T.C. ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK UZAYLARDA
ÖRTÜLÜŞ GRUPOİDİ

Hazırlayan :

Nazmi AYAS

Yöneten :

Doç.Dr.Şahin KOÇAK

Yüksek Lisans Tezi

Eskişehir - 1986

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarımın yönetimini kabul ederek bana bu tezi hazırlama olanağını sağlayan,çalışmam süresince yapıcı eleştirileri ile destek olan : Sayın Hocam Doç.Dr.Şahin KOÇAK'a öneri ve fikirlerinden yararlandığım Sayın Hocam Prof.Dr.Rüstem KAYA'ya,

Çalışmalarımda her konuda yardımlarını esirgemeyen Anadolu Üniversitesi Kütahya Meslek Yüksek Okulu Müdürü Sayın Öğretim Görevlisi Âdil ÖZKAN'a ve yine kaynak çevirmelerimde bana yardımcı olan mesai arkadaşlarımdan Öğretim Görevlisi Gülşen TOPRAK ve Okutman Erdal KAYIKÇI'ya teşekkürlerimi bildiririm.

Nazmi AYAS

İÇİNDEKİLER

0. GİRİŞ

Bu çalısmanın amacı, matematiğin hemen bütün dalları için bir lisan durumuna gelmekte olan kategoriler ve funktorlar hakkında genel bilgiler verdikten sonra, "örtülüş grupoidi" adını verdiğimiz özel bir kategori inşa. etmektir. Bu kategorinin topolojideki homotopluk ile yakın alakasından dolayı, bu kavram üzerinde de durmak gereğini duyduk. Aslında örtülüş grupodini homotopiden tamamen bağımsız olarak da tanımlayabilirdik. Ancak, topolojik homotopi, bu kategori için bir esin kaynağı teşkil etmektedir ve örtülüş grupoidi ile yakından ilgili olan örtülüş grubu, bazı klasifikasyon (sınıflandırma) problemlerinde yetersiz kalan temel grubun bir modifikasyonu olarak inşa. edilmiştir. (3) .
Klasik "sürekli yolların" yerine geçmek üzere düşünülen "küme zincirleri" , " sonsuzluğu ve sürekliliği " , "sonluluğa ve sürekliliğe" indirgemek acısından dikkat çekicidirler. Tek bir örtülüşün alınması durumunda burada şüphesiz enformasyon kaybı söz konusudur. Yani , verilen topolojik uzayın bütün özellikleri bu grupoide yansıyamaz. Ancak cebirsel topolojide daima karşılaşılan (hatta amaçlanan) bu kayıp, homöomorfluktan daha kaba bazı sınıflandırmalara imkan verdiğinden, aynı zamanda bir avantajdır.

Verdiğimiz örtülüş grupoidinin, klasik grupoidle ilişkişinin incelenmesi, araştırmağa değer bir problem olarak görülmektedir.

1. KATEGORİLER

Matematiğin farklı dallarında, araştırma konusu yapılan farklı matematiksel yapılar (strüktürler, sistemler v.s.) vardır. Örneğin cebirciler gruplar, halkalar, cisimler v.s. ile, geometriciler afin düzlemler, projektif düzlemler v.s. ile, topologlar topolojik uzaylarla, analizciler manifoldlar v.s. ile uğraşırlar.

Belli bir yapı tipi verildiğinde, daima, bu tipten iki özel yapı arasında bu yapıya özgü birtakım dönüşümler mevcuttur. Gruplar arasında grup homomorfizmleri topolojik uzaylar arasında sürekli fonksiyonlar, manifoldlar arasında türevlenebilir dönüşümler gibi.

Yapılar arasındaki dönüşümlerin temel bazı kompozisyon özellikleri vardır ve bunlar bütün yapı türleri için geçerlidir.

Eilenberg ve Maclane (2), yapı tiplerini, bir tipin temsilcileri arasındaki dönüşümleri ve bunların sağladığı temel özellikleri, kategori adını verdikleri yeni bir kavram altında toplamışlar ve kümeler teorisinin matematikteki rolüne benzer şekilde, bütün matematik dallarının hizmetine sunmuşlardır.

Şimdi kategori kavramını açıklamağa çalışalım. Bunun için topolojik uzayları ve topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonları gözönüne alalım. Bir topolojik uzaya bir "obje" adını verelim, ve iki topolojik uzay (yani iki obje) arasındaki bir sürekli fonksiyona bir " morfizm" adını verelim. X ve Y iki obje iseler, X ile Y arasındaki $(f:X\longrightarrow Y)$ sürekli fonksiyonların (morfizmlerin) kümesini $[X,Y]$ ile gösterelim. Şimdi X,Y,Z gibi üç obje verilmiş olsun. $f\in[X,Y]$ ve $g\in[Y,Z]$ ise (yani f X ile Y arasında ve g Y ile Z arasında birer sürekli fonksiyon iseler), bu takdirde (f,g) ikilisine X ile Z arasında bir sürekli fonksiyon (yani bir morfizm) karşılık getirilebilir:

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$

(g o f bildiğimiz bileşke fonksiyon !)

Fonksiyonların kompozisyonu (bileşkesi) olayını, şöyle bir fonksiyon (veya işlem?) olarak düşünebileceğimiz açıktır:

$$[X,Y] \times [Y,Z] \longrightarrow [X,Z]$$
$$(f,g) \longmapsto g \circ f$$

Eğer bileşkede yazım sırasının korunmasını istiyorsak, yukarıdaki fonksiyon yerine şu fonksiyonu kullanabiliriz:

$$[Y,Z] \times [X,Y] \longrightarrow [X,Z]$$
$$(g,f) \longmapsto g \circ f$$

Kompozisyonun en önemli özelliği asosyatifliğidir: X,Y,Z,T dört topolojik uzay (dört obje) ve

$$f : X \longrightarrow Y, \quad g : Y \longrightarrow Z, \quad h : Z \longrightarrow T$$

üç sürekli fonksiyon (üç morfizm) olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki özellik geçerlidir:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend left=50, "(h \circ g) \circ f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] \arrow[rrr, bend right=50, "h \circ (g \circ f)"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h \circ g"] & Z \arrow[r, "h"] & T
\end{tikzcd}$$

Kompozisyonun diğer önemli özelliği, birim elemanlara sahip olmasıdır. Herhangi bir $f \in [X,Y]$ (yani $f : X \longrightarrow Y$) morfizmi verildiğinde,

$$id_X : X \longrightarrow X \text{ ve } id_Y : Y \longrightarrow Y$$

X ve Y uzaylarının (objelerinin) birim fonksiyonları olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$X \xrightarrow{id_X} X \xrightarrow{f} Y \qquad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{id_Y} Y$$

$$f \circ id_X = f \qquad id_Y \circ f = f$$

Bu tanım ve özellikleri genelleştirmek için önümüzde küçük, fakat kümeler teorisinin temelleri açısından çok önemli bir engel vardır. Bu engel, bir matematiksel yapının temsilcilerinin (modellerinin, özel örneklerinin) bir küme oluşturmayacak kadar çok olmasıdır. Örneğin bütün topolojik uzayların kümesinden bahsedemeyiz. Bu nedenle, topolojik uzayların, grupların, vektör uzaylarının v.s. "sınıfından" söz edeceğiz, fakat "sınıflarla" kümeler gibi işlem yapmacağız.

