

**SPLAYN VE ENTROPİ OPTİMİZASYON
MODELLERİ VE UYGULAMALARI
Doktora Tezi**

Akhlitdin NİZAMİTDİNOV

Eskişehir 2017

**SPLAYN VE ENTROPİ OPTİMİZASYON MODELLERİ
VE UYGULAMALARI**

Akhlitdin NİZAMİTDİNOV

DOKTORA TEZİ

İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Aladdin ŞAMİLOV

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Aralık 2017

Bu tez çalışması BAP Komisyonunca kabul edilen 1603F124 no.lu proje kapsamında desteklenmiştir.

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Akhlitdin NİZAMİTDİNOV'un 'Splayn ve Entropi Optimizasyon Modelleri ve Uygulamaları' başlıklı tezi 08/12/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca, İstatistik Anabilim dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

	<u>Unvanı Adı Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof.Dr. Aladdin ŞAMILOV
Üye	: Prof.Dr. Tahir HANALIOĞLU
Üye	: Prof.Dr. Özlem ALPU
Üye	: Prof.Dr. Yalçın KÜÇÜK
Üye	: Doç.Dr. Betül KAN KILINÇ

.....
Enstitü Müdürü

ÖZET

SPLAYN VE ENTROPİ OPTİMİZASYON MODELLERİ VE UYGULAMALARI

Akhlitdin NİZAMİTDİNOV

İstatistik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Aralık 2017

Danışman: Prof.Dr. Aladdin ŞAMİLOV

Bu tez çalışmasında taban fonksiyonlar yardımıyla oluşturan splaynlardan bahsedilmiştir. Parametrik olmayan B-splayn, düzeltme splayn, cezalı splayn ve onların toplamsal ve genelleştirilmiş toplamsal modelleri farklı veri seti ve simülasyon çalışmalarıyla incelenmiştir. Bazı problemlerde açıklayıcı değişkenin doğrusal etki göstermediği, cezalı splayn ve düzeltme splayn yardımıyla farklı modellerde bu değişkenlerin daha iyi sonuç verdiği gösterilmiştir. Regresyon problemlerinde pürüzlülük ceza yaklaşımında farklı yöntemle uygun optimum düzeltme parametresi seçimi gerçekleştirilmiştir.

Ayrıca, dağılım fonksiyonu tahmininde farklı splayn yöntemler kullanılmıştır. Dağılım fonksiyonunu tahmin etmek için kullanılan Entropi Optimizasyon yöntemleri incelenmiştir. Bilinen istatistiksel dağılımlara uymayan rassal değişkenin Entropi Optimizasyonu ve Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyonu yardımıyla dağılım fonksiyonları elde edilmiştir. MaxEnt ve MinxEnt dağılımları ve onların genelleştirilmiş versiyonu MinMaxEnt, MaxMaxEnt ve MaxMinxEnt dağılımları farklı veri setleri üzerinde splayn yöntemlerle karşılaştırılmıştır. B-splayn, düzeltme splayn, cezalı splayn oluşturmak için R programında farklı fonksiyonlar yazılmıştır. Ayrıca MinMaxEnt, MaxMaxEnt ve MaxMixEnt dağılımlarını elde etmek için R programında yazılan fonksiyonla iki gerçek veri seti için dağılımlar kurulmuştur.

Anahtar Sözcükler: Pürüzlülük ceza yaklaşımı, Cezalı splayn, Toplamsal model, Entropi optimizasyon, Genelleştirilmiş Entropi optimizasyon.

ABSTRACT

SPLINE AND ENTROPY OPTIMIZATION MODELS AND APPLICATIONS

Akhlitdin NİZAMİTDİNOV

Department of Statistics

Anadolu University, Graduate School of Sciences, December 2017

Supervisor: Prof.Dr. Aladdin ŞAMİLOV

This thesis dissertation describes utilizing basis function in constructing spline functions. Different data set assessment and simulation studies are observed using nonparametric regression techniques, such as B-spline, smoothing spline, penalized spline, additive and generalized additive models in multivariate case. It is shown that some explanatory variables have nonlinear effect in models. In this case penalized splines and smoothing splines showed better results. The optimum selection of smoothing parameter implemented with cross validation and generalized cross validation methods.

On the other hand, spline methods used in estimation of cumulative distribution function. Entropy optimization methods are widely used technique in estimation of distribution functions. Random variables that does not fit with known statistical distributions are obtained using Entropy Optimization and Generalized Entropy Optimization methods. Distribution of real data set are obtained using MaxEnt, MinxEnt, and their generalized versions, MinMaxEnt, MaxMaxEnt, MaxMinxEnt distributions. Obtained results are compared with spline functions.

It has been written functions and procedures for construction B-spline, smoothing spline, penalized spline in R software. Functions for obtaining MinMaxEnt, MaxMaxEnt, MaxMinxEnt distributions also were constructed in R software.

Keywords: Roughness penalty approach, Penalized spline, Additive model, Entropy optimization, Generalized Entropy optimization.

TEŞEKKÜR

Bu doktora tez çalışmasının oluşmasında, başlangıcından bitimine kadar, her aşamada beni yönlendiren, ‘Olasılık I ve II’, ‘Ölçüm Teorisi ve Olasılık’, ‘Entropi ve İnfomasyon Teorisi’, ‘İstatistiğin Matematiksel Yöntemleri’, ‘Stokastik Diferansiyel Denklemler I ve II’ gibi çok önemli konuları kapsayan doktora dersleriyle bilgilerini bizlere aktaran, yazmış olduğu ‘‘Ölçüm Teorisi, Olasılık ve Lebesgue İntegrali’’, ‘‘Olasılıksal Dağılımların Karakteristik Fonksiyonları ve Uygulamaları’’, ‘‘Entropi, İnfomasyon ve Entropi Optimizasyon’’ ve ‘‘Kavramsal Yorumlar ve Uygulamalarla Olasılık Teorisi’’ isimli kitaplarıyla yolumuza ışık tutan, çalışmanın planlanması ve sonuçlanmasında da büyük emeği geçen, tez danışmanım, Sayın Prof.Dr. Aladdin ŞAMİLOV’a sonsuz teşekkür ederim.

‘‘Regresyon analizinde matematiksel temelleri I ve II’’, derslerde regresyon splayn ve çok değişkenli regresyon yöntemleri konularında anlatılan, desteği hiçbir zaman esirgemeyen, ilk danışmanım, Prof.Dr. Memmedağa MEMMEDLİ’ye en içten dileklerle teşekkür ederim. Bu tez çalışmasında kullanılan ‘Genelleştirilmiş Toplamsal Modeller’ konularında ders veren, yeterlilik sınavına hazırlamada çok yardım eden, Doç.Dr. Rabia ECE Omay’a çok teşekkür ederim.

Tez izleme toplantıları süresince çalışmalarımızı yakından takip ederek değerli görüşlerini esirgemeyen değerli hocam Prof.Dr. Yalçın KÜÇÜK ve Doç. Dr. Betül KAN KILINÇ’a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bölümümüze ders veren tüm çalışmalarında desteğini esirgemeyen, güven, sevgi ve saygı duyduğum değerli hocalarım, Bölüm Başkanımız Prof. Dr. Berna YAZICI, ve Prof.Dr. Yeliz MERT KANTAR’a teşekkürü bir borç bilirim. Ders ve konferans konularında bana yol gösteren, usanmadan her sorunuma çözüm arayan sevgili hocam Yard.Doç.Dr. Çiğdem Giriftinoğlu’na ve Yard.Doç.Dr. Özer ÖZDEMİR’e teşekkürü borç bilirim.

Özellikle tezimi yazmamda bana destek olan ve tezin Türkçe dil bilgisini kontrol eden Arş.Gör. Nihal İNCE’ye en içten teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan, maddi ve manevi destekler veren babam ve anneme, ayrıca bu çalışma süresince her zaman bana destek olan gösterdiği sabır ve anlayış için eşim Farzona’ya, üç çocuklarıma tüm samimiyetimle teşekkür ederim.

Akhlitdin NİZAMİTDİNOV

Aralık-2017

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Akhlitdin NİZAMİTDİNOV

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI.....	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiv
1. GİRİŞ.....	1
2. POLİNOM SPLAYNLAR KONUSUNDA GENEL KAVRAMLAR	5
2.1. Taban Fonksiyonlar.....	5
2.2. Parçalı Polinomiyal Fonksiyon (Splayn)	6
2.3. Newton'un Bölünmüş Fark Hesaplaması	7
2.4. B-splaynlar: Kavram ve Özellikleri.....	10
2.5. Çok Boyutlu Splayn ve Özellikleri.....	12
3. REGRESYON SPLAYN VE CEZALI SPLAYN	14
3.1. Splayn Düzeltme: Pürüzlülük Ceza Yaklaşımı.....	14
3.2. Kübik Splayn Enterpolasyonu.....	15
3.3. Splayn Düzeltme Yöntemi.....	19
3.4. Cezalı Splaynlar	22
3.5. Düzeltme Parametresinin Seçimi.....	25
3.6. Serbestlik Derecesi.....	27
3.7. Yarıparametrik Regresyon Modelleri.....	29
3.8. Toplamsal Modeller.....	31
3.9. Genelleştirilmiş Toplamsal Modeller.....	32
3.10. Cezalı Genelleştirilmiş Toplamsal Modeller.....	34
3.11. İnce Tabakalı Splayn.....	35
4. ENTROPİ OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ	39
4.1. Maksimum Entropi Yöntemi.....	39

4.1.1. Kesikli rassal değişkenler için maksimum entropi yöntemi.....	39
4.1.2. Sürekli rassal değişkenler için maksimum entropi yöntemi.....	42
4.2. Minimum Çapraz Entropi Yöntemi.....	44
4.2.1. Kesikli rassal değişkenler için minimum çapraz entropi yöntemi.....	45
4.2.2. Sürekli rassal değişkenler için minimum çapraz entropi yöntemi.....	47
4.3. Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Yöntemleri.....	49
4.3.1. MinMaxEnt, MaxMaxEnt ve MaxMinxEnt yöntemleri.....	50
5. UYGULAMALAR VE SİMÜLASYON ÇALIŞMALARI	54
5.1. Splayn Yöntemler Yardımıyla Zaman Serileri Tahmini.....	54
5.2. Dağılım Fonksiyonların Splayn Yöntemleriyle Tahmini: Bir Simülasyon Çalışması.....	61
5.3. Çok Değişkenli Splayn Yaklaşımı: İki Değişkenli Simülasyon Çalışması.....	67
5.4. Doğrudan Yabancı Yatırımların Belirleyicilerinin Arasındaki İlişkilerin Araştırılması	81
5.5. Splayn ve Entropi Optimizasyon Yöntemlerinin Karşılaştırılması...	90
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	104
KAYNAKÇA.....	107
EKLER	
ÖZGEÇMİŞ	

ÇİZELGELER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1. Bölünmüş farkların hesaplama düzeni.....	8
Çizelge 3.1. $t \in (\tau_j, \tau_{j+1})$ noktasında sıfır olmayan B-splayn değerleri hesabında üçgen şema.....	23
Çizelge 5.1. Amerikan Doları/Türk Lirası döviz kurun haftalık kapanış değerleri.....	55
Çizelge 5.2. Amerikan Doları/Tacik Somoni döviz kurun haftalık kapanış değerleri.....	55
Çizelge 5.3. Amerikan Doları/Türk Lirası için performans ölçütleri.....	56
Çizelge 5.4. Amerikan Doları/Tacik Somoni için performans ölçütleri....	56
Çizelge 5.5. Amerikan Doları/Türk Lirası için B-splayn fonksiyon öngörüsü.....	57
Çizelge 5.6. Amerikan Doları/Türk Lirası için kübik splayn düzeltme öngörüsü.....	58
Çizelge 5.7. Amerikan Doları/Türk Lirası için cezalı splayn öngörüsü ...	58
Çizelge 5.8. Amerikan Doları/Tacik Somoni için B- splayn öngörüsü	59
Çizelge 5.9. Amerikan Doları/Tacik Somoni için kübik splayn düzeltme öngörüsü.....	60
Çizelge 5.10. Amerikan Doları/Tacik Somoni için cezalı splayn öngörüsü	60
Çizelge 5.11. Simülasyon çalışmasında kullanılan dağılım fonksiyonları..	62
Çizelge 5.12. $n=50$ hacimlik örnekleme hesaplanan MSE değerleri.....	65
Çizelge 5.13. $n=100$ hacimlik örnekleme hesaplanan MSE değerleri.....	65
Çizelge 5.14. Simülasyon çalışmasında kullanılan iki değişkenli fonksiyonlar.....	68
Çizelge 5.15. Fan ve Gijbels'in fonksiyonunun MSE değerlerinin ortalaması.....	69
Çizelge 5.16. Wood'un fonksiyonunun tahmin edilen MSE değerlerinin ortalaması.....	72
Çizelge 5.17. Wood'un ikinci fonksiyonunun tahmin edilen MSE değerlerinin ortalaması.....	74

Çizelge 5.18.	Smith ve Kohn'un fonksiyonunun tahmin edilen MSE değerlerinin ortalaması.....	76
Çizelge 5.19.	Smith ve Kohn'un ikinci fonksiyonunun MSE değerlerinin ortalaması.....	78
Çizelge 5.20.	Yöntemlerin ortalama düzeyinde başarı durumları (birinci ve ikinci olma sayıları).....	80
Çizelge 5.21.	Ampirik Çalışmada Kullanılan Değişkenler.....	82
Çizelge 5.22.	Denklem (5.3) için parametre tahminleri ve ilgili istatistikler.....	83
Çizelge 5.23.	Denklem (5.4) için tahminler ve ilgili istatistikler.....	84
Çizelge 5.24.	Denklem (5.5) için tahminler ve ilgili istatistikler.....	86
Çizelge 5.25.	Denklem (5.6) için tahminler ve ilgili istatistikler.....	87
Çizelge 5.26.	Denklem (5.4) için cezalı splayn tahminleri ve ilgili istatistikler.....	89
Çizelge 5.27.	Denklem (5.6) için cezalı splayn tahminleri ve ilgili istatistikler.....	89
Çizelge 5.28.	Modellerin performans ölçütlerinin değerleri.....	90
Çizelge 5.29.	Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için belirlenen splayn yöntemleri dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar ve gözlenen frekanslar.....	93
Çizelge 5.30.	Splayn yöntemlerin performans ölçütlerinin değerleri.....	93
Çizelge 5.31.	Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için iki, üç, dört, beş ve altı bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MinMaxEnt dağılımları ile ilgili program sonuçları	94
Çizelge 5.32.	Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için 2-6 bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MinMaxEnt dağılımlarının entropileri.....	94
Çizelge 5.33.	Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için belirlenen MinMaxEnt dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar ve gözlenen frekanslar.....	95
Çizelge 5.34.	Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın MinMaxEnt dağılımlarının veriye uyumunun istatistiksel ölçütleri.....	96

Çizelge 5.35.	B-splayn ve MinMaxEnt altı bileşkeli moment vektör $f_{m\xi_6}(\xi)$ 'ın sonuçları.....	96
Çizelge 5.36.	Gama radyasyonuna maruz bırakılmış 208 fare için ölüm sayısı.....	97
Çizelge 5.37.	Splayn yöntemleri dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar ve gözlenen frekanslar.....	98
Çizelge 5.38.	Fare ölüm veri seti için splayn yöntemlerin performans ölçütlerinin değerleri.....	99
Çizelge 5.39.	Fare ölüm değerleri için belirlenen MinMaxEnt dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar ve gözlenen frekanslar.....	100
Çizelge 5.40.	Fare ölüm değerleri için belirlenen MaxMaxEnt dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar ve gözlenen frekanslar.....	101
Çizelge 5.41.	MinMaxEnt dağılımlarının veriye uyumunun istatistiksel ölçütleri.....	101
Çizelge 5.42.	MaxMaxEnt dağılımlarının veriye uyumunun istatistiksel ölçütleri.....	102
Çizelge 5.43.	B-splayn ve MaxMaxEnt altı bileşkeli moment vektör $f_{m\xi_6}(\xi)$ 'ın sonuçları.....	102

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1. Farklı dereceli polinom örnekleri.....	6
Şekil 2.2. B-splayn taban fonksiyonlarının örnekleri.....	12
Şekil 3.1. λ 'nin optimum değerinin seçimi.....	29
Şekil 5.1. Amerikan Doları/Türk Lirası için B-splayn yaklaşımı ile serpilme grafiği.....	57
Şekil 5.2. Amerikan Doları/Türk Lirası için kübik splayn düzeltme yaklaşımı ile serpilme grafiği.....	57
Şekil 5.3. Amerikan Doları/Türk Lirası için cezalı splayn yaklaşımı ile serpilme grafiği.....	58
Şekil 5.4. Amerikan Doları/Tacik Somoni için B-splayn yaklaşımı ile serpilme grafiği.....	59
Şekil 5.5. Amerikan Doları/Tacik Somoni için kübik splayn düzeltme yaklaşımı ile serpilme grafiği.....	59
Şekil 5.6. Amerikan Doları/Tacik Somoni için cezalı splayn yaklaşımı ile serpilme grafiği.....	60
Şekil 5.7. Karışık fonksiyonların olasılık dağılımlarının şekilleri.....	63
Şekil 5.8. Karışık fonksiyonların splayn yaklaşımı ile serpilme grafiği...	64
Şekil 5.9. Fan ve Gijbels fonksiyonundan üretilen veriler.....	69
Şekil 5.10. Fan ve Gijbels fonksiyonundan üretilen verilerin splayn yöntemlerle tahmin edilen yüzey yaklaşım grafikleri.....	70
Şekil 5.11. Fan ve Gijbels fonksiyonunun MSE değerlerinin kutu grafiği..	71
Şekil 5.12. Wood'un fonksiyonundan üretilen veriler.....	71
Şekil 5.13. Wood'un fonksiyonundan üretilen verilerin splayn yöntemlerle tahmin edilen yüzey yaklaşım grafikleri.....	72
Şekil 5.14. Wood'un fonksiyonunun MSE değerlerinin kutu grafiği.....	73
Şekil 5.15. Wood'un ikinci fonksiyonundan üretilen veriler.....	73
Şekil 5.16. Wood'un fonksiyonundan üretilen verilerin splayn yöntemlerle tahmin edilen yüzey yaklaşım grafikleri.....	74
Şekil 5.17. Wood'un fonksiyonunun MSE değerlerinin kutu grafiği.....	75
Şekil 5.18. Smith ve Kohn'un fonksiyonundan üretilen verilerin grafiği...	75

Şekil 5.19. Smith ve Kohn'un fonksiyonunun MSE değerlerinin kutu grafiği.....	76
Şekil 5.20. Smith ve Kohn'un fonksiyonundan üretilen verilerin splayn yöntemlerle tahmin edilen yüzey yaklaşım grafikleri.....	77
Şekil 5.21. Smith ve Kohn'un ikinci fonksiyonundan üretilen verilerin serpilme grafiği.....	78
Şekil 5.22. Smith ve Kohn'un fonksiyonundan üretilen verilerin splayn yöntemlerle tahmin edilen yüzey yaklaşım grafikleri.....	79
Şekil 5.23. Smith ve Kohn'un ikinci fonksiyonunun MSE değerlerinin kutu grafiği.....	80
Şekil 5.24. Denklem (5.4)'de yer alan pürüzsüz fonksiyon tahminleri.....	85
Şekil 5.25. Denklem (5.6)'da yarıparametrik regresyon modeline ait pürüzsüz fonksiyon tahminleri.....	88
Şekil 5.26. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerlerine ilişkin histogram.....	91
Şekil 5.27. B-splayn yardımıyla tahmin edilen dağılım fonksiyonu.....	92
Şekil 5.28. Kübik düzeltme splayn yardımıyla tahmin edilen dağılım fonksiyonu.....	92
Şekil 5.29. Cezalı splayn yardımıyla tahmin edilen dağılım fonksiyonu.....	93
Şekil 5.30. İki, üç, dört, beş ve altı bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımları.....	96
Şekil 5.31. B-splayn ve MinMaxEnt altı bileşkeli moment vektör $f_{m\xi_6}(\xi)$ 'ın grafiği.....	97
Şekil 5.32. Splayn yöntemler yardımıyla tahmin edilen dağılım fonksiyonu.....	98
Şekil 5.33. MinMaxEnt ve MaxMaxEnt yöntemler yardımıyla tahmin edilen dağılım fonksiyonu.....	99
Şekil 5.34. Cezalı splayn ve MinMaxEnt altı bileşkeli moment vektör $f_{m\xi_6}(\xi)$ 'ın grafiği.....	102

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

- AIC : Akaike bilgi kriteri
CV : Çapraz geçerlilik
EOP : Entropi optimizasyon problemi
EOY: Entropi optimizasyon yöntemi
GAM : Genelleştirilmiş toplamsal modeller
GCV : Genelleştirilmiş çapraz geçerlilik
GEOP : Genelleştirilmiş entropi optimizasyon problemi
GEOY: Genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemi
IRLS : İteratif olarak yeniden ağırlıklandırılmış en küçük kareler
MaxEnt : Maksimum entropi
MinxEnt : Minimum çapraz entropi
MSE : Hata kareler ortalaması
NCS : Doğal kübik splayn
Penalized spline: Cezalı splayn
P-GAM: Cezalı genelleştirilmiş toplamsal model
RSS : Artık kareler toplamı
Smoothing spline : Splayn düzeltme
TPS : İnce tabakalı splayn

1. GİRİŞ

Regresyon analizi, bağımlı (yanıt) ve bağımsız (açıklayıcı) değişkenler arasındaki ilişkiyi modellemek ve araştırmak için kullanılan en yaygın istatistiksel bir tekniktir. Regresyon uygulamaları, ekonomi, mühendislik, fizik, kimya ve biyoloji bilimleri, yönetim ve sosyal bilimler dahil hemen hemen her alanda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Doğrusal regresyon modeli [17,49,51], bağımlı (yanıt) ve bağımsız (açıklayıcı) değişken arasındaki ilişkinin doğrusal olduğu varsayılan basit bir regresyon modelidir. Doğrusal regresyon problemine ilişkin çok sayıda teorik ve uygulamalı çalışmalar ve araştırmalar bulunmaktadır ve bu çalışmalarından elde edilen sonuçlar bazı regresyon problemlerinin daha karmaşık teorik ve pratik şekilde incelenmesini önerilmektedir. Bazı doğrusal regresyon probleminde, farklı koşullarda bağımsız değişkenin gözlemlerinin doğrusal olmayan etki gösterdiği gözlemlenebilir. Bu nedenle, bu tür problemlerin parametrik olmayan regresyon yöntemleriyle analizi düşünülmelidir.

Parametrik olmayan regresyon analizinde, bir yanıt değişkeninin bir veya birkaç belirleyicilerle ilişkisi, yanıtın tahmin edicilerle olan ilişki fonksiyonu bilinmeden incelenmektedir.

$$E(y_i) = f(x_{1i}, \dots, x_{pi}) \quad (1.1)$$

Burada $E(y_i)$, y 'nin i .inci gözlemin ortalamasıdır. Parametrik regresyonda y 'nin ortalamasının belirleyicilere bağlanan fonksiyonu parametrelere göre doğrusaldır.

$$E(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_p x_{pi} \quad (1.2)$$

ve doğrusal olmayan regresyonda y 'nin ortalamasının belirleyicilere bağlanan fonksiyonu, parametrelere göre doğrusal olmadığından, aşağıdaki şekilde belirtilmiştir,

$$E(y_i) = f(x_{1i}, \dots, x_{pi}; \beta_1, \dots, \beta_p) \quad (1.3)$$

Regresyon analizinde modelin parametreleri β tahmin edilmektedir. Ancak parametrik olmayan regresyonda tahmin edilecek olan regresyon fonksiyonudur.

Çeşitli parametrik olmayan regresyon yöntemleri mevcuttur. Bir çoğunda regresyon fonksiyonunun pürüzsüz bir fonksiyon olduğu varsayılmaktadır.

Bu tezde taban fonksiyon splayn, splayn düzeltme ve cezalı splayn incelenmektedir. Parametrik olmayan regresyon analiziyle ilgili, bilimsel dergiler ve kitaplarda çok sayıda makaleler vardır [8,26,29,94].

Parametrik olmayan regresyonun en basit modeli, tek değişkenli regresyon splayn modelidir [22,26,99]. Bu modelin geliştirilmiş türleri, modelde bir belirleyici değişken parametrik olmayandan etkilenirken, diğer değişkenler doğrusal etkiye sahiptirler. Bu modeller yarıparametrik modeller olarak adlandırılır. Modelin diğer türünde, her belirleyici değişkenin parametrik olmayan etkileri görölmektedir ve bu modeller tek değişkenli parametrik olmayan modellerin toplamından oluşmakta, toplamsal modeller olarak adlandırılmaktadır. Bazı modeller ise çok boyutlu splaynlar, ince tabakalı splaynlar, tensör çarpım splaynlardan elde edilir [9,29, 104].

Parametrik olmayan regresyon analizinde pürüzlülük ceza temel yaklaşımdır [26,29]. Bu yaklaşımda, modeldeki bilinmeyen fonksiyonu tahmin etmek için, hata kareler toplamına ceza terimi eklenmektedir. Farklı ceza terim şekilleri tanımlanır. Ceza teriminin çok kullanılan hali $\int_a^b \{f''(x)\}^2 dx$ 'tir. Bu integral, λ düzeltme parametresi ile çarpım şeklinde kullanılır ve \hat{f} fonksiyonun tahmini ikinci mertebeden diferansiyellenebilen $f(\cdot)$ fonksiyonun uzayından seçilir.

Son zamanlarda çok kullanılan başka bir parametrik olmayan regresyon yöntemi cezalı splayndır [21,44]. Bu yöntemde splayn fonksiyon oluşturmak için taban fonksiyon olarak B-splaynlar (14, 15) kullanılır. Eilers and Marx [21]'in çalışmasında cezalı splaynlar farklı problemlerde, yoğunluk fonksiyon ve pürüzsüz parametrik olmayan tahminlerde kullanabileceğini göstermiştir.

Eilers ve Marx [21] tarafından geliştirilen bu model için iki varsayım bulunmaktadır. Birincisi, $B = (B_1(x), B_2(x), \dots, B_k(x))$, $n \times k$ boyutlu bir matris ve \mathbf{a} katsayılar vektörü olmak üzere, $E(y) = \mathbf{B}\mathbf{a}$ şeklinde verilmiştir. İkincisi ise komşu B-splayn katsayılarının Newton'un sonlu farklar cinsinden ifade edilebilmesidir ve böylece cezalı hata kareler toplamındaki ceza terimi sonlu farklarla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$S = \sum_{i=1}^m \{y_i - \sum_{j=1}^n a_j B_j(x_i)\}^2 + \lambda \sum_{j=k+1}^n (\Delta^k a_j)^2 \quad (1.4)$$

Burada $\Delta^k a_j = \Delta^1(\Delta^{k-1} a_j)$ ve $\Delta^1 a_j = a_j - a_{j-1}$ 'dir.

Cezalı en küçük kareler yönteminde yukarıdaki S fonksiyonunu minimize etme problemi ele alınır.

Bu tezde farklı veri setleri farklı yöntemler yardımıyla analiz edilmektedir. Tek ve iki değişkenli simülasyon çalışması, zaman serisi ve çok değişkenli veri setinde farklı

splayn yöntemlerle analizi yapılmaktadır. Ayrıca splayn yöntemlerle kesikli rassal değişkenlerin dağılım fonksiyonlarını tahmin etme problemi bu tezin uygulama bölümünde incelemiştir.

İstatistikte dağılım fonksiyonlarını tahmin etme problemi önemli problemlerden biridir. Anakütleden çekilen örneklem bilgisi içinde, rassal değişkenin yoğunluk fonksiyonunu tahmin etmek, Maksimum entropi (MaxEnt) ve Minimum çapraz entropi (MinxEnt) yöntemleri rassal değişkenin moment değerleri bilgisi dahilinde, olasılık yoğunluk fonksiyonunu tahmin etmektedir.

MaxEnt ve MinxEnt yöntemlerinin uygulamaları çok geniştir ve çeşitli problemlerin çözümünde iyi sonuçlar vermektedir. Ayrıca bu yöntemler, literatürde entropi optimizasyon yöntemleri olarak bilinmektedir. [35, 36, 40].

Entropi optimizasyon yöntemleri, ekonomi, finans, pazarlama, istatistik, matematik gibi alanlarda çok geniş uygulamalara sahiptir. Özellikle MinxEnt metodunda kullanılan Kullback-Leibler ölçümü, model belirleme kriteri olarak kullanımı yaygındır [75]. Bu ölçüm, model belirleme, görüntü işleme, veri sıkıştırma gibi mühendislik alanlarında çok sık kullanılmaktadır.

Bu yöntemlerden elde edilen sonuçlar ile rassal değişkenlerin yoğunluk fonksiyonları tahmin edilmektedir. MaxEnt yöntemi yardımıyla elde edilen yoğunluk fonksiyonuna MaxEnt fonksiyonu, MinxEnt yöntemi yardımıyla elde edilen yoğunluk fonksiyonuna MinxEnt fonksiyonu olarak adlandırılır.

İstatistikte daha çok maksimum entropi (MaxEnt) ve minimum çapraz entropi (MinxEnt) yöntemlerinin uygulandığı gösterilmektedir. [13,36,41,76-90].

Shamilov [76,77] MaxEnt yöntemi yardımıyla özel fonksiyonel ile bu fonksiyonele minimum ve maksimum değer veren MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımını tanımlamıştır. Aynı çalışmalarda, MinxEnt yardımıyla özel fonksiyonel ile bu fonksiyonele minimum ve maksimum değer veren MaxMinxEnt ve MinMinxEnt dağılımını da tanımlamıştır. Kantar [79], Shamilov ve Giriftinoğlu [80,81], Shamilov ve arkadaşları [82-86] MinMaxEnt ve MaxMinxEnt dağılımlarıyla ilgili çeşitli incelemeler yapmıştır.

Bu tezde splayn yöntemler, MaxEnt, MinxEnt yöntemleri ve geliştirilmiş özel fonksiyonel ile bu fonksiyonele minimum ve maksimum değer veren MinMaxEnt dağılımının ve MinxEnt metoduyla geliştirilmiş özel fonksiyonel ile bu fonksiyonele maksimum ve minimum değer veren MaxMinxEnt dağılımının bulunması için R paket

ortamında programlar yazılmıştır. Bu programlar yardımıyla yapılan uygulamaların sonuçları sunulmuştur.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde polinom splaynlar konusunda genel kavramlarla ilgili bilgi verilmektedir. Bu bölümde splaynların taban fonksiyonlarla temsil edilmesi, kübik splayn taban fonksiyonu, B-splaynlar ve onların özellikleri, çok değişkenli splaynlar ve onların özelliklerinden bahsedilmektedir.

Üçüncü bölümde tek ve çok değişkenli splayn yöntemleri sunulmaktadır. Düzeltme splaynlardan pürüzlülük ceza yaklaşımı, kübik ve doğal kübik splayn enterpolasyon oluşturulması, cezalı splaynlar, düzeltme splayn, düzeltme parametresinin seçimi, toplamsal ve genelleştirilmiş toplamsal modeller konusunda bilgi verilmektedir.

Dördüncü bölümde Maksimum Entropi (MaxEnt), Minimum Çapraz Entropi (MinxEnt) dağılımlarının kesikli ve sürekli rassal değişkenler için elde edilme yöntemleri yorumlanmış ve Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Yöntemleri olan MinMaxEnt ve MaxMinxEnt yöntemleri anlatılmıştır.

Beşinci bölümde farklı veri seti üzerinde yapılmış uygulamalar yer almaktadır. Tek ve iki değişkenli simülasyon çalışması, zaman serisi splayn yöntemler yardımıyla yaklaşım fonksiyon bulunması ve öngörüsü, çok değişkenli veriler için toplamsal modeller yardımıyla tahmin etme uygulamaları elde edilmiştir. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata dağılımının belirlenmesi ve gama radyasyonuna maruz bırakılmış 208 fare için ölüm zamanı verisi için splayn yöntemler ve entropi optimizasyon yöntemleri yardımıyla dağılım fonksiyonu tahmin edilmiştir. Elde edilen sonuçlar birbiriyle karşılaştırılmıştır.

Altıncı bölümde ise yapılan araştırmaların sonuçları ve öneriler verilmiştir.

2. POLİNOM SPLAYNLAR KONUSUNDA GENEL KAVRAMLAR

Polinomlar, matematik ve diğer bilim alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Basit sözcük problemlerinden karmaşık fen bilimlerindeki problemlere kadar, iktisat, sosyal, kimya ve fizik gibi alanlarda polinom denklemler oluşturulması kullanılmaktadır [31, 50, 92].

2.1. Taban Fonksiyonlar

Pürüzsüz fonksiyonun gösteriminin en iyi yolu, tek değişkenli pürüzsüz bir fonksiyon içeren bir modeldir.

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (2.1)$$

f fonksiyonunu tahmin etmek için, fonksiyon uzayından f fonksiyonu, uzayın bir elemanı olmak üzere bir taban fonksiyon seçilmektedir. Eğer $b_j(x)$ j .inci taban fonksiyonu ise, f fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilebilmektedir.

$$f(x) = \sum_{j=1}^k \beta_j b_j(x) \quad (2.2)$$

burada β_j bilinmeyen parametrelerdir.

Örneğin, f fonksiyonunun 4.üncü derece polinom olduğu varsayalım. Bu durumda, f fonksiyonunun uzayı $b_1(x) = 1, b_2(x) = x, b_3(x) = x^2, b_4(x) = x^3$ ve $b_5(x) = x^4$ şeklinde tanımlanmaktadır. Böylece eşitlik (2.2) aşağıdaki gibi yazılır:

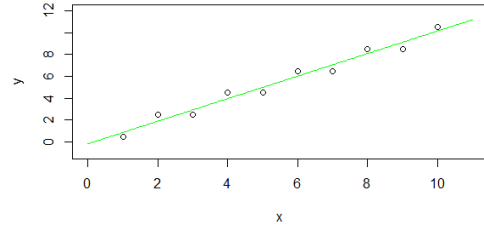
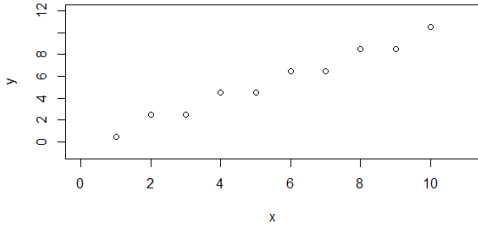
$$f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3 + \beta_5 x^4 \quad (2.3)$$

ve eşitlik (2.3) aşağıdaki model şeklinde gösterilmektedir:

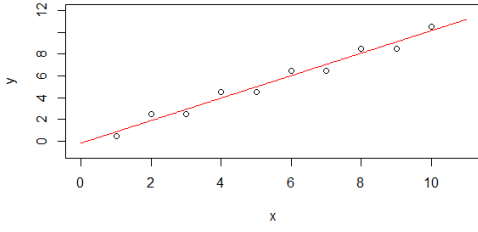
$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 x_i^2 + \beta_4 x_i^3 + \beta_5 x_i^4 + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (2.4)$$

Polinom modeller, gerçek yanıt fonksiyonunda eğrisel etkilerin var olduğu bilindiğinde daha çok kullanışlıdır. Polinom modeller, aynı zamanda bilinmeyen ve çok karmaşık doğrusal olmayan bağıntılarda yaklaştırma fonksiyonları olarak da yararlıdır. Bu tür uygulamalar daha çok pratikte ortaya çıkar.

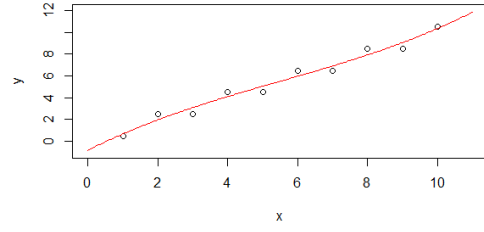
Şimdi bir örnek olarak, Şekil 2.1'de farklı dereceli olan polinomlar gösterilmektedir. Şekilde yer alan sol üst köşedeki veri seti için farklı dereceden polinomlar oluşturulmaktadır: 1) doğrusal model, 2) 2.derece, 3) 3.derece, 4) 4.derece ve 5) 9.derece polinomlardır.



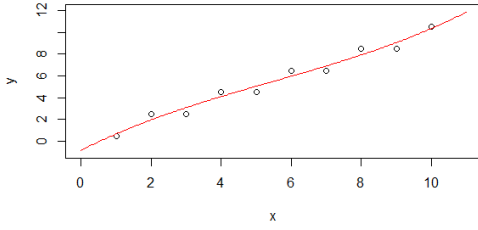
1) Doğrusal



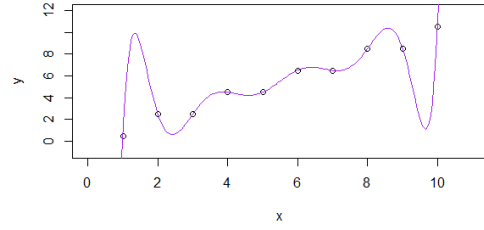
2) 2. derece



3) 3.derece



4) 4.derece



5) 9.derece

Şekil 2.1. Farklı dereceli polinom örnekleri

2.2. Parçalı Polinomiyal Fonksiyon (Splayn)

Bazen düşük dereceden polinomların verilere zayıf uyum sağladığı görülmektedir, ancak polinomların derecesini yükseltmek de ciddi anlamda durumu iyileştirmemektedir. Bunun belirtileri, artık kareler toplamının kararlı olmadaki ya da geriye kalan tanımlanmamış yapıyı görmede artık çizimlerdeki başarısızlıktır. Bu problem, f fonksiyonunun, x 'in aralığının farklı parçalarında farklı davranışlar gösterdiğinde ortaya çıkabilir. Bazen x veya y üzerinde yapılan dönüşümlerle bu problem ortadan kaldırılabilir. Bununla birlikte genel yaklaşım, x 'in aralığını dilimlere bölmek ve her bir dilimde uygun eğriyi kestirmektir. Splayn fonksiyon parçalı polinom fonksiyonlar tahmin etmede yararlı bir yöntemdir.

Splayn fonksiyonlar çok farklı alanlarda, örneğin enterpolasyon, veri düzeltme problemlerinde sık kullanılan yöntemlerdir. Splaynlar veri seti arasında enterpolasyon kurmak amacıyla kullanılan matematiksel fonksiyonlardır.

$S(x)$, $[a, b]$ sınırlı aralığında tanımlanmış, $k > 0$ dereceden $(k + 1)$ mertebeden, $\tau_j, j = 0, 1, \dots, g + 1$, ($\tau_0 = a, \tau_{g+1} = b$) kesin artan dizide düğüm noktalarına sahip olan fonksiyona, splayn fonksiyonu denilmektedir.

$S(x)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

1. Her bir düğüm aralıklarında (τ_j, τ_{j+1}) , $S(x)$ k .inci dereceden polinomdur:

$$S_{[\tau_j, \tau_{j+1}]} \in P_k, \quad j = 0, 1, \dots, g. \quad (2.5)$$

2. $S(x)$ fonksiyonu ve onun türevleri $[a, b]$ aralığında $(k - 1)$ mertebeye kadar süreklidir.

Vurgulamak gerekir ki $[a, b]$ aralığındaki her bir k 'dan küçük polinom, ayrıca bu aralıkta k . derece splayn fonksiyonudur. Genelde k . derece splayn her düğüm aralıklarında farklı polinomlardan oluşmaktadır. Böylece, $S(x)$ fonksiyonun k . mertebede türevleri iç düğüm noktalarında τ_1, \dots, τ_g kesikli olabilmektedir.

1. ve 2. koşulları sağlayan fonksiyonların uzayı $f_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_g)$ ile gösterilmektedir. Bundan görülüyor, ki f_k 'nin her bir elemanı aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$S(x) = \sum_{i=0}^k \beta_{i,j} (x - \tau_j)^i, \quad \tau_j \leq x \leq \tau_{j+1}, j = 0, 1, \dots, g. \quad (2.6)$$

2.3. Newton'un Bölünmüş Fark Hesaplaması

Splayn fonksiyonu oluşturmada başka bir taban fonksiyonu B-splayn söz konusudur. B-splaynlar [14,15] polinom parçalarından kurulmuş ve τ düğüm noktalarında belli değerlerde birleştirilmiş splayndır.

B-splayn taban fonksiyonları tanıtılmadan önce, Newton'un bölünmüş farklı polinomları tanımlanmalıdır.

Tanım. f fonksiyonun n . bölünmüş farkı τ_0, \dots, τ_k farklı düğüm noktalarından oluşan, $p_n(\tau_j) = f(\tau_j), j = 0, \dots, n$ koşulu sağlayan n . dereceden tek polinomun katsayılarıdır.

Bölünmüş fark $f[\tau_0, \dots, \tau_n]$ ya da $\Delta_{\tau}^n(\tau_0, \dots, \tau_n)f(\tau)$ şekilde gösterilir. Aşağıda bölünmüş farkların bazı özellikleri tanımlanmaktadır:

1. Simetriklik: Bölünmüş farkların değerleri sadece τ_0, \dots, τ_n değerlerine bağlıdır. τ_i 'ler artan şekilde olduğu kabul edilir.

2. Doğrusallık: Eğer her τ için $f(\tau) = \alpha g(x) + \beta h(x)$ ise,

$$f[\tau_0, \dots, \tau_k] = \alpha g[\tau_0, \dots, \tau_k] + \beta h[\tau_0, \dots, \tau_k] \quad (2.7)$$

3. Tekrarlama (recursion):

$$f[\tau_i, \dots, \tau_{i+l}] = \frac{f[\tau_{i+1}, \dots, \tau_{i+l}] - f[\tau_{i+1}, \dots, \tau_{i+l-1}]}{\tau_{i+l} - \tau_i}$$

$$f[\tau_i] = f(\tau_i) \quad (2.8)$$

Tekrarlama (recursion) özelliği bölünmüş farkın değerini hesaplamak için kullanılmaktadır, başka bir deyişle bir şema yardımıyla hesaplanmaktadır (Çizelge 2.1). Bu çizelgedeki her eleman iki önce sütundaki değerlerden, özellikle aynı ve bir önceki satırdaki değerlerden hesaplanmaktadır.

Çizelge 2.1. Bölünmüş farkların hesaplama düzeni

$f(\tau_0)$				
$f(\tau_1)$	$f[\tau_0, \tau_1]$			
$f(\tau_2)$	$f[\tau_1, \tau_2]$	$f[\tau_0, \tau_1, \tau_2]$		
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
\dots	\dots	\dots	$f[\tau_0, \dots, \tau_{k-1}]$	
$f(\tau_n)$	$f[\tau_{n-1}, \tau_n]$	\dots	$f[\tau_1, \dots, \tau_k]$	$f[\tau_0, \dots, \tau_k]$

4. $p_n(\tau)$ polinomun Newton formu: $p_{n-1}(\tau)$, $(n-1)$. Newton polinomu olsun. Tekrarlama özelliğe göre $p_{n-1}(\tau_0) = f_0$, $p_{n-1}(\tau_1) = f_1, \dots, p_{n-1}(\tau_{n-1}) = f_{n-1}$ şekilde gösterilecektir. Böylece, n . Newton polinomu aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$p_n(\tau) = p_{n-1}(\tau) + g_n(\tau). \quad (2.9)$$

Buradan $g_n(\tau) = p_n(\tau) - p_{n-1}(\tau)$, $p_n(\tau_0) = f_0$, $p_n(\tau_1) = f_1, \dots, p_n(\tau_n) = f_n$ olduğu görülür.

p_n ve p_{n-1} polinomlar, $\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ düğüm noktalarında belirlenmiş olduğunda g_n sifıra eşittir. g_n n . dereceden polinomu eşitlik (2.10)'daki gibi gösterilebilir:

$$g_n(x) = a_n(\tau - \tau_0)(\tau - \tau_1) \dots (\tau - \tau_{n-1}). \quad (2.10)$$

Sabit a_n 'yi, $\tau = \tau_n$ kabul edip denklem nümerik çözülebilir. Eşitlik (2.10)'a göre $g_n(\tau_n)$ yerine polinom $g_n(\tau_n) = f_n$ kullanıldığında bu denklem

$$a_n = \frac{f_n - p_{n-1}(x_n)}{(\tau_n - \tau_0)(\tau_n - \tau_1) \dots (\tau_n - \tau_{n-1})} \quad (2.11)$$

olur. Şimdi a_k , k . bölünmüş farklara eşit olduğu gösterilecektir.

$$a_k = f[\tau_0, \dots, \tau_k] = \frac{f[\tau_1, \dots, \tau_k] - f[\tau_0, \dots, \tau_{k-1}]}{\tau_k - \tau_0} \quad (2.12)$$

$p_n(\tau)$ polinomu $p_n(\tau_i) = f(\tau_i)$, $i = 0, \dots, k$ olduğunda, aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$p_n(\tau) = f[\tau_0] + \sum_{j=1}^n (\tau - \tau_0) \dots (\tau - \tau_{j-1}) f[(\tau_0, \dots, \tau_j)]. \quad (2.13)$$

Bölünmüş farkların bu formu üçgen düzenin köşegen elemanlardan oluştuğunu göstermektedir.

