinin f^{-1} altındaki görüntüsü açıktır.

/1/ Dugundji,J.,Topology,Allyn and Bacon,Boston,1966,sf: 65.

/2/ Bourbaki, N. sf:27.

Teorem 2.2.2. Sürekli iki fonksiyonun bileşkesi süreklidir /1/.

$\{(Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ topolojik uzaylar ailesi, X herhangi bir küme ve her α için $f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha$ herhangi bir fonksiyon ve $\mathcal{G} = \bigcup\limits_{\alpha} f_\alpha^{-1}(\tau_\alpha)$ olsun. $\tau = \tau(\mathcal{G})$, yani $\mathcal{G}$ ailesinin ürettiği topolojiye $\{f_\alpha : \alpha \in I\}$ fonksiyon ailesinin X üzerinde indirgediği zayıf topoloji denir. O halde bu zayıf topoloji f_α fonksiyonlarının her birini sürekli yapan en zayıf topolojidir.

2.3 Ayırım Aksiyomları

X bir topolojik uzay olmak üzere, her farklı iki noktanın ayrık komşulukları varsa bu uzaya Hausdorff uzayı denir. Bu koşul şuna denktir: Her x noktasının kapalı komşuluklarının arakesiti $\{x\}$ kümesidir.

Teorem 2.3.1. Hausdorff uzayının her altuzayı Hausdorff uzayıdır /2/.

X Hausdorff uzayında her noktanın kapalı komşulukları o noktada komşuluk tabanı oluşturuyorlarsa X'e düzenli uzay denir. Bu ifade şuna denktir: F, X'in kapalı herhangi bir altkümesi ve $x \notin F$ verildiğinde x ve F'nin ayrık komşulukları vardır.

/1/ Willard, S., General Topology, Addison-Wesley Publishing Company, 1970, sf: 45.

/2/ Bourbaki, N., sf: 77.

Teorem 2.3.2. Düzenli uzayın her alt uzayı düzenlidir /1/.

X Hausdorff uzayında bir x noktası ve x'i içermeyen kapalı bir F kümesi verildiğinde, X'ten [0, 1] aralığına $f(x)= 0$ ve her $y \in F$ için $f(y)= 1$ koşullarını sağlayan sürekli bir f fonksiyonu varsa X uzayına tamamen düzenli (completely regular) uzay denir.

Teorem 2.3.3. Tamamen düzenli uzayın her altuzayı tamamen düzenlidir /2/.

X Hausdorff uzayındaki her kapalı ve ayrık iki kümenin ayrık komşulukları varsa, X'e normal uzay denir.

Teorem 2.3.4. Normal uzayın kapalı altuzayı normaldir /3/.

Teorem 2.3.5 (Urysohn). X normal uzay ve F_1, F_2 X'de ayrık ve kapalı iki küme ise, X'ten [0, 1] aralığına $f(F_1)= 0$ ve $f(F_2)= 1$ koşullarını sağlayan sürekli bir f fonksiyonu vardır /4/.

Teorem 2.3.6 (Tietze Genişleme Teoremi). X normal uzay ve F, X'in kapalı bir altkümesi olsun. Eğer f, F'den gerçek sayılara giden sürekli bir fonksiyon ise X'ten gerçek sayılara giden sürekli bir g fonksiyonu vardır öyleki, F'deki her x

---

/1/ Bourbaki, N. sf: 80.

/2/ Willard, S. sf: 95.

/3/ Willard, S. sf: 100.

/4/ Dunford, N., Schwartz, J, T., Lineer Operators, Interscience Publishers, Inc., New York.sf: 15.

için $f(x) = g(x)$ olup, f sınırlı ise g'de sınırlı ve

$$\sup_{x \in X} |g(x)| = \sup_{x \in F} |f(x)|$$

dir /1/.

2.4 Kompaktlık

A, X topolojik uzayında bir küme olsun. Birleşimleri A' yı kapsayan ve açık kümelerden oluşan her aileye A'nın bir açık örtüsü denir. X topolojik uzayının her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa, bu uzaya kompakt uzay denir. Bu koşul şuna denktir: Kapalı kümelerden oluşan herhangi bir $\mathcal{F}$ ailesi için $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$ özelliğinde $\mathcal{F}$'nin sonlu bir alt-ailesi vardır.

Teorem 2.4.1. (a) Kompakt uzayın her kapalı altkümesi kompakttır. (b) Hausdorff uzayının her kompakt altkümesi kapalıdır /2/.

Teorem 2.4.2. Kompakt uzayın sürekli fonksiyon altında görüntüsü kompakttır /3/.

Teorem 2.4.3. Kompakt Hausdorff uzayı normaldir /4/.

/1/ Dunford, N., Schwartz, J. T. sf: 16.

/2/ Willard, S. sf: 119.

/3/ Willard, S. sf: 119.

/4/ Willard, S. sf: 121.

Teorem 2.4.4. Kompakt uzaydan Hausdorff uzayına birebir örten sürekli fonksiyon homeomorfizmdir /1/.

Bir X topolojik uzayında her noktanın kompakt komşulukları komşuluk tabanı oluyorsa X'e yerel kompakt uzay denir. X Hausdorff uzayının yerel kompakt olması için gerek ve yeter koşul, X'deki her noktanın en az bir kompakt komşuluğunun olmasıdır /2/. Her kompakt Hausdorff uzayı yerel kompakttır.

2.5 Dizi, Ağ

Bir D kümesi üzerinde bir $\leqslant$ sıra bağıntısı aşağıdaki koşulları gerçekliyorsa D'ye yönlü küme denir.

(i) $d \leqslant d \quad d \in D$,

(ii) $d_1 \leqslant d_2$, $d_2 \leqslant d_3$ ise $d_1 \leqslant d_3$,

(iii) d_1 , $d_2 \in D$ ise en az bir $d_3 \in D$ vardır öyleki

$d_1 \leqslant d_3$, $d_2 \leqslant d_3$ dir.

Yönlü bir D kümesinden herhangi bir X kümesine giden bir φ fonksiyonuna ağ(net) denir. Özel olarak D= N ise bu ağa dizi denir. $\alpha \in D$ için $\varphi(\alpha)$ noktası genellikle x_α ile belirtilir ve φ ağı (x_α) ile gösterilir. (x_α) ağı verilsin. Her α_0 için $\{x_\alpha ; \alpha \geqslant \alpha_0\}$ kümesine (x_α) ağının bir kuyruğu denir. (x_α), bir X uzayındaki net ve $x \in X$ olsun. Her bir $U \in \mathcal{N}(x)$ ve her $\alpha \geqslant \alpha_0$ için $x_\alpha \in U$ ifadesini sağlayan bir α_0 varsa, x noktasına (x_α) ağının limiti denir.

/1/ Willard, S. sf: 123.

/2/ Willard, S. sf: 130.

Teorem 2.4.1. f, X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. f'nin x_0'da sürekli olması için gerek ve yeter koşul $x_\alpha \longrightarrow x_0$ için $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x_0)$ olmasıdır /1/.

2.6 Metrik Uzay

X bir küme ve ρ , XxX'den R'ye aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon ise ρ'ya X üzerinde bir metrik veya metrik fonksiyonu denir. Her $x,y,z \in X$ için

(i) $\rho(x, y) \geq 0$,

(ii) $\rho(x, y)= 0 \iff x= y$,

(iii) $\rho(x, y)= \rho(y, x)$,

(iv) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z)+ \rho(z, y)$.

x, X'in bir elemanı ve $\varepsilon > 0$ için $S(x, \varepsilon)= \{y: \rho(x, y)<\varepsilon\}$ kümesine x merkezli, ε yarıçaplı açık küre adı verilir. Açık kürelerin ürettiği zayıf topolojiye metrik topoloji ve bu topoloji ile birlikte X kümesine metrik uzay denir. Her metrik uzay normaldir /2/.

