ESKİŞEHİR DEVLET MÜHENDİSLİK VE MİMARLIK AKADEMİSİ

L_p UZAYLARI ÜZERİNDEKİ DOĞRUSAL İZOMETRİLER

DOKTORA TEZİ

Matematik Asistanı

MEHMET ÜREYEN

Eskişehir Devlet Mühendislik ve Mimarlık
Akademisi Maden Fakültesi

ESKİŞEHİR - 1981

Ö N S Ö Z

Kendilerine çok şey borçlu olduğum tez yöneticim Sayın Doç.Dr. Bahattin Cengiz'e minnet ve şükranlarımı sunarım. Çalışmalarım süresince sürekli teşvik ve desteklerini gördüğüm Sayın Prof.Dr. Suat Mirza'ya, Sayın Prof.Dr.A. Nihat Eskioğlu'na ve Sayın Prof.Dr. Battal Kuşhan'a teşekkürlerimi ifade etmek isterim. Ayrıca çalışmalarım boyunca sürekli yardımlaştığımız Sayın Aynur Özdaş ile ilgilerinden dolayı Matematik Kürsüsünün tüm Öğretim Üye ve Yardımcılarına ve tezin yazımında yardımlarını esirgemeyen Sayın Dr. Soner Alanyalı'ya teşekkür ederim.

Ö Z E T

L_p uzayları üzerindeki izometrilerin ne şekilde olması gerektiği problemi, sırasıyla Banach, Lamperti, Cambern ve Sourour tarafından bazı durumlarda çözülmüş olmasına rağmen günümüzde de önemini sürdürmektedir.

Sonlu ve sayı değerli L_p uzayları üzerindeki izometriler, Lamperti tarafından karakterize edilmiştir.Lamperti bu karakterizasyonu yaparken, düzgün küme izomorfizmi denilen, bir küme dönüşümünden yararlanmıştır.Bu çalışmanın üçüncü bölümünde bu izometrilerin, bir nokta dönüşümü ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir.

Çalışmanın dördüncü ve son bölümünde ise σ-sonlu ve sayı değerli L_p uzayları üzerindeki izometrilerin,Lamperti tarafından iddia edilen ancak; uzayın sonlu olması durumunda ispatlanan şeklin,uzayın σ-sonlu olması durumunda da doğru olduğu ispatlanmıştır. Daha sonra bu ispat,uzayın herhangi ölçüm uzayı olması durumuna genişletilmiştir.

A B S T R A C T

Even though the problem of the form of the isometries defined on L_p spaces has been solved in certain cases by Banach, Lamperti, Cambern and Sourour, it still bears importance today.

The isometries defined on finite and scalar valued L_p spaces are characterized by Lamperti. He made use of set transformation which is called regular set isomorphism in obtaining this characterization. In the third chapter of this thesis it is shown that these isometries can be characterized by point transformation.

Lamperti expressed his theorem about the isometries defined on σ-finite and scalar valued L_p spaces, but he proved his theorem for finite L_p spaces.

In the fourth and last chapter of this thesis Lamperti's theorem is proved for σ-finite cases and then this proof is extended for arbitrary measure spaces.

İ Ç İ N D E K İ L E R

B Ö L Ü M I

GİRİŞ

Lineer yapılar arasındaki, lineer operatörleri ve bu operatörlerin özelliklerini araştıran fonksiyonel analizin önemli problemlerinden birisi de, bu lineer yapılardan olan L_p uzayları üzerindeki norm koruyan lineer dönüşümlerin (izometrilerin) şeklidir.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ herhangi ölçüm uzayı ve B herhangi bir Banach uzayı olsun. X'den B'ye tanımlanan ve salt değerinin p. kuvveti integrallenebilen ölçülebilir fonksiyonlar kümesi $L_p(X, \mathcal{A}, \mu, B)$ ile gösterilir. $X, \mathcal{A}, \mu$ ve B'den birisinin belirtilmesi için özel bir neden yoksa, bu küme kısaca L_p ile gösterilir. Ayrıca, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçüm uzayının sonlu, σ-sonlu veya herhangi ölçüm uzayı olmasına göre L_p'ye sonlu, σ-sonlu veya herhangi L_p dendiği gibi, B uzayının sayı cismi veya Hilbert uzayı olması gibi özel durumlarda, L_p'ye sayı değerli veya Hilbert uzayı değerli L_p gibi isimler verilir.

L_p noktasal lineer işlemlere göre bir vektör uzayıdır. Bu uzayda, $\| f \|_p = \left[\int | f(x) |^p dV_\mu \right]^{1/p}$ ile tanımlanan $\| \cdot \|_p$ fonksiyonu bir yarı-norm olur. Ancak ; farklarının integrali sıfır olan fonksiyonlar aynı kabul edilirse, L_p uzayı üzerinde bir denklik bağıntısı elde edilir. Bir $f \in L_p$ fonksiyonunun ait olduğu denklik sınıfı $[f]$ ile gösterilir ve denklik sınıflarının oluşturduğu küme üzerinde lineer işlemler ; $[f] + [g] = [f + g]$, $a \in K$ için $a[f] = [af]$ şeklinde tanımlanırsa yine bir vektör uzayı elde edilir. Üstelik, bu vektör uzayında, $\| [f] \|_p = \left[\int | f(x) |^p dV_\mu \right]^{1/p}$ alınırsa bir normlu uzay elde edilir. Böylece elde edilen normlu uzay, $L_p(X,\mathcal{A},\mu,B)$ ile gösterilir. L_p uzayının elemanı olan bir denklik sınıfındaki fonksiyonlar tamamıyla aynı kabul edilir ve bu denklik sınıfına tek bir fonksiyon gözü ile bakılır. Bu nedenle L_p'nin elemanları daima bir fonksiyon olarak düşünülür.

Bir L_p uzayından kendi üzerine tanımlanan izometrilerin şeklini ilk defa Banach incelemiştir. Banach, /1/'deki incelemesinde, X uzayı olarak $[0,1]$ aralığını ve ölçüm olarakda Lebesgue ölçümünü alarak, sayı değerli L_p,$(1 \leq p<\infty$, $p\neq 2)$ uzaylarındaki izometrileri karakterize etmiştir. Banach'ın bu incelemesi ilk araştırma olması bakımından önem taşır.

Banach'dan sonra bu konuda ilk ciddi araştırmayı Lamperti yapmıştır. Lamperti, /2/'de sayı değerli ve sonlu L_p uzayları üzerindeki izometrileri karakterize etmiştir.

Daha sonra Cambern, /3/'de; sonlu ve ayırılabilir Hilbert uzayı değerli L_p uzayları üzerindeki izometrileri karak-

---

/1/ Banach, S., Théorie des Opération Linéaires, Monografje Matematyczne , Warsaw , 1932 .

/2/ Lamperti, J., On the Isometries of Certain Function Spaces, Pasific J. Math.,Vol.8., 1958, s.459-466.

/3/ Cambern, M.,The Isometries of $L_p(X,K)$, Pasific J. Math., Vol. 55, No 1,1974, s. 9-17.

terize ederken Sourour'da /1/'de; iki Banach uzayının direk toplamı olmayan Banach uzayı değerli ve ayırılabilir Hilbert uzayı değerli L_p uzayları üzerindeki izometrileri karakterize etmiştir.

Yukarıda sözü edilen izometriler, düzgün küme izomorfizmi denilen bir küme dönüşümüyle karakterize edilmiştir. Bu çalışmanın III. Bölümünde , sayı değerli ve sonlu L_p uzaylarında, izometrilerin nokta dönüşümüyle karakterize edilebileceği gösterilmiştir.

Lamperti, yukarıda sözü edilen incelemesinde ; teoremi, σ-sonlu ölçüm uzayı için ifade ettiği halde, ispatını sonlu ölçüm uzayında yapmıştır. IV. Bölümde , bu ispat, σ-sonlu ölçüm uzayı için tamamlandıktan sonra, herhangi ölçüm uzayı için de Lamperti'nin iddiasının doğru olduğu ispatlanmıştır.

II. Bölümde ise , gerekli olan temel kavram, teorem ve sonuçlar, bir bütünlük içerisinde, verilmiştir.

/1/ Sourour, A.,R., On the Isometries of $L_p(\Omega$, X) , Bulletin of the American Mathematical Society , Vol. 83. Number 1, 1977. s. 129-130.

B Ö L Ü M II

TEMEL KAVRAM VE TEOREMLER

2.1 Genel Topoloji

Herhangi bir X kümesinin tüm alt kümelerinin P(X) ailesinin boş küme ($\emptyset$) ve X'i içeren bir $\mathcal{T}$ alt ailesi, herhangi bileşim ve sonlu kesişim işlemlerine göre kapalı ise $\mathcal{T}$'ye X üzerinde bir topoloji ve $(X, \mathcal{T})$ ikilisine de bir topolojik uzay denir. Genellikle $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayı yerine "X topolojik uzayı" ifadesi kullanılır. Topolojinin elemanı olan bir kümeye açık küme, açık kümenin tümleyenine kapalı küme, hem kapalı hem de açık olan kümeye kapalı-açık küme denir. $A \subset X$ kümesini kapsayan $N \in \mathcal{T}$ kümesine A'nın açık komşuluğu, açık komşuluğu kapsayan herhangi bir kümeye de A'nın komşuluğu denir. Özel olarak $\{x\}$ kümesinin komşuluklarına da x'in komşulukları denir. x'in komşuluklarının $\mathcal{V}_{(x)}$ ailesi, topoloji ve komşuluk tanımlarından, şu özelliklere sahiptir :

i) Her $V \in \mathcal{V}_{(x)}$ için $x \in V$ dir,

ii) $U, V \in \mathcal{V}_{(x)}$ ise $U \cap V \in \mathcal{V}_{(x)}$ dir,

iii) $U \in \mathcal{V}_{(x)}$ ve $U \subset V$ ise $V \in \mathcal{V}_{(x)}$ dir,

iv) her $V \in \mathcal{V}_{(x)}$ için bir $U \in \mathcal{V}_{(x)}$ vardır öyleki her bir $y \in U$ için $V \in \mathcal{V}_{(y)}$ dir.

Bir noktanın her komşuluğu, bir $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}_{(x)}$ ailesinin en az bir elemanını kapsarsa $\mathcal{B}$'ye bir komşuluk tabanı denir. $\mathcal{T}$ topolojisinin her elemanı, açık kümelerden oluşan bir $\mathcal{C}$ ailesinin bileşimi şeklinde yazılabiliyorsa $\mathcal{C}$'ye $\mathcal{T}$ için bir tabandır denir.

$\mathcal{G} \subset P(X)$ olsun. $\mathcal{G}$ 'nin elemanlarının sonlu kesişimlerinin ailesi bir $\mathcal{T}$ topolojisi için taban oluşturur. Bu $\mathcal{T}$ topolojisine $\mathcal{G}$ 'nin doğurduğu topoloji denir ve $\mathcal{T}(\mathcal{G})$ ile gösterilir, $\mathcal{G}$ 'ye de $\mathcal{T}$ için alt taban denir /1/. $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ topolojileri arasında $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ bağıntısı varsa $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ den daha zayıf veya $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_1$ den daha kuvvetlidir denir. Bu tanıma göre $\mathcal{T}(\mathcal{G})$ $\mathcal{G}$ 'yi içeren en zayıf topolojidir.

X topolojik uzayında bir A kümesinin kapsadığı en büyük açık A^o kümesine A'nın içi, A'yı kapsayan en küçük kapalı $\bar{A}$ kümesine A'nın kapanışı denir. Bir x noktasının her komşuluğunun hem A ve hem de $X \setminus A$ ile kesişimi boş değilse bu x noktasına A'nın sınır noktası, sınır noktalarının kümesine de A'nın sınırı denir. $A \subset X$ kümesinin kapanışı X kümesine eşit ise A'ya yoğun alt küme denir. Eğer X topolojik uzayının sayılabilir bir yoğun alt kümesi varsa bu uzaya ayırılabilir topolojik uzay denir. $A \subset X$ kümesi ile X'in açık kümelerinin kesişimi A da bir topoloji oluşturur, bu topolojiye alt uzay topolojisi denir.

X ve Y iki topolojik uzay, $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_o \in X$ olsun. Eğer $f(x_o)$'ın her U komşuluğuna karşılık $f(V) \subset U$ olacak şekilde x_o'ın en az bir V komşuluğu varsa f fonksiyonuna x_o noktasında süreklidir denir. X'in her noktasında sürekli bir fonksiyona da X te süreklidir denir. f, X'den Y'ye sürekli bir fonksiyon ise Y'nin her açık (veya kapalı) kümesinin f ile ters görüntüsü açık (veya kapalı) bir küme-

/1/ Dugundji, J., "Topology", Allyn and Bacon, Boston, 1966. s.65.

dır /1/. Sürekli fonksiyonların bileşkesi süreklidir. f sürekli ise $A \subset X$ olmak üzere $f_{/A} : A \longrightarrow Y$ ve $f : X \longrightarrow f(X)$ sürekli fonksiyonlardır.(burada A ve f(X) alt uzay topolojisi ile donatılmışlardır), ayrıca $x_o \in \bar{A}$ ise $f(x_o) \in \overline{f(A)}$ dır. $f : X \longrightarrow Y$ bire-bir, örten ve sürekli fonksiyonu için f^{-1} de sürekli ise f'ye topolojik eşyapı dönüşümü veya homeomorfizm denir. Bu durumda X ve Y'ye homeomorfiktir denir. Homeomorfik uzaylar topolojik uzay olarak aynı kabul edilirler.

X bir küme ve $\mathcal{F} \subset P(X)$ olsun. $\mathcal{F}$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlarsa $\mathcal{F}$'ye süzgeç (filter) denir.

i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$,

ii) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ise $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,

iii) $F_1 \in \mathcal{F}$ ve $F_1 \subset F_2$ ise $F_2 \in \mathcal{F}$.

