

**GENELLEŞTİRİLMİŞ WEIBULL DAĞILIMLARI
VE PARAMETRE TAHMİNİ**

Yüksek Lisans Tezi

Eda ÇELİK

Eskişehir, 2017

**GENELLEŞTİRİLMİŞ WEIBULL DAĞILIMLARI VE PARAMETRE
TAHMİNİ**

Eda ÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İlhan USTA

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Mayıs, 2017

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Eda ÇELİK'in "**Genelleştirilmiş Weibull Dağılımları ve Parametre Tahmini**" başlıklı tezi 25/05/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca, **İstatistik** Anabilim dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

	<u>Unvanı-Adı Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı) :	Doç. Dr. İlhan USTA
Üye :	Doç. Dr. Arzu ALTIN YAVUZ
Üye :	Yard. Doç. Dr. Çiğdem KALATHILPARMBİL

.....

Enstitü Müdürü

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ WEIBULL DAĞILIMLARI VE PARAMETRE TAHMİNİ

Eda ÇELİK

İstatistik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Mayıs, 2017

Danışman: Doç. Dr. İlhan USTA

Weibull dağılımı, güvenilirlik ve yaşam analizi uygulamalarında çok yaygın olarak kullanılan dağılımlardan biri olmasına rağmen monoton olmayan bozulma oranına sahip verilerin modellenmesinde kullanışlı değildir. Bu nedenle, literatürde son yıllarda Weibull dağılımının birçok genelleştirilmiş veya değiştirilmiş halleri önerilmiştir. Bu tez çalışmasında, Weibull dağılımı ve bu dağılımın değiştirilmesi veya genelleştirilmesiyle elde edilen Inverse Weibull, Log Weibull, Üstelleştirilmiş Weibull, Weibull Geometrik, Esnek Weibull, Odd Weibull, Marshall Olkin Extended Weibull ve Gamma Weibull dağılımlarının bazı istatistiksel özelliklerine değinilmiş ve parametre tahminleri yapılmıştır. Ele alınan dağılımların bilinmeyen parametrelerinin tahmini için en çok olabilirlik, en küçük kareler, ağırlıklı en küçük kareler ve var olmaları durumunda momentler tahmin edicileri kullanılmıştır. Ayrıca her dağılım için kullanılan parametre tahmin edicilerin performansı farklı örneklem büyüklükleri ve parametre değerleri için simülasyon çalışmasıyla değerlendirilmiş ve gerçek veriye dayalı iki farklı uygulama yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Weibull Dağılımları, Parametre tahmini, En çok olabilirlik yöntemi, En küçük kareler yöntemi, Ağırlıklandırılmış en küçük kareler yöntemi.

ABSTRACT

**GENERALIZED WEIBULL DISTRIBUTIONS AND PARAMETER
ESTIMATION**

Eda ÇELİK

Department of Statistics

Anadolu University, Graduate School of Sciences, May, 2017

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İlhan USTA

Although Weibull distribution is one of the most widely used distributions in reliability and survival analysis applications, it is not useful for modelling data that has non-monotonic hazard rates. For this reason, many modified and generalized forms of the Weibull distribution have been proposed in the literature in recent years. In this study, some statistical properties of Weibull distribution and Inverse Weibull, Log Weibull, Exponentiated Weibull, Weibull Geometric, Flexible Weibull, Odd Weibull, Marshall Olkin Extended Weibull and Gamma Weibull which are obtained by generalizing or modifying Weibull distribution has been mentioned and estimation of parameters has been obtained. For estimating unknown parameters of the considered distributions, maximum likelihood, least squares, weighted least squares and if it exists, moment estimators were used. In addition, performance of parameter estimators used for each distribution was evaluated by simulation studies for different sample sizes and parameter values and two different applications based on real data were performed.

Keywords: Generalized Weibull distributions, Parameter estimation, Maximum likelihood method, Least squares method, Weighted least squares method.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimin ve tezin hazırlanması sürecinde, tez konusunun belirlenmesinden, içeriğinin oluşturulmasına, başlangıcından bitimine kadar her aşamasında beni yönlendiren, yardımlarını ve desteğini esirgemeyen, sabır ve anlayış gösteren değerli hocam ve tez danışmanım Doç. Dr. İlhan USTA'ya,

Değerli katkı ve yönlendirmelerinden dolayı tez izleme jüri üyeleri, Doç. Dr. Arzu Altın YAVUZ'a ve Yard. Doç. Dr. Çiğdem KALATHILPARMBİL'e,

Beni yetiştiren aileme, kardeşime ve ablama, desteklerini yanımda hissettiğim arkadaşlarıma ve dostlarıma teşekkür ederim.

EDA ÇELİK

Mayıs 2017

..../..../2017

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

.....

(imza)

.....

(Adı-Soyadı)

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
TABLOLAR DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiv
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Kavramlar	5
1.1.1. Rassal değişken	5
1.1.1.1. Kesikli rassal değişken	5
1.1.1.2. Sürekli rassal değişken	5
1.1.2. Dağılım fonksiyonu	5
1.1.3. Olasılık (yoğunluk) fonksiyonu	6
1.1.4. Güvenilirlik (yaşam) fonksiyonu	6
1.1.5. Bozulma oranı (hazard) fonksiyonu	7
1.1.6. Beklenen değer	7
1.1.7. Merkezi moment	8
1.1.8. Moment çıkaran fonksiyon	8
1.1.9. Sıra istatistikleri	8
1.1.10. Seri açılımı	8
1.1.11. En çok olabilirlik yöntemi	9
1.1.12. En küçük kareler yöntemi	9
1.1.13. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler yöntemi	10
1.1.14. Momentler yöntemi	11
2. WEIBULL DAĞILIMI	12
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ WEIBULL DAĞILIMLARI	17
3.1. Inverse Weibull Dağılımı	17

3.1.1. En çok olabilirlik tahminçisi	20
3.1.2. En küçük kareler tahminçisi	21
3.1.3. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahminçisi	22
3.1.4. Momentler tahminçisi	22
3.2. Log Weibull Dağılımı	23
3.2.1. En çok olabilirlik tahminçisi	27
3.2.2. En küçük kareler tahminçisi	28
3.2.3. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahminçisi	28
3.2.4. Momentler tahminçisi	29
3.3. Esnek (Flexible) Weibull Dağılımı	30
3.3.1. En çok olabilirlik tahminçisi	33
3.3.2. En küçük kareler tahminçisi	33
3.3.3. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahminçisi	34
3.4. Üstelleştirilmiş (Exponentiated) Weibull Dağılımı	35
3.4.1. En çok olabilirlik tahminçisi	39
3.4.2. En küçük kareler tahminçisi	40
3.4.3. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahminçisi	41
3.5. Weibull Geometrik Dağılımı	42
3.5.1. En çok olabilirlik tahminçisi	46
3.5.2. En küçük kareler tahminçisi	47
3.5.3. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahminçisi	48
3.6. Odd Weibull Dağılımı	49
3.6.1. En çok olabilirlik tahminçisi	52
3.6.2. En küçük kareler tahminçisi	53
3.6.3. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahminçisi	54
3.7. Marshall Olkin Extended Weibull Dağılımı	55
3.7.1. En çok olabilirlik tahminçisi	59
3.7.2. En küçük kareler tahminçisi	60
3.7.3. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahminçisi	61
3.8. Gamma Weibull Dağılımı	62
3.8.1. En çok olabilirlik tahminçisi	66
3.8.2. En küçük kareler tahminçisi	66
3.8.3. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahminçisi	67

3.8.4. Momentler tahmincisi	68
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ WEIBULL DAĞILIMLARININ PARAMETRE TAHMİNCİLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ	70
4.1. Simülasyon Düzeni	70
4.2. Simülasyon Sonuçları	71
4.2.1. Inverse Weibull dağılımı için simülasyon sonuçları	71
4.2.2. Log Weibull dağılımı için simülasyon sonuçları	76
4.2.3. Esnek Weibull dağılımı için simülasyon sonuçları	80
4.2.4. Üstelleştirilmiş Weibull dağılımı için simülasyon sonuçları	84
4.2.5. Weibull Geometrik dağılımı için simülasyon sonuçları	88
4.2.6. Odd Weibull dağılımı için simülasyon sonuçları	92
4.2.7. Marshall Olkin Extended Weibull dağılımı için simülasyon sonuçları	97
4.2.8. Gamma Weibull dağılımı için simülasyon sonuçları	101
5. UYGULAMA	107
5.1. Akaike Kriteri	107
5.2. Kolmogorov-Smirnov Testi	107
5.3. Ki-kare Testi	108
5.4. Belirlilik Katsayısı (R^2)	108
5.5. Aarset Verisi İçin Uygulama	108
5.6. Rüzgar Verisi İçin Uygulama	112
6. SONUÇ ve ÖNERİLER	116
KAYNAKÇA	119
ÖZGEÇMİŞ	124

TABLULAR DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Tablo 4.1. $\alpha = 1, \beta = 0,5$ için IWD'nin simülasyon sonuçları	72
Tablo 4.2. $\alpha = 1, \beta = 1,5$ için IWD'nin simülasyon sonuçları	73
Tablo 4.3. $\alpha = 1, \beta = 2,5$ için IWD'nin simülasyon sonuçları	74
Tablo 4.4. $\alpha = 2, \beta = 2,5$ için IWD'nin simülasyon sonuçları	75
Tablo 4.5. $\vartheta = 1, \beta = 2$ için LogWD'nin simülasyon sonuçları	76
Tablo 4.6. $\vartheta = -2, \beta = 3$ için LogWD'nin simülasyon sonuçları	77
Tablo 4.7. $\vartheta = -1, \beta = 4$ için LogWD'nin simülasyon sonuçları	78
Tablo 4.8. $\vartheta = 5, \beta = 4$ için LogWD'nin simülasyon sonuçları	79
Tablo 4.9. $\alpha = 0,5, \beta = 0,5$ için FWD'nin simülasyon sonuçları	80
Tablo 4.10. $\alpha = 1, \beta = 0,3$ için FWD'nin simülasyon sonuçları	81
Tablo 4.11. $\alpha = 0,5, \beta = 1$ için FWD'nin simülasyon sonuçları	82
Tablo 4.12. $\alpha = 1, \beta = 2$ için FWD'nin simülasyon sonuçları	83
Tablo 4.13. $\alpha = 1, \beta = 0,8, v = 2$ için EWD'nin simülasyon sonuçları	84
Tablo 4.14. $\alpha = 1, \beta = 1,5, v = 2,5$ için EWD'nin simülasyon sonuçları	85
Tablo 4.15. $\alpha = 1, \beta = 0,7, v = 0,8$ için EWD'nin simülasyon sonuçları	86
Tablo 4.16. $\alpha = 1, \beta = 1,2, v = 0,9$ için EWD'nin simülasyon sonuçları	87
Tablo 4.17. $\alpha = 1, \beta = 0,8, p = 0,3$ için WGD'nin simülasyon sonuçları	88
Tablo 4.18. $\alpha = 1, \beta = 1,5, p = 0,5$ için WGD'nin simülasyon sonuçları	89
Tablo 4.19. $\alpha = 1, \beta = 2, p = 0,9$ için WGD'nin simülasyon sonuçları	90

Tablo 4.20. $\alpha = 1, \beta = 4, p = 0,4$ için WGD'nin simülasyon sonuçları	91
Tablo 4.21. $\alpha = 1, \beta = 1,5, \theta = 1,3$ için OddWD'nin simülasyon sonuçları	93
Tablo 4.22. $\alpha = 1, \beta = 1,3, \theta = 0,7$ için OddWD'nin simülasyon sonuçları	94
Tablo 4.23. $\alpha = 1, \beta = 0,8, \theta = 0,5$ için OddWD'nin simülasyon sonuçları	95
Tablo 4.24. $\alpha = 1, \beta = -2, \theta = -2$ için OddWD'nin simülasyon sonuçları	96
Tablo 4.25. $\alpha = 1, \beta = 1, \lambda = 0,7$ için MOEWD'nin simülasyon sonuçları	97
Tablo 4.26. $\alpha = 1, \beta = 1,5, \lambda = 0,7$ için MOEWD'nin simülasyon sonuçları	98
Tablo 4.27. $\alpha = 1, \beta = 2,5, \lambda = 4$ için MOEWD'nin simülasyon sonuçları	99
Tablo 4.28. $\alpha = 1, \beta = 0,7, \lambda = 4$ için MOEWD'nin simülasyon sonuçları	100
Tablo 4.29. $\alpha = 1, \beta = 1,7, c = 0,5$ için GammaWD'nin simülasyon sonuçları ...	102
Tablo 4.30. $\alpha = 1, \beta = 2,5, c = 0,8$ için GammaWD'nin simülasyon sonuçları .	103
Tablo 4.31. $\alpha = 1, \beta = 0,9, c = 4$ için GammaWD'nin simülasyon sonuçları ...	104
Tablo 5.1. Aarset verisinin tanımlayıcı istatistikleri	108
Tablo 5.2. Aarset verisi için IWD, LogWD, FWD, EWD, WGD, OddWD, MOEWD ve GammaWD'nin parametre tahminleri	109
Tablo 5.3. Aarset verisi için model seçim kriterlerinin uygulama sonuçları	110
Tablo 5.4. Rüzgar verisinin tanımlayıcı istatistikleri	112
Tablo 5.5. Rüzgar verisi için IWD, LogWD, FWD, EWD, WGD, OddWD, MOEWD ve GammaWD'nin parametre tahminleri	112
Tablo 5.6. Rüzgar verisi için model seçim kriterlerinin uygulama sonuçları	113

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1. $\alpha = 2$ olduğunda β 'nin farklı değerleri için WD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği	13
Şekil 2.2. $\alpha = 2$ olduğunda β 'nin farklı değerleri için WD'nin hazard fonksiyonunun grafiği	13
Şekil 3.1. α ve β 'nin farklı değerleri için IWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği	19
Şekil 3.2. α ve β 'nin farklı değerleri için IWD'nin hazard fonksiyonunun grafiği	19
Şekil 3.3. $\vartheta = 0,5$ olduğunda b 'nin farklı değerleri için LogWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği	25
Şekil 3.4. $\vartheta = 2$ olduğunda b 'nin farklı değerleri için LogWD'nin hazard fonksiyonunun grafiği	25
Şekil 3.5. α ve β 'nin farklı değerleri için FWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği	32
Şekil 3.6. $\beta = 9/8$ olduğunda α 'nın farklı değerleri için FWD'nin hazard fonksiyonunun grafiği	32
Şekil 3.7. α, β, v 'nin farklı değerleri için EWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği	37
Şekil 3.8. α, β, v 'nin farklı değerleri için EWD'nin hazard fonksiyonunun grafiği	37
Şekil 3.9. $\alpha = 0,9, \beta = 2$ olduğunda p 'nin farklı değerleri için WGD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği	44
Şekil 3.10. $\alpha = 0,9, \beta = 2$ olduğunda p 'nin farklı değerleri için WGD'nin hazard fonksiyonunun grafiği	44
Şekil 3.11. α, β, θ 'nin farklı değerleri için OddWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği	51
Şekil 3.12. α, β, θ 'nin farklı değerleri için OddWD'nin hazard fonksiyonunun grafiği	51
Şekil 3.13. $\alpha = 1, \beta = 2,5$ olduğunda λ 'nin farklı değerleri için MOEWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği	57

Şekil 3.14. $\alpha = 1, \beta = 2$ olduğunda λ 'nın farklı değerleri için MOEWD'nin hazard fonksiyonunun grafiği	58
Şekil 3.15. $\alpha = 1$ olduğunda β ve c 'nin farklı değerleri için GammaWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği	64
Şekil 3.16. $\alpha = 1$ olduğunda β ve c 'nin farklı değerleri için GammaWD'nin hazard fonksiyonunun grafiği	65
Şekil 5.1. Aarset verisi için göreceli frekansların histogramı ve OddWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği	111
Şekil 5.2. Aarset verisi için ampirik dağılım fonksiyonu ve buna uygun OddWD'nin teorik dağılım fonksiyonunun grafiği	111
Şekil 5.3. Rüzgar verisi için göreceli frekansların histogramı ve GammaWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği	114
Şekil 5.4. Rüzgar verisi için göreceli frekansların histogramı ve OddWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği	114
Şekil 5.5. Rüzgar verisi için ampirik dağılım fonksiyonu ve buna uygun GammaWD'nin teorik dağılım fonksiyonunun grafiği	115
Şekil 5.6. Rüzgar verisi için ampirik dağılım fonksiyonu ve buna uygun OddWD'nin teorik dağılım fonksiyonunun grafiği	115

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Ψ	: Digamma Fonksiyonu
η	: Euler Sabiti
Γ	: Gamma Fonksiyonu
U	: Uniform Dağılım
γ	: Tamamlanmamış Gamma Fonksiyonu
AIC	: Akaike Kriteri
EWD	: Üstelleştirilmiş Weibull Dağılımı
FWD	: Esnek Weibull Dağılımı
GammaWD	: Gamma Weibull Dağılımı
IWD	: Inverse Weibull Dağılımı
LogWD	: Log Weibull Dağılımı
LSE	: En Küçük Kareler Tahmincisi
MCMC	: Markov Chain Monte Carlo
ME	: Momentler Tahmincisi
MLE	: En Çok Olabilirlik Tahmincisi
MOEWD	: Marshall Olkin Extended Weibull Dağılımı
OddWD	: Odd Weibull Dağılımı
WGD	: Weibull Geometrik Dağılımı
WLSE	: Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Tahmincisi

1. GİRİŞ

Weibull dağılımı, adını İsveçli fizikçi Waloddi Weibull'dan almaktadır. Weibull, dağılımı ilk olarak 1939 yılında malzemelerin bozulma sürelerinin dağılımını modellemek için kullanmıştır. 1951 yılında ise farklı disiplinlerdeki veri setleri için modellemiş ve bu farklı disiplinlerdeki uygulamalar açısından modelin çok yönlülüğünü göstermiştir.