5. Açık ifadesellik (Explicit expression): Bölünmüş fark, farklı noktalarda fonksiyonun değerlerinin doğrusal kombinasyonudur.

$$f[\tau_0, \dots, \tau_n] = \sum_{j=0}^k \frac{f(\tau_j)}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^k (\tau_j - \tau_l)} \quad (2.14)$$

6. $(k - 1)$. dereceden küçük olan polinomun n . bölünmüş farkı, her zaman τ_i düğüm noktalarında sıfıra eşit olur.

$$f[\tau_0, \dots, \tau_n] = 0 \text{ eğer } f \in P_{k-1} \quad (2.15)$$

Örnek olarak, R programında yazılan fonksiyon yardımıyla hesaplanmış bölünmüş fark aşağıdaki program çıktısında gösterilmektedir.

```
bolunmus.fark <- function(x, y, x0) {
  n <- length(x)
  q <- matrix(data = 0, n, n)
  q[,1] <- y
  f <- as.character(round(q[1,1], 5))
  fi <- ''
  for (i in 2:n) {
    for (j in i:n) {
      q[j,i] <- (q[j,i-1] - q[j-1,i-1]) / (x[j] - x[j-i+1])
    }
  }
}
```



```

fi <- paste(fi, '*(x - ', x[i-1], ')', sep = ", collapse = ")
f <- paste(f, ' + ', round(q[i,i], 5), fi, sep = ", collapse = ")
}
return(list('Bulundugu fonksiyon'=f,
           'Bolunmus fark tablosu'=q))
}
x<-c(8.1,8.3,8.6,8.7)
fx<-c(16.9446,17.56492,18.50515,18.82091)
bolunmus.fark(x,fx,8.1)
$`Bulundugu fonksiyon`
[1] "16.9446 + 3.1016*(x - 8.1) + 0.065*(x - 8.1)*(x - 8.3) + -0.01042*(x - 8.1)*(x -
8.3)*(x - 8.6)"
$`Bolunmus fark tablosu`
      [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,] 16.94460 0.0000 0.00000 0.00000000
[2,] 17.56492 3.1016 0.00000 0.00000000
[3,] 18.50515 3.1341 0.06500 0.00000000
[4,] 18.82091 3.1576 0.05875 -0.01041667

```

2.4. B-splaynlar: Kavram ve Özellikleri

$\tau_i, \dots, \tau_{i+k+1}$ düğüm noktalarıyla oluşan k . derece B-splayn $B_{i,k+1}$, aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$B_{i,k+1}(t) = (\tau_{i+k+1} - \tau_i) \Delta_t^{k+1}(\tau_i, \dots, \tau_{i+k+1})(\tau - t)^k \quad (2.16)$$

Newton'un bölünmüş farkın açık ifadesellik özelliği kullanılarak, B-splaynın oluşturulması eşitlik (2.17)'de gösterilebilir:

$$B_{i,k+1}(t) = (\tau_{i+k+1} - \tau_i) \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(\tau_{i+j}-t)^k}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{k+1} (\tau_{i+j}-\tau_{i+l})} \quad (2.17)$$

Eşitlik (2.17), $\tau_i, \dots, \tau_{i+k+1}$ düğüm noktalarından oluşan splayn fonksiyon olduğunu göstermektedir. B-splaynlar bazı özelliklere sahiptir [14,15]:

1. Pozitif olma:

$$B_{i,k+1}(t) \geq 0, \text{ her } t \text{ için} \quad (2.18)$$

2. Yerel destek (Local support):

$$B_{i,k+1}(t) = 0 \text{ eğer } t \notin [\tau_i, \tau_{i+k+1}] \quad (2.19)$$

3. Sınır değerleri (Boundary):

$$B_{i,k+1}^{(l)}(\tau_i) = B_{i,k+1}^{(l)}(\tau_{i+k+1}) = 0, \quad l = 0, \dots, k-1 \quad (2.20)$$

4. Tekrarlama (Recursion):

$$B_{i,k+1}^{(l)}(t) = \frac{t - \tau_i}{\tau_{i+k} - \tau_i} B_{i,k}(t) + \frac{\tau_{i+k+1} - t}{\tau_{i+k+1} - \tau_{i+1}} B_{i+1,k}(t)$$

$$B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \\ 0, & t \notin [\tau_i, \tau_{i+1}) \end{cases} \quad (2.21)$$

5. B-splaynın türevi:

$$B'_{i,k+1}(t) = k \left\{ \frac{B_{i,k}(t)}{\tau_{i+k} - \tau_i} - \frac{B_{i+1,k}(t)}{\tau_{i+k+1} - \tau_{i+1}} \right\} \quad (2.22)$$

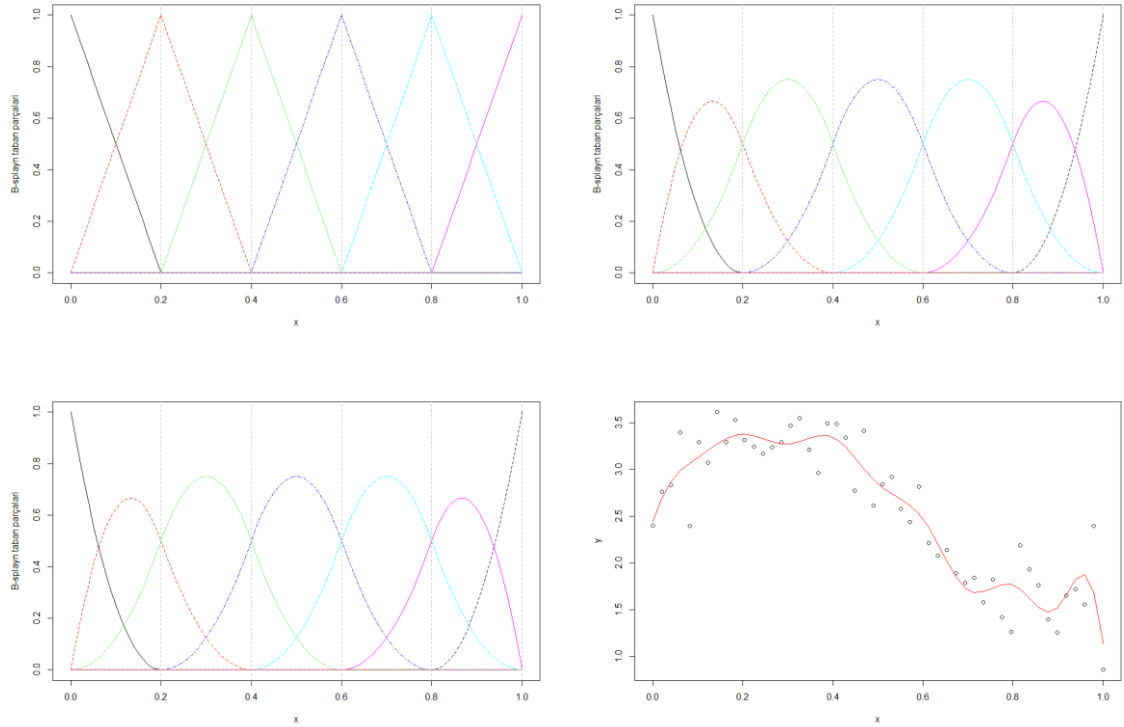
6. B-splaynın integrali:

$$\int_{\tau_i}^t B_{i,k+1}(u) du = \begin{cases} 0, & \text{eğer } t \leq \tau_i \\ \frac{\tau_{i+k+1} - \tau_i}{k+1}, & \text{eğer } t \geq \tau_{i+k+1} \\ \frac{\tau_{i+k+1} - \tau_i}{k+1} \sum_{j=0}^k \frac{t - \tau_{i+j}}{\tau_{i+k+1} - \tau_{i+j}} B_{i+j,k+1-j} & \text{eğer } \tau_i < t < \tau_{i+k+1} \end{cases} \quad (2.23)$$

B-splaynlarının temel özellikleri aşağıda yer almaktadır [21]:

- $(k + 1)$ parça k . dereceli polinomlardan oluşmaktadır;
- Polinom parçalar k iç düğüm noktalarında birleştirilmektedir;
- Birleşim noktalarında $(k - 1)$ mertebeye kadar türevleri süreklidir;
- B-splayn $k + 2$ düğüm noktalarında pozitifdir; diğer noktalarda sıfıra eşittir;
- Sınırlardan hariç B-splaynlar $2 * k$ komşu polinom parçalarından oluşmaktadır.

Şekil 2.2'de farklı dereceli B-splaynlar gösterilmiştir. Üst soldaki grafik birinci dereceli B-splaynı göstermektedir. B-splayn $k + 2$ düğüm noktalarından oluşmaktadır. Her bir nokta bir düğüm noktası olarak seçilmiştir. Diğer şekiller ikinci dereceden splaynı ve kübik B-splaynları göstermektedir. Son şekil bir veri setinin kübik B-splaynın taban fonksiyonuyla tahmin edilmiş olduğunu göstermektedir.



Şekil 2.2. B-splayn taban fonksiyonlarının örnekleri

2.5. Çok Boyutlu Splayn ve Özellikleri

Çok boyutlu yüzey yaklaşımı önemli problem olarak belirlenmiştir ve bir kaç yöntem geliştirilmiştir. Genel hedef $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ gözlemleri için $y = f(x)$ p -boyutlu yüzey fonksiyonu $\varphi(x)$ yaklaşımı oluşturmaktır. Var olan bir çok ile, (ince tabakalı splayn, tensör çarpım splaynı) gibi [24,74], doğrusal şekilde hesaplanabilmektedir.

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n w_i y_i \quad (2.24)$$

Burada w_i ağırlıkları x_i 'ye bağlıdır. Bu yöntemlerin avantajı, onların doğrudan hesaplanabilmesidir. Ancak pratikte bu yöntemler bazı yüzey özelliklerinden dolayı sınırlıdır.

İki boyutlu uzayda $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_n$ noktaları ve g_1, g_2, \dots, g_n değerleri verilmiş olsun. Tek boyutlu durumdaki gibi, enterpolasyon problemi öyle bir g pürüzsüz fonksiyon bulunsun, ki $g(\mathbf{t}_i) = g_i, i = 1, 2, \dots, n$ olsun. Bu durumda, iki boyutlu uzayda g iki boyutlu vektör \mathbf{t} için fonksiyon olmaktadır.

g yüzey fonksiyonu tahmin etmek bir çok alanlarda ilgi çeken bir problemdir. Örneğin, g fonksiyonu barometrik basıncı yeryüzü noktasında olabilir, g_i gözlemlerin t_i hava istasyon noktasında değer alınmış verileri yeniden kurulmakta kullanılabilir.

g yüzeyi pürüzsüz, iki defa sürekli diferansiyellenebilir olduğu varsayalım. Her bir g pürüzsüz yüzey verildiğinde, g fonksiyonun pürüzlülüğü ölçen $J(g)$ fonksiyoneli tanımlanmaktadır. Önce $J(g)$ pürüzlülük fonksiyoneli için bazı önemli noktalar göstermektedir.

1. $J(g)$ fonksiyoneli g fonksiyonundaki hızlı değişimi ölçer ve yerel doğrusallıktan ayrılmaktadır.

2. Koordinat değişikliği iki boyutlu uzayda $J(g)$ fonksiyonel değerlerini etkilememektedir.

3. $J(g)$ fonksiyoneli her zaman pozitiftir.

4. $J(g)$ fonksiyoneli minimize eden g yüzey fonksiyonu bulma problemi, $g(t_i) = g_i$ kısıtlamalara bağlıdır.

Bu özellikleri sağlayan pürüzlülük ceza terimini tanımlamak için, (x, y) koordinatları iki boyutlu uzayda t noktaları verilmektedir. Bu durumda fonksiyon $g(x, y)$ şekilde yazılabilmektedir.

$$J(g) = \iint_{\mathbb{R}^2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dx dy \quad (2.25)$$

$J(g)$ ceza fonksiyonu g iki boyutlu uzayda integrallenebilir.

3. REGRESYON SPLAYN VE CEZALI SPLAYN

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılan regresyon splaynları, pürüzlülük ceza yaklaşımı ve cezalı splaynlardan bahsedilmektedir. Doğal kübik splayn enterpolasyon kurulması ve onun pürüzsüz splaynlarda kullanılması tanımlanmaktadır. Çok değişkenli ve çok boyutlu splaynlar, toplamsal modeller, yarıparametrik modeller, ince tabakalı splaynlar konusunda alt bölümlerde bilgi verilmektedir.

Cezalı en küçük kareler regresyonu ve splayn düzeltme yöntemi son yıllarda popülerlik kazanan esnek veri uydurma yöntemleri için sıkça kullanılan tekniklerdir. Temel splayn düzeltme kavramının başlangıcı Whittaker [101]'e verirken, splayn düzeltme ve onun türlerinin modern gelişimine daha çok Green ve Silverman'nın katkısı olmuştur. Bu bağlamda, splayn modellerle ilgili çok daha ayrıntılı bilgi bu kaynaklardan bulunabilir [26,29,99].

3.1. Splayn Düzeltme: Pürüzlülük Ceza Yaklaşımı

Pratikte doğrusal regresyon modele uymayan çok veri seti kullanılmaktadır: Bu durumda parametrik olmayan regresyon yöntemlerden yararlanılmaktadır. Daha dağınık veri seti için splayn yöntemlerin genel formu aşağıda gösterilebilir:

$$y = f(t) + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.1)$$

Burada f bilinmeyen bir eğridir. f fonksiyonu tahmin etmek için polinom kullanımı klasik yöntemdir, polinomun katsayıları en küçük kareler yöntemiyle tahmin edilmektedir.

Ancak Bölüm 2.'de bahsettiği gibi, polinom regresyonu popüler yöntemdir, ama çeşitli dezavantajlara sahiptir. Bunlardan biri, bireysel gözlemlerin beklenmeyen şekilde etki yaratmasıdır. Başka bir zorluk, polinomun derecesini arttığında aşırı uyum (overfitting) problemi ortaya çıkabilir. Bu dezavantajlarından dolayı polinom modeller bazı karmaşık problemlerde kullanılmaz. Pürüzlülük ceza yaklaşımı bu tür problemlerde daha uygundur [26].

$[a, b]$ aralığında verilmiş f , eğriyi farklı yöntemlerle pürüzlü olduğunu ölçebilmektedir. İkinci mertebeden differansiyellenebilir f eğrinin pürüzlülüğün ölçülmesinin sezgisel yöntemi, onun ikinci türevinin karesinin integralini $\int_a^b \{f''(x)\}^2$ hesaplanmasıdır.

$[a, b]$ aralığında verilmiş iki mertebeden differansiyellenebilir f fonksiyonu ve düzeltme parametresi $\lambda > 0$ verilmiş olsun. Cezalı kareler toplamı aşağıdaki formülden hesaplanmaktadır.

$$S(f) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(t_i))^2 + \lambda \int_a^b (f''(x))^2 dx \quad (3.2)$$

Cezalı en küçük kareler kestiricisi \hat{f} , $S(f)$ 'i tüm iki mertebeden differansiyellenebilir f fonksiyonları sınıfı üzerinden minimize edilen olarak tanımlanmaktadır.

Eşitlik (3.2)'deki $\lambda \int f''^2$ pürüzlülük ceza terimi eklemesi, eğrinin ceza terimi $S(f)$ sadece artık kareler toplamından $\sum (y_i - f(t_i))^2$, aynı zamanda onun pürüzlülüğünü $\int f''^2$ belirlemektedir. Düzeltme parametresi λ , artık hata ve yerel varyasyon arasındaki 'değişim oran'ını gösterilmektedir. Verildiği λ değeri $S(f)$ 'in minimizasyonun en iyi pürüzsüzlük ve uyumluğun uzlaşmasını sağlamaktadır. λ 'nın değeri çok büyük olduğunda $S(f)$ 'in esas bileşeni pürüzlülük ceza terimi olmaktadır ve bundan dolayı \hat{f} daha az eğrisellik göstermektedir. Diğer taraftan, λ çok küçük değer aldığı anda $S(f)$ 'in ana katkısı artık kareler toplamından olmaktadır. Bu durumda \hat{f} eğri tahmincisi verilere çok yakından yaklaşmaktadır. Düzeltme parametrelerinin seçim yöntemleri gelecek bölümlerde anlatılacaktır.

3.2. Kübik Splayn Enterpolasyonu

t_1, t_2, \dots, t_n , noktaları, $[a, b]$ parçasının $a < t_1 < t_2 < \dots < t_n < b$ koşulunu sağlayan noktaları olsun. t_i , $i = 1, 2, \dots, n$ düğüm noktaları olarak adlandırılır.

Tanım 1. $[a, b]$ parçasında, $a < t_1 < t_2 < \dots < t_n < b$ düğüm noktalarıyla aşağıdaki iki koşulu sağlayan $f(t)$ fonksiyonuna, kübik splayn denir:

1. Her bir $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n$ aralığında $f(t)$, $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ olmak üzere, $f(t) = a_{0i} + a_{1i}(t - t_i) + a_{2i}(t - t_i)^2 + a_{3i}(t - t_i)^3$ şeklinde bir kübik polinomdur.

2. $[a, b]$ parçasında (t_i düğüm noktaları dahil olmak üzere) $f(t)$, $f'(t)$ ve $f''(t)$ fonksiyonları süreklidir.

Tanımdan anlaşıldığı gibi kübik splayn, düğüm noktalarında pürüzsüz olarak kübik polinom parçalarının birleşimidir.

Tanım 2. $[a, b]$ parçasında verilmiş kübik splaynın a ve b uç noktalarında ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri sıfır olduğunda, bu splayna doğal kübik splayn (Natural Cubic Splayn-NCS),

$$f''(a) = f''(b) = 0, f'''(a) = f'''(b) = 0 \quad (3.3)$$

koşullarına da doğal sınır koşulları denir.

Bu sonuç, $f(t)$ fonksiyonunun, $[a, t_1]$ ve $[t_n, b]$ sınır parçalarında doğrusal fonksiyon olduğunu ifade etmektedir.

$f(t)$ fonksiyonu $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ düğüm noktalarıyla bir doğal kübik splayn olsun ve $f_i = f(t_i)$ ve $\gamma_i = f''(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ olarak tanımlansın. Doğal kübik splayn için $\gamma_1 = \gamma_n = 0$ olur. $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$, $\mathbf{\gamma} = (\gamma_2, \dots, \gamma_{n-1})^T$ ve $h_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$ olsun. $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ düğüm noktalarının yardımıyla \mathbf{Q} ve \mathbf{R} bant matrisleri tanımlanabilir. $n \times (n - 2)$ boyutlu $\mathbf{Q}(q_{ij})$ matrisinin elemanları aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$q_{j-1,j} = h_{j-1}^{-1}, \quad (3.4)$$

$$q_{j,j} = -h_{j-1}^{-1} - h_j^{-1}, \quad (3.5)$$

$$q_{j+1,j} = h_j^{-1}, j = 2, \dots, n - 1 \quad (3.6)$$

$$q_{ij} = 0, |i - j| \geq 2, i = 1, \dots, n, j = 2, \dots, n - 1 \quad (3.7)$$

\mathbf{Q} matrisinin ilk sütunu $j = 2$ ile işaretlenmiştir. $(n - 2) \times (n - 2)$ boyutlu simetrik $\mathbf{R}(r_{ij})$ matrisinin r_{ij} elemanları ise aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$r_{ii} = \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i), i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (3.8)$$

$$r_{i,i+1} = r_{i+1,i} = \frac{1}{6}(h_i), i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (3.9)$$

$$r_{ij} = 0, |i - j| \geq 2 \quad (3.10)$$

(3.8-3.10) denklemlerinde matris simetriktir ve dominant köşegen matristir, diğer bir ifadeyle $|r_{ii}| > \sum_{i \neq j} |r_{ij}|$ 'dir. Bu nedenle de \mathbf{R} simetrik pozitif tanımlı matristir [26].

Teorem 3.1. t_1, t_2, \dots, t_n ve $n \geq 2$ verilmiş olsun. z_1, z_2, \dots, z_n verilmiş herhangi değerleri, t_i noktalarında kurulan tek f doğal kübik splayn aşağıdaki eşitliği sağlamaktadır.

$$f(t_i) = z_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.11)$$

Bu teorem doğal kübik splayn enterpolantı n noktalarında bulunma konusunda, pratik algoritması olarak kullanılmaktadır. \mathbf{R} matrisi üç köşegen matrisidir, yani $r_{ij} = 0$, $|i - j| \geq 2$, böylece $\mathbf{R}\mathbf{y} = \mathbf{t}$, \mathbf{y} için doğrusal operasyonlarla, \mathbf{R}^{-1} bulunmadan çözülebilmektedir.

\mathbf{Q} üç köşegen matrisi, $\mathbf{Q}^T \mathbf{f}$ doğrusal operasyonlarla \mathbf{f} 'den bulunması, anlamına gelmektedir. $\mathbf{Q}^T \mathbf{f}$ 'in kolay hesaplama yolu, $i = 2, \dots, n - 1$ için aşağıdaki ifade de verilmektedir.

$$(\mathbf{Q}^T \mathbf{f})_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}. \quad (3.12)$$

Bu teoremin ispatı doğal kübik splayn'nin optimumluk özelliğinde kullanılmaktadır [72,73].

Teorem 3.2. Tanımlanan \mathbf{f} ve \mathbf{y} vektörleri ancak ve ancak

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{f} = \mathbf{R}\mathbf{y} \quad (3.13)$$

koşulu sağlandığında bir $f(\cdot)$ doğal kübik splayn'i belirtmektedir.

(3.13) denkleminde belirtilen $\mathbf{R}\mathbf{y}$ ve $\mathbf{Q}^T \mathbf{f}$ matrisleri aşağıdaki şekilde gösterilebilmektedir.

$$\mathbf{R}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(h_1 + h_2) & \frac{1}{6}h_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{1}{6}h_2 & \frac{1}{3}(h_2 + h_3) & \frac{1}{6}h_3 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \frac{1}{6}h_3 & \frac{1}{3}(h_3 + h_4) & \frac{1}{6}h_4 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{6}h_{n-3} & \frac{1}{3}(h_{n-3} + h_{n-2}) & \frac{1}{6}h_{n-2} & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{6}h_{n-2} & \frac{1}{3}(h_{n-2} + h_{n-1}) & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} & -\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) & \frac{1}{h_2} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2} & -\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_3} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{h_{n-3}} & -\left(\frac{1}{h_{n-3}} + \frac{1}{h_{n-2}}\right) & \frac{1}{h_{n-2}} & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & -\left(\frac{1}{h_{n-2}} + \frac{1}{h_{n-1}}\right) & \frac{1}{h_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^T \mathbf{f} \quad (3.14)$$

\mathbf{R} ve \mathbf{Q} matrisleri üç köşegen matrisleridir, yani indisleri $|i - j| \geq 2$ olan elemanlar sıfırdır. Bundan dolayı $\mathbf{R}\mathbf{y} = \mathbf{b}$, ($\mathbf{b} = \mathbf{Q}^T \mathbf{f}$) olmakla, denklemi \mathbf{R}^{-1} bulunmadan daha kolay (doğrusal yöntemle) çözülebilir. $\mathbf{Q}^T \mathbf{f}$ vektörü ise, (3.14) sistemin sağ taraftaki vektördür.

Bu durumda pürüzlülük ceza terimi,

$$\int_a^b f''(t)^2 dt = \mathbf{y}^T \mathbf{R} \mathbf{y} = \mathbf{f}^T \mathbf{K} \mathbf{f} \quad (3.15)$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada $\mathbf{K} = \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T$ olarak ifade edilen ceza matrisidir.

Teoremi ispatlamak için, kısmi integral kuralı kullanılarak, (3.15) eşitliğin sağ kısmı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int_a^b f''^2(t) dt = \int_a^b f''(t) f'''(t) dt = f'''(t) f'(t) \Big|_a^b - \int_a^b f''''(t) f'(t) dt \quad (3.16)$$

$f''(a) = f''(b) = 0$ ve $f''''(t) = 0$ fonksiyonunun her bir (t_i, t_{i+1}) aralığında sabit ve $[t_1, t_n]$ parçasının dışında sıfır olduğundan dolayı

$$\int_a^b f''^2(t) dt = - \int_a^b f''''(t) f'(t) dt = \sum_{i=1}^{n-1} f''''(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) dt \quad (3.17)$$

(t_i, t_{i+1}) aralığında $f''''(t) = \frac{\gamma_{i+1} - \gamma_i}{h}$ ve $f(t_i) = f_i$ olduğundan dolayı

$$\int_a^b f''^2(t) dt = \sum_{i=2}^{n-1} \gamma_i \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \quad (3.18)$$

Bu ifade (3.13), (3.15) eşitliklerinde göz önüne alındığında, sonuç aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\int_a^b f''^2(t) dt = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{f} = \mathbf{y}^T \mathbf{R} \mathbf{y} = \mathbf{f}^T \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{f} = \mathbf{f}^T \mathbf{K} \mathbf{f} \quad (3.19)$$

Bu ifade ile teorem ispatlanmış olur.

Şimdi, doğal kübik splayn interpolasyonun optimumluk özelliğinden bahsedilecektir. $[a, b]$ aralığında ikinci mertebeden türeve sahip fonksiyonlar uzayını $C^2[a, b]$ göstermek üzere, doğal kübik splayn interpolantı; verileri enterpole eden sınıfında bulunan tüm pürüzsüz fonksiyonlar arasında, $\int_a^b f''^2(t) dt$ pürüzlülük cezasını minimum yapan özelliğe sahiptir.

Teorem 3.3. $f(t)$ fonksiyonun $[a, b]$ aralığındaki $(f_i, t_i), i = 1, 2, \dots, n, a < t_1 < t_2 < \dots < t_n < b$ ve $n \geq 2$ koşulunu sağlayan gözlemleri uygun doğal kübik splayn interpolantı olduğu varsayalım. Bu durumda $g(t_i) = f_i, i = 1, 2, \dots, n$ koşulunu sağlayan herhangi bir $g(t) \in C^2[a, b]$ fonksiyonu için

$$\int_a^b f''^2(t) dt \leq \int_a^b g''^2(t) dt \quad (3.20)$$

Bu ifadedeki eşitlik ancak ve ancak $f(t) \equiv g(t)$ olduğunda sağlanmaktadır.

İspat. $[a, b]$ aralığında $h(t) = g(t) - f(t)$ fonksiyonu tanımlansın. $h(t_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ olsun. $f''(t)$ doğal kübik splaynın a ve b uç noktalarında türevlerini sıfıra eşit olduğu, kısmı integral kuralı kullanarak, aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\int_a^b f''(t)h''(t) dt = f''(t)h'(t)|_a^b = - \int_a^b f'''(t)h'(t) dt \quad (3.21)$$

$[t_i, t_{i+1}]$ aralığında $f'''(t) = f'''(t_i^+)$ sabit olduğundan,

$$\begin{aligned} \int_a^b f''(t)h''(t) dt &= - \int_a^b f'''(t)h'(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} f'''(t_i^+) \int_{t_i}^{t_{i+1}} h'(t) dt = \sum_{i=1}^{n-1} f'''(t_i^+) (h(t_{i+1}) - h(t_i)) = 0 \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Şimdi (3.21)'i kullanarak aşağıdaki integrali değerlendirelim.

$$\begin{aligned} \int_a^b g''^2(t) dt &= \int_a^b (f''(t) + h''(t))^2 dt = \int_a^b f''^2(t) dt + 2 \int_a^b f''(t)h''(t) dt + \\ &\int_a^b h''^2(t) dt = \int_a^b f''^2(t) dt + \int_a^b h''^2(t) dt \geq \int_a^b f''^2(t) dt \quad (3.22) \end{aligned}$$

Buna göre (3.22)'da eşitlik durumu ancak $\int_a^b h''^2(t) dt = 0$ olduğunda sağlanır. Söz konusu bu eşitlik $h(t)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında doğrusal olması halinde sağlanabilir. Bu durumda, $h(t)$ fonksiyonu $t_i, i = 1, 2, \dots, n$ noktalarında sıfır değerlerini alan bir doğrusal fonksiyon ve $n \geq 2$ olduğunda $h(t) \equiv 0$ olur. $f(t) \equiv g(t)$ sonuçlandırarak, teoremin ispatı tamamlanmış olur.

3.3. Splayn Düzeltme Yöntemi

Bu bölümde splayn düzeltme yöntemi ve onun kestircisinin bulunması ayrıntılı bir şekilde incelenmektedir.

$C^2[a, b]$ 'de verilen herhangi bir f fonksiyonu ve $\lambda > 0$ düzeltme parametresi olsun. Splayn düzeltme yöntemin amacı, $f \in C^2[a, b]$ fonksiyon uzayındaki tüm f fonksiyonları arasında,

$$S(f) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(t_i))^2 + \lambda \int_a^b (f''(t))^2 dt \quad (3.23)$$

eşitliği belirtilen $S(f)$ 'cezalı en küçük kareleri' minimum yapmaktadır.

Eşitlik (3.23)'teki ilk terim, artık kareler toplamı (RSS) gösterir, bir başka deyişle uyumun verilere yakınlığını gösterir. İkinci terim pürüzlülük cezasını gösterir, bir başka

deyişle fonksiyondaki eğriliği cezalandırır. Cezalı terimde yer alan $\lambda > 0$ düzeltme parametresini belirtir ve bu parametre $\int_a^b (f''(t))^2 dt$ ile eğrinin pürüzlülüğü ve $\sum_{i=1}^n (y_i - f(t_i))^2$ ile ölçülen verilere uyumunu dengeler. Eşitlik (3.23) için çözüm splayn düzeltme kestirici olarak adlandırılır ve t_1, \dots, t_n düğüm noktaları ile beraber “doğal kübik splayn” olarak bilinir.

f fonksiyonunun $\mathbf{f}, \boldsymbol{\gamma}$ vektörleri ve \mathbf{Q}, \mathbf{R} matrisleri ile tanımlanan bir doğal kübik splayn olduğu varsayalım. $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ verilen gözlem değerleri vektörü olsun. t_i düğüm noktalarında $f(t_i)$ değerlerinin vektörü, $\mathbf{f} = (f(t_1), \dots, f(t_n))^T$ olduğundan f 'e göre (3.23)'deki artık kareler toplamı,

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(t_i))^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{f})^T (\mathbf{y} - \mathbf{f}) \quad (3.24)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (3.19) ifadesine göre $\int_a^b (f''(t))^2 dt$ terimi $\mathbf{f}^T \mathbf{K} \mathbf{f}$ değerine eşittir. Buna göre, cezalı en küçük kareler toplamı aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$S(f) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(t_i))^2 + \lambda \int_a^b (f''(t))^2 dt = (\mathbf{y} - \mathbf{f})^T (\mathbf{y} - \mathbf{f}) + \lambda \mathbf{f}^T \mathbf{K} \mathbf{f} \quad (3.25)$$

Sonuç olarak cezalı kareler toplamı

$$S(f) = \mathbf{f}^T (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{K}) \mathbf{f} - 2\mathbf{y}^T \mathbf{f} + \mathbf{y}^T \mathbf{y} \quad (3.26)$$

şeklinde ifade edilir.

\mathbf{K} matrisi yarı-pozitif tanımlı ve $\lambda > 0$ olduğundan, $\lambda \mathbf{K}$ matrisi de yarı-pozitif tanımlı matris olacaktır. Bundan dolayı $(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{K})$ kesin pozitif tanımlı matristir. Bu yüzden $S(f)$ 'in kare formu tek bir minimuma sahiptir. Buna göre (3.25)'e minimum değer veren \mathbf{f} vektörü, (3.26)'ün \mathbf{f} 'e göre türev fonksiyonuna sıfır değerini veren vektördür.

$$\begin{aligned} S'(f) &= 2\mathbf{f}(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{K}) - 2\mathbf{y} = \mathbf{0} \\ 2\mathbf{f}(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{K}) &= 2\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Böylece

$$\mathbf{f} = (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{K})^{-1} \mathbf{y} \quad (3.27)$$

olarak elde edilir.

Burada $(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{K})^{-1}$ matrisi, düzeltme matrisi olarak adlanır ve bu matris, sadece verilen $\lambda > 0$ düzeltme parametresi ve $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ düğüm noktaları vektörü ile

belirlenir. Böylece \mathbf{y} değerlerini \mathbf{f} vektörüne görüntüleyen $n \times n$ boyutlu düzeltme matrisi,

$$\mathbf{S}_\lambda = (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{K})^{-1} \quad (3.28)$$

eşitliğini tanımlar. $\mathbf{f} = (f(t_1), \dots, f(t_n))$ splayn düzeltme kestiricisi, (3.27)'de verilen matrisinin yardımıyla $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ vektörünün bir doğrusal dönüşümü olarak da tanımlanabilir.

$$\mathbf{f}_\lambda = \begin{pmatrix} f_\lambda(t_1) \\ f_\lambda(t_2) \\ \vdots \\ f_\lambda(t_n) \end{pmatrix} = \mathbf{S}_\lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

ya da

$$\mathbf{f}_\lambda = \mathbf{S}_\lambda \mathbf{y} \quad (3.30)$$

Burada \mathbf{f}_λ , $\lambda > 0$ düzeltme parametresi için (t_1, \dots, t_n) düğümlü doğal kübik splayn ve \mathbf{S}_λ , (3.28)'te verilen λ 'ya bağlı bilinen pozitif tanımlı bir düzeltme matrisidir.

Splayn düzeltme kestiricisi,

$$\mathbf{f}_\lambda(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{S}_\lambda(t) y_i \quad (3.31)$$

şeklinde her bir $t_i, i = 1, 2, \dots, n$ için hesaplanabilen \mathbf{S}_λ sabitlerinin var olması anlamında doğrusaldır.

Doğal kübik splayn düzeltme kestiricisinin direkt olarak hesaplanması pratik anlamında verimli değildir. Bu amaçla Reinsch [70] algoritmasından yararlanarak, hesaplanabilmektedir. Reinsch algoritmasının esas amacı, f 'nin ikinci türevinin $t_i, i = 1, 2, \dots, n$ düğüm noktalarındaki γ_i değerleri için tekil olmayan bir doğrusal denklemler sistemi kurmaktır. Bu algoritma γ_i ve y_i verilere dayanarak belirgin formülle f_i değerlerini verir. Tartışmada nümerik doğrusal cebirden, bir bant matrisinin Cholesky ayrıştırması konusunda değişik görüşler kullanılacaktır.

Bir matrisin sıfırdan farklı tüm elemanları az sayıda köşegen üzerinde yer alırsa “bant matrisi” olarak bilinir ve sıfırdan farklı köşegen sayısı matrisin “bant genişliği (bandwidth)” olarak adlandırılır. Böylece B , $2k + 1$ bant genişliği olan simetrik bir bant matris ise, $i - j > k$ için b_{ij} elemanı sıfırdır. Yukarıdaki formüllerde belirtildiği gibi \mathbf{Q} ve \mathbf{R} matrisler ikisi de 3 bant genişliğine sahip bant matrislerdir. (3.27)'den

$$(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T) \mathbf{f} = \mathbf{y} \quad (3.32)$$

olarak yazılabilir. Böylece

$$\mathbf{f} = \mathbf{y} - \lambda QR^{-1}Q^T \mathbf{f} \quad (3.33)$$

elde edilir. Şimdi (3.33) ifadesine göre $Q^T \mathbf{f}$ yerine $\mathbf{R}\boldsymbol{\gamma}$ yazarak, \mathbf{f} için $\boldsymbol{\gamma}$ ve \mathbf{y} 'ye dayalı aşağıdaki formül elde edilir:

$$\mathbf{f} = \mathbf{y} - \lambda Q\boldsymbol{\gamma} \quad (3.34)$$

Bu ifadesinin her iki kısmını soldan Q matrisine çarpıp, yine $Q^T \mathbf{f}$ yerine $\mathbf{R}\boldsymbol{\gamma}$ yazarak

$$Q^T \mathbf{y} - \lambda Q^T Q\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}\boldsymbol{\gamma} \quad (3.35)$$

ifadesi elde edilir. Buradan $\boldsymbol{\gamma}$ için aşağıdaki denklem elde edilmektedir

$$(R + \lambda Q^T Q)\boldsymbol{\gamma} = Q^T \mathbf{y} \quad (3.36)$$

Bu denklem algoritmanın esasıdır. $(R + \lambda Q^T Q)$ matrisinin 5 bant genişliğine sahip olduğu görülebilir, ayrıca R kesin pozitif tanımlı ve $\lambda > 0$ olduğundan bu matris simetrik ve kesin pozitif tanımlıdır. Bu yüzden bu matris

$$R + \lambda Q^T Q = LDL^T \quad (3.37)$$

şeklinde bir Cholesky ayrışımına sahiptir. Burada D kesin pozitif köşegen matris ve L , elemanları $j < i - 2$ ve $j > i$ için $l_{ij} = 0$ ve köşegenleri $l_{ij} = 1$ şeklinde olan bir alt üçgen bant matristir. Bu durumda Q ve R matrisleri, sıfırdan farklı köşegenleri saklaması koşuluyla, $O(n)$ işlemde elde edilebilir. Böylece L ve D doğrusal şekilde hesaplanabilir.

3.4. Cezalı Splaynlar

Cezalı splayn regresyon tekniği ilk olarak Eilers ve Marx tarafından önerilmiştir [21]. P-splayn regresyonunda splayn fonksiyonu için taban fonksiyonlar olarak B-splaynlar kullanılır. B-splaynlar ise uygun sayıda τ düğüm noktaları ve polinom parçaları ile oluşturulur. Düğüm noktalar kümesi τ_1, \dots, τ_n olan B-splaynlar aşağıdaki formüller yardımı ile hesaplanabilir [15]:

$$B_j^0(x) = I_{[\tau_j, \tau_{j+1}]}(x) \quad (3.38)$$

$$B_j^k(t) = \frac{t - \tau_j}{\tau_{j+p} - \tau_j} B_j^{k-1}(t) + \frac{\tau_{j+1} - t}{\tau_{j+p+1} - \tau_{j+1}} B_{j+1}^{k-1}(t) \quad (3.39)$$

burada $B_j^k(x)$ k . dereceden B-splaynı ifade etmektedir.

Önce B-splayn taban fonksiyonların cezalı bölünmüş farkı yardımıyla elde edilmesi incelenmektedir. $t \in (\tau_j, \tau_{j+1})$ noktasında verilmiş splaynı değerlendirilmesi olsun. Bölüm 2.4'deki B-splaynın yerel destek (Local support) özelliğinden

$$f(t) = \sum_{i=j-k}^j a_i B_{i,k+1}(t) \quad (3.40)$$

olmaktadır. Bu ifadeden B-splayn değerleri tekrarlama özelliği (recursion) kullanarak hesaplanabilmektedir. Çizelge 3.1'deki üçgen şemada her bir sütun $l, l = 1, \dots, k + 1$, sıfır olmayan $B_{i,l}(t)$ B-splayn değerlere sahiptir.

Üçgen şema tablosundaki her bir eleman, iki önceki sütündeki elemanın doğrusal kombinasyonundan hesaplanmaktadır. Son sütündeki B-splayn değerlerin toplamı, B-splayn katsayılarla çarpımı ile, splayn değeri verilmektedir.

Çizelge 3.1. $t \in (\tau_j, \tau_{j+1})$ noktasında sıfır olmayan B-splayn değerleri hesabında üçgen şema

\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
0	0	0	...	0
$B_{j,1}(t) = 1$	$B_{j-1,2}(t)$	$B_{j-2,3}(t)$...	$B_{j-k,k+1}(t)$
0	$B_{j,2}(t)$	$B_{j-1,3}(t)$...	$B_{j-k,k+1}(t)$
\vdots	0	$B_{j,3}(t)$
	\vdots	0	\ddots	\vdots
		\vdots	\ddots	$B_{j,k+1}(t)$
			\vdots	0
				\vdots

Eilers ve Marx B-splayn, taban fonksiyonlarında kullanılan cezalı yönteminde bazı değiştirmeler önermişlerdir.

$\{t_i, y_i\}_{i=1}^n$ gözlem değerlerine sahip ve n sayıda B-splayndan oluşan regresyon fonksiyonunun tahmini için en küçük kareler yöntemi kullanılır. Dolayısıyla problem, aşağıdaki ifadenin minimize edilmesine dönüşür:

$$S = \sum_{i=1}^n \{y_i - \sum_{j=1}^n a_j B_j(t_i)\}^2. \quad (3.41)$$

(τ_1, \dots, τ_n) düğüm noktalarının sayısı büyük olsun, öyle ki yaklaştığı eğri daha geniş varyasyon gösterilsin. O'Sullivan [66] ise modeli daha esnek yapmak için regresyon eğrisinin eğimi ile ilişkili ceza teriminin eklenmesini önermiştir.

$$S = \sum_{i=1}^n \{y_i - \sum_{j=1}^n a_j B_j(t_i)\}^2 + \lambda \int_{t_{min}}^{t_{max}} \{\sum_{j=1}^n a_j B_j''(t)\}^2 dt \quad (3.42)$$

Burada S cezalı hata kareler toplamıdır ve a_j parametreleri, verilmiş bir λ düzeltme parametresi için cezalı en küçük kareler metodu ile elde edilir. Uygun fonksiyonun ikinci türevin kare integrali, splayn düzeltme yöntemine benzerdir.

Eilers ve Marx [21] tarafından geliştirilen bu model için iki varsayım bulunmaktadır. Birincisi, $B = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_k(t))$, $n \times k$ boyutlu bir matris ve a katsayılar vektörü olmak üzere, $E(y) = \mathbf{B}a$ şeklinde verilmiştir. İkincisi ise komşu B-splayn katsayılarının Newton'un sonlu farklar cinsinden ifade edilebilmesidir ve böylece cezalı hata kareler toplamındaki ceza terimi sonlu farklarla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$S(a) = \sum_{i=1}^m \{y_i - \sum_{j=1}^n a_j B_j(t_i)\}^2 + \lambda \sum_{j=k+1}^n (\Delta^k a_j)^2 \quad (3.43)$$

burada $\Delta^k a_j = \Delta^1(\Delta^{k-1} a_j)$ ve $\Delta^1 a_j = a_j - a_{j-1}$ 'dir.

Cezalı en küçük kareler yönteminde yukarıdaki $S(a)$ fonksiyonunu minimize etme problemi ele alınır ve bu problemin çözümü aşağıdaki denklem sistemi şeklinde ifade edilebilir:

$$\mathbf{B}'\mathbf{y} = (\mathbf{B}'\mathbf{B} + \lambda \mathbf{D}'_k \mathbf{D}_k)\mathbf{a} \quad (3.44)$$

burada \mathbf{D}_k , Δ^k fark operatörüne uygun matristir, \mathbf{B} matrisinin elemanları $b_{ij} = B_j(x_i)$ olarak belirlenir.

Bu yöntem yaklaşım problemini daha az operasyonla hesaplanmasında önerilmektedir. Splayn düzeltmelerde gözlem sayısı m operasyonla hesaplama sayısını, cezalı splaynlarda operasyon boyutunu n , başka bir deyişle B-splayn sayısına indirmektedir. Cezalı farklar regresyon eşitliklerinde kullanılabilir.

Örnek olarak, O'Sullivan [67] makalesinde cezalı üçüncü dereceli B-splayn kullanılmış. Kullanılan modelin ceza terimi aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$C = \lambda \int_{t_{min}}^{t_{max}} \{\sum_{j=1}^n a_j B_j''(t; 3)\}^2 dt \quad (3.45)$$

B-splaynların türev özelliklerinden

$$C = \lambda \int_{t_{min}}^{t_{max}} \left\{ \sum_{j=1}^n \Delta^2 a_j B_j''(t; 1) \right\}^2 dt \quad (3.46)$$

$B_j(t; 1)$ ve $B_k(t; 1)$ splaynların çapraz elemanları kaybolmaktadır, çünkü 1.dereceden B-splaynlar sadece $j = k - 1$, $j = k$, yada $j = k + 1$ kaplanmaktadır. Böylece

$$C = \lambda \int_{t_{min}}^{t_{max}} \left\{ \sum_{j=1}^n \Delta^2 a_j B_j(t, 1) \right\}^2 + 2 \sum_{j=1}^n \Delta^2 a_j \Delta^2 a_{j-1} B_j(t, 1) B_{j-1}(t, 1) dt \quad (3.47)$$

ya da

$$C = \lambda \sum_{j=1}^n (\Delta^2 a_j)^2 \int_{t_{min}}^{t_{max}} B_j^2(t; 1) dt + 2\lambda \sum_{j=1}^n \Delta^2 a_j \Delta^2 a_{j-1} * \int_{t_{min}}^{t_{max}} B_j(t, 1) B_{j-1}(t, 1) dt$$

Bu eşitliği daha kolay şekilde gösterebilmek için integral terimleri ayrı c_1 ve c_2 değişkenlere eşitlenir.

$$C = \lambda \left\{ c_1 \sum_{j=1}^n (\Delta^2 a_j)^2 + c_2 \sum_{j=1}^n \Delta^2 a_j \Delta^2 a_{j-1} \right\} \quad (3.48)$$

Burada c_1 ve c_2 verilmiş düğüm noktalar için sabitlerdir.

$$c_1 = \int_{t_{min}}^{t_{max}} B_j^2(t; 1) dt \quad (3.49)$$

$$c_2 = \int_{t_{min}}^{t_{max}} B_j(t, 1) B_{j-1}(t, 1) dt \quad (3.50)$$

Eşitlik (3.48)'deki birinci terimi ikinci mertebeden ceza farklara eşittir, ikinci terim ise komşu kalan çapraz elemanların ikinci farklarıdır.

P-splaynların özellikleri B-splaynlara çok benzerdir ve aşağıdaki gibi verilir:

- 1) Splaynlar $p + 1$ sayıda p dereceli polinom parçalarından oluşur
- 2) Polinom parçaları q sayıda iç düğüm noktalarında birleşir
- 3) Bu birleşme noktalarında $(q - 1)$. mertebeye kadar sürekli türevler mevcuttur
- 4) Splaynlar $q + 2$ tanım bölgesinde sıfırdan farklı; tanım bölgesi dışında ise sıfır değerini almaktadır.

3.5. Düzeltme Parametresinin Seçimi

Yukarıda pürüzlülük ceza yaklaşım yöntemi kullanarak belirtilen modellerde, optimum düzeltme parametresinin seçimi önemli konulardan biridir.

Parametrik olmayan regresyon modeli için düzeltme parametresinin seçim yöntemlerinden biri Çapraz-geçerlilik (Cross Validation) olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$CV(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{y_i - \hat{f}_\lambda(t_i)}{1 - S_{ii}(\lambda)} \right\}^2 \quad (3.51)$$

burada $\hat{f}_\lambda(\cdot)$, $(t_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ gözlemleri ve λ parametresine uygun splayn düzelticisi, $S_{ii}(\lambda)$ ise $\mathbf{S}_\lambda = (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{K})^{-1}$ düzeltme (hat) matrisinin i . köşegen elemanıdır. Uygun λ parametrenin seçimi, (3.51)'de fonksiyonun minimum yapan seçimidir.

Son yıllarda çok kullanılan düzeltme parametresinin seçim yöntemi Genelleştirilmiş çapraz geçerlilik (Generalized Cross Validation - GCV) yöntemidir. Bu yöntem çapraz geçerlilik fonksiyonunun düzeltilmiş halidir. İlk olarak Craven ve Wahba'nın [11] makalesinde yer almıştır. GCV skorun çapraz geçerlilik yöntemden farkı, CV fonksiyondaki $S_{ii}(\lambda)$ yerine, onların ortalama $\frac{1}{n} \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda)$ ifadesini kullanılmasıdır. Bu durumda GCV fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$GCV(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{y_i - \hat{f}_\lambda(t_i)}{1 - \frac{1}{n} \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda)} \right\}^2 \quad (3.52)$$

Bu ifadede GCV fonksiyonuna minimum değer veren düzeltme parametresi seçilir.

Genelde, GCV ve CV yöntemleri skorları farklı sonuçlar vermektedir ve GCV skoru düzeltme parametresinin seçiminde daha uygun görülmektedir (Aydın, 2005).

GCV fonksiyonu Green ve Silverman [26]'deki şekilde yazılabilir.

$$GCV(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1 - S_{ii}(\lambda)}{1 - \frac{1}{n} \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda)} \right\}^2 \{y_i - \hat{f}^{-i}(t_i)\}^2 \quad (3.53)$$

Regresyon kaynaklarında, şapka matrisinin köşegen elemanlarına kaldıraç (leverage) değerleri denmektedir. S_{ii} , t_i noktasındaki y_i gözlem değerinin $\hat{f}_\lambda(t_i)$ tahmin değerini belirtmektedir.

GCV ve CV yöntemlerinden hariç, düzeltme parametresinin seçimi için başka yöntemler mevcuttur. Mallows'un C_p [42] kriteri düzeltme parametresinin seçimi için uygundur ve aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$C_p(\lambda) = \frac{1}{n} \|\mathbf{S}_\lambda - \mathbf{I}\|^2 + 2\sigma^2 \text{tr}(\mathbf{S}_\lambda) + \sigma^2 \quad (3.54)$$

Bu formülde σ^2 bilinmediğinde, onun farklı $\hat{\sigma}^2$ tahminleri kullanılabilir [25].

$$\hat{\sigma}_{\lambda_p}^2 = \frac{\|(\mathbf{S}_{\lambda_p} - \mathbf{I})\mathbf{y}\|^2}{tr(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{\lambda_p})} \quad (3.55)$$

burada λ_p değeri önceden CV veya diğer kriterden belirlenmektedir.

Klasik AIC (Akaike Information Criteria) kriterinin düzeltilmiş versiyonu olan düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri AIC_C , λ düzeltme parametrenin seçiminde kullanılabilir. Bu yöntem aşağıdaki formda verilmektedir.

$$AIC_C(\lambda) = \log \frac{\|(\mathbf{S}_{\lambda} - \mathbf{I})\mathbf{y}\|^2}{n} + 1 + \frac{2\{tr(\mathbf{S}_{\lambda}) + 1\}}{n - tr(\mathbf{S}_{\lambda}) - 2} \quad (3.56)$$

Diğer yöntemler gibi, λ parametresini minimize eden problem belirlenir.

3.6. Serbestlik Derecesi

Doğrusal regresyon modellerinde serbestlik derecesi, modeldeki etkili olan parametre sayısını belirlemektedir. Parametrik olmayan regresyon problemlerinde tanımlanan serbestlik derecesi doğrusal regresyona benzer şekilde verilmektedir. Üç farklı serbestlik derecesi tanımlanabilmektedir [9].

1. Doğrusal regresyon modeller için tanımlanan $\sum_{i=1}^n var(\hat{y}_i) = m\sigma^2$ 'dir ve m parametre sayısı serbestlik derecesini tanımlar. Splayn düzeltme modellerde $cov \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T \sigma^2$ olduğundan dolayı, serbestlik derecesi aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$df_1(\lambda) = tr(\mathbf{S}_{\lambda} \mathbf{S}_{\lambda}^T) \quad (3.56)$$

2. Parametrik olmayan model için $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{S}_{\lambda} \mathbf{y}$ olduğunda artık kareler toplamının beklenen değeri aşağıdaki denklemde verilmektedir.

$$E[(\mathbf{y} - \mathbf{S}_{\lambda} \mathbf{y})^T (\mathbf{y} - \mathbf{S}_{\lambda} \mathbf{y})] = [n - tr(2\mathbf{S}_{\lambda} - \mathbf{S}_{\lambda}^T \mathbf{S}_{\lambda})] \sigma^2 - \mathbf{f}^T (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{\lambda})^T (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{\lambda}) \mathbf{f}$$

Doğrusal regresyon durumunda bu ifadedeki birinci terim $(n - m)$ 'ye uygundur. Bundan dolayı serbestlik derecesi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$df_2(\lambda) = tr(2\mathbf{S}_{\lambda} - \mathbf{S}_{\lambda} \mathbf{S}_{\lambda}^T) \quad (3.57)$$

3. Ortalama artık kareler (average squared error ASR) için Mallow'un C_p kriteri düzeltilmesi olarak $tr(\mathbf{S}_{\lambda})$. Mesela Mallow'un C_p kriteri ASR'ye $\frac{\hat{\sigma}^2}{n} 2tr(\mathbf{S}_{\lambda})$ eklenerek düzeltilebilir. Bu ifade regresyonda kullanılan hata kareler ortalamasına $2m\hat{\sigma}^2$ eklenmesine benzerdir. Bundan $tr(\mathbf{S}_{\lambda})$ doğrusal regresyonda m parametre sayısına karşılık gelir.

$$df_3(\lambda) = tr(\mathbf{S}_\lambda) \quad (3.58)$$

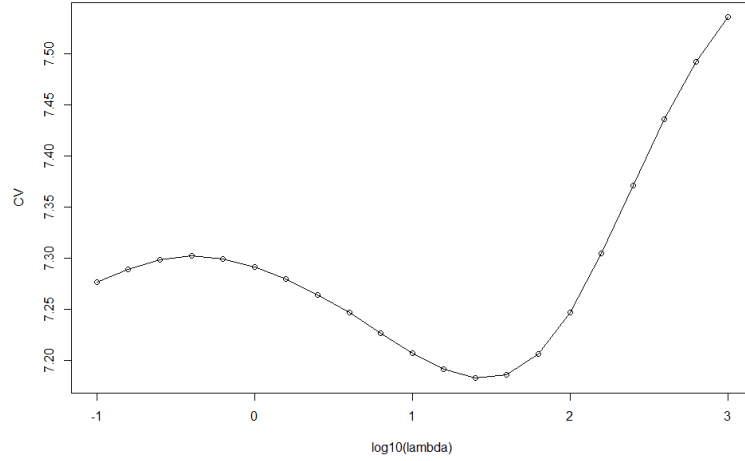
Yukarıda tanımlanan serbestlik derecesi düzeltme parametre seçiminde kullanılabilir. Splayn düzeltme modellerin hesaplama açısından, \mathbf{S}_λ matrisinin köşegen elemanlarının toplamı olan $df_3(\lambda) = tr(\mathbf{S}_\lambda)$ avantaja sahiptir ve çok popülerdir [27, 65, 93].

