T. C. ANADOLU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOZSUL KONEKSİYONLARI

Hazırlayan : Mazlum ABAK

Yüksek Lisans Tezi

Eskişehir - 1985

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarımın yönetimini kabul ederek, bana bu tezi hazırlama olanağını sağlayan , çalışmam süresince yapıcı eleştirileri ile destek olan: Sayın Hocam Doç. Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR'a , öneri ve fikirlerinden yararlandığım Sayın Hocalarım :Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU , Prof. Dr. Rüstem KAYA ve Yard. Doç. Dr. Ali GÖRGÜLÜ'ye sonsuz şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarımda her konuda yardımlarını gördüğüm A. Ü. Kütahya Meslek Yüksek Okulu Müdürü Sayın Adil ÖZKAN'a teşekkür ederim.

Kaynak çevirisinin yapılmasında yardımcı olan Sayın Öğr. Gr. Feyza ÇİNİCİOĞLU ve Sayın Okutman Erdal KAYIKÇI'ya teşekkürü borç bilirim.

Mazlum ABAK

GİRİŞ :

Kozsul Koneksiyonları adlı bu tez ile koneksiyon ve türev kavramları incelendi. [2] no'lu kaynağı temel olarak aldık. Manifoldlar üzerindeki çalışma boyunca da [4] no'lu kaynağa bağlı kaldık. Lie grubu, manifold, modül gibi temel kavramların bilindiği kabul edilmiş olup okuyucunun ilgili kaynaklara başvurması yararlıdır.

Çalışma dört bölüm halinde düzenlenmiş olup I. Bölüm Modül üzerinde türevler adını taşımakta ve türev kavramının cebirsel olarak tanıtılmasını yapmaktadır. II.Bölüm Manifoldlar üzerinde Tensör alanlarının türevleri ile ilgilidir. III.Bölüm'de ve IV.Bölümde de lif demetleri tanıtılmış kozsul anlamında koneksiyonlar ele alınmıştır. III. ve IV. Bölüm için tezin sonunda bir örnek verilmiştir.

İÇİNDEKİLER

I. BÖLÜM

I.1 MODÜL ÜZERİNDE TÜREVLER

I.1.1 Türev ve Türev Kuralları

Tanım I.1.1 (TÜREV) :

A, R halkası üzerinde bir cebir olsun.

$$X : A \xrightarrow{R\text{-lineer}} A$$

$\ni$ $X(fg)=X(f)g+fX(g)$; $\forall f,g \in A$

ise X'e A da bir türev denir [2].

A cebirinin birimi $1 \in A$ ise

$$\varphi : R \longrightarrow A$$
$$\lambda \longrightarrow \varphi(\lambda)=\lambda.1$$

olmak üzere $\varphi(R) \subset A$ alt cebir olur. φ'nin izomorfizm olması için

"$\lambda.f=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ veya $f=0$, $f \in A$" olmasıdır. Böylece,

"$\lambda.1=0 \Leftrightarrow \lambda=0$"

yazılabilir. X'A nın bir türevi olmak üzere, $\forall \lambda \in R$ için

$$X(\lambda)= X(\lambda.1)=\lambda.X(1)$$

dir. Diğer taraftan,

$$X(1)=X(1.1)=X(1).1+1.X(1) \Rightarrow X(1)=0$$

dır. O halde $X(\lambda)=0$ bulunur.

NOTASYON : $\mathcal{X} =\{X \mid X$, A nın bir türevi$\}$

$\mathcal{X}$ bir A-modüldür. Modül için gerekli iç ve dış işlemler,

$$(X+Y)(f)=X(f)+Y(f) \quad , \; X,Y \in \mathcal{X} \text{ ve } f \in A$$
$$(fX)(g)=fX(g) \quad , \; X \in \mathcal{X} \; , f,g \in A$$

şeklinde tanımlanmıştır [2].

Diğer taraftan ;

$$[\ ,\ ] : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$$
$$[X,Y](f)=X(Y(f))-Y(X(f)) \quad , \; f \in A$$

fonksiyonu R-lineerdir. Yani

$$[X_1+X_2,Y]=[X_1,Y]+[X_2,Y]$$
$$[X,Y_1+Y_2]=[X,Y_1]+[X,Y_2]$$

dir. Üstelik,

$$[X,Y]=-[Y,X]$$

olduğundan [,] alternedir ve

$$\big[[X,Y],Z\big]+\big[[Y,Z],X\big]+\big[[Z,X],Y\big]=0$$

Jacobi eşitliğini sağlar. A-modül $\mathcal{X}$ nin dış işlemi için,

$$[X,fY](g)=X(f)Y(g)+f[X,Y](g)$$

dir [2].

I.1.2 Türev Kuralları

Tanım I.1.2 (KOVARYANT TÜREV) :

W bir A-modül olsun.

$$D:\mathcal{X}\xrightarrow{\text{A-Lineer}}\mathrm{Hom}_R(W,W)$$

$$X\longrightarrow D(X):W\longrightarrow W$$

$$Y\longrightarrow D(X)(Y)=D_XY$$

Eğer $D\in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{X},\mathrm{Hom}_R(W,W))$

$$D_X(fY)=X(f)Y+f.D_XY$$

ise D,ye W de bir AFİN KONEKSİYON D_X'e de KOVARYANT TÜREV denir [1],[2].

ÖZEL HALLER :

1) A=W özel halinde ;

$$D:\mathcal{X}\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,A)$$

$$X\longrightarrow D_X:A\longrightarrow A$$

$$f\longrightarrow D_Xf=X(f)$$

Bir KOVARYANT TÜREV'dir. Bu türeve A'daki KANONİK TÜREV denir [2].

2) V bir A-modül olsun.

$$D:\mathcal{X}\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A\otimes V,A\otimes V)$$

$$X\longrightarrow D_X:A\otimes V\longrightarrow A\otimes V$$

$$f\otimes Y\longrightarrow D_X(f\otimes Y)=X(f)\otimes Y$$

Bir KOVARYANT TÜREV'dir. Bu türeve A⊗V deki KANONİK TÜREV denir [2].

Teorem I.2.1 :

V bir A-modül olmak üzere V nin bir bazı $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}=\{\alpha_i \mid i\in I\}$ ve $\{w_i \mid i\in I\}\subset \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{X},V)$ alt cümlesi için $D_X\alpha_i=w_i(X), i\in I$ olacak şekilde bir tek D_X kovaryant türevi vardır [2].

$$\alpha\in V \quad \Rightarrow \quad \alpha=\sum_{i\in I}\lambda_i\alpha_i$$

olsun. O zaman,

$$D_X\alpha=\sum_{i\in I}X(\lambda_i)\alpha_i+\sum_{i\in I}\lambda_i w_i(X)$$

dir. Buradan ,

$D\in\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{X},\mathrm{Hom}_A(V,V))$ bir türev kuralı ve $h\in\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{X},\mathrm{Hom}_A(V,V))$ ise D+h da bir türev kuralıdır.

I.1.3 Birleştirilmiş modüllerde türev

$V_1,V_2,\dots,V_n,\dots$ A-modüller ve D^i lerde karşılıklı olarak bu modüllerdeki türevler olsunlar.

1) DİREKT TOPLAM

$$V=\oplus V_i=V_1\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_n\oplus\dots \quad D\in\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{X},\mathrm{Hom}(V,V))$$

$$D_X\alpha=D_X(\sum\alpha_i)= D_X^i\alpha_i$$

V de bir türev kuralıdır.