Benzer bir model 1933 yılında Rosen ve Rammler tarafından moleküller ile ilgili bir çalışmada kullanılmıştır. Weibull dağılımıyla ilgili en eski yayın, Fisher ve Trippet tarafından 1928'de yayınlanmıştır. Bu çalışmada Weibull dağılımı, bir örneklemden elde edilmiştir. Gumbel ise 1958 yılında Weibull dağılımından en küçük uç değerlerin üçüncü asimptotik dağılımı olarak bahsetmiştir. Dağılımı öneren ilk kişi Weibull olmamasına rağmen, geniş bir uygulamaya sahip yararlı ve çok yönlü bir model olarak tanıtımına en çok katkıda bulunan kişidir (Murthy vd., 2004, s. 10).

Normal, Üstel, Kikare χ^2 , t , F dağılımlarıyla birlikte hiç şüphesiz Weibull dağılımı modern istatistikteki en popüler dağılımdır. Yaşam verilerinden, hava durumu verilerine ya da ekonomi ve iş dünyası, hidroloji, biyoloji veya mühendislik bilimlerindeki gözlemlere kadar çok çeşitli alanlardaki verileri modellemeye olan yeteneğiyle uygulamaya yönelik istatistikçilerin ve çok sayıda özelliklerinden dolayı teoriye yönelik istatistikçilerin ilgisini çekmektedir (Rinne, 2008, s. 3).

İstatistiksel olarak Weibull dağılımı; artan, azalan ve sabit bozulma oranlarına sahip verileri temsil eden dağılımları içermektedir. Güvenilirlik çalışmalarında oldukça popüler olan Weibull dağılımı, monoton bozulma oranına sahip çeşitli sistemleri modellemede önemli bir yere sahip olduğunu kanıtlamıştır. Fakat Weibull dağılımı, güvenilirlik veya yaşam analizi çalışmalarında yaygın olarak karşılaşılan tek modlu (unimodal) veya banyo küveti eğrisi (bathtub-shaped) şeklindeki bozulma oranları gibi monoton olmayan bozulma oranlarına (hazard fonksiyonuna) sahip verileri modellemede mantıklı bir parametrik uyum sağlamaz (Cordeiro ve Lemonte, 2013, s. 334). Bu durum, araştırmacıları bu dağılımın bazı geliştirmelerini kullanarak çoğunlukla monoton olmayan bozulma oranı sergileyen verileri modellemek için uygun bir model tanıtmaya yönlendirmiştir (Nassar ve Eissa, 2003, s. 1318).

Son yirmi yılda, ya Weibull dağılımından türetilmiş ya da bir şekilde ilişkili birçok yeni model önerilmiştir. Bu modeller karmaşık veri setlerini modellemeyi uygun hale getiren bir zenginlik sunmaktadır. Literatürde genelleştirilmiş veya değiştirilmiş Weibull modelleri birçok dergide çok geniş, bağlantısız ve dağınık haldedir. Örneğin, Weibull dağılımının log dönüşümüyle elde edilen log-Weibull modelini Gumbel (1958), lineer dönüşümüyle elde edilen reflected (yansıtılmış) Weibull dağılımını Cohen (1973) önermiştir. Genelleştirilmiş gamma dağılımı olarak bilinen Stacy's Weibull dağılımını Stacy (1962) tanımlamıştır. Reel sayılarda tanımlı double (çift) Weibull dağılımını Balakrishnan ve Kocherlakota (1985) tanıtmıştır. Kies (1958), dört parametrelili Weibull dağılımı önermiş ve Phani (1987) bu dağılımın beş parametrelili Weibull dağılımı olarak bir genişlemesini önermiştir.

Weibull dağılımına yeni bir şekil parametresi ekleyerek elde edilen ve tek modlu (unimodal) veya banyo küveti eğrisi (bathtub-shaped) şeklindeki hazard (bozulma oranı) fonksiyonuna sahip olan üstelleştirilmiş (exponentiated) Weibull dağılımını Mudholkar ve Srivastava (1993), bu dağılımının hazard fonksiyonuyla benzer özellikleri gösteren başka bir genelleştirilmiş Weibull modelini Mudholkar vd., (1996), yine üç parametrelili bir model olan genişletilmiş (extended) Weibull dağılımını Marshall ve Olkin (1997) tanıtmıştır. Xie vd., (2002) banyo küveti eğrisi şeklindeki hazard fonksiyonuna sahip üç parametrelili Weibull genişlemesini, Lai vd., (2003) değiştirilmiş (modified) Weibull dağılımını, Barreto-Souza vd., (2011) Weibull geometrik dağılımını önermiştir. Hazard fonksiyonu artan, azalan ve küvet eğrisi şekillerine sahip olan iki parametrelili esnek (flex) Weibull açılımını Bebbington vd., (2007) tanımlamıştır.

Biri artan diğeri azalan hazard fonksiyonuna sahip iki Weibull dağılımının birleştirilmesiyle elde edilen dört parametrelili bir dağılım olan toplamsal (additive) Weibull dağılımını Xie ve Lai (1996), üstel ve Weibull dağılımlarının birleştirilmesiyle elde edilen üç parametrelili değiştirilmiş Weibull dağılımını Sarhan ve Zaindin (2009), beta dağılımından yararlanılarak elde edilen dört parametrelili Beta-Weibull dağılımını Famoye vd., (2005), Hougaard (1986)'nın kararlı dağılımından yararlanılarak Weibull dağılımının dört parametrelili genelleştirilmiş bir modeli Jeong (2006), Kumaraswamy dağılımına bağlı olarak elde edilen dört parametrelili Kumaraswamy Weibull dağılımını Cordeiro vd., (2010) sunmuştur. Ayrıca genelleştirilmiş birçok Weibull dağılımını özel parametre değerleriyle kapsayan dört parametrelili genelleştirilmiş modified Weibull dağılımını Carrasco vd., (2008), beş parametrelili Beta genelleştirilmiş Weibull dağılımını Singla vd.,

(2012) ve yine beş parametrelili yeni bir değiştirilmiş Weibull dağılımını Almalki ve Yuan (2013) tanıtmiştır. Bu dağılımların hazard fonksiyonu artan, azalan, sabit, tek modlu veya kúvet eğrisi şekillerine sahiptir.

Son zamanlarda genelleştirilmiş Weibull dağılımlarını bir araya toplayıp inceleyen çeşitli kitap veya makaleler yayınlanmaya başlamıştır. Örneğin, Murthy vd., (2004) çeşitli genelleştirilmiş Weibull modellerini sınıflayan, özelliklerini, grafiklerini ve model seçimini içeren bir kitap yayınlamıştır. Rinne (2008) Weibull ve onun bazı genelleştirmiş dağılımlarını inceleyen bir kitap sunmuştur. Pham ve Lai (2007), son yıllarda çalışılmış Weibull dağılımının bazı genelleştirmelerini içeren bir derleme çalışması yapmıştır. Benzer bir çalışma Lai vd., (2011) tarafından yapılmıştır. Weibull dağılımının genelleştirilmiş veya değiştirilmiş bazı kesikli ve sürekli versiyonlarının geniş bir derlemesi Almalki ve Nadarajah (2014) tarafından sunulmuştur. Lai (2014) genelleştirilmiş Weibull dağılımlarıyla ilgili çok kapsamlı ve referans kaynak niteliğinde bir kitabı yayınlamıştır.

Weibull ve onun genelleştirilmiş dağılımları çok geniş uygulama alanına sahip olduğu için dağılımının parametrelerinin tahmini de üzerinde çalışılan ilgi çekici bir problemdir ve bu problemin çözümlü için birçok farklı yöntem kullanılmaktadır. Bu yöntemler, grafiksel ve istatistiksel olmak üzere iki gruba ayrılmaktadır. Grafiksel yöntemlere örnek olarak, Weibull probability plot ve hazard rate plot verilebilir. Bu yöntemler hızlı olmasına rağmen, etkin sonuçlar vermemektedir. İstatistiksel yöntemler ise momentler, en çok olabilirlik, en küçük kareler ve yüzdellikler yöntemlerini içerir ve grafiksel yöntemlerle karşılaştırıldığında daha güvenilir ve etkindir.

Genelleştirilmiş veya değiştirilmiş Weibull dağılımının parametre tahminiyle ilgili yapılan bazı çalışmalar řu şekildedir. Calabria ve Pulcini (1990) inverse (ters) Weibull dağılımı için en çok olabilirlik ve en küçük kareler yöntemini, Mudholkar ve Hutson (1996), genelleştirilmiş Weibull dağılımı için en çok olabilirlik yöntemini, Bebbington vd., (2007), esnek Weibull dağılımı için grafik ve en çok olabilirlik yöntemini, Sarhan ve Zaindin (2009), değiştirilmiş Weibull dağılımı için en çok olabilirlik yöntemini kullanarak parametrelerin tahminlerini elde etmişlerdir. Barreto-Souza vd., (2010), Weibull geometrik dağılımının en çok olabilirlik tahmincilerini EM algoritması kullanarak elde etmişlerdir. Nadarajah vd., (2011) ise, Beta modified Weibull dağılımının en çok olabilirlik ve momentler tahmincilerini elde edip karşılaştırmıştır. Cordeiro ve Lemonte (2013), Marshall Olkin extended Weibull dağılımının parametrelerinin

tahmininde en çok olabilirlik yöntemini kullanmıştır. Usta ve Celik (2015) ise, Marshall Olkin extended Weibull dağılımının parametrelerini en çok olabilirlik, en küçük kareler ve ağırlıklı en küçük kareler yöntemlerini kullanarak tahmin etmiş ve karşılaştırmıştır.

Cordeiro vd., (2010), Kumaraswamy Weibull dağılımının parametrelerinin tahminini tam ve sansürlü veriler için en çok olabilirlik yöntemini kullanarak elde etmiştir. Mahmoud ve Mandouh (2012), sansürlü veriler için Beta Weibull dağılımının en çok olabilirlik tahmincilerini, Kumaraswamy modified Weibull dağılımının en çok olabilirlik tahmincilerini Cordeiro vd., (2012) ele almışlardır. Jiang vd., (2010) ilerleyen 2. tip sansürlü örneklem için en çok olabilirlik yöntemini kullanarak modified Weibull dağılımının parametrelerini tahmin etmiştir. Soliman vd., (2012) ise, yine ilerleyen 2. tip sansürlü örneklem için Markov Chain Monte Carlo (MCMC) yöntemini kullanarak modified Weibull dağılımının Bayes tahmincilerini elde edip en çok olabilirlik tahmincileriyle karşılaştırmıştır.

Bu tez çalışması, literatürde yaygın olarak kullanılan genelleştirilmiş veya değiştirilmiş Weibull dağılımlarının parametre tahminlerini toplu bir şekilde veren ilk çalışma olması bakımından önem taşımaktadır. Ayrıca bu dağılımların parametre tahminlerinde en küçük kareler ve ağırlıklandırılmış en küçük kareler yöntemlerinin ilk defa kullanılması bakımından önemlidir.

Bu çalışma genelleştirilmiş veya değiştirilmiş bazı Weibull dağılımlarını, bu dağılımların istatistiksel özelliklerini ve parametrelerinin tahminini kapsamaktadır. Tezin bölümleri aşağıdaki gibi düzenlenmiştir.

İlk bölümünde Weibull dağılımının tarihçesine, literatürde daha önce önerilmiş ve yayınlanmış genelleştirilmiş Weibull dağılımlarına ve bu tezde kullanılacak olan bazı temel kavramlara yer verilmiştir. İkinci bölümde Standart Weibull dağılımının bazı istatistiksel özellikleri ele alınmış, farklı parametrisasyonlarına değinilmiş ve üç parametrelili Weibull dağılımıyla ilgili bilgi verilmiştir. Üçüncü bölümde Weibull dağılımının genelleştirme yöntemlerinden bahsedilmiş ve bu doğrultuda genelleştirilmiş veya değiştirilmiş Weibull dağılımlarının (Inverse Weibull, Log Weibull, Flexible Weibull, Üstelleştirilmiş Weibull, Weibull Geometrik, Odd Weibull, Marshall Olkin Extended Weibull ve Gamma Weibull) istatistiksel özellikleri incelenmiş ve parametre tahmincileri elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ele alınan dağılımların parametre tahmin yöntemlerinin performansları farklı örneklem büyüklükleri ve parametre değerleri açısından simülasyon çalışmasıyla karşılaştırılmış ve elde edilen sonuçlar

yorumlanmıştır. Beşinci bölümde gerçek veriye dayalı iki farklı uygulama yapılmıştır. Bu uygulamalardan elde edilen sonuçlar doğrultusunda en uygun modele karar verilmiştir.

1.1. Temel Kavramlar

1.1.1. Rassal değişken

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere,

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \rightarrow X(w)$$

şeklinde tanımlanan X fonksiyonu,

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ için } \{w: X(w) \leq a\} \in U \quad (1.1)$$

özelliğini sağlıyorsa, X fonksiyonuna bir rassal değişken denir. Bir X rassal değişkeninin aldığı değerlerin kümesi \mathbb{R} 'nin alt kümesidir ve D_x ile gösterilir. (Akdi, 2011, s. 37).

1.1.1.1. Kesikli rassal değişken

Eğer Ω , sonlu veya sayılabilir sonsuz olaylardan oluşmuş ise ve X rassal değişkeni Ω 'yı \mathbb{R} 'ye götürmekle, sonlu veya sayılabilir sonsuz sayıda değerlere sahip ise, bu tür rassal değişkene kesikli rassal değişken denir (Şamilov, 2007, s.76).

1.1.1.2. Sürekli rassal değişken

X rassal değişkeni, bir aralıkta veya birden çok aralıkta her değeri alabiliyorsa X 'e sürekli rassal değişken denir (Akdeniz, 1976, s. 122).

1.1.2. Dağılım fonksiyonu

Bir dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu, X rassal değişkeninin aldığı herhangi bir x değerinden küçük ya da x değerine eşit olması olasılığıdır. Diğer bir ifade ile (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere,

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow F(x) = P(\{w: X(w) \leq x\}) \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanan $F(x)$ fonksiyonuna X rassal değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu denir. (Caselle ve Berger, 2002, s. 29; Günel, 2009, s. 6).

1.1.3. Olasılık (yoğunluk) fonksiyonu

Değer kümesi D_x olan kesikli bir X rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x), & x \in D_x \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (1.3)$$

olarak tanımlanır. Bir X rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu $f(x)$ aşağıdaki koşulları sağlar.

- $f(x) \geq 0$, her $t \in \mathbb{R}$
 - $\sum_{x \in D_x} P(X = x) = 1$
- (1.4)

Sürekli bir X rassal değişkeninin değer kümesi D_x ve dağılım fonksiyonu $F(x)$ olsun. X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{dF(x)}{dx}, & F\text{'in diferansiyellenebildiği yerlerde} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (1.5)$$

olarak tanımlanır. X rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu $f(x)$ aşağıdaki koşulları sağlar (Akdi, 2011, s. 49).

- $f(x) \geq 0$, her $x \in \mathbb{R}$
 - $\int_{x \in D_x} f(x) dx = 1$
- (1.6)

1.1.4. Güvenilirlik (yaşam) fonksiyonu

Bir bileşenin t zamanına kadar hayatta kalma olasılığını gösterir ve aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\bar{F}(t) = P(T \geq t) = \int_t^{\infty} f(x) dx, \quad t > 0 \quad (1.7)$$

Aynı zamanda bu fonksiyon

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(x) dx \quad (1.8)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bu fonksiyon aynı zamanda hayatta kalım (survivor) fonksiyonu olarak da adlandırılmaktadır (Ünlü, 2013, s. 4).