Aşağıdaki program çıktısında düzeltme parametresinin seçimi için R programında yazılan fonksiyon gösterilmektedir.

```
Data = read.table('air.txt', header = T)
pn3 = ps.normal(Data$wind, Data$ozone)
title('Ozone data', xlab = 'Ozone concentration', ylab = 'Wind speed')
lambda = 1
pn = ps.normal(Data$wind, Data$ozone, lambda = lambda, plot = F)
cat(paste('lambda =', lambda, ' CV = ', pn$cv, '\n'))
lambda = 10
pn = ps.normal(Data$wind, Data$ozone, lambda = lambda, plot = F)
cat(paste('lambda =', lambda, ' CV = ', pn$cv, '\n'))
lambda = 100
pn = ps.normal(Data$wind, Data$ozone, lambda = lambda, plot = F)
cat(paste('lambda =', lambda, ' CV = ', pn$cv, '\n'))

lla = seq(-1, 3, by = 0.2)
cvs = 0 * lla
for (k in 1:length(lla)) {
  lambda = 10 ^ lla[k]
  pn = ps.normal(Data$wind, Data$ozone, lambda = lambda, plot = F)
  cvs[k] = pn$cv
}
plot(lla, cvs, xlab = 'log10(lambda)', ylab = 'CV')
lines(lla, cvs)
```

Bu fonksiyonun sonucu grafiksel şekilde aşağıda verilmektedir. Şekil 3.1.'de görüldüğü gibi minimize eden nokta, λ 'nin optimum değerine sahiptir.



Şekil 3.1. λ 'nin optimum değerinin seçimi

3.7. Yarıparametrik Regresyon Modelleri

Yarıparametrik regresyon modellerin genel amacı, modelde hem parametrik hem de parametrik olmayan belirleyicilerin tahmin edilmesidir. Bu tür problemlerde parametrik ve parametrik olmayan değişkenlerin birleşim modellerinden bahsedilmektedir.

Her bir $y_i, i = 1, 2, \dots, n$ gözlem değerine $m + 1$ açıklayıcı değişkenin (m -boyutlu \mathbf{x}_i bir vektörü) uygun olduğu varsayalım.

$$y_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + f(t_i) + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.58)$$

Bu denklemde ifade edilen regresyon modeline yarıparametrik modeli denir. Burada, $\boldsymbol{\beta}$ katsayılarının m boyutlu vektörü, $f(t_i)$ ikinci mertebeden sürekli türeve sahip pürüzsüz fonksiyonu, ε_i ise hata terimidir. Denklem (3.58)'de $\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$ modelin parametrik kısmını, $f(t_i)$ ise parametrik olmayan kısmını ifade etmektedir. Bu denklem için cezalı hata kareler toplamı aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$S(\boldsymbol{\beta}, f) = \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} - f(t_i))^2 + \lambda \int_a^b (f''(t))^2 dt \quad (3.59)$$

Yarıparametrik regresyon modellerinde $m + 2$ boyutlu gözlemleri $(y_i, \mathbf{x}_i, t_i), i = 1, 2, \dots, n$ şeklinde ifade etmektedir. Bazen $t_i, i = 1, 2, \dots, n$ noktaları, splayn fonksiyonlardaki artan özelliği $a < t_1 < t_2 \dots < t_n < b$ sağlanmayabilir. Başka bir deyişle, bir noktada tekrarlanan düğüm noktaları olabilir. Bu durumu ortadan kaldırmak için \mathbf{N} benzerlik matrisi kullanılır. $\mathbf{N}, n \times n$ boyutlu matrisi şu şekilde tanımlanabilir. t_1, t_2, \dots, t_n artan değerleri sırası s_1, s_2, \dots, s_q olsun ($q \leq n$).

$$N_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t_i = s_j \\ 0, & \text{eğer } t_i \neq s_j \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, q \quad (3.60)$$

Bu matrisinin i . satırının bir elemanı 1 eşittir, kalan elemanları sıfırdır. j . sütunda s_j elemanına eşit olan t_i 'ler için 1, kalan elemanları ise sıfırdır. Cezalı hata kareler bu matrisi kullanarak,

$$S(\boldsymbol{\beta}, f) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{N}f)^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{N}f) + \lambda \int_a^b (f''(t))^2 dt \quad (3.61)$$

şeklinde yazılabilir. $\int_a^b (f''(t))^2 dt = \mathbf{f}^T \mathbf{K} \mathbf{f}$ olduğu bilindiği üzere, denklemi kare formunda yazılabilir.

$$S(\boldsymbol{\beta}, f) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{N}f)^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{N}f) + \lambda \mathbf{f}^T \mathbf{K} \mathbf{f} \quad (3.62)$$

Bu kare formunun minimizasyon problemi, blok matrisli denklemin $\boldsymbol{\beta}$ ve f çözümünün bulunma problemine dönüştürülür.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{X} & \mathbf{X}^T \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T \mathbf{X} & \mathbf{N}^T \mathbf{N} + \lambda \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^T \\ \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \mathbf{y} \quad (3.63)$$

\mathbf{X} matrisi tam sütun ranklı matris ise ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $\beta_0 + \beta_1 t_i$ doğrusal formuna eşit olan bir $\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$ doğrusal kombinasyonu yok ise (3.63) denklemler sisteminin tek bir çözümü vardır ve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{X} & \mathbf{X}^T \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T \mathbf{X} & \mathbf{N}^T \mathbf{N} + \lambda \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

matrisi herhangi bir $\lambda > 0$ için pozitif tanımlı bir matristir. (3.64) denklemler sistemi, $p + q$ denklemler sistemidir ve bu sistemi doğrudan çözmek için büyük hesaplamalar gerekmektedir. Bu nedenle, Geri uyum algoritması (Backfitting algorithm) nümerik yöntemin kullanılması faydalı olabilmektedir. (3.64) denklemler sistemi,

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \mathbf{N}f) \quad (3.65)$$

$$(\mathbf{N}^T \mathbf{N} + \lambda \mathbf{K}) f = \mathbf{N}^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \quad (3.66)$$

matris denklemler şeklinde yazılabilir. (3.65)'de f bilindiğinde, y_i 'den $f(t_i) = (\mathbf{N}f)_i$ çıkartılarak $\boldsymbol{\beta}$ en küçük kareler yöntemiyle bulunabilir. Eğer $\boldsymbol{\beta}$ bilindiğinde, (3.66) denklemi $y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$ form formlarına göre kübik splayn düzeltmeyi gerçekleştirmeye imkan sağlar.

Backfitting olarak bilinen iterasyon prosedürü Gauss-Seidel metoduna benzemektedir [9,24]. Denklemler (3.65) ve (3.66) kullanılarak, bu denklemler için backfitting iterasyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{f}^{(n)} = (\mathbf{N}^T \mathbf{N} + \lambda K)^{-1} \mathbf{N}^T (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}^{(n-1)}) \quad (3.67)$$

$$\boldsymbol{\beta}^{(n)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \mathbf{N} \mathbf{f}^{(n-1)}) \quad (3.68)$$

Bu iteratif süreçleri herhangi $\mathbf{f}^{(0)}$ vektöründe başlatıldığında (3.67) denkleminin tek çözümüne yakınsar [26].

3.8. Toplamsal Modeller

Splayn düzeltme yardımıyla toplamsal ve genelleştirilmiş toplamsal modeller oluşturulması çok değişkenli problemlerde önemli rol oynamaktadır.

Toplamsal modellerinde iki veya daha fazla fonksiyonları bir modelde incelemektedir. Şimdi iki düzeltme splayn terime sahip olan toplamsal model ele alınsın.

$$y_i = \beta_0 + f_1(t_{1i}) + f_2(t_{2i}) + \varepsilon_i \quad (3.69)$$

Burada $(y_i, t_{1i}, t_{2i}), i = 1, 2, \dots, n$ verilmiş gözlem değerleridir. Bu denklemde f_1 ve f_2 düzeltme fonksiyonlar olduğu varsayılır ve aşağıdaki şekilde verilir.

$$f_1(t_1) = \sum_{j=1}^q \beta_j B_{1j}(t) \quad (3.70)$$

$$f_2(t_2) = \sum_{j=1}^r \beta_{r+j} B_{2j}(t) \quad (3.71)$$

Bu ifadesindeki $B_{1j}(t)$ ve $B_{2j}(t)$ taban fonksiyonlardır.

Bu denklem için cezalı hata kareler toplamı aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$S(f) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - f_1(t_{1i}) - f_2(t_{2i}))^2 + \lambda_1 \int f_1''(t_1) dt_1 + \lambda_2 \int f_2''(t_2) dt_2 \quad (3.72)$$

Bu ifadede genel amaç $S(f)$ 'i minimize edilmesi ve splayn olarak f_1 ve f_2 düzeltici fonksiyonlarının bulunmasıdır. Problemi minimize etmek için (3.69) denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\min_{\substack{\boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}}} \|\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{y}\|^2 + \lambda_1 \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H}_1 \boldsymbol{\beta} + \lambda_2 \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H}_2 \boldsymbol{\beta} \quad (3.73)$$

Burada $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(t_1)^T & \mathbf{B}_2(t_2)^T \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{B}_1(t_n)^T & \mathbf{B}_2(t_n)^T \end{bmatrix}$, $n \times (q + r + 1)$ bir matris olduğunda,

$\mathbf{B}_k(t_i) = [B_{k1}(t_i), \dots, B_{kn}(t_i)]^T$, $k = 1, 2$; $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q, \dots, \beta_{q+r}]^T$; \mathbf{H}_i , $i = 1, 2$ hat(şapka) matrisleri $(q + r + 1) \times (q + r + 1)$ boyutlu kare matrislerdir ve \mathbf{C} matrisi $6 \times (q + r + 1)$ boyutlu matristir [103]. \mathbf{C} matrisinin ilk dört satırı doğal kübik splayn koşullarını, iki son satırı modelin kesin tanımlaması koşullarıdır:

$$\sum_{i=1}^n f_1(t_{1i}) = 0, \sum_{i=1}^n f_2(t_{2i}) = 0 \quad (3.74)$$

λ_1 ve λ_2 düzeltme parametreleri, her iki terim için serbestlik derecesinin etkisinin belirlemede bulunur [105].

Verilmiş λ_1 ve λ_2 düzeltme parametreleri için (3.73) ifadesindeki kare formu

$$\mathbf{S} = \lambda_1 \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H}_1 \boldsymbol{\beta} + \lambda_2 \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H}_2 \boldsymbol{\beta} \quad (3.75)$$

olarak tanımlanarak, aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$\|\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{y}\|^2 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\beta} = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \right\|^2 \quad (3.76)$$

Burada $\mathbf{S} = \mathbf{B}^T \mathbf{B}$ eşitliği sağlayan kök matristir. Önceki bölümdeki tek değişkenli düzeltici problemlerine benzer olarak, ifadenin sağ kısmının $\boldsymbol{\beta}$ 'ya göre minimizasyonu doğrusal regresyon problemi gibi çözülebilir. Sonuç olarak, $\boldsymbol{\beta}$ 'nın tahmini $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{B}\mathbf{y}$ 'dir. Burada \mathbf{B} matrisi aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$\mathbf{B} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda_1 \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H}_1 \boldsymbol{\beta} + \lambda_2 \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H}_2 \boldsymbol{\beta})^{-1} \mathbf{X}^T \quad (3.77)$$

3.9. Genelleştirilmiş Toplamsal Modeller

Genelleştirilmiş toplamsal modeller, pürüzsüz fonksiyonlarının toplamını içeren genelleştirilmiş bir doğrusal modeldir.

Genelleştirilmiş toplamsal modeller ilk olarak düzeltme fonksiyonların toplamı şeklinde genelleştirilmiş doğrusal modellerden belirlenmektedir. Bu model aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$g(\mu_i) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + f_1(t_{1i}) + f_2(t_{2i}) + \dots + f_m(t_{mi}) \quad (3.78)$$

Burada \mathbf{X} -toplamsal modelin tasarım matrisi, $\mu_i \equiv E(y_i)$, y_i bir üstel aile dağılımı, g ise pürüzsüz monoton 'link' fonksiyonudur.

Düzeltilici f_i fonksiyonlarının tahmincisini bulma problemi için cezalı log-olabilirlik yöntemi kullanılabilir:

$$l_p(\boldsymbol{\beta}) = -l(\boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{2}(\lambda_1 \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H}_1 \boldsymbol{\beta} + \lambda_2 \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H}_2 \boldsymbol{\beta}) \quad (3.79)$$

(3.79) formülünde $l(\boldsymbol{\beta})$ log-olabilirlik fonksiyonu $l(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \log(f_{\beta_i}(y_i))$ olarak tanımlanır. Burada $f_{\beta_i}(y_i)$ üstel aileye uygun bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur. (3.79) ifadeyi kısa olarak bu şekilde yazılabilir.

$$l_p(\boldsymbol{\beta}) = -l(\boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\beta} \quad (3.80)$$

Burada $\mathbf{H} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{H}_j$ ve λ_j düzeltme parametrelerinin verildiği varsayılır. $l_p(\boldsymbol{\beta})$ 'ın minimizasyonu için β_j 'lere uygun türevler sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial l_p}{\partial \beta_j} = -\frac{\partial l}{\partial \beta_j} + (\mathbf{H}\boldsymbol{\beta})_j = \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^n \frac{y_i - \mu_i}{V(\mu_i)} \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_j} + (\mathbf{H}\boldsymbol{\beta})_j = 0 \quad (3.81)$$

Alınan denklem, $var(y_i)$ teriminin hesaplandığı varsayılarak, doğrusal olmayan cezalı en küçük kareler problemi olarak çözülebilir.

$$S_p = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mu_i)^2}{var(y_i)} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\beta} \quad (3.82)$$

Negatif cezalı log-olabilirlik minimizasyon problemi λ_i 'ler verildiğinde cezalı IRLS (Iteratively re-weighted least squares) algoritması yardımıyla hesaplanabilmektedir [52]. Cezalı IRLS algoritması aşağıda verilmektedir.

1. y_i 'nin μ_i ortalamasına bağlı olan varyansı $V(\mu_i)$ olsun. Her bir k . adımda,

$$\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^{(k)} + \Gamma^{(k)}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^k \quad (3.83)$$

yapay veri (pseudodata) hesaplanmaktadır. Burada $\Gamma^{(k)}$, $\Gamma_{ii}^{(k)} = g'(\mu_i^{(k)})$ olarak ifade edilen bir köşegen matristir.

2. Tanımlanan köşegen ağırlık matrisi hesaplanmaktadır.

$$\mathbf{W}_{ii} = \left(\Gamma_{ii}^{(k)} \sqrt{V(\mu_i^{(k)})} \right)^{-1} \quad (3.84)$$

3. Cezalı maksimum olabilirlik tahmincisinin iteratif çözümü $\boldsymbol{\beta}^{(k+1)}$

$$\| \mathbf{W}^{(k)}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{z}^{(k)}) \|^2 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\beta} \quad (3.85)$$

minimizasyon probleminden bulunmaktadır [103].

3.10. Cezalı Genelleştirilmiş Toplamsal Model

Genelleştirilmiş toplamsal modelin cezalı versiyonu B-splayn taban fonksiyonlarla kurulmuş düzeltme splayn fonksiyonları içermektedir. Bu model aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$g(\mu) = \mathbf{B}\mathbf{a} = \eta \quad (3.86)$$

burada $\mathbf{B} = (\mathbf{1}, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m)$, $N \times 1 + \sum_{j=1}^m n_j$ B-splayn değerlerin (regressor) matrisi ve $\mathbf{a} = (\alpha, a_1, \dots, a_m)^T$ 'dir. Cezalı splaynlar genelleştirilmiş toplamsal modeli skor algoritması kullanarak tahmin etmektedir. Genelleştirilmiş toplamsal modeldeki her bir bileşen B splaynların $a_j, j = 1, \dots, m$ (komşu B-splayn katsayıları)'nı tahmin etmek için, log-olabilirlik fonksiyonun cezalı versiyonu kullanılmaktadır.

$$l = l(\mathbf{y}, \mathbf{a}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{a}_j^T P_j \mathbf{a}_j \quad (3.87)$$

Burada $\lambda_j > 0$, düzeltme parametresi ve kanonik 'link' fonksiyon için

$$l(\mathbf{y}, \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \{(y_i \eta_i + c(\eta_i)) + d(y_i)\} \quad (3.88)$$

şekilde verilmektedir. $\eta_i, \mathbf{B}\mathbf{a} = \eta$ 'nın i . elemanıdır.

Şimdi denklem (3.87)'deki ceza terimini belirlenmektedir. $P_j = D_j^{d^T} D_j^d$, $d = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ varsayalım. $D_j^d, (n_j - d) \times n_j$ boyutlu matrisinin, her bir satırı d . mertebeden polinom cezalarından oluşturmaktadır. j 'yi sabit tutulduğunda, bu bant matrisi d . mertebeden farkları göstermektedir. j . eleman için $D_j^d \mathbf{a}_j, n_j - d$ fark vektörü aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.

$$D_j^0 \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j \quad (3.89)$$

$$D_j^{d+1} \mathbf{a}_j = D_j^1 D_j^d \mathbf{a}_j \quad (3.90)$$

$$D_j^1 \mathbf{a}_j = (a_{j,k} - a_{j,k-1}), \quad k = 2, \dots, n_j \quad (3.91)$$

$d > 0$ olduğunda, P_j bant şemasına sahiptir. P_j farklı mertebelere sahip olabilir, ancak pratikte kullanılan mertebeler bir ve üç arasındadır, $d > 4$ mertebeler çok nadiren kullanılmaktadır.

Cezalı genelleştirilmiş toplamsal model Fisher skor algoritması kullanılır, \mathbf{a} için verilmiş l 'nin maksimize eden iteratif tahmin yöntemi aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\hat{\mathbf{a}}^{(k+1)} = (\mathbf{B}^T \widehat{\mathbf{W}}^{(k)} \mathbf{B} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{B}^T \widehat{\mathbf{W}}^{(k)} \hat{\mathbf{z}}^{(k)} \quad (3.92)$$

Burada $\widehat{W} = \{(h'(\hat{\eta}_i))^2 / \text{var}(y_i)\}$ ve $\hat{z}_i = \hat{\eta}_i + (y - \hat{\mu}_i) / h'(\hat{\eta}_i)$. Denklem (3.92) Fisher skor ağırlık matrisini kurulur ve genelleştirilmiş doğrusal model tahmincisini kullanarak bağımlı vektörü belirlenmektedir.

Cezalı splayn kullanılan genelleştirilmiş toplamsal modellerin avantajı diğer splayn yöntemlere göre, $d_j - 1$ polinom ceza farkının kullanımınıdır. Bu yöntem daha az hesaplama sürecini kullanmaktadır. Ayrıca λ_j düzeltme parametleri çok büyük sayıya sahip olduğunda, bu yöntem yerel polinom yaklaşımını kullanılır. Pratikte bu sonuç çok yararlıdır. Örneğin, Akaike Bilgi Kriteri ya da çapraz geçerlilik düzeltici genelleştirilmiş toplamsal modelin elemanı için çok büyük bir sayı önerilirdi, $\lambda_j = 10^5$. Bu zaman genelleştirilmiş toplamsal modelin j . elemanı $d_j - 1$ polinom olmaktadır. Böylece cezalı parametre daha zayıf seçilirse, bu yöntem, düzeltici genelleştirilmiş toplamsal modelin elemanları ve parametrik polinomlar arasında güçlü ilişki kurmaktadır [44].

3.11. İnce Tabakalı Splayn

İnce tabakalı splayn (Thin plate spline) çok değişkenli regresyon problemlerinde kullanılmaktadır. Bu yöntem düzeltme fonksiyonun tahmininde, çok değişimli gözlemler verildiğinde genel bir çözüm yaklaşımıdır. İnce tabakalı splaynın genel teorik tanımı Duchon [18]'in çalışmasında verilmektedir. Daha sonraki çalışmalar ve uygulamalarda, [33,98,104] daha geniş ve farklı alanlarda kullanımı incelenmiştir.

\mathbf{x} , d -boyutlu bir vektör olsun. $(y_i, \mathbf{x}_i), i = 1, 2, \dots, n$ gözlemleri kullanılarak, $f(\mathbf{x})$ düzeltme fonksiyonun tahmin edilmesi problemi ele alınsın.

$$y_i = f(\mathbf{x}_i) + \varepsilon_i \quad (3.93)$$

Bu tez çalışmasında iki boyutlu ince tabakalı splaynlar kullanılmıştır. Daha kolay anlaşımı için $d = 2$ kabul edilerek $(\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^2)$, splaynın elde edilmesi incelenmektedir.

İnce tabakalı splaynın elde edilmesini tanımlamadan önce birkaç temel kavramdan bahsedilmelidir.

$r \in \mathfrak{R}$ için aşağıdaki bir $\eta(r)$ fonksiyonu tanımlansın.

$$\eta(r) = \begin{cases} \frac{1}{16\pi} r^2 \log(r^2), & \text{eğer } r > 0 \\ 0, & \text{d.d} \end{cases} \quad (3.94)$$

$\mathbf{x}(t, z) \in \mathfrak{R}^2$ için aşağıdaki üç φ_j fonksiyon tanımlansın.

$$\varphi_1(t, z) = 1 \quad (3.95)$$

$$\varphi_2(t, z) = t \quad (3.96)$$

$$\varphi_3(t, z) = z \quad (3.97)$$

Elemanları $T_{jk} = \varphi_j(\mathbf{t}_k)$ olan $(3 \times n)$ boyutlu \mathbf{T} matrisi tanımlansın.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

Tanım 1. Uygun δ_i ve a_i sabitleri için $f(\mathbf{x})$, ancak ve ancak aşağıdaki formunda ise,

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \delta_i \eta(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) + \sum_{j=1}^3 a_j \varphi_j(\mathbf{x}) \quad (3.99)$$

$f(\mathbf{x})$ fonksiyonuna $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ noktalarında ince tabakalı splayn denir. Ek olarak, $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ vektörü için,

$$\mathbf{T}\boldsymbol{\delta} = 0 \quad (3.100)$$

koşulu sağlandığında doğal ince tabakalı splayn denir [26].

(3.98)'e göre, (3.100) aşağıdaki koşula denktir.

$$\sum_{i=1}^n \delta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \delta_i \mathbf{x}_i = 0 \quad (3.101)$$

$(n \times n)$ boyutlu bir \mathbf{E} matrisi tanımlansın.

$$E_{ij} = \eta(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) = \frac{1}{16\pi} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 \log \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 \quad (3.102)$$

η 'nın tanımına göre $E_{ii} = 0, i = 1, 2, \dots, n$.

Doğal ince tabakalı splayn'nin iki özelliği verilmektedir.

1. Aşağıdaki ceza terimi

$$J(f) = \int_{\mathfrak{R}^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dt dz \quad (3.103)$$

a. Ancak ve ancak f doğal ince tabakalı splayn olduğunda sonlu olur,

b. f doğal ince tabakalı splayn olduğunda

$$J(f) = \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\delta} \quad (3.104)$$

kare formuna dönüşür.

2. $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathfrak{R}^2$ uzayında kollinear olmayan farklı noktalar ve z_1, \dots, z_n verilen değerler olduğunda,

$$f(x_i) = z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.105)$$

koşullarını sağlayan ince tabakalı splayn vardır ve tektir.

Bunun ispatı sürecinde [26] uygun ince tabakalı splaynın, denkleminin çözümünden belirlendiği görülmektedir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{T}^T \\ \mathbf{T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.106)$$

(3.106) eşitliğinin sol tarafındaki blok matris tam ranka sahiptir ve bu ifadenin tek $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta}_0 \\ \mathbf{a}_0 \end{pmatrix}$ çözümü vardır.

$(y_i, x_i), i = 1, 2, \dots, n$ gözlemleri için cezalı en küçük karelerden, uygun ince tabakalı splayn bulunması açıklansın

$$S(f) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 + \lambda J(f) \quad (3.107)$$

Bu ifadesi, \mathbf{T} ve \mathbf{E} matrisleri ile ve (3.106) dikkate alınarak aşağıdaki şekilde ifade edebilmektedir.

$$\min_{\substack{\boldsymbol{\delta}, \mathbf{a} \\ \mathbf{T}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}}} S(f) = (\mathbf{Y} - \mathbf{E}\boldsymbol{\delta} - \mathbf{T}^T \mathbf{a})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{E}\boldsymbol{\delta} - \mathbf{T}^T \mathbf{a}) + \lambda \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\delta} \quad (3.108)$$

Bu problemin çözümü olan ince tabakalı splayn'nın katsayıları,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} + \lambda \mathbf{I} & \mathbf{T}^T \\ \mathbf{T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\delta}} \\ \widehat{\mathbf{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.109)$$

denklemden bulunur. Bu denklemleri sol kısmındaki blok matris tam ranklı olduğu için tek bir çözümü vardır. (3.109) denklemleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T} & -\lambda \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

matrisiyle çarparak,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^2 + \lambda \mathbf{E} & \mathbf{E}\mathbf{T}^T \\ \mathbf{T}\mathbf{E} & \mathbf{T}\mathbf{T}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\delta}} \\ \widehat{\mathbf{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{T} \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (3.111)$$

denklemleri alınır, bu da $\widehat{\boldsymbol{\delta}}$ ve $\widehat{\mathbf{a}}$ 'nın (3.111) probleminin çözümü olduğunu gösterir.

İnce tabakalı splaynın hem avantajları hem de dezavantajı vardır. Bir taraftan iyi bir düzelticidir, yani ince tabakalı splayn kurulur ki, verilmiş gözlemlere uyum ile pürüzsüz arasındaki ağırlık tam bağdaşmış olur ve bulunan düzeltme fonksiyonuna iyi yaklaşım gösterir.

Diğer taraftan, bu yöntemin hesaplanması çok zor olabilir, gözlemler çok verildiğinde dzelticilerin parametre sayısı artar. Böylece bazı problemlerde düzeltme splayn yerine regresyon kullanılması önerilmektedir.

4. ENTROPİ OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Tezin bu bölümünde, maksimum entropi yöntemi ve Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon yöntemlerinden kısaca bahsedilmiştir.

4.1. Maksimum Entropi Yöntemi

Rassal değişkenin karakterize edici moment fonksiyonları verildiğinde, Shannon'un entropi ölçüsünü maksimize ederek sistemin dağılımını belirleme yöntemine Maksimum Entropi (MaxEnt) yöntemi, elde edilen dağılıma da MaxEnt dağılımı denilmektedir [35]. MaxEnt yöntemi, maksimum belirsizlik prensibi veya Jaynes'in formülü olarak da bilinir [36].

Şimdi sırasıyla kesikli rassal değişkenler için maksimum entropi yöntemi ve sürekli rassal değişkenler için Maksimum Entropi yöntemi ele alınacaktır[88].

4.1.1. Kesikli rassal değişkenler için maksimum entropi yöntemi

n değere sahip ξ kesikli rassal değişkeninin veya n duruma sahip ξ kesikli fiziksel sistemin entropisi

$$H(\xi) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) \quad (4.1)$$

fonksiyonu ile ifade edilmektedir. (4.1) fonksiyonunu,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i &= 1 ; p_i > 0 \\ \sum_{i=1}^n g_1(\xi_i) p_i &= \mu_1 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n g_m(\xi_i) p_i &= \mu_m \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

koşulları altında maksimum yapan p_1, p_2, \dots, p_n dağılımının bulunması bir optimizasyon problemidir. ξ rassal değişkeninin dağılımının bu optimizasyon probleminin çözümü olarak bulunmasını öneren yöntem "Maksimum Entropi (MaxEnt) yöntemi" denir. İlk kez Jaynes [35] tarafından önerilen bu yöntem, Jaynes'in maksimum entropi yöntemi olarak da bilinir [88].

(4.2) sisteminde $g_1(\xi), g_2(\xi), \dots, g_m(\xi)$ 'ler karakterize edici moment fonksiyonları olarak ifade edilir. Bu sistem n sayıda p_1, p_2, \dots, p_n bilinmeyenlerine sahiptir. Bu sistemin çözüme sahip olabilmesi için bazı koşulların sağlanması gerekmektedir. Öncelikle, $1, g_1(\xi), g_2(\xi), \dots, g_m(\xi)$ fonksiyonları lineer bağımsız olduğunda, bu fonksiyonların beklenen değerleri olan $1, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ sayıları (4.2)

sistemi çözüme sahip olacak şekilde verilmelidir. İkinci olarak, $m + 1$ koşul sayısı ile n durum sayısı arasında $m + 1 < n$ bağıntısı bulunmalıdır. $m + 1 < n$ eşitsizliği sağlandığında, n bilinmeyenli $m + 1$ denklem oluşacağından, bu değişkenlerden $n - (m + 1)$ kadarı bağımsız olacaktır. Bu durumda, p_1, p_2, \dots, p_n değişkenleri sonsuz sayıda değerlere sahip olur ve böylelikle (4.1) fonksiyonunu maksimize eden p_1, p_2, \dots, p_n 'lerin seçilmesi anlamlı olacaktır. Eğer $m + 1 = n$ koşulu sağlanmazsa, bir başka ifade ile, $m + 1 = n$ veya $m + 1 > n$ olursa, birinci halde genellikle (4.1) fonksiyonunu maksimize etmek için bağımsız değişken kalmaz, ikinci halde ise (4.2) koşullarını sağlayan p_i 'ler olmayabilir.

(4.1) fonksiyonunun (4.2) koşulları altında maksimize edilmesi, kısaca (4.1),(4.2) problemi olarak ifade edilecektir. Burada (4.1) amaç fonksiyonu, (4.2) ise lineer koşullardır. Bu durumda, (4.1),(4.2) problemi koşullu ekstremum problemidir ve bilindiği gibi bu problem Lagrange çarpanları yöntemleri ile çözülebilmektedir [88]

(4.1),(4.2) problemi Lagrange çarpanları yöntemi ile ele alındığında, (4.2) koşullarında ortaya çıkan μ_j sayıları keyfi verilemez. Pratik olarak, ξ rassal değişkenine ait istatistiksel frekans dağılımından $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$ ve verilmiş $g_j(\xi)$ moment fonksiyonlarından yola çıkarak μ_j 'ler hesaplandığında,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ g_1(\xi_0) & g_1(\xi_1) & \dots & g_1(\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m(\xi_0) & g_m(\xi_1) & \dots & g_m(\xi_n) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

matrisinin rankı, genişletilmiş

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ g_1(\xi_0) & g_1(\xi_1) & \dots & g_1(\xi_n) & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_m(\xi_0) & g_m(\xi_1) & \dots & g_m(\xi_n) & \mu_n \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

matrisinin rankına $g_j(\xi_1)\tilde{p}_1 + \dots + g_j(\xi_n)\tilde{p}_n = \tilde{\mu}_j$, $j = 0, 1, \dots, m$, $g_0(\xi) = 1$, $\mu_0 = 1$ eşitlikleri sağlandığında birbirine eşit olur. Bu nedenle de Kronecker-Capelli teoremine göre (4.2) koşullarını sağlayan p_1, p_2, \dots, p_n 'ler vardır. Başka bir ifadeyle, (4.2) eşitlikleri şeklinde verilmiş homojen olmayan lineer sistemi p_1, p_2, \dots, p_n 'ye göre çözümü vardır.

(4.1) fonksiyonunu (4.2) koşulları altında maksimize etme problemine “Maksimum Entropi (MaxEnt) problemi” denir. MaxEnt problemi yardımıyla

$(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$ istatistiksel dağılımına entropi ölçümü açısından yakın olan p_1, p_2, \dots, p_n dağılımı bulunur. Burada, p_1, p_2, \dots, p_n 'ler (4.1) fonksiyonuna (4.2) koşulları altında maksimum değer veren olasılıklardır. (4.1) fonksiyonunu (4.2) koşulları altında maksimize etmek için v_0, \dots, v_m Lagrange çarpanları yöntemiyle,

$$U = -\sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) + v_0(\sum_{i=1}^n p_i - 1) + \sum_{j=1}^m v_j (\sum_{i=1}^n p_i g_j(\xi_i) - \mu_j) \quad (4.5)$$

veya

$$U = -\sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) + \sum_{j=0}^m v_j (\sum_{i=1}^n p_i g_j(\xi_i) - \mu_j) \quad (4.6)$$

yardımcı fonksiyonu kurulur ve bu fonksiyonun $p_1, p_2, \dots, p_n, v_1, \dots, v_m$ değişkenlerine göre mutlak ekstremumu aranır. Ekstreminin varlık teoremine göre yardımcı (4.3) fonksiyonunun p_i 'lere göre kısmi türevlerinin sifıra eşit olması gerekir. Böylelikle p_1, p_2, \dots, p_n olasılıkları v_1, \dots, v_m Lagrange çarpanlarına bağlı olarak elde edilir. v_1, \dots, v_m çarpanlarında (4.2) eşitliği yardımıyla bulunur.

U yardımcı fonksiyonunun p_i 'lere göre kısmi türevleri;

$$\frac{\partial U}{\partial p_i} = -\ln(p_i) - v_0 - 1 - \sum_{j=1}^m v_j g_j(x_i) \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.4) eşitliğinin sağ tarafı sifıra eşitlenerek,

$$\ln(p_i) = -(v_0 + 1 + \sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i)) \quad (4.8)$$

$$p_i = \exp\left(-\left(v_0 + 1 + \sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i)\right)\right) \quad (4.9)$$

$$p_i = \exp(-v^0 - \sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i)), v^0 = v_0 + 1, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.10)$$

sonucuna varılır. (4.5) formülü ile p_1, p_2, \dots, p_n 'ler v_0, \dots, v_m Lagrange çarpanlarına bağlı olarak ifade edilmiş olur.

Lagrange çarpanlarını bulmak için (4.5) ile ifade edilen p_1, p_2, \dots, p_n 'lerin (4.2) koşullarında yerine yazılmasıyla,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \exp(-v^0 - \sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i)) &= 1 \\ \sum_{i=1}^n \exp(-v^0 - \sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i)) g_j(\xi_i) &= \mu_j \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

sistemi elde edilir. (4.6) sisteminin birinci denkleminde

$$\exp(v^0) = \sum_{i=1}^n \exp(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i)) \quad (4.12)$$

$$v^0 = \ln \sum_{i=1}^n \exp(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i)) \quad (4.13)$$

v^0 bulunur. v^0 'ın bu değeri (4.6) sisteminin diğer denklemlerde yerine yazıldığında,

$$f_j(v_1, \dots, v_m) = \sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i) \frac{\exp(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i))}{\sum_{i=1}^n \exp(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i))} = \mu_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.14)$$

sistemi elde edilir. $j = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere, (4.7) eşitliğinden v_1, \dots, v_m değerlerinin μ_1, \dots, μ_m değerlerine bağlı olduğu görülmektedir. (4.7) sisteminden v 'yı bulmak için ardışık yaklaşımlar yöntemlerinin hepsi kullanılabilir. Fakat, söz konusu bu yöntemlerden, Newton yöntemi diğer yöntemlerden daha büyük bir yakınsama hızına sahip olduğu için tercih edilir.

4.1.2. Sürekli rassal değişkenler için maksimum entropi yöntemi

ξ sürekli rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(\xi)$ olduğunda, bu sistemin entropisi,

$$H = - \int_a^b f(\xi) \ln f(\xi) d\xi \quad (4.15)$$

şeklinde tanımlanır. İstatistiksel veriyi (4.8) fonksiyoneline

$$\int_a^b f(\xi) g_j(\xi) d\xi = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (4.16)$$

koşulları altında maksimum değer veren dağılım ile modelleme yöntemine “Maksimum Entropi (MaxEnt) yöntemi” denir. (4.8) fonksiyoneli ξ rassal değişkeninin veya fiziksel sisteminin entropisini, (4.9) koşulları ise sistem hakkında ek bilgiyi ifade etmektedir. Böylece (4.8) fonksiyonelinin (4.9) koşulları altında maksimumunun bulunması, (4.9) koşulları yardımıyla sistemin sahip olduğu entropinin maksimum değerinin bulunması anlamına gelmektedir. Ayrıca ifade etmek gerekir ki (4.9)'a ait olan her koşul sistem hakkında belli miktarda bilgi verdiği için, koşul sayısının artmasıyla entropi azalacaktır.

(4.8) fonksiyonelinin (4.9) koşulları altında maksimumu Lagrange çarpanları yöntemiyle bulunabilir. Bu durumda v_0, v_1, \dots, v_m 'ler Lagrange çarpanları olmak üzere, U Lagrange fonksiyoneli,

$$U = - \int_a^b f(\xi) \ln f(\xi) dx - \sum_{j=0}^m v_j \left(\int_a^b f(\xi) g_j(\xi) d\xi - \mu_j \right) \quad (4.17)$$

şeklindedir. (4.10) fonksiyoneli

$$U = \left\{ \int_a^b (-f(\xi)) \ln f(\xi) d\xi - \sum_{j=0}^m v_j \int_a^b f(\xi) g_j(\xi) d\xi \right\} - \sum_{j=0}^m v_j \mu_j \quad (4.18)$$

veya

$$U = \int_a^b F(f, \lambda) dx - \sum_{j=0}^m \lambda_j \mu_j \quad (4.19)$$

olarak yazılabilir, burada $F(f, \nu) = (-f(\xi)) \ln f(\xi) d\xi - \sum_{j=0}^m \nu_j f(\xi) g_j(\xi)$ 'dir.

(4.11) fonksiyonelinin ekstremumunun varlığı için gerek koşul, bu fonksiyonele ekstremum değer veren f fonksiyonunun

$$F_f - \frac{d}{d\xi} F_{f'} = 0 \quad (4.20)$$

Euler denklemini sağlamasıdır. (4.12) denkleminde $F_{f'} = 0$ olduğundan, bu denklem $F_f = 0$ denklemine dönüşür. F 'nin ifadesinden yola çıkarak Euler denkleminin

$$F_f = -\ln f(\xi) - 1 - \sum_{j=0}^m \nu_j g_j(\xi_i) = 0 \quad (4.21)$$

olduğu sonucuna varılır. Buradan,

$$\ln f(\xi) = -1 - \sum_{j=0}^m \nu_j g_j(\xi_i) \quad (4.22)$$

$$f(\xi) = \exp(-1 - \nu_0 - \sum_{j=1}^m \nu_j g_j(\xi_i)) \quad (4.23)$$

$$f(\xi) = \exp(-1 - \nu^0 - \sum_{j=1}^m \nu_j g_j(\xi_i)), \quad \nu^0 = 1 + \nu_0 \quad (4.24)$$

elde edilir. (4.13) fonksiyonu (4.9) koşullarında yerine yazılarak ν 'lar bulunabilir:

$$\int_a^b \exp(-\nu^0 - \sum_{j=1}^m \nu_j g_j(\xi_i)) g_k(\xi) d\xi, \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (4.25)$$

formülünde $g_0(\xi) = 1, \mu_0 = 1$ olduğundan

$$\int_a^b \exp(-\nu^0 - \sum_{j=1}^m \nu_j g_j(\xi_i)) d\xi = 1 \quad (4.26)$$

$$\exp(\nu^0) = \frac{1}{\int_a^b \exp(-\sum_{j=1}^m \nu_j g_j(\xi_i)) d\xi} \quad (4.27)$$

$$\nu^0 = \ln \left\{ \int_a^b \exp(-\sum_{j=1}^m \nu_j g_j(\xi_i)) d\xi \right\} \quad (4.28)$$

elde edilir ve ν^0 'ın bu değeri (4.21)'in diğer eşitliklerinde yerine yazılıp k . eşitliğin sol tarafı F_k ile gösterildiğinde,

$$F_k(\nu) = \frac{\int_a^b \exp(-\sum_{j=1}^m \nu_j g_j(\xi_i)) g_k(\xi) d\xi}{\int_a^b \exp(-\sum_{j=1}^m \nu_j g_j(\xi_i)) d\xi} = \mu_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4.29)$$

sistemine ulaşılır. Burada $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$.

(4.29) sistemi v_1, \dots, v_m bilinmeyenlerine göre lineer olmayan denklemler sistemidir. (4.29) sisteminin v_1, \dots, v_m 'lere göre çözüme sahip olabilmesi için

$$\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(\lambda_1, \dots, \lambda_m)} \neq 0 \quad (4.30)$$

koşulunun sağlanması gerekir. Bu koşulun sağlandığını göstermek için (2.17)'deki Jacobian'ın $g_1(\xi), g_2(\xi), \dots, g_m(\xi)$ rassal değişkenlerinin varyans-kovaryans matrisinin determinantı olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaçla (4.30)'dan $\frac{\partial F_k}{\partial v_l}, k = 1, 2, \dots, m; l = 1, 2, \dots, m$ türevleri bulunmuştur ve $\left[\frac{\partial F_k}{\partial v_l}\right]$ matrisinin varyans-kovaryans matrisi olduğu gösterilmiştir:

$$\frac{\partial F_k}{\partial v_l} = -\{E[g_l(\xi)g_k(\xi)] - E[g_k(\xi)g_l(\xi)]\} \quad (4.31)$$

Buradan $\left[\frac{\partial F_k}{\partial \xi_l}\right]$ 'nin varyans-kovaryans matrisinin negatif işaretlisine eşit olduğu görülür. Varyans-kovaryans matrisinin pozitif tanımlı olduğu bilindiğinden, (4.30) sisteminin Jacobi determinantının sıfırdan farklı olduğu, dolayısıyla (4.30) denklemler sisteminin tek çözüme sahip olduğu sonucuna varılır.

4.2. Minimum Çapraz Entropi Yöntemi

Minimum çapraz entropi yöntemi (MinxEnt), Kullback'in ölçüsü olduğu diğer önemli bir entropi optimizasyon yöntemidir. Teorik anlamları ve uygulama alanlarının taşıdığı önem açısından MaxEnt yöntemiyle rekabet eder [36]. Bu tez çalışmasında kullanım alanı geniş olması nedeniyle minimum çapraz entropi yöntemi için, kısaca MinxEnt kullanılacaktır. Bilgi olarak fiziksel rassal değişkenden elde edilmiş moment değerleri ile bu rassal değişkene ait önsel bir dağılım olduğunda; Kullbak-Leibler ölçümünü, rassal değişkenden elde edilen moment değer kısıtlarına ve önsel dağılıma göre minimum yöntemi MinxEnt yöntemi ve bu yöntemden elde edilen dağılıma MinxEnt dağılımı denilmektedir [40,41]. Burada moment koşulları önceden verilir ve buna göre önsel dağılıma en yakın dağılım belirlenir MaxEnt yöntemi, önsel dağılım olarak uniform (düzgün) dağılım seçilirse, MinxEnt yönteminin bir özel sonucu olarak ortaya çıkar.

4.2.1. Kesikli rassal değişkenler için minimum çapraz entropi yöntemi

ξ rassal değişkeni, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ durumlarına sahip, her bir durumun gerçekleşme olasılığı p_1, p_2, \dots, p_n olan kesikli bir rassal değişken olsun ve ξ rassal değişkeni, q_1, q_2, \dots, q_n şeklinde önsel bir dağılıma sahip olsun. Bu durumda Kullback-Leibler ölçümü

$$H(\xi) = \sum_{i=1}^n p_i \ln \left(\frac{p_i}{q_i} \right) \quad (4.32)$$

şeklinde tanımlanır [41]. Kullback-Leibler ölçümünü,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i &= 1 ; p_i > 0 \\ \sum_{i=1}^n g_1(\xi_i) p_i &= \mu_1 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n g_m(\xi_i) p_i &= \mu_m \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

ile verilen kısıtlara göre minimum yapan yöntemi, MinxEnt yöntemi ve bu yöntemi elde edilen dağılıma MinxEnt dağılımı denir. (4.32) ölçümünde kullanılan $q(\xi)$ fonksiyonuna da rassal değişken hakkında önsel bilgi denir. (4.33) de ifade edilen $g_j(\xi)$ ler ($j = 1, \dots, m$) moment fonksiyonları, μ_j 'ler ise ($j = 1, \dots, m$) moment fonksiyonları yardımıyla rassal değişkenden elde edilen moment değerleridir. (4.32) de verilen Kullback-Leibler ölçümünü, (4.33) kısıtlarına göre minimumunu bulma problemi Lagrange çarpanları yöntemiyle çözülebilir. Buna göre U Lagrange fonksiyonu,

$$U = \sum_{i=1}^n p_i \ln \left(\frac{p_i}{q_i} \right) - (1 - \nu_0) (\sum_{i=1}^n p_i - 1) - \sum_{j=1}^m \nu_j (\sum_{i=1}^n g_j(\xi_i) p_i - \mu_j) \quad (4.34)$$

şekilde tanımlanır. (4.34) de kullanılan $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_m$ 'lere Lagrange çarpanları denir. U fonksiyonunu minimum yapan p_i 'leri bulmak için, (4.34) fonksiyonunun p_i 'lere göre kısmi türevleri alınıp, sıfıra eşitlenmelidir. U fonksiyonun p_i 'lere göre kısmi türevleri,

$$\frac{\partial U}{\partial p_i} = -\ln \frac{p_i}{q_i} - \frac{1}{p_i} p_i - (\nu_0 - 1) - \sum_{j=1}^m \nu_j g_j(\xi_i), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.35)$$

şekilde bulunur. (4.35) ifadesi sıfıra eşitlendiğinde,

$$\ln \frac{p_i}{q_i} - 1 - \nu_0 + 1 - \sum_{j=1}^m \nu_j g_j(\xi_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.36)$$

veya

$$\ln p_i = \ln q_i - \nu_0 - \sum_{j=1}^m \nu_j g_j(\xi_i), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.37)$$

elde edilir. (4.37) eşitliklerinden p_i , ($i = 1, \dots, n$) olasılıkları,

$$p_i = q_i \exp(-v_0 - \sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i)), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.38)$$

şeklinde bulunur. (4.38) ile ifade edilen p_i , ($i = 1, \dots, n$) olasılık dağılımı, (4.32) de verilen Kullback-Leibler ölçümünü, (4.33) göre minimum yapan MinxEnt dağılımıdır.

(4.38) ifadesinden görüldüğü gibi, p_i , ($i = 1, \dots, n$) olasılıkları v_0, v_1, \dots, v_m Lagrange çarpanlarına bağlıdır. v_0, v_1, \dots, v_m Lagrange çarpanlarının değerleri (4.33) eşitlikleri yardımıyla bulunabilir.

MaxEnt yönteminde olduğu gibi v_0, v_1, \dots, v_m Lagrange çarpanlarının $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m$ 'ye bağlı olduğunu göstermek için, (4.38) ifadesini daha ayrıntılı olarak,

$$p_i = q_i \exp(-v_0) \exp(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i)), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.39)$$

şeklinde yazılır. (4.39) deki olasılık dağılımı (4.33) kısıdında yerine yazıldığında,

$$\sum_{i=1}^n q_i \exp(-v_0) \exp(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i)) = 1 \quad (4.40)$$

eşitliği elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\exp(-v_0) \sum_{i=1}^n q_i \exp(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i)) = 1 \quad (4.41)$$

ifadesi bulunur. Buradan,

$$\sum_{i=1}^n q_i \exp(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i)) = \exp(-v_0) \quad (4.42)$$

sonucuna ulaşılır. (4.42) eşitliğinden, v_0 Lagrange çarpanının v_1, \dots, v_m Lagrange çarpanlarına bağlı olduğu görülmektedir. Benzer şekilde (4.39) ifadesi (4.33) kısıtların da yerine yazıldığında,

$$\sum_{i=1}^n q_i g_j(\xi_i) \exp(-v_0) \exp(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i)) = \mu_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.43)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\sum_{i=1}^n q_i g_j(\xi_i) \exp(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i)) = \mu_j \exp(-v_0), \quad j = 1, \dots, m \quad (4.44)$$

ifadesi bulunur. (4.42) eşitliği (4.44)'de yerine yazıldığında,

$$\sum_{i=1}^n q_i g_j(\xi_i) \exp(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i)) = \mu_j \{ \sum_{i=1}^n q_i \exp(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i)) \} \quad (4.45)$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\mu_j = \frac{\sum_{i=1}^n q_i g_j(\xi_i) \exp(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i))}{\sum_{i=1}^n q_i \exp(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi_i))} \quad j = 1, \dots, m \quad (4.46)$$

ifadesi elde edilir [36]. (4.46) ifadesinden $v_j, (j = 1, \dots, m)$ 'lerin μ_1, \dots, μ_m 'lere bağlı olduğu görülmektedir.