2) $V=\otimes V_i=V_1\otimes V_2\otimes\dots\otimes V_n\otimes\dots$

$$D_X\alpha=D_X(\alpha_1\otimes\alpha_2\otimes\dots\otimes\alpha_p)$$

$$D_X\alpha=\sum\alpha_1\otimes\alpha_2\otimes\dots\otimes D_X^i\alpha_i\otimes\dots\otimes\alpha_p$$

bir türev kuralıdır [2].

3) $V_1=V_2=\dots=V_p$

$$V_1\otimes V_2\otimes\dots\otimes V_p=V\otimes V\otimes\dots\otimes V=\otimes^p V$$

Tensör çarpımı için $T^p(V)$ gösterimini de kullanacağız. Bu halde ,

$$T^0(V)=\otimes^0 V=A \quad , \quad T^1(V)=\otimes^1(V)=V$$

olarak alınacak ve $\otimes V$ tensör cebiri de,

$$T^*(V)=\sum_{p+q=0}^{\infty} T^p(V)\otimes T^q(V)$$

şeklinde gösterilecektir. Eğer ,

$$D_X(\alpha\otimes\beta)=D_X\alpha\otimes\beta+\alpha\otimes D_X\beta$$

tanımlanırsa $D;T^*(V)$de bir türevdir.

I.1.4 Lineer dönüşümler ve türev

V ve W iki A-modül olsunlar. Sırayla V ve W de D^V, D^W türevlerini gözönüne alalım.

$$Hom_A(V,W)$$

de bir D türevi,

$$D:\mathcal{X} \longrightarrow Hom_R(Hom_R(V,W), Hom_R(V,W))$$
$$X \longrightarrow D_X : Hom_R(V,W) \longrightarrow Hom_R(V,W)$$
$$\alpha \longrightarrow D_X = D_X^W o\alpha - \alpha o D_X^V$$

şeklinde tanımlanabilir. Gerçekten de,

$$D_X(f\alpha)(v)=\{X(f)\alpha+f(D_X^W o\alpha-\alpha o D_X^V)\}(v)$$

olup D bir türevdir [2].

ÖZEL HALLER :

1) V=W özel halinde $\alpha\in Hom_A(V,V)$ olmak üzere

$$D_X = D_X^V o\alpha - \alpha o D_X^V$$

dir. Burada, kısalığın hatırı için ,

$$D_X\alpha=[D_X^V,\alpha]$$

yazılır.

2) V^*da bir türev kuralı
W=A, $\alpha^*\in Hom_A(V,A)$ olmak üzere

$$(D_X\alpha^*)(v)=X(\alpha^*(v))-\alpha^*(D_X v)$$

dır [2].

3) $\Lambda^p(V,W)$ de türev
V ve W iki A-modül ve D^V, D^W türevleri verilsin.

O zaman ;

$$L_p(V,W)=\{\alpha \mid \alpha: V\times V\times \ldots \times V \xrightarrow{P\text{-lineer}} W\}$$

olup, $\alpha \in L_p(V,W)$ olmak üzere ,

$$(D_X\alpha)(v_1,\ldots,v_p)=D_X^W(\alpha(v_1,\ldots,v_p)) - \sum \alpha(v_1,\ldots,D_X^V v_r,\ldots,v_p)$$

dır [2]. Burada ,

$W=A$ alınır ise D ;

$\Lambda^p(V,W)$ ye bir türev indirger [2].

4) V_1,V_2,V_3 sırasıyle D^1,D^2,D^3 türevleri ile üç A-modül olsunlar.

$$V_1\times V_2 \longrightarrow V_3$$
$$(v_1,v_2) \longrightarrow v_1v_2$$

bir 2-lineer dönüşüm olsun. Eğer ,

$$D_X^3(uv)=(D_X^1u)v+u(D_X^2v)$$

ise 2-lineer dönüşümüne D^1,D^2 ve D^3 ile uyumludur denir. Eğer burada ,

$$V_1=V_2=V_3=A$$

alınırsa ,o zaman ;

$$D_X: A \longrightarrow A$$
$$f \longrightarrow D_Xf=X(f)$$

için ,

$$D_X^3(fg)=(D_X^1f)g+f(D_X^2g)$$

dır. Benzer şekilde ;

$$V_1=A \quad , \quad V_2=V_3=V$$

halinde modül dış işlemi uyumludur. Gerçekten de ;

$$A\times V \longrightarrow V$$
$$(f,v) \longrightarrow fv$$
$$D_X^V(fv)=D_X^Af+fD_X^Vv$$
$$=X(f)+fD_X^Vv$$

dır. ∎

II. BÖLÜM

II.1. MANİFOLDLAR

Bir topolojik uzay X olmak üzere $p\in X$'in açık komşuluklarının cümlesini U(p) ile göstereceğiz. Bir topolojik uzayın E^n benzer karektere sahip olması, E^n deki kavramların genellenebilmesi açısından önemlidir. Buna göre bir topolojik uzayda "manifold yapısı" adını vereceğimiz bir yapıdan bahsedeceğiz.

Tanım II.1.1 (Haussdorff uzayı):

X bir topolojik uzay olsun. Farklı iki $P,Q\in X$ noktasının X deki açık komşulukları sırası ile U ve V olsun. Eğer U ile V yi $U\cap V=\emptyset$ olabilecek şekilde seçmek mümkün ise X topolojik uzayına bir Haussdorff uzayı denir [1].

Tanım II.1.2 (Topolojik manifold):

M bir Haussdorff uzayı olsun. $\forall m\in M$ noktası için M'de $E^n, n\geq 0$ ye homeomorf olan bir U açık komşuluğu bulunabilirse M'ye bir n-boyutlu topolojik manifold denir. n=0 ise M'yi bir tek nokta olarak alacağız, [1].

Örnek II.1.1

E^n nin kendisi en basit bir manifold örneğidir [1].

Tanım II.1.3(Vektör alanı):

$$X: M \longrightarrow \bigcup_{p\in M} T_pM$$
$$p \longrightarrow X(p)=X_p\in T_pM$$

ise X'e bir vektör alanı denir. [1].

Vektör alanlarının cümlesini $\mathfrak{X}(M)$ ile de göstereceğiz. Vektör alanlarının toplamı;

$$(X+Y)(p)=X(p)+Y(p)$$
$$=X_p+Y_p$$

biçiminde ifade edilir.

Skalarla çarpım ise,

$$(\lambda X)(p)=\lambda . X(p) = \lambda . X_p \quad ,$$

şeklindedir [1].

Tanım II.1.4(1-parametreli grup):

φ: $\mathbb{R}xM \longrightarrow M$ dönüşümü

1) $\varphi(t+s,p)=\varphi(t,\varphi(s,p))$

2) $\varphi_t:M \longrightarrow M \quad , \forall t\in\mathbb{R}$

$p \longrightarrow \varphi_t(p)=\varphi(t,p)$

ise φ ye ,M'nin bir 1-parametreli grubu denir.

II.2 T(V) TENSÖR CEBİRİNDE TÜREV :

V bir vektör uzayı olsun. V'nin kendi kendisiyle r defa tensör çarpımını $T^r(V)$ ile gösterelim. Benzer şekilde V^* ın tensör çarpımlarına $T_s(V)$ gösterimini kullanalım. Böylece,

$$T_s^r(V)=T^r(V)\otimes T_s(V)$$

olmak üzere,

$$T(V)=\sum_{r+s=0} T_s^r(V)$$

tensör cebiri elde edilir [1].

T(V) üzerinde bir türev aşağıdaki şekilde tanımlanacaktır:

Tanım II.1.5

$\mathcal{Z}(M)$ ile M üstünde tensör alanlarının cebirini gösterelim.