1.1.5. Bozulma oranı (hazard) fonksiyonu

Bozulma oranı fonksiyonu $h(t)$, bir bireyin t zamanına kadar yaşadığı biliniyorken $t + \Delta t$ zamanına kadar yaşamının sona ermesi riskidir. Bozulma oranı fonksiyonu, hazard fonksiyonu (hazard function) veya ölümlülük gücü (force of mortality) olarak da adlandırılır ve

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \frac{\Delta t}{T} \geq t)}{\Delta t} \quad (1.9)$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \quad (1.10)$$

şeklinde ifade edilir (Lawless, 2003, s. 9).

1.1.6. Beklenen değer

X rassal değişkeninin olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olmak üzere, $g(X)$ rassal değişkeninin beklenen değeri $E(|g(X)|) < \infty$ ise,

kesikli durum için

$$E(g(X)) = \sum_x g(x_i) P(X = x_i) = \sum_x g(x)f(x) \quad (1.11)$$

ve sürekli durum için

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \quad (1.12)$$

olarak tanımlanır (Caselle ve Berger, 2002, s. 55).

1.1.7. Merkezi moment

Bir rassal değişken, ortalamasından sapmalar açısından gözlemlendiğinde, ortalamayla ilgili momentleri veya merkezi momentleri verir. İlk merkezi moment sıfır, ikinci merkezi moment varyanstır. Üçüncü merkezi moment dağılımın çarpıklık derecesini, dördüncü merkezi moment ise basıklık derecesini vermektedir. X rassal değişkeninin k . merkezi momenti aşağıdaki gibi

$$\mu_k = E(X - \mu)^k, \quad k = 0,1,2, \dots \quad (1.13)$$

tanımlanır. Burada $\mu = E(X)$ 'e eşittir ve $\mu_1 = 0$ 'dır (Krishnamoorthy, 2006, s. 13).

1.1.8. Moment çıkaran fonksiyon

X rassal değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t)$ ile gösterilir ve X rassal değişkeni kesikli ise

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} f(x) \quad (1.14)$$

X rassal değişkeni sürekli ise

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \quad (1.15)$$

şeklinde tanımlanır (Çelik, 2006, s. 18).

1.1.9. Sıra istatistikleri

X_1, X_2, \dots, X_n ; $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip örnekleminin $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ olacak biçimde büyüklük sırasına göre dizilmesiyle elde edilen her bir $X_{(i)}$ rassal değişkeni i . sıra istatistiği diye isimlendirilir (Kaya, 1998, s. 6).

1.1.10. Seri açılımı

Dağılımların momentlerini elde etmek için olasılık yoğunluk fonksiyonlarına seri açılımı uygulanmaktadır. Bu tezde kullanılan seri açılımları aşağıda verilmiştir.

$|z| < 1$ ve $k > 0$ olmak üzere,

$$(1 - z)^{-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + j)}{\Gamma(k)j!} z^j \quad (1.16)$$

ifadesine seri açılımı denir. Burada $\Gamma(\cdot)$ gamma fonksiyonudur (Gradshteyn ve Ryzhik, 2007).

$$(1 + z)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - j + 1)j!} z^j \quad (1.17)$$

1.1.11. En çok olabilirlik yöntemi

En çok olabilirlik (maximum likelihood) yöntemi literatürde en yaygın kullanılan yöntemlerden biridir. X_1, X_2, \dots, X_n , olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x; \theta)$ olan kitleden bir örneklem olsun. $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ örnekleminin ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(\mathbf{x}; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$ olmak üzere, $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ olarak gözlemlendiğinde θ 'nın bir fonksiyonu olan

$$L(\theta, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}; \theta) \quad (1.18)$$

olabilirlik fonksiyonunu maksimize eden θ değerine, en çok olabilirlik tahmincisi denir ve $\hat{\theta}_{MLE}$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle

$$L(\hat{\theta}_{MLE}, \mathbf{x}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta, \mathbf{x}) \quad (1.19)$$

olarak elde edilir. Genellikle olabilirlik fonksiyonunun yerine fonksiyonun logaritması $l(\theta) = \ln L(\theta, \mathbf{x})$ maksimize edilir. Buna θ 'nın log-olabilirlik fonksiyonu denir. θ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi olabilirlik fonksiyonunu veya log-olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan değerdir (Öztürk vd., 2006, s. 255).

1.1.12. En küçük kareler yöntemi

Uygulamada çok kullanılan yöntemlerden biri olan en küçük kareler yöntemi, iki değişken arasındaki nedenselliği ifade eden regresyon modelinin katsayılarını tahmin etmek için kullanılır. Swain, Wenkatraman ve Wilson (1988, s. 275) tarafından Johnson dağılımının parametrelerini tahmin etmek için önerilmiştir. X_1, X_2, \dots, X_n , dağılım

fonksiyonu $F(x; \theta)$ olan kitleden bir örneklem ve $X_{(i)}; i = 1, \dots, n$ bu örneklemin sıralı istatistikleri olsun. $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ olarak gözlemlendiğinde θ 'nın bir fonksiyonu olan

$$S(\theta, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \left(F(X_{(i)}) - E(F(X_{(i)})) \right)^2 \quad (1.20)$$

fonksiyonunu minimize eden θ değerine, en küçük kareler tahmincisi denir ve $\hat{\theta}_{LSE}$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle

$$S(\hat{\theta}_{LSE}, \mathbf{x}) = \min_{\theta \in \Theta} S(\theta, \mathbf{x}) \quad (1.21)$$

olarak elde edilir. (1.20) eşitliğinde

$$E(F(X_{(i)})) = \frac{i}{n+1} \quad (1.22)$$

olduğu bilinmektedir.

1.1.13. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler yöntemi

X_1, X_2, \dots, X_n , dağılım fonksiyonu $F(x; \theta)$ olan kitleden bir örneklem ve $X_{(i)}; i = 1, \dots, n$ bu örneklemin sıralı istatistikleri olsun. $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ olarak gözlemlendiğinde θ 'nın bir fonksiyonu olan

$$W(\theta, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Var(F(X_{(i)}))} \left(F(X_{(i)}) - E(F(X_{(i)})) \right)^2 \quad (1.23)$$

fonksiyonunu minimize eden θ değerine, ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincisi denir ve $\hat{\theta}_{WLSE}$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle

$$W(\hat{\theta}_{WLSE}, \mathbf{x}) = \min_{\theta \in \Theta} W(\theta, \mathbf{x}) \quad (1.24)$$

olarak elde edilir. (1.23) eşitliğinde

$$var(F(X_{(i)})) = \frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2(n+2)} \quad (1.25)$$

olduğu bilinmektedir (Usta, 2013, s. 404).

1.1.14. Momentler yöntemi

Momentler yöntemi, örneklem momentlerinin, kitle momentlerinin doğal tahminçileri olduğu fikrine dayanan basit bir yöntemdir. X_1, X_2, \dots, X_n , olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x; \theta)$ olan kitleden bir örneklem olsun. $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)'$ olmak üzere, kitle momentleri bu parametrelere bağlıdır. Bu durumda X rassal değişkeninin k 'inci kitle momentini

$$\mu'_k = E(X^k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.26)$$

ve X_1, X_2, \dots, X_n örnekleminin k 'inci örneklem momentleri

$$m'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.27)$$

olmak üzere, X_1, X_2, \dots, X_n örneklemine dayalı dağılım parametrelerinin momentler tahminçileri $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$

$$\mu'_k = m'_k, \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (1.28)$$

denklem sistemleri çözülerek elde edilir (Huntsberger, 1961, s. 96).

2. WEIBULL DAĞILIMI

Yaşam süresiyle ilgili analizlerde Weibull dağılımı yaygın olarak kullanılmaktadır. Weibull dağılımı, genel olarak ölçek ve şekil (biçim) parametresi olmak üzere iki parametrelili bir dağılımdır. İki parametrelili Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır ve standart Weibull dağılımı olarak adlandırılır. Kısaca $X \sim WD(\alpha, \beta)$ olarak gösterilir. Burada α ölçek ve β şekil parametreleridir. $\beta = 1$ durumunda Weibull dağılımı, Üstel dağılıma; $\beta = 2$ durumunda Rayleigh dağılımına dönüşürken $\beta = 3,2$ olduğunda Normal dağılıma yaklaşır.

İki parametrelili Weibull dağılımının dağılım fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonuna integral uygulandığında ve

$$F(x) = \int_0^x \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} dt$$

gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \quad (2.2)$$

olarak bulunur. Weibull dağılımının yaşam fonksiyonu

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}\right) = e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \quad (2.3)$$

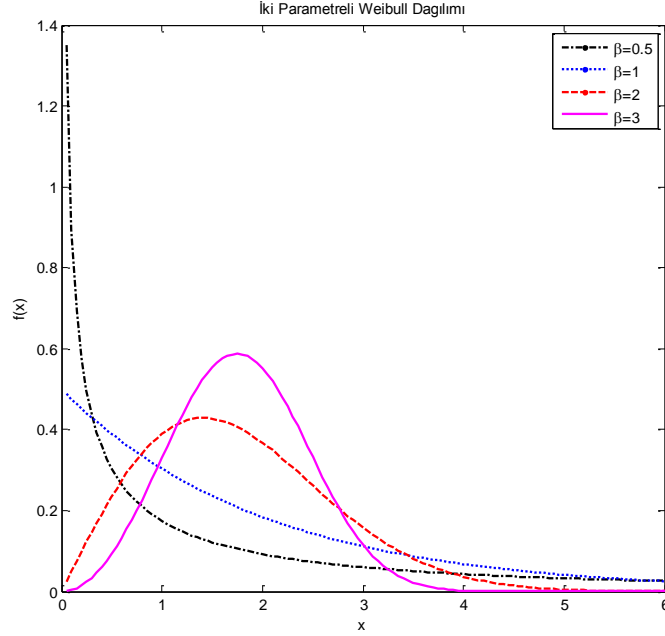
olarak tanımlanır. Hazard fonksiyonu ise

$$h(x) = \frac{\frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}}{e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}} = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \quad (2.4)$$

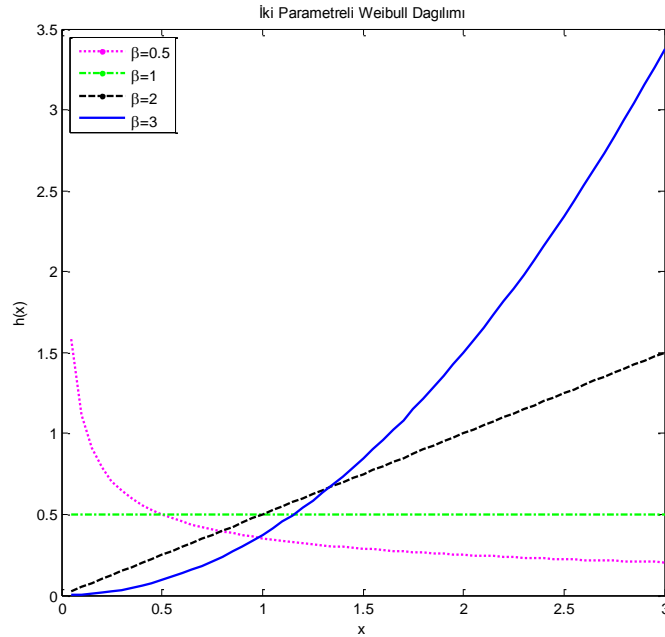
olarak elde edilir. WD'nin hazard fonksiyonu

- $\beta = 1$ olduğunda sabit,
- $0 < \beta < 1$ olduğunda azalan,
- $\beta > 1$ olduğu durumda artan bir fonksiyondur.

Farklı parametre değerleri için WD'nin olasılık yoğunluk ve hazard fonksiyonlarının şekilleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.1. $\alpha = 2$ olduğunda β 'nin farklı değerleri için WD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 2.2. $\alpha = 2$ olduğunda β 'nin farklı değerleri için WD'nin hazard fonksiyonunun grafiği

İki parametrelili Weibull dağılımının sıfır etrafındaki k . Momenti

$$E(X^k) = \int_0^{\infty} x^k \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} dx \quad (2.5)$$

ifadesinde $y = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}$ dönüşümü yardımıyla $x = \alpha(y)^{\frac{1}{\beta}}$ ve $dx = \alpha \frac{1}{\beta} (y)^{\frac{1}{\beta}-1} dy$ dikkate alındığında

$$E(X^k) = \int_0^{\infty} \left(\alpha(y)^{\frac{1}{\beta}}\right)^k \frac{\beta}{\alpha} \left(y^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta-1} e^{-y} \alpha \frac{1}{\beta} (y)^{\frac{1}{\beta}-1} dy$$

ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$E(X^k) = \alpha^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right) \quad (2.6)$$

olarak elde edilir. $X \sim WD(\alpha, \beta)$ 'nin beklenen değeri ve varyansı da yine aynı dönüşümler yardımıyla

$$E(X) = \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (2.7)$$

$$var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \alpha^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2 \right] \quad (2.8)$$

olarak elde edilir.

İki parametrelili Weibull dağılımının farklı parametrizasyona (parameterization) bağlı matematiksel formları bulunmaktadır. (2.2)'de ifade edilen standart Weibull dağılımında,

$1/\alpha = \lambda$ olarak alındığında,

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{1}{\alpha}x\right)^{\beta}} = 1 - e^{-(\lambda x)^{\beta}} \quad (2.9)$$

$\alpha^{\beta} = \alpha'$ olarak alındığında,

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^{\beta}}{\alpha'}} \quad (2.10)$$

ve $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\beta} = \lambda'$ kullanıldığında ise

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} = 1 - e^{-\lambda'x^\beta} \quad (2.11)$$

olarak ifade edilmektedir (Murthy vd., 2004, s. 10).

Weibull dağılımı, bazı durumlarda konum parametresinin (μ) de eklenmesiyle üç parametrelili bir dağılım olarak da elde edilir. Üç parametrelili Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x - \mu}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\alpha}\right)^\beta} \quad \beta > 0, \quad \alpha > 0, \quad x, \mu \geq 0 \quad (2.12)$$

olmak üzere (2.12) denkleminde integral alındığında ve bazı düzenlemelerden sonra dağılım fonksiyonu

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\mu}{\alpha}\right)^\beta} \quad (2.13)$$

olarak elde edilir. Burada α ölçek, β şekil ve μ konum parametreleridir. Üç parametrelili Weibull dağılımının sıfır etrafındaki k . momenti

$$E(X^k) = \int_0^\infty x^k \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x - \mu}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\alpha}\right)^\beta} dx \quad (2.14)$$

ifadesinde $\alpha^{-\beta}(x - \mu)^\beta = y$, $x = y^{1/\beta}\alpha + \mu$, $dx = \alpha \frac{1}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} dy$ dönüşümleri uygulandığında

$$E(X^k) = \int_0^\infty (y^{1/\beta}\alpha + \mu)^k \frac{\beta}{\alpha} (y^{1/\beta})^{\beta-1} e^{-y} \frac{\alpha}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} dy$$

ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$E(X^k) = \int_0^\infty (y^{1/\beta}\alpha + \mu)^k e^{-y} dy$$

olarak bulunur. $(y^{1/\beta}\alpha + \mu)^k$ ifadesine (2.15)' deki binom açılımı uygulandığında ve bazı düzenlemelerden sonra

$$(a + b)^n = \sum \binom{n}{x} a^x b^{n-x} \quad (2.15)$$

$$E(X^k) = \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \alpha^j y^{\frac{j}{\beta}} \mu^{k-j} e^{-y} dy$$

$$E(X^k) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \alpha^j \mu^{k-j} \int_0^{\infty} y^{j/\beta} e^{-y} dy \quad (2.16)$$

olarak elde edilir. (2.16) denkleminin sağ tarafınının gama fonksiyonu olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla

$$\int_0^{\infty} y^{\left(\frac{j}{\beta}+1\right)-1} e^{-y} dy = \Gamma\left(\frac{j}{\beta} + 1\right) \quad (2.17)$$

ifadesi (2.16) denkleminde yerine konulduğunda

$$E(X^k) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \alpha^j \mu^{k-j} \Gamma\left(\frac{j}{\beta} + 1\right) \quad (2.18)$$

olarak bulunur. Bu durumda üç parametrelili Weibull dağılımının beklenen değeri

$$E(X) = \mu + \alpha \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \quad (2.19)$$

olarak elde edilir ve varyansı da aynı dönüşümler yardımıyla

$$var(X) = \alpha^2 \left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)^2 \right] \quad (2.20)$$

olarak elde edilir (Lüküslü, 2005, s. 19).