4.2.2. Sürekli rassal değişkenler için minimum çapraz entropi yöntemi

ξ sürekli rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(\xi)$ ve ξ rassal değişkeni $q(\xi)$ şeklinde önsel dağılıma sahip olsun. Bu durumda Kullback-Leibler ölçümü,

$$H(\xi) = \int_a^b f(\xi) \ln \frac{f(\xi)}{q(\xi)} d\xi \quad (4.47)$$

şeklinde tanımlanır. Kesikli rassal değişkene benzer olarak kısıtlar aşağıdaki şekilde,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi) d\xi &= 1 \\ \int_a^b g_1(\xi) f(\xi) d\xi &= \mu_1 \\ &\vdots \\ \int_a^b g_m(\xi) f(\xi) d\xi &= \mu_m \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

verilsin. (4.47) ifadesinde kullanılan $q(\xi)$ fonksiyonuna rassal değişken hakkında önsel bilgi denir. (4.48)'de ifade edilen $g_j(\xi)$ 'ler ($j = 1, \dots, m$) moment fonksiyonları μ_j 'ler ($j = 1, \dots, m$), $g_j(\xi)$ 'lere uygun rassal değişkenden elde edilen moment değerleridir.

Sürekli rassal değişkenler için MinxEnt yöntemi, $H(\xi)$ fonksiyoneli (4.48) kısıtlarına göre minimum yapan, $f(\xi)$ fonksiyonunun bulunması yöntemidir. Bu yöntem yardımıyla bulunan dağılıma MinxEnt dağılımı denir.

(4.47) de verilen Kullback-Leibler fonksiyoneli, (4.48) kısıtlarına göre minimumu, Euler-Lagrange çarpanları yöntemiyle bulunabilir. U Lagrange fonksiyoneli,

$$U = \int_a^b f(\xi) \ln \frac{f(\xi)}{q(\xi)} d\xi - (v_0 - 1) \left(\int_a^b f(\xi) d\xi - 1 \right) - \sum_{j=1}^m v_j \left(\int_a^b g_j(\xi) f(\xi) d\xi - \mu_j \right) \quad (4.49)$$

şeklinde tanımlanır. (4.49)'da gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$U = \int_a^b \left(f(\xi) \ln \frac{f(\xi)}{q(\xi)} - (v_0 - 1) f(\xi) - \sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi) f(\xi) - \frac{1}{b-a} \sum_{j=1}^m v_j \mu_j + \lambda_0 - 1 \right) d\xi \quad (4.50)$$

ifadesi elde edilir. U Lagrange fonksiyoneli aynı zamanda,

$$U = \int_a^b F(\xi) d\xi \quad (4.51)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$F(\xi) = \left(f(\xi) \ln \frac{f(\xi)}{q(\xi)} - (v_0 - 1) f(\xi) - \sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi) f(\xi) - \frac{1}{b-a} \sum_{j=1}^m v_j \mu_j + v_0 - 1 \right) \quad (4.52)$$

şeklinindedir. (4.49) ifadesindeki v_0, v_1, \dots, v_m 'lere Lagrange çarpanları denir. U fonksiyoneline ekstremum değer veren $f(\xi)$ fonksiyonu,

$$\frac{\partial F}{\partial f(\xi)} - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial F}{\partial f'(\xi)} \right) = 0 \quad (4.53)$$

Euler-Lagrange denklemi yardımıyla bulunabilir. Gerekli hesaplamalar yapıldığında,

$$\frac{\partial F}{\partial f'(\xi)} = 0 \quad (4.54)$$

ve

$$\frac{\partial F}{\partial f(\xi)} = \ln \frac{f(\xi)}{q(\xi)} - \frac{1/q(\xi)}{f(\xi)/q(\xi)} f(\xi) - (v_0 - 1) - \sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi) \quad (4.55)$$

eşitlikleri bulunur. (4.54) ifadeleri (4.53) denkleminde yerine yazıldığında

$$\ln \frac{f(\xi)}{q(\xi)} - \frac{1}{\frac{f(\xi)}{q(\xi)}} \frac{f(\xi)}{q(\xi)} - (v_0 - 1) - \sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi) = 0 \quad (4.56)$$

elde edilir. (4.55) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\ln f(\xi) = \ln q(\xi) - v_0 - \sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi) \quad (4.57)$$

elde edilir. $f(\xi)$ fonksiyonu,

$$f(\xi) = q(\xi) \exp(v_0) \exp\left(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi)\right) \quad (4.58)$$

şeklinde bulunur.

(4.58) ile ifade edilen fonksiyona MinxEnt dağılım fonksiyonu denir. v_0, v_1, \dots, v_m . Lagrange çarpanlarının değerleri (4.47) ve (4.48) eşitlikleri ile bulunabilir.

v_0, v_1, \dots, v_m Lagrange çarpanlarının $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m$ ye bağlı olduğunu göstermek için (4.57) ifadesi (4.47) da yerine yazıldığında,

$$\int_a^b q(\xi) \exp(-v_0) \exp\left(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi)\right) d\xi = 1 \quad (4.59)$$

eşitliği elde edilir. (4.59)'de gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\int_a^b q(\xi) \exp\left(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi)\right) d\xi = \exp(v_0) \quad (4.60)$$

sonucu bulunur. (4.60) eşitliğinden, v_0 Lagrange çarpanının v_1, \dots, v_m Lagrange çarpanlarına bağlı olduğu görülür. Benzer şekilde (4.57) ifadesi (4.48) de yerine yazıldığında,

$$\int_a^b q(\xi) g_j(\xi) \exp(-v_0) \exp\left(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi)\right) d\xi = \mu_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.61)$$

ifadesi elde edilir. (4.61) da gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\int_a^b q(\xi) g_j(\xi) \exp\left(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi)\right) d\xi = \mu_j \exp(-v_0), \quad j = 1, \dots, m \quad (4.62)$$

elde edilir. (4.59) ifadesi (4.61)'de yerine yazılıp, gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\mu_j = \frac{\int_a^b q(\xi) g_j(\xi) \exp\left(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi)\right) d\xi}{\int_a^b q(\xi) \exp\left(-\sum_{j=1}^m v_j g_j(\xi)\right) d\xi}, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.63)$$

sonucu bulunur. (4.63) ifadesinden, v_1, \dots, v_m Lagrange çarpanlarının μ_1, \dots, μ_m 'lere bağlı olduğu görülmektedir.

4.3. Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Yöntemleri

Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Yöntemi (GEOY) denildiğinde istatistiksel veriyi Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Problemi (GEOP)'un çözümü şeklinde modellemeyi öneren yöntem anlaşılmaktadır. Bu genelleştirme yöntemindeki amaç, ele alınan istatistiksel veriyi en iyi şekilde temsil eden dağılımın bulunmasıdır. Fonksiyonel analizin bazı uygulamalarına dayalı olarak Shamilov [76-78] tarafından önerilen MaxMaxEnt, MinMaxEnt, MaxMinxEnt ve MinMinxEnt Yöntemleri, Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Yöntemleri (GEOY) olarak tanımlanmıştır. GEOY verilmiş moment fonksiyonları kümesinden istatistiksel veriye entropi optimizasyon ölçümüne göre en yakın ve en uzak olan dağılımları belirleyen moment fonksiyonlarının bulunmasını gerçekleştirecek istatistiksel veriyi kriterler açısından daha kesin modellemeyi sağlar [88].

EOP: ξ rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f^{(0)}(\xi)$, U entropi optimizasyon ölçümü, g ise m sayıda moment kısıtı üreten bir moment vektör fonksiyonu olsun. Verilen g moment fonksiyonuna uygun olan ve U 'ye ekstremum değer veren dağılımın bulunması problemidir.

GEOP: ξ rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f^{(0)}(\xi)$, H entropi optimizasyon ölçümü, K ise verilen moment vektör fonksiyonlar kümesi olsun. Verilen K kümesinden öyle $g^{(1)}, g^{(2)} \in K$ moment vektör fonksiyonlarının bulunması gerekir ki $g^{(1)}$ 'in belirlediği entropi optimizasyon yoğunluk fonksiyonu $f^{(1)}(\xi)$, verilmiş $f^{(0)}(\xi)$ yoğunluk fonksiyonuna H ölçümüne göre en yakın, $g^{(2)}$ 'nin belirlediği entropi optimizasyon yoğunluk fonksiyonu $f^{(2)}(\xi)$ verilmiş $f^{(0)}(\xi)$ yoğunluk fonksiyonuna H ölçümüne göre en uzak olsun. Burada H Shannon'un entropi ölçümü olarak seçilirse $f^{(1)}(\xi)$ "MinMaxEnt Dağılımı", $f^{(2)}(\xi)$ "MaxMaxEnt Dağılımı" olarak; eğer L Kullback - Leibler ölçümü olarak seçilirse $f^{(1)}(\xi)$ "MinMinxEnt Dağılımı", $f^{(2)}(\xi)$ "MaxMinxEnt Dağılımı" olarak adlandırılır [88].

4.3.1. MinMaxEnt, MaxMaxEnt ve MaxMinxEnt yöntemleri

Verilen entropi optimizasyon ölçümünü

$$\int_a^b f(\xi)g_j(\xi_i) d\xi = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (4.64)$$

kısıtları altında optimize etme problemi ele alınsın. Burada $\mu_0 = 1, g_0(\xi) = 1$ ve $1, g_1(\xi), g_2(\xi), \dots, g_m(\xi)$ doğrusal bağımsız karakterize edici moment fonksiyonlarıdır.

$f^{(0)}(\xi)$ yoğunluk fonksiyonu ve K moment vektör fonksiyonlar kümesinden keyfi seçildiğinde, bu moment vektör fonksiyonuna uygun olarak $\mu = (1, \mu_1, \dots, \mu_m)$ değerleri elde edilir ve H 'ye optimum değer veren bir $f(\xi)$ entropi optimizasyon dağılımı bulunur. Bu durumda, seçilen her keyfi $g(\xi)$ vektör fonksiyonuna karşılık H 'nin bir optimum değeri elde edilmiş olur. Bu değer $g(\xi)$ vektör fonksiyonlarına veya uygun $f(\xi)$ dağılım fonksiyonlarına bağlı bir entropi optimizasyon fonksiyoneli olup $U(g)$ ile gösterilmiştir.

Eğer $U(g)$, K sürekli moment vektör fonksiyonları kümesinde sürekli ise, bu küme üzerinde en küçük değerini alır. $U(g)$ fonksiyoneline en küçük değer veren $g^{(1)}$ ve en büyük değer veren $g^{(2)}$ moment vektör fonksiyonları olmakla,

$$\min_{g \in K} U(g) = U(g^{(1)}); \quad \max_{g \in K} U(g) = U(g^{(2)}) \quad (4.65)$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada, $g^{(1)}$ ve $g^{(2)}$ moment vektör fonksiyonları, L ölçümünü optimize eden $f^{(1)}(\xi)$, $f^{(2)}(\xi)$ özel olasılık yoğunluk fonksiyonlarını tanımlar. $H =$

$-\int_a^b f(\xi) \ln f(\xi) d\xi$ (veya $H = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$ kesikli durumunda), olduğunda bu dağılımların entropileri arasında

$$H(f^{(0)}(\xi)) \leq U(f^{(1)}(\xi)) \leq U(f^{(2)}(\xi)) \quad (4.66)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada $U(g), g(\xi)$ moment vektör fonksiyonu ile üretilen moment koşulları altında, entropi fonksiyoneli H 'ın maksimum değeridir. Bu sebeple, $f^{(1)}(\xi)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun belirlediği dağılıma “MinMaxEnt dağılımı”, $f^{(2)}(\xi)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun belirlediği dağılıma ise “MaxMaxEnt dağılımı” denir. Lagrange çarpanları yöntemiyle elde edilen $f^{(1)}(\xi), f^{(2)}(\xi)$ yoğunluk fonksiyonları

$$f^{(1)}(\xi) = \exp(-\sum_{j=0}^n v_j^{(1)} g_j(\xi)) \quad (4.67)$$

$$f^{(2)}(\xi) = \exp(-\sum_{j=0}^n v_j^{(2)} g_j(\xi)) \quad (4.68)$$

şeklinindedir [88].

Bölüm 4.2.1’de verilmiş kesikli rassal değişkenler için minimum çapraz entropi yöntemi alınsın.

ξ rassal değişkeni, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ durumlarına sahip, her bir durumun gerçekleşme olasılığı p_1, p_2, \dots, p_n olan kesikli bir rassal değişken olsun ve ξ rassal değişkeni, q_1, q_2, \dots, q_n şeklinde önsel bir dağılıma sahip olsun. Bu durumda Kullback-Leibler ölçümü

$$H(\xi) = \sum_{i=1}^n p_i \ln \left(\frac{p_i}{q_i} \right) \quad (4.69)$$

şeklinde tanımlanır [41]. Kullback-Leibler ölçümünü, $n > m + 1$ verilen kısıtlara göre,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i &= 1 ; p_i > 0 \\ \sum_{i=1}^n g_1(\xi_i) p_i &= \mu_1 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n g_m(\xi_i) p_i &= \mu_m \end{aligned} \right\} \quad (4.70)$$

minimum değere sahiptir. Bu ifadede $\mu_0 = 1, g_0(\xi) = 1, g = (g_0, g_1, \dots, g_m)$ moment vektör fonksiyonu ve $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, g moment fonksiyonlara uygun değerlerdir. Kullback-Leibler fonksiyonu değeri,

$$p_i = q_i \exp\left(-\sum_{j=0}^m v_j q_j(\xi_i)\right), i = 1, \dots, n \quad (4.71)$$

$p = (p_1, \dots, p_n)$ dağılım fonksiyonuyla alınmaktadır. (4.71)'te verilen v_j Lagrange çarpanları,

$$\sum_{i=1}^n g_j(\xi_i) q_i \exp\left(-\sum_{j=0}^m v_j g_j(\xi_i)\right) = \mu_j, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (4.72)$$

sistemi çözümü bulunabilmektedir. (4.71)'de Kullback Leibler fonksiyonun da yerine yazıldığında,

$$D_{min} = \sum_{i=1}^n q_i \exp\left(-\sum_{j=0}^m v_j g_j(\xi_i)\right) \ln\left(\frac{q_i \exp\left(\sum_{j=0}^m v_j g_j(\xi_i)\right)}{q_i}\right)$$

ya da

$$D_{min} = \sum_{i=1}^n q_i \exp\left(-\sum_{j=0}^m v_j g_j(\xi_i)\right) \exp\left(\sum_{j=0}^m v_j g_j(\xi_i)\right) \quad (4.73)$$

eşitliği elde edilir. Duzenlemeler yapıldığında,

$$D_{min} = \sum_{j=0}^m v_j \mu_j \quad (4.74)$$

elde edilir. Sonuçta bu ifadede verilen D_{min} formülü g 'ye bağlı fonksiyoneldir. Bu fonksiyonel aşağıdaki şekilde verebilmektedir.

$$U(g) = D_{min} \quad (4.75)$$

Kesikli rassal değişkenler için MaxMinxEnt entropi optimizasyon problemi, (4.75)'te verilen $U(g)$ fonksiyoneline, verilmiş K moment vektör fonksiyonlar kümesinde maksimum değer veren moment vektör fonksiyonunun bulunması problemine denilmektedir.

(4.75)'te tanımlanmış $U(g)$ fonksiyoneli, K moment fonksiyonları kümesinde maksimum değerini,

$$\max_{g \in K} U(g) = U(g^{(0)}) \quad (4.76)$$

$g^{(0)} = (g_0^{(0)}, g_1^{(0)}, \dots, g_m^{(0)})$ vektör fonksiyonunda alınsın.

$g^{(0)}$ moment vektör fonksiyonuna uygun $p^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_m^{(0)})$ MaxMinxEnt dağılımı, verilen Kullback-Leibler fonksiyonun $g^{(0)}$ moment vektör kısıtına göre minimum yapılmasıyla bulunur. Kesikli rassal değişkenler için MaxMinxEnt dağılımı, aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$p_i^{(0)} = \exp\left(-v_0 - \sum_{j=1}^m v_j g_j^{(0)}(\xi_i)\right), i = 1, \dots, n \quad (4.77)$$

Bu ifadede verilen v_0, \dots, v_m Lagrange çarpanları, $g^{(0)} = g_1^{(0)}, \dots, g_m^{(0)}$ moment vektör fonksiyonudur.

5. UYGULAMALAR VE SİMÜLASYON ÇALIŞMALARI

Bu bölümde teorik kısmında anlatılan yöntemler kullanılarak farklı uygulamalar yapılmıştır. Splayn ve Entropi optimizasyon yöntemlerinin uygulamada gösterilmesi amacıyla gerçek veri seti kullanılmış ve simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir.

İlk olarak tek değişkenli zaman serisi için farklı splayn yöntemleri kullanarak, öngörülen değerleri tahmin edilmiştir. Bu uygulamada B-splayn, düzeltme kübik splayn ve cezalı kübik splayn kullanılmıştır.

İkinci uygulamada farklı karışık normal dağılımdan üretilen veri seti için uygun yaklaşım problemi incelenmiştir. Bu uygulamada dağılım fonksiyonları splayn yöntemler yardımıyla tahmin edilmiştir.

İki değişkenli farklı fonksiyonlardan üretilen veri seti çok boyutlu splayn yöntemleri kullanılarak, üçüncü uygulamada gösterilmiştir. Doğrudan yabancı yatırımların uygulamasında toplamsal model ve ince tabakalı splayn yöntemlerin kullanılmıştır.

Entropi optimizasyon ve splayn yöntemleri yardımıyla kesikli rassal değişkenin dağılım fonksiyon tahmin edilmiştir. Bulunan dağılım fonksiyonlarından elde edilen hatalar birbiriyle karşılaştırılmıştır.

5.1. Splayn Yöntemler Yardımıyla Zaman Serileri Tahmini

Bu bölümde, iki farklı zaman serisi üzerinde yapılmış splayn tahmini incelenmiştir [62]. Uygulamada zaman serisi olarak döviz kurları Amerikan Doları/Türk Lirası ve Amerikan Doları/Tacik Somoni ele alınmıştır. Dikkate alınan zaman serisi gözlemleri, 08/01/2010 – 31/12/2015 yılları arasında, Amerikan Doları/Türk Lirası döviz kurun haftalık kapanış değerleridir ve $n = 312$ gözlemden oluşmaktadır. İkinci zaman serisi, 02/01/2015 – 11/02/2016 yılları arasında, Amerikan Doları/Tacik Somoni döviz kurun haftalık kapanış değerleridir ve $n = 63$ gözlemden oluşmaktadır. İki farklı büyüklükte seçilen verilerin amacı, kullanılan yöntemlerin gözlem sayısına göre tahmin etmesidir. Amerikan Doları/Türk Lirası döviz kurun haftalık kapanış değerleri ve Amerikan Doları/Tacik Somoni döviz kurun haftalık kapanış değerleri Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2’de verilmiştir.

Çizelge 5.1. Amerikan Doları/Türk Lirası döviz kurun haftalık kapanış değerleri

Tarih	Değer
08-01-2010	1,46980
15-01-2010	1,44940
22-01-2010	1,47150
.	.
.	.
25-12-2015	2,91870
31-12-2015	2,90760

www.tcmb.gov.tr

Çizelge 5.2. Amerikan Doları/Tacik Somoni döviz kurun haftalık kapanış değerleri

Tarih	Değer
02.01.2015	5,3074
09.01.2015	5,3271
16.01.2015	5,3367
.	.
.	.
04.03.2016	7,8696
11.03.2016	7,8696

www.nbt.tj

Parametrik olmayan regresyonda öngörü problemi literatürde geniş şekilde incelenmiştir [4,12,34].

Önceki çalışmalarımızda bu konu farklı veri setler kullanılan, sunulmuştur [53,54,58,64,69].

Bu uygulamada taban fonksiyonlarla kurulmuş B-splayn, kübik düzeltme splayn ve cezalı splayn karşılaştırılmıştır. Düzeltme parametresinin optimum değer seçimi genelleştirilmiş çapraz geçerlilik (GCV) skor fonksiyonu ile gerçekleştirilmiştir.

Modelin iyi sonuç göstermesi tahmin edilen değerlerin gerçek değerlere yakın olması ile ifade edilmektedir. Bu nedenle, iki farklı performans ölçütleri olan ortalama mutlak hata yüzdesi (mean absolute percentage error - MAPE) ve ortalama hata kare (mean squared error – MSE) kullanılmıştır. Bu ölçütlerin hesaplama formülleri aşağıda verilmiştir.

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - f_{\lambda}(t))^2}{n} \quad (5.1)$$

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - f_{\lambda}(t)|}{y_i} \quad (5.2)$$

Elde edilen sonuçlar aşağıdaki tablolar ve şekillerde gösterilmiştir. Önce yöntemlerin performans ölçütleri karşılaştırılmaktadır. Çizelge 5.3 ve 5.4'te B-splayn, kübik splayn düzeltme ve cezalı splaynın MAPE ve MSE ölçütleri karşılaştırıldığında, hem Amerikan Doları/Türk Lirası, hem de Amerikan Doları/ Tacik Somoni veri setinde cezalı splayn yöntemin sonuçları minimum değere sahip olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.3. Amerikan Doları/Türk Lirası için performans ölçütleri

Yöntemler	MSE	MAPE
B-splayn	0,00244	1,967
Kübik splayn düzeltme	0,00127	1,305
Cezalı splayn	0,00116	1,304

Çizelge 5.4. Amerikan Doları/Tacik Somoni için performans ölçütleri

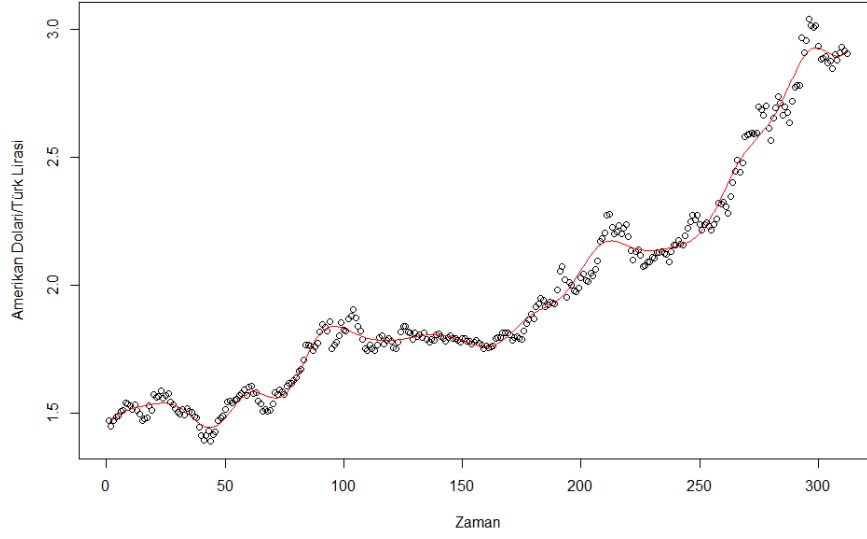
Yöntemler	MSE	MAPE
B-splayn	0,00079	0,30664
Kübik splayn düzeltme	0,00086	0,33033
Cezalı splayn	0,00051	0,20752

MSE ve MAPE değerlerine göre Amerikan Doları/Türk Lirası verisinde kübik splayn düzeltme ve cezalı splaynın değerleri hemen hemen aynıdır. Bu beklenen bir sonuçtur, çünkü bu iki yöntemde pürüzlülük ceza yaklaşımı kullanılmaktadır. Yani, minimizasyon probleminde ceza terimine sahiptir. Ancak Amerikan Doları/Tacik Somoni verilerine bakıldığında bu yöntemlerin arasında %30'luk fark görülmektedir. Bunun nedeni gözlem sayısından kaynaklanmaktadır. Cezalı splaynlar bu problemde gözlem sayısı az olan veri setinde iyi sonuç gösterebilmektedir.

Bu uygulamanın amacı splayn düzeltme yöntemleriyle sonraki değerlerin öngörülen verilerin bulunmasıdır. Uygulanan yöntemler 5 dönem ilerdeki değerleri tahmin etmek için kullanılmıştır. Amerikan Doları/Türk Lirası için bu değerler 313 ile 317 arasındadır. Amerikan Doları/Tacik Somoni için bu değerler 64 ile 68 arasındadır.

Çizelge 5.5, 5.6 ve 5.7'de sırasıyla B-splayn, kübik splayn düzeltme ve cezalı splayn tahmin edilen Amerikan Doları/Türk Lirası için öngörü değerlerini göstermektedir. Şekil 5.1, 5.2 ve 5.3'te yöntemler yaklaşımı ile serpilme grafikleri yer almaktadır.

İlk olarak Şekil 5.1'de B-splayn taban fonksiyon yardımıyla yapılan yaklaşımı ile serpilme grafiği gösterilmiştir.

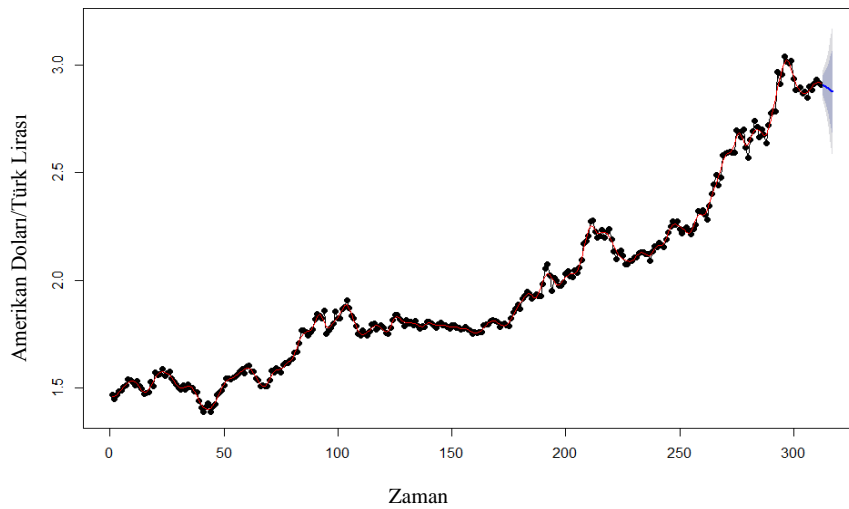


Şekil 5.1. Amerikan Doları/Türk Lirası için B-splayn yaklaşımı ile serpilme grafiği

Çizelge 5.5. Amerikan Doları/Türk Lirası için B-splayn fonksiyon öngörüsü

Tahmin edilen değeri	Alt sınır (%95)	Tahmin	Üst sınır (%95)
313	2,8496	2,9323	3,0150
314	2,8408	2,9519	3,0629
315	2,8314	2,9767	3,1220
316	2,8215	3,0073	3,1931
317	2,8115	3,0442	3,2768

Çizelge 5.6 kübik splayn düzeltme ile tahmin edilen Amerikan Doları/Türk Lirası için öngörü değerleri gösterilmektedir. Şekil 5.2’de kübik splayn düzeltme fonksiyonu yardımıyla yapılan yaklaşımı ile serpilme grafiği verilmiştir.

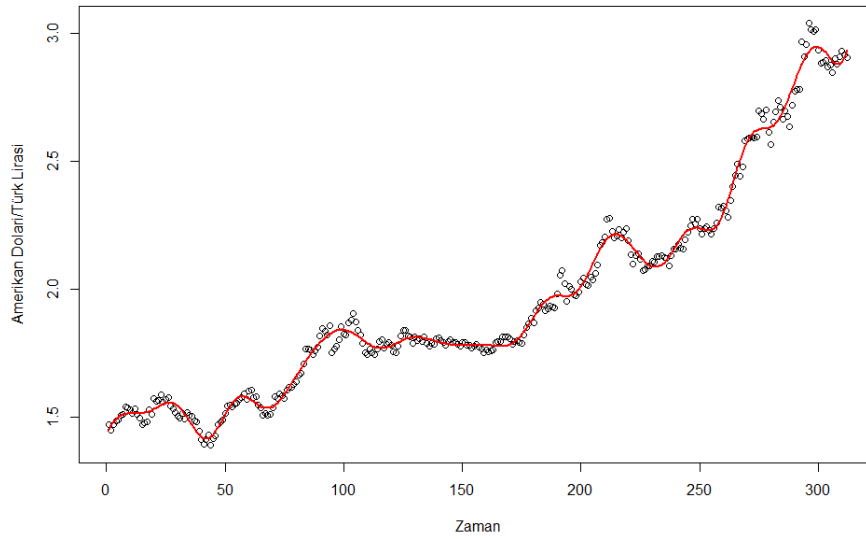


Şekil 5.2. Amerikan Doları/Türk Lirası için kübik splayn düzeltme yaklaşımı ile serpilme grafiği

Çizelge 5.6. Amerikan Doları/Türk Lirası için kübik splayn düzeltme öngörüsü

Tahmin edilen değeri	Alt sınır (%95)	Tahmin	Üst sınır (%95)
313	2,8359	2,9050	2,9741
314	2,7826	2,8975	3,0124
315	2,7179	2,8900	3,0621
316	2,6436	2,8825	3,1214
317	2,5616	2,8750	3,1883

Çizelge 5.7 cezalı splayn ile tahmin edilen Amerikan Doları/Türk Lirası için öngörü değerleri gösterilmektedir. Şekil 5.3'te cezalı splayn fonksiyon yardımıyla yapılan yaklaşımı ile serpilme grafiği verilmiştir.



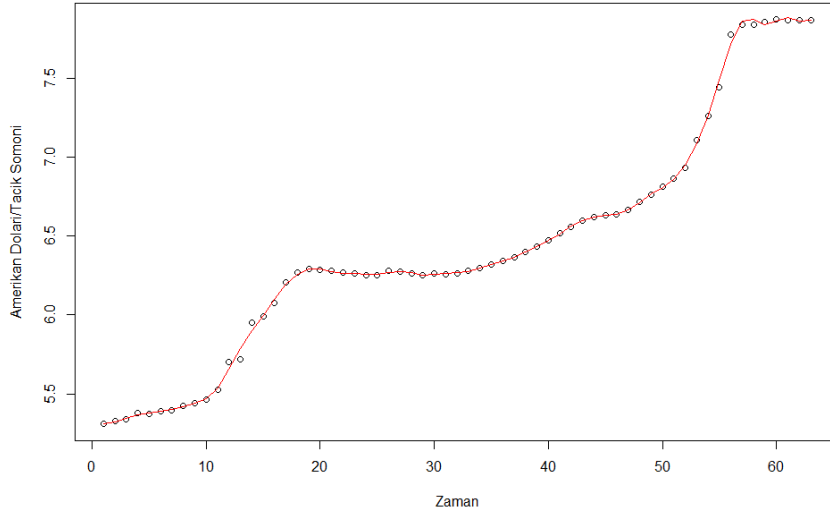
Şekil 5.3. Amerikan Doları/Türk Lirası için cezalı splayn yaklaşımı ile serpilme grafiği

Çizelge 5.7. Amerikan Doları/Türk Lirası için cezalı splayn öngörüsü

Tahmin edilen değeri	Alt sınır (%95)	Tahmin	Üst sınır (%95)
313	2,8740	2,9789	3,0741
314	2,8835	3,0221	3,1124
315	2,9124	3,0653	3,1631
316	3,0125	3,1085	3,1954
317	3,0550	3,1517	3,2283

Çizelge 5.8, 5.9 ve 5.10'de sırasıyla B-splayn, kübik splayn düzeltme ve cezalı splayn tahmin edilen Amerikan Doları/Tacik Somoni için öngörü değerleri gösterilmektedir. Şekil 5.4, 5.5 ve 5.6'de yöntemler yaklaşımı ile serpilme grafikleri yer almaktadır.

İlk olarak Şekil 5.4'de B-splayn taban fonksiyon yardımıyla yapılan yaklaşımı ile serpilme grafiği gösterilmiştir.

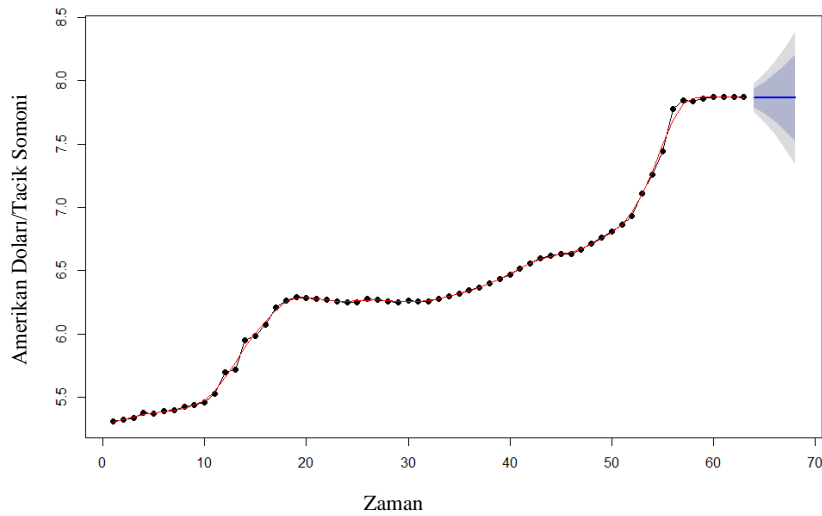


Şekil 5.4. Amerikan Doları/Tacik Somoni için B-splayn yaklaşımı ile serpilme grafiği

Çizelge 5.8. Amerikan Doları/Tacik Somoni için B- splayn öngörüsü

Tahmin edilen değeri	Alt sınır (%95)	Tahmin	Üst sınır (%95)
64	7,8332	7,9636	8,0939
65	7,8627	8,1042	8,3457
66	7,9135	8,3026	8,6918
67	7,9864	8,5588	9,1313
68	8,0818	8,8728	9,6639

Çizelge 5.9 Kübik splayn düzeltme tahmin edilen Amerikan Doları/Tacik Somoni için öngörü değerleri gösterilmektedir. Şekil 5.5’de kübik splayn düzeltme fonksiyon yardımıyla yapılan yaklaşımı ile serpilme grafiği gösterilmiştir.

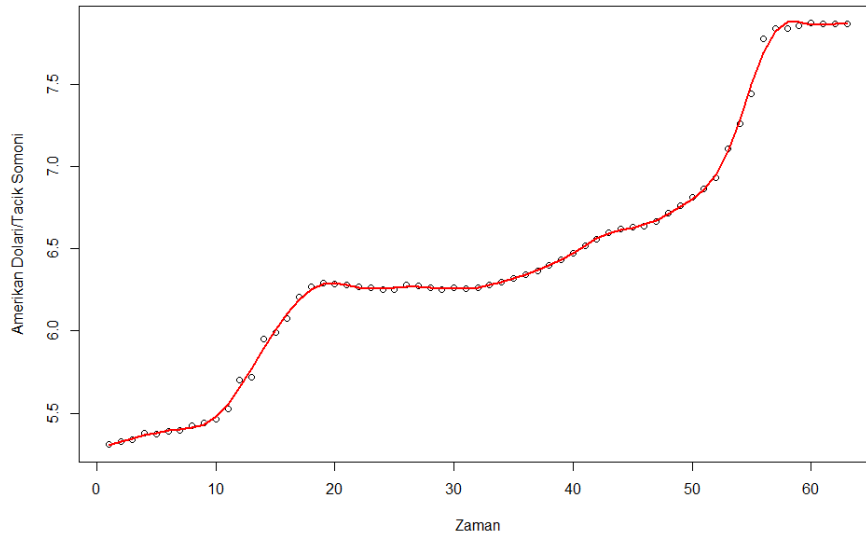


Şekil 5.5. Amerikan Doları/Tacik Somoni için kübik splayn düzeltme yaklaşımı ile serpilme grafiği

Çizelge 5.9. Amerikan Doları/Tacik Somoni için kübik splayn düzeltme öngörüsü

Tahmin edilen değeri	Alt sınır (%95)	Tahmin	Üst sınır (%95)
64	7,7545	7,8683	7,9820
65	7,6776	7,8674	8,0572
66	7,5801	7,8666	8,1530
67	7,4671	7,8657	8,2643
68	7,3411	7,8649	8,3886

Çizelge 5.10 cezalı splayn yardımıyla tahmin edilen Amerikan Doları/Tacik Somoni için öngörü değerleri gösterilmektedir. Şekil 5.6'de cezalı splayn fonksiyon yardımıyla yapılan yaklaşımı ile serpilme grafiği gösterilmiştir.



Şekil 5.6. Amerikan Doları/Tacik Somoni için cezalı splayn yaklaşımı ile serpilme grafiği

Çizelge 5.10. Amerikan Doları/Tacik Somoni için cezalı splayn öngörüsü

Tahmin edilen değeri	Alt sınır (%95)	Tahmin	Üst sınır (%95)
64	7,7745	7,8781	7,9620
65	7,6916	7,8833	8,0372
66	7,5751	7,8885	8,1130
67	7,4451	7,8938	8,2543
68	7,3711	7,8990	8,2886

Sonuçlara bakıldığında kübik splayn düzeltmenin ve cezalı splayn yaklaşımının çok yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. Öngörülen sonuçların gerçek değerlere yakın olduğuna dikkat çekmektedir.

5.2. Dağılım Fonksiyonlarının Splayn Yöntemleriyle Tahmini: Bir Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, orijinali Marron ve Wand [43] tarafından geliştirilen karışık normal dağılımları kullanarak, splayn yöntemlerin hangisinin daha iyi yaklaşım gösterdiğini belirlemek amacıyla, simülasyon çalışması yapılmıştır. Bu işlemlerde, R program ortamında yazılan bir programla, her bir fonksiyon için farklı sayıda örneklem oluşturulmuş ve oluşturulan her bir örneklem için farklı sayılarında tekrarlamalar yapılmıştır. Tekrarlanan her bir örneklem veri dizisi için herhangi bir tahmin eğrisinin kalitesini değerlendirmek için (5.1)'de verilen hata kareler ortalaması (MSE) kullanılmıştır.

Ele alınan deney planı, esas itibariyle orijinali Maron ve Wand'a [43] ait olup Xue ve Wang [108] tarafından da kullanılmıştır. Ele alınan deneysel düzenek, deneyde örneklem oluşturmada kullanılan fonksiyonlar, Çizelge 5.11'de genel biçimde verilen modellerden elde edilmiştir. Simülasyon çalışması, R ortamında yazılan bir programla gerçekleştirilmiş olup, deneyin planı ve yürütülmesi ise şu şekilde tasarlanmıştır:

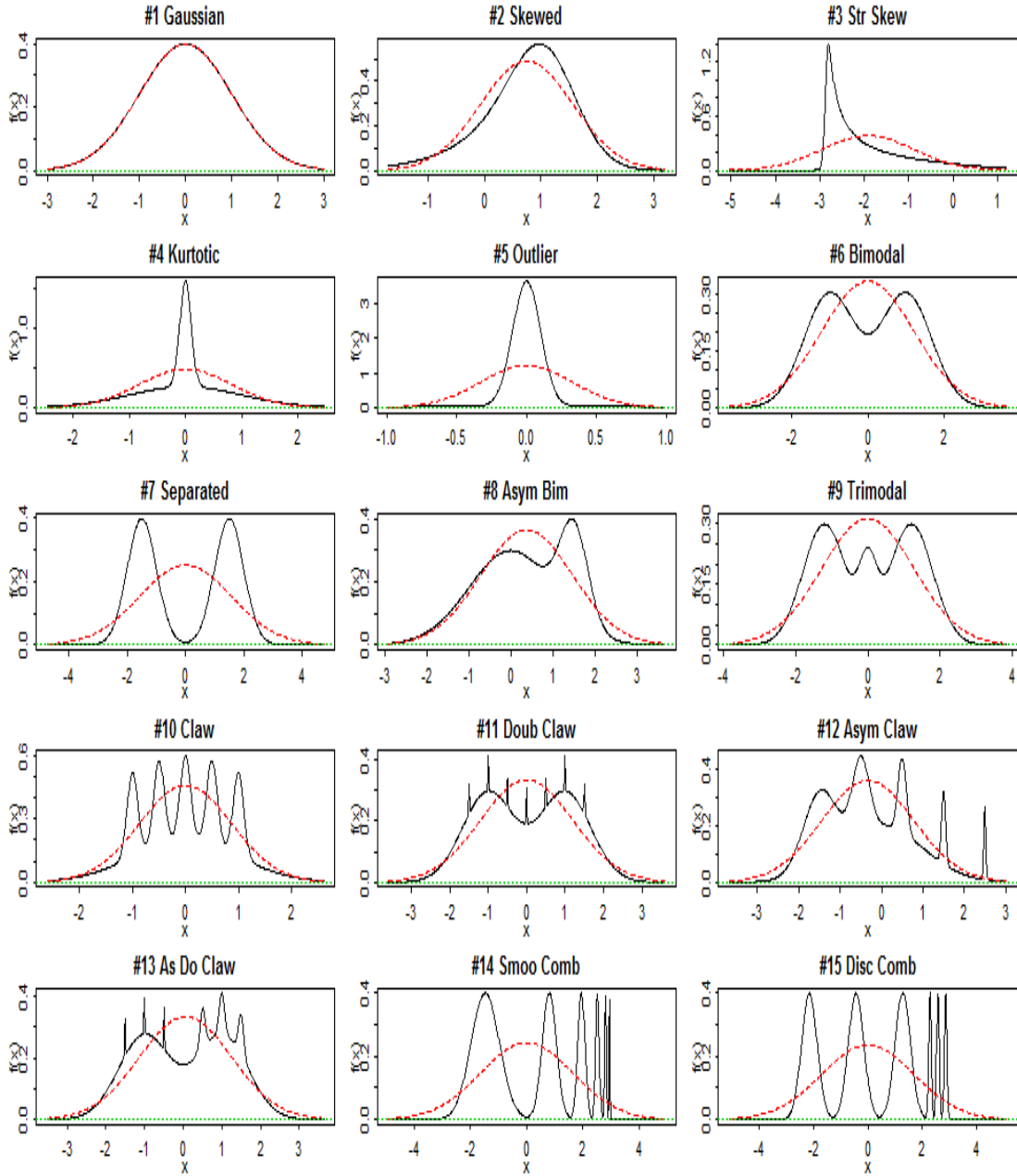
- Her bir fonksiyon için yöntemlerin küçük ve büyük örneklem performanslarını görebilmek amacıyla, 50, 100, ve 200 hacimlerinde 3 farklı örneklem oluşturulmuştur.
- Oluşturulan her bir örneklem, 1000 kez tekrar edilmiştir.
- Her bir fonksiyondan üretilen veriler için tekrar edilen tüm örneklemelerde seçim ölçütünü minimum yapan λ düzeltme parametresi çapraz geçerlilik skoru kullanarak seçilmiştir.
- Her bir seçim ölçütünden seçilen λ düzeltme parametresine uygun \hat{f}_λ splayn düzeltme kestiricileri hesaplanmıştır.
- Her bir seçim ölçütüne göre hesaplanan \hat{f}_λ splayn kestiricileri için (5.1) formülü ile verilen MSE değerleri hesaplanmıştır.

Simülasyon deneyleri sonucunda oluşturulan toplam 45 sayısal deneyin her birinde, splayn yöntemlerin hangisinin seçilen düzeltme parametreleri yardımıyla hesaplanan splayn düzeltme kestiricilerinin iyi bir kestirici olup olmadığını belirlemek amacıyla, MSE değerleri performans ölçütleri olarak kullanılmıştır.

Çizelge 5.11. Simülasyon çalışmasında kullanılan dağılım fonksiyonları

Fonksiyon	Açıklama
$F_1 = (\xi)N(0,1)$	Gauss yoğunluğu (Gaussian Density)
$F_2(\xi) = \frac{1}{5}N(0,1) + \frac{1}{5}N\left(\frac{1}{2}, \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + \frac{3}{5}N\left(\frac{13}{12}, \left(\frac{5}{9}\right)^2\right)$	Tek modlu çarpık yoğunluğu (Skewed Unimodal Density)
$F_3(\xi) = \sum_{l=0}^7 \frac{1}{8}N\left(3\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^l - 1\right\}, \left(\frac{2}{3}\right)^{2l}\right)$	Çok çarpık yoğunluğu (Strongly Skewed Density)
$F_4(\xi) = \frac{2}{3}N(0,1) + \frac{1}{3}N\left(0, \left(\frac{1}{10}\right)^2\right)$	Tek modlu basıklık yoğunluğu (Kurtotic Unimodal Density)
$F_5(\xi) = \frac{1}{10}N(0,1) + \frac{9}{10}N\left(0, \left(\frac{1}{10}\right)^2\right)$	Aykırı yoğunluğu (Outlier Density)
$F_6(\xi) = \frac{1}{2}N\left(-1, \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + \frac{1}{2}N\left(1, \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$	Çiftli yoğunluğu (Bimodal Density)
$F_7(\xi) = \frac{1}{2}N\left(-\frac{3}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \frac{1}{2}N\left(\frac{3}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$	Ayrılmış iki modlu yoğunluğu (Separated Bimodal Density)
$F_8(\xi) = \frac{3}{4}N(0,1) + \frac{1}{4}N\left(\frac{3}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$	Asimetrik çiftli yoğunluğu (Asymmetric Bimodal Density)
$F_9(\xi) = \frac{9}{20}N\left(-\frac{6}{5}, \left(\frac{3}{5}\right)^2\right) + \frac{9}{20}N\left(\frac{6}{5}, \left(\frac{3}{5}\right)^2\right) + \frac{1}{10}N\left(0, \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)$	Üçlü yoğunluğu (Trimodal Density)
$F_{10}(\xi) = \frac{1}{2}N(0,1) + \sum_{l=0}^4 \frac{1}{10}N\left(\left\{\left(\frac{l}{2}\right) - 1\right\}, \left(\frac{1}{10}\right)^2\right)$	Pençe yoğunluğu (Claw Density)
$F_{11}(\xi) = \frac{49}{100}N\left(-1, \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + \frac{49}{100}N\left(1, \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + \sum_{l=0}^6 \frac{1}{350}N\left(\left(\frac{l-3}{2}\right), \left(\frac{1}{100}\right)^2\right)$	Çift pençe yoğunluğu (Double Claw Density)
$F_{12}(\xi) = \frac{1}{2}N(0,1) + \sum_{l=-2}^2 \frac{2^{1-l}}{31}N\left(l + \frac{1}{2}, \left(\frac{2^{-l}}{10}\right)^2\right)$	Asimetrik pençe yoğunluğu (Asymmetric Claw Density)
$F_{13}(\xi) = \sum_{l=0}^1 \frac{46}{100}N\left(2l - 1, \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + \sum_{l=1}^3 \frac{1}{300}N\left(\frac{-l}{2}, \left(\frac{1}{100}\right)^2\right) + \sum_{l=1}^3 \frac{7}{300}N\left(\left(\frac{l}{2}\right), \left(\frac{7}{100}\right)^2\right)$	Asimetrik çift pençe yoğunluğu (Asymmetric Double Claw Density)
$F_{14}(\xi) = \sum_{l=0}^5 \frac{2^{5-l}}{63}N\left(\left\{65 - 96\left(\frac{1}{2}\right)^l\right\}/21, \left(\frac{32}{63}\right)^2/2^{2l}\right)$	Pürüzsüz kombinasyon yoğunluğu (Smooth Combination Density)
$F_{15}(\xi) = \sum_{l=0}^2 \frac{2}{7}N\left((12l - 15)/7, \left(\frac{2}{7}\right)^2\right) + \sum_{l=8}^{10} \frac{1}{21}N\left(2l/7, \left(\frac{1}{21}\right)^2\right)$	Ayrık kombinasyon yoğunluğu (Discrete Combination Density)

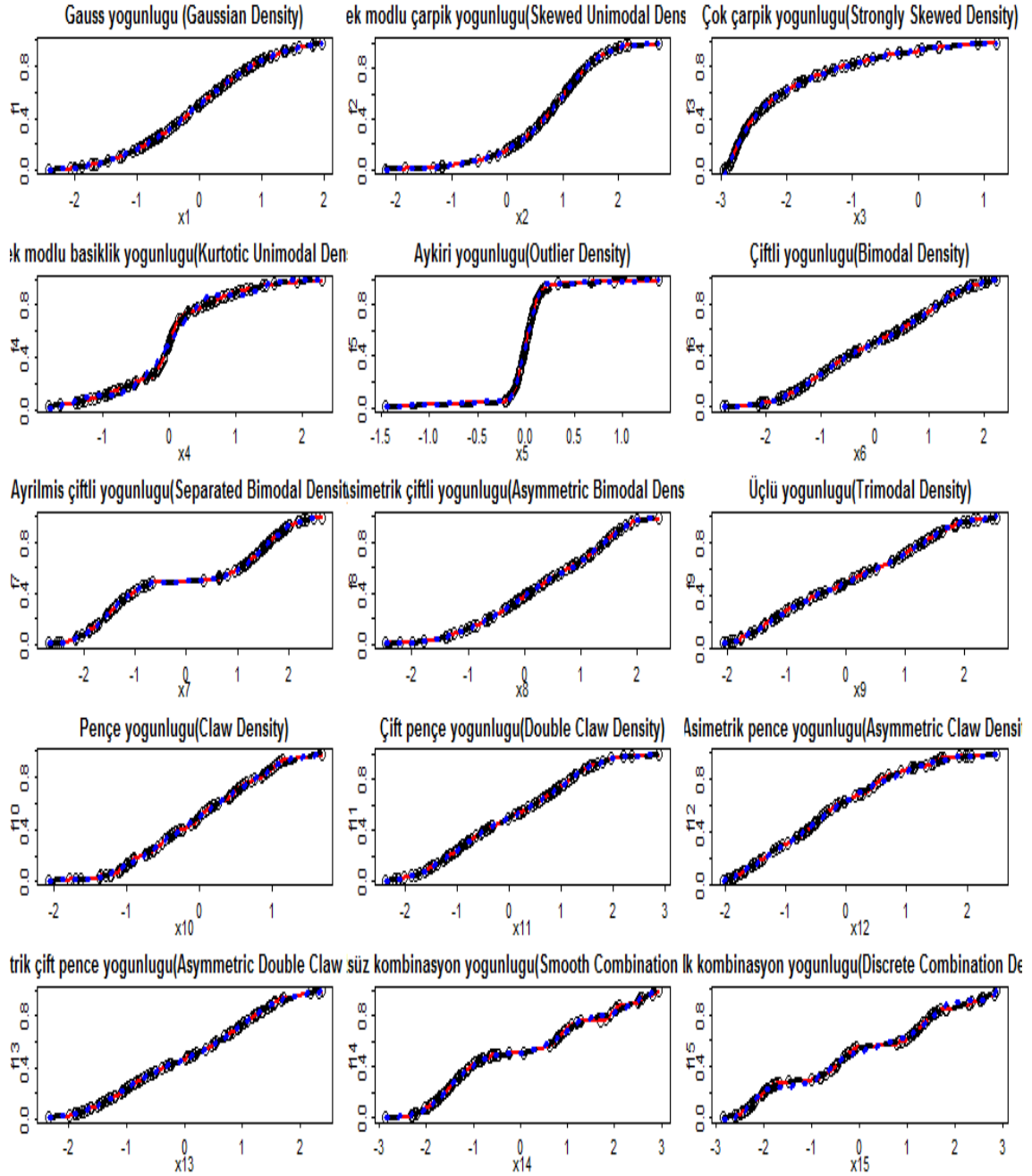
Şekil 5.7’de simülasyon deneylerinde kullanılmış dağılım fonksiyonlarının grafikleri gösterilmiştir.