Şimdi kategorinin genel tanımını verebiliriz. (1,4).
Bir kategori üç "unsurdan" ve iki koşuldan oluşur. Unsurlar, verilmesi gereken; koşullar ise sağlanması gereken şeylerdir. Kategorileri $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$,... gibi harflerle göstereceğiz.
Bir $\mathfrak{C}$ kategorisinin unsurları şunlardır.

1. Bir "objeler" sınıfı.
   Objeleri A,B,C,... gibi harflerle, objeler sınıfını $|\mathfrak{C}|$ ile göstereceğiz.
2. A,B gibi herhangi iki obje için, $[A,B]_{\mathfrak{C}}$ veya kısaca $[A,B]$ ile göstereceğimiz bir "morfizmler" kümesi.(Morfizm kümelerini ikişer, ikişer ayrık olarak şart koşmak, yani $(A,B)\neq(C,D)$ için $[A,B]\cap[C,D]=\phi$ olmasını istemek teknik açıdan yararlıdır.Ancak bu böyle değilse bile küçük bir manipülasyonla sağlanabilir. $[A,B]$ morfizm kümeleride genel olarak bir küme değil, sadece bir sınıf oluştururlar.)
3. Morfizmlerin kompozisyonu, yani A,B,C gibi herhangi üç obje için bir

   $$[B,C] \times [A,B] \longrightarrow [A,C]$$

   fonksiyonu.

   $\alpha \in [A,B]$, $\beta \in [B,C]$ için (β,α) ikilisinin görüntüsünü $\beta \circ \alpha$ ile göstereceğiz.

Şimdi sağlanmasını şart koşacağımız koşulları yazalım:

1. A, B, C, D herhangi dört obje ve $\alpha \in [A,B]$, $\beta \in [B,C]$, $\gamma \in [C,D]$ olmak üzere

$$\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$$

eşitliği sağlansın.

2. Her A objesi için (id_A ile göstereceğimiz) öyle bir $id_A \in [A,A]$ morfizmi mevcut olsunki, B ve C herhangi iki obje olmak üzere, her $\alpha \in [A,B]$ için $\alpha \circ id_A = \alpha$ ve her $\gamma \in [C,A]$ için $id_A \circ \gamma = \gamma$ eşitlikleri sağlansın. id_A morfizmine A objesinin birim morfizmi denir. Her objenin birim morfizminin tekliği hemen görülebilir. Demek ki bir kategorinin verilmiş olması için, objelerin, morfizmlerin ve morfizmlerin kompozisyonunun verilmesi, kompozisyonun asosyatif olması ve her objenin bir birim morfizme sahip olması gerekiyor.

<u>ÖRNEKLER</u>

i) Kümeler kategorisi.
Objeler : Kümeler
Morfizmler : $[A,B] = \{f : A \longrightarrow B$ fonksiyonları$\}$
Kompozisyon: (normal) fonksiyon bileşkesi

ii) Gruplar kategorisi.
Objeler : Gruplar
Morfizmler : $[A,B] = \{f : A \longrightarrow B$ grup homomorfizmleri$\}$
Kompozisyon : fonksiyon bileşkesi

iii) Abelyen gruplar kategorisi.
Objeler : Abelyen gruplar
Morfizmler : $[A,B] = \{f : A \longrightarrow B$ grup homomorfizmleri$\}$
Kompozisyon : Fonksiyon bileşkesi.

iV) Bir $\mathbb{K}$ cismi üzerindeki (sol) vektör uzayları kategorisi.
Objeler : $\mathbb{K}$ - vektör uzayları
Morfizmler : $[A,B] = \{f : A \longrightarrow B$ $\mathbb{K}$ - Lineer dönüşümleri
Kompozisyon : Fonksiyon bileşkesi.

V) Topolojik uzaylar kategorisi
Objeler : Topolojik uzaylar

Morfizmler : $[A,B]=\{f : A \longrightarrow B$ sürekli fonksiyonları$\}$
Kompozisyon : Fonksiyon bileşkesi.

VI) Kompakt topolojik uzaylar kategorisi
Objeler : Kompakt topolojik uzaylar
Morfizmler : $[A,B]=\{f : A \longrightarrow B$ sürekli fonksiyonları$\}$
Kompozisyon : Fonksiyon bileşkesi.

Benzer yüzlerce örneğin verilebileceği açıktır ve bu da kategori kavramının ne kadar kapsamlı olduğunu göstermektedir. Bir $\mathcal{C}$ kategorisi verildiğinde, A ve B iki obje olmak üzere, bir $\alpha \in [A,B]$ morfizmi, sembolik olarak

$$\alpha : A \longrightarrow B \text{ veya } A \xrightarrow{\alpha} B$$

şeklindede gösterilir. Ancak genel olarak böyle bir morfizmi A' dan B' ye bir fonksiyon olarak düşünmemek gerekir. Bunun örneklerini ileride vereceğiz. Bir morfizm, (A,B) ikilisine karşılık getirilmiş bir kümenin herhangi bir elemanından başka bir şey değildir.

Objelerin denkliği :

Bir matematiksel yapı tipinin iki özel örneğinin (modelinin) " esas itibarıyla " aynı örnek olmaları, matematiğin çok temel bir kavramıdır. Buna örnek olarak, gruplardaki izomorfizm ve topolojik uzaylardaki homöomorfizm kavramlarını verebiliriz. Bu kavramı genel olarak tanımlamak için, morfizmler fonksiyon olmak zorunda olmadıklarından, " Bire-bir ve örtenlik " kavramlarını kullanamayız. Ancak klasik durumlarda dahi, denklik kavramını "simetrik" olarak tanımlamak daha yararlıdır. Örneğin X ve Y gibi iki topolojik uzayın denkliğini (homöomorfluğunu), bire-bir, örten, sürekli ve tersi de sürekli bir

$$f : X \longrightarrow Y$$

fonksiyonunun varlığını şart koşmak yerine, şöyle de tanımlıyabiliriz :

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{ve} \quad g : Y \longrightarrow X$$

gibi öyle iki sürekli fonksiyon mevcut olsunki,

$$g \circ f = id_X \text{ ve } f \circ g = id_Y$$

eşitlikleri sağlansın.