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ WEIBULL DAĞILIMLARI

Weibull dağılımı birçok farklı yöntemle genelleştirilebilir. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir:

- I. Weibull rassal değişkeninin dönüşümleri yardımıyla, (doğrusal, ters dönüşüm veya logaritmik dönüşüm)
- II. Weibull dağılımının veya genelleştirilmiş bir Weibull dağılımının hazard fonksiyonu $h(t)$ 'ye λ sabiti eklenerek,
- III. Weibull dağılımının yaşam fonksiyonu $\bar{F}(t)$ veya dağılım fonksiyonu $F(t)$ dönüşümüyle,
- IV. Rekabet riski yaklaşımı. (en az 2 veya daha fazla Weibull değişkeniyle)
- V. 2 veya daha fazla Weibull rassal değişkeninin birleştirilmesiyle, 2 veya daha fazla genelleştirilmiş Weibull değişkeninin birleştirilmesiyle; Weibull dağılımının, genelleştirilmiş Weibull dağılımıyla birleştirilmesiyle,
- VI. $Y = \min(T_1, T_2, \dots, T_N)$ olmak üzere, T 'ler bağımsız ve Weibull dağılımına sahip rassal değişken ve N bileşke değişken olduğunda compounding (bileşim) yöntemiyle,
- VII. Olasılık integral dönüşümü yardımıyla. Örneğin, Weibull değişkeninin dağılım fonksiyonu G ve yoğunluk fonksiyonu g olduğunda yeni yoğunluk fonksiyonu $f(t) = \psi(G(t))g$ olsun, burada ψ olasılık yoğunluk fonksiyonudur.
- VIII. zayıflık veya eğim parametresi ekleyerek (Lai, 2014, s. 24).

Yukarıda verilen genelleştirme yöntemleriyle elde edilen dağılımlardan bazıları bu bölümde ele alınacaktır.

3.1. Inverse (Ters) Weibull Dağılımı

Inverse (ters) Weibull dağılımı, Weibull dağılımının genelleştirilmesi yöntemlerinden I. yardımıyla elde edilir. X rassal değişkeni standart Weibull dağılımına sahip olmak üzere,

$$T = \frac{\alpha^2}{X} \quad (3.1)$$

dönüşümüyle elde edilen T rassal değişkenine Inverse Weibull dağılımına (IWD) sahiptir denir. T rassal değişkenin dağılım fonksiyonu,

$$G(t) = P(T \leq t) = P\left(\frac{\alpha^2}{X} \leq t\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{\alpha^2}{t}\right) = 1 - F\left(\frac{\alpha^2}{t}\right) \quad (3.2)$$

$$G(t) = 1 - \left[1 - e^{-\left(\frac{\alpha^2/t}{\alpha}\right)^\beta}\right] = e^{-\left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta} \quad \alpha, \beta > 0, \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

bazı düzenlemeler yapıldığında

$$G(t) = e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{-\beta}}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad t \geq 0 \quad (3.4)$$

olarak elde edilir ve α ölçek, β şekil parametresi olmak üzere $T \sim IWD(\alpha, \beta)$ biçiminde ifade edilir. Inverse Weibull dağılımı, Type 2 Extreme Value dağılımı veya Frechet dağılımı olarak da adlandırılır (Johnson vd., 1995, s.4).

IWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(t) = \frac{dG(t)}{dt} = \beta \alpha^\beta t^{-\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{-\beta}} \quad \alpha, \beta > 0, \quad t \geq 0 \quad (3.5)$$

hazard fonksiyonu

$$h(t) = \frac{\beta \alpha^\beta t^{-\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{-\beta}}}{1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{-\beta}}} \quad (3.6)$$

ve quantile (yüzdilik) fonksiyonu

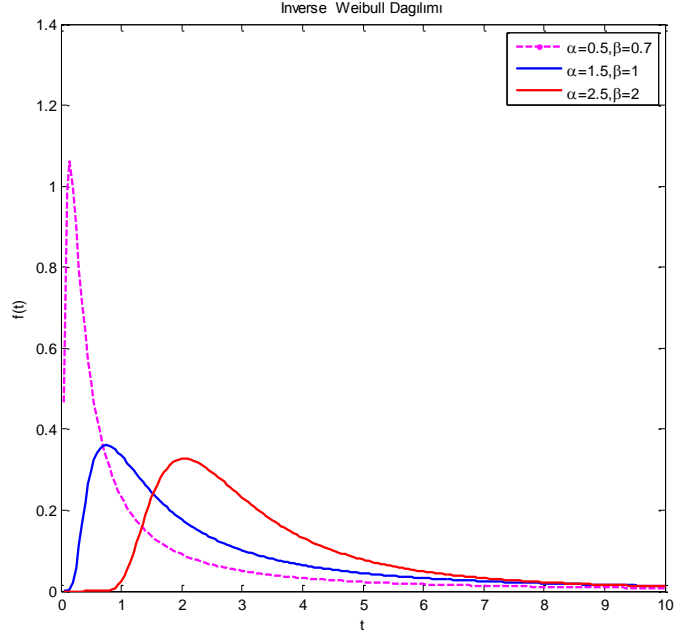
$$Q(u) = \alpha(-\ln(u))^{-1/\beta} \quad (3.7)$$

olarak bulunur. IWD'nin hazard fonksiyonu:

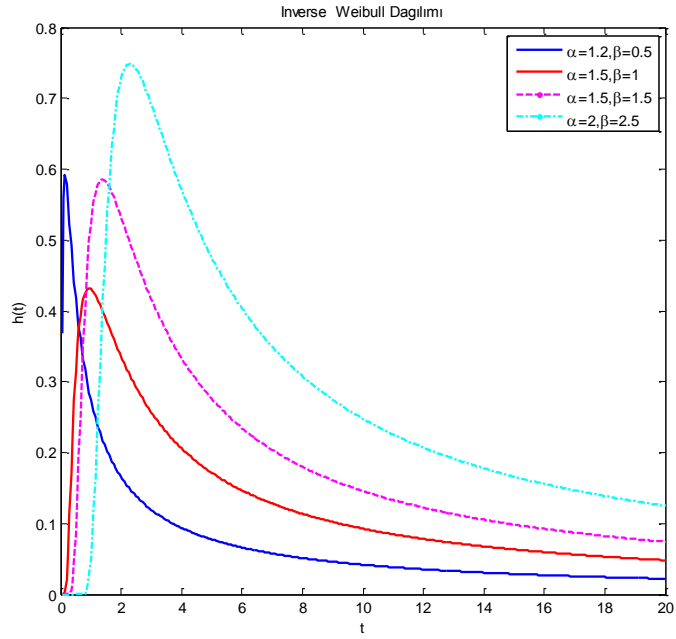
- $\beta \geq 1$ olduğunda artan ve tek modlu,
- $\beta < 1$ olduğunda azalan,

bir fonksiyondur.

Farklı α ve β parametre değerleri için IWD'nin olasılık yoğunluk ve hazard fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla Şekil 3.1 ve Şekil 3.2'de verilmiştir.



Şekil 3.1. α ve β 'nin farklı değerleri için IWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.2. α ve β 'nin farklı değerleri için IWD'nin hazard fonksiyonunun grafiği

IWD'nın sıfır etrafındaki k . Momentinin

$$E(T^k) = \int_0^{\infty} t^k g(t) dt = \int_0^{\infty} \beta \alpha^\beta t^{k-\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{-\beta}} dt \quad (3.8)$$

bulunmasında

$$\int_0^{\infty} x^{v-1} e^{-ax^p} dx = -\frac{1}{p} a^{-\frac{v}{p}} \Gamma\left(\frac{v}{p}\right) \quad v > 0, \quad a > 0, \quad p < 0 \quad (3.9)$$

(3.9) eşitliği (Gradshteyn ve Ryzhik, 2007) ve $v = k - \beta$, $a = \alpha^\beta$, $p = -\beta$ dikkate alındığında,

$$E(T^k) = \beta \alpha^\beta \int_0^{\infty} t^{k-\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{-\beta}} dt = \beta \alpha^\beta \frac{1}{\beta} (\alpha^\beta)^{\frac{k-\beta}{\beta}} \Gamma\left(1 - \frac{k}{\beta}\right)$$

ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$E(T^k) = \alpha^k \Gamma\left(1 - \frac{k}{\beta}\right) \quad (3.10)$$

sonucu elde edilir. (3.10) eşitliği yardımıyla $T \sim IWD(\alpha, \beta)$ 'nin beklenen değeri ve varyansı sırasıyla,

$$E(T) = \alpha \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \quad (3.11)$$

$$var(T) = \alpha^2 \Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right) - \left[\alpha \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\right]^2 \quad (3.12)$$

olarak bulunur.

3.1.1. En çok olabilirlik tahmincisi

$\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)'$, $IWD(\alpha, \beta)$ dağılımından n birimlik rassal bir örneklem olsun. Bu durumda olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonu sırasıyla

$$L(\alpha, \beta; \mathbf{t}) = \prod_{i=1}^n \beta \alpha^\beta t_i^{(-\beta-1)} e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{-\beta}} \quad (3.13)$$

$$\ln L(\alpha, \beta; \mathbf{t}) = n \ln \beta + n\beta \ln \alpha - (\beta + 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{-\beta} \quad (3.14)$$

olarak yazılır. $\ln L(\alpha, \beta; \mathbf{t})$ fonksiyonunu maksimum yapan noktaları bulmak için (3.14)'ün, α ve β parametrelerine göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta; \mathbf{t})}{\partial \alpha} = \frac{n\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{-\beta} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta; \mathbf{t})}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + n \ln \alpha - \sum_{i=1}^n \ln(t_i) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{-\beta} \ln \left(\frac{t_i}{\alpha}\right) = 0 \quad (3.16)$$

denklemleri elde edilir. (3.15) ve (3.16) denklemlerinin çözümü IWD'nin α ve β parametreleri için sırasıyla en çok olabilirlik tahmincileri $\hat{\alpha}_{MLE}$ ve $\hat{\beta}_{MLE}$ dir. Denklemlerin çözümü analitik olarak mümkün olmadığı için Newton-Raphson gibi nümerik yöntemler kullanılarak en çok olabilirlik tahmin edicileri bulunabilir.

3.1.2. En küçük kareler tahmincisi

IWD'nin bilinmeyen α ve β parametrelerinin en küçük kareler tahmincileri, IWD'nin (3.4)'de ifade edilen dağılım fonksiyonunu (1.20) eşitliğinde yerine konularak elde edilen

$$S(\alpha, \beta; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \left(e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{-\beta}} - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.17)$$

fonksiyonunun α ve β parametrelerine göre minimize edilmesiyle bulunur. $S(\alpha, \beta; \mathbf{t})$ fonksiyonunu minimum yapan noktaları bulmak için (3.17)'nin, α ve β parametrelerine göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta; \mathbf{t})}{\partial \alpha} = -2 \sum_{i=1}^n \left(e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{-\beta}} - \frac{i}{n+1} \right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{-\beta}} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{-\beta} \frac{\beta}{\alpha} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta; \mathbf{t})}{\partial \beta} = 2 \sum_{i=1}^n \left(e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{-\beta}} - \frac{i}{n+1} \right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{-\beta}} \ln \left(\frac{t_i}{\alpha} \right) \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^{-\beta} = 0 \quad (3.19)$$

elde edilir ve (3.18) ve (3.19)'nin çözümü IWD'nin α ve β parametreleri için en küçük kareler tahmincileridir. En çok olabilirlik tahmincilerinde olduğu gibi bu denklemlerin analitik çözümü bulunamamaktadır. Nümerik yöntemler kullanılarak en küçük kareler tahmin edicileri elde edilir.

3.1.3. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincisi

IWD'nin bilinmeyen α ve β parametrelerinin ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincileri

$$W(\alpha, \beta; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{-\beta}} - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.20)$$

fonksiyonu, α ve β bilinmeyen parametrelerine göre minimize ederek elde edilir. $W(\alpha, \beta; \mathbf{t})$ fonksiyonunu minimum yapan noktaları bulmak için (3.20)'nin, α ve β parametrelerine göre türevi alındığında

$$\frac{\partial W(\alpha, \beta; \mathbf{t})}{\partial \alpha} = -2 \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{-\beta}} - \frac{i}{n+1} \right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{-\beta}} \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^{-\beta} \frac{\beta}{\alpha} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\alpha, \beta; \mathbf{t})}{\partial \beta} &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \\ &\times \left(e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{-\beta}} - \frac{i}{n+1} \right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{-\beta}} \ln \left(\frac{t_i}{\alpha} \right) \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^{-\beta} \end{aligned} \quad (3.22)$$

olarak bulunur. Bu denklemler sıfıra eşitlenerek ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincileri elde edilebilir. Denklemlerin çözümü analitik olarak mümkün olmadığı için nümerik yöntemler kullanılarak ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmin edicileri bulunabilir.

3.1.4. Momentler tahmincisi

T_1, T_2, \dots, T_n , $IWD(\alpha, \beta)$ dağılımından n birimlik rassal bir örneklem olsun. Kitlenin iki parametresi olup $IWD(\alpha, \beta)$ dağılımının birinci ve ikinci momentleri

$$\mu'_1 = E(T) = \alpha \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \quad (3.23)$$

$$\mu'_2 = E(T^2) = \alpha^2 \Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \quad (3.24)$$

şeklindedir. Bulunan kitle momentleri

$$m'_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i = \bar{T} \quad (3.25)$$

$$m'_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^2 \quad (3.26)$$

örneklem momentleriyle eşitlendiğinde ve gerekli düzenlemeler yapıldığında IWD'nin $\hat{\beta}_{ME}$ momentler tahmin edicisi

$$\frac{\Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right)} = \frac{\bar{T}^2}{\overline{T^2}} \quad (3.27)$$

denkleminin çözümüyle elde edilir ve elde edilen $\hat{\beta}_{ME}$ yardımıyla

$$\hat{\alpha}_{ME} = \frac{\bar{T}}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\hat{\beta}_{ME}}\right)} \quad (3.28)$$

$\hat{\alpha}_{ME}$ tahmin edicisi bulunur. IWD'nin α ve β parametreleri için momentler tahmin edicileri sırasıyla $\hat{\alpha}_{ME}$ ve $\hat{\beta}_{ME}$ olarak gösterilir.

3.2. Log Weibull Dağılımı

Log Weibull dağılımı, Weibull dağılımının genelleştirilmesi yöntemlerinden I.'de yer alan log-dönüşüm yöntemi kullanılarak elde edilir. Literatürde Gumbel dağılımı veya Type-1 Extreme Value dağılımı olarak da adlandırılmaktadır.

X rassal değişkeni $WD(\alpha, \beta)$ dağılımına sahip olmak üzere, $T = \log(X)$ dönüşümüyle elde edilen T rassal değişkenine

Log Weibull dağılımına (LogWD) sahiptir denir. Buna göre LogWD'nin dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
 G(t) &= P(T \leq t) = P(\log(X) \leq t) = P(X \leq e^t) = 1 - e^{-\left(\frac{e^t}{\alpha}\right)^\beta} \\
 G(t) &= 1 - e^{-e^{\{(t-\log(\alpha)) \times \beta\}}} = 1 - e^{-e^{\frac{t-\log(\alpha)}{1/\beta}}} \\
 G(t) &= 1 - e^{-e^{\frac{t-\vartheta}{b}}} \quad -\infty < t < \infty \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada $\vartheta = \log(\alpha)$ konum parametresi ve $b = \frac{1}{\beta}$ ölçek parametresi olmak üzere $T \sim \text{LogWD}(\vartheta, b)$ olarak ifade edilir (White, 1969, s. 375). Denklem (3.29)'un t 'ye göre türevi alındığında LogWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(t) = \frac{dG(t)}{dt} = \frac{1}{b} e^{\left(\frac{t-\vartheta}{b}\right)} e^{-e^{\left(\frac{t-\vartheta}{b}\right)}} \quad -\infty < t < \infty \quad (3.30)$$

olmak üzere hazard fonksiyonu ise

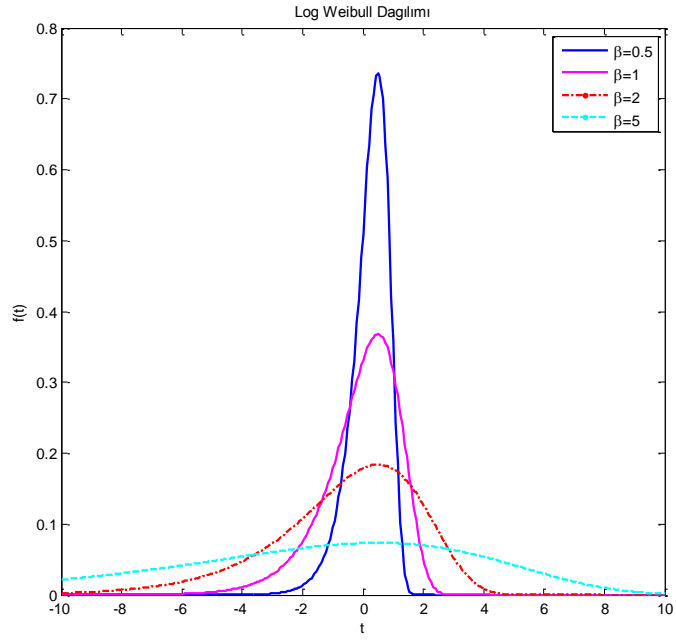
$$h(t) = \frac{1}{b} e^{\left(\frac{t-\vartheta}{b}\right)} \quad (3.31)$$

olarak bulunur. Quantile fonksiyonunu elde etmek için ters dönüşüm yöntemi uygulandığında

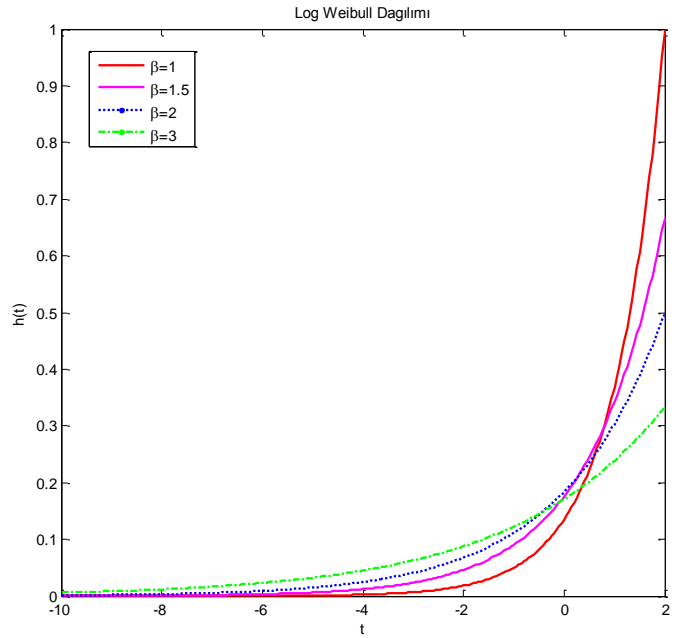
$$Q(u) = \vartheta + b \ln(-\ln(1 - u)) \quad (3.32)$$

şeklinde elde edilir.