Şekil 5.7. Karışık fonksiyonların olasılık dağılımlarının şekilleri

Simülasyonla elde edilen verileri için toplam 45 farklı sayısal deneyi oluşturan, B-splayn, splayn düzeltme ve cezalı splayn fonksiyonların yaklaşım grafikleri Şekil 5.8’de gösterilmiştir. Bu grafikte her bir fonksiyondan üretilen veriler noktalarla, B-splayn yaklaşımı (kırmızı çizgi), kübik splayn düzeltme (noktalı siyah çizgi) ve cezalı splayn (noktalı mavi çizgi) göstermektedir.

Elde edilen sonuçlar hata kareler ortalama değerleri Çizelge 5.12’ de yer almaktadır. Bu çizelgede her bir fonksiyon için en iyi yaklaşım oluşturan splayn yöntemler hata kareler ortalamasına göre gösterilmiştir.



Şekil 5.8. Karışık fonksiyonların splayn yaklaşımı ile serpilme grafiği

Çizelge 5.12 incelendiğinde; $n = 50$ birimlik küçük örneklem verileri için 1000 tekrarlı bir deneyde, splayn düzeltme ve cezalı splayn'nin iyi yöntem olduğu görülürken, B-splayn genel olarak toplamda en kötü performansa sahip olduğu görülmüştür. Ancak $F_{10}(\xi)$ fonksiyonunda B-splayn yöntemi diğer yöntemlere göre daha iyi sonuç göstermiştir.

Çizelge 5.12. $n=50$ hacimlik örnekleme hesaplanan MSE değerleri

Fonksiyon	B-splayn	Kübik splayn düzeltme	Cezalı splayn
$F_1(\xi)$	0,093	0,409	0,021*
$F_2(\xi)$	1,257	0,634	0,439*
$F_3(\xi)$	60,920	4,775*	60,035
$F_4(\xi)$	1000,199	11,525*	953,043
$F_5(\xi)$	300,619	119,285*	271,351
$F_6(\xi)$	2,042	1,429	0,483*
$F_7(\xi)$	8,231	2,124*	2,550
$F_8(\xi)$	7,827	2,290*	3,850
$F_9(\xi)$	10,054	3,724*	6,708
$F_{10}(\xi)$	80,596*	81,488	87,229
$F_{11}(\xi)$	2,395	1,849	0,898*
$F_{12}(\xi)$	70,871	22,622*	66,022
$F_{13}(\xi)$	8,933	7,518	6,841*
$F_{14}(\xi)$	80,983	75,269*	94,602
$F_{15}(\xi)$	100,468	60,749*	137,669

(*): En iyi sonuç veren yöntemi göstermektedir.

$n=100$ birimlik örneklemlerin durumu Çizelge 5.13'te yer almaktadır. Bu çizelge incelendiğinde $n=50$ birimlik örnekleme benzer olarak, fonksiyonlardan üretilen veriler aynı şekilde kümülatif eğrileri göstermektedir. Bundan dolayı önceki sonuçlarda olduğu gibi burada da kübik splayn düzeltmenin en iyi tahmin edilen yöntemi olduğu görülmüştür. Buna karşılık, en kötü performansı B-splayn göstermiştir.

Çizelge 5.13. $n=100$ hacimlik örnekleme hesaplanan MSE değerleri

Fonksiyon	B-splayn	Kübik splayn düzeltme	Cezalı splayn
$F_1(\xi)$	0,241	0,398	0,053*
$F_2(\xi)$	3,236	0,908*	1,111
$F_3(\xi)$	96,865	6,711*	80,473
$F_4(\xi)$	162,759	9,681*	126,914
$F_5(\xi)$	152,368	23,194*	100,935
$F_6(\xi)$	5,049	1,082*	1,086
$F_7(\xi)$	11,532	1,574*	4,178
$F_8(\xi)$	15,984	2,065*	7,611
$F_9(\xi)$	13,267	3,318*	9,303
$F_{10}(\xi)$	101,118	101,170	90,840*
$F_{11}(\xi)$	5,043	1,781	1,436*
$F_{12}(\xi)$	93,577	25,558*	80,139
$F_{13}(\xi)$	13,510	8,080	7,945*
$F_{14}(\xi)$	110,587	75,885*	100,181
$F_{15}(\xi)$	162,648	46,625*	200,112

(*): En iyi sonuç veren yöntemi göstermektedir.

Çizelge 5.14'te $n=200$ birimlik örneklemlerin durumu incelendiğinde, birim sayısı arttıkça kübik splayn düzeltmenin en iyi yöntem olduğu görülebilmektedir.

Çizelge 5.14. $n=200$ hacimlik örnekleme hesaplanan MSE değerleri

Fonksiyonlar	B-splayn	Kübik splayn	Cezalı splayn
$F_1(\xi)$	0,564	0,603	0,134*
$F_2(\xi)$	7,163	1,227*	2,374
$F_3(\xi)$	11,394	7,5*	10,855
$F_4(\xi)$	20,923	8,099*	15,122
$F_5(\xi)$	38,734	31,446*	28,807*
$F_6(\xi)$	9,953	0,794*	2,082
$F_7(\xi)$	12,619	1,144*	6,210
$F_8(\xi)$	27,004	2,031*	12,751
$F_9(\xi)$	14,201	2,671*	12,347
$F_{10}(\xi)$	111,688	112,701	106,776*
$F_{11}(\xi)$	10,04	1,369*	2,187
$F_{12}(\xi)$	98,353	24,346*	92,935
$F_{13}(\xi)$	19,263	8,029*	9,126
$F_{14}(\xi)$	130,408	76,529*	124,927
$F_{15}(\xi)$	160,344	32,489*	285,438

(*):En iyi sonuç veren yöntemi göstermektedir.

Deneysel çalışma olarak gerçekleştirilen simülasyonda, her bir fonksiyon için farklı büyüklükte (50, 100, 200) üç örneklem ve 1000 tekrarlıma söz konusu splayn yöntemlerinin seçimi, örneklem hacimleri ve tekrarlanma sayına göre nasıl bir performans izledikleri gösterilmiştir. Bu simülasyon çalışmasında toplam 135 farklı deney yapılmış ve bu deneylerde, söz konusu üç splayn yönteminin MSE değeri hesaplanmıştır. Kullanılan yöntemlerden düzeltme splayn yöntemi en iyi sonucu göstermektedir. İkinci olarak cezalı splayn performans ölçütlerine göre iyi sonuç ve B-splayn yöntemi sadece birkaç deneyde iyi sonuç göstermiştir.

5.3. Çok Değişkenli Splayn Yaklaşımı: İki Değişkenli Simülasyon Çalışması

Çok değişkenli düzeltme splayn yöntemlerinin kullanılmasını göstermek amacıyla bu bölümde iki değişkenli deneysel çalışma gerçekleştirilmiştir [46,47,56,57]. Veri üretmek için farklı kaynaklardan fonksiyonlar seçilmiştir. Fan ve Gijbels'in kitabından [23] fonksiyon alınmıştır. Wood'un makalesinde [104] ince tabakalı splayn ve regresyon yöntemlerini karşılaştırmak için iki fonksiyon kullanılmıştır. Bayes regresyon yöntemleri yardımıyla iki farklı fonksiyonlardan üretilen verileri tahmin etmek amacıyla Smith ve Kohn [96] makalesi de kullanılmıştır.

Bu işlemlerde, R program ortamında yazılan bir programla, her bir seçilen fonksiyon için $n = 50,100,200,400$ gözlemlerle örneklem oluşturulmuş ve oluşturulan her bir örneklem için 100 tekrarlama yapılmıştır. Tekrarlanan her bir örneklem veri dizisi için herhangi bir tahmin eğrisinin kalitesini değerlendirmek için Eşitlik (5.1)'de verilen hata kareler kullanılmıştır.

Deneyde örneklem oluşturmada kullanılan fonksiyonlar, Çizelge 5.14'deki genel biçimde verilen modellerden elde edilmiştir. Simülasyon deneyi, deneyin planı ve yürütülmesi ise şu şekilde tasarlanmıştır:

- Her bir fonksiyondan $n = 50,100,200,400$ hacimlerinde örneklem oluşturulmuştur.
- Oluşturulan her bir örneklem, 100 kez tekrar edilmiştir.
- Her bir fonksiyondan üretilen veriler için tekrar edilen tüm örneklemelerde seçim ölçütlerin minimum yapan λ düzeltme parametreleri genelleştirilmiş çapraz geçerlilik skoru kullanarak seçilmiştir.
- Her bir seçim ölçütlerinden seçilen λ düzeltme parametresine uygun \hat{f}_λ çok değişkenli splayn düzeltme kestiricileri hesaplanmıştır.
- Her bir seçim ölçütüne göre hesaplanan \hat{f}_λ splayn kestiricileri için MSE değerleri hesaplanmıştır.

Simülasyon deneyleri sonucunda oluşturulan toplam 180 adet deneyin her birinde, splayn yöntemlerin hangisinin seçilen düzeltme parametreleri yardımıyla hesaplanan splayn düzeltme kestiricilerinin iyi bir kestirici olduğunu belirlemek amacıyla, MSE değerleri performans ölçütü olarak kullanılmıştır.

Çizelge 5.14. Simülasyon çalışmasında kullanılan iki değişkenli fonksiyonlar

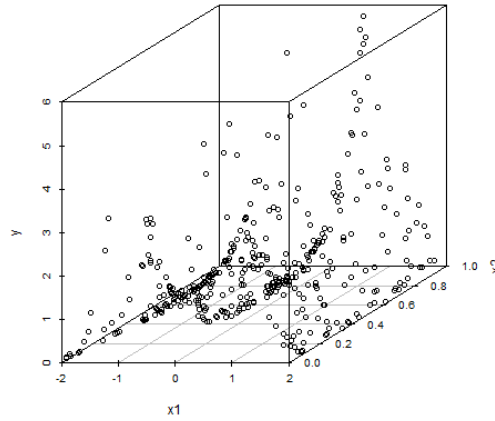
No	Fonksiyon	Açıklama
1	$f_1(x_1, x_2) = 0,7 \exp[-3\{(x_1 + 0,8)^2 + 8(x_2 - 0,5)^2\}] + \exp[-3\{(x_1 + 0,8)^2 + 8(x_2 - 0,5)^2\}] + \varepsilon$ $\varepsilon \sim N\{0, (0,1)^2\},$ $x_1 \sim Uniform(-2,2),$ $x_2 \sim Uniform(0,1)$	Fan ve Gijbels [23]
2	$f_2(x_1, x_2) = 1,9[1,45 + \exp(x_1)\sin\{13(x_1 - 0,6)^2\}] \exp(-x_2)\sin(7x_2)$ $x_1 \sim Uniform(-2,2),$ $x_2 \sim Uniform(0,1)$	Simon Wood [104]
3	$f_3(x_1, x_2) = \exp[\{-(x_1 - 0,25)^2 - (x_2 - 0,25)^2\}/0,1] + 0,5 \exp[\{-(x_1 - 0,7)^2 - (x_2 - 0,7)^2\}/0,07]$ $x_1 \sim Uniform(-2,2),$ $x_2 \sim Uniform(0,1)$	Simon Wood [104]
4	$f_4(x_1, x_2) = \frac{1}{5} \exp(-8x_1^2) + \frac{3}{5} \exp(-8x_2^2)$ $x_1 \sim N(0,5,1)$ $x_2 \sim N(0,5,1)$	Smith ve Kohn [96]
5	$f_5(x_1, x_2) = x_1 \sin(4x_2)$ $x_1 \sim Uniform(0,1),$ $x_2 \sim Uniform(0,1)$	Smith ve Kohn [96]

Simülasyon çalışmasında elde edilen örneklem verileri için toplam 180 farklı deney oluşturulmuştur. Kübik splayn düzeltmeden oluşturulan genelleştirilmiş toplamsal model, cezalı splayn genelleştirilmiş toplamsal model, ince tabakalı splayn fonksiyonların grafikleri ve farklı taban fonksiyonlar sayısı oluşan modeller aşağıdaki şekillerde gösterilmektedir. Söz konusu Şekil 5.9, 5.12, 5.15, 5.18 ve 5.21’de fonksiyonlardan üretilen verilerin grafiği verilmiştir. Şekil 5.10, 5.13, 5.16, 5.20 ve 5.22’de farklı taban fonksiyonlarla oluşturan splayn yöntemlerin yüzey tahmini gösterilmiştir. Bu şekillerde, birinci sırada 5, 10 ve 20 farklı taban fonksiyonlardan oluşan cezalı splayn, ikinci sırada aynı sayıda kübik düzeltme splayn ve üçüncü ince tabakalı splayn yer almaktadır. Bu yöntemlerinden her deneyde elde edilen 100 tane *MSE* değerlerinin kutu grafikleri (boxplot) Şekil 5.11, 5.14, 5.17, 5.19 ve 5.23’te verilmiştir. Tüm kullanılan yöntemlerin kutu grafikleri (boxplot) soldan sağa doğru, cezalı splayn 5, 10 ve 20 taban fonksiyonlardan oluşan, kübik splayn düzeltme 5,10 ve

20 tane taban fonksiyonlardan oluşan ve ince tabakalı splayn 5, 10 ve 20 taban fonksiyonlardan oluşan MSE değerlerini gösterilmektedir.

Bunun yanı sıra, her bir fonksiyon ve farklı sayıda her bir örneklem veriler için, yöntemlerin ortalama başarılarını görmek amacıyla, dokuz farklı yöntemin MSE değerlerinin ortalaması alınarak sıralama elde edilmiştir. Söz konusu bu ortalama değerleri Çizelge 5.15-5.20 verilmiştir.

İlk olarak Fan ve Gijbels [23] kitabındaki fonksiyondan veriler elde edilmektedir.



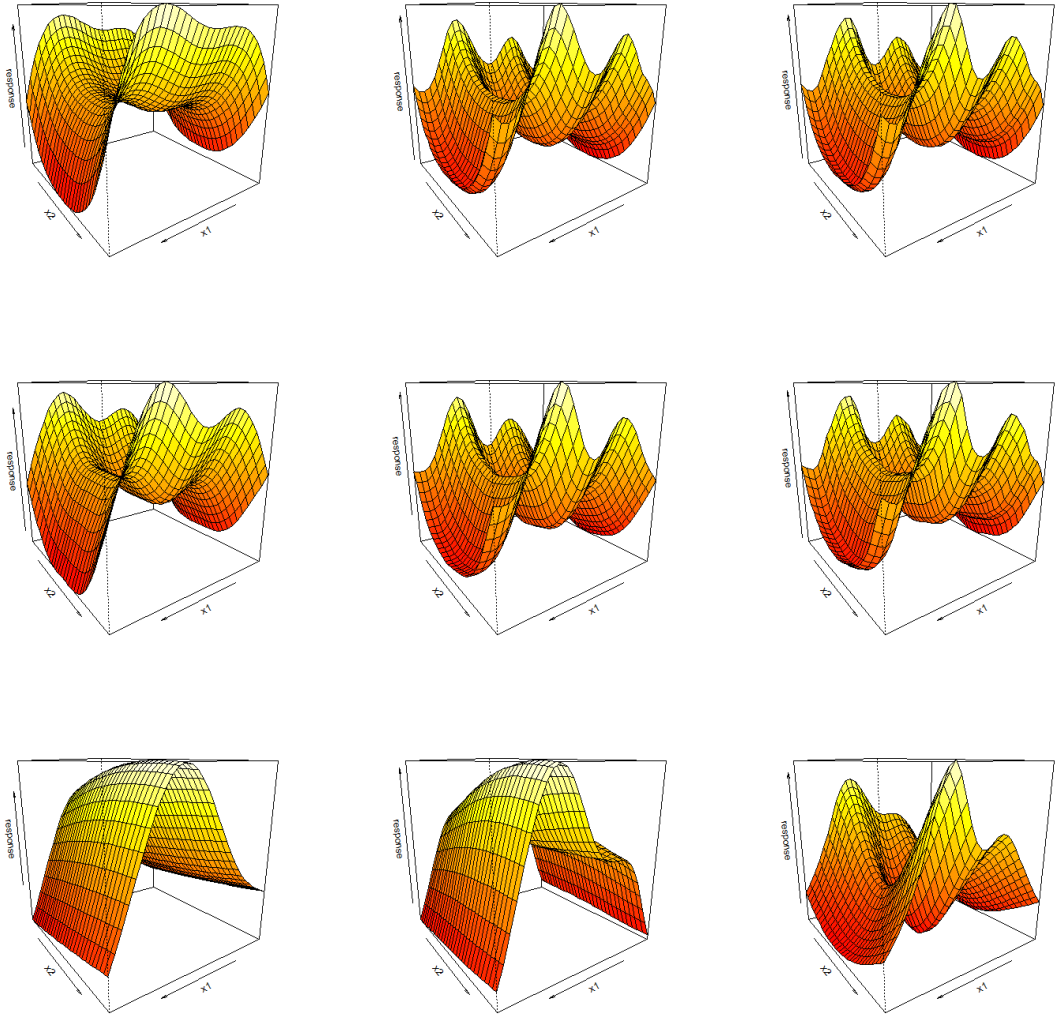
Şekil 5.9. Fan ve Gijbels fonksiyonundan üretilen veriler

Çizelge 5.15 incelendiğinde; $n=50$ ve $n=100$ birimlik küçük örneklem veriler için en iyi kestirimci ince tabakalı splaynda görülmektedir. MSE 'nin ortalama değerine bakıldığında, en küçük olan ince tabakalı splayna aittir. İkinci sırada iyi kestirimci olan cezalı toplamsal splayn yöntemidir. Kübik splayn düzeltmenin MSE değerinin ortalaması en kötü performansı göstermektedir.

Çizelge 5.15. Fan ve Gijbels'in fonksiyonunun MSE değerlerinin ortalaması

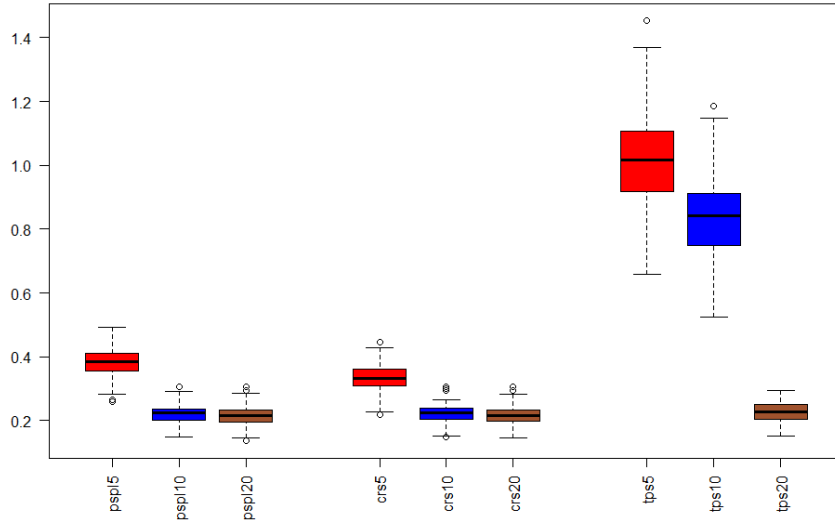
Yöntemler	n=50	n=100	n=200	n=400
Cezalı GAM 5 taban fonksiyon	0,296	0,331	0,355	0,381
Cezalı GAM 10 taban fonksiyon	0,125	0,168	0,193	0,218
Cezalı GAM 20 taban fonksiyon	0,106**	0,153**	0,184*	0,213*
GAM 5 taban fonksiyon	0,275	0,292	0,310	0,331
GAM 10 taban fonksiyon	0,139	0,175	0,199	0,220
GAM 20 taban fonksiyon	0,114***	0,158***	0,187**	0,214**
İnce tabakalı splayn 5 taban fonksiyon	0,951	0,908	0,963	1,025
İnce tabakalı splayn 10 taban fonksiyon	0,581	0,678	0,766	0,846
İnce tabakalı splayn 20 taban fonksiyon	0,090*	0,148*	0,193***	0,227***

Ancak, örneklem sayısı arttıkça, $n=200$ ve $n=400$ birimlik örneklem verileri için cezalı splayn yöntem minimum MSE değerine sahip olup, en iyi sonucu göstermektedir. İkinci sırada kübik splayn düzeltme ve son olarak ince tabakalı splayn yöntemi sonucu gösterilmiştir. Örneklem sayısı artırıldığında, toplamsal modellerin iyi sonuç verdiği görülmektedir. Şekil 5.10'da fonksiyonların splaynlarla yüzey yaklaşım grafikleri gösterilmiştir.



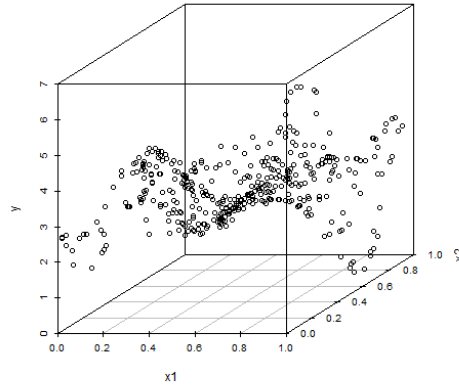
Şekil 5.10. Fan ve Gijbels fonksiyonundan üretilen verilerin splayn yöntemlerle tahmin edilen yüzey yaklaşım grafikleri

Şekil 5.11'de $n=400$ gözlem sayısı olan her bir fonksiyonun hesaplanan 100 tane MSE değerlerinin kutu grafikleri gösterilmiştir.



Şekil 5.11. Fan ve Gijbels fonksiyonunun MSE değerlerinin kutu grafiği

Şimdi Wood'un [104] makalesindeki fonksiyonundan veriler elde edilmiştir.



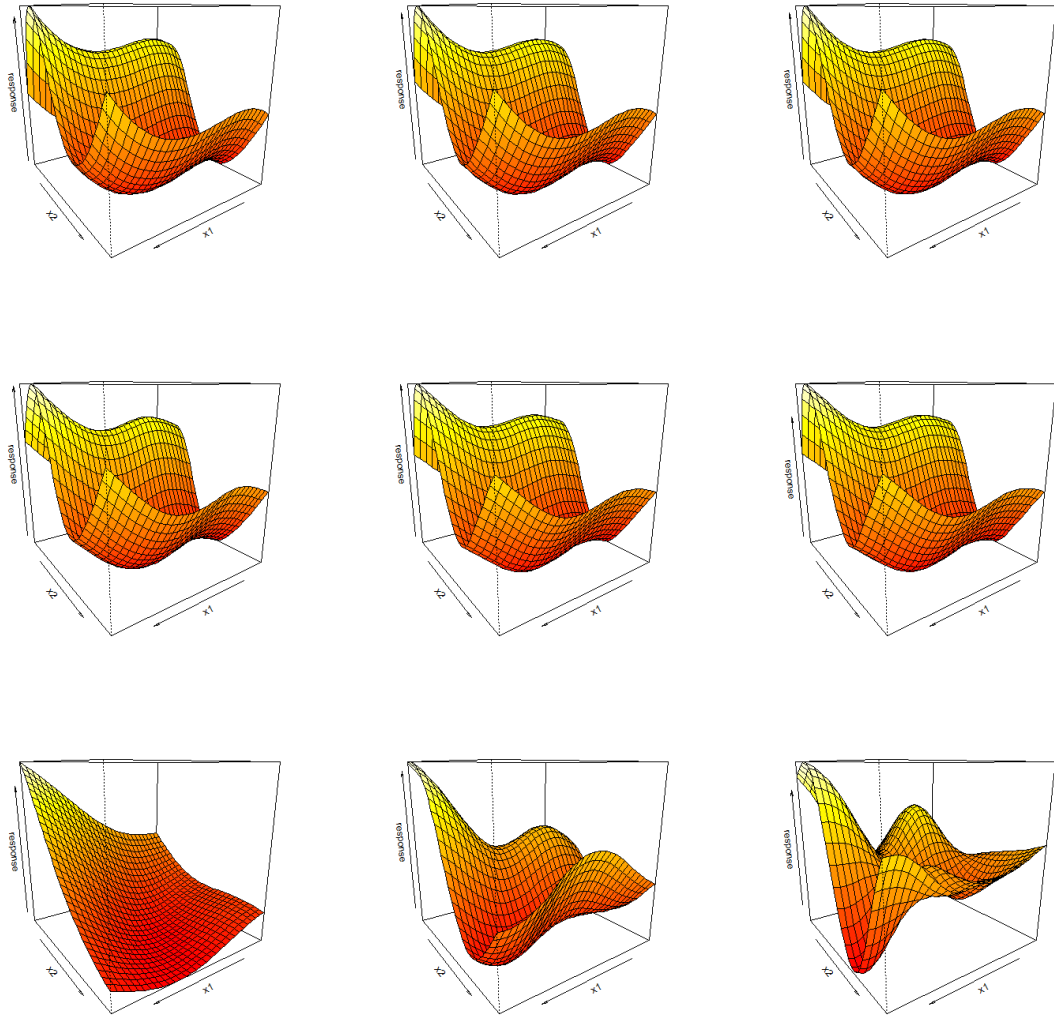
Şekil 5.12. Wood'un fonksiyonundan üretilen veriler

Çizelge 5.16 incelendiğinde; $n=50$ birimlik küçük örneklem veriler için MSE'nin ortalama değerine bakıldığında, en küçük olan ince tabakalı splaynda görülmektedir. İkinci sırada cezalı toplamsal splayn yöntemidir. Kübik düzeltme splaynın MSE değeri diğer yöntemlerden büyük olduğu görülmektedir.

Örneklem sayısı arttıkça, $n=200$ ve $n=400$ birimlik örneklem verileri için ince tabakalı splayn yöntemi en iyi sonucu göstermektedir. Kübik düzeltme splayn ve cezalı splayn yöntemleri hemen hemen aynı performansı göstermektedir. Şekil 5.13'de fonksiyonlardan elde edilen veriler için yüzey tahmin grafikleri gösterilmiştir.

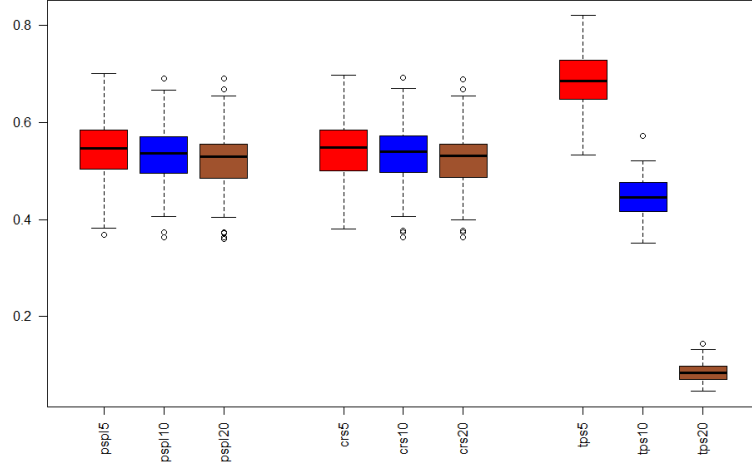
Çizelge 5.16. Wood'un fonksiyonunun tahmin edilen MSE değerlerinin ortalaması

Yöntemler	n=50	n=100	n=200	n=400
Cezalı GAM 5 taban fonksiyon	0,450	0,498	0,534	0,541
Cezalı GAM 10 taban fonksiyon	0,409	0,472	0,518	0,530
Cezalı GAM 20 taban fonksiyon	0,344**	0,445**	0,506**	0,523**
GAM 5 taban fonksiyon	0,460	0,501	0,534	0,541
GAM 10 taban fonksiyon	0,426	0,477	0,519	0,531
GAM 20 taban fonksiyon	0,344**	0,451***	0,508***	0,524***
İnce tabakalı splayn 5 taban fonksiyon	0,618	0,668	0,683	0,686
İnce tabakalı splayn 10 taban fonksiyon	0,343	0,397	0,428	0,445
İnce tabakalı splayn 20 taban fonksiyon	0,029*	0,055*	0,075*	0,083*



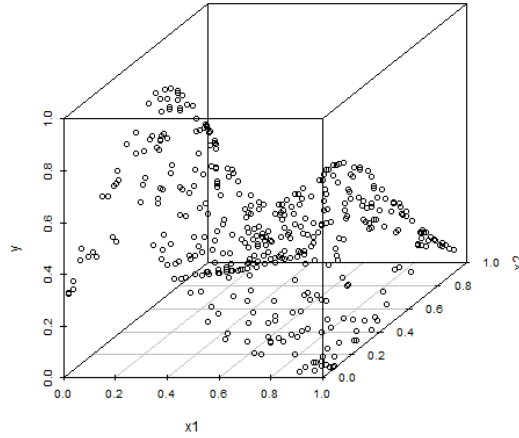
Şekil 5.13. Wood'un fonksiyonundan üretilen verilerin splayn yöntemlerle tahmin edilen yüzey yaklaşım grafikleri

Şekil 5.14’de $n=400$ gözlem sayısı olan her bir fonksiyonun hesaplanan 100 tane MSE değerlerinin kutu grafikleri gösterilmiştir.



Şekil 5.14. Wood’un fonksiyonunun MSE değerlerinin kutu grafiği

Simon Wood’un [104] makalesinde ikinci fonksiyonu incelenmektedir. Şekil 5.15’te bu fonksiyondan üretilen verileri göstermektedir.



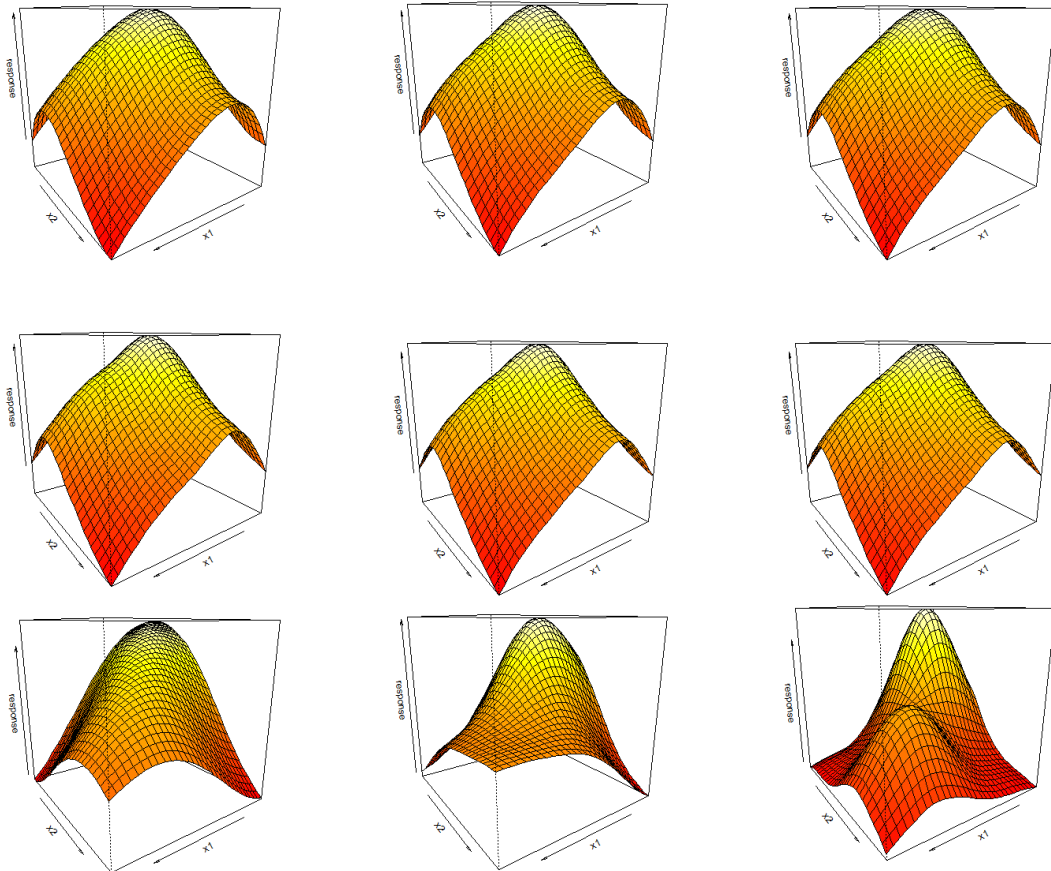
Şekil 5.15. Wood’un ikinci fonksiyonundan üretilen veriler

Çizelge 5.17 incelendiğinde; $n=50$ birimlik küçük örneklem verileri için MSE ’nin ortalama değerine bakıldığında, en küçük olan ince tabakalı splaynda görülmektedir. Toplamsal kübik splayn düzeltmenin MSE değerinin ortalaması ile toplamsal cezalı splayn yöntemin aynı olduğu görülebilmektedir. Örneklem sayısı arttıkça, $n=200$ ve

$n=400$ birimlik örenklem verileri için kübik düzeltme splayn ve cezalı splayn yöntemleri hemen hemen aynı sonuçları gösterilmektedir. Şekil 5.16'da fonksiyonlardan elde edilen veriler için yüzey tahmin grafikleri gösterilmiştir.

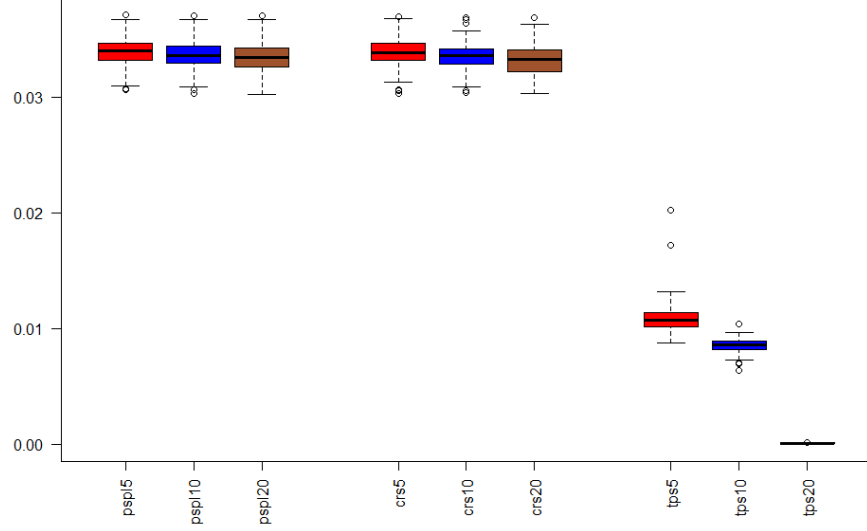
Çizelge 5.17. Wood'un ikinci fonksiyonunun tahmin edilen MSE değerlerinin ortalaması

Yöntemler	n=50	n=100	n=200	n=400
Cezalı GAM 5 taban fonksiyon	0,0293	0,0324	0,0334	0,0338
Cezalı GAM 10 taban fonksiyon	0,0263	0,0310	0,0327	0,0335
Cezalı GAM 20 taban fonksiyon	0,0218**	0,0294**	0,0320***	0,0333***
GAM 5 taban fonksiyon	0,0295	0,0323	0,0332	0,0337
GAM 10 taban fonksiyon	0,0269	0,0309	0,0325	0,0334
GAM 20 taban fonksiyon	0,0224***	0,0293***	0,0319**	0,0330**
İnce tabakalı splayn 5 taban fonksiyon	0,0132	0,0128	0,0112	0,0109
İnce tabakalı splayn 10 taban fonksiyon	0,0057	0,0072	0,0080	0,0085
İnce tabakalı splayn 20 taban fonksiyon	0,00092*	0,0001*	0,0001*	0,0001*



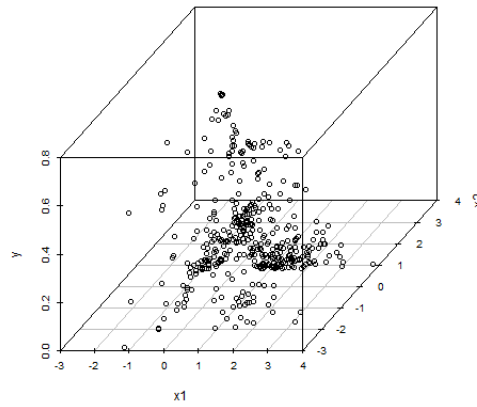
Şekil 5.16. Wood'un fonksiyonundan üretilen verilerin splayn yöntemlerle tahmin edilen yüzey yaklaşım grafikleri

Şekil 5.17’de 100 tane MSE değerlerinin kutu grafikleri gösterilmiştir. Bu şekilde $n=400$ gözlemler sayısı olan simülasyon çalışmasının sonucu gösterilmiştir.



Şekil 5.17. Wood'un fonksiyonunun MSE değerlerinin kutu grafiği

Parametrik olmayan Bayes tahmincilerin performansını incelemek için Smith ve Kohn [96]'un makalesinde iki farklı simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. Bu makalede kullanılan fonksiyonlardan veri üretip, splayn yöntemlerle tahmin etmektedir. Şekil 5.18’de birinci fonksiyondan üretilen veriler gösterilmiştir.



Şekil 5.18. Smith ve Kohn'un fonksiyonundan üretilen verilerin grafiği

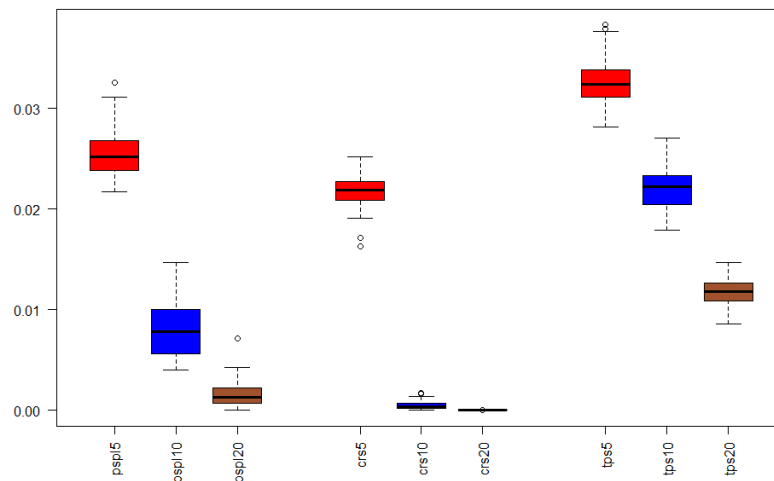
Çizelge 5.18 incelendiğinde; $n=50$ birimlik küçük örneklem verileri en iyi sonuç kübik splayn düzeltme yönteminde görülmektedir. MSE'nin ortalama değerine

bakıldığında, en küçük olan toplamsal kübik splayn düzeltme yöntemine aittir. Cezalı splayn yöntemin *MSE* değerlerinin ortalaması ince tabakalı splayndan daha küçük olduğu görülebilmektedir. Bu fonksiyondan üretilen verilerin yaklaşımında ince tabakalı splayn yöntemi büyük *MSE* değerlerine sahip olduğu görülmektedir. Örneklem sayısı arttıkça, $n=200$ ve $n=400$ birimlik örneklem verileri için yöntemlerin performansları değişmemektedir.

Çizelge 5.18. *Smith ve Kohn'un fonksiyonunun tahmin edilen MSE değerlerinin ortalaması*

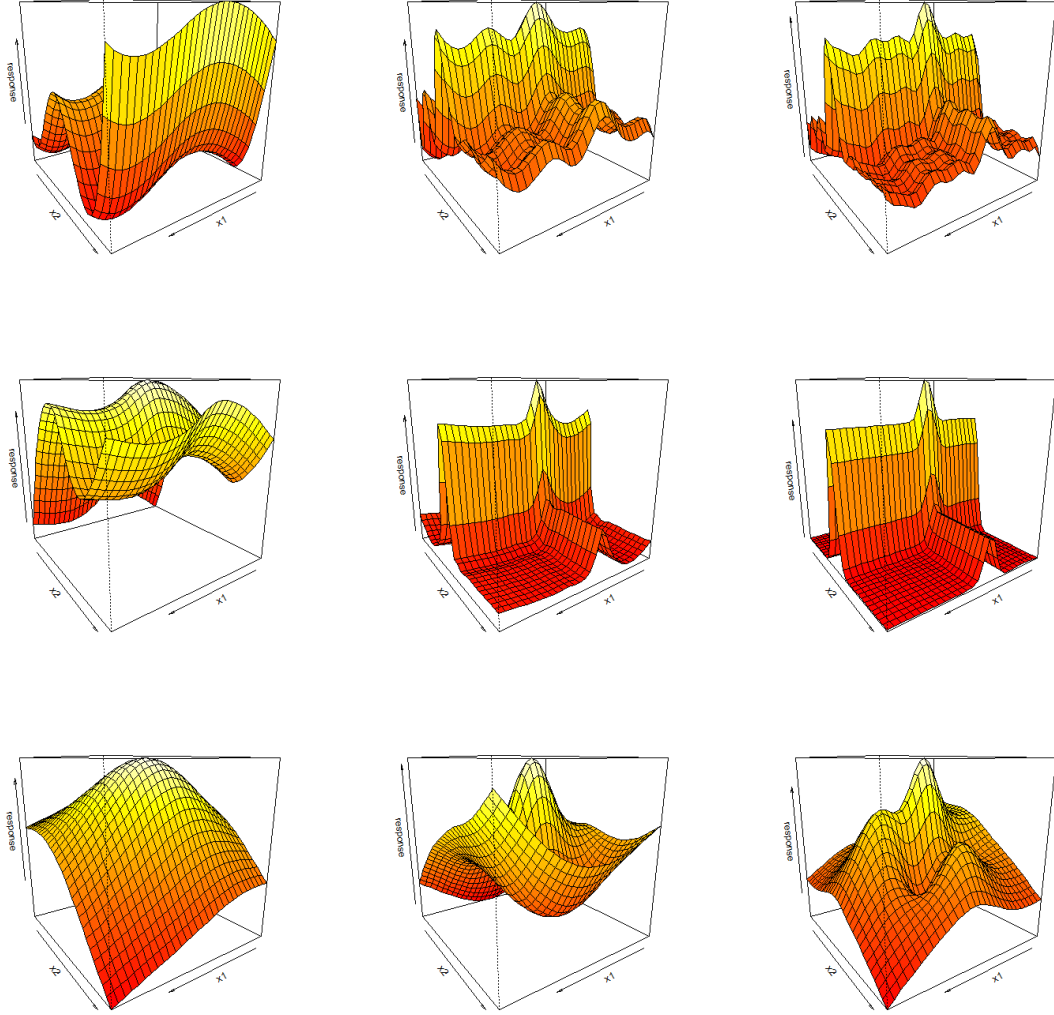
Yöntemler	n=50	n=100	n=200	n=400
Cezalı GAM 5 taban fonksiyon	0,01865	0,02165	0,02469	0,02548
Cezalı GAM 10 taban fonksiyon	0,00253	0,00437	0,00629	0,00802
Cezalı GAM 20 taban fonksiyon	0,00018**	0,00044**	0,00103**	0,00156**
GAM 5 taban fonksiyon	0,01480	0,01783	0,02129	0,02187
GAM 10 taban fonksiyon	0,00036	0,00050	0,00046	0,00050
GAM 20 taban fonksiyon	0,000012*	0,000017*	0,00001*	0,00006*
İnce tabakalı splayn 5 taban fonksiyon	0,03049	0,03145	0,03283	0,03280
İnce tabakalı splayn 10 taban fonksiyon	0,01754	0,01949	0,02162	0,02201
İnce tabakalı splayn 20 taban fonksiyon	0,0057***	0,0089***	0,0106***	0,0118***

Şekil 5.19'de 100 tane *MSE* değerlerinin kutu grafikleri gösterilmiştir. Bu şekilde $n=400$ gözlemler sayısı olan simülasyon çalışmasının sonucu gösterilmiştir.



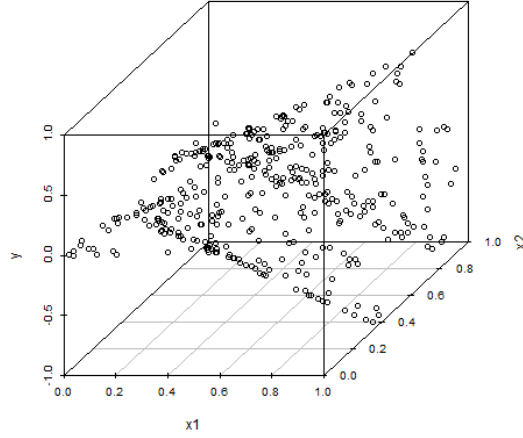
Şekil 5.19. *Smith ve Kohn'un fonksiyonunun MSE değerlerinin kutu grafiği*

Şekil 5.20’de fonksiyondan üretilen veriler için splayn yöntemlerle gerçekleştirdiği yüzey yaklaşımlarının grafikleri gösterilmiştir.



Şekil 5.20. *Smith ve Kohn’un fonksiyonundan üretilen verilerin splayn yöntemlerle tahmin edilen yüzey yaklaşım grafikleri*

Smith ve Kohn [96]’un makalesinde ikinci fonksiyonun kullanım amacı devirli bir davranış fonksiyonu incelenmesidir. Bu fonksiyonda bağımsız değişkenler uniform dağılımdan üretilip, sinüs fonksiyon yardımıyla hesaplanmaktadır. Şekil 5.21’de bu fonksiyondan üretilen verilerin serpilme grafiği gösterilmiştir.