X topolojik uzayında $\mathcal{V}_{(x)}$ komşuluklar ailesi bir süzgeç oluşturur. $\mathcal{F}$ süzgecinin her elemanı, $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ ailesinin en az bir elemanını kapsarsa $\mathcal{C}$'ye bir süzgeç tabanı denir. $\emptyset \neq \mathcal{C} \subset P(X)$ ve $\emptyset \notin \mathcal{C}$ koşullarını sağlayan $\mathcal{C}$ ailesinin bir süzgeç tabanı olması için gerek ve yeter koşul herhangi iki elemanının kesişiminin üçüncü bir elemanı kapsamasıdır /2/. $\mathcal{F} = \{F \subset X :$ en az bir $C \in \mathcal{C}$ vardır öyleki $C \subset F\}$ ailesine $\mathcal{C}$' nin doğurduğu süzgeç denir. $\mathcal{C}$, X kümesinde bir süzgeç tabanı ve f, X üzerinde bir fonksiyon ise f($\mathcal{C}$) bir süzgeç tabanıdır /3/. X topolojik uzayındaki $\mathcal{F}$ süzgeci için $\mathcal{V}_{(x)} \subset \mathcal{F}$ ise

---

/1/ Dugundji,J.,s.79.

/2/ Bourbaki,N.,"General Topology",Part I,Hermann,Paris,1966,s.59.

/3/ Bourbaki,N.,s.62.

$\mathcal{F}$ süzgeci x'e yakınsıyor denir $\mathcal{F} \longrightarrow x$ ile gösterilir. x noktasının her komşuluğu bir $\mathcal{C}$ süzgeç tabanının en az bir elemanını kapsarsa $\mathcal{C}$ x'e yakınsıyor denir. Bir $\mathcal{F}$ süzgecinin her elemanının bir x noktasının her komşuluğu ile kesişimi boş değilse x'e $\mathcal{F}$ 'nin bir yığılma (cluster) noktası denir. x'in $\mathcal{F}$ 'nin yığılma noktası olması için gerek ve yeter koşul her $F \in \mathcal{F}$ için $x \in \bar{F}$ olmasıdır /1/. $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ süzgeçleri için $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ ise $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ ' den daha zayıftır denir. Bir $\mathcal{F}$ süzgecinden kesin olarak daha kuvvetli hiçbir süzgeç yoksa $\mathcal{F}$' ye maksimal süzgeç (ultrafilter) denir.

Bir D kümesi üzerindeki $\leq$ bağıntısı ;

i) $d \leq d$, $d \in D$,

ii) $d_1 \leq d_2$, $d_2 \leq d_3$ ise $d_1 \leq d_3$, $d_1, d_2, d_3 \in D$,

iii) d_1, $d_2 \in D$ ise en az bir $d_3 \in D$ vardır öyleki $d_1 \leq d_3$ ve $d_2 \leq d_3$ dir,

koşullarını sağlarsa D'ye yönlü küme denir. D yönlü kümesinden bir X kümesine tanımlanan φ fonksiyonuna ağ(net) denir. D kümesi, doğal sayılar kümesi alınırsa bu ağa dizi denir. Genellikle $\varphi(\lambda) = x_\lambda$ ve φ ağı (x_λ) şeklinde gösterilir. (x_λ) ağında $\{ x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0 \}$ kümesine bu ağın kuyruğu (tail) denir. X topolojik uzayında bir x noktasının her komşuluğu (x_λ) ağının bir kuyruğunu içerirse x'e (x_λ) ağının limiti denir.

Teorem 2.1.1 X ve Y topolojik uzaylar f , X'den Y'ye bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

/1/ Willard,S.,"General Topology", Addison-Wesley Publishing Company, Philippines, 1970, s.78.

i) f, bir x noktasında süreklidir.

ii) X'de x'e yakınsayan her (x_λ) ağı için ($f(x_\lambda)$) Y'de f(x)'e yakınsar.

iii) X'de x'e yakınsayan her $\mathcal{C}$ süzgeç tabanı için f($\mathcal{C}$) süzgeç tabanı Y'de f(x)'e yakınsar /1/.

Bir X topoljik uzayında her farklı iki noktanın ayrık komşulukları varsa,bu uzaya Hausdorff uzayı denir.

Teorem 2.1.2 X topolojik uzayında aşağıdaki ifadeler denktir.

i) X bir Hausdorff uzayıdır.

ii) $x \in X$ noktasının kapalı komşuluklarının kesişimi $\{x\}$ kümesidir.

iii) X üzerinde yakınsak bir süzgecin limit noktası tekdir /2/.

X bir topolojik uzay olsun. Açık kümelerden oluşan ve X'i örten bir aileye X'in açık örtüsü denir. X topolojik uzayının her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X uzayına kompakt uzay denir.Alt uzay topolojisine göre kompakt olan bir kümeye de kompakt küme denir.P(X)'in herhangi bir alt ailesinin her sonlu sayıda elemanının kesişimi boş değilse bu alt ailenin sonlu kesişim özelliği vardır denir.

Teorem 2.1.3 X topolojik uzayında aşağıdaki ifadeler denktir.

/1/ Ash,B. R.,"Measure, Integration and Functional Analysis", Academic Press, 1972, s.208.

/2/ Bourbaki,N., s.75.

i) X kompakttır.

ii) Sonlu kesişim özelliği olan ve kapalı kümelerden oluşan her ailenin kesişimi boş değildir.

iii) X'te her süzgecin bir yığılma noktası vardır.

iv) X'te her ağın bir yığılma noktası vardır /1/.

Teorem 2.1.4 i) Kompakt uzayın kapalı her alt kümesi kompakttır.

ii) Hausdorff uzayında her kompakt küme kapalıdır.

iii) Kompakt kümenin sürekli fonksiyonla görüntüsü kompakttır /2/.

X kompakt uzayından Y Hausdorff uzayına tanımlanan bire-bir, örten ve sürekli fonksiyonlar bir homeomorfizmadır/3/.

Bir topolojik uzayda bir noktanın kompakt komşulukları komşuluk tabanı oluşturursa bu uzaya yerel kompakt uzay denir. Bir Hausdorff uzayının yerel kompakt olması için gerek ve yeter koşul her noktanın en az bir kompakt komşuluğunun olmasıdır /4/. Her kompakt Hausdorff uzay yerel kompakttır.

$\{(Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$ topolojik uzaylar ailesi, X herhangi bir küme ve her α için f_α, X'den Y_α'ya giden bir fonksiyon olsun. $\mathcal{G} = \bigcup_\alpha f_\alpha^{-1}(\mathcal{T}_\alpha)$ diyelim. $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{G})$ topolojisine $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ ailesinin X üzerinde indirgediği zayıf topoloji denir. Bu topoloji, f_α'ları sürekli yapan en zayıf

---

/1/ Willard, S., s.118 .

/2/ Dugundji, J., s.224.

/3/ Willard, S., s. 123.

/4/ Willard, S., s.130 .

topolojidir. $X = \prod_{\alpha} X_{\alpha}$ çarpım kümesinde izdüşüm fonksiyonlarının indirgediği zayıf topolojiye de çarpım topolojisi denir.

Bir X topolojik uzayı boş olmayan ayrık ve açık iki kümenin bileşimi şeklinde yazılabiliyorsa bu uzaya bağlantısız uzay, aksi halde bağlantılı uzay denir. $A \subset X$ kümesi alt uzay topolojisine göre bağlantısız ise A'ya bağlantısız küme denir. Bağlantılı kümenin sürekli fonksiyonla görüntüsü ve kapanışı da bağlantılı kümelerdir /1/. Bir uzayın maksimal bağlantılı kümesine uzayın bileşeni denir. Bir topolojik uzayda, bileşenler kapalı ve ayrıktır, ayrıca her nokta bir bileşene aittir /2/. Bir topolojik uzayda her bileşen tek nokta kümesi ise bu uzaya tamamen bağlantısız uzay denir.

$\{(X_{\nu}, \mathcal{T}_{\nu}) : \nu \in I\}$ bir ayrık topolojik uzaylar ailesi olsun. $X = \bigcup_{\nu} X_{\nu}$ kümesi üzerine, $\bigcup_{\nu} \mathcal{T}_{\nu}$ ailesinin doğurduğu topolojiyi koyarak elde edilen topolojik uzaya X topolojik uzaylarının topolojik direk toplamı denir ve $X = \sum_{\nu} \oplus X_{\nu}$ ile gösterilir. X'te her X_{ν} kapalı-açıktır dolayısıyla X_{ν}'lerin her biri yerel kompakt ise X yerel kompakttır.

$X \times X$ den R'ye tanımlanan ve her $x, y, z \in X$ için ;

i) $d(x,y) \geq 0$,

ii) $d(x,x) = 0$,

iii) $d(x,y) = d(y,x)$,

iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$,

koşullarını sağlayan d fonksiyonuna yarı-metrik denir.Bir

/1/ Willard,S., s.192,193.

/2/ Dugundji,J.,s.112.

yarı-metrik ;

v) $d(x,y) = 0$ ise $x = y$

koşulunu da sağlarsa metrik adını alır. (X,d) ikilisine metrik uzay denir. (X,d) metrik uzayında $S(x,\varepsilon) = \{ y : y \in X \text{ ve } d(x,y) < \varepsilon \}$ kümesine ε-küresi denir. $\mathcal{B}(x) = \{ S(x, \varepsilon), \varepsilon > 0 \}$ ailesini x noktasında komşuluk tabanı alarak elde edilen topolojiye de metrik topoloji denir. (X,d) metrik uzayında (x_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $m,n \geq n_o$ için $d(x_m,x_n) < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir n_o bulunabiliyorsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir. Her Cauchy dizisi yakınsak olan metrik uzaya da tam (complete) metrik uzay denir. Tam metrik uzayın kapalı alt uzayı da tamdır.

2.2 Topolojik Vektör Uzayları

X , K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzay ve $A \subset X$ olsun. A alt kümesi X üzerindeki işlemlere göre bir vektör uzayı oluştururrsa A'ya X'in lineer alt uzayı veya lineer manifold denir. A'yı kapsayan en küçük lineer alt uzaya A tarafından doğurulan lineer alt uzay denir, A tarafından doğurulan lineer alt uzayın elemanları A'nın elemanlarının lineer toplamıdır.

X , K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\mathcal{T}$;

i) $X \times X$ den X'e $(x,y) \longrightarrow x + y$,

ii) $K \times X$ den X'e $(a,x) \longrightarrow ax$,

fonksiyonlarını sürekli yapan topoloji olmak üzere $(X,\mathcal{T})$ ikilisine topolojik vektör uzayı denir.

Topolojik vektör uzayında, $x \longrightarrow x + a$ dönüşümü homeomorfizm olduğundan sıfır vektörünün komşuluk tabanı belirlendiğinde topoloji tamamen belirlenmiş olur /1/.

X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. X'den Y'ye tanımlanan ve $x,y \in X$, $a,b \in K$ olmak üzere $T(ax+by)=aTx+bTy$ eşitliğini sağlayan T dönüşümüne lineer dönüşüm veya lineer operatör denir. Özel olarak X'den K'ya tanımlanan lineer operatöre lineer fonksiyonel denir.

Lineer operatörler kümesi, $(T_1+T_2)x = T_1x + T_2x$, $a \in K$ olmak üzere $(aT)x = a(Tx)$ işlemlerine göre bir vektör uzayı oluşturur. T lineer operatörünün bire-bir olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{Ker}\, T = \{x : Tx = 0\} = \{0\}$ olmasıdır.

X bir vektör uzayı olmak üzere X' den R'ye tanımlanan ve aşağıdaki koşulları sağlayan $\|\cdot\| : x \longrightarrow \|x\|$ fonksiyonuna yarı-norm denir.

i) $\|0\| = 0$ ve $x \neq 0$ ise $\|x\| > 0$,

ii) $\|ax\| = |a|\, \|x\|$, $x \in X$, $a \in K$,

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x,y \in X$.

Bir yarı-norm :

iv) $\|x\| = 0$ ise $x = 0$

koşulunu da sağlarsa norm adını alır. X vektör uzayı üzerinde $\|\cdot\|$ bir norm ise $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu uzay denir. X vektör uzayı olmak üzere $X \times X$' de $d(x,y) = \|x-y\|$ ile tanımlanan d fonksiyonu X'de bir metriktir /2/. Normla elde edilen

---

/1/Edwards,R E.,"Functional Analysis,Theory and Applications", Holt, Rinehart and Winston,1965,s.56.

/2/Ash,B.,R., s.151-152.

bir metriğe göre tam olan normlu uzaya Banach uzayı denir. Her normlu uzay bir Banach uzayının yoğun bir alt uzayıdır. Bir Banach uzayı $\|x-y\|$ metriği ile indirgenen topolojiye göre bir topolojik vektör uzayıdır /1/.

X ve Y aynı K cismi üzerinde normlu uzaylar olmak üzere X'den Y'ye tanımlanan T lineer operatörü için $\|Tx\| \leq M \|x\|$, her $x \in X$, koşulunu sağlayan negatif olmayan bir M sayısı varsa T'ye sınırlı lineer operatör ve M'lerin infimumuna da T'nin normu (operatör normu) denir ve $\|T\|$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.1 T, normlu uzaylar arasında bir lineer operatör ise aşağıdaki ifadeler denktir.

i) T süreklidir.

ii) T en az bir noktada süreklidir.

iii) $\|T\| = \sup \left\{ \|Tx\| \ : \ \|x\| \leq 1 \right\} < \infty$

iv) T sınırlıdır/2/.

Teorem 2.2.2 X ve Y, K üzerinde normlu uzaylar ve $\mathcal{L}(X,Y)$, X'den Y'ye tanımlanan sınırlı lineer operatörler kümesi olsun. Noktasal lineer işlemlere ve operatör normuna göre $\mathcal{L}(X,Y)$ bir normlu uzaydır. Ayrıca Y bir Banach uzayı ise $\mathcal{L}(X,Y)$ bir Banach uzayıdır /3/.

Bu teoremin sonucu olarak; sınırlı (sürekli) fonksiyonellerin $\mathcal{L}(X,K)$ uzayı bir Banach uzayıdır. Bu uzaya X'in eşleği

---

/1/Ash, B. R., s. 114.

/2/Dunford, N., Schwartz, J. T., "Lineer Operators", Part I, Interscience Publishers, Inc., New York. s. 59.

/3/Dunford, N., Schwartz, J. T., s. 61.