Farklı ϑ ve b parametre değerleri için LogWD'nin olasılık yoğunluk ve hazard fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'de verilmiştir.



Şekil 3.3. $\vartheta = 0,5$ olduğunda b 'nin farklı değerleri için LogWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.4. $\vartheta = 2$ olduğunda b 'nin farklı değerleri için LogWD'nin hazard fonksiyonunun grafiği

LogWD'nin moment çıkarıcı fonksiyonu, $\vartheta = 0$ ve $b = 1$ olarak alındığında (standartlaştırılmış) ve

$$M_T(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} e^{t-e^t} dt \quad (3.33)$$

$e^t = u$ dönüşümü ve $e^t dt = du$, $-e^t = -u$, $e^{-e^t} = e^{-u}$ ifadeleri kullanıldığında,

$$M_T(y) = \int_0^{\infty} u^y e^t e^{-u} \frac{du}{e^t}$$

$$M_T(y) = \int_0^{\infty} u^y e^{-u} du = \Gamma(1 + y) \quad (3.34)$$

olarak elde edilir. Beklenen değeri ise (3.34) ifadesinden

$$E(T) = \left. \frac{\partial \Gamma(1 + y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \Gamma'(1) = \psi(1)\Gamma(1) = -\eta = -0,57722 \quad (3.35)$$

olarak elde edilir. Burada η Euler sabiti olarak bilinir ve $\psi(\cdot) = \frac{\Gamma'(\cdot)}{\Gamma(\cdot)}$, digamma fonksiyonudur.

$$E(T^2) = \left. \frac{\partial^2 \Gamma(1 + y)}{\partial y^2} \right|_{y=0} = \Gamma''(1)$$

$$E(T^2) = \Gamma(1)[\psi^2(1) + \psi'(1)] = \frac{\pi^2}{6} + \eta^2 = 1,97811 \quad (3.36)$$

LogWD'nin varyansı ise (3.35) ve (3.36) ifadelerinde yapılan düzenlemelerden sonra

$$var(T) = \frac{\pi^2}{6} \quad (3.37)$$

olarak bulunur. $z = e^{\frac{t-\vartheta}{b}}$, $t = b \ln z + \vartheta$, $dt = \frac{b}{z} dz$ dönüşümleri uygulandığında

LogWD'nin moment çıkarıcı fonksiyonu

$$M_Z(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b} e^{y(b \ln z + \vartheta)} z e^{-z} \frac{b}{z} dz$$

$$M_Z(y) = e^{y\vartheta} \int_0^{\infty} z^{yb} e^{-z} dz = e^{y\vartheta} \Gamma(yb + 1) \quad (3.38)$$

olarak elde edilir. Beklenen değeri

$$E(Z) = \left. \frac{\partial e^{y\vartheta} \Gamma(yb + 1)}{\partial y} \right|_{y=0} = \vartheta \Gamma(1) + b\psi(1)\Gamma(1) = \vartheta - \eta b \quad (3.39)$$

olarak elde edilir. LogWD'nin varyansı ise

$$var(Z) = \frac{\pi^2 b^2}{6} \quad (3.40)$$

olarak bulunur (Rinne, 2008, s. 132).

3.2.1. En çok olabilirlik tahmincisi

$\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)'$, $LogWD(\vartheta, b)$ dağılımından n birimlik rassal bir örneklem olsun. Bu durumda olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\vartheta, b; \mathbf{t}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{b} e^{\left(\frac{t_i - \vartheta}{b}\right)} e^{-e^{\left(\frac{t_i - \vartheta}{b}\right)}} \quad (3.41)$$

ve log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L(\vartheta, b; \mathbf{t}) = -n \ln b + \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - \vartheta}{b}\right) - \sum_{i=1}^n e^{\left(\frac{t_i - \vartheta}{b}\right)} \quad (3.42)$$

olarak bulunur. $\ln L(\vartheta, b; \mathbf{t})$ fonksiyonunu maksimum yapan noktaları bulmak için (3.42)'nin, ϑ ve b parametrelerine göre türevi alınıp sifıra eşitlendiğinde

$$\frac{\partial \ln L(\vartheta, b; \mathbf{t})}{\partial b} = \frac{-n}{b} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - \vartheta}{b^2}\right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - \vartheta}{b^2}\right) e^{\left(\frac{t_i - \vartheta}{b}\right)} = 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \ln L(\vartheta, b; \mathbf{t})}{\partial \vartheta} = \frac{-1}{b} \left[1 - \sum_{i=1}^n e^{\left(\frac{t_i - \vartheta}{b}\right)} \right] = 0 \quad (3.44)$$

denklem (3.43) ve (3.44) elde edilir. Bu denklemlerin çözümü LogWD'nin ϑ ve b parametreleri için sırasıyla en çok olabilirlik tahmincileri $\hat{\vartheta}_{MLE}$ ve \hat{b}_{MLE} dir. Denklemlerin

çözümü analitik olarak mümkün olmadığı için nümerik yöntemler kullanılarak en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilir.

3.2.2. En küçük kareler tahmincisi

LogWD'nin bilinmeyen ϑ ve b parametrelerinin en küçük kareler tahmincileri,

$$S(\vartheta, b; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \left(\left(1 - e^{-e^{\left(\frac{t_i - \vartheta}{b}\right)}} \right) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.45)$$

fonksiyonunun ϑ ve b parametrelerine göre minimize edilmesiyle bulunur. $S(\vartheta, b; \mathbf{t})$ fonksiyonunu minimum yapan noktaları bulmak için (3.46)'nın, ϑ ve b parametrelerine göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde

$$\frac{\partial S(\vartheta, b; \mathbf{t})}{\partial b} = \frac{-2 \sum_{i=1}^n \left(\left(1 - e^{-e^{\left(\frac{t_i - \vartheta}{b}\right)}} \right) - \frac{i}{n+1} \right) e^{\left(\frac{t_i - \vartheta}{b}\right) - e^{\left(\frac{t_i - \vartheta}{b}\right)}} (t_i - \vartheta)}{b^2} = 0 \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial S(\vartheta, b; \mathbf{t})}{\partial \vartheta} = \frac{-2 \sum_{i=1}^n \left(\left(1 - e^{-e^{\left(\frac{t_i - \vartheta}{b}\right)}} \right) - \frac{i}{n+1} \right) e^{\left(\frac{t_i - \vartheta}{b}\right) - e^{\left(\frac{t_i - \vartheta}{b}\right)}}}{b} = 0 \quad (3.47)$$

elde edilir ve (3.46) ve (3.47)'nin çözümü LogWD'nin ϑ ve b parametreleri için en küçük kareler tahmincileridir. Denklemlerin çözümü analitik olarak mümkün olmadığı için Newton-Raphson gibi nümerik yöntemler kullanılarak en küçük kareler tahmin edicileri bulunabilir.

3.2.3. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincisi

LogWD'nin bilinmeyen ϑ ve b parametrelerinin ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincileri, (3.29)'da ifade edilen dağılım fonksiyonunun (1.23) eşitliğinde yerine konulmasıyla elde edilen

$$W(\vartheta, b; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(\left(1 - e^{-e^{\left(\frac{t_i-\vartheta}{b}\right)}} \right) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.48)$$

fonksiyonun ϑ ve b parametrelerine göre minimize edilmesiyle bulunur. $W(\vartheta, b; \mathbf{t})$ fonksiyonunu minimum yapan noktaları bulmak için (3.48)'in, ϑ ve b parametrelerine göre türevi alındığında

$$\frac{\partial W(\vartheta, b; \mathbf{t})}{\partial \vartheta} = \frac{-2 \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(\left(1 - e^{-e^{\left(\frac{t_i-\vartheta}{b}\right)}} \right) - \frac{i}{n+1} \right) e^{\left(\frac{t_i-\vartheta}{b}\right)} e^{-e^{\left(\frac{t_i-\vartheta}{b}\right)}}}{b} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\vartheta, b; \mathbf{t})}{\partial b} &= \frac{-2 \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(\left(1 - e^{-e^{\left(\frac{t_i-\vartheta}{b}\right)}} \right) - \frac{i}{n+1} \right)}{b^2} \\ &\quad \times e^{\left(\frac{t_i-\vartheta}{b}\right)} e^{-e^{\left(\frac{t_i-\vartheta}{b}\right)}} (t_i - \vartheta) \end{aligned} \quad (3.50)$$

elde edilir. (3.49) ve (3.50) denklemleri sıfıra eşitlendiğinde elde edilen çözüm LogWD'nin ϑ ve b parametreleri için ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincileridir. Bu tahminciler sırasıyla $\hat{\vartheta}_{WLSE}$ ve \hat{b}_{WLSE} dir. En küçük karelerde olduğu gibi bu denklemlerin analitik çözümü bulunamamaktadır. Nümerik yöntemler kullanılarak ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmin edicileri elde edilir.

3.2.4. Momentler tahmincisi

T_1, T_2, \dots, T_n , $LogWD(\vartheta, b)$ dağılımından n birimlik rassal bir örneklem olsun. $LogWD(\vartheta, b)$ dağılımının sıfır etrafındaki birinci ve ikinci kitle momentleri,

$$\mu'_1 = E(T) = \vartheta - \eta b \quad (3.51)$$

$$\mu'_2 = E(T^2) = var(T) + (E(T))^2 = \frac{\pi^2 b^2}{6} + (\vartheta - \eta b)^2 \quad (3.52)$$

örneklem momentleriyle eşitlendiğinde ve $\vartheta - \eta b = \bar{T}$ olarak alındığında bazı düzenlemelerden sonra

$$\frac{\pi^2 b^2}{6} + (\vartheta - \eta b)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^2$$

$$\frac{\pi^2 b^2}{6} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^2 - (\bar{T})^2 \quad (3.53)$$

denklemini elde edilir. Buradan $LogWD(\vartheta, b)$ dağılımının momentler tahmin edicileri

$$\hat{b}_{ME} = \frac{\sqrt{\frac{6}{n} \sum_{i=1}^n T_i^2 - (\bar{T})^2}}{\pi} \quad (3.54)$$

$\vartheta - \eta \hat{b} = \bar{T}$ ifadesi düzenlendiğinde

$$\hat{\vartheta}_{ME} = \bar{T} + \eta \hat{b}_{ME} \quad (3.55)$$

olarak bulunur.

3.3. Esnek (Flexible) Weibull Dağılımı

Gurvich vd., (1997, s. 2559), Weibull dağılımının genelleştirilmesi yöntemlerinden II. kullanılarak dağılım fonksiyonu (3.56) ifadesinden elde edilen bir dağılımlar ailesi önermiştir. Buna göre, $H(t)$, t ' nin monotonik artan fonksiyonudur.

$$F(t) = 1 - e^{-aH(t)}, \quad a > 0 \quad (3.56)$$

$$\bar{F}(t) = e^{-aH(t)} \quad (3.57)$$

Bebbington vd., (2007), (3.57)'deki yaşam fonksiyonundan elde edilen fakat $H(t)$ ' nin, t ' de monoton bir fonksiyon olmadığı Esnek Weibull dağılımını (FWD) önermiştir. T bir yaşam süresi rassal değişkeni ve

$$H(t) = e^{at - \frac{\beta}{t}} \quad (3.58)$$

olmak üzere, $a = 1$ olarak alındığında FWD'nin yaşam fonksiyonu

$$\bar{F}(t) = e^{-e^{at - \frac{\beta}{t}}} \quad t > 0 \quad \alpha, \beta > 0 \quad (3.59)$$

olarak ifade edilir. FWD'nin dağılım fonksiyonu

$$F(t) = 1 - e^{\left(-e^{\alpha t - \frac{\beta}{t}}\right)}, \quad t > 0 \quad (3.60)$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(t) = \left(\alpha + \frac{\beta}{t^2}\right) e^{\alpha t - \frac{\beta}{t}} e^{\left(-e^{\alpha t - \frac{\beta}{t}}\right)} \quad (3.61)$$

olarak bulunur. Hazard fonksiyonu ise

$$h(t) = \left(\alpha + \frac{\beta}{t^2}\right) e^{\alpha t - \frac{\beta}{t}} \quad (3.62)$$

olarak elde edilir. FWD'nin hazard fonksiyonu,

- $\alpha\beta > \frac{27}{64}$ olduğunda artan,
- $\alpha\beta < \frac{27}{64}$ olduğunda ise modified küvet eğrisi şeklindedir. (bu durumda h önce artan, ardından küvet eğrisi şeklindedir)

FWD'nin quantile fonksiyonu $\bar{F}(t) = u$ ve log dönüşüm yöntemi uygulandığında

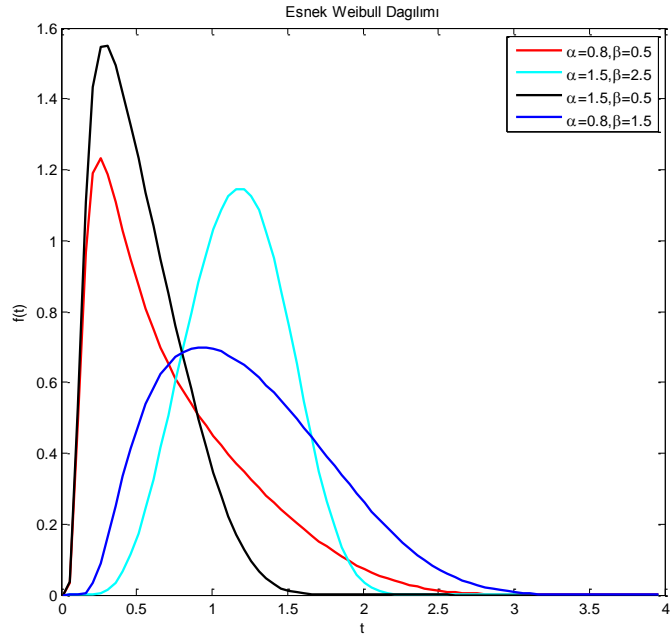
$$\begin{aligned} e^{\left(-e^{\alpha t - \frac{\beta}{t}}\right)} &= u \\ \left(-e^{\alpha t - \frac{\beta}{t}}\right) &= \ln(u) \\ \alpha t - \frac{\beta}{t} &= \ln(-\ln(u)) \\ \alpha t^2 - \ln(-\ln(u)) t - \beta &= 0 \end{aligned}$$

ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

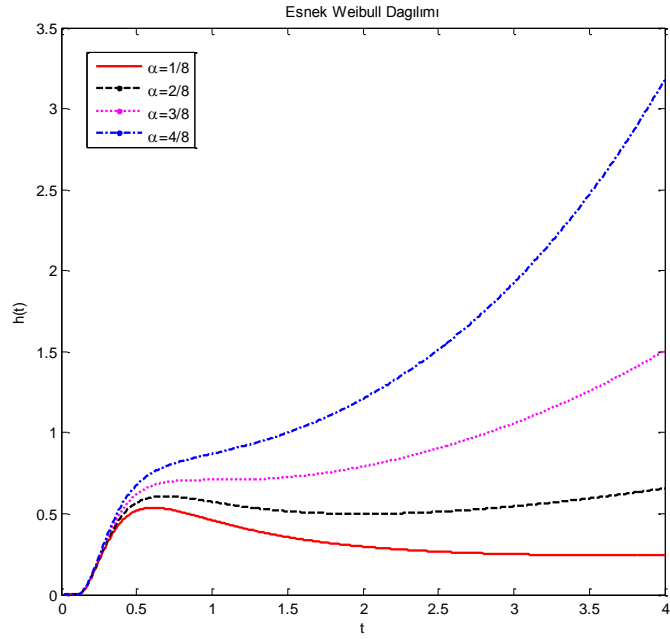
$$t_u = \frac{1}{2\alpha} \left(\ln(-\ln(u)) + \sqrt{\{\ln(-\ln(u))\}^2 + 4\alpha\beta} \right) \quad (3.63)$$

olarak elde edilir (Bebbington vd., 2007, s. 720).