Bu ikinci tanım, kategorilere aktarılmak için çok uygundur. Bir $\mathfrak{C}$ kategorisi ve A,B gibi iki obje verilsin. Eğer

$$\beta \circ \alpha = id_A \quad \text{ve} \quad \alpha \circ \beta = id_B \quad \text{olacak şekilde}$$

$$\alpha \in [A,B] \text{ ve } \beta \in [B,A] \quad \text{morfizmleri mevcutsa,}$$

A ve B objelerine "denk" iki objedir denir. Bu durum, sembolik olarak şöyle de gösterilir :

$$\beta \circ \alpha = id_A \circlearrowright A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} B \circlearrowleft id_B = \alpha \circ \beta$$

$$A \approx B$$

α(β) morfizmine, A' dan B' ye (B' den A'ya) bir " denklik morfizmi ", veya kısaca, bir " denklik " adı verilir

Objeleri bir küme oluşturan bir kategoriye "küçük bir kategori" adı verilir.

Bütün morfizmleri birer denklik morfizmi olan küçük bir kategoriye bir "grupoid" adı verilir.

Önemli iki grupoid örneğini 4 ve 5.bölümlerde göreceğiz.

2. FUNKTORLAR

Bir matematiksel yapı tipinin iki modeli arasında, bu yapı tipinin özelliklerini dikkate alan dönüşümler büyük önem taşırlar. Gruplar arasında, homomorf olmayan; vektör uzayları arasında, lineer olmayan ; topolojik uzaylar arasında, sürekli olmayan dönüşümlerin pek önemi yoktur.

Kategoriler de bir matematiksel yapı tipi olarak düşünülebilirler ve kategoriler arasında, kategorilerin özelliklerin dikkate alan "dönüşümler", şüphesiz önem taşıyacaklardır. Kategoriler arası bir dönüşüme bir "funktor" adı verilir. Şimd bu kavramı açıklamağa çalışalım.

$\mathfrak{C}$ ve $\mathfrak{D}$ gibi iki kategori verilsin.

Bir $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ funktoru, iki unsur ve iki koşuldan olusur :

1. $\mathfrak{C}$ kategorisinin her A objesine, $\mathfrak{D}$ kategorisinden bir D= F (A) objesi karşılık getirilmelidir.

2. $\mathcal{C}$ kategorisinin her $\alpha \in [A,B]$ morfizmine, $\mathcal{D}$ kategorisinden bir $F(\alpha) \in [F(A), F(B)]$ morfizmi karşılık getirilmeli, yani her (A,B) ikilisi için bir

$$F_{A,B} : [A,B] \longrightarrow [F(A), F(B)]$$

fonksiyonu verilmelidir.

Şimdi, sağlanması gereken şartları yazalım.

1. A,B ve C, $\mathcal{C}$ kategorisinin objeleri olmak üzere, $\alpha \in [A,B]$ ve $\beta \in [B,C]$ için

$F(\beta \circ \alpha) = F(\beta) \circ F(\alpha)$ olmalıdır. Bunu şematik olarak şöyle gösterebiliriz.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\beta \circ \alpha"'] & B \arrow[r, "\beta"] & C \end{tikzcd} \longrightarrow \begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(\alpha)"] \arrow[rr, bend right, "F(\beta \circ \alpha) = F(\beta) \circ F(\alpha)"'] & F(B) \arrow[r, "F(\beta)"] & F(C) \end{tikzcd}$$

2. Birim morfizmler, birim morfizmlere gönderilmelidir yani A, $\mathcal{C}$ kategorisinin herhangibir objesi olmak üzere,

$$F(id_A) = id_{F(A)}$$

olmalıdır.

$$A \xrightarrow{id_A} A \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(id_A) = id_{F(A)}} F(A)$$

Aşikar funktor örnekleri hemen verilebilirse de, ciddi funktor örnekleri genellikle oldukça komplikedir. Önemli bir funktor örneğini bundan sonraki bölümde vereceğiz.

Funktorların yararı, bir kategorideki denklik problemini bir başka kategoriye aktararak incelemeye imkan vermelerinde yatar. Şimdi bunu açıklamaya çalışalım.

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ iki kategori ve $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ bir funktor olsun. A ve B, $\mathcal{C}$'ye ait denk iki obje olsunlar. Demekki, $\beta \circ \alpha = id_A$ ve $\alpha \circ \beta = id_B$ olacak sekilde $A \xrightarrow{\alpha} B$ ve $B \xrightarrow{\beta} A$ morfizmleri mevcuttur. F funktorunu bu obje ve morfizmlere uygulayacak olursak,

$$F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \quad \text{ve} \quad F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(A)$$

morfizmleri için,

$$F(\beta) \circ F(\alpha) = F(\beta \circ \alpha) = F(id_A) = id_{F(A)} \quad \text{ve}$$

$$F(\alpha) \circ F(\beta) = F(\alpha \circ \beta) = F(id_B) = id_{F(B)}$$

eşitlikleri elde edilir ki, bunlarda $F(A)$ ve $F(B)$ objelerinin $\mathcal{D}$ kategorisi içinde denk olduklarını gösterir. ($F(\alpha)$ ve $F(\beta)$ morfizmleride denklik morfizmleridir.)

Buradan şu önemli sonucu çıkarabiliriz :
A ve B objelerinin F funktoru altındaki $F(A)$ ve $F(B)$ görüntüleri $\mathcal{D}$ içinde denk değilseler, A ve B objeleride C içinde denk olamazlar. (çünkü A ve B denk olsalardı, $F(A)$ ve $F(B)$ denk olacaklardı.)

Bu metod, özellikle cebirsel topolojinin, iki topolojik uzayın homöomorf (veya biraz sonra tanımlayacağımız anlamda, homotop) olmadığını göstermek için başvurduğu başlıca yoldur.

Ancak $F(A)$ ve $F(B)$ nin denk olmalarından, A ve B ninde denk olacağı sonucunu çıkaramayız. Demekki, bu metod daha çok negatif ispatlara yatkındır.

<u>NOT</u> : Bizim tanımladığımız funktor, "kovaryant" denilen funktor türüdür. Bir de "kontravaryant" denilen funktor türü vardır. Bunun, kovaryant funktordan farkı, $F(\alpha)$ görüntü morfizminin $F(B) \longrightarrow F(A)$ şeklinde olmasıdır. Bu durumda, $\alpha \in [A,B]$ ve $\beta \in [B,C]$ morfizmlerinin bileşkesinin görüntü morfizmi için şu şartı koşmak gerekir.

$$F(\beta \circ \alpha) = F(\alpha) \circ F(\beta)$$

3. HOMOTOPİ

İki topolojik uzayın homöomorf olup olmadıklarına karar verilebilmesi, genel olarak, zor bir problemdir. Bu da, iki topolojik uzay arasında, genel olarak, çok fazla sürekli fonksiyonun varlığından kaynaklanmaktadır. Bu nedenle, sürekli fonksiyonlar arasında bir denklik bağıntısı tanımlanması suretiyle, bunların "sayısının" azaltılması, topolojide büyük önem taşır. Aşağıda, objeleri gene topolojik uzaylar olan fakat morfizmleri, sürekli fonksiyonlar yerine , sürekli fonksiyonların belirli bir bağıntı altındaki denklik sınıfları olan bir kategori tanımlayacağız. (5,6).