$S_x:T_xM \longrightarrow T_xM$

bir lineer dönüşümü $T(T_x(M))$ cebirinin bir türevini tek türlü belirler. $K\in\mathcal{Z}(M)$ tensör alanı için,

$S(K)(p)=S_p(K_p) \quad , p\in M$

tanımlıyalım. Böylece,

$S:\mathcal{Z}(M) \longrightarrow \mathcal{Z}(M)$

Lineer dönüşümü $\mathfrak{X}(M)$ nin bir türevidir [4].

Tanım II.2.1

T(V), V üstünde bir tensör cebiri olsun. O zaman T(V) nin bir türevi diye;

$$D: T(V) \longrightarrow T(V)$$

1) $D(T^r_s(V)) \subset T^r_s(V)$

2) $D(K \otimes L) = DK \otimes L + K \otimes DL$

3) $\forall C$ kontraksiyonu için $C \circ D = D \circ C$ olacak şekilde ki D dönüşümüne denir[4].

T(V) nin türevlerinin Lie cebiri ile V nin lineer dönüşümlerinin Lie cebiri End(V) izomorfiktir[4]. T(V) nin türevlerinin Lie cebirini DT(V) ile gösterelim. O zaman,

$$\Psi : DT(V) \longrightarrow End(V)$$

$$D \longrightarrow \Psi(D) = B : V \longrightarrow V$$

$$\alpha \longrightarrow B(\alpha) = D(\alpha)$$

Olmak üzere Ψ fonksiyonu istenilen izomorfizm dir[4].

$\mathfrak{D}^r(M)$ ile M manifoldu üzerinde tanımlı r-form ların uzayını gösterelim.

Tanım II.2.2 (Anti-türev) :

$$D(M) = \sum_{r=0}^{n} \mathfrak{D}^r(M) \quad , \quad \mathfrak{D}^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R}) \quad , \quad \mathfrak{D}^1(M) = \Omega^1(M)$$

$$D: \mathfrak{D}(M) \longrightarrow \mathfrak{D}(M)$$

$$D(w_1 \wedge w_2) = (Dw_1) \wedge w_2 + w_1 \wedge (Dw_2)$$

ise D ye $\mathfrak{D}(M)$ nin bir türevi,

$$D(w_1 \wedge w_2) = (Dw_1) \wedge w_2 + (-1)^{\deg w_1} w_1 \wedge (Dw_2)$$

ise D ye $\mathfrak{D}(M)$ nin bir anti-türevi denir. D anti-türevi için,

$$D(\mathfrak{D}^r(M)) \subset \mathfrak{D}^{r+k}(M)$$

ise D ye k mertebedendir denir [4].

Örnek II.2.1

d operatörü 1. mertebeden bir anti-türevdir.

Teorem II.2.1

D_1 ve D_2 sırasıyle k_1 ve k_2 mertebeden iki türev olsunlar.

1) $[D_1,D_2]$, k_1+k_2 mertebeden türevdir.

2) D', k' mertebeden bir anti-türev ise $[D_1,D']$ k_1+k' mertebeden bir anti-türevdir.

3) D' ve D'' k' ve k'' mertebeden anti-türev iseler $D'D''+D''D'$ $k'+k''$ mertebeden türevdir.

4) Bir türev yada anti-türev, $\mathcal{D}^0(M)=C^\infty(M,\mathbb{R})$ ve $\mathcal{D}^1(M)=\Omega^1(M)$ üzerindeki değerleri ile tek türlü bellidir [4].

İspat :

1) $$\begin{aligned}[D_1,D_2](w_1\wedge w_2) &= D_1(D_2(w_1\wedge w_2))-D_2(D_1(w_1\wedge w_2)) \\ &= D_1(D_2w_1\wedge w_2+w_1\wedge D_2w_2)-D_2(D_1w_1\wedge w_2+w_1\wedge D_1w_2) \\ &= D_1D_2w_1\wedge w_2+D_2w_1\wedge D_1w_2+D_1w_1\wedge D_2w_2+w_1\wedge D_1D_2w_2 \\ &\quad -D_2D_1w_1\wedge w_2-D_1w_1\wedge D_2w_2-D_2w_1\wedge D_1w_2-w_1\wedge D_2D_1w_2 \\ &= ([D_1,D_2]w_1)\wedge w_2+w_1\wedge([D_1,D_2]w_2)\end{aligned}$$

O halde $[D_1,D_2]$ bir türevdir. Ve mertebesi k_1+k_2 dir. Diğer haller benzer şekilde görülür [4] ∎

Tanım II.2.3(İç-çarpım i_X):

$X\in\mathfrak{X}$ olmak üzere;

i)$i_X(f)=0 \quad , \forall f\in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$

ii)$i_X(w)=w(X) \quad , \forall w\in \mathcal{D}^1(M)$

olmak üzere $\mathcal{D}(M)$ nin (-1)-mertebeden bir anti -türevi olan i_X' e X' e göre iç-çarpım denir[4].

Not:

1)$i_X(\mathcal{D}^r(M))\subset \mathcal{D}^{r-1}(M)$

olduğundan,

$$\deg i_X=-1$$

dir.

2)Bir anti-türev $\mathcal{D}^0(M)=C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ ve $\mathcal{D}^1(M)$ üzerindeki değeri ile tek türlü bellidir. i) ve ii) i_X' in belli olması için yeter [4].

II.3 LİE TÜREVİ

M bir C^{∞} manifold ve X vektör alanının 1-parametreli grubu φ_t olsun.

$$\varphi_t: M \longrightarrow M$$

diffeomorfizminin $p\in M$ deki tanjant uzaya indirgediği türev dönüşüm,

$$\varphi_{t_*}|_p: T_pM \longrightarrow T_{\varphi_t(p)}M$$

olmak üzere,

$$\varphi_{t_*}: TM \longrightarrow TM$$

tanımlanabilir [11]. Böylece,

$$\varphi_{t_*}: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$$

ve

$$\varphi_t^*: \mathfrak{X}^* \longrightarrow \mathfrak{X}^*$$

iyi tanımlıdır. Sonuç olarak φ_t p-formların uzayına

$$\varphi_t^*: \Lambda^p(\mathfrak{X}, C^{\infty}(M, \mathbb{R})) \longleftarrow \Lambda^p(\mathfrak{X}, C^{\infty}(M, \mathbb{R}))$$

$$\overset{*}{\varphi}_t(\overset{*}{\alpha}_1\wedge\overset{*}{\alpha}_2\wedge\ldots\wedge\overset{*}{\alpha}_p)=\overset{*}{\varphi}_t^{-1}\alpha_1\wedge\overset{*}{\varphi}_t^{-1}\alpha_2\wedge\ldots\wedge\overset{*}{\varphi}_t^{-1}\alpha_p$$

dönüşümünü indirger [4].

$w\in\Lambda^p(\mathfrak{X},C^\infty(M,\mathbb{R}))$ olmak üzere X'e göre w nın LİE TÜREVİ,

$$L_X w=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\overset{*}{\varphi}_t w-w\right]$$

olarak tanımlanır [4].

Teorem II.3.1

X vektör alanına göre L_X Lie türevi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1) L_X, $T(V)$ de bir türevdir.

2) $L_X(T^p(V))\subset T^p(V)$ dir. Yani tipi korur.

3) $C^i_j\circ L_X=L_X\circ C^i_j$ kontraksiyonlarla değişimlidir.