(duali) denir ve X^* ile gösterilir. X^* 'ın eşleğine de X'in ikinci eşleği denir ve X^{**} ile gösterilir.

X ve Y normlu uzayları arasındaki T lineer dönüşümü, bire-bir, örten ve sürekli ise T'ye izomorfizm, X ve Y uzaylarına da izomorfiktir denir. Eğer T lineer operatörü $\|Tx\| = \|x\|$ koşulunu sağlarsa izometri denir.

X normlu uzay olsun. Her $x \in X$ için X^* üzerinde $\hat{x}(f)=f(x)$ ile tanımlanan $\hat{x}$ fonksiyonu bir fonksiyoneldir. X'den X^{**}'a tanımlanan $k : x \longrightarrow \hat{x}$ fonksiyonuna X'in X^{**} 'a doğal gömülmesi denir. k fonksiyonu X ile $k(X)=\hat{X} \subset X^{**}$ arasında bir izometrik izomorfizmdir /1/. X^* üzerinde, $\hat{x}$ fonksiyonellerinin indirgediği zayıf topolojiye zayıf*-topoloji denir. X^* 'ın kapalı birim küresi zayıf*-topolojiye göre kompaktır (Alaoğlu teoremi)/2/.

T, X normlu uzayından Y normlu uzayına tanımlanmış sürekli lineer operatör ise Y^* 'dan X^* 'a, $f \in Y^*, x \in X$ olmak üzere $(T^*f)(x)=(fT)(x)$ ile tanımlanan T^* dönüşümüne T'nin eşleniği (Adjoint) denir. T^* bir lineer operatördür ve $\|T^*\| = \|T\|$ dir. Eğer X^* ve Y^* zayıf*-topoloji ile donatılırsa T^* sürekli olur.

K cismi üzerinde vektör uzayı olan X aynı zamanda bir halka ise ve $a(xy)=(ax)y=x(ay)$, $a \in K$, $x, y \in X$, koşulunu sağlarsa X'e K üzerinde bir cebir denir. Bir normlu uzay aynı zamanda bir cebir ise ve $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$, $x, y \in X$ koşulunu

---

/1/Rudin,W.,"Functional Analysis",Mc Graw-Hill,Inc.,New York,s.90.

/2/Dunford,N.,Schwartz,J. T., s.424.

sağlarsa normlu cebir denir. Aynı zamanda normlu cebir olan bir Banach uzayına Banach cebiri denir.

2.3 Ölçüm Teori

Herhangi bir X kümesinin alt kümelerinin $\mathcal{A}$ ailesi verilsin. Eğer $\mathcal{A}$ aşağıdaki koşulları sağlarsa $\mathcal{A}$ 'ya bir σ-cebiri denir.

i) $X \in \mathcal{A}$,

ii) $A \in \mathcal{A}$ iken $X \setminus A \in \mathcal{A}$,

iii) $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$ iken $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$, X'de bir σ-cebiri olmak üzere $(X, \mathcal{A})$ ikilisine ölçülebilir uzay ve $\mathcal{A}$'nın elemanlarına da ölçülebilir (veya $\mathcal{A}$-ölçülebilir) kümeler denir. Bir $\mathcal{E} \subset P(X)$ ailesini kapsayan σ-cebirlerinin kesişimi $\mathcal{E}$'yi kapsayan en küçük σ-cebiridir, bu σ-cebirine $\mathcal{E}$ tarafından üretilen σ-cebiri denir. X topolojik uzay olduğunda tüm açık kümelerin oluşturduğu $\mathcal{B}$ ailesinin ürettiği σ-cebirine Borel cebiri ve bu cebirin elemanlarına da Borel kümesi denir. $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay, $(Y, \mathcal{T})$ topolojik uzay ve f, X'den Y'ye bir fonksiyon olsun. Eğer her $V \in \mathcal{T}$ için $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ ise f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir. f_1, f_2 gerçek değerli iki fonksiyon olmak üzere $f = f_1 + if_2$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul f_1 ve f_2 nin ölçülebilir olmasıdır. Borel cebirine göre ölçülebilir fonksiyonlara Borel ölçülebilir veya Borel fonksiyonları denir.Her sürekli fonksiyon Borel fonksiyonudur. f, X'den $[-\infty, \infty] = \overline{R}$'ye tanımlanan fonksiyon olsun. Eğer her $a \in R$ için $f^{-1}((a, \infty]) = \{x \in X : f(x) > a\}$ ölçülebilir bir küme ise f fonksiyonu ölçülebilirdir, burada $\succ$ bağıntısı $\geq$, $\prec$, $\leq$ den birisi ile değiştirilebilir. Eğer $f : X \longrightarrow Y$ ölçülebilir, $g : Y \longrightarrow Z$ Borel fonksiyonu ise $h = gof$ fonksiyonu X'den Z'ye ölçülebilir bir fonksiyondur /1/. c bir sabit, f, g ölçülebilir fonksiyonlar, (f_n) ölçülebilir fonksiyonlardan oluşan bir dizi ise $f+c$, cf, $f+g$, $f.g$, $f \vee g$, $f \wedge g$, $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\overline{\lim}\, f_n$, $\underline{\lim}\, f_n$ ve $r \in R$ olmak üzere $|f|^r$ birer ölçülebilir fonksiyonlardır ($f+g$ ve $f.g$ tanımlı kabul edilmiştir) /2/.

Bir E kümesi için $x \in E$ iken 1, $x \notin E$ iken 0 değerini alan K_E fonksiyonuna E'nin karakteristik fonksiyonu, her i için $c_i \in [0,\infty)$ olmak üzere $s=\sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}$ fonksiyonuna basit fonksiyon denir. E ölçülebilir ise K_E , ve her i için E_i ölçülebilirse s ölçülebilirdir.

Gerçek değerli bir f fonksiyonu için $f^{+}=\sup\{f,0\}$, $f^{-}=\sup\{-f,0\}$ ile tanımlanan f^{+} ve f^{-} fonksiyonlarına f'nin pozitif ve negatif kısımları denir. f ölçülebilirse f^{+} ve f^{-} ölçülebilirlerdir ve $f = f^{+}-f^{-}$, $|f| = f^{+}+f^{-}$ dir.

$f : X \longrightarrow [0,\infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. X üzerinde tanımlı ve

i) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots\ldots \leq f$,

ii) her $x \in X$ için $\lim_{n} s_n(x)=f(x)$

koşullarını sağlayan en az bir (s_n) ölçülebilir basit fonksiyon dizisi vardır /3/.

/1/Rudin,W.,"Real and Complex Analysis",McGraw-Hill,1974, s.13.

/2/ Munroe,M. E., "Measure and Integration", Addison-Wesley Publishing Co., Philippines, 1971. s. 102-103.

/3/Bartle,R.G.,"The Elements of Integration",John Wiley,1966.s.13.

$\mathcal{A}$ σ-cebirinden $[0,\infty]$ aralığına tanımlanan ve

i) $\mu(\emptyset) = 0$,

ii) ayrık kümelerden oluşan $\{A_n\}$ dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$,

koşullarını sağlayan μ fonksiyonuna pozitif ölçüm denir. Bu koşulları sağlayan μ fonksiyonu karmaşık değerli ise karmaşık ölçüm, karmaşık ölçümün her değeri gerçek ise μ'ye gerçek ölçüm denir. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne ölçüm uzayı denir. $\mu(X)$ sonlu ise ölçüme sonlu ve X uzayı ölçümü sonlu ve ayrık kümelerin sayılabilir bileşimi şeklinde yazılabiliyorsa uzaya (veya ölçüme) σ-sonlu denir.

Ölçümü sıfır olan bir küme dışında doğru olan bir önermeye, hemen her yerde (h.h.y.) doğrudur denir.

Ölçülebilir bir s basit fonksiyonu ölçümü sonlu küme dışında sıfır ise s'ye integrallenebilir basit fonksiyon denir. Bu tür fonksiyonlar kümesini S ile göstereceğiz. $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sayıları $s = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{A_i}$ integrallenebilir basit fonksiyonunun farklı değerleri ve $E \in \mathcal{A}$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i \cap E)$ sayısına s'nin E üzerinde integrali denir ve $\int_E s\,d\mu$ ile gösterilir. $f : X \longrightarrow [0,\infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon ve $E \in \mathcal{A}$ ise $\sup\{\int_E s\,d\mu \ : \ 0 \leq s \leq f \ , \ s \in S\}$ sayısına f'nin E üzerindeki integrali denir ve $\int_E f\,d\mu$ ile gösterilir. E=X ise integral $\int f\,d\mu$ veya $\mu(f)$ ile gösterilir. Bu integral, gerek fonksiyonlar ve gerekse kümeler üzerindeki sırayı koruduğu gibi E'nin ölçümü sıfır olduğunda veya f, h.h.y.de sıfır olduğunda sıfıra eşittir /1/. h.h.y. de eşit fonksiyonların integralleri eşit oldu-

---

/1/ Rudin,W., s. ~~17~~. 21

variation) denir. V_μ, $\mathcal{A}$ üzerinde sonlu bir ölçümdür ve $V_\mu = \mu^+ + \mu^-$, $\mu = \mu^+ - \mu^-$ veya $\mu^+ = (V_\mu + \mu)/2$, $\mu^- = (V_\mu - \mu)/2$ dir. μ^+ ve μ^-'ye μ' nün Jordan parçalanması denir. μ karmaşık ölçüm ise V_μ küme fonksiyonu sonlu ve pozitif bir ölçümdür.

Teorem2.3.2 $\mu = \mu_1 + i\,\mu_2$ olsun.

i) μ_1 ve μ_2 işaretli ölçümdür,

ii) $\mu(E) = \mu_1^+(E) - \mu_1^-(E) + i\,\mu_2^+(E) - i\,\mu_2^-(E)$ (μ' nün Jordan parçalanması) dır /1/.

Karmaşık değerli bir fonksiyonun V_μ'ye göre integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul Jordan parçalanmasının her bir elemanına göre integrallenebilir olmasıdır /2/. Bu nedenle V_μ'ye göre integrallenebilir fonksiyonlar için f'nin μ'ye göre integrali;

$$\int f\, d\mu = \int f\, d\mu_1^+ - \int f\, d\mu_1^- + i\int f\, d\mu_2^+ - i\int f\, d\mu_2^-$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.3.3 i) f'nin μ-integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul V_μ-integrallenebilir olmasıdır.

ii) f, μ-integrallenebilirse $|f(x)|$ μ-integrallenebilirdir.

iii) İntegrallenebilir fonksiyonlar kümesi bir vektör uzayı oluştururlar /3/.

$(X,\mathcal{A})$ ölçülebilir uzay ve μ ile ν bu uzayda işaretli ölçüm olsun. Eğer her $E\in\mathcal{A}$ için $|\mu|(E) = 0$ olması $\nu(E) = 0$

/1/ Hewitt,E.,Stromberg,K.,s.309.

/2/ Hewitt,E.,Stromberg,K.,s.311.

/3/ Dunford,N.,Schwartz,J. T., III.Bölüm.

olmasını gerektiriyorsa ν 'ye μ-süreklidir denir.

Teorem 2.3.4 (Radon-Nikodym). $(X,\mathcal{A},\mu)$ σ-sonlu ölçüm uzayı ve ν, $\mathcal{A}$ üzerinde μ-sürekli ve sonlu ölçüm ise bir tek $f \in L_1(X,\mathcal{A},\mu)$ fonksiyonu vardır öyleki $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$ ve $V_\nu = \|f\|_1$ dır /1/.

Radon-Nikodym teoremindeki f fonksiyonuna ν'nın μ'ye göre Radon-Nikodym türevi denir ve $f = d\nu / d\mu$ ile gösterilir.

$(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçüm uzayı ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ alt ailesi varsa bu uzaya parçalanabilir (decomposable) uzay denir.

i) $0 \leq \mu(F) < \infty$, her $F \in \mathcal{F}$,

ii) $\mathcal{F}$ 'nin kümeleri ikişer ikişer ayrık ve $\bigcup \mathcal{F} = X$,

iii) $E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) < \infty$ ise $\mu(E) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu(E \cap F)$,

iv) $S \subset X$ ve her $F \in \mathcal{F}$ için $S \cap F \in \mathcal{A}$ ise $S \in \mathcal{A}$ dır.

Borel cebiri üzerinde tanımlı bir ölçüme, Borel ölçümü denir. μ, X yerel kompakt Hausdorff uzayı üzerinde Borel ölçümü olsun. Eğer her E Borel kümesi için $\mu(E) = \inf\{\mu(V) : V \supset E, V$ açık$\}$ ise μ'ye dış regüler ve eğer $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,$ K kompakt$\}$ ise μ'ye iç regüler Borel ölçümü denir. μ karmaşık değerli olduğunda V_μ regüler Borel ölçümü ise μ'ye regüler Borel ölçümü denir.

X'den B Banach uzayına tanımlanan ve her bir $1 \leq p < \infty$ için $\int |f(\cdot)|^p d\mu < \infty$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar kümesi bir K cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzayda,

$$\|f\|_p = \left[\int |f(\cdot)|^p dV_\mu\right]^{1/p}$$

/1/ Dunford, N., Schwartz, J. T., s. 176.

ile tanımlanan $\|\cdot\|_p$ fonksiyonu bir yarı-normdur. Bu uzayda h.h.y. de eşit (farkları null) olan fonksiyonları eşit alarak bir denklik bağıntısı elde edilir. Bu bağıntının denklik sınıfları da bir vektör uzayı oluşturur ve f fonksiyonunun ait olduğu denklik sınıfının normu olarak, $\|f\|_p$ alındığında, $\|\cdot\|_p$ bir norm olur. Böylece elde edilen normlu uzay $L_p(X,\mathcal{A},\mu,B)$ ile gösterilir.

Herhangi ölçülebilir f karmaşık fonksiyonu için $\mu(\{x : f(x) > M\}) = 0$ koşulunu sağlayan bir M sayısı varsa f'ye μ-esasen sınırlı fonksiyon denir. Bu tür M'lerin infimumuna essup $|f|$ denir ve $\|f\|_\infty$ ile gösterilir. Farkı null olan μ-esasen sınırlı fonksiyonlar aynı kabul edildiğinde $\|\cdot\|_\infty$ bir norm olur. μ-esasen sınırlı fonksiyonlar kümesi $L_\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ ile gösterilir.