3.1 HOMOTOPİ KATEGORİSİ

X ve Y gibi sabit iki topolojik uzayı gözönüne alalım. I ile, standart topolojiyi taşıyan $[0,1]$ aralığını gösterelim.

Şimdi $f : X \longrightarrow Y$ ve $g : X \longrightarrow Y$ gibi iki sürekli fonksiyon verilsin.

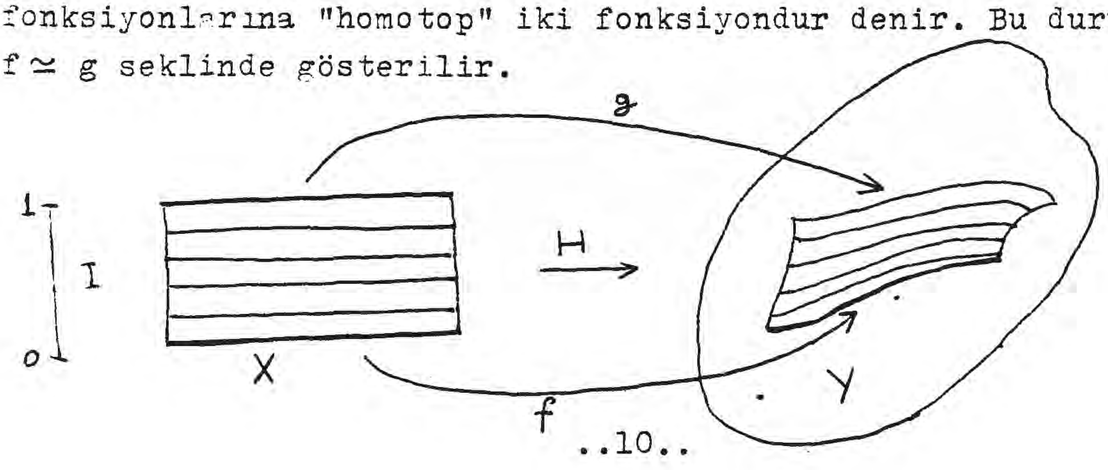
$X \times I$ ile, X ve I topolojik uzaylarının çarpımını gösterelim. Eğer,

$$H : X \times I \longrightarrow Y$$

$$H(x,0) = f(x)$$

$$H(x,1) = g(x)$$

olacak şekilde, sürekli bir H fonksiyonu varsa, f ve g fonksiyonlarına "homotop" iki fonksiyondur denir. Bu durum $f \simeq g$ seklinde gösterilir.



Şekildende anlaşıldığı üzere, iki fonksiyonun homotop olması, kabaca , bunların birbirlerine "deforme" edilebilmeleri olarak düşünülebilir.

Homotopluk, $[X,Y]$ kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Çünkü kolaylıkla

1. $f \simeq f$
2. $f \simeq g \Longrightarrow g \simeq f$
3. $f \simeq g,\ g \simeq h \Longrightarrow f \simeq h$

olduğu gösterilebilir.

Bir $f \in [X,Y]$ fonksiyonunun, homotopi bağıntısı altındaki denklik sınıfı $[f]$ ile gösterilir.

$[X,Y]$ sürekli fonksiyonlar kümesinin, homotopi bağıntısı altındaki denklik sınıfları kümesini $[X,Y]_{\mathfrak{h}}$ ile gösterelim.

Simdi $\mathfrak{h}$ homotopi kategorisini verebiliriz :

1. Objeler : Topolojik uzaylar
2. Morfizmler : (X,Y) çifti için $[X,Y]_{\mathfrak{h}}$
3. Kompozisyon : $[f] \in [X,Y]_{\mathfrak{h}}$ ve $[g] \in [Y,Z]_{\mathfrak{h}}$ için
   $[g] \circ [f] = [g \circ f] \in [X,Z]_{\mathfrak{h}}$

(Kompozisyonun iyi tanımlı olduğunun, yani söz konusu denklik sınıfları için farklı temsilciler seçildiğinde sonucun değişmeyeceğinin gösterilmesi gerekir. Gerçekten $g \simeq g'$, $f \simeq f'$ için $g \circ f \simeq g' \circ f'$ dür. Bu özellik ve kompozisyonun sağlaması gereken iki şart, tanımın basit neticeleri olarak gösterilebilir.

Demek ki homotopi kategorisinde bir morfizm, bir fonksiyon değil, bir fonksiyonlar kümesi oluyor.

Bu kategori içinde denk olan iki topolojik uzaya homotop iki uzay adı verilir. Bunu açık olarak yazacak olursak, X ve Y uzaylarının homotop olmaları demek,

$g \circ f \simeq id_X$ ve $f \circ g \simeq id_Y$ olacak şekilde iki

$f : X \longrightarrow Y$ ve $g : Y \longrightarrow X$

fonksiyonunun mevcut olması demektir.

3.2 NOKTALI UZAYLAR KATEGORİSİ ve Noktalı Homotopi kategorisi

Homotopide uzaylar içinde referans noktalarının seçilmesi ve bunların, fonksiyonların deformasyonu sırasında sabit kalması, önemli bir rol oynar. Şimdi kısaca bu hususu açıklayalım.

$X \neq \emptyset$ bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olmak üzere (X,x_0) ikilisine noktalı (veya noktalanmış) bir topolojik uzay denir. (X,x_0) ve (Y,y_0) noktalı iki uzay olsunlar. Bir $f : X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonu, $f(x_0) = y_0$ şartını sağlıyorsa, böyle bir fonksiyona, (X,x_0) ve (Y,y_0) noktalı uzayları arasında bir fonksiyondur denir.
Objeleri noktalı uzaylar, morfizmleri de noktalı uzaylar arasındaki fonksiyonlar olan kategoriye (bileşke normal fonksiyon bileşkesi) noktalı uzaylar kategorisi denir.

$$f : X \longrightarrow Y \,, \quad f(x_0) = y_0$$

$$\text{ve} \quad g : X \longrightarrow Y \,. \quad g(x_0) = y_0$$

sürekli fonksiyonları arasında bir "noktalı homotopi" şöyle tanımlanır :

$H : X \times I \longrightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ve

i) $H(x,0) = f(x)$
ii) $H(x,1) = g(x)$
iii) $H(x_0,t) = y_0 \quad (t \in I)$.

Objeleri noktalı uzaylar, morfizmleri de noktalı uzaylar arasındaki fonksiyonların noktalı homotopi sınıfları olan kategoriye (bileşkeler gene normal fonksiyon bileşkelerinin denklik sınıfları) noktalı homotopi kategorisi denir ve $\mathfrak{h}^*$ ile gösterilir.