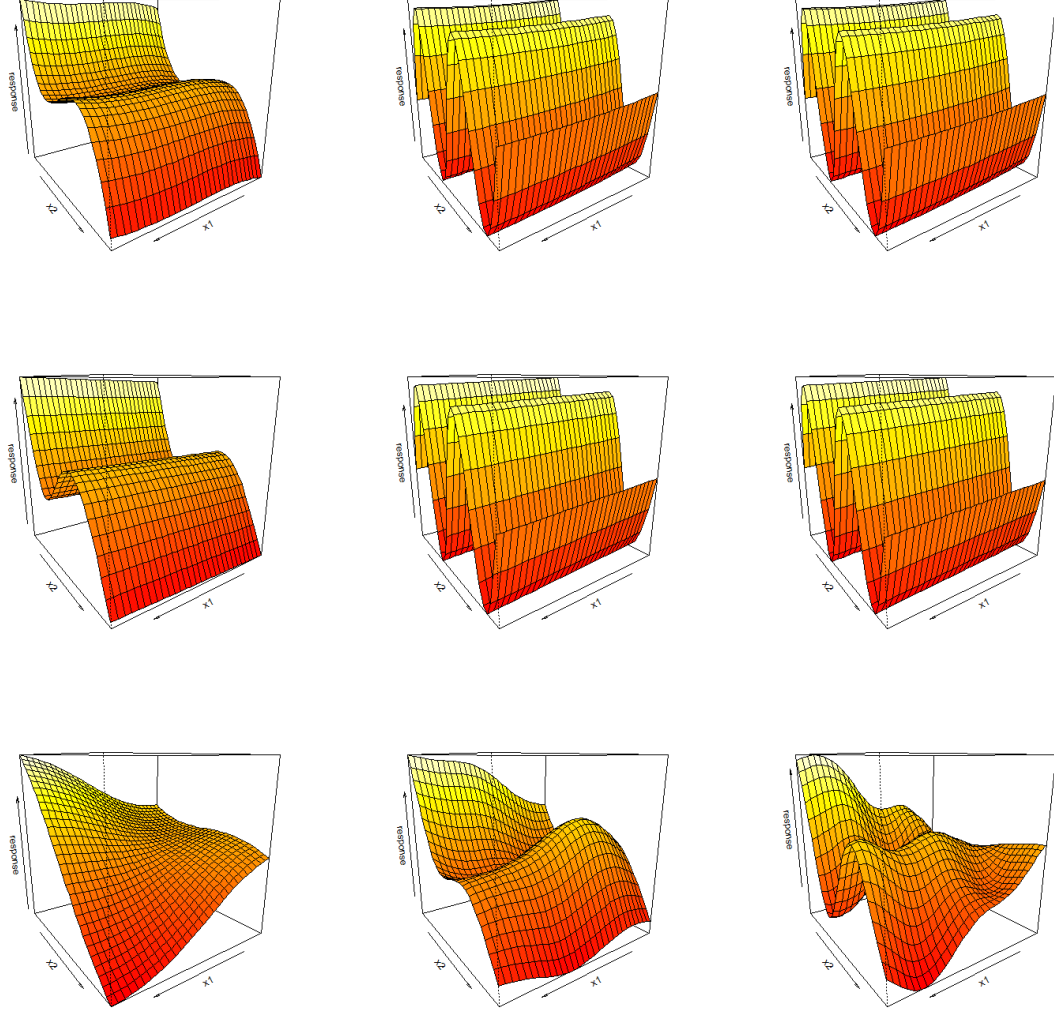
Şekil 5.21. Smith ve Kohn'un ikinci fonksiyonundan üretilen verilerin serpilme grafiği

Çizelge 5.19 incelendiğinde; $n=50$ birimlik küçük örneklem verileri en iyi sonuç ince tabakalı splayn yönteminde görülmektedir. Cezalı splayn yöntemin ve kübik düzeltme splaynın MSE değerinin ortalaması ince tabakalı splayndan daha kötü sonuç gösterilmektedir. Örneklem sayısı arttıkça, $n=200$ ve $n=400$ birimlik örneklem verileri için yöntemlerin performansları değişmektedir. Kübik düzeltme splayn ve cezalı splayn iyi sonuçlara sahiptirler. Daha büyük örneklem yaklaşımında ince tabakalı splayn yöntemi en kötü performansa sahip olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.19. Smith ve Kohn'un ikinci fonksiyonunun MSE değerlerinin ortalaması

Yöntemler	n=50	n=100	n=200	n=400
Cezalı GAM 5 taban fonksiyon	0,106	0,116	0,125	0,127
Cezalı GAM 10 taban fonksiyon	0,027	0,035	0,038	0,040
Cezalı GAM 20 taban fonksiyon	0,022***	0,033*	0,036*	0,039*
GAM 5 taban fonksiyon	0,088	0,101	0,111	0,115
GAM 10 taban fonksiyon	0,028	0,035	0,038	0,040
GAM 20 taban fonksiyon	0,021**	0,033**	0,037**	0,039**
İnce tabakalı splayn 5 taban fonksiyon	0,129	0,135	0,140	0,140
İnce tabakalı splayn 10 taban fonksiyon	0,086	0,095	0,100	0,102
İnce tabakalı splayn 20 taban fonksiyon	0,020*	0,040***	0,050***	0,062***

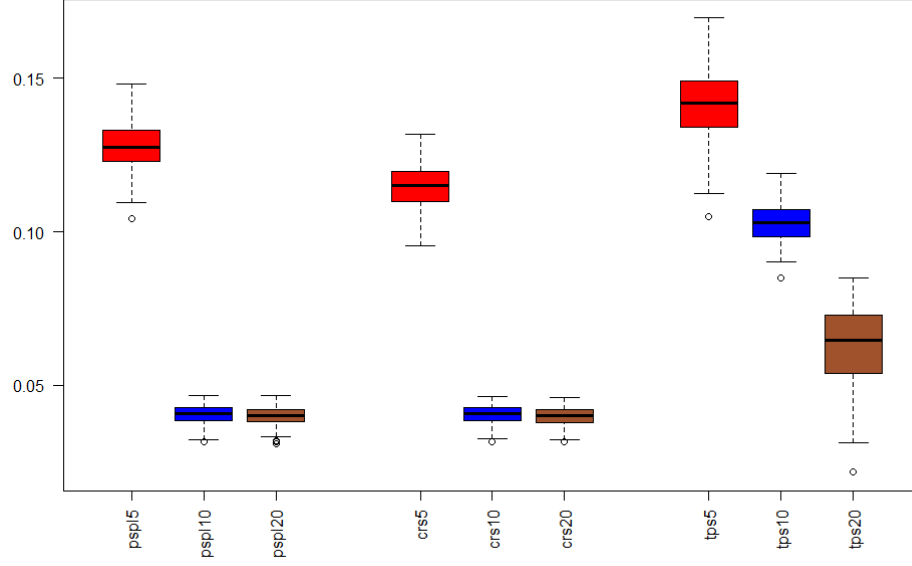
Şekil 5.22’de fonksiyonların splayn yöntemlerle gerçekleştirdiği yaklaşımların grafikleri gösterilmiştir.



Şekil 5.22. Smith ve Kohn’un fonksiyonundan üretilen verilerin splayn yöntemlerle tahmin edilen yüzey yaklaşım grafikleri

Şekil 5.23’de MSE değerlerinin kutu grafikleri gösterilmiştir. Bu şekilde $n = 400$ gözlemler sayısı olan simülasyon çalışmasının sonucu gösterilmiştir. Bu grafik incelendiğinde, taban fonksiyonların sayısı beş olduğunda, en iyi sonucu gösteren kübik düzeltme splayndır. Splayn yaklaşımında kullanılan taban fonksiyonların sayısı arttıkça, her bir yöntem daha iyi sonuç gösterilmektedir. Ancak daha fazla sayısı olan taban fonksiyon kullanıldığında splayn yöntemler daha pürüzsüz şekilde oluşmaktadır. Splayn yöntemlerin yaklaşımında önerilen taban fonksiyon sayısı 10 ve 30 arasındadır. Bu

şekilde görüldüğü gibi, taban fonksiyon sayısı 20 olduğunda MSE değerleri minimize edilmektedir.



Şekil 5.23. Smith ve Kohn'un ikinci fonksiyonun MSE değerlerinin kutu grafiği

Bu gerçekleştirilen simülasyon çalışmasında, her bir fonksiyon için farklı büyüklükte (50,100,200 ve 400) dört örneklem ve 100 tekrarlamaya yapmak suretiyle söz konusu splayn yöntemlerinin, örneklem sayılara ve taban fonksiyonların sayılarına göre nasıl bir performans izledikleri gözlenmiştir. Simülasyonda toplam 180 sayısal deney yapılmıştır.

Splayn yöntemlerinin ortalamalar MSE düzeyinde birinci ve ikinci en iyi sıralamayı gösteren başarı durumları Çizelge 5.20'de özet olarak verilmiştir.

Çizelge 5.20. Yöntemlerin ortalama düzeyinde başarı durumları (birinci ve ikinci olma sayıları)

Yöntemler	Fan ve Gijbels fonksiyonu	Simon Wood 1. fonksiyonu	Simon Wood 2. fonksiyonu	Smith ve Kohn 1. fonksiyonu	Smith ve Kohn 2. fonksiyonu	Toplam
Cezalı splayn	2(2)	0(4)	0(2)	0(4)	3(0)	5(12)
Kübik düzeltme splayn	0(2)	0(1)	0(2)	4(0)	0(4)	4(7)
İnce tabakalı splayn	2(0)	4(0)	4(0)	0(0)	1(0)	11(0)

Çizelge 5.20’de parantez dışındaki sayılar, yöntemlerin kaç kez birinci olduklarını, parantez içindeki sayılar ise kaç kez ikinci olduklarını göstermektedir. Örneğin, Fan ve Gijbels fonksiyonun yaklaşımında ince tabakalı splayn yöntemi iki kez birinci olmuş, yani en küçük MSE ortalama değerine sahip olmuştur. Cezalı splayn yöntemi aynı fonksiyonda 2 kez birinci ve 2 kez ikinci düzeyine sahip olmuştur. Kübik düzeltme splayn ise 2 kez ikinci olmuştur.

Genel toplamda ince tabakalı splayn 11 kez birinci olup, bu fonksiyonlarda en iyi yaklaşım yöntemi seçilebilmektedir. Cezalı splayn yöntemi 5 kez birinci ve 12 kez ikinci düzeyine sahip olmuştur. Kübik düzeltme splayn yöntemi bu yöntemlerin arasında en kötü performansı göstermiştir.

5.4. Doğrudan Yabancı Yatırımların Belirleyicilerin Arasındaki İlişkilerin

Araştırılması

Literatürde toplamsal modellerin kullanımına ilişkin farklı uygulamalara rastlanmaktadır [6,45,55,59,60,61,63].

Bu uygulamada [48], 1975-2007 dönemi için Türkiye’ye gelen doğrudan yabancı yatırımların (DYY) belirleyicileri splayn fonksiyonları kullanılarak parametrik olmayan farklı splayn modelleri yardımıyla analiz edilmiştir. DYY’ların etkileyici faktörler üzerine yapılan ampirik çalışmaların genel bir değerlendirmesi yapılırsa [5,10,38,39], Türkiye açısından en önemli belirleyicinin; yurt içi pazar büyüklüğü (nüfus) olduğu görülecektir. Bunun dışında ekonomik büyüme, alt yapı yatırımları, ekonomik istikrar (enflasyon ve döviz kuru), teşvikler, girdi maliyet ve kalitelerinin diğer önemli belirleyiciler olduğu gözlemlenmiştir.

DYY belirleyicilerinin analizinde genelde doğrusal regresyon modelleri kullanılmıştır. Ama, yapılan istatistiksel analizler DYY’lerin belirleyicilerinin tamamının doğrusal etkilere sahip olmadığı, özellikle ekonomik büyüme ve yurt içi pazar büyüklüğü (nüfus) değişkenlerinin parametrik olmayan etkilere sahip olduğu gözlenmiştir [68]. İlk olarak [5,38] DYY’lerin belirleyicilerine yönelik kernel (çekirdek) regresyon modelini kullanmışlardır. Bu uygulamada, Omay ve Saray’ın [68] çalışmasının devamı olarak Türkiye’ye gelen DYY’lerin belirleyicileri splayn fonksiyonu ile farklı parametrik olmayan modellerle analiz edilmiştir.

Bu amaçla elde edilen genelleştirilmiş kısmı toplamsal parametrik olmayan (GAM) modellere ek olarak, semiparametrik cezalı GAM modelleri de incelenmiş ve bu modeller karşılaştırılmıştır.

Bu uygulamada, Türkiye'ye gelen DYY'ların belirleyicileri olarak yedi farklı değişken dikkate alınmış ve bu değişkenlerin DYY'lar üzerindeki etkileri aşağıda ele alınan farklı regresyon modellerinde incelenmiştir. Sözü geçen belirleyiciler pazar büyüklüğü (nüfus), ekonomik büyüme, dış ticaret, maliyetler, verimlilik ve ekonomik istikrarın yerini tutan değişkenlerdir. DYY'ler konusunda yapılmış çalışmalarda bu belirleyicilerin her birinin ev sahibi ülkelere gelen DYY miktarları ve ülke ekonomilerine etkisinde önemli rolü olduğu ortaya konulmuştur. Bu doğrultuda Çizelge 5.21'den de görüldüğü üzere DYY'lerin belirleyicisi olarak, nüfus artış hızı (yüzde olarak), ekonomik büyüme oranları (yüzde olarak), elektrik tüketimi (kişi başına düşen kilo watt saat), toplam borç servisi (Gayri Safi Milli Hasıla'nın [GSMH] yüzdesi olarak), dış borç stoğu (Gayri Safi Yurt İçi Hasıla'nın [GSYİH] yüzdesi olarak), 100 kişi başına düşen telefon hatları ve de zaman alınmıştır. Bu çalışmada kullanılan veriler 1975-2007 yıllarını kapsamaktadır. Söz konusu veriler Dünya Bankasının World Development Indicators Online Statistics veritabanından derlenmiştir. Söz konusu yedi değişkenin ve 1975-2007 döneminin alınmasının nedeni verilerin kalitesi ve sınırlılığıdır.

Çizelge 5.21. Ampirik Çalışmada Kullanılan Değişkenler

Değişken	Tanımlama
DYY	Doğrudan Yabancı Yatırımlar (Bağımlı değişken, net akım GSYİH'in yüzdesi olarak)
GROWTH	Ekonomik büyüme oranı (yüzde olarak)
POP	Nüfus büyüme hızı (yüzde olarak)
ELEC	Elektrik tüketimi (kişi başına kilowatt saat)
DEBTSER	Toplam Borç servisi (GSMH'nın yüzdesi olarak)
EXDEBT	Dış borç stoğu (GSYİH'nın yüzdesi olarak)
TELEPHONE	Telefon hattı (100 kişi başına düşen telefon hattı)
TIME	Zaman değişkeni

DYY verileri incelenen çalışmaların çoğunda oldukça asimetriktir (aşırı dalgalanmalar mevcuttur). Bu durumu istatistiksel olarak kontrol altına almanın en kolay yolu verilerin logaritmasını almaktır [7,39]. Bu çalışmada da benzer sorunları ortadan kaldırmak için, modellerin tamamında logaritması alınması mümkün verilerin logaritmaları alınmıştır.

Analizlerin tamamı, özellikle parametrik olmayan regresyon modellerinin kurulması ve değerlendirilmesinde diğer istatistik programlarına göre daha kapsamlı olan R programı kullanılarak yapılmıştır (<http://www.r-project.org>). Analizlerde R programının temel paketlerinin yanı sıra mgcv paketi [107] de kullanılmıştır.

Çalışmanın uygulama aşaması temel olarak iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, DYY'lar (FDI) üzerindeki etkisinin var olduğu bilinen ekonomik büyüme (GROWTH) ve nüfus (POP) değişkenleri ve ek olarak, Wood'un [106] Chicago'daki hava kirliliğinin ölüm oranı üzerindeki etkisini araştırdığı çalışmasında kullandığına benzer olarak, zamanın etkisini de dikkate alan bir zaman değişkeni (TIME) göz önünde bulundurularak, doğrusal regresyon modeli ve kısmi parametrik regresyon modeli kurulmuştur. Birinci kısımda DYY'ların belirleyicisi olarak ekonomik büyüme ve nüfusun dikkate alınmasının temel nedeni çalışmanın literatür kısmında da vurgulandığı gibi Türkiye'ye gelen DYY'ları etkileyen en önemli faktörlerin bahsedilen bu iki değişken olmasıdır.

Birinci kısmın ilk aşamasında, GROWTH ve POP değişkenlerinin FDI üzerindeki doğrusal etkisini ortaya koymak amacıyla denklem (5.3)'de yer alan doğrusal regresyon modeli oluşturulmuştur.

$$\log FDI_i = \beta_0 + \beta_1 \log POP_i + \beta_2 \log GROWTH_i + \beta_3 TIME_i + \varepsilon_i \quad (5.3)$$

Denklem (5.3)'e ait parametre tahminleri ve ilgili istatistikler Çizelge 5.22'de yer almaktadır.

Çizelge 5.22. Denklem (5.3) için parametre tahminleri ve ilgili istatistikler

	Tahmin	Standart Hata	t-değeri	Pr(> t)
Sabit Terim	-0,796	2,334	-0,341	0,734
logPOP	0,136	0,589	0,230	0,820
GROWTH	-0,005	0,026	-0,201	0,842
TIME	0,115	0,017	6,801	1,82e-07 ***
F-değeri = 33,88, p-değeri = 1,303e-09				
$R_{adj}^2 = 0,7551$, Sapma = 10,674, AIC = 66,404				
Anlamlılık kodları: '***' 0,001 '**' 0,01 '*' 0,05 '.' 0,1				

Çizelge 5.22 incelendiğinde, denklem (5.3)'in model anlamlılığı için F istatistiğinin olasılık değerinin $\alpha = 0,05$ 'den küçük olması nedeniyle model anlamlı görünmektedir, fakat modelin parametre anlamlılıkları incelendiğinde, logPOP ve GROWTH değişkenlerinin parametre tahminlerine ilişkin t istatistiklerine karşılık gelen

olasılık değerleri $\alpha = 0,05$ önem düzeyinde istatistiksel olarak anlamlı görünmemektedir. Bu modelde sadece TIME değişkeni istatistiksel olarak anlamlı bir etkiye sahip görünmektedir. Bu durum, nüfus ve büyüme değişkenlerinin DYY üzerinde anlamlı etkilerinin bulunmadığı şeklinde yorumlanmamalıdır. Burada yapılan çalışma için ortaya çıkan gerçek, bu aşamada, söz konusu değişkenlerin DYY üzerinde sadece doğrusal (parametrik) etkilerinin bulunmadığıdır. Diğer bir ifadeyle söz konusu değişkenlerin DYY üzerinde parametrik olmayan etkileri var olabilir. Bu gerçekten yola çıkarak, çalışmada kısmi parametrik regresyon modeli kurularak, söz konusu değişkenlerin DYY üzerindeki parametrik olmayan etkilerinin varlığı araştırılacaktır. Bu amaçla Denklem (5.4)'da verilen, kısmi parametrik toplamsal regresyon modeli oluşturulmuştur.

$$\log FDI_i = \beta_0 + \beta_1 TIME_i + f(\log POP_i) + f(\log GROWTH_i) + \varepsilon_i \quad (5.4)$$

Kurulan denklem (5.4)'a ait parametre tahminleri ve ilgili istatistikler Çizelge 5.23'de yer almaktadır.

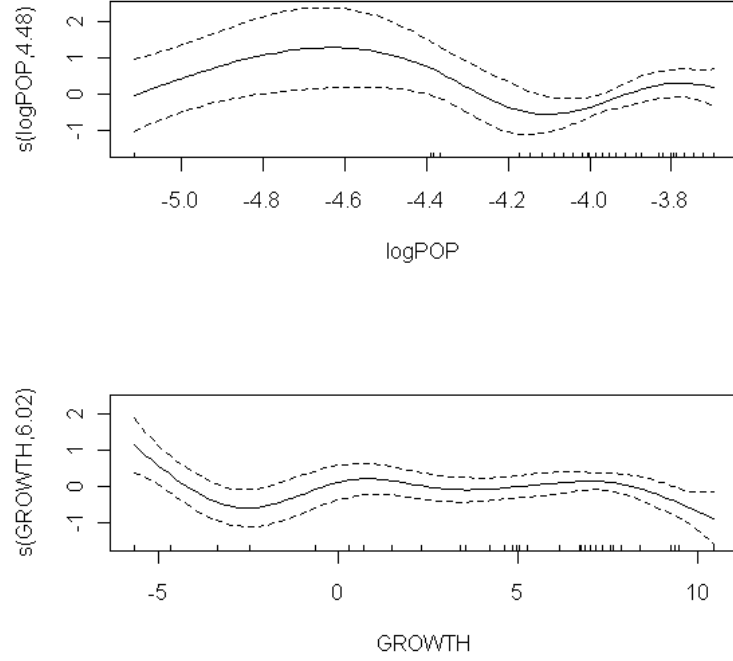
Çizelge 5.23. Denklem (5.4) için tahminler ve ilgili istatistikler

Parametrik Kısım				
	Tahmin	Standart Hata	t-değeri	Pr(> t)
Sabit Terim	-1,359	0,070	-19,38	1,17e-14 ***
TIME	0,114	0,019	5,91	8,00e-06 ***
Parametrik Olmayan Kısım				
	s.d.	Ref. s.d.	F-değeri	p-değeri
f(logPOP)	4,482	4,482	5,018	0,0045 **
f(GROWTH)	6,017	6,017	3,223	0,0215 *
$R_{adj}^2 = 0,892$, Sapma = 3,325, AIC = 44,912				

Anlamlılık kodları: '***' 0,001 '**' 0,01 '*' 0,05 '.' 0,1

Çizelge 5.23 incelendiğinde, Denklem (5.4)'da yer alan TIME değişkeninin modelin parametrik kısmını oluşturduğu görülmektedir. Söz konusu değişkenin t istatistiğine karşılık gelen olasılık değeri $\alpha = 0,05$ 'den oldukça küçüktür. Dolayısıyla TIME değişkeni DYY üzerinde istatistiksel olarak anlamlı etkiye sahiptir. $\log POP$ ve $GROWTH$ değişkenleri ise modelin parametrik olmayan kısmını oluşturmaktadır. Çizelge 5.23'de parametrik olmayan kısımda yer alan söz konusu parametrelere ait F istatistiklerine karşılık gelen olasılık değerleri de $\alpha = 0,05$ önem düzeyinden oldukça küçük oldukları için bu değişkenlerin DYY üzerinde istatistiksel olarak anlamlı parametrik olmayan etkileri mevcuttur.

Denklem (5.4)'de yer alan $f(\log POP)$ ve $f(GROWTH)$ değişkenleri, metodolojide de belirtildiği gibi birer pürüzsüz fonksiyondur. Bu fonksiyonların tahminleri grafiksel olarak Şekil 5.24'de yer almaktadır. Bu grafik her iki değişkenin de yanıt üzerindeki parametrik olmayan etkilerini ortaya koyan bir diğer göstergedir.



Şekil 5.24. Denklem (5.4)'de yer alan pürüzsüz fonksiyon tahminleri

Model performanslarını değerlendirmek amacıyla birer ölçüt olarak kullanılacak olan R^2_{adj} , sapma ve AIC değerleri dikkate alındığında, kısmi parametrik regresyon modelinin Denklem (5.4) R^2_{adj} değeri, doğrusal regresyon modelindekinden Denklem (5.3) daha büyüktür. Diğer taraftan Denklem (5.4)'un sapma ve AIC değerleri Denklem (5.3)'inkinden daha küçüktür. Bu sonuçların üçü de söz konusu değişkenlerin DYY üzerindeki etkisini açıklamada, kısmi parametrik regresyon modelinin Denklem (5.4), doğrusal regresyon modelinden Denklem (5.3) daha iyi olduğu anlamına gelir.

Bilindiği gibi, DYY sadece nüfus ve büyüme belirleyicileri ile sınırlı değildir. Bu belirleyicilere ek olarak, ampirik çalışmanın ikinci kısmında, elektrik tüketimi (ELEC), petrol kullanımı (ENERGY), borç servisi (DEBT SER), dış borç stoğu (EXDEBT) ve telefon hattı (TELEPHONE) değişkenleri de dikkate alınarak çeşitli regresyon modelleri oluşturulmuş ve bu belirleyicilerin DYY üzerindeki etkileri incelenmiştir. Kurulan

modellerde bir önceki aşamada da dikkate alındığı gibi, zamanın etkisini de göz önünde bulundurmak amacıyla TIME değişkeni de yer almaktadır.

İlk olarak bu değişkenlerin *DYY* üzerindeki doğrusal etkisini ortaya koyan doğrusal regresyon modeli Denklem (5.5) kurulmuştur.

$$\log FDI_i = \beta_0 + \beta_1 \log POP_i + \beta_2 \log ELEC_i + \beta_3 \log DEBT SER_i + \beta_4 \log EX DEBT_i + \beta_5 \log TELEPHONE_i + \beta_6 TIME_i + \varepsilon_i \quad (5.5)$$

Denklem (5.5) incelendiğinde, modelde mutlaka yer alması beklenen *GROWTH* değişkeninin olasılık değerinin $\alpha = 0,10$ 'den bile büyük olması nedeniyle istatistiksel olarak *DYY* üzerinde anlamlı bir etkiye sahip olmadığı tespit edilmiştir. Bu nedenle de modelde olmadığı görülmektedir. Denklem (5.5)'a ait parametre tahminleri ve istatistikler Çizelge 5.24'de yer almaktadır.

Çizelge 5.24. Denklem (5.5) için tahminler ve ilgili istatistikler

	Tahmin	Standart Hata	t-değeri	Pr(> t)
Sabit Terim	8,380	3,324	2,521	0,0182 *
logPOP	0,885	0,516	1,713	0,0986
logELEC	0,568	0,208	2,726	0,0113 *
logDEBT SER	1,531	0,554	2,763	0,0104 *
logEX DEBT	-3,108	0,774	-4,015	0,0004 ***
logTELEPHONE	-0,782	0,300	-2,604	0,0150 *
TIME	0,181	0,044	4,065	0,0004 ***

F-değeri = 35,84, p-değeri = 2,276e-11
 $R^2_{adj} = 0,867$, Sapma = 5,157, AIC = 48,589

Anlamlılık kodları: '***' 0,001 '**' 0,01 '*' 0,05 '.' 0,1

Çizelge 5.24 incelendiğinde, Denklem (5.5) doğrusal regresyon modeline ilişkin *F* istatistiğinin olasılık değerinin $\alpha = 0,05$ 'den küçük olması nedeniyle model istatistiksel olarak anlamlı görünmektedir. Fakat *TELEPHONE* değişkeninin tahmin değerinin işareti, beklenenin aksine negatiftir.

Bununla birlikte, *GROWTH* değişkeni gibi mutlaka modelde yer alması beklenen bir diğer değişken de *POP* değişkenidir ve bu değişkenin *DYY* üzerindeki etkisi ancak $\alpha = 0,10$ önem düzeyinde istatistiksel olarak anlamlı görülmektedir. $\alpha = 0,05$ önem düzeyinde bu değişkenin *DYY* üzerinde istatistiksel olarak anlamlı bir etkisi gözlenmemektedir.

Diğer taraftan, model performansları için dikkate alınan ölçütlere göre Denklem (5.5) doğrusal regresyon modelinin R^2_{adj} değeri, Denklem (5.3)'teki doğrusal

regresyon modelininkinden büyük fakat kısmi parametrik toplamsal regresyon modelininkinden Denklem (5.4) daha küçüktür. Denklem (5.5)'un hem sapma hem de AIC değerleri ise Denklem (5.3)'in söz konusu değerlerinden küçük fakat Denklem (5.4)'un değerlerinden büyüktür. Bu bulguların tamamı, şimdiye kadar kurulmuş olan üç modelden en iyisinin, Denklem (5.4) kısmi parametrik toplamsal regresyon modeli olduğu sonucunu doğurmaktadır.

Fakat daha önce de belirtildiği gibi hem doğrusal regresyon modelinde hem de kısmi parametrik modelde *POP* ve *GROWTH* değişkenlerinin yanı sıra diğer bazı değişkenlere de yer verme amacıyla, bundan sonraki aşamada sözü geçen diğer değişkenlerin de modele dâhil edildiği daha geniş yeni bir kısmi parametrik toplamsal regresyon modeli Denklem (5.6) kurulmuştur.

$$\log FDI_i = \beta_0 + \beta_1 \log ELEC_i + \beta_2 \log DEBT SER_i + \beta_3 \log EX DEBT_i + \beta_4 TIME_i + f(\log POP_i) + f(GROWTH_i) + \varepsilon_i \quad (5.6)$$

Denklem (5.6)'de, modelde olması beklenen *GROWTH* ve *POP* değişkenleri yer almaktadır ve bu iki değişkenin her ikisi de *DYY* üzerinde parametrik olmayan etkilere sahiptir. Bunların yanı sıra *logELEC*, *DEBT SER*, *EX DEBT* ve *TIME* değişkenleri de modelde mevcut olan değişkenlerdir ve söz konusu değişkenler modelin parametrik kısmını oluşturmaktadır. Denklem (5.6)'ya ait parametre tahminleri ve ilgili istatistikler Çizelge 5.25'de yer almaktadır.

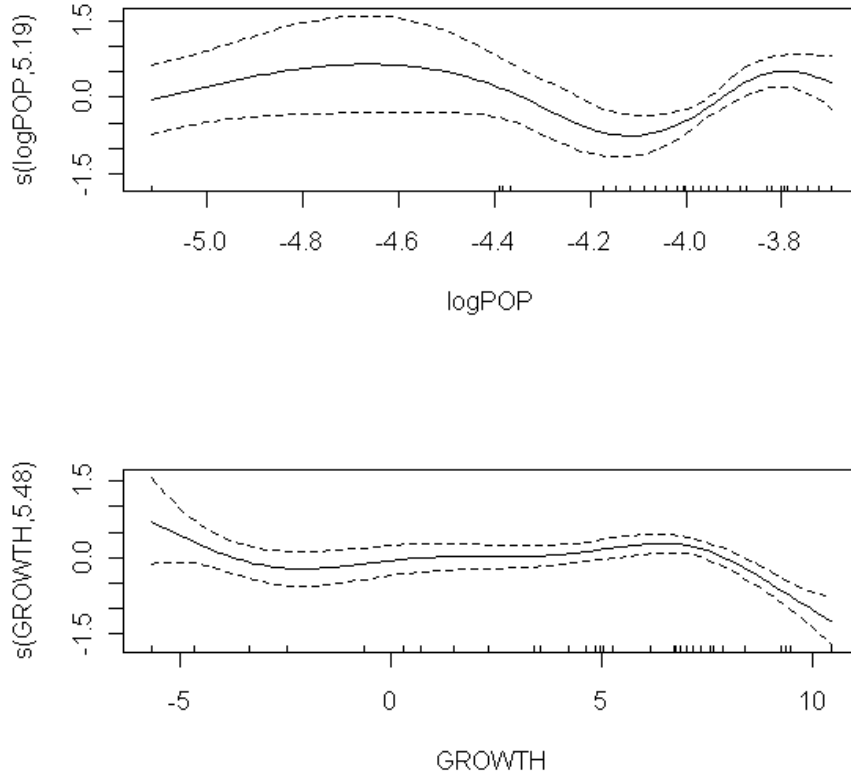
Çizelge 5.25. Denklem (5.6) için tahminler ve ilgili istatistikler

	Parametrik Kısım			
	Tahmin	Standart Hata	t-değeri	Pr(> t)
Sabit Terim	2,428	1,882	1,290	0,2139
logELEC	0,495	0,222	2,233	0,0390*
logDEBT SER	1,159	0,475	2,440	0,0257*
logEX DEBT	-2,610	0,572	-4,566	0,0003***
TIME	0,115	0,029	3,929	0,0011**
Parametrik Olmayan Kısım				
	s.d.	Ref. s.d.	F-değeri	p-değeri
f(logPOP)	5,189	5,189	9,400	0,000164 ***
f(GROWTH)	5,477	5,477	7,899	0,000402 ***
$R_{adj}^2 = 0,962$, Sapma = 0,981, AIC = 10,980				

Anlamlılık kodları: '***' 0,001 '***' 0,01 '**' 0,05 '.' 0,1

Çizelge 5.25 incelendiğinde, parametrik kısımda yer alan parametrelerin işaretlerinin beklentileri karşıladığı ve tamamının $\alpha = 0,05$ önem düzeyinde *DYY* üzerinde istatistiksel olarak anlamlı etkilere sahip olduğu görülmüştür. Parametrik

olmayan kısımda ise yine POP ve $GROWTH$ değişkenleri yer almaktadır ve değişkenlerin DYY üzerindeki parametrik olmayan etkileri $\alpha = 0,05$ önem düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır. Denklem (5.6)'de yer alan pürüzsüz fonksiyonlara ($f(\log POP)$, $f(GROWTH)$) ilişkin tahminler grafiksel olarak Şekil 5.25'de yer almaktadır.



Şekil 5.25. Denklem (5.6)'da yarıparametrik regresyon modeline ait pürüzsüz fonksiyon tahminleri

Bu uygulamanın sonraki kısmın amacı genelleştirilmiş cezalı toplamsal modeller yardımıyla Denklem (5.4) ve Denklem (5.6)'yı tahmin etmektedir. Genelleştirilmiş cezalı toplamsal modeller daha önce kullanılan yöntemlerden toplamsal modelin splayn elemanlardan farklıdır. Bu yöntemde B-splayn ve Newton bölünmüş farkla kurulmuş modelin elemanları kullanılmaktadır.

Genelleştirilmiş toplamsal modelle analiz yaptığı gibi, bu yöntemde de aynı modelleri tahmin etmektedir. Cezalı toplamsal splaynların analiz sonuçları Çizelge 5.26 ve Çizelge 5.27'de yer almaktadır.

Çizelge 5.26. Denklemler (5.4) için cezalı splayn tahminler ve ilgili istatistikler

Parametrik kısım				
	Tahmin	Standart Hata	t - değeri	Pr(> t)
Sabit terim	-1,359	0,069	-19,61	3,53e-15 ***
TIME	0,116	0,018	6,31	2,68e-06 ***
Parametrik olmayan kısım				
	edf	Ref. d.f.	F-değeri	p-değeri
f(logPOP)	4,063	4,398	5,944	0,0018 **
f(GROWTH)	5,495	6,281	3,371	0,016 *
$R_{adj}^2 = 0,895$, Sapma = 3,321, AIC = 43,73				
Anlamlılık kodları: **** 0,001 *** 0,01 ** 0,05 * 0,1				

Çizelge 5.27. Denklemler (5.6) için cezalı splayn tahminler ve ilgili istatistikler

Parametrik kısım				
	Tahmin	Standart Hata	t - değeri	Pr(> t)
Sabit terim	4,819	2,502	1,926	0,070
logELEC	0,116	0,371	0,313	0,0477*
logDEBT SER	1,232	0,468	2,632	0,0170
logEXDEBT	-2,577	0,564	-4,568	0,0002***
TIME	0,124	0,034	3,655	0,0018**
Parametrik olmayan kısım				
	edf	Ref d.f.	F-value	p-value
f(logPOP)	4,459	4,727	12,41	3,23e-05 ***
f(GROWTH)	5,731	6,150	8,05	0,000248 ***
$R_{adj}^2 = 0,964$, Sapma = 0,966, AIC = 9,514				
Anlamlılık kodları: **** 0,001 *** 0,01 ** 0,05 * 0,1				

Çizelge 5.26 ve 5.27 incelendiğinde, parametrik kısımda yer alan parametrelerin işaretlerinin beklentileri karşıladığı ve tamamının $\alpha = 0,05$ önem düzeyinde *DYY* üzerinde istatistiksel olarak anlamlı etkilere sahip olduğu görülmüştür. Parametrik olmayan kısımda ise yine *POP* ve *GROWTH* değişkenleri yer almaktadır ve değişkenlerin *DYY* üzerindeki parametrik olmayan etkileri $\alpha = 0,05$ önem düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır.

Çalışmamızın son kısmının amacı modellerin performans ölçütlerinin karşılaştırılmasıdır. Denklemler (5.6) için modellerin performans ölçütleri Çizelge 5.28’de yer almaktadır. Denklem (5.6)’in R_{adj}^2 değeri diğer modellerin tamamından daha yüksektir. Benzer şekilde sapma ve *AIC* değerleri ise diğer tüm modellerinden daha küçüktür. Bu bulgular, denklem (5.6) kısmi parametrik toplamsal regresyon modelinin, kurulan dört model içinde en iyisi olduğunu göstermektedir. Bu sonucu daha iyi görebilmek için model performanslarına ilişkin bahsi geçen değerler Çizelge 5.28’de listelenmiştir.

Çizelge 5.28. Modellerin performans ölçütlerinin değerleri

Model	Sapma	AIC	R _{adj}
Denklem(5.3) (parametrik)	10,674	66,40	0,7751
Denklem(5.4) (kısmiparametrik)	3,325	44,91	0,892
Denklem(5.5) (parametrik)	5,157	48,58	0,8672
Denklem(5.6) (kısmiparametrik)	0,981	10,98	0,962
Denklem(5.4) (cezalı kısmiparametrik)	3,321	43,73	0,895
Denklem(5.6) (cezalı kısmiparametrik)	0,966	9,514	0,964

Çalışmadaki ampirik sonuçların tamamı ve özellikle kısmi parametrik toplamsal regresyon modeli Denklem (5.6) göz önünde bulundurulduğunda, göze çarpan en önemli sonuç, DYY'ların belirleyicilerinin her zaman doğrusal etkilere sahip olmamasıdır. Türkiye'ye ilişkin yapılan literatür çalışmalara incelendiğinde bu çalışmaların tamamının doğrusal modeller olduğu gerçeği göz ardı edilmemelidir. Bu bulgu DYY belirleyicilerinin analizinde doğrusal parametrik olmayan modellerin kullanmasının önemini ortaya koymaktadır.

Genelde, semiparametrik ve cezalı genelleştirilmiş toplamsal modellerin sonuçları yakın değerleri göstermektedir.

5.5. Splayn ve Entropi Optimizasyon Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Bu bölümde, splayn yöntemler ve MinMaxEnt dağılımını belirleme süreci bir uygulama[90] ile gösterilmektedir. Bir başka ifade ile MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü için R program ile hazırlanmış programın bir uygulaması yapılmaktadır. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata dağılımının belirlenmesi [97], uygulama olarak seçilmiştir. Uygulamada ξ rassal değişkeni, radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleridir. Ölçüm birimi metredir. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata dağılımı, bilinen istatistiksel dağılımlarla ifade edilemediği kaynakta vurgulanmaktadır. Uygulamayı seçmemizdeki temel neden, bilinen istatistiksel dağılımlarla ifade edilemeyen gözlem değerlerini, MinMaxEnt dağılımı ile ifade edilebildiğini göstermektir. Ayrıca uygulama sürecinde bulunan MinMaxEnt dağılımının, radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata gözlem değerlerine uyumu, $RMSE$, χ^2 , R^2 istatistiksel ölçütleri ile ortaya konulmuştur.

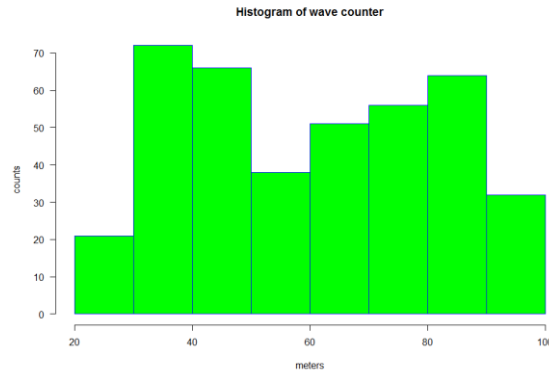
Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hatalarına ilişkin MinMaxEnt dağılımının belirlenmesi için, MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözülmesi gerekmektedir. Bu çözüm için, R programında hazırlanmış program kullanılmaktadır. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerlerine ilişkin MinMaxEnt dağılımı; iki bileşkeye sahip moment vektörüne göre üç, dört ve beş bileşkeye sahip moment vektörüne göre bulunmuştur.

Uygulama sürecinde moment fonksiyonları kümesi $(\xi, \xi^2, \ln(\xi), (\ln(\xi))^2, \ln(1 + \xi^2))$, olarak belirlenmiştir. Bu moment fonksiyonlarının seçimi, bilinen istatistiksel dağılımların karakterize edici momentleri olacak şekilde yapılmıştır (Kapur ve Kesevan 1992). Örneğin, ξ ve ξ^2 momentleri normal dağılımın karakterize edici momentleridir.

Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerlerine ilişkin gözlem değerleri ve histogramı, Çizelge 5.29'de ve Şekil 5.26'de verilmektedir.

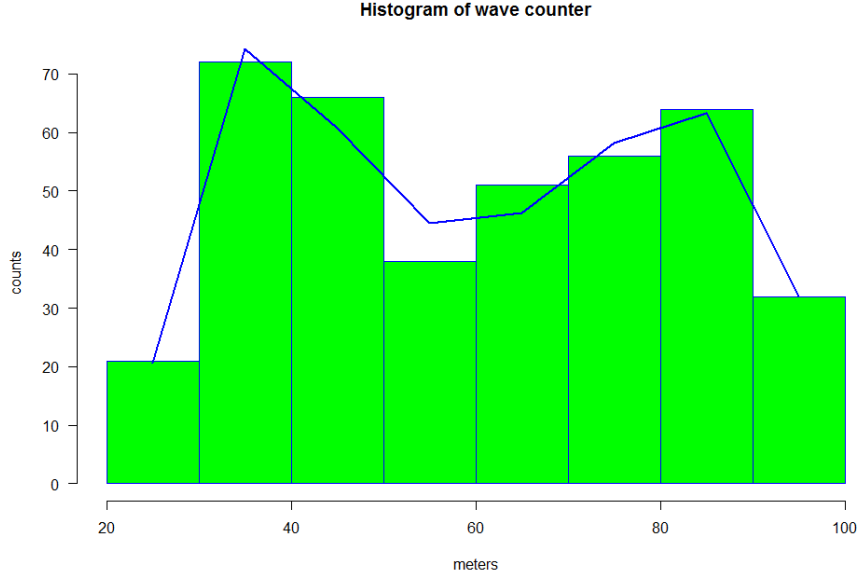
Çizelge 5.29. *Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerlerine ilişkin gözlenen frekanslar*

M	frekans
20-30	21
30-40	72
40-50	66
50-60	38
60-70	51
70-80	56
80-90	64
90-100	32

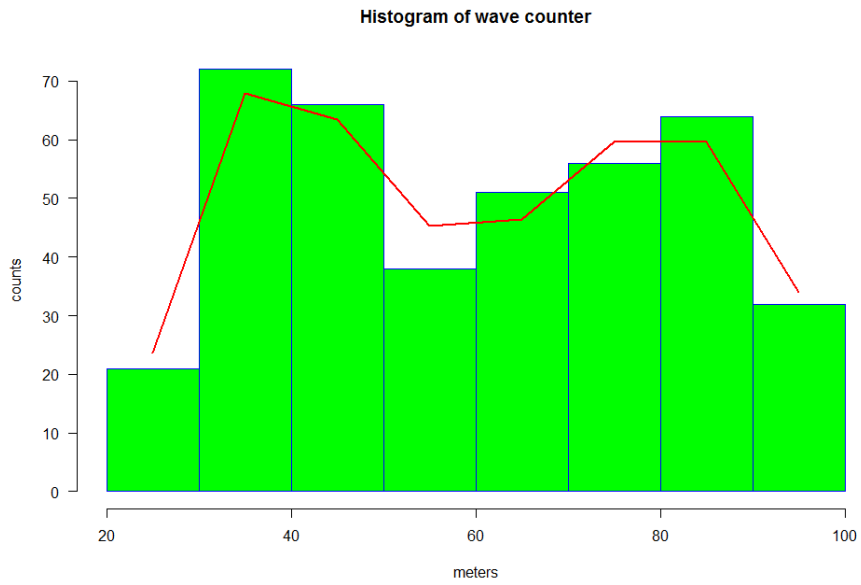


Şekil 5.26. *Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerlerine ilişkin histogram*

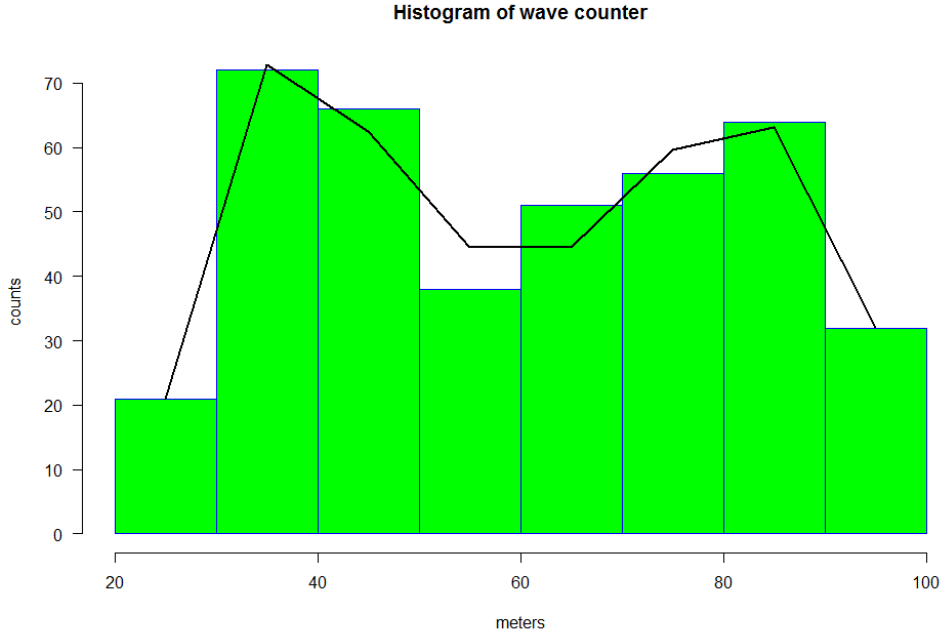
Şekil 5.26’da görüldüğü gibi, radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata dağılımı bilinen istatistiksel dağılımlarla ifade etmek oldukça güçtür. Cihazın hata dağılımını, B-splayn, pürüzsüz kubik splayn ve cezalı splayn ile modellemek için, R programında hazırlanan fonksiyonlardan elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekillerde verilmektedir.



Şekil 5.27. B-splayn yardımıyla tahmin edilen dağılım fonksiyonu



Şekil 5.28. Kübik düzeltme splayn yardımıyla tahmin edilen dağılım fonksiyonu



Şekil 5.29. Cezalı splayn yardımıyla tahmin edilen dağılım fonksiyonu

Splayn yöntemler yardımıyla tahmin edilen dağılımların olasılıkları Çizelge 5.29'da yer almaktadır.

Çizelge 5.29. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için belirlenen splayn yöntemleri dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar ve gözlenen frekanslar

m	frekans	f_i	B-splayn	Kübik splayn	Cezalı splayn
25	21	0,0525	0,0514	0,0591	0,0523
35	72	0,1800	0,1857	0,1698	0,1821
45	66	0,1650	0,1517	0,1587	0,1562
55	38	0,0950	0,1112	0,1131	0,1113
65	51	0,1275	0,1157	0,1159	0,1110
75	56	0,1400	0,1454	0,1490	0,1488
85	64	0,1800	0,1582	0,1490	0,1576
95	32	0,0800	0,0803	0,0849	0,0801

Çizelge 5.29'den görüldüğü gibi, splayn yöntemler ile elde edilen teorik frekanslar gözlenen frekanslara daha yakındır. Bu durum, RMSE , χ^2 , R^2 istatistiksel ölçütleri ile Çizelge 5.30'de ortaya konulmaktadır.

Çizelge 5.30. Splayn yöntemlerin performans ölçütlerinin değerleri

Yöntemler	RMSE	χ^2	R^2
B-splayn	12,868	2,053	0,9548
Kübik splayn	17,52	2,925	0,9127
Cezalı splayn	14,065	2,367	0,9506

Şimdi radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata dağılımı bilinen istatistiksel dağılımlarla ifade edilmektedir. Cihazın hata dağılımını, iki, üç, dört, beş ve altı kısıta göre MinMaxEnt dağılımları ile modellemek için, R programında hazırlanan programdan elde edilen sonuçlar, yanı Entropileri, olasılıkları Çizelge 5.31’de verilmektedir.

Çizelge 5.31. *Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için iki, üç, dört, beş ve altı bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MinMaxEnt dağılımları ile ilgili program sonuçları*

Kombinasyon tekli: 1 2 3 4 5	
Entropi	2,9999, 2,9998, 2,9984, 2,9928 , 3
Olasılıklar	0,098849, 0,11326, 0,12234, 0,12817, 0,13188, 0,13415, 0,13541, 0,13594
Kombinasyon ikili: 1 1 1 1 2 2 2 3 3 4 2 3 4 5 3 4 5 4 5 5	
Entropi	2,9794, 2,9722, 2,9696, 2,9759, 2,9753, 2,9716, 2,9845, 2,9681 , 2,9734, 2,9705
Olasılıklar	0,07635, 0,12567, 0,1507, 0,15497, 0,14653, 0,13188, 0,11518, 0,098716
Kombinasyon üçlü: 1 1 1 1 1 1 2 2 2 3 2 2 2 3 3 4 3 3 4 4 3 4 5 4 5 5 4 5 5 5	
Entropi	2,9656, 2,9636, 2,9743, 2,9589, 2,9206 , 2,9429, 2,9618, 2,9705, 2,9676, 2,9552
Olasılıklar	0,046858, 0,1906, 0,15377, 0,11762, 0,11751, 0,13581, 0,13996, 0,09788
Kombinasyon dördü: 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5	
Entropi	2,9186, 2,9186, 2,917, 2,9166 , 2,9175
Olasılıklar	0,05061, 0,19108, 0,14328, 0,11168, 0,12106, 0,14957, 0,14883, 0,083891
Kombinasyon beşli: 1 2 3 4 5	
Entropi	2,914
Olasılıklar	0,052376, 0,18154, 0,15827, 0,10919, 0,11186, 0,14866, 0,15816, 0,079954

MinMaxEnt dağılımlarının belirlenmesinde kullanılan, iki kısıta uygun MaxEnt, üç, dört, beş ve altı uygun MaxEnt dağılımlarının entropileri Çizelge 5.32 listelenmektedir.