$1\le p\le\infty$ için $L_p(X,\mathcal{A},\mu)$ uzayı, $\|\cdot\|_p$ normuna göre bir Banach uzayıdır /1/. $1\le p<\infty$ için $L_p(X,\mathcal{A},\mu)$'de, integrallenebilir basit fonksiyonlar kümesi yoğundur /2/. $1<p<\infty$ için L_p'nin eşleği $p+q = pq$ olmak üzere L_q dur /3/.

Teorem 2.3.5 (Hölder). $1\le p\le\infty$, $p+q = pq$, $f\in L_p(X,K)$ ve $g\in L_q(X,B)$ ise $fg\in L_1$ dir ve $\left|\int fg\,d\mu\right|\le\|fg\|_1\le\|f\|_p\|g\|_q$ dır /4/.

Teorem 2.3.5 de eşitliğin sağlanması için gerek ve ye-

/1/ Dunford, N.,Schwartz,J.T., s.146.

/2/ Dunford, N.,Schwartz,J.T., s.125.

/3/ Dunford, N.,Schwartz,J.T., s.286.

/4/ Dunford, N.,Schwartz,J.T., s.120.

ter koşul a,b sıfırdan farklı sabitler olmak üzere h.h.y.de $a|f(\cdot)|^p = b|g(\cdot)|^q$ olmasıdır /1/.

Teorem 2.3.6 (Minkowski). $1 \leq p \leq \infty$ ve $f,g \in L_p(X,\mathcal{A},\mu)$ ise $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_q$ dır /2/.

X yerel kompakt Hausdorff uzayı ve f, X'den karmaşık sayılara tanımlanan bir fonksiyon olsun. Eğer f, X'in kompakt bir alt kümesi dışında sıfır ise f'ye kompakt dayanaklı fonksiyon denir ve bu fonksiyonların sürekli olanlarının kümesi $C_c(X)$ ile gösterilir. Eğer her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $|f(x)|$, bir kompakt kümenin dışında ε'dan küçük kalıyorsa f'ye sonsuzda sıfır olan fonksiyon denir, bu tür fonksiyonlardan sürekli olanların kümesi $C_o(X)$ ile gösterilir. X kompakt Hausdorff uzayı ise $C_o(X) = C_c(X)$ dir ve bu küme C(X) ile gösterilir. Teorem 2.1.4 ve düzlemde kompakt kümenin sınırlı olmasından bu kümelerden herhangi ikisine ait bir fonksiyon sınırlıdır.

(f_n), X üzerinde tanımlı fonksiyonlar dizisi olsun. Eğer $x \in X$ için $\lim_n f_n(x) = f(x)$ oluyorsa (f_n) dizisi f'ye noktasal yakınsıyor ve eğer f_n, f'ye ölçümü sıfır olan bir küme dışında noktasal yakınsıyor ise hemen her yerde (h.h.y.) yakınsıyor denir. Ölçülebilir fonksiyonların bir (f_n) dizisi verilsin, her $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq N$ için $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir N sayısı varsa (f_n) dizisi f'ye ölçümde yakınsıyor denir. $\|\cdot\|_p$ normuna göre yakınsamaya da L_p'de yakınsama

---

/1/Royden,H.L.,"Real Analysis"(Second edition),Macmillan Co., New York 1968,.s.113.

/2/Rudin,W., s.68 .

denir. (f_n), f'ye ölçümde yakınsıyor ise (f_n) dizisinin en az bir alt dizisi h.h.y. de f'ye yakınsar /1/. (f_n) dizisi L_p' de f'ye yakınsar ise ölçümde de yakınsar /2/.

2.4 Bool ve Ölçüm Cebirleri

Boş olmayan bir $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde tanımlanan $\vee$, $\wedge$, $(')$ işlemleri aşağıdaki aksiyomları sağlarsa $\mathcal{A}$ kümesi ve bu işlemlerin oluşturduğu yapıya Bool cebiri denir. $a,b,c \in \mathcal{A}$ için

A-1) $a \vee b = b \vee a$ ve $a \wedge b = b \wedge a$

A-2) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ ve $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

A-3) $(a \wedge b) \vee b = b$ ve $(a \vee b) \wedge b = b$

A-4) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ ve $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

A-5) $(a' \vee a) \wedge b = b$ ve $(a' \wedge a) \vee b = b$.

Aşağıdaki ifadeler, A-1)-A-5) aksiyomlarından elde edilen Bool cebirinin temel özellikleridir.

a) Her $a \in \mathcal{A}$ için $a' \wedge a = 0$ olacak şekilde tek bir 0 ve $a' \vee a = 1$ olacak şekilde tek bir $1 \in \mathcal{A}$ vardır.

b) Her $a \in \mathcal{A}$ için $0 \vee a = a$, $0 \wedge a = 0$, $1 \vee a = 1$, $a \wedge a = a$ dır.

c) Her $a, b \in \mathcal{A}$ için $a = (a')'$, $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ ve $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ dir.

d) $0' = 1$ dir.

$\mathcal{A}$ Bool cebirinde, $a \wedge b = a$ ise $a \leq b$ denir. $\leq$ bağıntısı $\mathcal{A}$'da bir parçalı sıralamadır.

/1/ Bartle, R.G., s. 69.

/2/ Bartle, R.G., s. 76.

Bir $\mathcal{A}$ Bool cebirinin boş olmayan bir Δ alt kümesi aşağıdaki koşulları sağlarsa Δ 'ya bir ideal denir.

a) $a,\ b \in \Delta$ ise $a \vee b \in \Delta$,

b) $b \in \Delta$ ve $a \leq b$ ise $a \in \Delta$.

Δ ideali, $\mathcal{A}$'nın öz alt kümesi ise Δ 'ya öz (proper) ideal denir. Bir idealin,öz ideal olması için gerek ve yeter koşul $1 \notin \Delta$ olmasıdır.

$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ Bool cebirleri arasındaki bir h dönüşümü, $\vee$, $\wedge$ ve ($'$) işlemlerini koruyorsa yani $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$ (veya $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$) ve $h(a') = (h(a))'$ ise h'ye Bool homomorfizmi denir. h homomorfizm ise $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ ve $a \leq b$ ise $h(a) \leq h(b)$ dir /1/.Bire-bir örten homomorfizme Bool izomorfizmi denir. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ izomorfik ise h^{-1} de $\mathcal{B}$ 'den $\mathcal{A}$'ya izomorfizmdir.

$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ Bool cebirleri arasındaki bire-bir bir dönüşümün izomorfizm olması için gerek ve yeter koşul bu dönüşümün sırayı korumasıdır /2/.

Bir $\mathcal{A}$ Bool cebirinin Δ öz alt ideali, başka hiç bir öz idealin öz alt kümesi değilse Δ 'ya maksimal ideal denir.

$\mathcal{A}$ Bool cebirinde $a \vee b$ ile $a \wedge b$ elemanları $\{a,b\}$ kümesinin sırası ile supremum ve infimumudur. Bir Bool cebirinde bir kümenin supremum ve infimumu (eğer varsa) sırası ile $\bigvee_i a_i$ ve

/1/ Halmos, P.R., "Boolean Algebras", D. Van Nostrand Co. Inc., 1963. s.36-37.

/2/ Sikorski, R., "Boolean Algebras", Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg, 1969. s. 16.

$\bigwedge_i a_i$ ile gösterilir. Bool cebirinde her kümenin supremumu varsa bu cebire tam, her dizinin supremumu varsa cebire σ-tam Bool cebiri denir. h bir izomorfizm ise infimum ve supremumu korur.

Parçalı sıralı bir kümenin iki elemanlı her alt kümesinin infimum ve supremumu varsa bu kümeye latis denir.

Bir birimli $\mathcal{A}$ halkasında her $a \in \mathcal{A}$ için $a.a = a$ ise $\mathcal{A}$'ya Bool halkası denir. Her Bool cebiri $a+b = (a \wedge b') \vee (b \wedge a')$, $a.b = a \wedge b$ ile tanımlanan $(\cdot)$ ve $(+)$ işlemlerine göre bir Bool halkası olur. Karşıt olarak, her Bool halkası, $a \vee b = a+b+a.b$, $a \wedge b = a.b$, $a' = 1+a$ ile tanımlanan $\vee$, $\wedge$, $(')$ işlemlerine göre bir Bool cebiri olur. Bu nedenle halka homomorfizmleri ile cebir homomorfizmleri arasında daima bire-bir eşleme kurulabilir.

Teorem 2.4.1 (Stone). Herhangi $\mathcal{A}$ Bool cebiri, tamamen bağlantısız kompakt Hausdorff bir T uzayının kapalı-açık kümelerinin Bool cebirine izomorfiktir ve bu T uzayı tekdir /1/.

Stone teoreminin ispatından şu sonuçları elde ederiz :

$\mathcal{A}$ bir Bool cebiri ve T, $\mathcal{A}$ 'dan Z_2 (2 modülüne göre tam sayılar) Bool cebirine tanımlanan örten homomorfizmlerin kümesi olsun. Her $a \in \mathcal{A}$ için $\hat{a}(t) = t(a)$, $t \in T$ ile T'den Z_2'ye bir fonksiyon elde edilir. Z_2 en kuvvetli topoloji ile donatıldığında $\{\hat{a} : a \in \mathcal{A}\}$ fonksiyonlar kümesinin T üzerinde indirgediği zayıf topolojiye göre T, tamamen bağlantısız kompakt Hausdorff uzayı olur. Eğer $\mathcal{B}$,T'nin kapalı-açık kümelerinin Bool cebiri ise

/1/ Lacey,H.E.,"The Isometric Theory of Classical Banach Spaces," Springer-Verlag, 1974. s. 118.

her $a \in \mathcal{A}$ için $\varphi(a) = \{t \in T : t(a) = 1\}$, $\mathcal{A}$'dan $\mathcal{B}$'ye bir Bool izomorfizmidir /1/. T'ye $\mathcal{A}$'nın maksimal ideal uzayı diyeceğiz.

Bundan sonra, T tamamen bağlantısız kompakt Hausdorff uzayının kapalı-açık kümelerinin Bool cebirini $\mathcal{A}(T)$ ile göstereceğiz. Stone teoremine göre her $\mathcal{A}$ Bool cebiri bir $\mathcal{A}(T)$ şeklindedir.

$\mathcal{A}(T)$'nin tam olması için gerek ve yeter koşul T'nin aşırı bağlantısız (her açık kümenin kapanışının açık olması) olmasıdır, bu durumda $\bigvee \mathcal{F} = \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F}$ dir /2/.

$\mathcal{A}$ σ-tam Bool cebiri olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlanan gerçek değerli bir μ fonksiyonu, $\mathcal{A}$ daki her (a_n), $n \neq m$ ise $a_n \wedge a_m = 0$, dizisi için $\mu(\bigvee a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(a_n)$ koşulunu sağlarsa μ'ye ölçüm denir. Eğer her $a \neq 0$ için $\mu(a) > 0$ ise μ'ye tam pozitif ve eğer $\mu(1) = 1$ ise μ'ye normalleştirilmiş ölçüm denir. $\mathcal{A}$ σ-tam Bool cebiri ve μ tam pozitif normalleştirilmiş ölçüm olmak üzere $(\mathcal{A}, \mu)$ ikilisine ölçüm cebiri denir. Böyle bir durumda μ tamdır /3/.

Teorem 2.4.2 $(\mathcal{A}(T), \mu)$ bir ölçüm cebiri ise $\mathcal{A}(T)$ üzerinde μ ile çakışan tek bir regüler Borel ölçümü vardır/4/.

/1/ Lacey, H.E., s. 119.

/2/ Lacey, H.E., s. 119.

/3/ Lacey, H.E., s. 120.

/4/ Lacey, H.E., s. 120.

2.5 Hilbert Uzayı

H, K üzerinde bir vektör uzayı olsun. $H \times H$ 'den K'ya tanımlanan $(x,y) \longrightarrow \langle x,y \rangle$ fonksiyonu;

i) $\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$,

ii) $\langle ax,y \rangle = a \langle x,y \rangle$, $a \in K$,

iii) $\langle y,x \rangle = \overline{\langle x,y \rangle}$,

iv) $x \neq 0$ için $\langle x,x \rangle > 0$

koşullarını sağlarsa $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ ikilisine (veya H'ye) iç çarpım uzayı denir.

H iç çarpım uzayında, $\|x\| = \langle x,x \rangle^{1/2}$ tanımlarsak H bir normlu uzay olur /1/.

$\|x\| = \langle x,x \rangle^{1/2}$ normuna göre bir Banach uzayı olan iç çarpım uzayına, Hilbert uzayı denir.

H iç çarpım uzayında $\langle x,y \rangle = 0$ ise x ile y' ye birbirine diktir denir ve $x \perp y$ ile gösterilir. Bir $E \subset H$ kümesinin farklı elemanları birbirine dik ise bu E kümesine ortogonal, ortogonal kümenin her elemanının normu 1 ise ortonormal küme denir. İki kümenin elemanları birbirine dik ise bu kümelere de ortogonal kümeler denir.

Teorem 2.5.1 $A = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$, H Hilbert uzayında ortonormal bir küme ise şaşağıdaki ifadeler denktir.

i) $x \in H$ ise $x = \sum_\alpha \langle x,x_\alpha \rangle x_\alpha$,

ii) A'nın ürettiği alt uzay H'de yoğundur.

iii) $\|x\|^2 = \sum_\alpha |\langle x,x_\alpha \rangle|^2$ dir /2/.

/1/ Hewitt,E., Stromberg,K., s. 235.

/2/ Bachman ,G., Narici,L., "Functional Analysis", Academic Press, New York, 1972. s. 155.

BÖLÜM III

SAYI DEĞERLİ VE SONLU L_p UZAYLARI ÜZERİNDEKİ İZOMETRİLERİN NOKTA DÖNÜŞÜMLERİYLE KARAKTERİZASYONU

3.1 Giriş

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ herhangi ölçüm uzayı olduğunda $L_p(X, \mathcal{A}, \mu, B)$'den kendi üzerine tanımlanan izometrilerin karakterizasyonu fonksiyonel analizin önemli problemlerinden biridir.