4) $L_X f=X(f)$

5) $L_X Y=[X,Y]$, $\forall Y\in\mathfrak{X}$ [4]

İspat :

1) $L_X(w_1+w_2)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\overset{*}{\varphi}_t(w_1+w_2)-(w_1+w_2)\right]$

$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\overset{*}{\varphi}_t w_1-w_1\right]+\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\overset{*}{\varphi}_t w_2-w_2\right]$

$=L_X w_1+L_X w_2$

2) $L_X(\lambda w)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\overset{*}{\varphi}_t(\lambda w)-(\lambda w)\right]$

$=\lambda.\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\overset{*}{\varphi}_t w-w\right]$

$=\lambda.L_X w$

Diğer taraftan ,

$L_X(w_1\otimes w_2)=w_1\otimes(L_X w_2)+(L_X w_1)\otimes w_2$

dir. Diğer haller benzer şekilde ispatlanır ∎

T(M) de bir türev; $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$, $\mathfrak{X}(M)$ ve $\mathcal{D}^{1}(M)=\mathfrak{X}^{*}(M)$ - üzerindeki değeri ile tek türlü bellidir [4]. Diğer taraftan d ile değişimli ve 0-mertebeden herbir türev $\exists X\in\mathfrak{X}(M)$ için bir L_X Lie türevi ile çakışır [4]. Lie türevinin iki özelliğini de aşağıdaki teorem ile verebiliriz :

Teorem II.3.2 : $X\in\mathfrak{X}$ olmak üzere

a) $L_X=d\circ i_X+i_X\circ d$

b) $[L_X,i_Y]=i_{[X,Y]}$

dir [4].

İspat :

a) d ve i_X anti-türev olduklarından

$d\circ i_X+i_X\circ d$

Bir anti-türevdir. $\deg d+\deg i_X=1+(-1)=0$ derecedendir.

$$\begin{aligned}(d\circ i_X+i_X\circ d)(f)&=d(i_Xf)+i_X(df)\\&=i_X(df)\\&=df(X)\\&=X(f)\\&=L_Xf\end{aligned}$$

O halde, $d\circ i_X+i_X\circ d$ ile L_X, $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ üzerinde çakışırlar. Diğer taraftan ,

$d^2=0$ olduğu için

$d(d\circ i_X+i_X\circ d)=d\circ i_X\circ d$

$(d\circ i_X+i_X\circ d)\circ d=d\circ i_X\circ d$

olup d ile komütatiftir. 0-mertebeden ve d ile komütatif olduğundan $\exists X\in\mathfrak{X}$ için L_X ile çakışır. Halbuki $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ de $d\circ i_X+i_X\circ d$ ile L_X in aynı olduğunu gördük. O halde ;

$L_X=d\circ i_X+i_X\circ d$

dir.

b) L_X, 0-mertebe ve $\dot{I}_X$'de (-1)-mertebeden olduğundan $[L_X,\dot{I}_Y]$, (-1)-mertebeden anti-türevdir.

Diğer taraftan ; $\forall f\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için,

$$[L_X,\dot{I}_Y](f)=L_X(\dot{I}_Y(f))-\dot{I}_Y(L_X(f))$$
$$=0-\dot{I}_Y(X(f))$$
$$=0$$

Tanımdan $\dot{I}_{[X,X]}f=0$ olup $[L_X,\dot{I}_Y]$ ile $\dot{I}_{[X,Y]}$ $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ de çakışır. Halbuki w bir 1-form olmak üzere,

$$[L_X,\dot{I}_Y]w=L_X(\dot{I}_Y(w))-\dot{I}_Y(L_Xw)$$
$$=L_X(w(Y))-[L_Xw](Y)$$
$$=X(w(Y))-X(w(Y))+w([X,Y])$$
$$=\dot{I}_{[X,Y]}w$$

dır. O halde $[L_X,\dot{I}_Y]=\dot{I}_{[X,Y]}$ dır.

Teorem II.3.3 $K\in Z^1_r(M)$ olsun.

$$K:\mathfrak{X}(M)\times\ldots\times\mathfrak{X}(M)\longrightarrow\mathfrak{X}(M)$$

O zaman $\forall X\in\mathfrak{X}(M)$ için

$$(L_XK)(Y_1,\ldots,Y_r)=L_X(K(Y_1,\ldots,Y_r)) -\sum K(Y_1,\ldots,[X,Y_i],\ldots,Y_r)$$

dir.

İspat :

$$K=w_1\otimes w_2\otimes\ldots\otimes w_r$$

$$L_X(K(Y_1,\ldots,Y_r))=L_X((w_1\otimes\ldots\otimes w_r)(Y_1,\ldots,Y_r))$$

$$K(Y_1,\ldots,Y_r)=C_1.C_2\ldots C_r(K\otimes Y_1\otimes\ldots\otimes Y_r)$$
$$=L_X(C_1C_2\ldots C_r)(K\otimes Y_1\otimes\ldots\otimes Y_r)$$
$$=C_1.C_2\ldots C_r(L_X(K\otimes Y_1\otimes\ldots\otimes Y_r)$$
$$=C_1.C_2\ldots C_r(L_XK\otimes Y_1\otimes\ldots\otimes Y_r+K\otimes\sum Y_1\otimes\ldots\otimes L_XY_i\otimes\ldots\otimes Y_r)$$
$$=(L_XK)(Y_1,\ldots,Y_r)+\sum K(Y_1,\ldots,[X,Y_i],\ldots,Y_r)$$

Buradan,

$$(L_XK)(Y_1,\ldots,Y_r)=L_X(K(Y_1,\ldots,Y_r))-\sum K(Y_1,\ldots,[X,Y_i],\ldots,Y_r)$$

dır[4].

Son olarak aşağıdaki teoremi ifade ederek bu kısmı kapatacağız:

Teorem II.3.4 $D \in \mathcal{Z}(M)$ verilsin.

O zaman $\exists ! X \in \mathcal{X}$ ve $\exists ! S \in \mathcal{Z}_1^1(M)$

$\ni \quad D = L_X + S$

dir [4] ∎

III.BÖLÜM

LİF DEMETLERİ

III.1 LİE GRUBU

Tanım.III.1.1(Lie grubu) :

M bir C^{∞} manifold ve bir G grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa (M,G) ikilisine bir Lie grubu denir.

L_1:M nin noktaları G nin elemanları ile çakışır.

$$L_2 : M \times M \longrightarrow M$$
$$(a,b) \longrightarrow ab$$

iç-işlemi her yerde diferensiyellenebilirdir. M ye Lie grubunun temel manifoldu ve G ye de temel grubu denir [4].

Tanım III.1.2(Lie cebiri) :

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{X}_L(G) \times \mathfrak{X}_L(G) \longrightarrow \mathfrak{X}_L(G)$$

1) $[X_1+X_2,Y]=[X_1,Y]+[X_2,Y]$

$[X,Y_1+Y_2]=[X,Y_1]+[X,Y_2]$

2) $[X,Y]=-[Y,X]$ (ters-simetri özelliği)

3) $\big[[X,Y],Z\big]+\big[[Y,Z],X\big]+\big[[Z,X],Y\big]=0$

Jacobi eşitliği olacak şekilde tanımlanırsa $(\mathfrak{X}_L(G),[\ ,\ ])$ ikilisine LİE CEBİRİ denir [4] .

III.2 DİFERENSİYELLENEBİLEN DEMETLER

M bir C^{∞} manifold ve G bir Lie grubu olsun. Eğer bir,

$$R : M \times G \longrightarrow M$$
$$(m,g) \longrightarrow R(m,g)=R_g(m)$$

C^{∞} dönüşümü için,

$$R(R(m,g_1),g_2)=R(R_{g_1}(m),g_2)$$
$$=R(m,g_1g_2)$$

ise R ye G nin M ye sağdan bir C^{∞} etkisidir denir.