/1/ Willard, S. sf: 75.

/2/ Dunford, N., Schwartz, J. T. sf: 19.

B Ö L Ü M 3

NORMLU UZAYLAR VE TOPOLOJİK VEKTÖR UZAYLARI

3.1 Normlu Uzaylar

X ve Y, K cismi(sayı cismi) üzerinde iki vektör uzayı olsun. X'den Y'ye T dönüşümü $x,y \in X$ ve $a,b \in K$ olmak üzere

$$T(ax+by)=aTx+bTy$$

koşulunu sağlıyorsa T'ye lineer dönüşüm veya lineer operatör denir.

X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\|\cdot\|$, X'den R'ye bir fonksiyon olsun. Her bir $x \in X$'e karşılık gelen ve x'in normu denilen $\|x\|$ gerçek sayısı aşağıdaki koşulları gerçekliyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna norm ve X vektör uzayına da normlu uzay denir.

(i) $\|0\| = 0$, $x \neq 0$ için $\|x\| > 0$,

(ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\quad x,y \in X$,

(iii) $\|\alpha x\| = \|\alpha\| \; \|x\|$ $\quad \alpha \in K$, $x \in X$.

$\{x: \|x\| \leq 1\}$ kümesine X'in kapalı birim küresi denir. XxX üzerinde $\rho(x,y)=\|x-y\|$ şeklinde tanımlanan ρ fonksiyonu metrik olma koşullarını sağlar. Bu nedenle her normlu uzay bir metrik uzaydır. Normlu uzaydaki metrik topolojisine norm topoloji veya kuvvetli topoloji denir.

Bir normlu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya Banach uzayı denir.

T, X normlu uzayından Y normlu uzayına lineer dönüşüm olsun. X'deki tüm x'ler için $\|Tx\| \leq M\|x\|$ koşulunu sağlayan

$M > 0$ sayısı varsa T'ye sınırlı lineer operatör ve

$$S = \{ M : \|Tx\| \leq M \|x\| \}$$

olmak üzere infS'ye de T'nin normu denir ve $\|T\|$ ile gösterilir.

İki normlu uzay arasındaki lineer dönüşümün sürekli olması için gerek ve yeter koşul sınırlı olmasıdır /1/. Bu yüzden lineer operatörlerde sınırlı ve sürekli terimleri birbirlerinin yerine sık sık kullanılır.

X normlu uzayından K sayı cismine giden lineer operatörlere lineer fonksiyoneller denir. X normlu uzayı üzerindeki sürekli lineer fonksiyonellerin kümesine de X'in eşleği (duali) denir ve X^* sembolü ile gösterilir. x^*, $y^* \in X^*$ ve $\alpha \in K$ olmak üzere tüm $x \in X$'ler için $(x^* + y^*)(x) = x^*x + y^*x$ ve $(\alpha x^*)(x) = \alpha x^*(x)$ olarak tanımlandığında X^*, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. $\|x^*\| = \sup\{ |x^*(x)| : \|x\| \leq 1 \}$ ile tanımlanan norm ile X^* bir normlu vektör uzayı olur. X^* bir Banach uzayıdır /2/.

Teorem 3.1.1 (Hahn-Banach). M, X normlu uzayının bir altuzayı olsun. M üzerindeki her sürekli lineer fonksiyonel X üzerine norm koruyarak genişletilebilir. Yani $y^* \in M^*$ ise y^*'a karşılık bir $x^* \in X^*$ vardır öyleki $\|y^*\| = \|x^*\|$ ve her $y \in M$ için $y^*y = x^*y$ dir /3/.

Hahn-Banach teoreminin sonucu olarak; N, X normlu uzayının kapalı altuzayı ise, N'ye ait olmayan x vektörüne karşılık

---

/1/ Dunford, N., Schwartz, J. T. sf: 59.

/2/ Dunford, N., Schwartz, J. T. sf: 62.

/3/ Rudin, W., Real and Complex Analysis(Second Edition), McGraw-Hill, Inc., 1974.sf: 111.

bir $x^* \in X^*$ vardır öyleki, $x^*x = 1$ ve $x^*(N) = 0$ /1/.

3.2 Topolojik Vektör Uzayları

X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. XxX'den X'e giden $(x, y) \longrightarrow x + y$ fonksiyonu ile KxX'den X'e giden $(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$ fonksiyonlarını sürekli yapan topoloji τ olmak üzere (X, τ) ikilisine topolojik vektör uzayı denir.

A, X vektör uzayının altkümesi olmak üzere $x, y \in A$ ve $a \in [0, 1]$ için $ax + (1-a)y \in A$ oluyorsa, A'ya konveks küme denir. Konveks kümelerin lineer dönüşüm altında görüntüsü yine bir konveks kümedir /2/. Topolojik vektör uzayındaki bir konveks kümenin kapanışı ve içi yine bir konveks kümedir /3/. Boş olmayan bir F kümesini içeren konveks kümelerin arakesiti F'yi içeren en küçük konveks kümedir. Bu kümeye F'nin konveks zarfı (convex hull) denir ve co(F) ile gösterilir. co(F)'nin kapanışı $\overline{co}(F)$ olup buna kapalı konveks zarf denir. Bir topolojik vektör uzayındaki topolojinin konveks kümelerden oluşan tabanı varsa bu uzaya yerel konveks topolojik uzay veya sadece yerel konveks uzay denir.

X vektör uzayı ve $x \in X$ olsun. X^* üzerinde $\hat{x}$ fonksiyonelini her $f \in X^*$ için $\hat{x}f = f(x)$ olarak tanımlayalım. $x \longrightarrow \hat{x}$ dönüşümü X'i izometrik ($\|\hat{x}\| = \|x\|$) ve izomorfik olarak X^{**}'ın içine gönderir /4/. X^* üzerinde $\{\hat{x} : x \in X\}$ fonksiyonel-

/1/ Dunford, N., Schwartz, J. T. sf: 64.

/2/ Dunford, N., Schwartz, J. T. sf: 410.

/3/ Dunford, N., Schwartz, J. T. sf: 413.

/4/ Dunford, N., Schwartz, J. T. sf: 66.

lerenin indirgediği zayıf topoloji X^*'ı yerel konveks topolojik uzay yapar /1/. Bu topolojiye genellikle zayıf*-topoloji (weak*-topology) denir.

Teorem 3.2.1 (Alaoğlu). X Banach uzayının X^* eşleğinin kapalı birim küresi zayıf*- topolojisine göre kompakttır /2/.

Bu teoremin sonucu olarak; X Banach uzayının eşleğinin altkümesinin zayıf*- topolojisine göre kompakt olması için gerek ve yeter koşul, zayıf*- topolojisine göre kapalı ve metrik topolojiye göre sınırlı olmasıdır.

/1/ Dunford, N., Schwartz, J. T. sf: 419.

/2/ Alaoğlu, L., Weak Topologies of Normed Linear Spaces, Annals of Math. 41(1940), 252-267.

B Ö L Ü M 4

ÖLÇÜM TEORİSİ

Herhangi bir X kümesinin altkümelerinin bir $\mathcal{A}$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlarsa bu $\mathcal{A}$ ailesine σ - cebiri denir.