3.3 TEMEL GRUP FUNKTORU

Şimdi, cebirsel topolojinin en eski (ve hala önemli) funktoru olan ve noktalı homotopi kategorisinden gruplar kategorisine giden, temel grup funktorunu tanımlayabiliriz. Bunun için önce yol tanımını hatırlayalım.

X bir topolojik uzay olmak üzere,

$$f : I \longrightarrow X \qquad (I = [o,1])$$

şeklindeki bir sürekli fonksiyona X içinde bir yoldur denir.

$f(o) = a$, $f(1) = b$ ise ($a, b \in X$), bu yola a'dan b'ye (veya a ile b arasında) bir yoldur denir. a'ya başlangıç, b'ye bitiş noktası adı verilir. $f(o) = f(1)$ ise, bu yola kapalı bir yoldur denir.

Şimdi, noktalanmış bir (X, x_o) uzayını gözönüne alalım. X uzayı içinde ve $f(o) = f(1) = x_o$ özelliğini taşıyan bir yola, (X, x_o) noktalı uzayı içinde kapalı bir yoldur diyeceğiz. Gösterimi değiştirerek, böyle yollar için $\alpha, \beta, \ldots$ gibi sembolleri kullanalım. Bu yollar için, normal homotopi veya noktalı homotopiye göre biraz daha kısıtlı olan (ve relatif homotopi adı verilen biraz daha genel bir homotopi kavramının bir özel hali olan) aşağıdaki homotopi kavramı daha önemlidir:

α, β (X, x_o) noktalı uzayı içinde iki kapalı yol olsunlar. yani

$$\alpha : I \longrightarrow X, \qquad \alpha(o) = \alpha(1) = x_o \qquad \text{ve}$$

$$\beta : I \longrightarrow X, \qquad \beta(o) = \beta(1) = x_o$$

olsun.

Eğer

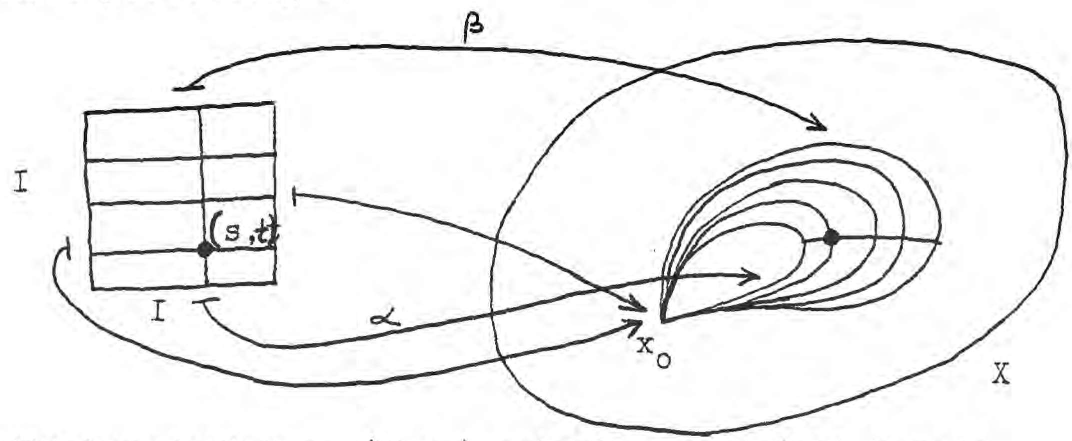
$$H : I \times I \longrightarrow X$$

$$H(s,o) = \alpha(s) \qquad (s \in I)$$

$$H(s,1) = \beta(s) \qquad (s \in I)$$

$$H(o,t) = H(1,t) = x_o \qquad (t \in I)$$

olacak şekilde sürekli bir H fonksiyonu varsa, α ve β yollarına relatif homotoptur diyeceğiz ve bu durumu $\alpha \overset{r}{\simeq} \beta$ şeklinde göstereceğiz.



Relatif homotopluğun, (X,x_o) noktalı uzayındaki kapalı yolların kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu kolaylıkla görülebilir. Böyle bir α yolunun denklik sınıfını $[\alpha]$ ve bütün denklik sınıflarının kümesini $\pi(X,x_o)$ ile gösterelim. (Bunun π sayısı ile alakası olmayıp, bu tarihsel olarak yerleşmis bir gösterimdir.)

$\pi(X,x_o)$ kümesi üzerinde aşağıdaki şekilde bir ikili işlem tanımlanabilir ;

Önce, (X,x_o) içinde α ve β gibi (relatif homotop olmaları gerekmeyen !) herhangi iki kapalı yol verilsin. Aşağıdaki yola, bu yolların çarpımı diyeceğiz ve $\alpha \cdot \beta$ ile göstereceğiz :

$$\gamma : I \longrightarrow X$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & o \leq t \leq 1/2 \quad \text{için} \\ \beta(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \quad \text{için} \end{cases}$$

$$\gamma = \alpha \cdot \beta$$

(γ yolu, α ve β yollarının ardarda ve iki misli hızla (!) dolaşılmasıyla bulunan yoldur.)

Şimdi, $\pi(X,x_o)$ kümesi üzerindeki ($*$ ile göstereceğimiz) ikili işlemi tanımlayabiliriz. $[\alpha],[\beta] \in \pi\ (X,x_o)$ olmak üzere

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha \cdot \beta]$$

diyelim. Bu işlemin iyi tanımlı olduğu ve $\pi(X,x_o)$ kümesini (genel olarak komutatif olmayan) bir gruba dönüştürdüğü gösterilebilir. Buna (X,x_o) noktalı uzayının temel grubu denir. Böylece, noktalı her uzaya bir grup karşılık getirilmiş oluyor.

(X,x_o) ve (Y,y_o) gibi iki noktalı uzay ve bir $f : X \longrightarrow Y$, $f(x_o) = y_o$, fonksiyonu verildiğinde bu fonksiyonun noktalı homotopi sınıfına, aşağıdaki şekilde bir grup homomorfizmi karşılık getirilebilir:

$$\pi(X,x_o) \longrightarrow \pi(Y,y_o)$$

$$[\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$$

Bu tekabül, noktalı uzayların homotopi kategorisinden (noktalı homotopi kategorisinden) gruplar kategorisine bir funktordur.

Bu funktorun küçük bir kusuru, topolojik uzaylar yerine, noktalı topolojik uzaylarla çalışmasıdır.

Bunu gidermenin bir yolu,noktalı uzaylara grup karşılık getirmek yerine, uzaylara grupoid karşılık getirmektir. Bu tekabülün bir funktor olarak formülasyonu biraz daha ağdalıdır. Çünkü objeleride birer kategori olan bir kategorinin (yani bir kategoriler kategorisinin) kullanımını gerektirir. Bu nedenle bu konstrüksiyonu sadece sabit tutulan bir topolojik uzay için vereceğiz.