$R(m,g)=R_g(m)$

notasyonu kullanılırsa,

$$R_{g_1g_2}(m)=R_{g_2}(R_{g_1}(m))$$
$$=(R_{g_2}oR_{g_1})(m)$$
$$R_{g_1g_2}=R_{g_2}oR_{g_1}$$

yazılabilir. Benzer şekilde $L_{g_1g_2}=L_{g_1}oL_{g_2}$ olacak şekil deki,

$$L:MxG \longrightarrow M$$

dönüşümüde bir sol etkidir. G bir Lie grubu ve,

$$L,R:GxG \longrightarrow G$$

sol ve sağ etkisi verilsin. G nin Lie cebiri $\mathcal{X}_L(G)$ olmak üzere;

$$ad(g)=L_gR_{g^{-1}}:G \longrightarrow G$$
$$h \longrightarrow ghg^{-1}$$
$$Ad(g)=ad(g)_*:\mathcal{X}_L(G) \longrightarrow \mathcal{X}_L(G)$$
$$X \longrightarrow Ad(g)(X)$$
$$Ad(g)(X)=ad(g)_*(X)=L_{g_*}R_{g^{-1}_*}(X)$$

adjoint represantasyonunu göz önüne alalım.

$$\alpha_X: R \longrightarrow TG$$
$$t \longrightarrow \alpha_X(t)$$

fonksiyonu,

$$\alpha_X(0)=e\in G$$
$$\dot{\alpha}_X(0)=X_e\in T_eG$$

olmak üzere integral eğrisi olarak verilsin. X_e başlangıç şartı ile $e\in G$ den geçen X in integral eğrisini α_X ile gösterelim ve,

$$\phi:RxG \longrightarrow G$$
$$(t,g) \longrightarrow \phi(t,g)=L_X(\alpha_X(t))$$

tanımlıyalım.

ϕ bir 1-parametreli gruptur. ϕ ye X in gerdiği 1-parametreli grup denir [4]. Ek olarak,

$$exp:\mathcal{X}_L(G) \longrightarrow G$$
$$X \longrightarrow exp(X)=\alpha_X(1)$$

tanımlıyalım. Aşağıdaki iki özellik kolayca görülür.

1) $u \in P$ verilsin

$$\begin{aligned} \gamma_u : \mathbb{R} &\longrightarrow P \\ t &\longmapsto R_{\exp(tX)} u = u.\exp(tX) \end{aligned}$$

bir C^{∞} eğridir. Üstelik $t=0$ için $\gamma'_u(0) \in T_u P$ dir.

$\sigma : P \times G \longrightarrow P$

G nin P üzerine bir sağ etkisi ve $u \in P$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sigma_u : G &\longrightarrow P \\ g &\longmapsto \sigma_u(g) = ug \end{aligned}$$

dönüşümü,

$$\begin{aligned} \sigma_{u*}\big|_e : T_e G &\longrightarrow T_u P \\ A &\longmapsto \sigma_{u*}\big|_e (A_e) = A^*_u \end{aligned}$$

dönüşümünü indirger. Buna göre,

$$\begin{aligned} \sigma_{u_*} : \mathfrak{X}_L(G) &\longrightarrow \mathfrak{X}(P) \\ A &\longmapsto \sigma_{u_*}(A) = A^* \end{aligned}$$

olmak üzere A^*'a A nın karşılık geldiği temel vektör alanı denir [4].

$$\begin{aligned} \Phi : \mathfrak{X}_L(G) &\longrightarrow \mathfrak{X}(P) \\ X &\longmapsto \Phi(X) : P \longrightarrow TP \\ & \qquad u \longmapsto \Phi(X)(u) = \dot{\gamma}_u \end{aligned}$$

olacak şekilde Φ diferensiyellenebilir dönüşümü - vardır. $\Phi(X)$'e X in karşılık geldiği temel vektör alanı de nir ve X^* şeklinde gösterilir. Temel vektör alanı koneksiyon formu tanımında önemli bir rol oynıyacaktır. Şimdi asli lif demeti kavramanı tanımlıyalım:

Tanım III.2.1(Asli lif demeti) :

$R : P \times G \longrightarrow P$, C^{∞} dönüşümü verilsin. Eğer,

1) R, C^{∞} sağ etkidir.

2) $R=P/G$ olmak üzere, $\pi : P \longrightarrow M$, C^{∞} dur.

3) P, Lokal aşikardır. Yani $\forall m \in M$ nin bir U komşuluğu vardır öyleki,

$\exists\Psi:\pi^{-1}(U)\xrightarrow{\text{diffeo}} U\times G$

$u \longrightarrow \Psi(u)=(\pi(u),\varphi(u))$

$\exists\varphi:\pi^{-1}(U)\longrightarrow G$

$\varphi(R_g(x))=R_g(\varphi(x))$ ve $\exists x\in U$ ise o zaman $P(M,G)$ ye bir asli lif demeti adı verilir [4].

$m\in M$ için $\pi^{-1}(m)$ ye m üzerindeki lif ve $\pi(u)=x$ olmak üzere $\pi^{-1}(x)$ lifinede $u\in P$ den geçen lif denir. Burada M ye baz, π ye izdüşüm ve P ye de demet adı verilir.

Örnek III.2.1

Lineer çatıların demeti :

$L(M)=\bigcup_{p\in M}B_p(M)$

$B_p(M)=\{f_p \mid f_p,\ T_pM \text{ nin bir sıralı bazı}\}$

$L(M)\times GL(n,\mathbb{R})\longrightarrow L(M)$

$(f_p,[a_{ij}])\longrightarrow\{Y_1|_p,\dots,Y_n|_p\}$

$f_p=\{X_1|_p,\dots,X_n|_p\}\ ,\quad Y_i|_p=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\,X_j|_p$

bir sağ etki tanımlar.

$f_p\sim\rho_q \Leftrightarrow f_pA=\rho_q \Rightarrow p=q$

$\pi:L(M)\longrightarrow M$

$f_p\longrightarrow\pi(f_p)=p$

$\Psi:\pi^{-1}(U)\longrightarrow U\times G$

$f_p\longrightarrow\Psi(f_p)=(p,\varphi(p))$

$\varphi:\pi^{-1}(U)\longrightarrow G\ ,\quad f_p=\{X_1|_p,\dots,X_n|_p\}$

$\varphi(f_p)=[a_{ij}]\ ,\quad X_i|_p=\sum a_{ji}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$

$\varphi_i(f_p)=x_i(p)\ ,\quad 1\le i\le n\ ,\quad \varphi_i(f_p)=a_{kr}\ ,\quad i=(k-1)n+r$

olmak üzere (U,φ_i) harita olup L(M) bir manifold ve yukarıda tanımlanan etki ve etki grubu yardımıyle bir asli lif demetidir [4].

III.3 BİRLEŞTİRİLMİŞ DEMETLER

$P(M,G)$ asli lif demeti F bir manifold ve,

$$F\times G \longrightarrow F$$
$$(\xi, g) \longrightarrow g\xi$$

sol etkisi tanımlanmış olsun.

$$(P\times F)\times G \longrightarrow P\times F$$
$$((u,\xi), g) \longrightarrow (ug, g^{-1}\xi)$$

etkisi yardımıyla $P\times F$ nin bölümü $E=P\times_G F$ olsun.

$$P\times F \longrightarrow M$$
$$(u,i) \longrightarrow \pi(u)$$

dönüşümünün indirgediği dönüşüm,

$$\pi_E : E \longrightarrow M$$
$$[(u,\xi)] \longrightarrow \pi(u)$$

olmak üzere

$\pi_E^{-1}(x) \subset E$ ye x üzerinde fibre denir.

$U \subset M$, $\pi^{-1}(U)=U\times G$

lokalizasyonu yardımıyla

$$(\pi^{-1}(U)\times F)\times G \longrightarrow \pi^{-1}(U)\times F$$
$$(((x,g),\xi), g_0) \longrightarrow (x, gg_0, g_0^{-1}F)$$

bir sağ etkidir [4].