(i) $\emptyset$ ve X, $\mathcal{A}$ ailesine aittir,

(ii) $A \in \mathcal{A}$ ise $X \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$ ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(X, $\mathcal{A}$) çiftine ölçülebilir uzay, $\mathcal{A}$ σ - cebirinin elemanları olan X'in altkümelerine de $\mathcal{A}$ - ölçülebilir kümeler denir. $\mathcal{G}$, X'in altkümelerinin herhangi bir ailesi olmak üzere $\mathcal{G}$ 'yi içeren σ - cebirlerinin arakesiti, bu σ - cebirlerinin en küçüğüdür. Buna $\mathcal{G}$ 'nin ürettiği σ - cebiri denir. Bu σ - cebirini kurmak için bilinen bir kural yoktur. τ , X üzerinde bir topoloji ise τ 'yu içeren en küçük σ - cebirine Borel cebiri denir. Reel sayılar kümesinde tüm (a,b) aralıkları tarafından üretilen σ - cebiri Borel cebiridir.

(X, $\mathcal{A}$) ölçülebilir uzayı ve f: $X \longrightarrow R$ bir fonksiyon olsun. Her a reel sayısı için, $\{x \in X: f(x) > a\} = f^{-1}((a, \infty))$ kümesi $\mathcal{A}$ 'da ise f'ye $\mathcal{A}$ - ölçülebilir fonksiyon denir. Bu koşul şunlara denktir: Her reel a sayısı için;

(i) $\{x \in X: f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$,

(ii) $\{x \in X: f(x) < a\} \in \mathcal{A}$,

(iii) $\{x \in X: f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$ /1/.

/1/ Royden, H. L., Real Analysis(Second Edition), Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1968, sf: 65.

$(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzayındaki $\mathcal{A}$ σ- cebiri Borel cebiri ise $f: X \longrightarrow R$ olarak tanımlanan tüm sürekli f fonksiyonları ölçülebilir fonksiyonlardır.

f, X üzerinde tanımlı gerçek değerli herhangi bir fonksiyon olmak üzere $f^+ = \sup\{f(x), 0\}$, $f^- = \sup\{-f(x), 0\}$ ifadeleri ile X üzerinde tanımlanan, negatif olmayan gerçek değerli f^- ve f^+ fonksiyonlarına sırasıyla f'nin negatif ve pozitif kısımları denir. Tanımdan anlaşılacağı gibi

$$f = f^+ - f^- \quad \text{ve} \quad |f| = f^+ + f^-$$

dir. Böylece

$$f^+ = \tfrac{1}{2}(|f| + f) \quad \text{ve} \quad f^- = \tfrac{1}{2}(|f| - f)$$

dir.

Eğer f genişletilmiş gerçek değerli ($f: X \longrightarrow [-\infty, \infty]$) ise bu fonksiyonun ölçülebilirliğinin tanımı gerçek değerli fonksiyonlarda olduğu gibidir. f, g genişletilmiş gerçek değerli fonksiyonlardan biri $+\infty$ değerini alırken, diğeri $-\infty$ değerini alırsa, $f+g$ tanımsız olmaktadır. Bu durumda $f+g$ yi sıfır olarak tanımlar ve $0.(\mp\infty) = 0$ kabul edersek, c herhangi bir gerçek sayı olmak üzere, cf, f^2, $f+g$, $f.g$, $|f|$, f^+, f^- fonksiyonları ölçülebilir fonksiyonlardır. f_1 ve f_2 gerçek değerli iki fonksiyon olmak üzere $f = f_1 + if_2$ fonksiyonunda f_1 ve f_2 ölçülebilir fonksiyonlar ise f kompleks değerli fonksiyonuna ölçülebilir denir. Kompleks değerli fonksiyonların toplamları ve çarpımları da ölçülebilirdir /1/.

Herhangi bir X kümesinin altkümelerinin $\mathcal{A}$ σ- cebiri üzerinde tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan genişletilmiş gerçek değerli μ fonksiyonuna ölçüm denir.

/1/ Bartle, R. G., The Elements of Integration, John Wiley Sons, Inc., New York, 1966, sf: 14.

(i) $\mu(\emptyset)=0$

(ii) Her $A\in\mathcal{A}$ için $\mu(A)\geq 0$

(iii) Her $A_n\in\mathcal{A}$ ayrık ($n\neq m$ olmak üzere $A_n\cap A_m=\emptyset$) dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$.

$x\in X$ olmak üzere, $x\in A$ ise $\mu_x(A)=1$; $x\notin A$ ise $\mu_x(A)=0$ olarak tanımlanan ölçüme x noktasındaki birim kütle denir.

X kümesinin altkümelerinin $\mathcal{A}$ σ- cebiri üzerinde tanımlı ölçüm μ ise $(X,\mathcal{A},\mu)$ üçlüsüne ölçüm uzayı denir. Eğer μ ölçümü $+\infty$ değerini almıyorsa sonlu ölçüm ve her n için $\mu(E_n)<\infty$ olmak üzere $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ yazılabiliyorsa, μ ölçümüne σ- sonlu ölçüm denir.

A, X'in bir altkümesi olmak üzere,

$$K_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. Ölçülebilir kümelerin karakteristik fonksiyonlarının lineer kombinasyonları olan $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_iK_{E_i}(x)$ fonksiyonuna basit fonksiyon denir. Her basit fonksiyon ölçülebilir bir fonksiyondur. $c_1,c_2,\ldots,c_n$; φ'nin farklı değerleri ve $E_i=\{x\in X:\ \varphi(x)=c_i\}$ olmak üzere $\varphi=\sum_{i=1}^{n}c_iK_{E_i}$ basit fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer $\mu(E_i)=\infty$ iken $c_i=0$ ise φ basit fonksiyonuna integrallenebilir basit fonksiyon denir. Buradan görülebileceği gibi bir basit fonksiyonun integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul ölçümü sonlu bir küme dışında fonksiyonun sıfır olmasıdır. İntegrallenebilen bir basit fonksiyon $\varphi=\sum_{i=1}^{n}c_iK_{E_i}$ olsun. Her

$E \in \mathcal{A}$ için $\sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i)$ sayısına φ'nin E üzerindeki integrali denir ve $\int_E \varphi d\mu$ ile gösterilir. Yani

$$\int_E \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(E \cap E_i)$$

dir.

Herhangi bir pozitif ölçülebilir f fonksiyonunun μ ölçümüne göre integrali,

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E \varphi d\mu \; : \; 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x) \text{ her } x \in X \text{ ve } \varphi \text{ integrallebilen basit fonksiyon} \right\}$$

dır. $\int f d\mu < \infty$ ise f'ye integrallebilen fonksiyon denir. Tanımın sonucu olarak şunları söyleyebiliriz: $0 \leqslant f \leqslant g$ ise $\int_E f d\mu \leqslant \int_E g d\mu$ ve $A \subset B$ ise her $f \geqslant 0$ için $\int_A f d\mu \leqslant \int_B f d\mu$.

dir. Şimdiye kadar, verilen pozitif ölçüme göre pozitif ölçülebilir bir fonksiyonun integral kavramı, herhangi ölçülebilen kompleks fonksiyonun bir kompleks ölçümüne göre integraline

$$\int_E (f_1 + if_2) d(\mu_1 + i\mu_2) = \int_E f_1 d\mu_1 - \int_E f_2 d\mu_2 + i \int_E f_1 d\mu_2 + i \int_E f_2 d\mu_1$$

olarak genişletilebilir.