X uzayı $[0,1]$ aralığı, λ Lebesgue ölçümü ve B sayı cismi olduğunda $1 \leq p < \infty$ $(p \neq 2)$ için söz konusu izometrileri, ilk defa Banach karakterize etmiştir. Banach /1/ de, $f \in L_p$ φ, $[0,1]$ ' den kendi üzerine ölçülebilir bir fonksiyon ve $|h|^p = d(\lambda \circ \varphi)/ d\lambda$ olmak üzere $L_p([0,1], \mathcal{A}, \lambda, S)$ üzerindeki T izometrisinin $(Tf)(x) = h(x)f(\varphi(x))$ şeklinde olduğunu ispatlamıştır. Banach'ın bu incelemesi pek mükemmel olmamakla beraber bu konudaki ilk çalışma olması ve bu konuda çalışanlara ışık tutması açısından önemli sayılmaktadır. Nitekim, daha genel bazı durumlarda izometrilerin, Banach'ın elde ettiği şekle (bazı farklarla) benzediği Lamperti, Cambern ve Sourour tarafından gösterilmiştir.

/1/ Banach, S., Théorie des Operation Linéaires, Monografje Matematyczne, Warsaw, 1932. s. 178.

Lamperti /1/'de ; $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sonlu ölçüm uzayı, L_p $(p \neq 2)$ sayı değerli olmak üzere L_p üzerindeki izometrilerin $(Tf)(x) = h(x)(\bar{F}(f))(x)$ şeklinde olduğunu ispatlamıştır. Burada $\bar{F}$, F düzgün küme izomorfizmince (tanım 3.1.4) indirgenen ve X üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar kümesi üzerinde tanımlı dönüşüm ve $\mu^*(A) = \mu(F^{-1}(A))$ olmak üzere $|h(x)|^p = d\mu^* / d\mu$ dir.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ uzayının σ-sonlu ve herhangi ölçüm uzayı olması durumunda sayı değerli L_p $(p \neq 2)$ uzayları üzerindeki izometrilerin Lamperti'nin verdiği şekilde olduğu Bölüm IV'de ispatlanmıştır.

Cambern'da /2/'de ; X sonlu ve K ayırılabilir Hilbert uzayı olmak üzere $L_p(X,K)$, $(1 \leq p < \infty, p \neq 2)$, üzerindeki bire-bir örten izometrilerin $(Tf)(x) = U(x)h(x)(\bar{F}(f))(x)$ şeklinde olduğunu ispatlamıştır. Burada h ile $\bar{F}$ yukarıda açıklandığı şekilde ve U operatör değerli ölçülebilir fonksiyondur.

Sourour ise /3/'de ; B, ayırılabilir ve sıfırdan farklı iki Banach uzayının direk toplamı olmayan bir Banach uzayı olmak üzere $L_p(X,B)$, $(1 \leq p < \infty, p \neq 2)$, üzerindeki bire-bir örten izometrilerle, K ayırılabilir Hilbert uzayı olmak üzere $L_p(X,K)$ üzerindeki izometrilerin $(Tf)(x) = S(x)h(x)(\bar{F}(f))(x)$ şeklinde olduğunu göstermiştir. Burada da h ile $\bar{F}$ yukarıda açıklandığı gibidir, S ise X üzerinden B(veya K) üzerindeki sınırlı operatör-

---

/1/Lamperti,J., s.461-462.

/2/Cambern,M., s.17.

/3/Sourour,A.R., s.129-130.

ler kümesine tanımlı ölçülebilir bir dönüşümdür.

Yukarıdaki açıklamadan görüleceği gibi, L_p uzayları üzerindeki izometriler karakterize edilirken, σ-cebirinden kendi üzerine tanımlanan ve düzgün küme izomorfizmi denilen F dönüşümünden yararlanılmaktadır.

Bu bölümde Cengiz tarafından /1/'de ispatlanan teorem 3.1.2'den yararlanarak sayı değerli ve sonlu L_p uzayına izomorfik bir L_p üzerindeki izometrilerin nokta dönüşümü yardımı ile karakterize edilebileceği gösterilecektir.

Şimdi bu amaç için gerekli ön bilgileri verelim :

μ pozitif ve $\mu(X) = 1$ olmak üzere $(X,\mathcal{A},\mu)$ ölçüm uzayı verilmiş olsun. $\mathcal{A}$'nın $\mu(A\setminus B) + \mu(B\setminus A) = 0$ koşulunu sağlayan kümeleri bir denklik sınıfı oluştururlar. Herhangi $A\in\mathcal{A}$ kümesinin denklik sınıfını $\hat{A}$ ile gösterirsek $\hat{\mathcal{A}} = \{\hat{A} : A\in\mathcal{A}\}$ ailesi; $\hat{A}\wedge\hat{B} = (A\cap B)\hat{}$, $\hat{A}\vee\hat{B} = (A\cup B)\hat{}$, $(\hat{A})' = (X\setminus A)\hat{}$ ile tanımlanan $\wedge$, $\vee$ ve $(')$ işlemlerine göre bir Bool cebiri olur. $\hat{\mu}(\hat{A}) = \mu(A)$ ile $\hat{\mu}$ ölçümünü tanımlarsak $(\hat{\mathcal{A}},\hat{\mu})$ bir ölçüm cebiri olur /2/.

Stone teoreminden (Teorem 2.4.2), S tamamen bağlantısız kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere $\hat{\mathcal{A}}$, S'nin kapalı-açık kümelerinin $\mathcal{A}(S)$ Bool cebirine izomorfiktir. Bu izomorfizm, $\varphi : \hat{\mathcal{A}}\to\mathcal{A}(S)$, $\varphi(\hat{A}) = \{t\in S : t(\hat{A}) = 1\}$ dir. $\nu'(\varphi(\hat{A})) = \hat{\mu}(\hat{A}) = \mu(A)$ ile $\mathcal{A}(S)$ üzerinde bir ν' tam pozitif normalleştirilmiş

/1/ Cengiz, B., Sürekli Fonksiyon Uzaylarının Bazı Özellikleri (Doçentlik Tezi), 1976, s.111.

/2/ Lacey, H.E., s.121.

ölçümü tanımlanır. Teorem 2.4.2'den S üzerinde, $\mathcal{A}(S)$'ye sınırlandığında ν' ile çakışan tek bir ν regüler Borel ölçümü vardır. $\mathcal{A}$ σ-tam olduğundan $\mathcal{A}(S)$ σ-tamdır. Kesim 2.4 den σ-tam Bool cebiri üzerinde tam pozitif normalleştirilmiş ölçüm varsa bu Bool cebiri tam olacağından $\mathcal{A}(S)$ tamdır, bu ise S'nin aşırı bağlantısız olmasını gerektirir. O halde S aşırı bağlantısız ve tamamen bağlantısız kompakt Hausdorff uzayıdır.

Teorem 3.1.1 Her A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ S'nin bir Borel kümesi olmak üzere $g = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{A_i}$ basit fonksiyonu verilsin. Her $1 \leq p < \infty$ ve $\varepsilon > 0$ sayıları verildiğinde $U_i \in \mathcal{A}(S)$ $(i=1,\ldots n)$ olmak üzere $\int_S |g - h|^p \, d\nu < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $h = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{U_i}$ basit fonksiyonu vardır /1/.

Teorem 3.1.2 Her $1 \leq p < \infty$ için $L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$'den $L_p(S, \nu)$'ye norm koruyan bir lineer izomorfizm vardır ve bu izomorfizm aynı zamanda bir latis izomorfizmidir /2/.

Teorem 3.1.3 $(\mathcal{A}(S), \mu)$ ölçüm cebiri ve $\mathcal{A}(S)$' de μ ile çakışan ν regüler Borel ölçümü verilmiş olsun. S'nin herhangi Borel kümesi B, $\mathcal{A}(S)$'nin bir U elemanına ν- denktir. (yani $\nu(U \setminus B) + \nu(B \setminus U) = 0$) /3/.

Tanım 3.1.4 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ herhangi bir ölçüm uzayı olsun. $\mathcal{A}$ 'dan $\mathcal{A}$ 'ya null kümeler modülüne göre tanımlanan ve aşağıdaki koşulları sağlayan F dönüşümüne düzgün küme izomorfizmi denir.

/1/ Cengiz, B., s. 109.

/2/ Cengiz, B., s. 111.

/3/ Cengiz, B., s. 114.

i) $F(X \setminus A) = F(X) \setminus F(A)$, $A \in \mathcal{A}$,

ii) $F(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F(A_n)$, her n için $A_n \in \mathcal{A}$ ve $n \neq k$ için $A_n \cap A_k = \emptyset$,

iii) $\mu[F(A)] = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\mu(A) = 0$ olmasıdır.

X üzerinde tanımlı sayı değerli ve ölçülebilir fonksiyonlar kümesinden kendi üzerine, F düzgün küme izomorfizmi yardımıyla bir $\overline{F}$ lineer dönüşümü tanımlanabilir. Bu $\overline{F}$ dönüşümü, K_A karakteristik fonksiyonu için $\overline{F}(K_A) = K_{F(A)}$ ile tanımlanır. $\overline{F}$'nin diğer fonksiyonlara genişlemesi /1/'de verilmiştir. Böylece elde edilen $\overline{F}$ dönüşümü h.h.y. de yakınsamayı korur, yani

eğer h.h.y. de $\lim_n f_n(x) = f(x)$ ise

h.h.y. de $\lim_n (\overline{F}(f_n))(x) = (\overline{F}(f))(x)$ dir /2/.

3.2 İzometrinin Nokta Dönüşümüyle Karakterizasyonu

$L_p(S, \nu)$'den kendi üzerine tanımlanan izometrinin karakterizasyonunda kullanılan düzgün küme izomorfizminin bir nokta dönüşümüyle elde edilebileceğini gösterelim. Önce $\mathcal{A}(S)$'den $\mathcal{A}(S)$'ye tanımlanan düzgün küme izomorfizmi için ispatlayalım :

$F : \mathcal{A}(S) \longrightarrow \mathcal{A}(S)$ düzgün küme izomorfizmi olsun. $x \in S$ alalım ve x'in kapalı-açık komşulukları ailesini $\mathcal{V}'_{(x)}$ ile gösterelim. $\mathcal{V}'_{(x)}$, $\mathcal{A}(S)$' de bir süzgeç oluşturur. Gerçekten ; V_1 , $V_2 \in \mathcal{V}'_{(x)}$ ise V_1 ve V_2 kapalı-açık dolayısıyla

---

/1/ Doob, J.L., Stochastic Processes, Wiley and Sons, New York, 1953. s. 453-454.

/2/ Cambern, M., s.10.

$V_1 \cap V_2$ kapalı-açıktır, ayrıca $x \in V_1$ ve $x \in V_2$ olduğundan $x \in V_1 \cap V_2$ dir. O halde $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}'_{(x)}$ olur. $\mathcal{V}'_{(x)} \subset \mathcal{V}_{(x)}$ olduğundan

$$(1) \qquad \bigcap\left\{ \bar{V} : V \in \mathcal{V}'_{(x)} \right\} = \bigcap\left\{ V : V \in \mathcal{V}'_{(x)} \right\} \supset \bigcap\left\{ \bar{U} : U \in \mathcal{V}_{(x)} \right\}$$

dir.

Yerel Kompakt Hausdorff uzayın tamamen bağlantısız olması için gerek ve yeter koşul her noktanın kapalı-açık komşuluklarının o noktada bir komşuluk tabanı oluşturmasıdır. Bu koşul kapalı-açık kümelerin uzayın topolojisi için bir taban teşkil etmesi ile aynıdır /1/. Bu önerme ve S'nin tamamen bağlantısız kompakt Hausdorff uzayı olmasından her $U \in \mathcal{V}_{(x)}$ en az bir $V \in \mathcal{V}'_{(x)}$ içerir dolayısıyla

$$(2) \qquad \bigcap\left\{ \bar{U} : U \in \mathcal{V}_{(x)} \right\} \supset \bigcap\left\{ V : V \in \mathcal{V}'_{(x)} \right\}$$

olur. (1) ve (2) bağıntılarından :

$$\bigcap\left\{ \bar{U} : U \in \mathcal{V}_{(x)} \right\} = \bigcap\left\{ V : V \in \mathcal{V}'_{(x)} \right\}$$

elde edilir. S kompakt Hausdorff uzay olduğundan teorem 2.1.2 den

$$(3) \qquad \{x\} = \bigcap\left\{ \bar{U} : U \in \mathcal{V}_{(x)} \right\} = \bigcap\left\{ V : V \in \mathcal{V}'_{(x)} \right\}$$

olur.

/1/ Cengiz, B., s. 108.

Şimdi de $F(\mathcal{V}'_{(x)})$' i gözönüne alalım : F düzgün küme izomorfizmi, $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ ve $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ olduğundan $F(A \cup B) = F(A \setminus B) \cup F(B)$ olur, Buradan : $F(A \setminus B) = F(A \cup B) \setminus F(B)$, $F(B \setminus A) = F(A \cup B) \setminus F(A)$ elde edilir. Buna göre :

$$F(A \setminus B) \cup F(B \setminus A) = F(A \cup B) \setminus [F(B) \cap F(A)] =$$
$$[F(A \setminus B) \cup F(B \setminus A) \cup F(A \cap B)] \setminus [F(B) \cap F(A)]$$

olur. Buradan da :

$$F(A \cap B) = F(A) \cap F(B)$$

elde edilir.

$F(V_1)$, $F(V_2) \in F(\mathcal{V}'_{(x)})$ ise $F(V_1) \cap F(V_2) = F(V_1 \cap V_2)$ ve $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}'_{(x)}$ olduğundan

$$F(V_1) \cap F(V_2) \in F(\mathcal{V}'_{(x)})$$

olur, dolayısıyla $F(\mathcal{V}'_{(x)})$, $\mathcal{A}(S)$'de bir süzgeç oluşturur. F, $\mathcal{A}(S)$'den $\mathcal{A}(S)$'ye olduğundan $\overline{F(V)} = F(V)$ dir, bu nedenle

$$(4) \qquad \bigcap \left\{ \overline{F(V)} : V \in \mathcal{V}'_{(x)} \right\} = \bigcap \left\{ F(V) : V \in \mathcal{V}'_{(x)} \right\}$$

olur. (4) nolu eşitlikteki kümeye D diyelim.