$\pi^{-1}(U)=U\times G$ izomorfizminden $\pi^{-1}(U)=U\times F$ izomorfizmi elde edilir. Böylece E de $\pi_E^{-1}(U)$ açık alt manifoldu olacak şekilde bir C^∞ yapı tanımlıdır [4].

Tanım III.3.1 (Birleştirilmiş lif demeti) :

$E(M,F,G,P)$ ye $P(M,G)$ ile birleştirilmiş M üzerinde F standart fibre ve G yapı grubuyla birlikte bir lif demeti denir [4].

Tanım III.3.2(Cross-section=Kesit) :

E(M,F,G,P) birleştirilmiş demeti verilsin.

$$\pi_E o \sigma : M \longrightarrow M$$

dönüşümü özdeşlik dönüşümü olacak şekildeki

$$\sigma : M \longrightarrow E$$

dönüşümüne E(M,F,G,P) nin bir kesiti denir [4].

Tanım III.3.3(Aşikâr asli lif demeti) :

P(M,G) bir asli lif demeti olsun. Eğer P(M,G) i le (MxG)(M,G)izomorfik iseler P(M,G) ye bir aşi kâr asli lif demeti denir [2].

Teorem III.3.1

P(M,G) verilsin. O zaman aşağıdaki önermeler denktir.

1) P, aşikârdır.

2) M üzerinde P(M,G) nin bir dif.bilir kesiti vardır.

3) $\exists \rho : P \longrightarrow G \ni \forall u \in P$, $\forall g \in G$ için,

$$\rho(ug)=\rho(u)g$$

dir [2].

İspat :

1)$\rightarrow$2) : P aşikâr olsun. Ozaman

$$\exists f^{-1} : P(M,G) \longrightarrow MxG(M,G) \ni$$

$$\begin{tikzcd}
MxG \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & P \arrow[d, "\pi'"] \\
M \arrow[r] \arrow[ur, "C"] & M
\end{tikzcd}$$

$$C : M \longrightarrow P$$

$$x \longrightarrow C(x)=f(x,e)$$

istenilen diferensiyellenebilen kesittir.

2)$\rightarrow$3) : $\exists C : M \longrightarrow P \ni \pi o C = I_m$

olsun. O zaman,

$$\exists \rho : P \longrightarrow G \ni \rho(ug)=\rho(u)g$$

dir. Gerçektende,

$$\rho : P \longrightarrow G$$

$$u \longrightarrow \rho(u)=\varphi_x(C(\pi(u)),\varphi_x(u))$$

$\pi(u)=x$ tanımlanırsa,

$$\rho(ug)=\varphi_x(C(\pi(ug)),\varphi_x(ug))$$

$$=\varphi_x(C\pi(u),\varphi_x(u)g)$$

$$=\varphi_x(C\pi(u),\varphi_x(u))g$$

$$=\rho(u)g$$

elde edilir. Benzer şekilde 3) $\Rightarrow$ 1) gösterilir.

IV. BÖLÜM
KONEKSİYONLAR

IV.1 ASLİ LİF DEMETLERİ ÜZERİNDE KONEKSİYONLAR

$P(M,G)$ asli lif demeti verilsin. $u\in P$ nin G nin etkisi altındaki yörüngesi $uG\subset P$ bir alt manifolddur [4]. Bu alt manifoldun $u\in uG$ deki tanjant uzayını G_u ile göstereceğiz. Buna göre $G_u\subset T_u(P)$ bir alt uzaydır. Lineer cebirden hatırlanacağı gibi $H_u\subset T_u(P)$ alt uzayı için,

$$T_u(P)=G_u\oplus H_u$$

dır [3]. Bu yazılışın tek türlü olmadığı açıktır. H_u alt uzayının $u\in P$ de seçimi bizi $P(M,G)$ de koneksiyon kavramına götürür.

Tanım IV.1.1 (KONEKSİYON) :

$\Gamma\in T_1^1(P)$, (1,1)-tensör alanı için

1) $\Gamma_u(X_u)\in G_u$, $\forall X\in \chi(P)$
2) $\Gamma(X)=X$, $\forall X_u\in G_u$
3) $\Gamma(Xg)=\Gamma(X)g$, $\forall g\in G$, $(\Gamma o R_g=R_g o\Gamma)$

ise Γ ya $P(M,G)$ de KONEKSİYON denir [2].

NOT :

$$T_u(P)=G_u\oplus H_u$$

ve R_g altında Γ invaryanttır.

Örnek IV.1.1

$P=M\times G$ olmak üzere $P(M,G)$ aşikâr asli lif demetini gözönüne alalım.

$$\Gamma: \chi(P)\longrightarrow \chi(P)$$

$u=mg$; $\Gamma_u(X_m, \xi_g)=(m, \xi_g)$ tanımlıyalım. Açıkça,

$$\Gamma_u: T_u(P)\longrightarrow G_u$$

olacaktır. Böylece 1) sağlanır. Eğer,

$$Z_u=(O_m, \xi_g)\in G_u$$

alınırsa,

$$\Gamma_u(Z_u)=(m, \xi_g)=Z_u$$

olup $\Gamma(X)=X \Longleftrightarrow X_u \in G_u$ yani 2) sağlanır.

$$\Gamma_u(Y_u g_o)=\Gamma_u((X_m,\xi_g),g_o)$$

$$=\Gamma_u(X_m,\xi_g g_o)$$

$$=(m,\xi_g)g_o$$

$$=\Gamma_u(Y_u)g_o$$

olup 3) sağlanır. O halde Γ, MxG(M,G) de bir koneksiyon dur .

IV.2 YATAY VEKTÖR ALANLARI

Tanım IV.2.1 (Yatay vektör alanı) :

P(M,G) de Γ koneksiyonu verilsin. KerΓ ya yatay vektör alanlarının modülü ve KerΓ nın herbir elemanına bir yatay vektör alanı denir [2].

Açıkça

$$\Gamma:\mathcal{X}(P)\longrightarrow\mathcal{X}(P)$$

dir. Böylece,

$$\mathcal{X}(uG)=G(P)\oplus(\mathcal{X}(P)\cap\mathrm{Ker}\Gamma)$$

yazılabilir. Diğer taraftan $X_u \in \mathcal{X}(P)\cap\mathrm{Ker}\Gamma$ ise

$$R_g X_u = Y_{ug}$$

olmak üzere , $\Gamma o R_g = R_g o \Gamma$ olduğundan,

$$\Gamma(R_g X_u)=R_g(\Gamma(X_u))=R_g(0)=0$$

$$\Gamma(Y_{ug})=0$$

$$R_g(\mathcal{X}(P)\cap\mathrm{Ker}\Gamma)\subset(\mathcal{X}(P)\cap\mathrm{Ker}\Gamma)$$

yani $\mathcal{X}(P)\cap\mathrm{Ker}\Gamma$, R_g-invaryanttır. Diğer taraftan,

$$\Pi: P\longrightarrow M$$

nin türev dönüşümü ,

$$\Pi_*:\mathcal{X}(P)\longrightarrow\mathcal{X}(M)$$

nin çekirdeği G_u dur. Buna göre Π_*'ın $\mathcal{X}(P)\cap\mathrm{Ker}\Gamma$ ya kısıtlaması 1:1 ve örtendir .

Tanım IV.2.2 (Koneksiyon formu) :

$$w: T(P) \longrightarrow \mathfrak{X}_L(G)$$

$$w_u(X_u)=w_u(v(X_u)+h(X_u))=A\in\mathfrak{X}_L(G)$$

öyleki A nın karşılık geldiği temel vektör alanı $v(X_u)$ dur. Bu halde w ya koneksiyon formu denir [4].