3.4 TEMEL GRUPOİD

X bir topolojik uzay olsun. Buna, temel grupoid adı verilen bir grupoid, yani bütün morfizmleri birer denklik morfizmi olan bir küçük kategori karşılık getireceğiz. Bu amaçla önce noktalı uzaylardaki kapalı yolların relatif homotopluğunu, X içinde başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan (fakat bunların çakışması gerekmeyen) iki yol için ifade edelim :

$$\alpha : I \longrightarrow X \ , \quad \alpha(o) = a \ , \alpha(1) = b$$

$$\beta : I \longrightarrow X \ , \quad \beta(o) = a \ , \beta(1) = b$$

gibi iki yola, eğer aşağıdaki özellikleri taşıyan sürekli bir H fonksiyonu varsa, relatif homotopturlar denir.

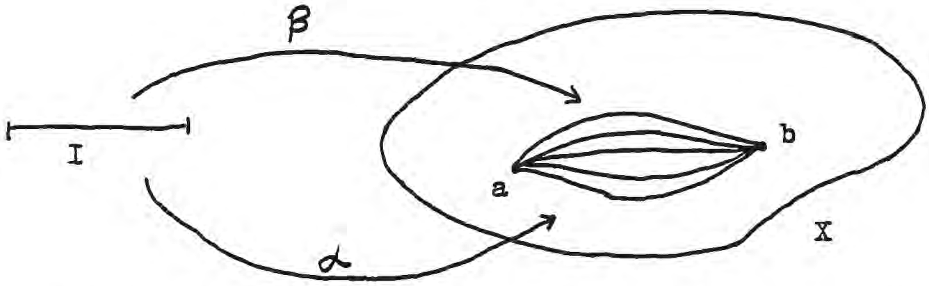
$$H : I \times I \longrightarrow X \ ,$$

$$H(s,o) = \alpha(s) \ , \quad s \in I \text{ için}$$

$$H(s,1) = \beta(s) \ , \quad s \in I \text{ için}$$

$$H(o,t) = \alpha(o) = \beta(o) = a \ , \quad t \in I \text{ için}$$

$$H(1,t) = \alpha(1) = \beta(1) = b \ , \quad t \in I \text{ için.}$$



Bu anlamdaki relatif homotoplukda gene a ile b arasındaki yolların kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. α yolunun denklik sınıfını gene $[\alpha]$ ile gösterelim. Şimdi X topolojik uzayının temel grupoidini tanımlayabiliriz :

Objeler : X uzayının noktaları.

Morfizmler : a,b gibi iki obje için, bu iki nokta arasındaki yolların denklik sınıfları,

Morfizmlerin kompozisyonu : a ile b objeleri arasında bir $[\alpha]$ morfizmi ve b ile c objeleri arasında bir $[\beta]$ morfizmi verilsin.

$$\gamma : I \longrightarrow X$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \text{ için} \\ \beta(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \text{ için} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$[\alpha] \circ [\beta] = [\gamma]$$

diyelim.

(Burada $[\beta] \cdot [\alpha]$ gösterimi yerine $[\alpha] \cdot [\beta]$ gösterimini seçmemiz tarihsel ve pratik nedenlerledir.)

Bu kompozisyonun assosyatifliği, her obje için birim morfizmlerin varlığı (sabit yolların denklik sınıfları) ve her morfizmin bir denklik morfizmi olduğu gösterilebilir. ve objeler de bir küme oluşturduğundan bu kategori bir grupoiddir. (5).

4. ÖRTÜLÜŞ GRUPOİDİ

Bir X topolojik uzayı ve bunun bir $\mathcal{U}$ açık örtülüşü verilsin. Örtülüşe ait açık kümeleri U,V,W,... gibi harflerle göstereceğiz. Aşağıda, temel grupoidle büyük paralellik gösteren ve noktalar yerine örtülüşün elemanlarının ve yollar yerine, örtülüş elemanlarından oluşturulan ve aşağıda tanımlayacağımız zincirlerin alındığı bir grupoid inşa edeceğiz.

4.1 ZİNCİRLER VE HOMOTOPLUK

U ve V, $\mathcal{U}$ örtülüşüne ait iki açık küme olsunlar. ($U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{U}$)

$i = 1,2,\ldots,n$ için $U_i \in \mathcal{U}$ olmak üzere,

$U, U_1, U_2, \ldots U_n, V$

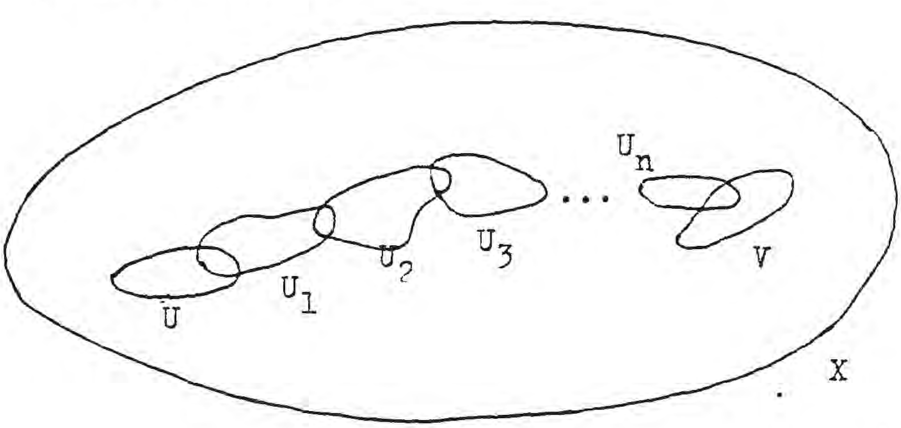
kümeler dizisini gözönüne alalım. Eğer,

$U \cap U_1 \neq \phi$, $U_1 \cap U_2 \neq \phi$, $U_2 \cap U_3 \neq \phi$, ... $U_n \cap V \neq \phi$

koşulları sağlanıyorsa, bu kümeler dizisine U ile V arasında bir zincirdir diyeceğiz ve bu zinciri

$U\ U_1\ U_2\ U_3\ U_4 \ldots U_n\ V$

şeklinde göstereceğiz.



U ve V kümelerine, $U\ U_1\ U_2\ U_3 \ldots U_n\ V$ zincirinin başlangıç ve bitiş kümeleri diyeceğiz. U ile V arasında genel olarak pek çok zincir olacaktır. ve bu nedenle, yollar için başvurulan usüle benzer şekilde, uygun bir denklik bağıntısı yardımıyla, bu zincirlerin daha az sayıda belli tiplere indirgenmesi gerekir. Bu amaçla aşağıda önce, bir zincir üzerinde yapılabilecek iki değişiklik tanımlayacak, sonra böyle değişikliklerin ard arda uygulanmasıyla ortaya çıkan bir zincir homotopluğu kavramı vereceğiz.