$\mathcal{A}$, X üzerinde σ- cebiri ve μ bir kompleks ölçüm olsun. Her $E \in \mathcal{A}$ için,

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| : E_n \in \mathcal{A} \; , \; E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad n \neq m \text{ için } E_n \cap E_m = \emptyset \right\}$$

olarak tanımlanan $|\mu|$ fonksiyonu $\mathcal{A}$ üzerinde sonlu ve pozitif bir ölçüm olur. Bu ölçüme μ'nün toplam değişimi (varyasyonu) denilir /1/. μ gerçek ölçüm ise $\mu^{+}=\frac{1}{2}(|\mu|+\mu)$ ve $\mu^{-}=\frac{1}{2}(|\mu|-\mu)$ pozitif ölçümler olup $\mu=\mu^{+}-\mu^{-}$ ve $|\mu|=\mu^{+}+\mu^{-}$ dir /2/. $A\cup B=X$, $A\cap B=\emptyset$, $\mu^{+}(B)=\mu^{-}(A)=0$ olacak şekilde iki ölçülebilir küme bulunabilir /3/.

Borel cebiri üzerinde tanımlanan ölçüme Borel ölçümü denir. μ, X yerel kompakt uzayı üzerinde pozitif Borel ölçümü olsun. Eğer her E Borel kümesi için $\mu(E)=\inf\{\mu(U): U\supset E$ ve U açık$\}$ ise μ'ye dış regüler Borel ölçümü, $\mu(E)=\sup\{\mu(K): K\subset E$ ve K kompakt$\}$ ise μ'ye iç regüler Borel ölçümü denir. μ hem dış hem de iç regüler Borel ölçüise, μ'ye regüler Borel ölçümü denir. Herhangi kompleks Borel ölçümü μ için $|\mu|$ regüler Borel ölçümü ise, μ'ye regüler Borel ölçümü diyeceğiz.

Teorem 3.1 (Riesz Representation Theorem). X yerel kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere $C_0(X)^*$ 'ın her ψ elemanına $f\in C_0(X)$ olmak üzere $\psi(f)=\mu(f)$ /4/ ve $\|\psi\|=|\mu|(X)$ olacak şekilde tek bir kompleks regüler Borel ölçümü karşılık gelir. Tersine olarak her sonlu regüler Borel ölçümü μ için $f\in C_0(X)$ olmak üzere $\psi(f)=\mu(f)$ denklemi ile $C_0(X)^*$ 'ın bir elemanı tanımlanır ve $\|\psi\|=|\mu|(X)$ olur /5/.

/1/ Rudin, W. sf: 126.

/2/ Rudin, W. sf: 128.

/3/ Rudin, W. sf: 134.

/4/ $\int_X f d\mu$ yerine $\mu(f)$ gösterimi kullanılmıştır. $|\mu|(X)=\|\mu\|$ dır.

/5/ Rudin, W. sf: 139.

B Ö L Ü M 5

AŞIRI REGÜLER FONKSİYON UZAYLARINDAKİ İZOMETRİLER

5.1 Giriş

Bu bölümde ispatlanacak asıl teoreme geçmeden önce teoremle ilgili yakın sonuçları gözden geçirip, ayrıca sınırlı regüler Borel ölçümlerinin bazı sonuçlarını ifade edeceğiz.

K bir konveks küme ve $x \in K$ olsun. Eğer $a \in (0,1)$ ve $y,z \in K$ olmak üzere $x = ay+(1-a)z$ olması $x=y=z$ olmasını gerektiriyorsa x' e K' nın köşe noktası denir. Yerel konveks topolojik vektör uzayında boş olmayan kompakt küme köşe noktalarına sahiptir /1/.

Teorem 5.1.1(Krein-Milman). F yerel konveks topolojik vektör uzayının boş olmayan kompakt altkümesi ve E, F' nin köşe noktalarının kümesi ise $\overline{co}(E) = F$ dir /2/.

X kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere, X üzerinde tanımlı, sayı değerli (gerçek veya kompleks) tüm sınırlı sürekli fonksiyonların uzayı C(X)' tir. $f,g \in C(X)$ ve $\alpha \in K$ (sayı cismi) olmak üzere tüm $x \in X$ ler için $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ ve $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ olarak tanımlandığında C(X), K cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X, f \in C(X)\}$ eşitliği ile tanımlanan norm ile C(X) bir normlu vektör uzayı o-

---

/1/ Dunford, N., Schwartz, J. T. sf: 439.

/2/ Dunford, N., Schwartz, J. T. sf: 440.

lup, C(X) üzerindeki her Cauchy dizisi bu norm topolojisine göre yakınsak olduğundan C(X) bir Banach uzayıdır. C(X)' in eşleği $C(X)^*$ olup C(X) üzerindeki tüm sürekli lineer fonksiyonellerin kümesidir. X' deki her bir x için $e_x f = f(x)$ $(f \in C(X))$ eşitliği ile tanımlanan e_x sınırlı lineer fonksiyoneli $C(X)^*$'in kapalı birim küresindedir. Gerçekten, e_x sınırlı olduğundan,

$$\|e_x f\| \leqslant \|e_x\|\|f\| \tag{1}$$

dır. Öte yandan $e_x f = f(x)$ olduğundan,

$$\|e_x f\| = \|f(x)\| \leqslant \|f\| \tag{2}$$

dır. (1) ve (2) ifadelerinden $\|e_x\| \leqslant 1$ bulunur. $f \neq 0$ için $e_x f = f(x) \neq 0$ ve buradan $e_x \neq 0$ dır. Bu sonuç ve $\|e_x\| \leqslant 1$ olmasından e_x, $C(X)^*$ ' ın kapalı birim küresinin elemanıdır.

Teorem 5.1.2. X kompakt Hausdorff uzayı ve A, C(X)' in kapalı altuzayı olsun. X' in her bir x elemanı için $e_x f = f(x)$ $(f \in A)$ eşitliği ile tanımlanan A^* ' daki e_x fonksiyonelini alalım. O zaman A^* ' nın S^* kapalı birim küresindeki her köşe noktası, $|\alpha| = 1$ olmak üzere, αe_x formundadır. Eğer A= C(X) ise ifadenin tersi doğrudur. Yani $|\alpha| = 1$ olmak üzere αe_x $(x \in X)$ formundaki her eleman $C(X)^*$ ' ın kapalı birim küresinin köşe noktasıdır (burada α kompleks sayı) /1/.

Teorem 5.1.3. X kompakt Hausdorff uzayı ve $\hat{X}$, $C(X)^*$ ' in S^* kapalı birim küresinin köşe noktalarının altkümesi olmak ü-

---

/1/ Arens, R. F., Kelley, J. L., Caracterizations of the space of Continuous Functions Over a Compact Hausdorff Space, Trans.Amer.Math.Soc. 62(1947), 499-508.

üzere, $\lambda : x \longrightarrow e_x$ $(x \in X)$ fonksiyonu, X' ten $\hat{X}$' e zayıf*-topolojisine göre homeomorfizmadır /1/.

Teorem 5.1.4(Banach-Stone). $C_o(X)$ ve $C_o(Y)$ arasında bir izometrik izomorfizm varsa X ve Y homeomorfiktirler /2/.