Koneksiyon formunun özellikleri aşağıdaki teorem ile verilmiştir:

Teorem IV.2.1

1) $A\in\mathfrak{X}_L(G)$ nin karşılık geldiği temel vektör alanı $A^*\in\mathfrak{X}(P)$ ise $w(A^*)=A$ dır.

2) $w(X)=0 \Leftrightarrow X_u\in H_u$, $\forall u\in P$
Yani X yatay vektör alanıdır.

3) $w_{ug}(R_{g_*}|_u(X_u))=Ad(g^{-1})w_uX_u$ dır. Burada $u\in P, g\in G$ dir.

4) Koneksiyonlar ve koneksiyon formlar 1:1 karşılık gelirler [4].

İspat :

4),1),2) tanımdan açıktır.

3) i) X YATAY OLSUN :O zaman koneksiyon tanımından $R_{g_*}(X_u)=X_{ug}$ olup $R_{g_*}X$ de yataydır. Böylece 2) den eşitliğin iki tarafıda sıfırdır.

ii) X DÜŞEY OLSUN :O zaman $A\in\mathfrak{X}_L(G)$ nin karşılık geldiği temel vektör alanı X varsayılabilir. Böylece,

$a_t=\exp(tA)$ denirse $\{R_{a_t}\}$ 1-parametreli grubu X vektör alanını indirger. Diğer taraftan $\{R_{g^{-1}a_tg^{+1}}\}$ 1-parametreli grubu R_gX vektör alanını indirger. Halbuki,

$t \longrightarrow g^{-1}a_tg=L_{g^{-1}}R_g(a_t)$ dir. Bu ise $ad(g^{-1})A$ ya karşılık gelen gruptur. O halde,

$R_{g_*}X$, $ad(g^{-1})A$ ya karşılık gelen temel vektör alanıdır. Buradan,

$$w_{ug}(R_{g_*}X)=ad(g^{-1})A=ad(g^{-1})w_u\acute{X}_u$$

elde edilir .

Bu kısmı koneksiyonlar ile türevler arasındaki ilişkiyi vurguluyarak kapatacağız:

$E(M,F^n,G,P)$ birleştirilmiş asli lif demetini - gözönüne alalım. $P(M,G)$ de bir koneksiyon Γ verilsin.Bir $\alpha:[a,b]\longrightarrow M$ eğrisinin bir yatay lifti diye her nokta sındaki tanjant vektörü yatay tanjant vektör olan ve $\Pi\circ\alpha^*=\alpha$ olacak şekildeki $\alpha^*:[a,b]\longrightarrow P$ eğrisine denir[4]. Benzer düşünce ile,

$$PxF^n\longrightarrow E$$

$$(\alpha^*(t),\xi)\longrightarrow\alpha^*(t)\xi$$

olmak üzere ; $t\longrightarrow\alpha^*(t)\xi$, α nın E ye bir lifti olur. E=TM diyelim.

$$\alpha_t^{t+h}:\Pi_E^{-1}(\alpha(t+h))\longrightarrow\Pi_E^{-1}(\alpha(t))$$

paralel ötelemesi yardımıyle , $X\in\mathfrak{X}(M)$ olmak üzere

$$D^1_{\dot\alpha(t)}X=\lim_{h\to o}\frac{1}{h}\left[\alpha_t^{t+h}(X(\alpha(t+h))-X(\alpha(t))\right]$$

tanımlandığında, Tanım II.2.1 anlamda bir türev tanımlanmış olur. Tersine Tanım II.2.1 anlamda bir D türevi verilsin. O zaman, $X_u\in T_u(P)$ olmak üzere D_{X_u} nun $C^\infty(P,\mathbb{R})$ ye kısıtlamasını yine D_{X_u} ile gösterelim.

$$\Gamma(u)=\{D_{X_u}\,|\,X_u\in T_u(P)\ ;\ D,\ T(P)\text{ nin türevi}\}$$

tanımlıyalım. Γ , P(M,G) de bir koneksiyondur. Böylece Tanım II.2.1 ve Tanım IV.1.1 birbirlerine karşılık gelirler.

Sonuç olarak, P(M,G) de bir koneksiyon T(M) de bir türev ve T(M) de bir türev P(M,G) de bir koneksiyondemektir.

IV.3. Bir örnek $LS^1=S^1 x \mathbb{R}$

Bu kısımda düzlemde birim çember S^1 olmak üzere

$LS^1=S^1 x \mathbb{R}$

manifoldu üzerinde koneksiyon, yatay vektör alanları, koneksiyon formu hesaplanacaktır.

Bu kısım için [3] temel kaynak alınacaktır.

S^1 ile düzlemde birim çember gösterilsin.

$LS^1=S^1 x \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$

olmak üzere;

$$(LS^1 x \mathbb{R}) x \mathbb{R}^* \longrightarrow LS^1 x \mathbb{R}$$

$$(((x,b),a),g) \longrightarrow ((x,bg),g^{-1}a)$$

tanımlı dönüşüm $\mathbb{R}^*$ ın $LS^1 x \mathbb{R}$ üzerine sağ etkisidir. Ve

$((x,b),a) \in LS^1 x \mathbb{R}$

den geçen yörünge,

$$[((x,b),a)]=\{((x,bg),g^{-1}a) \mid g \in \mathbb{R}^*\}$$

dır. Bu elemanı ise $(x,a) \in LS^1 x \mathbb{R}$ elemanına eşleyebiliriz. Çünkü $\forall g \in \mathbb{R}^*$ ve $\forall b \in \mathbb{R}$ için bg elemanı $T_x S^1$ in bütün elemanlarını tarar.

$P=LS^1$ olmak üzere $P(S^1, \mathbb{R}^*)$

$u=(x,b) \in LS^1=S^1 x \mathbb{R}$

$LS^1 x \mathbb{R} \longrightarrow LS^1$

sağ etkisinin indirgediği $g \in \mathbb{R}^*$ için R_g dönüşümü

$$R_g : LS^1 \longrightarrow LS^1$$

$$u=(x,b) \longrightarrow R_g(u)=R_g(x,b)=(x,bg)$$

$$R_{g*} : T(LS^1) \longrightarrow T(LS^1)$$

$$((x,b),(p,q)) \longrightarrow ((x,bg),(p,qg))$$

$$
\begin{tikzcd}
(x,s) \arrow[dd] & S^1\times\mathbb{R} \arrow[r, "R_g"] \arrow[d] & S^1\times\mathbb{R} \arrow[d] & (x,sg) \arrow[dd] \\
& \mathbb{R}^2 \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^2 & \\
(t,s) \arrow[rrr] & & & (t,sg)
\end{tikzcd}
$$

$x=(\mathrm{Cos}t,\mathrm{Sin}t) \qquad S^1=\alpha(t)=\{(\mathrm{Cos}t,\mathrm{Sin}t) \mid t\in[0,2\pi]\}$

$$F_* = R_{g_*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}$$

$$R_{g_*}((x,b),(p,q))=((x,bg),(p,qg))$$

$$H_{(x,b)}=\{((x,b),(p,-\lambda bp)) \mid p\in\mathbb{R}\}$$

$$R_{g_*}(H_{(x,b)})=\{((x,bg),(p,-\lambda bpg)) \mid p\in\mathbb{R}\}$$

$$=H_{(x,bg)}$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\Pi_L : LM \longrightarrow M$$
$$(x,g) \longrightarrow \Pi_L(x,g)=x$$

$$\Pi_T : TM \longrightarrow M$$
$$(x,v) \longrightarrow \Pi_T(x,v)=x$$

Buna göre;

$$
\begin{tikzcd}
(x,b) \arrow[dd] & LS^1 \arrow[r, "\Pi_L"] \arrow[d] & S^1 \arrow[d] & x \arrow[dd] \\
& \mathbb{R}^2 \arrow[r, "F"] & \mathbb{R} & \\
t \arrow[rrr] & & & t
\end{tikzcd}
$$

$$F=[1 \;\; 0]$$

$$\Pi_{L_*} : TLS^1 \longrightarrow TS^1$$
$$((x,b),(p,q)) \longrightarrow \Pi_{L_*}((x,b),(p,q))=(x,p)$$