Şimdi $U\ U_1\ U_2\ U_3 \ldots U_n\ V$ zincirini gözönüne alalım. Formülasyon kolaylağı açısından, geçici olarak, $U = U_o$, $V = U_{n+1}$ diyelim.

1. Zincirden bir eleman atılması.

$U_i\ U_{i+1}\ U_{i+2}$ şeklindeki bir zincir parçası için

$U_i \cap U_{i+1} \cap U_{i+2} \neq \Phi$

oluyorsa, zincirden U_{i+1} elemanını atalım ve geri kalanların sırasını muhafaza edelim. Bu taktirde

$$U\ U_1\ U_2 \ldots U_{i-1}\ U_i\ U_{i+2}\ U_{i+3} \ldots U_n\ V$$

dizisinin gene U ile V arasında bir zincir olacağı açıktır. Bu işleme, verilen zincire uygulanan 1. türden bir elemanter deformasyon diyeceğiz.

2. Zincire bir eleman katılması.

$U_o\ U_1\ U_2 \ldots U_n\ U_{n+1}$ zincirinin $U_i\ U_{i+1}$ şeklinde bir parçasını gözönüne alalım ve U örtülüşe ait bir küme olsun.

Eğer

$$U_i \cap U^* \cap U_{i+1} \neq \phi$$

ise, verilen zincirde U_i ile U_{i+1} arasında U^* kümesini katalım :

$$U \; U_1 \; U_2 \; \dots \; U_i \; U^* \; U_{i+1} \; \dots \; U_n \; V \; .$$

Bu işleme, verilen zincire uygulanan 2. türden bir elemanter deformasyon diyeceğiz.

Zincir Homotopluğu :

U ile V kümeleri arasında,

$U \; U_1 \; U_2 \; \dots \; U_n \; V$ ve $U \; U'_1 \; U'_2 \; \dots \; U'_m \; V$

şeklinde iki zincir verilmiş olsun. Eğer, birinci zincirden başlanarak, bu zincire istenilen sırada ve sonlu tane 1. türden veya 2. türden elamenter deformasyon uygulanmak suretiyle ikinci zincir elde edilebiliyorsa, bu iki zincire homotoptur diyeceğiz.

Homotop olma, U ile V arasındaki zincirlerin oluşturduğu küme üzerinde bir denklik bağıntısıdır :

i) Her zincirin kendine homotop olduğu açıktır. (Sıfır tane elamenter deformasyonla her zincir kendisine dönüsür!)

ii) Bir zincir sonlu tane elamenter deformasyonla ikinci bir zincire dönüştürülebiliyorsa, ikinci zincirde aynı sayıda elamenter deformasyonla birinci zincire dönüştürülebilir. Bunun için, elaman atma ve elaman katma işlemlerini ters sırada uygulamak yeter.

iii) Bir zincir elamanter deformasyonlarla ikinci bir zincire, ikinci zincirde gene elamanter deformasyonlarla üçüncü bir zincire dönüştürülebiliyorsa, bu deformasyonların peşpeşe uygulanmasıyla ilk zincirin üçüncü zincire dönüştürülebileceği açıktır.

Demek ki zincir homotopluğu gerçekten bir denklik bağıntısıdır ve böylece U ile V arasındaki zincirler bir takım denklik sınıflarına ayrılırlar.

Bir $U\ U_1\ U_2 \dots U_n\ V$ zincirinin denklik sınıfını

$$[U\ U_1\ U_2 \dots U_n\ V]$$

şeklinde göstereceğiz.

Şimdi artık örtülüş grupoidini tanımlayabiliriz.

4.2 ÖRTÜLÜŞ GRUPOİDİ

X Bir topolojik uzay ve $\mathcal{U}$ bu uzayın bir (açık) örtülüşü olsun. $\phi \notin \mathcal{U}$ olsun. Aşağıdaki şekilde bir kategori tanımlayıp, bunun bir grupoid olduğunu göstereceğiz.

Objeler : $\mathcal{U}$ Örtülüşünün elamanları. (U, V, ...).

Morfizmler : $U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{U}$ için U ile V arasındaki zincirlerin, homotopluk bağıntısına göre denklik sınıfları.

Morfizmlerin Kompozisyonu : $U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{U}, W \in \mathcal{U}$ olsun ve U ile V arasında bir $[U\ U_1\ U_2 \dots U_n\ V]$ morfizmi, V ile W arasında bir $[V\ V_1\ V_2 \dots V_m\ W]$ morfizmi verilsin. Bu iki morfizmin bileşkesi olarak, U ile W arasındaki

$$[U\ U_1\ U_2 \dots U_n\ V\ V_1\ V_2 \dots V_m\ W]$$

morfizmini alalım :

$$[U\ U_1 \dots U_n\ V] \circ [V\ V_1 \dots V_m\ W] = [U\ U_1 \dots U_n\ V\ V_1 \dots V_m\ W]$$

(Burada da bileşke gösteriminde, klasik grupoiddeki sırayı tercih ediyoruz.)

Bu bileşkenin iyi tanımlı olduğu hemen görülebilir. Yani, $U\ U_1' \dots U_n'\ V$ zinciri, $[U\ U_1 \dots U_n\ V]$ morfizminin (denklik sınıfının) başka bir temsilcisi, $V\ V_1' \dots V_m'\ W$

zinciri de $[V\ V_1 \ldots V_m\ W]$ morfizminin başka bir temsilcisi ise, $U\ U_1' \ldots U_n',\ V\ V_1' \ldots V_m',\ W$ zinciri ile $U\ U_1 \ldots U_n V V_1 \ldots V_m W$ zinciri homotopturlar; dolayısıyle bunların denklik sınıfları eşittir :

$$[U\ U_1' \ldots U_n' V\ V_1' \ldots V_m'\ W] = [U\ U_1 \ldots U_n\ V\ V_1 \ldots V_m\ W] .$$

(Bunu görmek için, temsilcileri birbirine dönüştüren elamanter deformasyonların, önce bileşkenin ilk parçasına, sonra da ikinci parçasına uygulanması yeter.)

Objeleri, morfizmleri ve morfizmlerin kompozisyonunu verdikten sonra, şimdi de kategorinin iki şartını kontrol etmeliyiz :

Assosyatiflik :

$U, V, W, T \in \mathcal{U}$ olsunlar ve

U ile V arasında	$[U\ U_1 \ldots U_n\ V]$,
V ile W arasında	$[V\ V_1 \ldots V_m\ W]$,
W ile T arasında	$[W\ W_1 \ldots W_p\ T]$,

morfizmleri verilsin. Bu takdirde

$$([U\ U_1 \ldots U_n\ V] \circ [V\ V_1 \ldots V_m\ W]) \circ [W\ W_1 \ldots W_p\ T] =$$
$$[U\ U_1 \ldots U_n\ V] \circ ([V\ V_1 \ldots V_m\ W] \circ [W\ W_1 \ldots W_p\ T])$$

olmalıdır. Gerçekten, bileşkeler açılacak olursa, her iki tarafında

$$[U\ U_1 \ldots U_n\ V\ V_1 \ldots V_m\ W\ W_1 \ldots W_p\ T]$$

morfizmine eşit olduğu görülür.