$y \in D$ alalım. $y \in \bigcap \left\{ F(V) : V \in \mathcal{V}'_{(x)} \right\}$ olduğundan her $V \in \mathcal{V}'_{(x)}$ için $y \in F(V)$ dir ve $F(V)$ ler kapalı-açık kümeler olduklarından y'nin komşuluğudurlar dolayısıyla

$$(5) \qquad F(\mathcal{V}'_{(x)}) \subset \mathcal{V}'_{(y)}$$

dir.

Herhangi bir $U \in \mathcal{V}'_{(y)}$ alalım ve $x \notin F^{-1}(U)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x \in S \setminus F^{-1}(U)$ olur. $F^{-1}(U)$ kapalı-açık olduğundan $S \setminus F^{-1}(U)$ kapalı-açık olur ve dolayısıyla $S \setminus F^{-1}(U) \in \mathcal{V}'_{(x)}$ olur, buradan $y \in F(S \setminus F^{-1}(U))$ elde edilir. Halbuki $[S \setminus F^{-1}(U)] \cap F^{-1}(U) = \emptyset$ olduğundan

$$F(S \setminus F^{-1}(U)) \cap U = \emptyset$$

olur. Bu ise çelişkidir çünkü, $y \in U$ ve $y \in F(S \setminus F^{-1}(U))$ dır. Demekki $x \in F^{-1}(U)$ dır. Böylece $U \in F(\mathcal{V}'_{(x)})$ olur. Her $U \in \mathcal{V}'_{(y)}$ için $U \in F(\mathcal{V}'_{(x)})$ olduğundan

$$\mathcal{V}'_{(y)} \subset F(\mathcal{V}'_{(x)}) \tag{6}$$

olur. (5) ve (6) bağıntılarından

$$F(\mathcal{V}'_{(x)}) = \mathcal{V}'_{(y)}$$

elde edilir.

$F(\mathcal{V}'_{(x)})$ y'nin kapalı-açık komşuluklar süzgeci ve uzay kompakt Hausdorff olduğundan

$$\bigcap F(\mathcal{V}'_{(x)}) = \{y\} = \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_{(y)}\}$$

olur. Yani D bir tek nokta kümesidir.

Böylece $\mathcal{A}(S)$'den $\mathcal{A}(S)$'ye, F düzgün küme izomorfizmi yardımıyla;

$$\gamma : \quad \bigcap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}'_{(x)}\} = \{x\} \longrightarrow \{y\} = \bigcap\{F(V) : V \in \mathcal{V}'_{(x)}\}$$

şeklinde bir γ nokta dönüşümü tanımlayabiliriz.

Şimdi, bu nokta dönüşümü ile F küme dönüşümünün çakıştığını yani her $A \in \mathcal{A}(S)$ için $\gamma(A) = F(A)$ olduğunu gös-

$y \in \mathcal{Y}(A)$ olsun. O zaman en az bir $x \in A$ vardır öyleki $\{y\} = \bigcap \{F(V) : V \in \mathcal{V}'_{(x)}\}$ dir. $A \in \mathcal{A}(S)$ ve A, kapalı-açık küme olduğundan her noktasının ve dolayısıyla x'in bir komşuluğudur yani $A \in \mathcal{V}'_{(x)}$ dir. Buradan $y \in F(A)$ olur. Böylece

$$\mathcal{Y}(A) \subset F(A) \tag{7}$$

elde edilir.

Şimdi de $y \in F(A)$ olsun fakat y, $\mathcal{Y}(A)$'nın elemanı olmasın. O zaman her bir $x \in A$ için en az bir $V_x \in \mathcal{V}'_{(x)}$ vardır öyleki $y \notin F(V_x)$ dir. A kapalı ve S kompakt olduğundan A kompakttır dolayısıyla A'yı örten V_x' lerden sonlu tanesi A' yı örter, bu nedenle

$$\bigcup_{i=1}^{n} (V_{x_i} \cap A) = A$$

elde edilir.

$$U_1 = V_{x_1}, \quad U_2 = V_{x_2} \setminus V_{x_1}, \; \ldots, \; U_n = V_{x_n} \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} V_{x_i} \qquad \text{diyelim.}$$

$\bigcup_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$ ve $U_i \cap U_j = \emptyset$, $i \neq j$, olduğu açıktır.

Buradan

$$F(U_n) = F\Big[V_{x_n} \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} V_{x_i}\Big)\Big] = F\Big[V_{x_n} \cap \Big(S \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} V_{x_i}\Big)\Big)\Big]$$

$$= F(V_{x_n}) \cap F\Big(S \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} V_{x_i}\Big)\Big) = F(V_{x_n}) \cap \Big[F(S) \setminus F\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} V_{x_i}\Big)\Big]$$

ve $y \notin F(V_{x_n})$, $n = 1,2,\ldots$ olduğundan her n için $y \notin F(U_n)$ dir.

$A = \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap A)$ ve U_i ler ayrık olduğundan

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^{n} F(U_i \cap A)$$

olur.

Her i için $y \notin F(U_i \cap A)$ olduğundan $y \notin F(A)$ olur. Bu ise $y \in F(A)$ olmasıyla çelişir, o halde $y \in F(A)$ ise $y \in \gamma(A)$ dır, yani

$$(8) \qquad F(A) \subset \gamma(A), \text{ her } A \in \mathcal{A}(S)$$

dır. (7) ve (8) bağıntılarından

$$F(A) = \gamma(A), \text{ her } A \in \mathcal{A}(S)$$

olur.

Böylece $\mathcal{A}(S)$' den $\mathcal{A}(S)$'ye tanımlanan F düzgün küme izomorfizminin γ nokta dönüşümü ile karakterize edilebileceği gösterilmiş oldu.

Şimdi $L_p(S, \nu)$ uzayını gözönüne alalım. Bu uzayda σ-cebiri $\mathcal{B}$ Borel cebiridir. $\mathcal{B}$'den $\mathcal{B}$'ye düzgün küme izomorfizmi F olsun. Teorem 3.1.3 den her $B \in \mathcal{B}$ Borel kümesi bir $A \in \mathcal{A}(S)$'ye ν-denktir. F(B) de $\mathcal{B}$'nin elemanı olduğundan F(B)'de bir $A' \in \mathcal{A}(S)$'ye ν-denktir. Böylece $\mathcal{B}$'den $\mathcal{B}$'ye $B \longrightarrow F(B)$ dönüşümüyle $\mathcal{A}(S)$'den $\mathcal{A}(S)$'ye $A \longrightarrow A'$ dönüşümünü elde ederiz. Düzgün küme izomorfizmi simetrik farklarının ölçümü sıfır olan kümeler üzerinde aynı olduğundan $\mathcal{B}$ üzerindeki F dönüşümü $\mathcal{A}(S)$ üzerindeki düzgün küme izomorfizmi ile aynıdır. Bu nedenle yukarıda elde edilen γ dönüşümü, $\mathcal{B}$'den $\mathcal{B}$'ye olan düzgün küme izomorfizmi ile elde edilen nokta dönüşümüyle aynıdır.

Açıklama 1. İspatımızda μ'yü tam pozitif ve $\mu(X) = 1$ aldık. $\mu(X)<\infty$ olduğunda μ normalleştirilmiş olmaz. Bu durumda $\mu' = \mu/|\mu|$ alarak normalleştirilmiş ölçüm elde edilir, bunun yardımıyla $\mathcal{A}(S)$'de ν_0 ve S üzerinde, $\mathcal{A}(S)$'ye sınırlaması ν_0 olan bir ν regüler Borel ölçümü elde etmek mümkündür. O halde yukarıdaki ispatımız, herhangi sonlu ölçüm için de doğrudur.

Açıklama 2. $T : L_p(S,\mathcal{A}(S),\nu) \longrightarrow L_p(S,\mathcal{A}(S),\nu)$ izometrisinin şu şekilde

$$(Tf)(x) = h(x)\ (\overline{F}(f))(x)$$

olduğunu biliyoruz. γ, F ile elde edilen nokta dönüşümü olsun $K_A \in L_p$ alalım. K_A'nın T ile görüntüsü :

$$(TK_A)(x) = h(x)\ (\overline{F}(K_A))(x)$$

dir. $F(A) = \gamma^{-1}(A)$ dersek

$$\overline{F}(K_A)(x) = K_{F(A)}(x) = K_{\gamma^{-1}(A)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \gamma^{-1}(A) \\ 0, & x \notin \gamma^{-1}(A) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \gamma(x) \in A \\ 0, & \gamma(x) \notin A \end{cases} = (K_A \circ \gamma)(x)$$

elde edilir. Bu durumda ise T şu şekilde olacaktır:

$$(Tf)(x) = h(x)\ (K_A \circ \gamma)(x).$$

Şimdi de $s = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{A_i} \in L_p$ basit fonksiyonunun T ile görüntüsünün şeklini araştıralım:

$$\overline{F}(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{F}(K_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} c_i (K_{A_i} o \gamma) = s o \gamma$$

olur. Buna göre de

$$(Ts)(x) = h(x)\ (s o \gamma)(x)$$

elde edilir.

Şimdi de herhangi $f \in L_p$ alalım. O zaman, basit fonksiyonlar L_p'de yoğun olduğundan en az bir (s_n) basit fonksiyonlar dizisi vardır öyleki $\lim_n s_n(x) = f(x)$, h.h.y.de dir. $\overline{F}$, h.h.y. de yakınsamayı koruduğundan $\lim_n \overline{F}(s_n)(x) = \overline{F}(f)(x)$, h.h.y. de olur. Buna göre de

$$\overline{F}(f)(x) = \lim_n \overline{F}(s_n)(x) = \lim_n (s_n o \gamma)(x) = (f o \gamma)(x)$$

elde edilir.

Demek ki L_p uzayı üzerindeki T izometrisi verildiğinde γ bir nokta dönüşümü olmak üzere bu T izometrisi

$$(Tf)(x) = h(x)\ (f o \gamma)(x)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Şimdi, sonlu $L_p(X\ \mathcal{A}, \mu)$ uzayı ve bu uzay üzerindeki T izometrisi verildiğinde teorem 3.1.2 den bu uzay, $L_p(S, \mathcal{A}(S), \nu)$ uzayına izometriktir, bu izometriyi σ ve $\mathcal{A}$ ile $\mathcal{A}(S)$ arasındaki dönüşümü π ile gösterirsek $T' = \sigma o T o \sigma^{-1}$ ve $F' = \pi o F o \pi^{-1}$ ile $L_p(S, \nu)$ üzerinde T'izometrisini ve $\mathcal{A}(S)$ üzerinde de F'dönüşümlerini elde ederiz. F' ile elde edilen nokta dönüşümünü γ ile gösterirsek

$$(T'g)(x) = h'(x)\,(g\circ\gamma)(x), \quad g\in L_p(S,\nu)$$

elde ederiz.

Sonuç olarak, L_p verildiğinde ölçüm uzayı değiştirilerek adı geçen izometri esas itibariyle bir nokta dönüşümü ile elde edilebilir şekle dönüştürülür.

3. Sonuç

Böylece, sonlu ve sayı değerli L_p uzayları üzerindeki izometrilerin, bir nokta dönüşümüyle elde edilebileceği gösterilmiş olmasına rağmen σ-sonlu ve sayı değerli L_p uzayları ile sayı değerli herhangi L_p uzayları üzerindeki izometrilerin bir nokta dönüşümüyle elde edilip edilemiyeceği, üzerinde çalışılmaya değer bir porblemdir.

BÖLÜM IV

SAYI DEĞERLİ HERHANGİ L_p UZAYINDAN KENDİ ÜZERİNE TANIMLANAN İZOMETRİLERİN KARAKTERİZASYONU

4.1 Giriş

Bu bölümde; $(X,\mathcal{A},\mu)$, σ-sonlu ölçüm uzayı ve $L_p(X,\mathcal{A},\mu)$, $p\neq 2$, sayı değerli olduğunda, L_p uzayından kendi üzerine tanımlanan izometriler için Lamperti tarafından /1/ de iddia edilen ancak; uzayın sonlu olması durumunda ispatlanan şeklin, uzayın σ-sonlu olması durumunda da doğru olduğu ispatlanacaktır. Daha sonra Cengiz tarafından /2/ de ispatlanan teorem 4.3.3 yardımıyla, $(X,\mathcal{A},\mu)$ herhangi ölçüm uzayı olduğunda, sayı değerli L_p, $1\leq p<\infty$, $p\neq 2$, üzerindeki izometrilerin de Lamperti tarafından /1/ de verilen şekilde olduğu, ispatlanacaktır.

Şimdi bu amaç için gerekli bir teoremi ifade edelim:

Teorem 4.1.1 $f,g\in L_p(X,\mathcal{A},\mu)$ olsun.

i) $p\geq 2$ ise $\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \geq 2(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p)$

ii) $0<p\leq 2$ ise $\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p)$

iii) $p\neq 2$ için i) ve ii) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul h.h.y. de $f(x).g(x)=0$ olmasıdır /3/.

/1/Lamperti,J.,s.461-462.

/2/ Cengiz,B.,s.101.

/3/ Lamperti,J.,s.460-461.

4.2 σ- sonlu L_p Uzayı Üzerindeki İzometrilerin Karakterizasyonu

Teorem 4.2.1 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-sonlu ölçüm uzayı olsun. $p \neq 2$ olmak üzere $L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ uzayından kendi üzerine tanımlı T lineer operatörü,

$$(1) \qquad \| T f \|_p = \| f \|_p \quad , \quad \text{her } f \in L_p$$

koşulunu sağlarsa; $\bar{F}$, ölçülebilir sayı değerli fonksiyonlar kümesi üzerinde tanımlı ve F düzgün küme izomorfizmi ile elde edilen dönüşüm ve h, sayı değerli bir fonksiyon olmak üzere T şu şekildedir :

$$(2) \qquad (T f)(x) = h(x) \, (\bar{F} (f))(x) \; ;$$

eğer μ^* ölçümü, $\mu^*(A) = \mu(F^{-1} A)$ şeklinde tanımlanırsa

$$(3) \qquad F(X)\text{' de h.h.y.de } | h(x) |^p = d\mu^* / d\mu$$

dir.