μ ve ν X üzerinde herhangi iki ölçüm olsunlar. Eğer μ ölçülebilir bir A kümesi üzerinde ve ν , $X\setminus A$ kümesi üzerinde sıfır ölçümüne eşitseler bu iki ölçüme ortogonal denir. μ ve ν ortogonal ise toplam değişimin tanımından $|\mu+\nu| = |\mu| + |\nu|$ dır. Böylece μ ve ν sınırlı ve ortogonal regüler Borel ölçümleri ise $\|\mu + \nu\| = \|\mu\| + \|\nu\|$ olur. μ yerel kompakt Hausdorff uzayı üzerinde regüler Borel ölçümü olmak üzere her $x \in X$ için $\mu(\{x\}) = 0$ ise μ' ye sürekli veya atomsuz ölçüm, $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\{x_i\})\, \mu_{x_i}$ şeklinde ise μ' ye tamamen atomik ölçüm denir (burada μ_{x_i} , x_i' deki birim kütledir). Herhangi sınırlı regüler Borel ölçümü μ için $\{x \in X : \mu(\{x\})\} \neq 0$ sayılabilir bir kümedir. O halde μ yerel kompakt Hausdorff uzayı üzerinde sınırlı regüler Borel ölçümü ise $\mu_a = \sum_{x \in X} \mu(\{x\})\, \mu_x$ ölçümüne μ' nun atomik kısmı ve $\mu_c = \mu - \mu_a$ ölçümüne de μ' nin sürekli kısmı denir. μ_a ve μ_c ortogonal olup $\|\mu\| = \|\mu_a\| + \|\mu_c\|$ dir.

"Teorem 5.1.5. X yerel kompakt Hausdorff uzayı ve A, $C_o(X)$'in aşırı regüler altuzayı olsun. A üzerinde sıfır olan her sınırlı regüler Borel ölçümü süreklidir" /3/.

/1/ Dunford, N., Schwartz, J. T. sf: 442.

/2/ Dunford, N., Schwartz, J. T. sf: 442.

/3/ Cengiz, B. ,Sürekli Fonksiyon Uzaylarının Bazı özellikleri (Doçentlik Tezi), 1976,sf: 42.

dır. T^* örten olduğundan S_B^*' deki en az bir p^* ve q^* için $T^*p^* = u^*$, $T^*q^* = v^*$ dır. Buna göre,

$$T^*y^* = aT^*p^* + (1-a)T^*q^*$$
$$= T^*[ap^* + (1-a)q^*]$$

ve buradan

$$y^* = ap^* + (1-a)q^*$$

bulunur. y^* köşe noktası olduğundan $p^* = q^*$ ve buradan $u^* = T^*p^* = T^*q^* = v^*$ elde edilir. Bu sonuç $u^* \neq v^*$ ifadesi ile çelіştiğinden $T^*y^* \in E_A$ olmalıdır. Böylece $y^* \in E_B$ ise $T^*y^* \in E_A$ dır.

Şimdi T^*' ın E_B' den E_A' ya örten olduğunu görelim. $x^* \in E_A$ için $x^* \circ T^{-1} = y^* \notin E_B$ varsayalım. Bu nedenle S_B^*' deki farklı p^*, q^* elemanları ve $b \in (0,1)$ için,

$$y^* = T^{*^{-1}}x^* = bp^* + (1-b)q^*$$

dır. S_A^*' daki en az bir u^* ve v^* için $u^* \circ T^{-1} = p^*$ ve $v^* \circ T^{-1} = q^*$ dır. Buna göre

$$T^{*^{-1}}x^* = bT^{*^{-1}}u^* + (1-b)T^{*^{-1}}v^*$$
$$= T^{*^{-1}}(bu^* + (1-b)v^*) \ /1/.$$

ve buradan

$$x^* = bu^* + (1-b)v^*$$

bulunur. $x^* \in E_A$ olduğundan $u^* = v^*$ ve buradan $p^* = T^{*^{-1}}u^* = T^{*^{-1}}v^* = q^*$ elde edilir. Bu sonuç $p^* \neq q^*$ ifadesi ile çelіştiğinden $T^{*^{-1}}x^* = y^* \in E_B$ olmalıdır. Böylece $T^*(E_B) = E_A$ dır. T^* bire-bir

/1/ Ek D. sf: 36.

ve $T^*(E_B)= E_A$ olduğundan T^*, E_B ve E_A arasında bire-bir örtendir.

T^*' ın A^* ve B^* uzaylarındaki zayıf*-topolojilerine göre sürekli olduğunu göstermek güç değildir /1/.

İspatın bundan sonraki bölümünde aşağıdaki yardımcı teoremlere ihtiyacımız olacak.

Yardımcı Teorem 5.2.2. X kompakt Hausdorff uzayı, A C(X)' in aşırı regüler altuzayı ve her $x \in X$ için C(X) üzerinde $e_x f= f(x)$ eşitliği ile tanımlı e_x fonksiyonelinin A' ya sınırlaması ε_x olsun, yani her $f \in A$ için $e_x f= \varepsilon_x f$ dir. O zaman ε_x A^*' ın kapalı birim küresi S_A^*' nın bir köşe noktası olup her $x \neq y$ için $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y$ olduğundan S_A^*' nın köşe noktalarının kümesi

$\{ \alpha \varepsilon_x : x \in X \quad |\alpha| = 1 \}$ dir

İspat. E_A, S_A^*' nın köşe noktalarının kümesi ve ε_x, E_A' da olmasın. Bu durumda S_A^*' da ε_x' dan farklı x^* ve y^* elemanları ve $b \in (0,1)$ için,

$$\varepsilon_x= bx^*+(1-b)y^*$$

dır. Hahn-Banach ve Riesz teoremlerinden dolayı X üzerinde,

$$x^* f= \mu(f) \qquad \text{ve} \qquad \| x^* \| = \| \mu \| \qquad f \in A$$

$$y^* f= \nu(f) \qquad \text{ve} \qquad \| y^* \| = \| \nu \| \qquad f \in A$$

olacak şekilde μ ve ν gibi iki sınırlı regüler Borel ölçümü vardır. $\mu = \mu_a + \mu_c$ ve $\nu = \nu_a + \nu_c$ μ ve ν nün atomik ve sürekli kısımları cinsinden ifadeleri olsunlar. Bilindiği gibi,

---

/1/ Ek E. sf: 37.

$$\|\mu\| = \|\mu_a\| + \|\mu_c\| \quad \text{ve} \quad \|\nu\| = \|\nu_a\| + \|\nu_c\|$$

dir.

$$\varepsilon_x = bx^* + (1-b)y^*$$

olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon_x(f) - bx^*(f) - (1-b)y^*(f) \qquad (f \in A) \\ &= e_x(f) - b\,\mu(f) - (1-b)\,\nu(f) \\ &= e_x(f) - b(\mu_a(f) + \mu_c(f)) - (1-b)(\nu_a(f) + \nu_c(f)) \\ &= ((e_x - b\,\mu_a - (1-b)\,\nu_a) - (b\,\mu_c + (1-b)\,\nu_c))(f) \end{aligned}$$

dir. A üzerinde sıfır olan her sınırlı regüler Borel ölçümü (5.1.5) gereğince sürekli olduğundan,

$$(e_x - b\,\mu_a - (1-b)\,\nu_a) - (b\,\mu_c + (1-b)\,\nu_c)$$

ölçümünün atomik kısmı olan

$$e_x - b\,\mu_a - (1-b)\,\nu_a$$

ölçümü sıfırdır. Veya

$$e_x = b\,\mu_a + (1-b)\,\nu_a$$

bulunur. $x^* \in S_A^*$ olduğundan,

$$1 \geq \|x^*\| = \|\mu\| = \|\mu_a\| + \|\mu_c\| \qquad (1)$$

ve dolayısıyla $1 \geq \|\mu_a\|$, benzer şekilde $1 \geq \|\nu_a\|$ bulunur. O halde μ_a ve ν_a $C(X)^*$ 'ın kapalı birim küresindedir. e_x $C(X)^*$ 'ın kapalı birim küresinin bir köşe noktası olduğundan $e_x = \mu_a = \nu_a$ dır. $\|\mu_a\| = \|e_x\|$, $\|e_x\| = 1$ dir. Bu sonuç ve (1) ifadesinden $\mu_c = 0$ bulunur. Benzer şekilde $\nu_c = 0$ dır. $e_x = \mu_a$ ve her $f \in A$ için $x^*(f) = \mu(f)$ olmasından $x^*(f) = \mu_a(f)$, dolaolduğu hemen görülür /1/. O halde λ süreklidir. A^* zayıf*-topolojisine göre Hausdorff uzayı olduğundan A^*'ın $\hat{X}$ altuzayı Hausdorff uzayıdır. Böylece λ homeomorfizmadır. λ sürekli olduğundan $\lambda(X) = \hat{X}$ kompakttır.