Birim Elamanlar :

$U \in \mathcal{U}$ için, U ile U arasındaki UU zincirinin $[U\ U]$ denklik sınıfı, U objesinin birim morfizmidir.

Şimdi bunu kontrol edelim. $V \in \mathcal{U}$ ve U ile V arasında bir $[U\, U_1 \dots U_n\, V]$ morfizmi verilsin.

$$[U\, U] \circ [U\, U_1 \dots U_n\, V] = [U\, U_1 \dots U_n\, V]$$

olmalıdır. Gerçekten, bileşke tanımına göre,

$$[U\, U] \circ [U\, U_1 \dots U_n\, V] = [U\, U\, U_1 \dots U_n\, V]$$

olup, $U \cap U \cap U_1 = U \cap U_1 \neq \emptyset$ olduğundan, 1. tür bir elamanter deformasyonla,

$$[U\, U\, U_1 \dots U_n\, V] = [U\, U_1 \dots U_n\, V]$$

olduğu görülür. O halde

$$[U\, U] \circ [U\, U_1 \dots U_n\, V] = [U\, U_1 \dots U_n\, V]$$

dır. Benzer şekilde, V ile U arasında bir $[V\, V_1 \dots V_n\, U]$ morfizmi verildiğinde

$$[V\, V_1 \dots V_n\, U] \circ [U\, U] = [V\, V_1 \dots V_n\, U\, U] = [V\, V_1 \dots V_n\, U]$$

olduğu görülür.

Şimdi göstermemiz gereken şey, inşa ettiğimiz bu kategorinin bir grupoid olduğudur.

Bunun için, önce objelerin sınıfının bir küme olması gerekmektedir. Gerçekten, bir X topolojik uzayının bütün açık kümeleri, X'in kuvvet kümesinin bir alt kümesini ; $\mathcal{U}$ örtülüşüne ait kümeler de, bütün açık kümelerin kümesinin bir alt kümesini oluştururlar. Dolayısıyla $\mathcal{U}$ örtülüşünün elamanları, yani kategorimizin objeleri bir küme oluştururlar ve bu kategori, bir küçük kategoridir.

Şimdi bu kategorideki bütün morfizmlerin bir denklik morfizmi olduğunu göstermeliyiz. Bunun için, U ve V gibi iki obje arasında bir $[U\, U_1 \dots U_n\, V]$ morfizmi verilsin. Bunu, daha önce yaptığımız gibi,

$$U \xrightarrow{[U\ U_1\ \dots\ U_n\ V]} V$$

şeklinde gösterelim. Şimdi V ile U arasında öyle bir morfizm bulmalıyız ki, karşılıklı bileşkeler U ile V'nin birim morfizmleri olsunlar:

$$[U\ U] = id_U \circlearrowright U \underset{?}{\overset{[U\ U_1\ \dots\ U_n\ V]}{\rightleftarrows}} V \circlearrowleft id_V = [V\ V]$$

(Burada [U U] sembolünü, U ile U arasındaki morfizmlerin kümesinin genel gösterimi olarak kullanılabilecek [U,U] ile karıştırmamak gerekir. [U U], özel bir zincirin denklik sınıfı yani münferit bir morfizmdir ve [U,U] U ile U arasındaki morfizmler kümesini gösterecek olursa, $[U\ U] \in [U,U]$ olur.)

Aranan morfizm olarak, $[V\ U_n\ \dots\ U_1\ U]$ morfizmi alınabilir. ($U\ U_1\ \dots\ U_n\ V$ bir zincir olduğundan, $V\ U_n \dots U_1 U$'nında bir zincir olacağı açıktır. Çünkü $V \cap U_n \neq \emptyset, \dots,$ $U_1 \cap U \neq \emptyset$ 'dir.)

Şimdi $[U\ U_1 \dots\ U_n\ V] \circ [V\ U_n\ \dots\ U_1\ U]$ bileşkesini hesaplayalım :

$$[U\ U_1\ U_2 \dots U_{n-1}\ U_n\ V] \circ [V\ U_n\ U_{n-1} \dots U_2\ U_1\ U] =$$

$$[U\ U_1\ U_2 \dots U_{n-1}\ U_n\ V\ U_n\ U_{n-1} \dots U_2\ U_1\ U]$$

Sağ taraftaki

$$U\ U_1\ U_2\ \dots\ U_{n-1}\ U_n\ V\ U_n\ U_{n-1}\ \dots\ U_2\ U_1\ U$$

zincirine yakından bakalım. Ortadan başlayıp, peşpeşe 1. türden elamanter deformasyonlar uygulanarak, bu zincir U U zincirine dönüştürülebilir. (yani U U zincirine hamotoptur.) Bu işlemlerin birkaç adımını görelim.

$U_n \cap V \cap U_n = U_n \cap V \neq \phi$ olduğundan, V atılabilir :

$U\ U_1\ U_2 \ldots U_{n-1}\ U_n\ U_n\ U_{n-1} \ldots U_2\ U_1\ U$.

$U_{n-1} \cap U_n \cap U_n = U_{n-1} \cap U_n \neq \phi$ olduğundan, U_n atılabilir:

$U\ U_1\ U_2 \ldots U_{n-1}\ U_n\ U_{n-1} \ldots U_2\ U_1\ U$.

Böyle devam edilerek, $U\ U_1\ U_2\ U_2\ U_1\ U$, $U\ U_1\ U_2\ U_1\ U$, $U\ U_1\ U_1\ U$, $U\ U_1\ U$ ve nihayet $U\ U$ zincirine varılır.

$U\ U_1\ U_2 \ldots U_{n-1}\ U_n\ V\ U_n\ U_{n-1} \ldots U_2\ U_1\ U$ ve $U\ U$ zincirleri homotop olduklarından, bunların denklik sınıfları eşit olur :

$$\left[U\ U_1 \ldots U_n\ V\ U_n \ldots U_1\ U\right] = \left[U\ U\right].$$

Buradan,

$$\left[U\ U_1 \ldots U_n\ V\right] \circ \left[V\ U_n \ldots U_1\ U\right] = \left[U\ U\right]$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\left[V\ U_n \ldots U_1\ U\right] \circ \left[U\ U_1 \ldots U_n\ V\right] = \left[V\ V\right]$$

olduğu görülür. O halde $\left[U\ U_1 \ldots U_n\ V\right]$ bir denklik morfizmi olup, kategorimiz bir grupoiddir.