Karşıt olarak, ölçülebilir fonksiyonlar kümesi üzerinde tanımlı ve F düzgün küme izomorfizmi ile elde edilen $\bar{F}$ dönüşümü ve (3) koşulunu sağlayan h(x) için $(Tf)(x)=h(x)(\bar{F}(f))(x)$ ile verilen T lineer operatörü L_p'den L_p'ye bir izometridir /1/.

/1/ Lamperti, J., s. 461-462 .

İspat . $L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ve $L_p(X, \mathcal{A}, V_\mu)$ uzayları aynı ve $V_\mu \geq 0$ olduğundan μ ölçümünü pozitif alabiliriz. Bunun sonucu olarak, her n için $\mu(X_n) < \infty$ ve $m \neq n$ için $X_n \cap X_m = \emptyset$ olmak üzere $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ yazabiliriz (ispatımızda X_n'i daima bu anlamda kullanacağız). $T : L_p \longrightarrow L_p$ lineer operatörünün (1)' i sağladığını varsayalım ve $\mathcal{A}$'dan $\mathcal{A}$'ya aşağıdaki şekilde bir F dönüşümü tanımlayalım :

$$F(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp}(T K_{A \cap X_n}). \tag{4}$$

Burada, $\mu(A \cap X_n) < \infty$ olduğundan $K_{A \cap X_n} \in L_p$ dir ve dolayısıyla $TK_{A \cap X_n}$ tanımlıdır.

Şimdi, (4) ile tanımladığımız F dönüşümünün düzgün küme izomorfizmi olduğunu gösterelim :

A ve B $\mathcal{A}$'da ayrık herhangi iki küme olsun. A ve B ayrık olduğundan h.h.y. de $K_{A \cap X_n}(x) \cdot K_{B \cap X_n}(x) = 0$ dır. Dolayısıyla teorem 4.1.1 den

$$\|K_{A\cap X_n} + K_{B\cap X_n}\|_p^p + \|K_{A\cap X_n} - K_{B\cap X_n}\|_p^p = 2(\|K_{A\cap X_n}\|_p^p + \|K_{B\cap X_n}\|_p^p) \tag{5}$$

olur. T'nin lineerliği, (5) ve (1)'den

$$\| TK_{A\cap X_n} + TK_{B\cap X_n}\|_p^p + \| TK_{A\cap X_n} - TK_{B\cap X_n}\|_p^p = 2(\| TK_{A\cap X_n}\|_p^p + \| TK_{B\cap X_n}\|_p^p) \tag{6}$$

dir.

Teorem 4.1.1 ve (6) ;

$$\text{(7)} \qquad \text{h.h.y. de} \quad TK_{A\cap X_n}(x) \cdot TK_{B\cap X_n}(x) = 0$$

olmasını gerektirir. Bu ise ayrık kümelerin karakteristik fonksiyonlarının T ile görüntülerinin desteklerinin ayrık olduğunu ifade eder.

$A, B\in \mathcal{A}$ ve $A\cap B = \emptyset$ olsun. F'nin tanımından;

$$F(A\cup B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp}(TK_{(A\cup B)\cap X_n}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp}(TK_{(A\cap X_n)\cup(B\cap X_n)}) =$$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp}(TK_{A\cap X_n} + TK_{B\cap X_n})$ olur. Bu eşitlik ve (7)'den

$$\text{(8)} \qquad F(A\cup B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp}(TK_{A\cap X_n}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp}(TK_{B\cap X_n}) =$$

$$= F(A)\cup F(B)$$

olur.

(8) eşitliğinin sayılabilir bileşim için doğruluğunu araştıralım : Bunun için $k_1 \neq k_2$ için $A_{k_1}\cap A_{k_2} = \emptyset$ olmak üzere $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ iken $F(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F(A_k)$ yani

$$\text{(9)} \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp} T(K_{X_n\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)}) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\Big[\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp}(TK_{X_n\cap A_k})\Big]$$

olduğunu göstermeliyiz. Herhangi n için, $s_m = \sum_{k=1}^{m} K_{X_n\cap A_k}$,

$s = \sum_{k=1}^{\infty} K_{X_n\cap A_k}$ diyelim.

$$\| s - s_m \|_p^p = \int_X \Big| \sum_{k=m+1}^{\infty} K_{X_n \cap A_k}(x) \Big|^p d\mu = \int_X \sum_{k=m+1}^{\infty} K_{X_n \cap A_k} \, d\mu$$

$$= \int_X K_{\bigcup_{k=m+1}^{\infty} X_n \cap A_k} \, d\mu = \mu\Big(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} X_n \cap A_k\Big) = \sum_{k=m+1}^{\infty} (X_n \cap A_k) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0 \; .$$

O halde s_m, L_p' de s'ye yakınsar. T sürekli (sınırlı) olduğundan

$$(10) \qquad T(s) = T\Big(\sum_{k=1}^{\infty} K_{X_n \cap A_k}\Big) = \lim_m T(s_m) = \lim_m \sum_{k=1}^{m} T(K_{X_n \cap A_k})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} T\,(K_{X_n \cap A_k})$$

olur. (10) eşitliğinden

$$T\Big(K_{\bigcup_{k=1}^{\infty}(X_n \cap A_k)}\Big) = T\Big(\sum_{k=1}^{\infty} K_{X_n \cap A_k}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} T(K_{X_n \cap A_k})$$

olur. Buradan,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp} T\Big(K_{X_n \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)}\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} T(K_{X_n \cap A_k})\Big)$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{supp} T(K_{X_n \cap A_k})$$

bulunur. Böylece (9) eşitliği sağlanmış olur. Demekki

$$(11) \qquad F\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F(A_k)$$

dır.

$X = A \cup (X \setminus A)$ ve $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ olduğundan ve (8)'den $F(X) = F(A) \cup F(X \setminus A)$ dır. Buradan,

$$(12) \qquad F(X \setminus A) = F(X) \setminus F(A)$$

olur.

Şimdi de tanım 3.1.4 'deki iii). koşulunun sağlandığını gösterelim :

$$\Leftarrow: \quad 0 = \mu[F(A)] = \mu\Big[\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{supp}(TK_{A \cap X_n})\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu[\mathrm{supp}(TK_{A \cap X_n})]$$

ve $\mu \geq 0$ olduğundan her n için h.h.y. de $TK_{A \cap X_n}(x) = 0$ dolayısıyla $\| TK_{A \cap X_n} \|_p^p = \| K_{A \cap X_n} \|_p^p = 0$ olur. Bu ise h.h.y. de $K_{A \cap X_n}(x) = 0$ demektir. Bunun sonucu olarak, her n için $\mu(A \cap X_n) = 0$ dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap X_n) = \mu(A) = 0$ olur.

$\Rightarrow$: $\mu(A) = 0$ ise her n için $\mu(A \cap X_n) = 0$, dolayısıyla h.h.y. de $K_{A \cap X_n}(x) = 0$ olur. Buradan h.h.y. de $TK_{A \cap X_n}(x) = 0$ olur. Bunun sonucu olarak $\mu[\mathrm{supp}\,(TK_{A \cap X_n})] = 0$ ve dolayısıyla

$$\mu[F(A)] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\Big[\mathrm{supp}(TK_{A \cap X_n})\Big] = 0$$

olur. Böylece,

(13) $\mu[F(A)] = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\mu(A) = 0$ olmasıdır.

Böylece, (11), (12) ve (13) ile tanım 3.1.4 'ün koşulları sağlandığından (4) ile tanımlanan F dönüşümü bir düzgün küme izomorfizmidir.

$\mu(X_n)<\infty$ olduğundan $K_{X_n} \in L_p$ dir ve dolayısıyla TK_{X_n} tanımlıdır . $h_n(x) = TK_{X_n}(x)$ diyelim. $S_n = \operatorname{supp} h_n$ olsun. $m \neq n$ için $X_n \cap X_m = \emptyset$ olduğundan $\mu(S_n \cap S_m) = 0$ olduğunu yukarıda göstermiştik. Buna göre $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ olmak üzere

$$h(x) = \begin{cases} h_n(x), & x \in S_n \\ 0, & x \notin S \end{cases}$$

şeklinde bir $h(x)$ fonksiyonu tanımlamak mümkündür.

Şimdi, herhangi bir $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A)<\infty$ kümesi verilmiş olsun. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap X_n)$ dir. Burada $A\cap X_n$ kümeleri ayrık olduğundan supp $(TK_{A\cap X_n})$ lerin kesişimlerinin ölçümü sıfır olur. Bu nedenle ;

$$K_A = \lim_{n} \sum_{k=1}^{n} K_{A\cap X_k} \quad \text{olduğundan} \quad T(K_A) = T(\lim_{n} \sum_{k=1}^{n} K_{A\cap X_k})$$

$$= \lim_{n} \sum_{k=1}^{n} T(K_{A\cap X_k}) = \sum_{n=1}^{\infty} T(K_{A\cap X_n}) \quad \text{olur. Ayrıca,}$$

$\{T(K_{A\cap X_n}) : n \in \mathbb{N}\}$ ayrık olduğundan $\operatorname{supp}T(K_A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp}T(K_{A\cap X_n})$ olur.Buna göre, h.h.y. de $F(A)=\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp}(TK_{A\cap X_n}) = \operatorname{supp}(TK_A)$ elde edilir. Buradan hemen her $x \in \operatorname{supp}(TK_A)$ elemanı sadece bir tek $n = n_0$ için supp $(TK_{A\cap X_n})$ 'e ait olur ve dolayısıyla

$$TK_A(x) = TK_{A\cap X_{n_0}}(x) = h_{n_0}(x) = h(x)$$

olur.

Yukarıdaki eşitliği hemen her x için yazarsak ;

$$(14) \qquad TK_A(x) = h(x) \, . \, K_{F(A)}(x) = h(x) \, . \, (\overline{F}(K_A))(x)$$

elde ederiz. Burada $\overline{F}(K_A) = K_{F(A)}$ dır. Böylece (2) eşitliğinin karakteristik fonksiyonlar için doğru olduğunu göstermiş olduk. Aynı eşitliğin basit fonksiyonlar için de doğru olduğunu gösterelim :

$s = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{A_i}$, $i \neq j$ için $c_i \neq c_j$ ve her i için $A_i \in \mathcal{A}$ olsun. T lineer olduğundan ve (14)'den ;

$$T(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i TK_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} c_i \, h.\overline{F}(K_{A_i}) = h. \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{F}(K_{A_i})$$

$$= h \, . \, \overline{F} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \, K_{A_i} \right) = h \, . \, \overline{F}(s) \; .$$

Şimdi herhangi bir $f \in L_p$ alalım. μ-integrallenebilir basit fonksiyonlar L_p' de yoğun olduğundan en az bir (s_n) basit fonksiyon dizisi vardır, öyleki

$$\| s_n - f \|_p \xrightarrow[n]{} 0$$

dır. Bu ve (1) den

$$\| Ts_n - Tf \|_p \xrightarrow[n]{} 0$$

olur ve dolayısıyla Ts_n ölçümde Tf'ye yakınsar. Buradan Ts_n' nin en az bir alt dizisi h.h.y. de Tf'ye yakınsar. Bu nedenle Ts_n'nin hemen her yerde Tf'ye yakınsadığını kabul edebiliriz. Buna göre ölçümü sıfır olan bir küme dışında $\lim_n Ts_n(x) = Tf(x)$ dir

Bu ve $\overline{F}$'nin h.h.y. de yakınsamayı korumasından

$$\text{h.h.y.de} \quad Tf(x) = \lim_n Ts_n(x) = \lim_n (h(x).(\overline{F}(s_n))(x))$$

$$= h(x).\lim_n (\overline{F}(s_n))(x) = h(x)(\overline{F}(f))(x)$$

elde ederiz.

L_p'de farkı null olan fonksiyonlar aynı kabul edildiğinden

$$Tf(x) = h(x).(\overline{F}\,(f))(x)$$

bulunur.

Şimdi de (3)'ün sağlandığını gösterelim :

(1), (2) ve (14)'den ölçümü sonlu her $A \in \mathcal{A}$ için

$$\mu(A) = \| K_A \|_p^p = \| TK_A \|_p^p \tag{15}$$

$$= \int_X |h(x)|^p \, |K_{F(A)}(x)|^p \, d\mu = \int_{F(A)} |h(x)|^p \, d\mu$$

elde edilir. Aynı eşitliğin herhangi bir $A \in \mathcal{A}$ için de doğru olduğunu gösterelim :

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap X_n)$ olsun. $m \neq n$ için $X_n \cap X_m = \emptyset$ olduğundan $F(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F(A \cap X_n)$ dır. $f_k(x) = |h(x)|^p K_{\bigcup_{n=1}^{k} F(A \cap X_n)}(x)$ tanımlarsak, $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots.. \leq |h(x)|^p$ ve h.h.y. de

$\lim_k f_k(x) = |h(x)|^p$ olur. Bunun sonucu olarak /1/'den

$$\lim_k \int f_k \, d\mu = \int_{F(A)} | h(x) |^p \, d\mu$$

olur. Halbuki bu eşitliğin sol tarafı $\mu(A)$'ya eşittir çünkü,

$$\lim_k \int f_k d\mu = \lim_k \int | h(x) |^p K_{\bigcup_{n=1}^{k} F(A \cap X_n)}(x) \, d\mu =$$

$$= \lim_k \sum_{n=1}^{k} \int_{F(A \cap X_n)} | h(x) |^p d\mu = \lim_k \sum_{n=1}^{k} \mu(A \cap X_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap X_n) = \mu(A)$$

dır.

$\mu^*(B) = \mu[F^{-1}(B)]$ olduğundan μ^*, μ-süreklidir.

Gerçekten :

$A = F^{-1}(B)$ olsun. Buradan $F(A) = B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{supp}(TK_{A \cap X_n})$

dir. $\mu(B) = 0$ ise her n için $\mu[\mathrm{supp}(TK_{A \cap X_n})] = 0$ dır.