Çizelge 5.32. *Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için 2-6 bileşkeye sahip moment vektörüne uygun MinMaxEnt dağılımlarının entropileri*

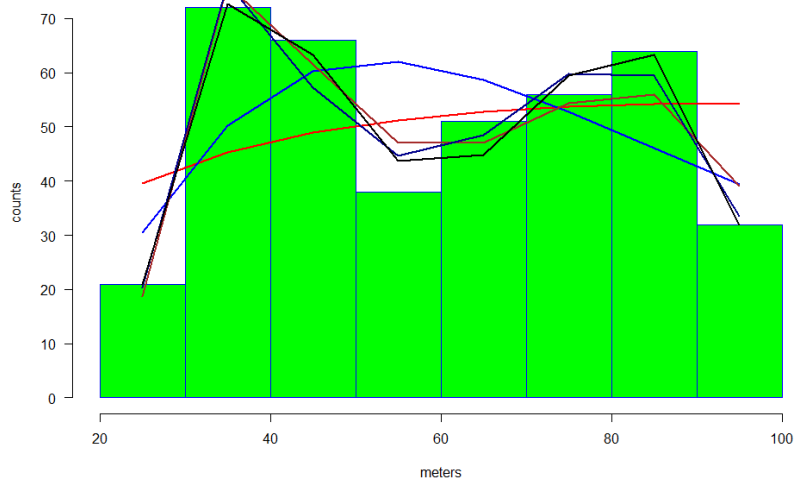
Kombinasyonlar	Kısıtlar	Entropi
1	$(1, (\ln(\xi))^2)$	2,9928
2	$(1, \ln(\xi), (\ln(\xi))^2)$	2,9681
3	$(1, \xi, \ln(\xi), \ln(1 + \xi^2))$	2,9206
4	$(1, \xi, \ln(\xi), (\ln(\xi))^2, \ln(1 + \xi^2))$	2,9166
5	$(1, \xi, \xi^2, \ln(\xi), (\ln(\xi))^2, \ln(1 + \xi^2))$	2,914

Çizelge 5.32'den sonuç olarak iki bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi 2}(\xi)$ 'nin, $(1, (\ln(\xi))^2)$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım, üç bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi 3}(\xi)$ 'ün, $1, \ln(\xi), (\ln(\xi))^2$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım, dört bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi 4}(\xi)$ 'ün, $1, \xi, \ln(\xi), \ln(1 + \xi^2)$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım, beş bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi 5}(\xi)$ 'in, $1, \xi, \ln(\xi), (\ln(\xi))^2, \ln(1 + \xi^2)$ moment vektörüne karşılık gelen dağılımdır ve altı bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi 6}(\xi)$ 'nin $1, \xi, \xi^2, \ln(\xi), (\ln(\xi))^2, \ln(1 + \xi^2)$ moment vektörüne karşılık gelen dağılımdır denilebilir. Belirlenen MinMaxEnt dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar, Çizelge 5.33'de incelenmektedir.

Çizelge 5.33. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hata değerleri için belirlenen MinMaxEnt dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar ve gözlenen frekanslar

m	frekans	f_l	$f_{m\xi 2}(\xi)$	$f_{m\xi 3}(\xi)$	$f_{m\xi 4}(\xi)$	$f_{m\xi 5}(\xi)$	$f_{m\xi 6}(\xi)$
25	21	0,0525	0,0988	0,0763	0,0468	0,0506	0,0523
35	72	0,18	0,1132	0,1256	0,1906	0,191	0,1815
45	66	0,165	0,1223	0,1507	0,1537	0,1432	0,1582
55	38	0,095	0,1281	0,1549	0,1176	0,1116	0,1091
65	51	0,1275	0,1318	0,1465	0,1175	0,121	0,1118
75	56	0,14	0,1341	0,1318	0,1358	0,1495	0,1486
85	64	0,16	0,1354	0,1151	0,1399	0,1488	0,1581
95	32	0,08	0,1359	0,0987	0,0978	0,0838	0,0799

Şekil 5.30'de uygun MinMaxEnt dağılımları gösterilmiştir. İki bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi 2}(\xi)$ 'nin, $(1, (\ln(\xi))^2)$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım kırmızı çizgiyle, üç bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi 3}(\xi)$ 'ün, $1, \ln(\xi), (\ln(\xi))^2$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım mavi çizgiyle, dört bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi 4}(\xi)$ 'ün, $1, \xi, \ln(\xi), \ln(1 + \xi^2)$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım kahverengi çizgiyle, beş bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi 5}(\xi)$ 'in, $1, \xi, \ln(\xi), (\ln(\xi))^2, \ln(1 + \xi^2)$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım koyu mavi çizgiyle ve altı bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi 6}(\xi)$ 'nin moment vektörüne karşılık gelen dağılım siyah rengiyle gösterilmektedir.



Şekil 5.30. İki, üç, dört, beş ve altı bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımları

Çizelge 5.34’de radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın iki, üç, dört, beş, altı bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımlarının veriye uyumunun istatistiksel ölçütleri gösterilmiştir.

Çizelge 5.34. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın MinMaxEnt dağılımlarının veriye uyumunun istatistiksel ölçütleri

MinMaxEnt Dağılımlar	RMSE	χ^2	R^2
$f_{m\xi_2}(\xi)$	266,198	44,962	0,067
$f_{m\xi_3}(\xi)$	202,173	31,785	0,295
$f_{m\xi_4}(\xi)$	32,412	5,421	0,886
$f_{m\xi_5}(\xi)$	22,985	3,388	0,919
$f_{m\xi_6}(\xi)$	11,440	1,942	0,959

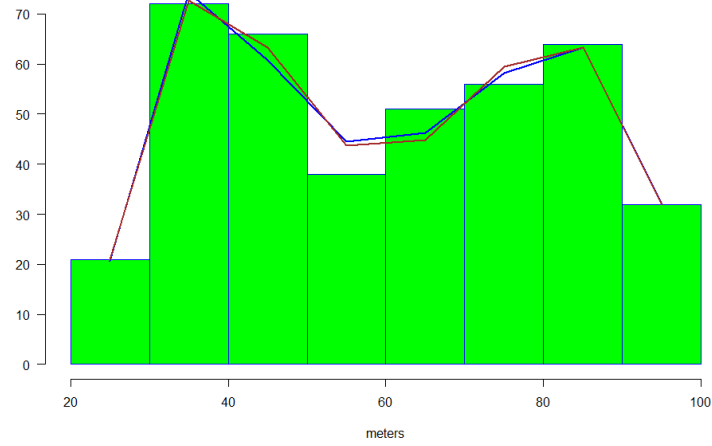
Çizelge 5.34 incelendiğinde, iki, üç, dört, beş, altı bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımlarının arasında en iyi sonuç gösteren altı bileşekli moment vektör $f_{m\xi_6}(\xi)$ fonksiyonudur.

Bu uygulamanın genel amacı splayn yöntemlerle genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemlerin karşılaştırılmasıdır. Çizelge 5.30’a bakıldığında, splayn yöntemlerin arasında en iyi sonuç gösteren B-splayn yöntemidir.

Çizelge 5.35’te iki farklı yöntemlerin arasındaki en iyi performans gösteren B-splayn ve MinMaxEnt altı bileşekli moment vektör $f_{m\xi_6}(\xi)$ ’ın sonuçları göstermektedir.

Çizelge 5.35. B-splayn ve MinMaxEnt altı bileşekli moment vektör $f_{m\xi_6}(\xi)$ ’ın sonuçları

Yöntemler	RMSE	χ^2	R^2
B-splayn	12,868	2,053	0,9548
$f_{m\xi_6}(\xi)$	11,440	1,942	0,959



Şekil 5.31. B-splayn ve MinMaxEnt altı bileşekli moment vektör $f_{m_{\xi_6}}(\xi)$ 'in grafiği

Şekil 5.31'te B-splayn yöntemin yaklaşımı mavi çizgiyle ve $f_{m_{\xi_6}}(\xi)$ MinMaxEnt dağılım fonksiyonu kahverengi çizgiyle gösterilmiştir. RMSE, χ^2 , R^2 ölçütlerine altı bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımının cihazın hatasını modellemede iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Aynı zamanda B-splayn yardımıyla tahmin edilen dağılımlar da MinMaxEnt dağılımına yakın sonuçlar vermektedir.

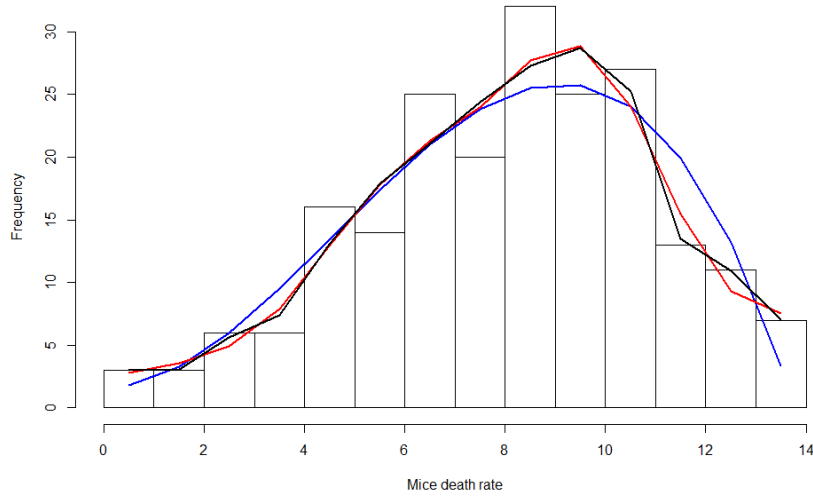
İkinci uygulamada [1,37], çalışmalarında kullanılmış veri seti üzerinde dağılım tahmini yapılmaktadır. Önceki uygulamada kullandığı farklı splayn yöntemleri, MinMaxEnt ve MaxMaxEnt genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri kullanılmaktadır. Aşağıdaki çizelge de yer alan veriler, gama radyasyonuna maruz bırakılmış 208 fare için ölüm zamanıdır.

Çizelge 5.36. Gama radyasyonuna maruz bırakılmış 208 fare için ölüm sayısı

Zaman	Ölüm sayısı
1	3
2	3
3	6
4	6
5	16
6	14
7	25
8	20
9	32
10	25
11	27
12	13
13	11
14	7

Veriler [1]'de verilen zaman aralığına göre 14 gruba ayrılmıştır. Dayi He, Qi Huang and Jianwei Gao [13] çalışmasında MaxEnt, MinxEnt ve karışık entropi yöntemi kullanarak, verilerin dağılım fonksiyonu tahmin etmiştir.

Bu uygulamada üç farklı splayn yöntemleri kullanılmıştır. Splayn yöntemler yardımıyla dağılım fonksiyon tahmini üçüncü dereceli B-splayn, kübik düzeltme splayn ve kübik cezalı splayn gerçekleştirdi. Şekil 5.32'de B-splayn yöntemin yaklaşımı mavi çizgiyle, kübik düzeltme splayn kırmızı çizgiyle ve cezalı splayn siyah çizgiyle gösterilmiştir.



Şekil 5.32. Splayn yöntemler yardımıyla tahmin edilen dağılım fonksiyonu

Splayn yöntemler yardımıyla tahmin ettiği dağılımların olasılıkları Gizelge 5.37'de yer almaktadır.

Çizelge 5.37. Splayn yöntemleri dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar ve gözlenen frekanslar

Zaman	Ölüm sayısı	f_t	B-splayn	Kübik splayn	Cezalı splayn
1	3	0,0144	0,0088	0,0136	0,0144
2	3	0,0144	0,0159	0,0173	0,0147
3	6	0,0288	0,0288	0,0237	0,0270
4	6	0,0288	0,0457	0,0378	0,0357
5	16	0,0769	0,0645	0,0622	0,0628
6	14	0,0673	0,0836	0,0855	0,0858
7	25	0,1202	0,1009	0,1021	0,1011
8	20	0,0962	0,1146	0,1153	0,1171
9	32	0,1538	0,1228	0,1331	0,1312
10	25	0,1202	0,1237	0,1385	0,1380
11	27	0,1298	0,1153	0,1156	0,1211
12	13	0,0625	0,0959	0,0745	0,0649
13	11	0,0529	0,0634	0,0448	0,0525
14	7	0,0337	0,0161	0,0361	0,0337

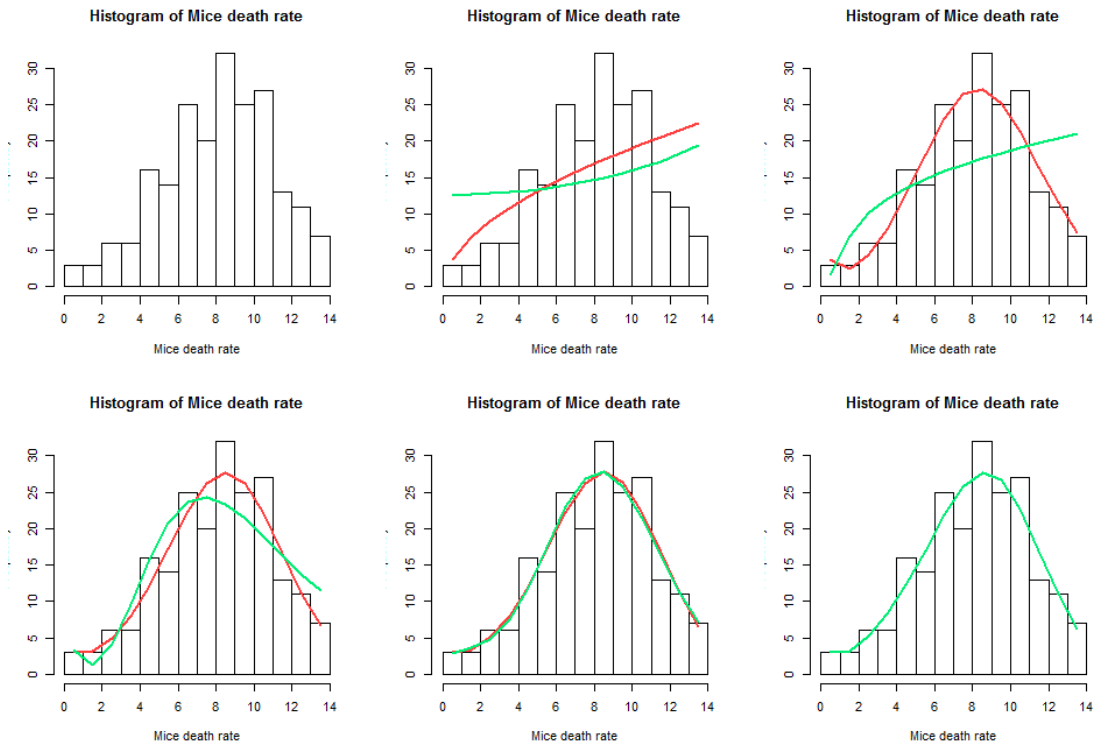
Çizelge 5.37'den görüldüğü gibi, splayn yöntemler ile elde edilen teorik frekanslar gözlenen frekanslara daha yakındır. Bu durum, RMSE , χ^2 , R^2 istatistiksel ölçütleri ile Çizelge 5.38'de ortaya konulmaktadır.

Çizelge 5.38. Fare ölüm veri seti için splayn yöntemlerin performans ölçütlerinin değerleri

Yöntemler	RMSE	χ^2	R^2
B-splayn	12,871	13,40	0,849
Kübik splayn	7,841	5,926	0,908
Cezalı splayn	7,140	4,76	0,916

Çizelge 5.38'de incelendiğinde, splayn yöntemlerin arasında iyi sonuç gösteren cezalı splayn yöntemidir.

Genelleştirilmiş entropi yöntemlerin moment fonksiyonları kümesi önceki uygulamada kullanıldığı gibi $(\xi, \xi^2, \ln(\xi), (\ln(\xi))^2, \ln(1 + \xi^2))$, şeklinde belirlenmiştir.



Şekil 5.33. MinMaxEnt ve MaxMaxEnt yöntemleri yardımıyla tahmin edilen dağılım fonksiyonu

Şekil 5.33'te genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri MaxMaxEnt ve MinMaxEnt dağılım fonksiyonları gösterilmiştir. Bu şekilde kırmızı çizgiyle MinMaxEnt dağılımı ve yeşil çizgiyle MaxMaxEnt dağılımı grafikte gösterilmiştir. Şekilde birinci sıradan soldan sağa doğru, verilerin histogramı, iki, üç, dört, beş ve altı

bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt ve MaxMaxEnt dağılımları yer almaktadır.

İki bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi_2}(\xi)$ 'nin, $(1, (\ln(\xi)))$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım, üç bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi_3}(\xi)$ 'ün, $(1, \xi^2, (\ln(\xi))^2)$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım, dört bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi_4}(\xi)$ 'ün, $(1, \xi, \xi^2, \ln(\xi))$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım, beş bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi_5}(\xi)$ 'in, $(1, \xi, \xi^2, \ln(\xi), (\ln(\xi))^2)$ moment vektörüne karşılık gelen dağılımdır ve altı bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi_6}(\xi)$ 'nin $1, \xi, \xi^2, \ln(\xi), (\ln(\xi))^2, \ln(1 + \xi^2)$ moment vektörüne karşılık gelen dağılımdır denilebilir. Belirlenen MinMaxEnt dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar, Çizelge 5.39'de incelenmektedir.

Çizelge 5.39. Fare ölüm değerleri için belirlenen MinMaxEnt dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar ve gözlenen frekanslar

Zaman	Ölüm sayısı	f_i	$f_{m\xi_2}(\xi)$	$f_{m\xi_3}(\xi)$	$f_{m\xi_4}(\xi)$	$f_{m\xi_5}(\xi)$	$f_{m\xi_6}(\xi)$
1	3	0,0144	0,0181	0,0177	0,0147	0,0142	0,0144
2	3	0,0144	0,0328	0,0118	0,0153	0,0164	0,0151
3	6	0,0288	0,0432	0,0213	0,0238	0,0245	0,0251
4	6	0,0288	0,0519	0,0381	0,0383	0,0383	0,0399
5	16	0,0769	0,0595	0,0613	0,0587	0,0580	0,0591
6	14	0,0673	0,0663	0,0876	0,0834	0,0822	0,0818
7	25	0,1202	0,0726	0,1115	0,1080	0,1069	0,1051
8	20	0,0962	0,0784	0,1271	0,1265	0,1262	0,1241
9	32	0,1538	0,0839	0,1305	0,1332	0,1339	0,1331
10	25	0,1202	0,0891	0,1212	0,1258	0,1270	0,1280
11	27	0,1298	0,0941	0,1023	0,1062	0,1073	0,1092
12	13	0,0625	0,0988	0,0787	0,0801	0,0804	0,0817
13	11	0,0529	0,1034	0,0554	0,0538	0,0534	0,0533
14	7	0,0337	0,1078	0,0357	0,0322	0,0313	0,0300

İki bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MaxMaxEnt dağılımı $f_{m\xi_2}(\xi)$ 'nin, $(1, \xi^2)$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım, üç bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi_3}(\xi)$ 'ün, $(1, \ln(\xi), (\ln(\xi))^2)$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım, dört bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi_4}(\xi)$ 'ün, $(1, \ln(\xi), (\ln(\xi))^2, \ln(1 + \xi^2))$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım, beş bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi_5}(\xi)$ 'in, $(1, \xi, \ln(\xi), (\ln(\xi))^2, \ln(1 + \xi^2))$ moment vektörüne

karşılık gelen dağılımdır ve altı bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımı $f_{m\xi_6}(\xi)$ 'nin $1, \xi, \xi^2, \ln(\xi), (\xi)^2, \ln(1 + \xi^2)$ moment vektörüne karşılık gelen dağılımdır denilebilir. Belirlenen MaxMaxEnt dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar, Çizelge 5.40'ta incelenmektedir.

Çizelge 5.40. Fare ölüm değerleri için belirlenen MaxMaxEnt dağılımlarından elde edilen teorik frekanslar ve gözlenen frekanslar

Zaman(x)	Ölüm sayısı (d)	f_i	$f_{m\xi_2}(\xi)$	$f_{m\xi_3}(\xi)$	$f_{m\xi_4}(\xi)$	$f_{m\xi_5}(\xi)$	$f_{m\xi_6}(\xi)$
1	3	0,0144	0,0607	0,0083	0,0160	0,0141	0,0144
2	3	0,0144	0,0610	0,0338	0,0063	0,0175	0,0151
3	6	0,0288	0,0615	0,0485	0,0200	0,0234	0,0251
4	6	0,0288	0,0624	0,0581	0,0461	0,0362	0,0399
5	16	0,0769	0,0636	0,0652	0,0761	0,0572	0,0591
6	14	0,0673	0,0651	0,0711	0,1002	0,0839	0,0818
7	25	0,1202	0,0670	0,0761	0,1138	0,1104	0,1051
8	20	0,0962	0,0692	0,0806	0,1170	0,1290	0,1241
9	32	0,1538	0,0719	0,0846	0,1123	0,1339	0,1331
10	25	0,1202	0,0750	0,0883	0,1027	0,1241	0,1280
11	27	0,1298	0,0787	0,0917	0,0907	0,1035	0,1092
12	13	0,0625	0,0829	0,0949	0,0780	0,0783	0,0817
13	11	0,0529	0,0877	0,0980	0,0660	0,0541	0,0533
14	7	0,0337	0,0933	0,1008	0,0550	0,0344	0,0300

Çizelge 5.41 gama radyasyonuna maruz bırakılmış 208 fare için ölüm zamanının, iki, üç, dört, beş, altı bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımlarının veriye uyumunun istatistiksel ölçütleri verilmiştir.

Çizelge 5.41. MinMaxEnt dağılımlarının veriye uyumunun istatistiksel ölçütleri

MinMaxEnt Dağılımlar	RMSE	χ^2	R^2
$f_{m\xi_2}(\xi)$	63,297	49,543	0,264
$f_{m\xi_3}(\xi)$	10,589	7,939	0,875
$f_{m\xi_4}(\xi)$	9,567	6,954	0,887
$f_{m\xi_5}(\xi)$	9,424	6,918	0,889
$f_{m\xi_6}(\xi)$	9,194	6,793	0,892

Çizelge 5.42. gama radyasyonuna maruz bırakılmış 208 fare için ölüm zaman, iki, üç, dört, beş, altı bileşkeli moment vektör fonksiyonuna uygun MaxMaxEnt dağılımlarının veriye uyumunun istatistiksel ölçütleri verilmiştir.

Çizelge 5.42. *MaxMaxEnt dağılımlarının veriye uyumunun istatistiksel ölçütleri*

MaxMaxEnt Dağılımlar	RMSE	χ^2	R^2
$f_{m\xi_2}(\xi)$	82,760	77,461	0,032
$f_{m\xi_3}(\xi)$	58,261	47,785	0,316
$f_{m\xi_4}(\xi)$	19,902	17,760	0,769
$f_{m\xi_5}(\xi)$	10,168	7,421	0,880
$f_{m\xi_6}(\xi)$	9,194	6,793	0,892

Çizelge 5.42 incelendiğinde, iki, üç, dört, beş, altı bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımlarının arasında en iyi sonuç gösteren altı bileşekli moment vektör $f_{m\xi_6}(\xi)$ fonksiyonudur.

Bu uygulamada da splayn yöntemlerle genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemlerin karşılaştırmasıdır. Çizelge 5.38 bakıldığında, splayn yöntemlerin arasında en iyi sonuç gösteren cezalı splayn yöntemidir.

Çizelge 5.43'te iki farklı yöntemlerin arasındaki en iyi performans gösteren cezalı splayn ve MinMaxEnt altı bileşekli moment vektör $f_{m\xi_6}(\xi)$ 'in sonuçları verilmiştir.

Çizelge 5.43. *B-splayn ve MaxMaxEnt altı bileşekli moment vektör $f_{m\xi_6}(\xi)$ 'in sonuçları*

Yöntemler	RMSE	χ^2	R^2
Cezalı splayn	7,140	4,76	0,916
$f_{m\xi_6}(\xi)$	9,194	6,793	0,892



Şekil 5.34. *Cezalı splayn ve MinMaxEnt altı bileşekli moment vektör $f_{m\xi_6}(\xi)$ 'in grafiği*

Şekil 5.34'te cezalı splayn yöntemin yaklaşımı kırmızı çizgiyle ve $f_{m\xi_6}(\xi)$ MinMaxEnt dağılım fonksiyonu mavi çizgiyle gösterilmiştir. RMSE, χ^2 , R^2 ölçütlerine altı bileşekli moment vektör fonksiyonuna uygun MinMaxEnt dağılımının cihazın hatasını modellemede iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Aynı zamanda cezalı splayn yardımıyla tahmin edilen dağılımlar da MinMaxEnt dağılımından daha iyi sonuçlar vermektedir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında parametrik olmayan regresyon yöntemleri, pürüzlülük ceza yaklaşımı için splayn düzeltme, taban fonksiyon splayn yöntemleri ve genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri farklı uygulamalarla incelenmiştir. Toplamsal modellerin elemanları cezalı splayn ve kübik düzeltme splaynlardır. Yarıparametrik ve parametrik olmayan regresyon modellerinin kestiriminde, düzeltme splayn yöntemi kullanılmış olup, söz konusu yöntem esas itibariyle, cezalı en küçük kareler toplamının minimize edilme problemine dayanır.

Parametrik olmayan yöntemlerden, pürüzlülük ceza yaklaşımı uygulanan modellerde, optimum düzeltme parametresinin seçimi önemli bir konudur. Çünkü parametre sıfırdan sonsuza değişirken, fonksiyonun bulunması basit bir doğrusal modele dönüşebilmektedir. Düzeltme parametresi sıfıra eşit olduğunda tümüyle esnek eğimli bir interpolasyon tahminine karşı gelebilmektedir. Düzeltme parametresinin seçimi tahmin edilecek fonksiyonunun, gerçek fonksiyona en iyi ve optimum şekilde yakın olmasıyla sağlanmaktadır. Düzeltme parametresinin seçimi CV değeri, GCV değeri, Mallows'un C_p ölçütlerle seçilebilmektedir.

Bölüm 5.1.'de yapılan uygulamada iki farklı zaman serisi splayn yöntemler yardımıyla incelenmiştir. Uygulamada zaman serisi olarak döviz kurları Amerikan Doları/Türk Lirası ve Amerikan Doları/Tacik Somoni ele alınmıştır. Dikkate alınan zaman serisi gözlemleri, 08/01/2010 – 31/12/2015 yılları arasında, Amerikan Doları/Türk Lirası döviz kurun haftalık kapanış değerleridir ve $n = 312$ gözlemden oluşmaktadır. İkinci zaman serisi, 02/01/2015 – 11/02/2016 yılın arasında, Amerikan Doları/Tacik Somoni döviz kurun haftalık kapanış değerleridir ve $n = 63$ gözlemden oluşmaktadır. Uygulamanın sonucunda öngörülen değerlere göre cezalı splayn ve kübik splayn düzeltme ile elde edilen MSE değerleri daha küçük bulunmuştur.

Bölüm 5.2. ve 5.3'te tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonlardan türetilen veriler söz konusudur. Tek değişkenli uygulamada karışık normal dağılımlardan veri üretip, splayn yöntemlerin hangisinin daha iyi yaklaşım gösterdiğini belirlemek amacıyla, bir karşılaştırılma yapılmıştır. Bu işlemlerde, R program ortamında yazılan bir programla, her bir seçilen fonksiyon farklı gözlem sayılar ile örneklem oluşturulmuş ve oluşturulan her bir örneklem için farklı sayılarda tekrarlama yapılmıştır. Tekrarlanan her bir örneklem veri dizisi için herhangi bir tahmin eğrisinin doğruluğunu değerlendirmek için hata kareler ortalaması (MSE) kullanılmıştır.

İki değişkenli simülasyon çalışmasında farklı kaynaklardan alınmış fonksiyonlardan veri oluşturup, genelleştirilmiş toplamsal model, cezalı genelleştirilmiş toplamsal model ve ince tabakalı splaynlarla türetilen veri tahmin edilmiştir. Bu işlemlerde, R program ortamında yazılan bir programla, her bir seçilen fonksiyon için $n = 50, 100, 200, 400$ gözlemlerle örneklem oluşturulmuş ve oluşturulan her bir örneklem için yüz tekrarlama yapılmıştır.

Bölüm 5.4'te Türkiye'ye gelen DYY'ların belirleyicileri olarak yedi farklı değişken dikkate alınmış ve bu değişkenlerin DYY'lar üzerindeki etkileri yarıparametrik regresyon modellerinde incelenmiştir. Kurulan dört farklı model, parametrik(doğrusal) model, yarıparametrik toplamsal modellerle tahmin edilmiştir.

Uygulamadaki ampirik sonuçların tamamı ve özellikle kısmi parametrik toplamsal regresyon modelleri göz önünde bulundurulduğunda, göze çarpan en önemli sonuç, DYY'ların belirleyicilerinin her zaman doğrusal etkilere sahip olmamasıdır. DYY belirleyicilerinin analizinde parametrik olmayan modellerin kullanılmasının önemi ortaya çıkmaktadır. Genelde, yarıparametrik ve cezalı genelleştirilmiş toplamsal modellerin sonuçları yakın değerler aldığı görülmektedir.

Ayrıca bu tez çalışmasında genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleri MinMaxEnt, MaxMaxEnt ve MaxMinxEnt dağılım fonksiyonları incelenmiştir. Kesikli ve sürekli rassal değişkenler MaxEnt ve MinxEnt yönteminden bahsedilmiştir. Bu yöntemler yardımıyla moment fonksiyonlarına bağlı özel fonksiyonellere minimum değer veren MinMaxEnt ve maksimum MaxMaxEnt dağılımlarından bahsedilmiştir

MinMaxEnt, MaxMaxEnt ve MaxMinxEnt entropi optimizasyon problemlerinin oluşturulması ve nümerik çözümleri için, R programda fonksiyon yazılmıştır.

Bölüm 5.4'te iki farklı veri seti splayn yöntemler ve MinMaxEnt dağılımını belirleme süreci bir uygulama ile gösterilmektedir. Bir başka ifade ile MinMaxEnt entropi optimizasyon probleminin çözümü için R program ile hazırlanmış programın bir uygulaması yapılmaktadır. Radyo dalgaları ile mesafe ölçen cihazın hatası ve gama radyasyonuna maruz bırakılmış 208 fare için ölüm zamanının dağılımını belirleme uygulama olarak seçilmiştir.

Bu uygulamada B-splayn, cezalı splayn ve kübik düzeltme splaynının performansı genelleştirilmiş entropi optimizasyon yöntemleriyle karşılaştırılmıştır. Uygulamanın sonucunda splayn yöntemlerin altılı kombinasyon MinMaxEnt ve MaxMaxEnt yöntemlerinin hemen hemen aynı sonucu verdiği görülmüştür.

Simülasyon çalışması ve uygulamalar sonucunda aşağıdaki noktalar özetlenebilir:

- Zaman serisi yaklaşımında splayn düzeltme yöntemlerinin daha iyi sonuç verdiği ortaya çıkmaktadır.
- Tek değişkenli simülasyon çalışmasında kübik düzeltme splaynın iyi sonuç verdiği gösterilmiştir. İkinci iyi sonuç gösteren cezalı splayndır.
- İki değişkenli simülasyon deneyinde ince tabakalı splayn 11 kez MSE değerleri en küçük olup, simülasyonda en iyi yaklaşım yöntemi olarak seçilebilmektedir. Cezalı splayn yöntemi 5 kez birinci ve 12 kez ikinci düzeyine sahip olmuştur. Kübik splayn düzeltme yöntemi bu yöntemlerin arasında en kötü performans göstermiştir. İnce tabakalı splayn bileşenlerin seçimi, toplamsal modellerden daha büyük öneme sahiptir.
- Bazı ekonomik değişkenlerin parametrik olmayan yöntemlerle tahmin edilmesi önerilmektedir.
- MinMaxEnt dağılımı için, üçüncü kısıt sayısından sonra, kısıt sayısının artırılması modellemenin daha iyi sonuç göstermesine sağlamaktadır.
- Gözlem sayı az olduğu problemlerde splayn yöntemleri iyi sonuç vermemektedir.
- Veri setinin büyük ve çok boyutlu olduğu problemlerde regresyon splaynının kullanımı daha uygundur.

KAYNAKÇA

- [1] Ananda, M.M., Dalpatadu, R.J., Singh, A.K. (1993). Estimating parameters of the force of mortality in actuarial studies. *Actuar. Res. Clear. House*, 1, 129–141
- [2] Aydın, D. and Omay, R.E. (2006). The empirical performances of the selection criteria for nonparametric regression using smoothing spline. *The 5th WSEAS International Conference On Computational Intelligence, Man-Machine Systems And Cybernetics*, Venice, Italy, November 20-22.
- [3] Aydın, D. and Omay, R.E. (2007). The smoothing parameter selection problem in smoothing spline regression for different data sets". *WSEAS Transactions on Mathematics*, 6(3), 477-482.
- [4] Aydın, D. and Mammadov, M. (2014). Time series forecasting using a hybrid neural networks and nonparametric regression model. *Pak. J. Statist.*,30(3),319-332
- [5] Barrios, S., Goerg, H. and Strobl, E.(2005). Foreign direct investment, competition and industrial development in the host country. *European Economic Review*, Elsevier, 49 (7), 1761-1784.
- [6] Berberoğlu, B., Omay, R.E., Berberoğlu, C.N., Karaduman, Ç., Nizamitdinov, A. (2016). Anadolu Üniversitesi açıköğretim sistemi üzerinde Türkiye'nin sosyoekonomik gelişmişlik düzeyinin etkileri. *The 18. International Congress of AMSE-AMCE-WAER*, Eskişehir, Türkiye, May 30-June 2
- [7] Blonigen, B.A. (2005). A Review of the empirical literature on FDI determinants. *Atlantic Economic Journal*, 33, 383-403.
- [8] Bowman, A.W. and Azzalini, A. (1997). *Applied smoothing techniques for data analysis: The kernel approach with S-Plus illustrations*, New York: Clarendon Press.
- [9] Buja, A., Hastie, T. and Tibshirani, R. (1989). Linear smoothers and additive models, *The Annals of Statistics*, 17(2), 453-555.
- [10] Coskun, R. (2001). Determinants of direct foreign investment in Turkey, *European Business Review*,13(4), 221-226.
- [11] Craven, P. and Wahba, G. (1979). Smoothing noisy data with spline functions, *Numerische Matematik*, 31, 377-403.
- [12] Currie, D.I., Durban, M. and Eilers, P.H.C (2004). Smoothing and forecasting mortality rates, *Statistical Modelling*, 4, 279–298
- [13] He, D., Huang, Q. and Gao, J. (2012). A new entropy optimization model for graduation of data in survival analysis, *Entropy*, 14, 1306-1316
- [14] De Boor, C. (1978). *A practical guide to splines*, New York: Springer.
- [15] Dierckx, P. (1993). *Curve and surface fitting with splines*. Oxford: Clarendon.

- [16] Dobson, A.J. (2002). *An introduction to generalized linear models*, USA: Chapman&Hall/CRC.
- [17] Draper, N.R. and Smith, H. (1998). *Applied regression analysis*, New York: John Wiley & Sons.
- [18] Duchon, J. (1975). *Fonctions splines et vecteurs aleatoires*, Tech. Report 213, Seminare d'Analyse Numerique, Universite Scientifique et Medicale, Grenoble.
- [19] Duchon, J. (1976). Fonctions-Spline et Esperances Conditionelles de Champs Gaussiens, *Ann. Sci. Univ. Clermont Ferrand II Math.*, 14, 19-27.
- [20] Duchon, J. (1977) *Splines Minimizing Rotation – Invariant Semi-Norms in Sobolev Spaces*, Constructive Theory of Functions of Several Variables, W. Schempp and K. Zeller eds., 85-110.
- [21] Eilers, P.H.C. and Marx, B.D. (1996) Flexible smoothing using B-splines and penalized likelihood (with comments and rejoinders), *Statistical Science*, 11(2), 89-121.
- [22] Eubank, R.L.(1999). *Nonparametric regression and smoothing spline*, New York: Marcel Dekker.
- [23] Fan, J. and Gijbels, I. (1996). *Local polynomial modeling and its applications*, London: Chapman and Hall.
- [24] Friedman, J.H. and Stuetzle, W. (1981). Projection Pursuit Regression, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 76, 817.
- [25] Gasser, T., Sroka, L. and Jennen-Steinmentz, C. (1986). Residual variance and residual pattern in nonlinear regression, *Biometrika*, 73, 625-633.
- [26] Green, P.J. and Silverman, B.M. (1994). *Nonparametric regression and generalized linear models*. London: Chapman and Hall.
- [27] Green, P.J. and Yandell, B. (1995). Semiparametric generalized linear models, *Proceedings 2nd International GLIM Conference, Lancaster, Lecture notes in Statistics No.32*, 44-55, New York: Springer – Verlag.
- [28] Gu, C. (2002). *Smoothing Spline ANOVA Models*, New York: Springer-Verlag.
- [29] Hastie, T.J. and Tibshirani, R. (1999). *Generalized additive models*, London: Chapman & Hall.
- [30] Hastie, T. and Tibshirani, R. (2000). Bayesian Backfitting, *Statistical Science*, 15, 193–223.
- [31] Huang, J. Z. and Shen, H.(2004). Functional coefficient regression models for non-linear time series: a polynomial spline approach”, *Scandinavian Journal of Statistics*, 31, 515–534.

- [32] Hurvich, C.M., Simonoff, J.S. and Tasi, S.L. (1998). Smoothing parameter selection in nonparametric regression using an improved akaike information criterion, *Journal of Royal. Statist. Soc., Ser.B*, 60, 271-293.
- [33] Hutchinson, M.F. and Bischof, R.J. (1983). A new method for estimating the spatial distribution of mean seasonal and annual rainfall applied to the Hunter Valley, New South Wales, *Australian Meteorological Magazine*, 31, 179-184.
- [34] Hyndman, R. J., Koehler, A. B., Snyder, R. D., Grose, S. (2002). A state space framework for automatic forecasting using exponential smoothing methods. *International Journal of Forecasting*, 18(3), 439–454.
- [35] Jaynes, E.T. (1957). Information theory and statistical mechanics, *Phys. Rev.*, 106, 620-630.
- [36] Kapur, J.N. and Kesavan, H.K. (1992). Entropy optimization principles with applications, New York: Academic Press.
- [37] Kimball, A.W. (1960). Estimation of mortality intensities in animal experiments, *Biometrics*, 16(4), 505-521.
- [38] Kottaridi, C. and Stengos, T. (2008). Foreign direct investment, human capital and nonlinearities in economic growth. *Rimini Centre for Economic Analysis, Working Paper Series* ,20.
- [39] Kula, F. (2006). *Çokuluslu girişimler ve Türkiye (Türkiye’de yabancı sermaye yatırımlarının iktisadi verilerle bilimsel analizi)* (1. Baskı). İstanbul: İleri Yayınları.
- [40] Kullback, S. and Leibler, R. A. (1951). On information and sufficiency, *Annals of Mathematical Statistics*, 22, 79–86.
- [41] Kullback, S. (1959). *Information Theory and Statistics*, New York: Wiley.
- [42] Mallows, C. L. (1973). Some comments on Cp, *Technometrics*, 15, 661-675.
- [43] Marron, J.S., and Wand, M.P. (1992). Exact mean integrated squared error, *The Annals of Statistics*, 20, 712–736
- [44] Marx, B.D. and Eilers, P.H.C. (1998). Direct generalized additive modeling with penalized likelihood, *Computational Statistics and Data Analysis*, 28, 193-209.
- [45] Memmedli, M., Ozdemir, O. and Nizamitdinov, A. (2011a). A comparison study of nonparametric regression models and neural network models using significant wave height data, *Abstract Book of the International 7th Statistics Congress*, Antalya, Turkey, April 28-May 01, 264-265.
- [46] Memmedli, M. and Nizamitdinov, A. (2011b). A simulation study with different number of observation using nonparametric regression splines, *Recent Advances in Signal Processing, Computational Geometry and Systems Theory*, 166-170

- [47] Memmedli, M. and Nizamitdinov, A. (2012). An application of various nonparametric techniques by nonparametric regression splines, *International Journal Of Mathematical Models And Methods In Applied Sciences*, 6(1), p.106-113
- [48] Memmedli, M., Omay, R.E. and Nizamitdinov, A. (2010). Analysis of determinants of foreign direct investment in turkey using nonparametric regression models”, *On Proceedings of 5th International Conference on Applied Statistics*, Bucharest, Romania
- [49] Montgomery, D.C., Peck, E.A. and Vining, G.G. (2001). *Introduction to linear regression analysis*, New York:WILEY.
- [50] Montorila, M. H., Morettin, P. A. and Chiann, C. (2014). Spline estimation of functional coefficient regression models for time series with correlated errors, *Statistics and Probability Letters*, 92, 226–231
- [51] Myers, R.H. (1990). *Classical and modern regression with applications*, USA: Duxbury Classic Series.
- [52] Nelder, J.A. and Wedderburn, R.W.M. (1972). Generalized linear models, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 135, 370-384.
- [53] Nizamitdinov, A., Memmedli, M. and Ozdemir, O. (2010a). Comparison study of p-spline and cubic smoothing spline in time-series prediction”, *On Proceedings of 24th Mini EURO Conference on Continuous Optimization and Information-Based Technologies in the Financial Sector*, Izmir, Turkey, June 23-26, 34-39.
- [54] Nizamitdinov, A., Memmedli, M., Ozdemir., O. (2010b) ‘Time Series Forecasting using Fuzzy Time Series Approach, Neural Network Models and Regression Splines’, *On Abstract Book of 24th European Conference on Operational Research*, Lisbon, Portugal, 11-14, July.
- [55] Nizamitdinov, A., Memmedli, M. and Ozdemir., O. (2010c). Analysis of heart disease by using multivariate regression models and artificial neural network models”, *On Proceedings of 5th International Conference on Applied Statistics*, Bucharest, Romania
- [56] Nizamitdinov, A. and Memmedli, M. (2011a). Bayesian spline approach in nonparametric regression: a simulation study”, *On Abstract Book of the International 7th Statistics Congress*, Antalya, Turkey, April 28-May 01, 264-265.
- [57] Nizamitdinov, A. and Memmedli, M. (2011b). Multivariate regression splines and their bayesian approaches in nonparametric regression”, *On Proceedings of the 2nd International Symposium on Computing in Science and Engineering*, Kusadasi, Aydin, Turkey, June 1-4, 630-632.
- [58] Nizamitdinov, A., Memmedli, M. and Ozdemir, O. (2011c), “Analysis of Exchange Rates and Gold Price with ANN Models and Bayesian Spline Models”,

On Proceedings of the 12th International Symposium on Econometrics Statistics and Operations Research, Denizli, Turkey, May 26-29, 21-33.

- [59] Nizamitdinov, A. and Memmedli, M. (2011d). Multivariate regression spline and their bayesian approach in nonparametric regression using boston housing dataset', *On Proceedings of NEDETAS Conference*, Ankara, Turkey, May 2-4, 70-77.
- [60] Nizamitdinov, A., Memmedli, M. and Ozdemir, O. (2011e). Wave prediction by regression splines and adaptive neuro-fuzzy inference system, *On Abstract Book of 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society*, Baku, Azerbaijan, July 1-3, 312.
- [61] Nizamitdinov, A., Sohret, Y., Shamilov, A., Karakoc, T.H. (2016a), Statistical approach to extend exhaust emissions data of a turboprop engine, *On Proceedings Of International Symposium On Sustainable Aviation*, Istanbul, Turkey, May 29-June 1
- [62] Nizamitdinov, A. and Shamilov, A. (2016b). Forecasting time series data with spline functions, *The 17th International Symposium on Econometrics, Operations Research and Statistics*, Sivas, Turkey, June 2-4.
- [63] Nizamitdinov, A., Sohret, Y., Shamilov, A., Karakoc, T.H. (2017a). Statistical model development for military aircraft engine exhaust emissions data", T.H.Karakoc et.al., In *Advances in Sustainable Aviation*, Chapter 12, p.177-187.
- [64] Nizamitdinov, A., Berberoglu, B. and Shamilov, A. (2017b). Time series data analysis with different spline functions, *The Fifth Anadolu International Conference in Economics*, Eskisehir, Turkey, May 11-13
- [65] O'Sullivan, F., Yandell, B.S. and Raynor, W.J. (1986a). Automatic smoothing of regression functions in generalized linear models, *Journal of American Statistical Association*, 81(393), 96-103.
- [66] O'Sullivan, F. (1986b). A statistical perspective on ill-posed inverse problems (with discussion), *Statistical Science*, 1, 505-527.
- [67] O'Sullivan, F. (1988). Fast computation of fully automated log-density and log-hazard estimators. *SIAM. Journal Science Statistical Computation*, 9, 363-379.
- [68] Omay, R.E. and Saray, M.O. (2010). Analysis of Determinants of Direct Foreign Investments to Turkey: a semiparametric approach, working paper.
- [69] Ozdemir, O., Memmedli, M. and Nizamitdinov A. (2013). ANN models and bayesian spline models for analysis of exchange rates and gold price, *International Econometric Review*, 5(2), 53-69.
- [70] Reinsch, C. (1967). Smoothing by spline functions, *Numerische Mathematik*, 10, 177-183.

- [71] Ruppert, D., Wand, M.P. and Carroll, R.J. (2003). *Semiparametric regression*, Cambridge: Cambridge University Press.
- [72] Schoenberg, I.J. (1964a). Spline functions and the problem of graduation, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 52, 947-950.
- [73] Schoenberg, I.J. (1964b). On interpolation by spline functions and its minimum properties, *Internat. Ser. Numer. Anal.*, 5, 947-950.
- [74] Schumaker, L.L. (1976). On Tchebycheffian spline functions, *Journal of Approximation Theory*, 18, 278-303.
- [75] Seghouane, A.K. and Bekara, M. (2004). A small sample model selection criterion based on Kullback's symmetric divergence, *Signal Processing*, 52 (12), 3314 – 3323.
- [76] Shamilov, A., Usta, İ. and Kantar, Y.M. (2006a). The distribution of minimizing maximum entropy: alternative to weibull distribution for wind speed, *Proceedings of the 9th WSEAS international conference on applied mathematics*, 605-610.
- [77] Shamilov, A. (2006b). A development of entropy optimization methods”, *WSEAS transactions on mathematics*, 5, 568–575.
- [78] Shamilov, A. (2007). Generalized entropy optimization problems and the existence of their solutions, *Physica A: Statistical mechanics and its applications*, 382, 465–472.
- [79] Shamilov, A., Giriftinoğlu, Ç., Usta, İ., Kantar, Y.M. (2008). A new concept of relative suitability of moment function sets. *Applied Mathematics And Computation*, 208,521-529.
- [80] Shamilov, A. and Giriftinoglu, C. (2009a). Some relationships between entropy values of entropy optimization distributions for time series. The Scientific and Pedagogical News of Odlar Yurdu University.
- [81] Shamilov, A. and Giriftinoglu, C. (2009b). A new method for estimating the missing value of observed time series and time series forecasting. *The Scientific And Pedagogical News Of Odlar Yurdu University*
- [82] Shamilov, A. (2010a). Generalized entropy optimization problems with finite moment function sets, *Journal of Statistics and Management Systems*, 13, 595-603.
- [83] Shamilov, A. and Giriftinoglu, C. (2010b). Generalized entropy optimization distributions dependent on parameter in time series, *WSEAS Transactions On Information Science & Applications*, 1(7),102-111.
- [84] Shamilov, A., Özdemir, S. and Yilmaz, N. (2014). Generalized entropy optimization methods for survival data, *5th International Conference On Accelerated Life Testing And Degradation Models*, Pau, Fransa, 174-183.

- [85] Shamilov, A., Şentürk, S. and Yılmaz, N. (2015a). Generalized maximum fuzzy entropy methods with applications, *The 4th International Fuzzy Systems Symposium*, Istanbul, Turkey, 87-92.
- [86] Shamilov, A. and Giriftinoğlu, Ç. (2015b). Information worth of MinMaxEnt models for time series. *Applied Mathematics*, 6, 221-227.
- [87] Shamilov, A., Şentürk, S. and Yılmaz, N. (2015c). Generalized maximum fuzzy entropy methods with applications on wind speed data, *The 5th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications*, Bakü, Azerbaycan, 217-220.
- [88] Şamilov, A. (2015). *Entropi, İnfomasyon ve Entropi Optimizasyon*, Türkiye: Nobel Yayınları.
- [89] Shamilov, A., Şentürk, S. and Yılmaz, N. (2016). Generalized maximum fuzzy entropy methods with applications on wind speed data”, *Journal Of Mathematics And System Science*, 6, 46-52.
- [90] Shamilov, A. and Nizamitdinov, A. (2017). Comparison of entropy optimization methods and smoothing splines in estimation of probability density functions, *The 3rd International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress*, Konya, Turkey, 24-26.
- [91] Shannon, C.E. (1948). A mathematical theory of communications”, *Bell System technical Journal*, 27, 379–623.
- [92] Shao, Q. and Yang, L. (2012). Polynomial spline confidence bands for time series trend, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 142, 1678–1689.
- [93] Silverman, B.W.(1985). Some aspects of the spline smoothing approach to nonparametric regression curve fitting, *Journal of Royal Statistical Society, Ser B.*, 47, 1-52.
- [94] Simonoff, J. S. (1996) *Smoothing Methods in Statistics*, New York: Springer.
- [95] Singh, A.K.; Ananda, M.A. and Dalpatadu, R. (1993). Bayesian estimation of tabular survival models from complete samples. *Actuar. Res. Clear. House*, 1, 335–342.
- [96] Smith, M. and Kohn, R. (1997) A bayesian approach to nonparametric bivariate regression, *Journal of the American Statistical Association*, 92, 1522–1535.
- [97] Ventzel, E.S. (1969). *Theory of probability*. Moskow: Nauka.
- [98] Wahba, G. and Wendelberger, J. (1980). *Some new mathematical methods for variational objective analysis using splines and cross-validation*”, *Monthly Weather Review*, 108, 36-57.
- [99] Wahba, G. (1990), *Spline models for observational data*, USA:Society for Industrial and Applied Mathematics.