Şimdi teoremin kalan kısmının ispatına devam edelim.

Yardımcı Teorem (5.2.3.)'den B^*'ın S_B^* kapalı birim küresinin köşe noktalarının $\hat{X}_B$ altkümesi kompakt olduğundan T^*, $\hat{X}_B$'den E_A'nın altkümesi arasında buradaki topolojilere göre homeomorfizmadır. Yine yardımcı teorem (5.2.2.)'den her $x \in X$ için $\varepsilon_x \in E_B$ olduğu biliniyor. Ayrıca T^* köşe noktalarını köşe noktalarına götürdüğünden $T^* \varepsilon_x \in E_A$ dır. O halde $\sigma : X \to X$ $x \longrightarrow \sigma(x)$ ve $|\beta(x)| = 1$ olmak üzere,

$$T^* \varepsilon_x = \beta(x) \; \varepsilon_{\sigma(x)}$$

dir. $\frac{1}{\beta(x)} T^* = t$ dersek, $t: \varepsilon_x \longrightarrow \varepsilon_{\sigma(x)}$ olmak üzere t $\hat{X}_B$ ve $\hat{X}_A$ arasında homeomorfizmadır.

Diğer taraftan, $\gamma : X \longrightarrow \hat{X}_B$ ve $\lambda : X \longrightarrow \hat{X}_A$ dönüşümleri yardımcı teorem (5.2.3.)'den dolayı homeomorfizmadırlar. O halde

$$\sigma = \lambda^{-1} \circ t \circ \gamma : X \longrightarrow X$$

homeomorfizmadır. Böylece aranılan homeomorfizma tanımlanmış oldu. $f \in A$ ve $x \in X$ için (i)'nin sağlandığını görelim:

/1/ Ek G. sf: 39.

$$(Tf)(x)=\varepsilon_x(Tf)=(T^*\varepsilon_x)f=\beta(x)\varepsilon_{\sigma(x)}(f)=\beta(x).f(\sigma(x))$$

$(Tf)(x)=\beta(x).f(\sigma(x))$ eşitliği her x için doğru olduğundan $Tf=\beta.f\circ\sigma$ dır. Ohalde $T: f \longrightarrow \beta.f\circ\sigma$ olarak belirlenir.

Şimdi $\beta(x)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu görelim: (x_α) X'de x_o gibi bir noktaya yakınsayan bir ağ olsun. $\sigma(x_\alpha)=y_\alpha$ $\sigma(x_o)=y_o$ diyelim. A^* ve B^* zayıf*-topolojileri ile donatıldığında T^*, λ ve δ dönüşümleri homeomorfizm olduklarından süreklidirler. O halde

$$T^*\varepsilon_{x_\alpha} = \beta(x_\alpha)\,\varepsilon_{y_\alpha} \qquad (\text{her } \alpha \text{ için})$$

olduğundan

$$\lim_\alpha T^*\varepsilon_{x_\alpha} = \lim_\alpha \beta(x_\alpha)\,\varepsilon_{y_\alpha} \tag{1}$$

dır. $\varepsilon_{x_\alpha} \longrightarrow \varepsilon_{x_o}$ ($x_\alpha \longrightarrow x_o$ ve δ sürekli) olduğundan ve ayrıca T^*'ın sürekliliğinden,

$$\lim_\alpha T^*\varepsilon_{x_\alpha} = T^*\varepsilon_{x_o} = \beta(x_o)\,\varepsilon_{y_o} \tag{2}$$

dır. (1) ve (2) ifadelerinden

$$\lim_\alpha \beta(x_\alpha)\,\varepsilon_{y_\alpha} = \beta(x_o)\,\varepsilon_{y_o}$$

bulunur. Zayıf*-topolojisine göre A^*'daki bir x^*_α ağının x^*_o'a yakınsaması her $f \in A$ için $x^*_\alpha(f)$'nin $x^*_o(f)$'ye yakınsaması demektir. O halde

$$\lim_\alpha \beta(x_\alpha)\,\varepsilon_{y_\alpha}(f) = \beta(x_o)\,\varepsilon_{y_o}(f) \qquad f \in A$$

olup $\varepsilon_{y_\alpha}(f) = f(y_\alpha)$ olmasından,

$$\lim_{\alpha} \beta(x_\alpha)f(y_\alpha) = \beta(x_o)f(y_o)$$

bulunur. Özel olarak $f(y_o)=1$ olan A'nın f elemanı alınırsa

$$\lim_{\alpha} \beta(x_\alpha)f(y_\alpha) = \beta(x_o)$$

olur. $\lim_{\alpha} f(y_\alpha)=1$ olduğundan en az bir α_o vardır öyleki $\alpha \geq \alpha_o$ için $f(y_\alpha)\neq 0$ dır. Böylece,

$$\beta(x_\alpha) = \frac{\beta(x_\alpha).f(y_\alpha)}{f(y_\alpha)} \qquad \text{her } \alpha \geq \alpha_o \text{ için}$$

yazabiliriz.

$$\lim_{\alpha} \beta(x_\alpha) = \lim_{\alpha} \frac{\beta(x_\alpha).f(y_\alpha)}{f(y_\alpha)} = \frac{\beta(x_o)}{1} = \beta(x_o)$$

dır. $\lim_{\alpha} \beta(x_\alpha)=\beta(x_o)$ ve $x_\alpha \longrightarrow x_o$ olduğundan β x_o noktasında süreklidir. Benzer şekilde β'nın her $x\in X$ için sürekliliği gösterilebileceğinden $\beta\in C(X)$'tir.

5.3 Sonuç

Bilindiği gibi Banach-Stone Teoremi $C_o(X)$ ve $C_o(Y)$ arasında bir izometrik izomorfizm varsa X'in Y'ye homeomorfik olduğunu ifade eder. Myers, Cambern, Amir, Cengiz bu teoremin bazı genellemelerini yapmışlardır. Bu çalışmada; $C(X)$'in aşırı regüler iki altuzayı arasında bir izometrik izomorfizm varsa, X'in kendisine homeomorfik olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu homeomorfizma ile izometrinin şekli belirlenmiştir.