Dolayısıyla h.h.y. de $TK_{A \cap X_n}(x) = 0$ dır. Buradan her n için

h.h.y.de $K_{A \cap X_n}(x) = 0$ dır. Böylece her n için $\mu(A \cap X_n) = 0$

/1/ Dunford, N., Schwartz, J.T., s. 151.

olur. Dolayısıyla $\mu^*(B) = \mu(A) = 0$ elde edilir.

μ^* , μ-sürekli olduğundan Radon-Nikodym teoreminden (Teorem 2.3.4)

$$(16) \qquad \mu(A) = \mu^*[F(A)] = \int_{F(A)} \frac{d\mu^*}{d\mu} d\mu$$

dir. Radon-Nikodym türevinin tekliği ve (15) ile (16) dan

$$F(A)\text{'da h.h.y. de } |h(x)|^p = d\mu^*/\,d\mu$$

olur. Dolayısıyla her n için $F(X_n)$' de h.h.y. de

$|h(x)|^p = d\mu^*/\,d\mu$ dir. $m \neq n$ için $X_n \cap X_m = \emptyset$ ve

$\mu[F(X_n) \cap F(X_m)] = 0$ ve ayrıca $F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F(X_n)$ olduğundan

$$F(X)\text{'de h.h.y. de } |h(x)|^p = d\mu^*/\,d\mu$$

olur.

Karşıt olarak, (2) ile verilen T'nin L_p'den L_p' ye bir izometri olduğunu gösterelim :

$\overline{F}$ ölçülebilir fonksiyonlar arasında bir dönüşüm olduğundan her $f \in L_p$ için $\overline{F}(f)$ ölçülebilirdir ve ayrıca h'de ölçülebilir olduğundan $h.\overline{F}(f)$ ölçülebilirdir.

Şimdi $f = K_A \in L_p$ alalım. $TK_A(x) = h(x)\overline{F}(K_A)(x)$ dır.

$$\int |(TK_A)(x)|^p d\mu = \int |h(x)|^p \,|\overline{F}(K_A)(x)|^p d\mu = \int_{F(A)} |h(x)|^p d\mu < \infty$$

dır. Ohalde $K_A \in L_p$ ise $TK_A \in L_p$ dir. Benzer şekilde

$s = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{A_i} \in L_p$ ise $Ts = T(\sum_{i=1}^{n} c_i K_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} c_i TK_{A_i}$ olur.

Buradan $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ için $TK_{A_i} \in L_p$ olduğundan $Ts \in L_p$ olur. Şimdi de herhangi bir $f \in L_p$ alalım. O zaman L_p'de en az bir (s_n) basit fonksiyon dizisi vardır öyleki,

$\| s_n - f \|_p \xrightarrow[n]{} 0$ dır. Dolayısıyla h.h.y. de $\lim\limits_n s_n(x) = f(x)$ ve $\bar{F}$ h.h.y. de yakınsamayı koruduğundan, yani $\lim\limits_n \bar{F}(s_n)(x) = (\bar{F}(f))(x)$ olduğundan :

$$(17) \qquad \| Ts_n - Tf \|_p^p = \int |(Ts_n)(x) - (Tf)(x)|^p \, d\mu$$

$$= \int |h(x)|^p \, |\bar{F}(s_n)(x) - \bar{F}(f)(x)|^p \, d\mu \longrightarrow 0$$

dir.

Böylece, (s_n) basit fonksiyon dizisi L_p'de olduğundan Ts_n, L_p'de bir dizidir ve L_p'de Tf'ye yakınsamaktadır, yani Ts_n, L_p'de bir Cauchy dizisidir. L_p tam olduğundan $Tf \in L_p$ dir. Sonuç olarak (2) ile verilen T, L_p'den L_p'ye bir dönüşümdür.

Şimdi, T'nin izometri olduğunu gösterelim :

$K_A \in L_p$ olsun. Buradan $TK_A = h.\,\bar{F}(K_A)$, $|h(x)|^p = d\mu^*/d\mu$ dir.

$$(18) \qquad \| TK_A \|_p^p = \int_X |h(x)|^p \, |\bar{F}(K_A)(x)|^p \, d\mu = \int_{F(A)} |h(x)|^p \, d\mu$$

$$= \mu^*[F(A)] = \mu(A) = \int_X K_A \, d\mu = \| K_A \|_p^p$$

dır.

$$s = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{A_i} \in L_p \quad \text{ise} \quad \| Ts \|_p^p = \int_X \Big| \sum_{i=1}^{n} c_i TK_{A_i}(x) \Big|^p d\mu$$

$$= \int_X \sum_{i=1}^{n} |c_i|^p \, | TK_{A_i}(x) |^p d\mu = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^p \int_X | TK_{A_i}(x) |^p d\mu$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |c_i|^p \mu(A_i) = \| s \|_p^p$$

elde edilir.

$f \in L_p$ ise L_p' de f'ye yakınsayan en az bir (s_n) basit fonksiyon dizisi vardır. (17)'den $\| Ts_n - Tf \|_p \longrightarrow 0$ olduğundan,

$$\| Tf \|_p = \lim_n \| Ts_n \|_p = \lim_n \| s_n \|_p = \| f \|_p$$

bulunur.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4.3 Herhangi L_p Uzayları Üzerindeki İzometriler

Bu kesimde $(X, \mathcal{A}, \mu)$ herhangi ölçüm uzayı olduğunda $L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ üzerindeki izometrileri karakterize edeceğiz.

Norm izomorfik iki L_p uzayı Banach uzayı olarak aynı kabul edildiklerinden bunlardan birisi üzerindeki izometri, diğeri üzerindeki ile aynıdır. Bu nedenle, $L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$'ye norm izomorfik parçalanabilir $L_p(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ üzerindeki izometrileri, karakterize etmek amacımız için yeterli olacaktır.

$L_p(X,\mathcal{A},\mu)$' ye norm izomorfik L_p uzayı bulmak, teorem 4.3.3 ile her zaman mümkün olmaktadır. Şimdi, gerekli tanım ve teoremleri verelim.

Tanım 4.3.1 Herhangi ölçülebilir A ve B kümeleri için $\mu(A\cap B) = 0$ ise A ve B'ye μ-ayrık ve $\mu(A\setminus B)+\mu(B\setminus A) = 0$ ise bu kümelere μ-denk kümeler denir.

Teorem 4.3.2 X üzerinde ölçümü sonlu ve kesin olarak pozitif olan kümeler ailesinde μ-ayrık kümelerden oluşan alt aileler arasında en az bir maksimal olanı vardır. $\mathcal{F}$ böyle bir maksimal aile olsun. σ-sonlu ölçülebilir herhangi bir B kümesi verildiğinde $\mathcal{F}$'de $F_1, F_2, \ldots\ldots$ gibi sayılabilir çoklukta eleman vardır öyleki, B'nin F_n'lerin bileşiminin dışında kalan kısmının ölçümü sıfırdır. Özel olarak X, σ-sonlu ise $\mathcal{F}$ sayılabilir ailedir /1/.

Teorem 4.3.3 $(X,\mathcal{A},\mu)$ herhangi bir pozitif ölçüm uzayı, $\mathcal{F} = \{F_\nu : \nu\in I\}$ X üzerinde ölçümü sonlu ve kesin olarak pozitif μ-ayrık kümelerin bir maksimal ailesi, her $\nu\in I$ için $\mathcal{A}_\nu = \{E\in\mathcal{A} : E\subset F_\nu\}$ ve μ_ν, μ'nün $\mathcal{A}_\nu$ 'ye sınırlanmasıyla elde edilen ölçüm olsun. Her $\nu\in I$ ve $1\leq p\leq\infty$ için L_p^ν, $L_p(F_\nu,\mathcal{A}_\nu,\mu_\nu)$'yü göstersin. Her $\nu\in I$ için A_ν, L_∞^ν cebirinin Y_ν kompakt olmak üzere $C^r(Y_\nu)$'ye norm ve cebir izomorfik bir alt cebiri olsun. İlaveten her $\nu\in I$, $f\in A_\nu$, $f\geq 0$ ve $1\leq p<\infty$ için $f^p\in A_\nu$ olduğunu kabul edelim. Y_ν uzaylarının topolojik direk toplamı $Y=\sum_\nu \oplus Y_\nu$ üzerinde dış regüler pozitif bir λ ölçümü vardır ve her $1\leq p\leq\infty$ için

---

/1/ Cengiz, B., s. 95.

$L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $L_p(Y, \lambda)$'ya norm ve latis izomorfiktir. Ayrıca her kompakt kümenin λ ölçümü sonlu, ve λ, ölçümü sonlu her kümede iç regülerdir. X, σ- sonlu ise λ regüler Borel ölçümüdür /1/.

Böylece, $L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ uzayı verildiğinde teorem 4.3.3 ile elde edilen ve $L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$'ye norm ve latis izomorfik $L_p(Y, \lambda)$ uzayına geçebiliriz. Şimdi $L_p(Y, \lambda)$ üzerindeki izometrileri inceleyelim.

L_p uzayındaki bir fonksiyonun desteği σ-sonlu olduğundan /2/, $L_p(Y, \lambda)$'nın $\mathcal{B}$ cebirinin σ-sonlu kümelerinden oluşan aileyi $\mathcal{B}_\sigma$ ile gösterelim.

$A \in \mathcal{B}_\sigma$ ise $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $\lambda(E_i) < \infty$ dır. Her bir i için $\lambda(E_i) < \infty$ olduğundan ancak sayılabilir sayıda ν için $E_i \cap Y_\nu \neq \emptyset$ dir. Çünkü, λ dış regüler olduğundan en az bir $E_i \subset V$ açık kümesi vardır öyleki, $\lambda(V) < \infty$ dır. Sayılamaz sayıda ν için $E_i \cap Y_\nu \neq \emptyset$ olsaydı aynı şey V içinde doğru olacak ve dolayısıyla $\lambda(V) = \sum_{\nu} \lambda(V \cap Y_\nu) = \infty$ olacaktı. Bu ise çelişkidir. Böylece Y_ν'ler ayrık ve $Y = \bigcup_{\nu} Y_\nu$ olduğundan her bir E_i için $E_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_i \cap Y_{\nu_{ij}})$ olur. Buna göre A kümesi,

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Big[\bigcup_{j=1}^{\infty} (E_i \cap Y_{\nu_{ij}}) \Big]$$

şeklinde yazılabilir.

$\lambda(Y_{\nu_{ij}}) < \infty$ olduğundan $\lambda(E_i \cap Y_{\nu_{ij}}) < \infty$ olur ve

---

/1/ Cengiz, B., s.101.

/2/ Hewitt, E., Stromberg, K., s. 347.

dolayısıyla $K_{E_i \cap Y_{\nu_{ij}}} \in L_p(Y, \lambda)$ dır. Bunun sonucu olarak, $E_i \cap Y_{\nu_{ij}}$ kümelerini, $Z_k = E_i \cap Y_{\nu_{ij}}$ şeklinde yeniden indisleyip A kümesini, $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$ şeklinde, ölçümü sonlu kümelerin sayılabilir bileşimi olarak yazabiliriz. Buna göre F küme dönüşümünü

$$F(A) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{supp} TK_{Z_k}$$

şeklinde tanımlayarak, F'nin $\mathcal{B}_\sigma$'dan $\mathcal{B}_\sigma$'ya düzgün küme izomorfizmi olduğu, teorem 4.2.1 deki gibi gösterilir. Teorem 4.2.1 deki adımlar aynen izlenerek bu teoremin, $L_p(Y, \lambda)$ uzayı için de doğru olduğu ispatlanır.

4.4 Sonuç

Böylece sayı değerli herhangi L_p uzayları üzerindeki izometriler karakterize edilmiştir. Bununla beraber herhangi Hilbert uzayı değerli veya herhangi bir Banach uzayı değerli L_p uzayları üzerindeki izometrilerin karakterizasyonu da araştırılmaya değer önemli bir problemdir.

K A Y N A K L A R

/1/ Ash, R.B., Measure, Integration and Functional Analysis, Academic Press, 1972.

/2/ Bachman,G., Narici, L., Functional Analysis, Academic Press, New York, 1972.

/3/ Banach, S., Théorie des Opération Linéaires, Monografje Matematyczne, Warsaw, 1932.

/4/ Bartle, R.G., The Elements of Integration, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1966.

/5/ Bourbaki, N., General Topology, Part 1, Hermann, Paris, 1966.

/6/ Cambern, M., The Isometries of $L_p(X,K)$, Pasific Journal of Math. Vol.55, No 1, 1974, s. 9-17.

/7/ Cengiz, B., Sürekli Fonksiyon Uzaylarının Bazı Özellikleri (Doçentlik Tezi), 1976.

/8/ Doob, J.L., Stochastic Processes, Wiley and Sons, New York, 1953.

/9/ Dugundji, J., Topology , Allyn and Bacon, Boston, 1966.

/10/ Dunford, N., Schwartz, J.T., Linear Operators, Part 1, Interscience Publishers, Inc., New York.

/11/ Edwards, R.E., Functional Analysis,Theory and Applications, Rinehart and Winston, 1965.

/12/ Halmos, P.R., Boolean Algebras,D. Van Nostrand, Co., Inc., 1963.

/13/ Hewitt, A., Stromberg, K.,Real and Abstract Analysis, Springer-Verlag, 1965.

/14/ Lacey, H.,E., The Isometric Theory of Classical Banach Spaces, Springer-Verlag, 1974.

/15/ Lamperti, J., On the Isometries of Certain Function Spaces, Pasific, J. Math., Vol.8., 1958, s. 459-466.

/16/ Munroe, M. E., Measure and Integration, Addison-Wesley, Publishing Company, Inc.,Philippines, 1971.

/17/ Royden, H. L., Real Analysis (Second Edition), Mac Millan Company, New York, 1968.

/18/ Rudin, W., Functional Analysis, Mc Graw-Hill,Inc., New York.

/19/ Rudin, W., Real and Complex Analysis, Mc Graw-Hill,1974.

/20/ Sikorski, R., Boolean Algebras (Third Edition), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1969.

/21/ Sourour,A.R., On the Isometries of $L_p(\Omega,X)$, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 83, Number 1.,1977.

/22/ Willard, S., General Topology, Addison-Wesley Publishing Company, Philippines, 1970.