Farklı α ve β parametre değerleri için FWD'nin olasılık yoğunluk ve hazard fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla Şekil 3.5 ve Şekil 3.6'da verilmiştir.



Şekil 3.5. α ve β 'nin farklı değerleri için FWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.6. $\beta = 9/8$ olduğunda α 'nın farklı değerleri için FWD'nin hazard fonksiyonunun grafiği

3.3.1. En çok olabilirlik tahmircisi

$\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)'$, $FWD(\alpha, \beta)$ dağılımından n birimlik rassal bir örneklem olsun. Bu durumda olabilirlik fonksiyonu

$$L(\alpha, \beta; \mathbf{t}) = \prod_{i=1}^n \left(\alpha + \frac{\beta}{t_i^2} \right) e^{\left(\alpha \sum_{i=1}^n t_i - \sum_{i=1}^n \frac{\beta}{t_i} \right)} e^{\left(- \sum_{i=1}^n e^{\left(\alpha t_i - \frac{\beta}{t_i} \right)} \right)} \quad (3.64)$$

ve log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ln L(\alpha, \beta; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \ln \left(\alpha + \frac{\beta}{t_i^2} \right) + \left(\alpha \sum_{i=1}^n t_i - \sum_{i=1}^n \frac{\beta}{t_i} \right) - \left(\sum_{i=1}^n e^{\left(\alpha t_i - \frac{\beta}{t_i} \right)} \right) \quad (3.65)$$

olarak bulunur. (3.65) ifadesinin α ve β parametrelerine göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha, \beta; \mathbf{t})}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha + \frac{\beta}{t_i^2}} + \sum_{i=1}^n t_i - \sum_{i=1}^n t_i e^{\left(\alpha t_i - \frac{\beta}{t_i} \right)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\alpha + \frac{\beta}{t_i^2}} + t_i \left(1 - e^{\left(\alpha t_i - \frac{\beta}{t_i} \right)} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha, \beta; \mathbf{t})}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta + \alpha t_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} e^{\left(\alpha t_i - \frac{\beta}{t_i} \right)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\beta + \alpha t_i^2} - \frac{1}{t_i} \left(1 - e^{\left(\alpha t_i - \frac{\beta}{t_i} \right)} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.67)$$

denklem (3.66) ve (3.67) elde edilir. Bu denklemler sıfıra eşitlenerek en çok olabilirlik tahmincileri $(\hat{\alpha}_{MLE}, \hat{\beta}_{MLE})$ bulunabilir. Denklemlerin çözümü analitik olarak mümkün olmadığı için nümerik yöntemler kullanılarak en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilir.

3.3.2. En küçük kareler tahmircisi

FWD'nin bilinmeyen α ve β parametrelerinin en küçük kareler tahmincileri,

$$S(\alpha, \beta; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \left(\left(1 - e^{\left(-e^{at_i - \frac{\beta}{t_i}} \right)} \right) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.68)$$

fonksiyonunun α ve β parametrelerine göre minimize edilmesiyle bulunur. $S(\alpha, \beta; \mathbf{t})$ fonksiyonunu minimum yapan noktaları bulmak için (3.68)'in, α ve β parametrelerine göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta; \mathbf{t})}{\partial \alpha} = 2 \sum_{i=1}^n \left(\left(1 - e^{\left(-e^{at_i - \frac{\beta}{t_i}} \right)} \right) - \frac{i}{n+1} \right) t_i e^{\left(-e^{at_i - \frac{\beta}{t_i}} \right) + at_i - \frac{\beta}{t_i}} = 0 \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta; \mathbf{t})}{\partial \beta} = \frac{-2 \sum_{i=1}^n \left(\left(1 - e^{\left(-e^{at_i - \frac{\beta}{t_i}} \right)} \right) - \frac{i}{n+1} \right) e^{\left(-e^{at_i - \frac{\beta}{t_i}} \right) + at_i - \frac{\beta}{t_i}}}{t_i} = 0 \quad (3.70)$$

sonuçları bulunur. Bu denklemlerin çözümü FWD'nin en küçük kareler tahmincilerini $(\hat{\alpha}_{LSE}, \hat{\beta}_{LSE})$ verir. Denklemlerin çözümü analitik olarak bulunamadığından Newton-Raphson gibi nümerik yöntemler kullanılarak en küçük kareler tahmincileri elde edilir.

3.3.3. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincisi

FWD'nin ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincileri, (3.60)'da ifade edilen dağılım fonksiyonunun (1.23) eşitliğinde yerine konulmasıyla elde edilen

$$W(\alpha, \beta; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(\left(1 - e^{\left(-e^{at_i - \frac{\beta}{t_i}} \right)} \right) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.71)$$

fonksiyonun α ve β parametrelerine göre minimize edilmesiyle bulunur. $W(\alpha, \beta; \mathbf{t})$ fonksiyonunu minimum yapan noktaları bulmak için α ve β parametrelerine göre türevi alındığında

$$\frac{\partial W(\alpha, \beta; \mathbf{t})}{\partial \alpha} = 2 \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(\left(1 - e^{\left(-e^{at_i - \frac{\beta}{t_i}}\right)} \right) - \frac{i}{n+1} \right) \times t_i e^{\left(-e^{at_i - \frac{\beta}{t_i}}\right) + at_i - \frac{\beta}{t_i}} \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial W(\alpha, \beta; \mathbf{t})}{\partial \beta} = \frac{-2 \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(\left(1 - e^{\left(-e^{at_i - \frac{\beta}{t_i}}\right)} \right) - \frac{i}{n+1} \right)}{t_i \times e^{\left(-e^{at_i - \frac{\beta}{t_i}}\right) + at_i - \frac{\beta}{t_i}}} \quad (3.73)$$

elde edilir. Bu denklemler sıfıra eşitlenerek ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincileri bulunabilir. En küçük karelerde olduğu gibi bu denklemlerin analitik çözümü bulunamamaktadır. Nümerik yöntemler kullanılarak ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmin edicileri elde edilir.

3.4. Üstelleştirilmiş (Exponentiated) Weibull Dağılımı

Üstelleştirilmiş Weibull Dağılımı, genelleştirme yöntemlerinden III. kullanılarak elde edilir. Üstelleştirilmiş Weibull dağılımı (EWD), Weibull dağılımının bir genişletmesi olarak Mudholkar ve Srivastava (1993, s. 299) tarafından sunulmuştur. Standart Weibull dağılımına yeni bir parametre (v) eklenmesiyle elde edilir. EWD' nin dağılım fonksiyonu

$$F(t) = [G(t)]^v = \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} \right]^v, \quad 0 < v < \infty \quad (3.74)$$

olarak elde edilir. $G(t)$, iki parametrelili standart Weibull dağılımıdır. EWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(t) = \frac{\beta v}{\alpha^\beta} t^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} \right]^{v-1} \quad \alpha > 0, \beta > 0, v > 0, \quad t \geq 0 \quad (3.75)$$

biçiminde bulunur. α ölçek parametresi, β ve v şekil parametreleri olmak üzere $T \sim EWD(\alpha, \beta, v)$ şeklinde ifade edilir. $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ ifadesinden yaşam fonksiyonu

$$\bar{F}(t) = 1 - \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} \right]^v \quad (3.76)$$

olarak yazılabilir. Hazard fonksiyonu $f(t)$ 'nin $\bar{F}(t)$ 'ye oranından

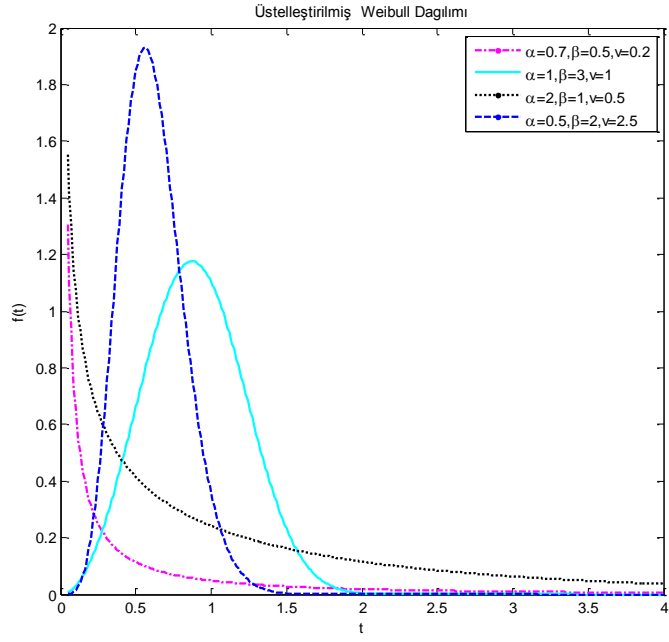
$$h(t) = \frac{\frac{\beta v}{\alpha^\beta} t^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} \right]^{v-1}}{1 - \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} \right]^v} \quad (3.77)$$

olarak elde edilir. EWD, $\beta = 1$ olduğunda genelleştirilmiş üstel dağılıma, $v = 1$ olduğunda ise iki parametrelili Weibull dağılımına dönüşür. $\beta = 2$ olduğunda genelleştirilmiş Rayleigh dağılımına, $\beta = 1$ ve $v = 1$ için üstel dağılıma, $\beta = 2$ ve $v = 1$ olduğunda ise Rayleigh dağılımına dönüşür (Almalki ve Nadarajah, 2014, s. 42). Quantile fonksiyonu ise

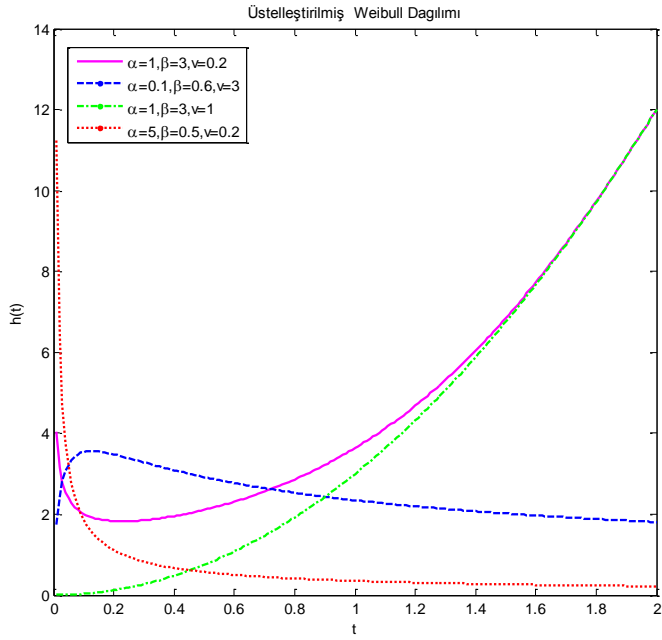
$$Q(u) = \alpha \left(-\ln \left(1 - u^{\frac{1}{v}} \right) \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad 0 < u < 1 \quad (3.78)$$

olarak bulunur.

Farklı α, β ve v parametre değerleri için EWD'nin olasılık yoğunluk ve hazard fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla Şekil 3.7 ve Şekil 3.8'de verilmiştir.



Şekil 3.7. α, β, v 'nin farklı değerleri için EWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.8. α, β, v 'nin farklı değerleri için EWD'nin hazard fonksiyonunun grafiği

EWD'nin hazard fonksiyonu

- $\beta > 1$ ve $\beta v < 1$ olduğunda küvet eğrisi şeklinde,
- $\beta < 1$ ve $\beta v > 1$ olduğunda tekmodlu,
- $\beta > 1$ ve $\beta v > 1$ ise monoton artan,
- $\beta < 1$ ve $\beta v < 1$ ise monoton azalan ve
- $\beta = v = 1$ olduğu durumda ise sabittir (Nadarajah vd., 2013, s. 841).

EWD'nin sıfır etrafındaki k . momenti $k > -\beta$ için

$$E(T^k) = \int_0^{\infty} \frac{\beta v}{\alpha^\beta} t^{k+\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}\right]^{v-1} dt \quad (3.79)$$

$\left[1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}\right]^{v-1}$ ifadesinde (1.17)'deki seri açılımı uygulandığında

$$\left[1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}\right]^{v-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(v)(-1)^j \left[e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}\right]^j}{\Gamma(v-j)j!} \quad (3.80)$$

olarak elde edilir. (3.80) ifadesi (3.79)'da yerine konularak $y = (j+1)\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta$ değişken

dönüşümü ve $t = \frac{\alpha y^{\frac{1}{\beta}}}{(j+1)^{\frac{1}{\beta}}}$, $dt = \frac{\alpha^{\frac{1}{\beta}} y^{\frac{1}{\beta}-1}}{(j+1)^{\frac{1}{\beta}}} dy$ bilgileri kullanıldığında

$$E(T^k) = \frac{\beta v}{\alpha^\beta} \Gamma(v) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(v-j)j!} \int_0^{\infty} \left[\frac{\alpha y^{\frac{1}{\beta}}}{(j+1)^{\frac{1}{\beta}}} \right]^{k+\beta-1} e^{-y} \frac{\alpha^{\frac{1}{\beta}} y^{\frac{1}{\beta}-1}}{(j+1)^{\frac{1}{\beta}}} dy$$

ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$E(T^k) = \alpha^k v \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(v)}{j! \Gamma(v-j) (j+1)^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \quad (3.81)$$

olarak elde edilir. (3.81) ifadesinde

$$(1 - v)_j = \frac{(-1)^j \Gamma(v)}{\Gamma(v - j)} \quad (3.82)$$

olmak üzere

$$E(T^k) = \alpha^k v \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1 - v)_j}{j! (j + 1)^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \quad (3.83)$$

şeklinde de ifade edilebilir. $v \geq 1$ tamsayıları ve $k > -\beta$ için, EWD'nin sıfır etrafındaki k . momenti

$$E(T^k) = \alpha^k v \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right) \sum_{j=0}^{v-1} \frac{(1 - v)_j}{j! (j + 1)^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \quad (3.84)$$

olarak bulunur (Nadarajah ve Gupta, 2005, s. 255).

3.4.1. En çok olabilirlik tahmincisi

$\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)'$, $EWD(\alpha, \beta, v)$ dağılımından n birimlik rassal bir örneklem olsun. Bu durumda olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\alpha, \beta, v; \mathbf{t}) = \prod_{i=1}^n \frac{\beta v}{\alpha^\beta} t_i^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \left[1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}\right]^{v-1} \quad (3.85)$$

ve log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha, \beta, v; \mathbf{t}) &= n \ln \beta + n \ln v - \beta n \ln \alpha + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i) \\ &\quad + (v - 1) \sum_{i=1}^n \ln\left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \end{aligned} \quad (3.86)$$

olarak bulunur. $\ln L(\alpha, \beta, v; \mathbf{t})$ fonksiyonunu maksimum yapan noktaları bulmak için (3.86)'da, α , β ve v parametrelerine göre türevi alındığında

$$z = \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)}{1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}} \text{ olmak üzere}$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, v; \mathbf{t})}{\partial \alpha} = \frac{-\beta n}{\alpha} + (v-1) \sum_{i=1}^n \frac{-\left[\beta e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \right]}{\alpha \left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}\right)} + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, v; \mathbf{t})}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - n \ln \alpha + \sum_{i=1}^n \ln(t_i) + (v-1)z - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right) \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, v; \mathbf{t})}{\partial v} = \frac{n}{v} + \sum_{i=1}^n \ln\left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}\right) \quad (3.89)$$

denklem (3.87)-(3.89) elde edilir. Bu denklemlerin çözümü EWD'nin α, β ve v parametreleri için sırasıyla en çok olabilirlik tahmincileri $\hat{\alpha}_{MLE}, \hat{\beta}_{MLE}$ ve \hat{v}_{MLE} dir. Denklemlerin çözümü analitik olarak bulunamamaktadır. Dolayısıyla nümerik yöntemler kullanılarak en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilir.