X yerel kompakt Hausdorff uzayı ve $M_c(X)$, X üzerindeki sıfırdan farklı, sınırlı, sürekli regüler Borel ölçümlerinin kümesi olmak üzere, her bir $\mu \in M_c(X)$ için,

$$K(\mu)=\{f \in C_0(X) : \mu(f)=0\}$$

kümesine μ'nün $C_0(X)$'deki çekirdeği (kernel) denir. X yerel kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere A, $C_0(X)$'in kapalı altuzayı olsun. Eğer her $x \in X$ ve x'in her V komşuluğu verildiğinde A'da her $y \in X \setminus V$ için $1=\|f\| = f(x) > f(y) = 0$ koşulunu sağlayan bir f fonksiyonu varsa A'ya sıfır tipi aşırı regüler fonksiyon uzayı denir."Her bir $\mu \in M_c(X)$ için $K(\mu)$, $C_0(X)$'in maksimal aşırı regüler öz altuzayı ve sıfır tipidir. $C_0(X)$'in her maksimal aşırı regüler A altuzayı için en az bir $\mu \in M_c(X)$ vardır öyleki $A=K(\mu)$" /1/.

Yukarıda verilen bilgiler ışığında Teorem 5.2.1. yeni bir problemi ortaya çıkarmıştır. Aşırı regüler fonksiyon uzaylarında varlığı ispatlanan bu teoremin maksimal aşırı regüler fonksiyon uzaylarında da doğru olduğu açıktır. Bu sonuca göre:

$\sigma : X \longrightarrow X$ homeomorfizma ve her $x \in X$ için $\|\alpha(x)\| = 1$ olmak üzere $T: K(\mu) \longrightarrow K(\mu)$; $f \longrightarrow \alpha . f \circ \sigma$ formunda izometrik izomorfizm ise σ'nun ölçüm koruyup korumayacağı, yani ölçülebilir bir A kümesi için $\mu(A)=\mu(\sigma(A))$ eşitliğinin doğru olup olmadığı araştırılmağa değerdir. Bu problem $C(X)$'in maksimal aşırı regüler altuzayları arasındaki izometrik izomorfime karşılık bulunan homeomorfizmaya yeni bir özellik getirmesi açısından önemlidir.

/1/ Cengiz, B. sf: 44.

E K A

X, Y Banach uzayları ve X'den Y'ye tüm lineer operatörlerin ailesi $B(X,Y)$ olsun. Y^*'dan X^*'a $T^*y^* = y^*T$ eşitliği ile tanımlanan T^* dönüşümüne T'nin eşleği(adjointi) denilir. $T \longrightarrow T^*$ dönüşümü $B(X,Y)$'den $B(Y^*,X^*)$'a içine bir izometrik izomorfizmdir. Yani $\|T\| = \|T^*\|$ /1/ . X'den Y'ye T lineer operatörlerinin Y'nin tamamı üzerinde tanımlı T^{-1} tersinin olması için gerek ve yeter koşul, T'nin T^* eşleğinin X^*'ın tamamında tanımlı tersinin olmasıdır. Bu durumda $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ dır /2/.

/1/ Dunford, N., Schwartz, J. T. sf: 478.

/2/ Dunford, N., Schwartz, J. T. sf: 479.

E K B

φ, X normlu uzayından Y normlu uzayına bir izometri (her $x \in X$ için $\|x\| = \|\varphi x\| = \|y\|$) olsun. $\|\varphi x\| = \|\varphi\| \|x\|$ olduğundan $\|\varphi\| = 1$ dir. Öte yandan $\|x\| = \|y\|$ ve $x = \varphi^{-1}y$ olduğundan $\|\varphi^{-1}y\| = \|y\|$ dolayısıyla φ^{-1} izometridir. Benzer tartışma ile $\|\varphi^{-1}\| = 1$ bulunur. Böylece $\|\varphi\| = \|\varphi^{-1}\| = 1$ veya $\|\varphi\| \|\varphi^{-1}\| = 1$ dir. O halde φ normlu vektör uzayları arasında bir izometri ise $\|\varphi\| \|\varphi^{-1}\| = 1$ dir. Bu koşulun tersinin varlığını araştıralım. Yani $\|\varphi\| \|\varphi^{-1}\| = 1$ koşulunu sağlayan izomorfizm izometrimidir? φ, X ve Y normlu vektör uzayları arasında örten bir topolojik izomorfizm (φ ve φ^{-1} sürekli) ve $\psi = \|\varphi^{-1}\| \|\varphi\|$ olsun. $\|\psi\| = \|\varphi^{-1}\| \|\varphi\| = 1$ ve $\psi^{-1} = \dfrac{1}{\|\varphi^{-1}\|} \varphi^{-1}$ olduğundan $\|\psi^{-1}\| = 1$ dir. Böylece $\|\psi\| \|\psi^{-1}\| = 1$ koşulu sağlanır. Öte yandan her $x \in X$ için $\psi(x) = \|\varphi^{-1}\| \varphi(x)$ dir. $\varphi : X \longrightarrow Y$ olduğundan $x = \varphi^{-1}(\varphi(x))$ olarak alabiliriz. O halde,

$$\|x\| = \|\varphi^{-1}(\varphi(x))\| \leq \|\varphi^{-1}\| \|\varphi(x)\| = \|\psi(x)\| \leq \|\psi\| \|x\|$$

buradan $\|x\| \leq \|\psi(x)\| \leq \|x\|$ bulunduğundan $\|\psi(x)\| = \|x\|$ dolayısıyla ψ izometridir. O halde sonuç olarak: X ve Y'nin izometrik olması için gerek ve yeter koşul X'den Y'ye $\|\psi\| \|\psi^{-1}\| = 1$ eşitliğini sağlayan örten bir ψ izomorfizminin olmasıdır.

E K B

φ, X normlu uzayından Y normlu uzayına bir izometri (her $x \in X$ için $\|x\| = \|\varphi x\| = \|y\|$) olsun. $\|\varphi x\| = \|\varphi\|\|x\|$ olduğundan $\|\varphi\| = 1$ dir. Öte yandan $\|x\| = \|y\|$ ve $x = \varphi^{-1}y$ olduğundan $\|\varphi^{-1}y\| = \|y\|$ dolayısıyla φ^{-1} izometridir. Benzer tartışma ile $\|\varphi^{-1}\| = 1$ bulunur. Böylece $\|\varphi\| = \|\varphi^{-1}\| = 1$ veya $\|\varphi\|\|\varphi^{-1}\| = 1$ dir. O halde φ normlu vektör uzayları arasında bir izometri ise $\|\varphi\| \|\varphi^{-1}\| = 1$ dir. Bu koşulun tersinin varlığını araştıralım. Yani $\|\varphi\| \|\varphi^{-1}\| = 1$ koşulunu sağlayan izomorfizm izometrimidir? φ, X ve Y normlu vektör uzayları arasında örten bir topolojik izomorfizm (φ ve φ^{-1} sürekli) ve $\psi = \|\varphi^{-1}\| \|\varphi\|$ olsun. $\|\psi\| = \|\varphi^{-1}\| \|\varphi\| = 1$ ve $\psi^{-1} = \dfrac{1}{\|\varphi^{-1}\|} \varphi^{-1}$ olduğundan $\|\psi^{-1}\| = 1$ dir. Böylece $\|\psi\| \|\psi^{-1}\| = 1$ koşulu sağlanır. Öte yandan her $x \in X$ için $\psi(x) = \|\varphi^{-1}\| \varphi(x)$ dir. $\varphi : X \longrightarrow Y$ olduğundan $x = \varphi^{-1}(\varphi(x))$ olarak alabiliriz. O halde,

$$\|x\| = \|\varphi^{-1}(\varphi(x))\| \leq \|\varphi^{-1}\| \|\varphi(x)\| = \|\psi(x)\| \leq \|\psi\| \|x\|$$

buradan $\|x\| \leq \|\psi(x)\| \leq \|x\|$ bulunduğundan $\|\psi(x)\| = \|x\|$ dolayısıyla ψ izometridir. O halde sonuç olarak: X ve Y'nin izometrik olması için gerek ve yeter koşul X'den Y'ye $\|\psi\| \|\psi^{-1}\| = 1$ eşitliğini sağlayan örten bir ψ izomorfizminin olmasıdır.