- [100] Wand, M.P. (2000). A comparison of regression spline smoothing procedures, *Computational Statistics*, 15, 443-462.
- [101] Whittaker, E.T. (1923). On a new method of graduation. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 41, 63-73.
- [102] Wood, S.N. (2000). Modeling and smoothing parameter estimation with multiple quadratic penalties, *Journal of Royal Statistical Society, Ser. B*, 62, 413-428.
- [103] Wood, S. and Augustin, N.H. (2002). GAMs with integrated model selection using penalized regression splines and applications to environmental modeling, *Ecological Modeling*, 157, 157-177.
- [104] Wood, S.N. (2003). Thin plate regression splines, *Journal of Royal Statistical Society, Ser. B*, 65, 95-114.
- [105] Wood, S.N. (2004). Stable and efficient multiple smoothing parameter estimation for generalized additive models, *Journal of the American Statistical Association*, 99(467), 673-686.
- [106] Wood, S.N., (2006) *Generalized additive models: an introduction with R*, London: Chapman and Hall.
- [107] Wood, S.N. (2010), *The mgcv package*. from <http://cran.rproject.org/doc/packages/mgcv.pdf>.
- [108] Xue, L. and Wang, J. (2009). Distribution function estimation by constrained polynomial spline regression, *Journal of Nonparametric Statistics*, 22(4), 443-457.

EKLER

Ek-1. Ki kare dağılımın tablosu

ν \ α	.995	.990	.975	.950	.900	.500	.100	.050	.025	.010	.005
1	.00+	.00+	.00+	.00+	.02	.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.01	.02	.05	.10	.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	.07	.11	.22	.35	.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	.21	.30	.48	.71	1.06	3.36	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	.41	.55	.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.68	.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.27	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.87	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	24.34	34.28	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	12.46	13.57	15.31	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	49.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	69.33	85.53	90.53	95.02	100.42	104.22
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	79.33	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	89.33	107.57	113.14	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	99.33	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

Ek-2. Zaman serisi yaklaşımı için R ortamında yazılan program

```
library(splines)
library(mgcv)
library(forecast)
setwd("D:/MY DOCS/Yeni tezim/turkce tez/R codes/5.1.1")
obs.usd<-read.table(file="usd.txt",header=TRUE)
obs.tjs<-read.table (file="tjs.txt",header=TRUE)
time_usd=c(1:312)
time_tjs=c(1:63)
# B spline USD/TL
spacings <- seq(from=min(time_usd),to=max(time_usd),length=number.knots+2)
[2:(number.knots+1)]
bs1 <- lm(obs.usd$usd ~ bs(time_usd, df = NULL, knots=spacings, degree = 3,
intercept=T))
plot(time_usd,obs.usd$usd,xlab="Zaman",ylab='Amerikan Dolari/Türk Lirası')
lines(time_usd,bs1$fitted.values,col="red")
mse_bs1=sum(bs1$residuals^2)/312
mape_cr1=sum(abs(bs1$residuals)/abs(obs.usd$usd))
(mape_cr1/312)*100
obsnew.usd=data.frame(time_usd=c(313:317))
predict(bs1,obsnew.usd,interval='confidence')
number.knots=10
#cubic regression
gam_cr1<-gam(obs.usd$usd~s(time_usd,bs="cr"))
plot(time_usd,obs.usd$usd)
lines(time_usd,gam_cr1$fitted.values,col="red")
mse_cr1=sum(gam_cr1$residuals^2)/312
obsnew.usd=data.frame(time_usd=c(313:317))
predict(gam_cr1,obsnew.usd,interval='confidence')
mape_cr1=sum(abs(gam_cr1$residuals)/abs(obs.usd$usd))
(mape_cr1/312)*100
#cubic regression USD/TL
```

```

fcast <- splinef(obs.usd$usd,h=5)
plot(fcast)
summary(fcast)
#P-spline
gam_ps1<-gam(obs.usd$usd~s(time_usd,bs="ps",m=3,k=30))
plot(time_usd,obs.usd$usd,xlab="Zaman",ylab='Amerikan Dolari/Türk Lirası')
lines(time_usd,gam_ps1$fitted.values,col="red",lwd=2)
mse_ps1=sum(gam_ps1$residuals^2)/312
mape_ps1=sum(abs(gam_ps1$residuals)/abs(obs.usd$usd))
(mape_ps1/312)*100
obsnew.usd=data.frame(time_usd=c(313:317))
predict(gam_ps1,obsnew.usd,interval='confidence')
# B spline USD/TJS
bstjs <- lm(obs.tjs$tjs~ bs(time_tjs, df = NULL, knots=spacings, degree = 3,
intercept=T))
plot(time_tjs,obs.tjs$tjs,xlab="Zaman",ylab='Amerikan Dolari/Tacik Somoni')
lines(time_tjs,bstjs$fitted.values,col="red")
mse_bstjs=sum(bstjs$residuals^2)/63
mape_bstjs=sum(abs(bstjs$residuals)/abs(obs.tjs$tjs))
(mape_bstjs/63)*100
obsnew.tjs=data.frame(time_tjs=c(64:68))
predict(bstjs,obsnew.tjs,interval='confidence')
fcast <- splinef(obs.tjs$tjs,h=5)
plot(fcast)
summary(fcast)
gam_pstjs<-gam(obs.tjs$tjs~s(time_tjs,bs="ps",m=3,k=30))
plot(time_tjs,obs.tjs$tjs,xlab="Zaman",ylab='Amerikan Dolari/Tacik Somoni')
lines(time_tjs,gam_pstjs$fitted.values,col="red",lwd=2)
mse_pstjs=sum(gam_pstjs$residuals^2)/63
mape_pstjs=sum(abs(gam_pstjs$residuals)/abs(obs.tjs$tjs))
(mape_pstjs/63)*100
obsnew.tjs=data.frame(time_tjs=c(64:68))
predict(gam_pstjs,obsnew.tjs,interval='confidence')

```

Ek-3. Dağılım Fonksiyonların Splayn Yöntemleriyle Tahmini için R ortamında yazılan program

```
library(splines)
library(nor1mix)
library(mgcv)
err<-array(0, dim=c(15,3))
kol=400
number.knots=20
for (i in 1:1000){
# MW1
  x1<-rnormMix(kol,MW.nm1)
  f1<-pnormMix(x1,MW.nm1)
  spacings <- seq(from=min(x1),to=max(x1),length=number.knots+2)
  [2:(number.knots+1)]
  bs1 <- lm(f1 ~ bs(x1, df = NULL, knots=spacings, degree = 3, intercept=T))
  gam_cr1<-gam(f1~s(x1,bs="cr"),knots=list(x=spacings))
  gam_ps1<-gam(f1~s(x1,bs="ps",m=c(2,3)),knots=list(x=spacings))
  err[1,1]<-err[1,1]+((sum((bs1$residuals)^2))/kol)
  err[1,2]<-err[1,2]+((sum((gam_cr1$residuals)^2))/kol)
  err[1,3]<-err[1,3]+((sum((gam_ps1$residuals)^2))/kol)
# MW2
  x2<-rnormMix(kol,MW.nm2)
  f2<-pnormMix(x2,MW.nm2)
  bs2 <- lm(f2 ~ bs(x2, df = NULL, knots=spacings, degree = 3, intercept=T))
  gam_cr2<-gam(f2~s(x2,bs="cr"),knots=list(x=spacings))
  gam_ps2<-gam(f2~s(x2,bs="ps",m=c(2,3)),knots=list(x=spacings))
  err[2,1]<-err[2,1]+((sum((bs2$residuals)^2))/kol)
  err[2,2]<-err[2,2]+((sum((gam_cr2$residuals)^2))/kol)
  err[2,3]<-err[2,3]+((sum((gam_ps2$residuals)^2))/kol)
# MW3
  x3<-rnormMix(kol,MW.nm3)
  f3<-pnormMix(x3,MW.nm3)
```

```

bs3 <- lm(f3 ~ bs(x3, df = NULL, knots=spacings, degree = 3, intercept=T))
gam_cr3<-gam(f3~s(x3,bs="cr"),knots=list(x=spacings))
gam_ps3<-gam(f3~s(x3,bs="ps",m=c(2,3)),knots=list(x=spacings))
err[3,1]<-err[3,1]+((sum((bs3$residuals)^2))/kol)
err[3,2]<-err[3,2]+((sum((gam_cr3$residuals)^2))/kol)
err[3,3]<-err[3,3]+((sum((gam_ps3$residuals)^2))/kol)
# MW4
x4<-rnormMix(kol,MW.nm4)
f4<-pnormMix(x4,MW.nm4)
bs4 <- lm(f4 ~ bs(x4, df = NULL, knots=spacings, degree = 3, intercept=T))
gam_cr4<-gam(f4~s(x4,bs="cr"),knots=list(x=spacings))
gam_ps4<-gam(f4~s(x4,bs="ps",m=c(2,3)),knots=list(x=spacings))
err[4,1]<-err[4,1]+((sum((bs4$residuals)^2))/kol)
err[4,2]<-err[4,2]+((sum((gam_cr4$residuals)^2))/kol)
err[4,3]<-err[4,3]+((sum((gam_ps4$residuals)^2))/kol)
# MW5
x5<-rnormMix(kol,MW.nm5)
f5<-pnormMix(x5,MW.nm5)
bs5 <- lm(f5 ~ bs(x5, df = NULL, knots=spacings, degree = 3, intercept=T))
gam_cr5<-gam(f5~s(x5,bs="cr"),knots=list(x=spacings))
gam_ps5<-gam(f5~s(x5,bs="ps",m=c(2,3)),knots=list(x=spacings))
err[5,1]<-err[5,1]+((sum((bs5$residuals)^2))/kol)
err[5,2]<-err[5,2]+((sum((gam_cr5$residuals)^2))/kol)
err[5,3]<-err[5,3]+((sum((gam_ps5$residuals)^2))/kol)
# MW6
x6<-rnormMix(kol,MW.nm6)
f6<-pnormMix(x6,MW.nm6)
bs6 <- lm(f6 ~ bs(x6, df = NULL, knots=spacings, degree = 3, intercept=T))
gam_cr6<-gam(f6~s(x6,bs="cr"),knots=list(x=spacings))
gam_ps6<-gam(f6~s(x6,bs="ps",m=c(2,3)),knots=list(x=spacings))
err[6,1]<-err[6,1]+((sum((bs6$residuals)^2))/kol)
err[6,2]<-err[6,2]+((sum((gam_cr6$residuals)^2))/kol)
err[6,3]<-err[6,3]+((sum((gam_ps6$residuals)^2))/kol)

```

```

# MW7
x7<-rnormMix(kol,MW.nm7)
f7<-pnormMix(x7,MW.nm7)
bs7 <- lm(f7 ~ bs(x7, df = NULL, knots=spacings, degree = 3, intercept=T))
gam_cr7<-gam(f7~s(x7,bs="cr"),knots=list(x=spacings))
gam_ps7<-gam(f7~s(x7,bs="ps",m=c(2,3)),knots=list(x=spacings))
err[7,1]<-err[7,1]+((sum((bs7$residuals)^2))/kol)
err[7,2]<-err[7,2]+((sum((gam_cr7$residuals)^2))/kol)
err[7,3]<-err[7,3]+((sum((gam_ps7$residuals)^2))/kol)
# MW8
x8<-rnormMix(kol,MW.nm8)
f8<-pnormMix(x8,MW.nm8)
bs8 <- lm(f8 ~ bs(x8, df = NULL, knots=spacings, degree = 3, intercept=T))
gam_cr8<-gam(f8~s(x8,bs="cr"),knots=list(x=spacings))
gam_ps8<-gam(f8~s(x8,bs="ps",m=c(2,3)),knots=list(x=spacings))
err[8,1]<-err[8,1]+((sum((bs8$residuals)^2))/kol)
err[8,2]<-err[8,2]+((sum((gam_cr8$residuals)^2))/kol)
err[8,3]<-err[8,3]+((sum((gam_ps8$residuals)^2))/kol)
# MW9
x9<-rnormMix(kol,MW.nm9)
f9<-pnormMix(x9,MW.nm9)
bs9 <- lm(f9 ~ bs(x9, df = NULL, knots=spacings, degree = 3, intercept=T))
gam_cr9<-gam(f9~s(x9,bs="cr"),knots=list(x=spacings))
gam_ps9<-gam(f9~s(x9,bs="ps",m=c(2,3)),knots=list(x=spacings))
err[9,1]<-err[9,1]+((sum((bs9$residuals)^2))/kol)
err[9,2]<-err[9,2]+((sum((gam_cr9$residuals)^2))/kol)
err[9,3]<-err[9,3]+((sum((gam_ps9$residuals)^2))/kol)
# MW10
x10<-rnormMix(kol,MW.nm10)
f10<-pnormMix(x10,MW.nm10)
bs10 <- lm(f10 ~ bs(x10, df = NULL, knots=spacings, degree = 3, intercept=T))
gam_cr10<-gam(f10~s(x10,bs="cr"),knots=list(x=spacings))
gam_ps10<-gam(f10~s(x10,bs="ps",m=c(2,3)),knots=list(x=spacings))

```

```

err[10,1]<-err[10,1]+((sum((bs10$residuals)^2))/kol)
err[10,2]<-err[10,2]+((sum((gam_cr10$residuals)^2))/kol)
err[10,3]<-err[10,3]+((sum((gam_ps10$residuals)^2))/kol)
# MW11
x11<-rnormMix(kol,MW.nm11)
f11<-pnormMix(x11,MW.nm11)
bs11 <- lm(f11 ~ bs(x11, df = NULL, knots=spacings, degree = 3, intercept=T))
gam_cr11<-gam(f11~s(x11,bs="cr"),knots=list(x=spacings))
gam_ps11<-gam(f11~s(x11,bs="ps",m=c(2,3)),knots=list(x=spacings))
err[11,1]<-err[11,1]+((sum((bs11$residuals)^2))/kol)
err[11,2]<-err[11,2]+((sum((gam_cr11$residuals)^2))/kol)
err[11,3]<-err[11,3]+((sum((gam_ps11$residuals)^2))/kol)
# MW12
x12<-rnormMix(kol,MW.nm12)
f12<-pnormMix(x12,MW.nm12)
bs12 <- lm(f12 ~ bs(x12, df = NULL, knots=spacings, degree = 3, intercept=T))
gam_cr12<-gam(f12~s(x12,bs="cr"),knots=list(x=spacings))
gam_ps12<-gam(f12~s(x12,bs="ps",m=c(2,3)),knots=list(x=spacings))
err[12,1]<-err[12,1]+((sum((bs12$residuals)^2))/kol)
err[12,2]<-err[12,2]+((sum((gam_cr12$residuals)^2))/kol)
err[12,3]<-err[12,3]+((sum((gam_ps12$residuals)^2))/kol)
# MW13
x13<-rnormMix(kol,MW.nm13)
f13<-pnormMix(x13,MW.nm13)
bs13 <- lm(f13 ~ bs(x13, df = NULL, knots=spacings, degree = 3, intercept=T))
gam_cr13<-gam(f13~s(x13,bs="cr"),knots=list(x=spacings))
gam_ps13<-gam(f13~s(x13,bs="ps",m=c(2,3)),knots=list(x=spacings))
err[13,1]<-err[13,1]+((sum((bs13$residuals)^2))/kol)
err[13,2]<-err[13,2]+((sum((gam_cr13$residuals)^2))/kol)
err[13,3]<-err[13,3]+((sum((gam_ps13$residuals)^2))/kol)
# MW14
x14<-rnormMix(kol,MW.nm14)
f14<-pnormMix(x14,MW.nm14)

```



```

bs14 <- lm(f14 ~ bs(x14, df = NULL, knots=spacings, degree = 3, intercept=T))
gam_cr14<-gam(f14~s(x14,bs="cr"),knots=list(x=spacings))
gam_ps14<-gam(f14~s(x14,bs="ps",m=c(2,3)),knots=list(x=spacings))
err[14,1]<-err[14,1]+((sum((bs14$residuals)^2))/kol)
err[14,2]<-err[14,2]+((sum((gam_cr14$residuals)^2))/kol)
err[14,3]<-err[14,3]+((sum((gam_ps14$residuals)^2))/kol)
# MW15
x15<-rnormMix(kol,MW.nm15)
f15<-pnormMix(x15,MW.nm15)
bs15 <- lm(f15 ~ bs(x15, df = NULL, knots=spacings, degree = 3, intercept=T))
gam_cr15<-gam(f15~s(x15,bs="cr"),knots=list(x=spacings))
gam_ps15<-gam(f15~s(x15,bs="ps",m=c(2,3)),knots=list(x=spacings))
err[15,1]<-err[15,1]+((sum((bs15$residuals)^2))/kol)
err[15,2]<-err[15,2]+((sum((gam_cr15$residuals)^2))/kol)
err[15,3]<-err[15,3]+((sum((gam_ps15$residuals)^2))/kol)
}
par(mfrow=c(1,1))
# PLots for MW1
plot(x1,f1,main="Gauss yoğunluğu (Gaussian Density)")
lines(sort(x1),sort(bs1$fitted.values),col="red")
lines(sort(x1), sort(gam_cr1$fitted.values), lty=2, lw=2)
lines(sort(x1), sort(gam_ps1$fitted.values), col="blue", lty=2, lw=2)
# PLots for MW2
plot(x2,f2,main="Tek yönlü eğrili yoğunluğu(Skewed Unimodal Density)")
lines(sort(x2),sort(bs2$fitted.values),col="red")
lines(sort(x2), sort(gam_cr2$fitted.values), lty=2, lw=2)
lines(sort(x2), sort(gam_ps2$fitted.values), col="blue", lty=2, lw=2)
# PLots for MW3
plot(x3,f3,main="Çok eğrili yoğunluğu(Strongly Skewed Density)")
lines(sort(x3),sort(bs3$fitted.values),col="red")
lines(sort(x3), sort(gam_cr3$fitted.values), lty=2, lw=2)
lines(sort(x3), sort(gam_ps3$fitted.values), col="blue", lty=2, lw=2)

```

```
# PLots for MW4
plot(x4,f4,main="Tek basıklık yoğunluğu(Kurtotic Unimodal Density)")
lines(sort(x4),sort(bs4$fitted.values),col="red")
lines(sort(x4), sort(gam_cr4$fitted.values), lty=2, lw=2)
lines(sort(x4), sort(gam_ps4$fitted.values), col="blue", lty=2, lw=2)
# PLots for MW5
plot(x5,f5,main="Aykırı yoğunluğu(Outlier Density)")
lines(sort(x5),sort(bs5$fitted.values),col="red")
lines(sort(x5), sort(gam_cr5$fitted.values), lty=2, lw=2)
lines(sort(x5), sort(gam_ps5$fitted.values), col="blue", lty=2, lw=2)
# PLots for MW6
plot(x6,f6,main="Çiftli yoğunluğu(Bimodal Density)")
lines(sort(x6),sort(bs6$fitted.values),col="red")
lines(sort(x6), sort(gam_cr6$fitted.values), lty=2, lw=2)
lines(sort(x6), sort(gam_ps6$fitted.values), col="blue", lty=2, lw=2)
# PLots for MW7
plot(x7,f7,main="Ayrılmış çiftli yoğunluğu(Separated Bimodal Density)")
lines(sort(x7),sort(bs7$fitted.values),col="red")
lines(sort(x7), sort(gam_cr7$fitted.values), lty=2, lw=2)
lines(sort(x7), sort(gam_ps7$fitted.values), col="blue", lty=2, lw=2)
# PLots for MW8
plot(x8,f8,main="Asimetrik çiftli yoğunluğu(Asymmetric Bimodal Density)")
lines(sort(x8),sort(bs8$fitted.values),col="red")
lines(sort(x8), sort(gam_cr8$fitted.values), lty=2, lw=2)
lines(sort(x8), sort(gam_ps8$fitted.values), col="blue", lty=2, lw=2)
# PLots for MW9
plot(x9,f9,main="Üçlü yoğunluğu(Trimodal Density)")
lines(sort(x9),sort(bs9$fitted.values),col="red")
lines(sort(x9), sort(gam_cr9$fitted.values), lty=2, lw=2)
lines(sort(x9), sort(gam_ps9$fitted.values), col="blue", lty=2, lw=2)
# PLots for MW10
plot(x10,f10,main="Pençe yoğunluğu(Claw Density)")
lines(sort(x10),sort(bs10$fitted.values),col="red")
```

```
lines(sort(x10), sort(gam_cr10$fitted.values), lty=2, lw=2)
lines(sort(x10), sort(gam_ps10$fitted.values), col="blue", lty=2, lw=2)
# PLots for MW11
plot(x11,f11,main="Çift pençe yoğunluğu(Double Claw Density)")
lines(sort(x11),sort(bs11$fitted.values),col="red")
lines(sort(x11), sort(gam_cr11$fitted.values), lty=2, lw=2)
lines(sort(x11), sort(gam_ps11$fitted.values), col="blue", lty=2, lw=2)
# PLots for MW12
plot(x12,f12,main="Asimetrik pence yoğunluğu(Asymmetric Claw Density)")
lines(sort(x12),sort(bs12$fitted.values),col="red")
lines(sort(x12), sort(gam_cr12$fitted.values), lty=2, lw=2)
lines(sort(x12), sort(gam_ps12$fitted.values), col="blue", lty=2, lw=2)
# PLots for MW13
plot(x13,f13,main="Asimetrik çift pence yoğunluğu(Asymmetric Double Claw
Density)")
lines(sort(x13),sort(bs13$fitted.values),col="red")
lines(sort(x13), sort(gam_cr13$fitted.values), lty=2, lw=2)
lines(sort(x13), sort(gam_ps13$fitted.values), col="blue", lty=2, lw=2)
# PLots for MW14
plot(x14,f14,main="Pürüzsüz kombinasyon yoğunluğu(Smooth Combination Density)")
lines(sort(x14),sort(bs14$fitted.values),col="red")
lines(sort(x14), sort(gam_cr14$fitted.values), lty=2, lw=2)
lines(sort(x14), sort(gam_ps14$fitted.values), col="blue", lty=2, lw=2)
```

Ek-4. İki değişkenli simülasyon çalışması R programında yazılan program

```
setwd("D:/MY DOCS/Yeni tezim/turkce tez/R codes/5.2")
library(mgcv)
library(scatterplot3d)
library(akima)
pspl5<-0
pspl10<-0
pspl20<-0
crs5<-0
crs10<-0
crs20<-0
tps5<-0
tps10<-0
tps20<-0
n<-200
for(i in 1:100)
{
set.seed(i)
x1<-runif(n,-2,2)
x2<-runif(n,0,1)
epsi<-rnorm(n,0,0.01)
y<-0.7*exp(-3*((x1+0.8)^2)+8*(x2-0.5)^2)+ exp(-3*((x1-0.8)^2)+8*(x2-0.5)^2)+epsi
d<-data.frame(x1,x2,y)
# P-GAM with 5 basis
splsmooth5<-gam(y ~s(x1,bs = "ps",m=c(2,3),k=5)+s(x2,bs = "ps",m=c(2,3),k=5))
pspl5[i]=(sum((y-splsmooth5$fitted.values)^2)/n)
#P- GAM with 10 basis
splsmooth10<-gam(y ~s(x1,bs = "ps",m=c(2,3),k=10)+s(x2,bs =
"ps",m=c(2,3),k=10))
pspl10[i]=(sum((y-splsmooth10$fitted.values)^2)/n)
# P-GAM with 20 basis
splsmooth20<-gam(y ~s(x1,bs = "ps",m=c(2,3),k=20)+s(x2,bs = "ps",m=c(2,3),k=20))
```

```

pspl20[i]=(sum((y-splsmooth20$fitted.values)^2)/n)
# GAM with 5 basis
splregres5<-gam(y ~s(x1,bs = "cr",k=5)+s(x2,bs = "cr",k=5))
crs5[i]=(sum((y-splregres5$fitted.values)^2)/n)
# GAM with 10 basis
splregres10<-gam(y ~s(x1,bs = "cr",k=10)+s(x2,bs = "cr",k=10))
crs10[i]=(sum((y-splregres10$fitted.values)^2)/n)
# GAM with 20 basis
splregres20<-gam(y ~s(x1,bs = "cr",k=20)+s(x2,bs = "cr",k=20))
crs20[i]=(sum((y-splregres20$fitted.values)^2)/n)
# Thin plate spline with 5 basis
tp5<-gam(y~s(x1,x2,bs="tp",k=5))
tps5[i]=(sum((y-tp5$fitted.values)^2)/n)
# Thin plate spline with 10 basis
tp10<-gam(y~s(x1,x2,bs="tp",k=10))
tps10[i]=(sum((y-tp10$fitted.values)^2)/n)
Thin plate spline with 20 basis
tp20<-gam(y~s(x1,x2,bs="tp",k=20))
tps20[i]=(sum((y-tp20$fitted.values)^2)/n)
}
result<-data.frame(pspl5,pspl10,pspl20,crs5,crs10,crs20,tps5,tps10,tps20)
result
boxplot(result,main="Fan and Gijbels fonksiyonun n=400 MSE'nin box plotu",las=2,
at=c(1,2,3,5,6,7,9,10,11), col=c("red","blue","sienna","red","blue","sienna","red",
"blue","sienna","red","blue","sienna"))
means<-data.frame(mean(pspl5),mean(pspl10),mean(pspl20),mean(crs5), mean(crs10),
mean(crs20), mean(tps5),mean(tps10),mean(tps20))
png("scatter.png")
scatterplot3d(x1,x2,y, main="Fan and Gijbels fonksiyonundan üretilen veriler")
dev.off()
png("plotpspl5.png")
vis.gam(splsmooth5,type = "response",view = c("x1","x2"),theta=145)
dev.off()

```

```
png("plotpspl10.png")
vis.gam(splsmooth10,type = "response",view = c("x1","x2"),theta=145)
dev.off()
png("plotpspl20.png")
vis.gam(splsmooth20,type = "response",view = c("x1","x2"),theta=145)
dev.off()
png("plotcrs5.png")
vis.gam(splregres5,type = "response",view = c("x1","x2"),theta=145)
dev.off()
png("plotcrs10.png")
vis.gam(splregres10,type = "response",view = c("x1","x2"),theta=145)
dev.off()
png("plotcrs20.png")
vis.gam(splregres20,type = "response",view = c("x1","x2"),theta=145)
dev.off()
png("plottp5.png")
vis.gam(tp5,type = "response",view = c("x1","x2"),theta=145)
dev.off()
png("plottp10.png")
vis.gam(tp10,type = "response",view = c("x1","x2"),theta=145)
dev.off()
png("plottp20.png")
vis.gam(tp20,type = "response",view = c("x1","x2"),theta=145)
dev.off()
```

EK-4. Doğrudan Yabancı Yatırım uygulaması için R ortamında yazılan program

```
setwd("C:/Romania")
library(mgcv)
source('ps_construct.r')
FDI<-
c(0.176,0.024,0.051,0.042,0.08,0.027,0.132,0.083,0.072,0.184,0.146,0.163,0.094,0.284,
0.451,0.321,0.375,0.373,0.247,0.330,0.361,0.289,0.301,0.349,0.314,0.367,1.7,0.488,0.5
75,0.708,2.07,3.77,3.38)
FT<-
c(15.656,15.526,14.521,11.436,9.102,17.089,21.142,26.880,29.031,35.280,34.827,29.4
14,23.682,26.312,24.826,21.918,21.290,22.345,23.097,29.453,30.653,35.966,39.046,41
.518,38.726,43.192,50.756,48.800,47.033,49.737,47.207,50.251,49.197)
POP<-
c(0.0231,0.0219,0.0205,0.0200,0.0208,0.0223,0.0236,0.0248,0.0248,0.0248,0.0242,0.0
226,0.0217,0.0217,0.0217,0.0225,0.0195,0.0192,0.0189,0.0186,0.0183,0.0182,0.0180,0
.0176,0.0172,0.0168,0.0163,0.0158,0.0154,0.006,0.0127,0.0125,0.0124)
ELEC<-
c(351.880,417.073,457.564,483.079,482.820,489.884,512.821,535.549,546.132,601.60
1,644.632,676.905,745.990,787.335,844.322,892.741,924.487,997.396,1062.009,1087.
903,1162.706,1290.808,1370.631,1415.919,1462.296,1550.281,15510.922,1560.063,16
55.998,1781.791,1897.592,2053.213,2336.763)
EXDEBT<-
c(7.86,14.65,21.81,18.89,17.39,29.77,27.32,30.74,32.89,36.25,39.44,44.28,34.05,33.64,
28.78,23.52,23.87,25.30,27.02,36.64,30.52,32.42,32.09,36.44,41.43,44.36,59.08,57.26,
48.16,41.48,35.36,39.70,38.76)
INF<-
c(21.309,15.623,24.086,47.545,76.714,93.006,44.057,28.227,26.258,48.237,53.054,36.
007,88.091,65.213,74.493,63.201,61.385,63.931,69.447,103.016,89.413,68.546,86.105,
69.028,54.179,49.226,52.851,37.425,23.270,12.400,7.084,9.331,7.588)
CAB<-c(-2.557,-4.929,-5.945,-1.599,-1.526,-5.212,-2.695,-1.452,-3.042,-2.355,-1.501,-
1.922,-0.659,1.283,0.639,-1.235,0.116,-0.431,-2.507,1.429,-0.954,-0.978,-0.988,0.743,-
0.371,-3.712,1.918,-0.268,-2.467,-3.671,-4.573,-6.018,-5.748)
```

GROWTH<- c(7.174,10.461,3.407,1.503,-0.624,-
2.447,4.857,3.563,4.971,6.712,4.241,7.012,9.486,2.321,0.290,9.266,0.720,5.036,7.651,-
4.668,7.878,7.380,7.578,2.308,-3.365,6.774,-
5.697,6.164,5.265,9.363,8.402,6.893,4.621)

CAPITAL<-

c(18.707,20.321,20.667,15.143,14.504,18.164,17.869,16.953,16.285,16.180,16.513,18.
848,18.232,18.272,17.147,17.389,15.866,16.447,18.619,15.042,17.649,17.886,17.836,2
2.114,19.124,20.767,15.084,17.614,17.597,19.390,19.990,22.055,21.629)

DEBTSER<-

c(0.585,1.442,1.817,1.719,1.464,2.502,3.409,4.629,5.080,5.409,6.978,6.015,4.975,6.17
8,4.909,3.532,3.888,4.066,3.413,5.674,4.737,4.432,4.513,5.619,7.588,7.873,11.707,12.
088,9.453,8.512,8.569,7.742,7.520)

ENERGY<-

c(26803.000,29171.000,31988.000,31862.000,30303.000,31485.000,31756.000,33747.
000,35729.000,37179.000,39375.000,42439.000,46994.000,47448.000,49217.000,5293
6.000,52322.000,53945.000,57209.000,56457.000,61808.000,67262.000,70927.000,72
178.000,70869.000,76869.000,70920.000,75110.000,78733.000,81828.000,85464.000,
93999.000,102816.000)

TELEPHONE<-

c(1.700,1.882,2.039,2.316,2.511,2.580,2.858,3.217,3.495,3.955,4.470,5.404,7.032,9.14
1,10.676,12.219,14.236,16.121,18.382,20.148,21.263,22.723,24.336,25.795,27.019,27.
284,27.586,27.131,26.752,26.880,26.335,25.807,24.634)

TIME<- c(-16,-15,-14,-13,-12,-11,-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-
1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16)

logFDI<-log(FDI)

logPOP<-log(POP)

logFT<-log(FT)

logELEC<-log(ELEC)

logENERGY<-log(ENERGY)

logDEBTSER<-log(DEBTSER)

logEXDEBT<-log(EXDEBT)

logINF<-log(INF)

logTELEPHONE<-log(TELEPHONE)


```

# linear model 1
md3<-lm(logFDI~logPOP+GROWTH+TIME)
summary(md3)
plot(md3)
deviance(md3)
AIC(md3)
# GAM model 2
md1<-gam(logFDI~s(logPOP)+s(GROWTH)+TIME)
summary(md1)
AIC(md1)
deviance(md1)
plot(md1)
# linear model 3
mod7<-lm(logFDI~logPOP+logELEC+logDEBTSER+logEXDEBT+logTELEPHONE
+TIME)
summary(mod7)
AIC(mod7)
deviance(mod7)
plot(mod7)
# GAM model 4
mod17<-gam(logFDI~s(logPOP)+logELEC+logDEBTSER+logEXDEBT+
s(GROWTH)+TIME)
summary(mod17)
AIC(mod17)
deviance(mod17)
plot(mod17)
# P-spline model 2
spl2 <- gam(logFDI ~ TIME + s(logPOP,bs = 'ps', m = 2) + s(GROWTH,bs = 'ps', m =
2))
summary(spl2)
AIC(spl2)
deviance(spl2)
plot(spl2)

```

```
# P-spline model 4
spl4 <- gam(logFDI ~s(logPOP,bs = 'ps', m = 4) + logELEC + logDEBTSER +
logEXDEBT + s(GROWTH,bs = 'ps', m = 4) + TIME)
summary(spl4)
AIC(spl4)
deviance(spl4)
plot(spl4)
# Thin-plate spline model 2
tpl2 <- gam(logFDI ~ TIME + s(logPOP,bs = 'tp') + s(GROWTH,bs = 'tp'))
summary(tpl2)
AIC(tpl2)
deviance(tpl2)
plot(tpl2)
# Thin-plate spline model 4
tpl4 <- gam(logFDI ~s(logPOP,bs = 'tp') + logELEC + logDEBTSER + logEXDEBT +
s(GROWTH,bs = 'tp') + TIME)
summary(tpl4)
AIC(tpl4)
deviance(tpl4)
plot(tpl4)
```

Ek-5. Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon uygulamaları için yazdığı programları
MinMaxEnt fonksiyonu

```
gen_maxent<-function(veri,frk,komb){
library(minxent)
g1<-function(x) x
g2<-function(x) x^2
g3<-function(x) log(x)
g4<-function(x) log(x)^2
g5<-function(x) log(1+x^2)
funct<-c('x','x^2','log(x)','log(x)^2','log(1+x^2)')
sutun<-6
satr<-length(veri)
olasilik1=frk/sum(frk)
olasilik=c(rep(1/satr,satr))
G<-matrix(c(rep(1,satr),g1(veri),g2(veri),g3(veri),g4(veri),g5(veri)),
byrow=TRUE,ncol=satr,nrow=6)
# Calculation full moment constraints
moment<-array(0,c(1,sutun))
moment[1]=1
moment<-c(1,sum(g1(veri)*olasilik1),sum(g2(veri)*olasilik1),sum(g3(veri)*olasilik1),
sum(g4(veri)*olasilik1),sum(g5(veri)*olasilik1))
#Creating combination
kombinasyon=komb
combos=combn(1:(sutun-1),kombinasyon)
combos_t=t(combos)
maxent<-array(0,dim=c(nrow(combos_t)))
estim<-array(dim=c(length(combos_t),length(veri)))
# Calculating loop with combinationa
for(comb_s in 1:nrow(combos_t)){
g_new<-matrix(c(rep(1,satr)))
eta_new<-c()
eta_new[1]<-1
```

```

zer<-c(rep(0,kombinasyon))
for(comb_satr in 1:ncol(combos_t)){
#creating new submatrix
g_new<-cbind(g_new,G[combos_t[comb_s,comb_satr]+1,])
#creating new moments
eta_new<-append(eta_new,moment[combos_t[comb_s,comb_satr]+1])
}
est<-minxent.multiple(q=olasilik,G=t(g_new),eta=eta_new,zer)
for (i in 1:satr){
maxent[comb_s]=maxent[comb_s]-est$Estimates[i]*log2(est$Estimates[i])
estim[comb_s,i]<-est$Estimates[i]
}
}
k_min=which.min(maxent)
k_max=which.max(maxent)
T2_min<-'MinMaxEnt moment function is '
T2_max<-'MaxMaxEnt moment function is '
for (m in 1:ncol(combos_t)){
T2_min<-paste(T2_min,funct[combos_t[k_min,m]])
T2_max<-paste(T2_max,funct[combos_t[k_max,m]])
}
best_min<-maxent[k_min]
best_max<-maxent[k_max]
res<-list(T2_min,estim[k_min,],best_min,T2_max,estim[k_max,],best_max)
return(res)

```

MaxMinxEnt fonksiyonu

```

gen_minxent<-function(veri,frk,p,komb){
library(minxent)
g1<-function(x) x
g2<-function(x) x^2
g3<-function(x) log(x)

```

```

g4<-function(x) log(x)^2
g5<-function(x) log(1+x^2)
funct<-c('x','x^2','log(x)','log(x)^2','log(1+x^2)')
sutun<-6
satr<-length(veri)
olasilik1=frk/sum(frk)
olasilik=p
G<-matrix(c(rep(1,satr),g1(veri),g2(veri),g3(veri),g4(veri),g5(veri)),byrow=TRUE,
ncol=satr,nrow=6)
# Calculation full moment constraints
moment<-array(0,c(1,sutun))
moment[1]=1
moment<-c(1,sum(g1(veri)*olasilik1),sum(g2(veri)*olasilik1),sum(g3(veri)*olasilik1),
sum(g4(veri)*olasilik1),sum(g5(veri)*olasilik1))
#Creating combination
kombinasyon=komb
combos=combn(1:(sutun-1),kombinasyon)
combos_t=t(combos)
minxent<-array(0,dim=c(nrow(combos_t)))
estim<-array(dim=c(length(combos_t),length(veri)))
# Calculating loop with combinationa
for(comb_s in 1:nrow(combos_t)){
g_new<-matrix(c(rep(1,satr)))
eta_new<-c()
eta_new[1]<-1
zer<-c(rep(0,kombinasyon))
for(comb_satr in 1:ncol(combos_t)){
#creating new submatrix
g_new<-cbind(g_new,G[combos_t[comb_s,comb_satr]+1,])
#creating new moments
eta_new<-append(eta_new,moment[combos_t[comb_s,comb_satr]+1])
}
est<-minxent.multiple(q=olasilik,G=t(g_new),eta=eta_new,zer)

```

```

for (i in 1:satr){
minxent[comb_s]=minxent[comb_s]-est$Estimates[i]*log2(est$Estimates[i])
estim[comb_s,i]<-est$Estimates[i]
}
}
k_min=which.min(minxent)
k_max=which.max(minxent)
T2_min<-'MinMinxEnt moment function is '
T2_max<-'MaxMinxEnt moment function is '
for (m in 1:ncol(combos_t)){
T2_min<-paste(T2_min,funct[combos_t[k_min,m]])
T2_max<-paste(T2_max,funct[combos_t[k_max,m]])
}
best_min<-minxent[k_min]
best_max<-minxent[k_max]
res<-list(T2_min,estim[k_min,],best_min,T2_max,estim[k_max,],best_max)
return(res)

```

Uygulama

```

setwd("D:/MY DOCS/Yeni tezim/turkce tez/R codes/5.4")
library(splines)
library(mgcv)
source('func_minminx.R')
results<-array(dim=c(13,3))
res_max<-array(dim=c(10,3))
#-----Analisis of Ventzel problem-----
dat<-read.table("dalga.txt",header=TRUE)
# Analisis with break=8
he<-hist(dat$m, xlab="meters", ylab='counts', border="blue", main = "Histogram of
wave counter", col="green", xlim=c(20,100),las=1,breaks = seq(20,100,by=10))
f<-(he$density*diff(he$breaks))
mids<-he$mids

```

```

counts<-he$counts
# Estimation with B-splines
bs3 <- lm(f ~ bs(mids, df = 6, degree = 3, intercept=T))
summary(bs3)
bs3$fitted.values
lines(he$mids,bs3$fitted.values*400,col="blue",lwd=2)
y_sh_bs<-bs3$fitted.values*400
results[1,1]<-cor(f,bs3$fitted.values)^2
results[1,2]<-sum((he$counts-y_sh_bs)^2/y_sh_bs)
results[1,3]<-sum((he$counts-y_sh_bs)^2)/length(mids)
chisq.test(f,p=bs3$fitted.values)
chisq.test(f,p=bs3$fitted.values,rescale.p = TRUE)
chisq.test(f,bs3$fitted.values)
# Estimation with smoothing cubic splines
gam_cr3<-gam(f~s(mids,bs="cr", k=7))
summary(gam_cr3)
gam_cr3$fitted.values
new<-data.frame(mids=he$mids)
z_cr3<-predict.gam(gam_cr3,newdata = new)
lines(he$mids,z_cr3*400,col="red",lwd=2)
y_sh_cr<-gam_cr3$fitted.values*400
results[2,1]<-cor(f,gam_cr3$fitted.values)^2
results[2,2]<-sum((he$counts-y_sh_cr)^2/y_sh_cr)
results[2,3]<-sum((he$counts-y_sh_cr)^2)/length(mids)

# Estimation with cubic p-splines
gam_ps3<-gam(f~s(mids,bs="ps", k=7,sp=0.0001))
lines(he$mids,gam_ps3$fitted.values*400,col="black",lwd=2)
y_sh_ps<-gam_ps3$fitted.values*400
results[3,1]<-cor(f,gam_ps3$fitted.values)^2
results[3,2]<-sum((he$counts-y_sh_ps)^2/y_sh_ps)
results[3,3]<-sum((he$counts-y_sh_ps)^2)/length(mids)
for(i in 4:13){

```

```

for(j in 1:3){
results[i,j]=0
}
}
# Estimation with MaxEnt, MinCent Entropy methods with one constraint
v_veri<- he$mids
v_frk<-he$counts
plot(v_veri,v_frk,'h')
pro<-array(0,dim=c(5,8))
pro[1,]=c(0.098849, 0.11326, 0.12234, 0.12817, 0.13188, 0.13415, 0.13541, 0.13594)
pro[2,]=c(0.07635, 0.12567, 0.1507, 0.15497, 0.14653, 0.13188, 0.11518, 0.098716)
pro[3,]=c(0.046858, 0.1906, 0.15377, 0.11762, 0.11751, 0.13581, 0.13996, 0.09788)
pro[4,]=c(0.05061, 0.19108, 0.14328, 0.11168, 0.12106, 0.14957, 0.14883, 0.083891)
pro[5,]=c(0.052376, 0.18154, 0.15827, 0.10919, 0.11186, 0.14866, 0.15816, 0.079954)
he<-hist(dat$m, xlab="meters", ylab='counts', border="blue", main = "Histogram of
wave counter", col="green", xlim=c(20,100),las=1,breaks = seq(20,100,by=10))
colo<-c("red", "blue", "brown", "darkblue", "black")
lines(v_veri,pro[3,]*400,col=colo[3],lwd=2)
for(kom in 1:5){
lines(v_veri,pro[kom,]*400,col=colo[i],lwd=2)
y_sh_minmax<-pro[kom,]*400
results[kom+3,1]<-cor(f,pro[kom,])^2
results[kom+3,2]<-sum((v_frk-y_sh_minmax)^2/y_sh_minmax)
results[kom+3,3]<-sum((v_frk-y_sh_minmax)^2)/length(mids)
}
# Sonuclarin karsilastirilmesi
he<-hist(dat$m, xlab="meters", ylab='counts', border="blue", main = "Histogram of
wave counter", col="green", xlim=c(20,100),las=1,breaks = seq(20,100,by=10))
lines(he$mids,bs3$fitted.values*400,col="blue",lwd=3)
lines(v_veri,pro[5,]*400,col=colo[3],lwd=2)

#----- Analisis of mice death rate-----
frk_mouse<-c(3,3,6,6,16,14,25,20,32,25,27,13,11,7)

```



```

veri_mouse<-c(0.5:13.5)
veri_mouse1<-seq(0,14,1)
myhist <-list(breaks=veri_mouse1, counts=frk_mouse, density=frk_mouse/diff
(veri_mouse1), xname="Mice death rate")
class(myhist) <- "histogram"
plot(myhist)
top_frk<-sum(frk_mouse)
f_mouse<-frk_mouse/sum(frk_mouse)
results_m<-array(0,dim=c(13,3))
# Estimation with B-splines
bs_m3 <- lm(f_mouse ~ bs(veri_mouse, degree = 3, intercept=T))
lines(veri_mouse,bs_m3$fitted.values*top_frk,col="blue",lwd=2)
y_sh_bsm<-bs_m3$fitted.values*top_frk
results_m[1,1]<-cor(f_mouse,bs_m3$fitted.values)^2
results_m[1,2]<-sum((frk_mouse-y_sh_bsm)^2/y_sh_bsm)
results_m[1,3]<-sum((frk_mouse-y_sh_bsm)^2)/length(veri_mouse)
# Estimation with smoothing cubic splines
gam_cr_m3<-gam(f_mouse~s(veri_mouse,bs="cr", sp=0.000001))
lines(veri_mouse,gam_cr_m3$fitted.values*top_frk,col="red",lwd=2)
y_sh_crm<-gam_cr_m3$fitted.values*top_frk
results_m[2,1]<-cor(f_mouse,gam_cr_m3$fitted.values)^2
results_m[2,2]<-sum((frk_mouse-y_sh_crm)^2/y_sh_crm)
results_m[2,3]<-sum((frk_mouse-y_sh_crm)^2)/length(veri_mouse)
# Estimation with cubic p-splines
gam_ps_m3<-gam(f_mouse~s(veri_mouse,bs="ps", k=12,sp=0.0001))
lines(veri_mouse,gam_ps_m3$fitted.values*top_frk,col="black",lwd=2)
y_sh_psm<-gam_ps_m3$fitted.values*top_frk
results_m[3,1]<-cor(f_mouse,gam_ps_m3$fitted.values)^2
results_m[3,2]<-sum((frk_mouse-y_sh_psm)^2/y_sh_psm)
results_m[3,3]<-sum((frk_mouse-y_sh_psm)^2)/length(veri_mouse)
spl_res<-as.matrix(cbind(f_mouse,bs_m3$fitted.values,gam_cr_m3$fitted.values,
gam_ps_m3$fitted.values))
#Estimation with MinMaxEnt

```

```

par(mfrow = c(1, 1))
plot(myhist)
lines(veri_mouse, gam_ps_m3$fitted*sum(frk_mouse),col="red",lwd=2)
lines(veri_mouse, zt_mouse[[5]]*sum(frk_mouse),col="blue",lwd=2)
par(mfrow = c(2, 3))
gen_maxent(veri_mouse,frk_mouse,1)
plot(myhist)
zt_mouse<-gen_maxent(veri_mouse,frk_mouse,5)
minmaxp<-0
minmaxp<-as.matrix(zt_mouse[[5]])
for(kom_min in 1:5){
plot(myhist)
zt_mouse<-gen_maxent(veri_mouse,frk_mouse,kom_min)
lines(veri_mouse,zt_mouse[[2]]*sum(frk_mouse),col="brown1",lwd=2)
lines(veri_mouse,zt_mouse[[5]]*sum(frk_mouse),col="springgreen2",lwd=2)
y_sh_minmax_m<-zt_mouse[[2]]*sum(frk_mouse)
sat_min<-kom_min+3
results_m[sat_min,1]<-cor(frk_mouse,y_sh_minmax_m)^2
results_m[sat_min,2]<-sum((frk_mouse-y_sh_minmax_m)^2/y_sh_minmax_m)
results_m[sat_min,3]<-sum((frk_mouse-y_sh_minmax_m)^2)/length(veri_mouse)
}
par(mfrow = c(1, 1))
#Estimation with MaxMaxEnt
par(mfrow = c(2, 3))
for(kom_max in 1:5){
plot(myhist)
zt_mouse<-gen_maxent(veri_mouse,frk_mouse,kom_max)
lines(veri_mouse,zt_mouse[[5]]*sum(frk_mouse),col="springgreen2",lwd=2)
y_sh_maxmax_m<-zt_mouse[[5]]*sum(frk_mouse)
sat_max<-kom_max+8
results_m[sat_max,1]<-cor(frk_mouse,y_sh_maxmax_m)^2
results_m[sat_max,2]<-sum((frk_mouse-y_sh_maxmax_m)^2/y_sh_maxmax_m)
results_m[sat_max,3]<-sum((frk_mouse-y_sh_maxmax_m)^2)/length(veri_mouse)
}

```