3.4.2. En küçük kareler tahmincisi

EWD'nin bilinmeyen α, β ve v parametrelerinin en küçük kareler tahmincileri, EWD'nin (3.74)'de ifade edilen dağılım fonksiyonunun (1.20) eşitliğinde yerine konulmasıyla elde edilen

$$S(\alpha, \beta, v; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \left(\left[1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \right]^v - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.90)$$

fonksiyonun α, β ve v parametrelerine göre minimize edilmesiyle bulunur. $S(\alpha, \beta, v; \mathbf{t})$ fonksiyonunu minimum yapan noktaları bulmak için (3.90)'ın, α, β ve v parametrelerine göre türevleri alındığında ve $m = \left(\left[1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \right]^v - \frac{i}{n+1} \right)$ olmak üzere

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta, v; \mathbf{t})}{\partial \alpha} = -2 \sum_{i=1}^n m \left[1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \right]^{v-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \frac{\beta v}{\alpha} \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta, v; \mathbf{t})}{\partial \beta} = 2 \sum_{i=1}^n m \left[1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \right]^{v-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta v \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right) \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta, v; \mathbf{t})}{\partial v} = 2 \sum_{i=1}^n m \left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \right)^v \ln\left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \right) \quad (3.93)$$

sonuçları elde edilir. (3.91)-(3.93) denklemleri sıfıra eşitlenerek elde edilen çözüm EWD'nin α, β ve v parametreleri için en küçük kareler tahmincileridir. Bu tahminciler sırasıyla $\hat{\alpha}_{LSE}, \hat{\beta}_{LSE}$ ve \hat{v}_{LSE} olarak gösterilir. Bu denklemlerin analitik çözümü bulunamadığından Newton-Ralphson gibi nümerik yöntemler kullanılarak en küçük kareler tahmin edicileri elde edilir.

3.4.3. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincisi

EWD'nin bilinmeyen α, β ve v parametrelerinin ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincileri,

$$W(\alpha, \beta, v; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(\left[1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \right]^v - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.94)$$

fonksiyonu α, β ve v parametrelerine göre minimize edilerek bulunur. $W(\alpha, \beta, v; \mathbf{t})$ 'nin bu parametrelere göre türevi alındığında ve $m = \left(\left[1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \right]^v - \frac{i}{n+1} \right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\alpha, \beta, v; \mathbf{t})}{\partial \alpha} &= -2 \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} m \\ &\times \left[1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \right]^{v-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \frac{\beta v}{\alpha} \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\alpha, \beta, v; \mathbf{t})}{\partial \beta} &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} m \\ &\times \left[1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \right]^{v-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta v \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right) \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\alpha, \beta, v; \mathbf{t})}{\partial v} &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} m \left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \right)^v \\ &\times \ln\left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \right) \end{aligned} \quad (3.97)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler sıfıra eşitlenerek EWD'nin ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincileri elde edilir. Bu tahminciler sırasıyla $\hat{\alpha}_{WLSE}$, $\hat{\beta}_{WLSE}$ ve \hat{v}_{WLSE} 'dir. Denklemlerin çözümü analitik olarak mümkün olmadığı için nümerik yöntemler kullanılarak ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmin edicileri bulunabilir.

3.5. Weibull Geometrik Dağılımı

Weibull geometrik dağılımı, genelleştirme yöntemlerinden VI. olan birleşim (compounding) özelliği kullanılarak elde edilir. $\{X\}_{i=1}^Z$, rassal değişkenleri bağımsız ve aynı $WD(\alpha, \beta)$ dağılımına ve Z rassal değişkeni $z \in N$ ve $p \in (0,1)$ için olasılık fonksiyonu $P(z; p) = (1-p)p^{z-1}$ olan geometrik dağılıma sahip olsun.

$$T = \min\{X_1, X_2, \dots, X_Z\} \quad (3.98)$$

şeklinde tanımlanan rassal değişkenin dağılımı

$$g(t) = \beta \alpha^{-\beta} (1-p) t^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} \left\{ 1 - p e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} \right\}^{-2}, \quad t > 0 \quad (3.99)$$

olarak ifade edilen Weibull geometrik dağılımına sahiptir. (3.99) ifadesine integral uygulandığında Weibull geometrik dağılımının (WGD) dağılım fonksiyonu

$$G(t) = \frac{1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}}{1 - p e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}}, \quad t > 0 \quad (3.100)$$

biçiminde elde edilir. Yaşam fonksiyonu ise $\bar{G}(t) = 1 - G(t)$ ifadesinde

$$\bar{G}(t) = 1 - \frac{1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}}{1 - pe^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}}$$

bazı düzenlemeler yapıldığında

$$\bar{G}(t) = \frac{(1-p)e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}}{1 - pe^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}} \quad (3.101)$$

olarak elde edilir. Hazard fonksiyonu

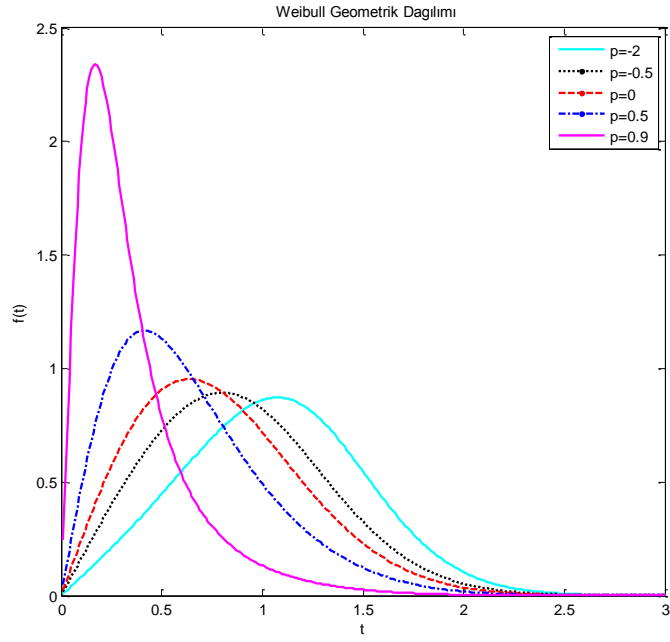
$$h(t) = \frac{\beta\alpha^{-\beta}t^{\beta-1}}{1 - pe^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}} \quad t > 0 \quad (3.102)$$

olarak bulunur. WGD'nin hazard fonksiyonu; monoton artan, monoton azalan, tekmodlu ve tekmodlu ardından artan şeklindedir. Quantile fonksiyonu ise

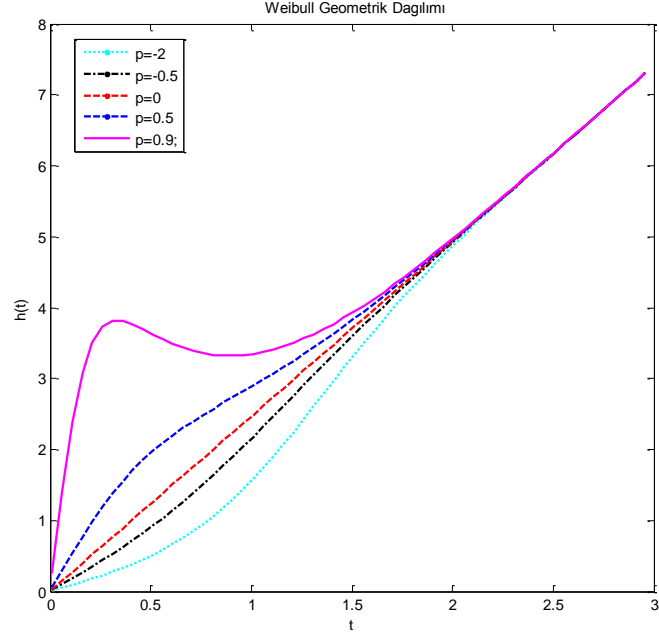
$$Q(u) = \alpha \left[\ln \left(\frac{1-up}{1-u} \right) \right]^{1/\beta} \quad (3.103)$$

olarak elde edilir.

Farklı α, β ve p parametre değerleri için WGD'nin olasılık yoğunluk ve hazard fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla Şekil 3.9 ve Şekil 3.10'da verilmiştir.



Şekil 3.9. $\alpha = 0,9$, $\beta = 2$ olduğunda p 'nin farklı değerleri için WGD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.10. $\alpha = 0,9$, $\beta = 2$ olduğunda p 'nin farklı değerleri için WGD'nin hazard fonksiyonunun grafiği

WGD'nin sıfır etrafındaki k . momenti

$$E(T^k) = \int_0^{\infty} \beta \alpha^{-\beta} (1-p) t^{k+\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} \left\{1 - p e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}\right\}^{-2} dt \quad (3.104)$$

(3.104) denkleminde $\left\{1 - p e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}\right\}^{-2}$ ifadesinde (1.16)'daki seri açılımı uygulandığında

$$\left\{1 - p e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}\right\}^{-2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2+j) p^j e^{-j\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}}{\Gamma(2)j!} \quad (3.105)$$

ve $y = (j+1)\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta$ dönüşümüyle birlikte $t = \alpha\left(\frac{y}{j+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}$, $dt = \frac{\alpha y^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta(j+1)^{\frac{1}{\beta}}} dy$ bilgileri

kullanıldığında bazı düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned} E(T^k) &= \sum_{j=0}^{\infty} (1+j)p^j \int_0^{\infty} \beta \alpha^{-\beta} (1-p) \left(\alpha\left(\frac{y}{j+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{k+\beta-1} \\ &\quad \times e^{-y} \frac{\alpha y^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta(j+1)^{\frac{1}{\beta}}} dy \\ E(T^k) &= \alpha^k (1-p) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p^j}{(1+j)^\beta} \int_0^{\infty} y^{\frac{k}{\beta}} e^{-y} dy \\ E(T^k) &= \alpha^k (1-p) \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p^j}{(j+1)^\beta} \end{aligned} \quad (3.106)$$

şeklinde elde edilir.

$|p| \leq 1$ için (3.106) ifadesi

$$E(T^k) = \frac{\alpha^k (1-p) \Gamma\left(\frac{k}{\beta} + 1\right)}{p} L\left(p; \frac{k}{\beta}\right) \quad (3.107)$$

olarak bulunur (Barreto-Souza vd., 2011, s. 649).

$$L(p; a) = \sum_{j=1}^{\infty} p^j j^{-a} \quad (3.108)$$

Burada $L(p; a)$ Euler'in polilogaritmik fonksiyonudur (Erdelyi vd., 1953, s. 31).

3.5.1. En çok olabilirlik tahmincisi

$T = (T_1, T_2, \dots, T_n)'$, $WGD(\alpha, \beta, p)$ dağılımından n birimlik rassal bir örneklem olsun. Bu durumda olabilirlik fonksiyonu

$$L(\alpha, \beta, p; \mathbf{t}) = \prod_{i=1}^n \beta \alpha^{-\beta} (1-p) t_i^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \left\{ 1 - p e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \right\}^{-2} \quad (3.109)$$

ve log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha, \beta, p; \mathbf{t}) &= n[\ln \beta - \beta \ln \alpha + \ln(1-p)] \\ &+ (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta - 2 \sum_{i=1}^n \ln \left[1 - p e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \right] \end{aligned} \quad (3.110)$$

olarak bulunur. $\ln L(\alpha, \beta, p; \mathbf{t})$ fonksiyonunu maksimum yapan noktaları bulmak için (3.110)'un, α, β ve p parametrelerine göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, p; \mathbf{t})}{\partial \alpha} = \frac{-n\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta + 2p \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}{1 - p e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}} = 0 \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, p; \mathbf{t})}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} - n \ln \alpha + \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln \left(\frac{t_i}{\alpha}\right) + \\ &- 2p \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)}{1 - p e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}} = 0 \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, p; \mathbf{t})}{\partial p} = \frac{-n}{(1-p)} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{\left\{ 1 - p e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \right\}} = 0 \quad (3.113)$$

elde edilir ve (3.111)- (3.113)'ün çözümü WGD'nin α, β ve p parametreleri için en çok olabilirlik tahmincileridir. Bu tahminciler sırasıyla $\hat{\alpha}_{MLE}, \hat{\beta}_{MLE}$ ve \hat{p}_{MLE} 'dir. Denklemlerin

çözümü analitik olarak bulunamamaktadır. Nümerik yöntemler kullanılarak en çok olabilirlik tahmin edicileri bulunabilir.

3.5.2. En küçük kareler tahmincisi

WGD'nin bilinmeyen α, β ve p parametrelerinin en küçük kareler tahmincileri,

$$S(\alpha, \beta, p; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{1 - pe^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}} - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.114)$$

fonksiyonunun α, β ve p parametrelerine göre minimize edilmesiyle bulunur. $S(\alpha, \beta, p; \mathbf{t})$ fonksiyonunun α, β ve p 'ye göre türevi alındığında, $r = 1 - pe^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\alpha, \beta, p; \mathbf{t})}{\partial \alpha} &= 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{r} - \frac{i}{n+1} \right) \\ &\times \left(\frac{\frac{p\beta}{\alpha} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{r^2} - \frac{\frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{r} \right) \end{aligned} \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\alpha, \beta, p; \mathbf{t})}{\partial \beta} &= -2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{r} - \frac{i}{n+1} \right) \\ &\times \left(\frac{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{r} - \frac{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} p \left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}\right)}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (3.116)$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta, p; \mathbf{t})}{\partial p} = 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{r} - \frac{i}{n+1} \right) \frac{\left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{r^2} \quad (3.117)$$

ve bu denklemler sıfıra eşitlendiğinde WGD'nin en küçük kareler tahmincileri elde edilir. Denklemlerin çözümü analitik olarak bulunamadığından nümerik yöntemler kullanılarak en küçük kareler tahmin edicileri bulunabilir.

3.5.3. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincisi

WGD'nin bilinmeyen α, β ve p parametrelerinin ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincileri,

$$W(\alpha, \beta, p; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{1 - pe^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}} - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.118)$$

fonksiyonunun α, β ve p parametrelerine göre minimize edilmesiyle bulunur. $W(\alpha, \beta, p; \mathbf{t})$ fonksiyonunu minimum yapan noktaları bulmak için (3.118)'in, α, β ve p parametrelerine göre türevi alındığında ve $r = 1 - pe^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\alpha, \beta, p; \mathbf{t})}{\partial \alpha} &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{r} - \frac{i}{n+1} \right) \\ &\times \left(\frac{\frac{p\beta}{\alpha} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{r^2} - \frac{\frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{r} \right) \end{aligned} \quad (3.119)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\alpha, \beta, p; \mathbf{t})}{\partial \beta} &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{r} - \frac{i}{n+1} \right) \\ &\times \left(\frac{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{r} - \frac{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} p \left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}\right)}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (3.120)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\alpha, \beta, p; \mathbf{t})}{\partial p} = & 2 \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{r} - \frac{i}{n+1} \right) \\ & \times \left(\frac{\left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (3.121)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler sıfıra eşitlenerek WGD'nin ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincileri bulunur. Bu tahminciler sırasıyla $\hat{\alpha}_{WLSE}$, $\hat{\beta}_{WLSE}$ ve \hat{p}_{WLSE} 'dir. Denklemlerin çözümü analitik olarak bulunamadığı için nümerik yöntemler kullanılarak ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmin edicileri bulunabilir.

3.6. Odd Weibull Dağılımı

Odd Weibull dağılımı, Weibull ve Inverse Weibull dağılımlarının oranlarının dağılımı göz önüne alınarak elde edilir. Odd Weibull dağılımının dağılım fonksiyonu

$$G(t) = \frac{F^\theta(t)}{F^\theta(t) + (1 - F(t))^\theta} \quad \theta, \beta > 0 \quad (3.122)$$

$$G(t) = \frac{F_I^{-\theta}(t)}{F_I^{-\theta}(t) + (1 - F_I(t))^{-\theta}} \quad \theta, \beta < 0 \quad (3.123)$$

ifadelerinden elde edilir. Burada $F(t)$, Weibull dağılımının dağılım fonksiyonu iken, $F_I(t)$ Inverse Weibull dağılımının dağılım fonksiyonudur. $F(t)$, (3.122) ifadesinde yerine konulduğunda Odd Weibull dağılımının (OddWD) dağılım fonksiyonu

$$G(t) = 1 - \left[1 + \left(e^{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} - 1 \right)^\theta \right]^{-1} \quad 0 < t < \infty, 0 < \alpha, 0 < \beta, \quad 0 < \theta \quad (3.124)$$

olarak elde edilir. OddWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$g(t) = \frac{\theta f(t) F^{\theta-1}(t) (1 - F(t))^{\theta-1}}{\left[F^\theta(t) + (1 - F(t))^\theta \right]^2} \quad \theta, \beta > 0 \quad (3.125)$$

$$g(t) = \frac{-\theta f_I(t) F_I^{-\theta-1}(t) (1 - F_I(t))^{-\theta-1}}{\left[F_I^{-\theta}(t) + (1 - F_I(t))^{-\theta} \right]^2} \quad \theta, \beta < 0 \quad (3.126)$$

ifadelerinden elde edilir. Burada $f(t)$, Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu iken $f_I(t)$, Inverse Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonudur (Cooray, 2015, s. 73). Gerekli düzenlemeler yapıldığında OddWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(t) = \left(\frac{\theta\beta}{t} \right) \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta e^{\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta} \left(e^{\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta} - 1 \right)^{\theta-1} \left(1 + \left(e^{\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta} - 1 \right)^\theta \right)^{-2} \quad (3.127)$$

olarak elde edilir. Burada α ölçek, β, θ şekil parametreleri olmak üzere OddWD, $T \sim \text{OddWD}(\alpha, \beta, \theta)$ şeklinde gösterilebilir. $\theta = 1$ olduğunda OddWD, Weibull dağılımına, $\theta = -1$ olduğunda ise IWD'ye dönüşmektedir.