E K C

(i) T^* lineerdir:

$x^*, y^* \in B^*$, $f \in A$ ve $\alpha, \beta \in K$ (sayı cismi)

$$T^*(\alpha x^* + \beta y^*)f = (\alpha x^* + \beta y^*)(Tf) = \alpha x^*(Tf) + \beta y^*(Tf)$$
$$= \alpha(T^* x^*)(f) + \beta(T^* y^*)(f).$$

Her $f \in A$ için doğru olduğundan

$T^*(\alpha x^* + \beta y^*) = \alpha T^* x^* + \beta T^* y^*$ dır. T^* lineerdir.

(ii) T^* izometridir:

$T: A \longrightarrow B$ izometri olduğundan $\|T\| \, \|T^{-1}\| = 1$ dir /1/ . Diğer taraftan $\|T\| = \|T^*\|$ ve $\|T^{-1}\| = \|T^{*^{-1}}\|$ olduğu biliniyor /2/ . O halde $\|T^*\| \, \|T^{*^{-1}}\| = 1$ ve T^* izometridir.

/1/ Ek B. sf: 34.

/2/ Ek A. sf: 33.

EK D

T^{*-1} lineerdir:

$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ olduğundan $x^*, y^* \in A^*$, $f \in B$ ve $\alpha, \beta \in K$ için,

$$T^{*-1}(\alpha x^* + \beta y^*)(f) = (T^{-1})^*(\alpha x^* + \beta y^*)(f)$$
$$= (\alpha x^* + \beta y^*)(T^{-1}f)$$
$$= \alpha x^*(T^{-1}f) + \beta y^*(T^{-1}f)$$
$$= \alpha(T^{*-1}x^*)(f) + \beta(T^{*-1}y^*)(f)$$

her $f \in B$ için doğru olduğundan,

$$T^{*-1}(\alpha x^* + \beta y^*) = \alpha T^{*-1}x^* + \beta T^{*-1}y^*$$

dir.

E K E

T^* zayıf*-topolojisine göre süreklidir:

$y_o^* \in B^*$ için $T^* y_o^* = x_o^*$ olsun. x_o^*'ın bir açık komşuluğu, $\epsilon > 0$ olmak üzere

$$U(x_o^*, f_1, \ldots, f_n, \epsilon) = \left\{ x^* \in A^* : |\hat{f}_i x_o^* - \hat{f}_i x^*| < \epsilon \quad i=1,\ldots,n \text{ ve } f_i \in A \right\}$$

$$= \left\{ x^* \in A^* : |(x_o^* - x^*)(f_i)| < \epsilon \quad i=1,\ldots,n \text{ ve } f_i \in A \right\}$$

şeklindedir.

$$T^{*^{-1}}(U) = \left\{ T^{*^{-1}} x^* \in B^* : |(x_o^* - x^*)(f_i)| < \epsilon \quad i=1,\ldots,n \quad f_i \in A \right\}$$

$$= \left\{ y^* \in B^* : |(T^* y_o^* - T^* y^*)(f_i)| < \epsilon \quad i=1,\ldots,n \quad f_i \in A \right\}$$

$$= \left\{ y^* \in B^* : |T^*(y_o^* - y^*)(f_i)| < \epsilon \quad i=1,\ldots,n \quad f_i \in A \right\}$$

$$= \left\{ y^* \in B^* : |(y_o^* - y^*)(Tf_i)| < \epsilon \quad i=1,\ldots,n \quad f_i \in A \right\}$$

$$= \left\{ y^* \in B^* : |(y_o^* - y^*) g_i| < \epsilon \quad g_i = Tf_i \quad i=1,\ldots,n \text{ ve } f_i \in A \right\}$$

kümesi B^*'da açık kümedir. T^* süreklidir.

EK F

$\lambda : x \longrightarrow \varepsilon_x$ dönüşümü bire-birdir:

$x \neq y$ ise $V \cap U = \emptyset$ olacak şekilde $V \in \mathcal{N}(x)$ ve $U \in \mathcal{N}(y)$ vardır. x'in V komşuluğu ve $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, A aşırı regüler altuzay olduğundan

$$1 = \| f \| = f(x) \geq \varepsilon \geq | f(y) | \qquad (y \in X \setminus V)$$

koşulunu sağlayan bir $f \in A$ vardır. Böylece $f(x) \neq f(y)$ olur. Diğer taraftan $\varepsilon_x(f) = f(x)$ ve $\varepsilon_y(f) = f(y)$ olduğundan $\varepsilon_x(f) \neq \varepsilon_y(f)$ dir. Buradan $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y$ dir.

E K G

$\lambda(U(x)) \subset U(\varepsilon_x, f_o, \delta)$ olduğunu görelim;

$$U(\varepsilon_x, f_o, \delta) = \left\{ x^* \in A^* : |(\varepsilon_x - x^*)(f_o)| < \delta \quad f_o \in A \right\} \qquad (1)$$

ve

$$U(x) = \left\{ y \in X : |f_o(x) - f_o(y)| < \delta \quad f_o \in A \right\}$$

idi.

$$\begin{aligned} \lambda(U(x)) &= \left\{ \lambda(y) \in A^* : |f_o(x) - f_o(y)| < \delta \quad f_o \in A \right\} \\ &= \left\{ \varepsilon_y \in A^* : |\varepsilon_x(f_o) - \varepsilon_y(f_o)| < \delta \quad f_o \in A \right\} \\ &= \left\{ \varepsilon_y \in A^* : |(\varepsilon_x - \varepsilon_y)(f_o)| < \delta \quad f_o \in A \right\} \qquad (2) \end{aligned}$$

bulunur. (1) ve (2) ifadelerinden $\lambda(U(x)) \subset U(\varepsilon_x, f_o, \delta)$ dır.

KAYNAKLAR

/1/ Alaoğlu, L., Weak Topologies of Normed Linear Spaces, Annals of Math. 41(1940), 252-267.

/2/ Amir, D., On Isomorphism of Continuous Function Spaces, Israel J. Math. 3(1965), 205-210.

/3/ Arens, R.F., Kelley, J.L., Caracterizations of the Space of Continuous Functions Over a Compact Hausdorff Space, Trans. Amer. Math. Soc. 62(1947), 499-508.

/4/ Bartle, R. G., The Elements of Integration, John Wiley Sons, Inc., New York, 1966.

/5/ Bourbaki, N., Elements of Mathematics General Topology Part I, Hermann, 1966.

/6/ Cambern, M., On Isomorphism with Small Bound, Proc. Amer. Math. Soc. 18(1967), 1062-1066.

/7/ Cengiz, B., A Generalization of the Banach-Stone Theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 40(1973), 426-430.

/8/ Cengiz, B., Sürekli Fonksiyon Uzaylarının Bazı Özellikleri (Doçentlik Tezi), 1976.

/9/ Dugundji, J., Topology, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

/10/ Dunford, N., Schwartz, J. T., Linear Operators, Interscience Puplishers, Inc., New York.

/11/ Myers, S. B., Banach Spaces of Continuous Function, Annals of Math. 49(1948), 132-140.

/12/ Royden, H. L., Real Analysis (Second Edition), Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1968.

/13/ Rudin, W., Real and Complex Analysis (Second Edition), McGraw-Hill, Inc., 1974.

/14/ Willard, S., General Topology, Addison-Wesley Pulishing Company, 1970.