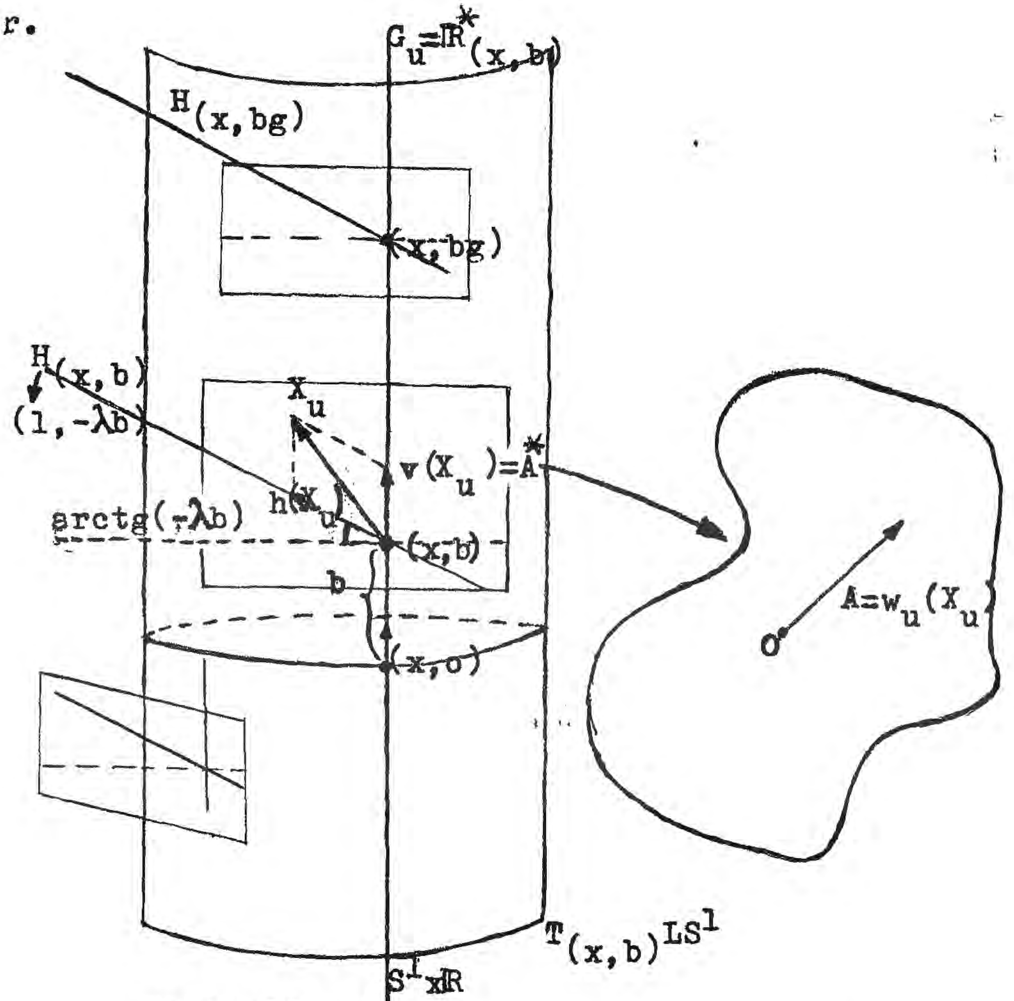
olup , Π_{L_*} ın $H_{(x,b)} \subset TLS^1$'e kısıtlaması yardımı ile

$$\Pi_{L_*} : H_{(x,b)} \longrightarrow T_x S^1$$

izomorfizmi elde edilir. Bu izomorfizm yardımıyle

$$\Pi_{L_*}\Big|_{(x,b)}((x,b),(p,-\lambda bp))=(\Pi(x,b),F_*\begin{bmatrix} p \\ -\lambda bp\end{bmatrix})=(x,p)$$

dir.



Şekil IV.3.1

λ=0ise $H_{(x,b)}$ yatay ----- olarak çizilen formu nu alır. Ayrıca

$$(p,\vec{v})+(p,\vec{u})=(p,\vec{u}+\vec{v})$$

$$((x,b),(p,-\lambda bp))+((x,b),(0,q+\lambda bp))=((x,b),(p,q))$$

yazılışı nedeniyle;

$$\Gamma: S^1 x\,\mathbb{R} \longrightarrow \text{Alt uzaylar}$$

$$(x,b) \longrightarrow \Gamma(x,b)=H_{(x,b)}$$

$$H_{(x,b)}\oplus \mathbb{R}^*_{(x,b)}=T_{(x,b)}LS^1$$

dir. ($G=\mathbb{R}^*$, $P=LS^1$)

Şimdi Γ ya karşılık koneksiyon formunu w ile gösterelim.

$$X\in \mathfrak{X}_L(\mathbb{R}^*)=\mathbb{R} \quad , \quad u=(x,b)$$

$$LS^1 \times \mathbb{R}^* \longrightarrow LS^1$$

dönüşümü yardımıyla,

$$\sigma_u : \mathbb{R}^* \longrightarrow LS^1$$

$$g \qquad \sigma_u(g)=ug=(x,b)g \ , \ F=\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{u*} : T_{1=e}\mathbb{R}^* \longrightarrow T_u LS^1$$

$$X_e=(1,k) \qquad \sigma_{u*}(X_e)=\sigma_{u*}(1,k)=((x,b),(0,bk))$$

olup k nın karşılık geldiği temel vektör alanı k^* ise

$$k^*_{(x,b)}=((x,b),(0,bk))$$

dir. Böylece,

$$w\big|_{(x,b)}((x,b),(p,q))=w\big|_{(x,b)}(((x,b),(p,\ -\lambda bp))$$

$$+((x,b),(0,q+\lambda bp)))$$

$$=w\big|_{(x,b)}((x,b),(0,q+\lambda bp))$$

$$=k=(q+\lambda bp)/b$$

elde edilir. Daha açık olarak

$$w:\mathfrak{X}(P) \longrightarrow \mathfrak{X}_L(G)$$

yani,

$$w:\mathfrak{X}(LS^1) \longrightarrow \mathbb{R}=\mathfrak{X}_L(\mathbb{R}^*)$$

$$((x,b),(p,q)) \longrightarrow w((x,b),(p,q))=(q+\ bp)/b$$

dir. Teorem IV.2.1 i bu özel halde kontrol edelim.

1) $w(k^*_{(x,b)})=w((x,b),(0,bk))=bk/b=k$

2) $w(k_{(x,b)})=0 \rightarrow (q+\lambda bp)/b=0$

$\rightarrow (q+\lambda bp)=0 \rightarrow q=-\lambda bp.$

K A Y N A K L A R

1. Hacısalihoğlu, H. , H. "Yüksek Diferensiyel Geometri"
Fırat Ünv. Fen Fak. Yayını, 1979

2. Kozsul, J. , L. "Theory of Connections"
Muniscripes.

3. Dodson,C.T.J. "Categories, Bundles and Spacetime Topolgy"
Shiva Pub. Ltd. 1980

4. Kobayashi, S. - Nomizu, K. "Foundations of Differential Geometry"
Vol. I
Interscience Publishers,1963.