OddWD'nin hazard fonksiyonu ise

$$h(t) = \left(\frac{\theta\beta}{t} \right) \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta e^{\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta} \left(e^{\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta} - 1 \right)^{\theta-1} \left(1 + \left(e^{\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta} - 1 \right)^\theta \right)^{-1} \quad (3.128)$$

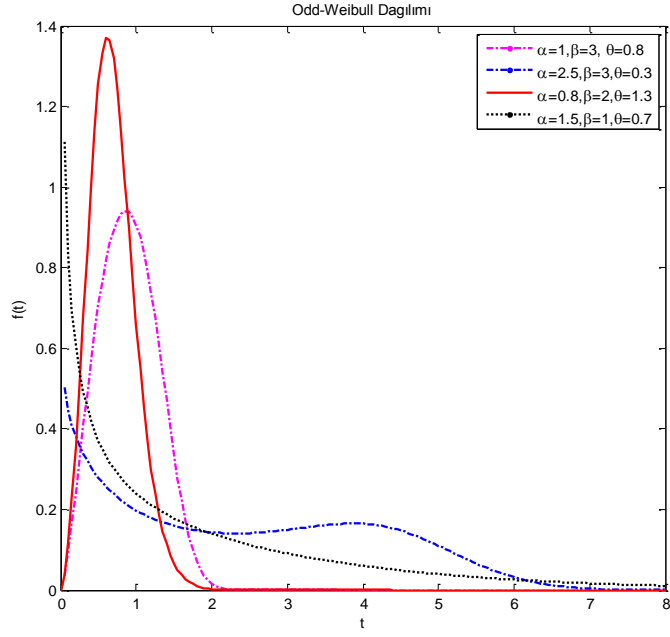
olarak bulunur. OddWD'nin hazard fonksiyonu

- $\theta = 1$ ve $\beta = 1$ olduğunda sabit,
- $\beta > 0$, $\theta = 1$ olduğu durumda monoton (Weibull),
- $\beta < 0$, $\theta < 0$ ve $0 < \beta < 1$, $\beta\theta \geq 1$ için tekmodlu,
- $\beta > 1$, $0 < \theta\beta \leq 1$ olduğunda ise küvet eğrisi şeklindedir (Cooray, 2012, s. 2665).

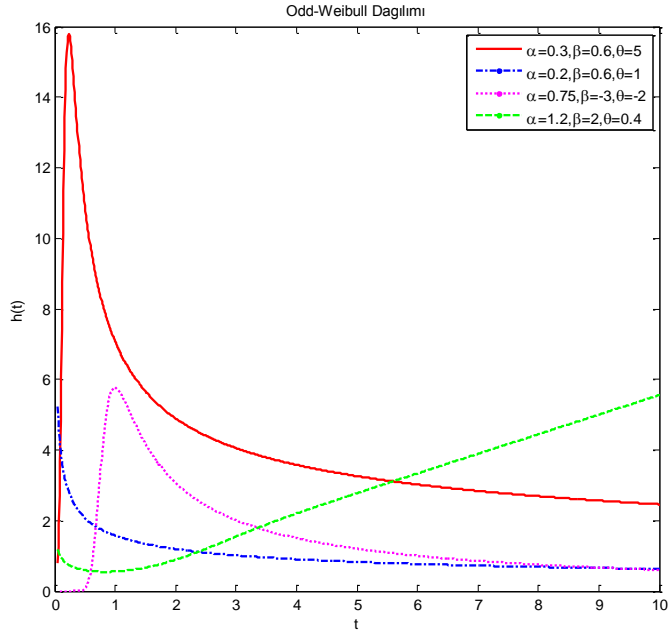
Quantile fonksiyonu

$$Q(u) = \alpha \ln^{1/\beta} \left(1 + \left(\frac{u}{1-u} \right)^{1/\theta} \right) \quad (3.129)$$

olarak bulunur. Farklı α, β ve θ parametre değerleri için OddWD'nin olasılık yoğunluk ve hazard fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla Şekil 3.11 ve Şekil 3.12'de verilmiştir.



Şekil 3.11. α, β, θ 'nin farklı değerleri için OddWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.12. α, β, θ 'nin farklı değerleri için OddWD'nin hazard fonksiyonunun grafiği

3.6.1. En çok olabilirlik tahmincisi

$\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)'$, $OddWD(\alpha, \beta, \theta)$ dağılımından n birimlik rassal bir örneklem olsun. Bu durumda olabilirlik fonksiyonu

$$L(\alpha, \beta, \theta; \mathbf{t}) = \left(\frac{\theta\beta}{t_i}\right) \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1\right)^{\theta-1} \left(1 + \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1\right)^\theta\right)^{-2} \quad (3.130)$$

ve log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha, \beta, \theta; \mathbf{t}) &= n \ln \beta + n \ln \theta + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \beta n \ln \alpha + \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \\ &+ (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \ln\left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1\right) - 2 \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1\right)^\theta\right) \end{aligned} \quad (3.131)$$

olarak elde edilir. $\ln L(\alpha, \beta, \theta; \mathbf{t})$ fonksiyonunu maksimum yapan noktaları bulmak için

(3.131) ifadesinde α, β ve θ parametrelerine göre türevi alındığında, $k = \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, \theta; \mathbf{t})}{\partial \alpha} &= \frac{-n\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta - \frac{\beta(\theta - 1)}{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{k}{e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1} \\ &+ 2 \frac{\beta\theta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{k \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1\right)^{\theta-1}}{1 + \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1\right)^\theta} \end{aligned} \quad (3.132)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, \theta; \mathbf{t})}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - n \ln \alpha + \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right) + \\ &+ (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{k \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)}{e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1} - 2\theta \sum_{i=1}^n \frac{k \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1\right)^{\theta-1} \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)}{1 + \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1\right)^\theta} \end{aligned} \quad (3.133)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, \theta; \mathbf{t})}{\partial \theta} &= \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1 \right) \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1 \right)^\theta \ln \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1 \right)}{1 + \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1 \right)^\theta} \end{aligned} \quad (3.134)$$

denklem (3.132)-(3.134) elde edilir. Bu denklemler sıfıra eşitlenerek en çok olabilirlik tahmincileri elde edilir. Denklemlerin çözümü OddWD'nin en çok olabilirlik tahmincileridir $(\hat{\alpha}_{MLE}, \hat{\beta}_{MLE}, \hat{\theta}_{MLE})$ ve çözüm analitik olarak mümkün olmadığı için nümerik yöntemler kullanılarak en çok olabilirlik tahmin edicileri bulunabilir.

3.6.2. En küçük kareler tahmincisi

OddWD'nin bilinmeyen α, β, θ parametrelerinin en küçük kareler tahmincisi,

$$S(\alpha, \beta, \theta; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \left(\left(1 - \left[1 + \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1 \right)^\theta \right]^{-1} \right) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.135)$$

fonksiyonunun α, β ve θ parametrelerine göre türevleri alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

$$k = \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\alpha, \beta, \theta; \mathbf{t})}{\partial \alpha} &= \frac{-2 \sum_{i=1}^n \left(\left(1 - \left[1 + \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1 \right)^\theta \right]^{-1} \right) - \frac{i}{n+1} \right)}{\left[1 + \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1 \right)^\theta \right]^2} \\ &\quad \times \frac{\beta \theta}{\alpha} k \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1 \right)^{\theta-1} = 0 \end{aligned} \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\alpha, \beta, \theta; \mathbf{t})}{\partial \beta} &= \frac{2 \sum_{i=1}^n \left(\left(1 - \left[1 + \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta} - 1 \right)^\theta \right]^{-1} \right) - \frac{i}{n+1} \right)}{\left[1 + \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta} - 1 \right)^\theta \right]^2} \\ &\quad \times k \theta \ln \left(\frac{t_i}{\alpha} \right) \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta} - 1 \right)^{\theta-1} = 0 \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\alpha, \beta, \theta; \mathbf{t})}{\partial \theta} &= \frac{2 \sum_{i=1}^n \left(\left(1 - \left[1 + \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta} - 1 \right)^\theta \right]^{-1} \right) - \frac{i}{n+1} \right)}{\left[1 + \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta} - 1 \right)^\theta \right]^2} \\ &\quad \times \ln \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta} - 1 \right) \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta} - 1 \right)^\theta = 0 \end{aligned} \quad (3.138)$$

elde edilen denklemlerin çözümü OddWD'nin en küçük kareler tahmincileridir $(\hat{\alpha}_{LSE}, \hat{\beta}_{LSE}, \hat{\theta}_{LSE})$. Bu denklemlerin çözümü analitik olarak bulunamadığından Newton-Raphson gibi nümerik yöntemler kullanılarak en küçük kareler tahmin edicileri bulunabilir.

3.6.3. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincisi

OddWD'nin bilinmeyen α, β, θ parametrelerinin ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincileri,

$$\begin{aligned} W(\alpha, \beta, \theta; \mathbf{t}) &= \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \\ &\quad \times \left(\left(1 - \left[1 + \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta} - 1 \right)^\theta \right]^{-1} \right) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.139)$$

fonksiyonunun α, β ve θ parametrelerine göre minimize edilmesiyle bulunur. $W(\alpha, \beta, \theta; \mathbf{t})$ fonksiyonunu minimum yapan noktaları bulmak için (3.139)'un α, β ve θ parametrelerine göre türevi alındığında

$$k = \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \text{ ve } d = \left(\left(1 - \left[1 + \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1 \right)^\theta \right]^{-1} \right) - \frac{i}{n+1} \right) \text{ olmak üzere}$$

$$\frac{\partial W(\alpha, \beta, \theta; \mathbf{t})}{\partial \alpha} = \frac{-2 \sum_{i=1}^n \frac{d(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \beta \theta}{\left[1 + \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1 \right)^\theta \right]^2} k \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1 \right)^{\theta-1} = 0 \quad (3.140)$$

$$\frac{\partial W(\alpha, \beta, \theta; \mathbf{t})}{\partial \beta} = \frac{2 \sum_{i=1}^n \frac{d(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)}}{\left[1 + \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1 \right)^\theta \right]^2} \theta k \ln \left(\frac{t_i}{\alpha} \right) \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1 \right)^{\theta-1} = 0 \quad (3.141)$$

$$\frac{\partial W(\alpha, \beta, \theta; \mathbf{t})}{\partial \theta} = \frac{2 \sum_{i=1}^n \frac{d(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)}}{\left[1 + \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1 \right)^\theta \right]^2} \ln \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1 \right) \left(e^{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} - 1 \right)^\theta = 0 \quad (3.142)$$

denklem (3.140)-(3.142) elde edilir. Bu denklemlerin çözümü OddWD'nin ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincileri $\hat{\alpha}_{WLSE}, \hat{\beta}_{WLSE}, \hat{\theta}_{WLSE}$ 'dir. Denklemlerin çözümü analitik olarak bulunamadığından nümerik yöntemler kullanılarak elde edilebilir.

3.7. Marshall Olkin Extended Weibull Dağılımı

Genelleştirme yöntemlerinden VIII. olan mevcut dağılıma eğim parametresi eklenerek elde edilir. Marshall ve Olkin (1997, s. 641), mevcut dağılıma yeni bir parametre ekleyerek daha geniş ve esnek bir dağılımlar ailesi elde etmek için yeni bir metod önermiştir.

T rassal değişkeni q boyutlu $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)^T$ parametre vektörüne bağlı ve $\lambda > 0$ bir parametre olsun. T rassal değişkeninin yaşam fonksiyonu $\bar{F}(t) = P(T > t)$ olmak üzere, Marshall Olkin extended dağılımının yaşam fonksiyonu

$$\bar{G}(t) = \frac{\lambda \bar{F}(t)}{1 - (1 - \lambda) \bar{F}(t)}, \quad -\infty < t < \infty, \quad \lambda > 0 \quad (3.143)$$

Olarak tanımlanır ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(t) = \frac{\lambda f(t)}{[1 - (1 - \lambda) \bar{F}(t)]^2}, \quad -\infty < t < \infty \quad (3.144)$$

biçiminde elde edilir (Cordeiro ve Lemonte, 2013, s. 334).

Weibull dağılımının (2.3)'de verilen $\bar{F}(t)$, (3.143)'de yerine konulduğunda Marshall Olkin extended Weibull dağılımının (MOEWD) yaşam fonksiyonu

$$\bar{G}(t) = \frac{\lambda e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}}{1 - (1 - \lambda) e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}} \quad (3.145)$$

ve dağılım fonksiyonu

$$G(t) = 1 - \bar{G}(t) = \frac{1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}}{1 - (1 - \lambda) e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}} \quad (3.146)$$

olarak elde edilir. (3.146) eşitliğinde t' ye göre türev alındığında MOEWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g(t) = \frac{\lambda \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}}{\left[1 - (1 - \lambda) e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}\right]^2} \quad (3.147)$$

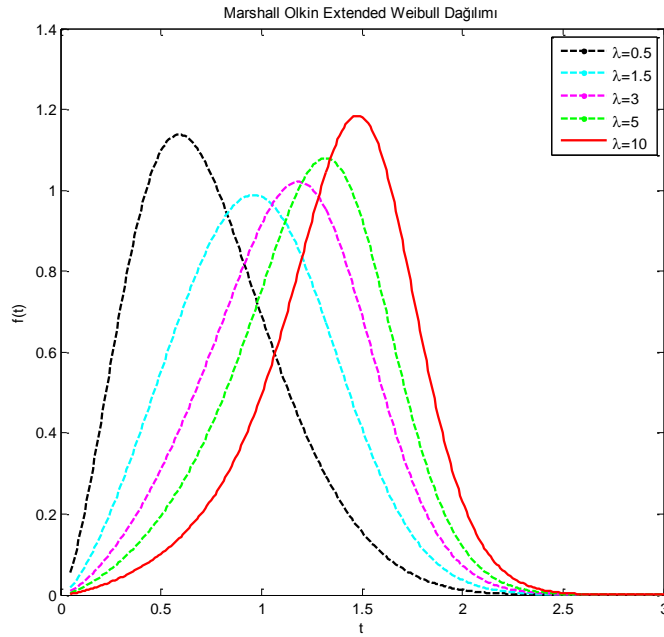
MOEWD'nin hazard fonksiyonu

$$h(t) = \frac{\frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}}{1 - (1 - \lambda)e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}} \quad (3.148)$$

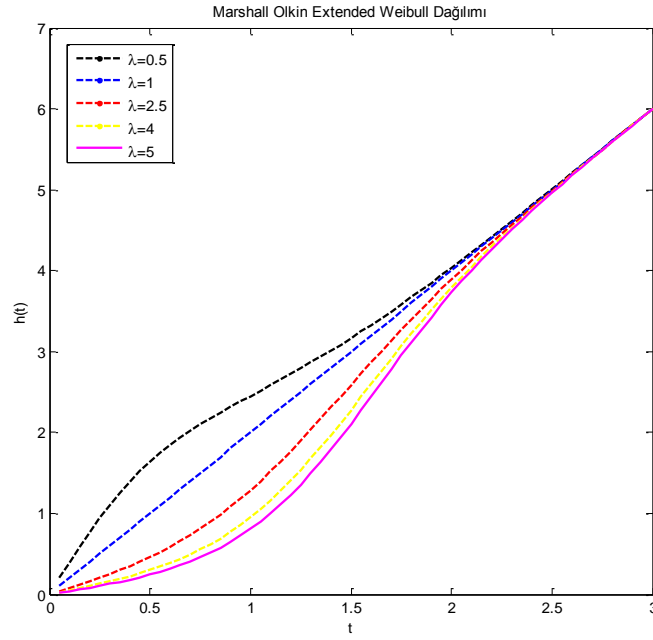
ve quantile fonksiyonu ise

$$Q(u) = \alpha \left(\ln \left(\frac{1 - (1 - \lambda)u}{1 - u} \right) \right)^{1/\beta} \quad (3.149)$$

olarak bulunur. MOEWD'nin α, β, λ parametrelerinin farklı değerleri için olasılık yoğunluk ve hazard fonksiyonu grafikleri Şekil 3.13 ve Şekil 3.14'te verilmiştir.



Şekil 3.13. $\alpha = 1$, $\beta = 2,5$ olduğunda λ 'nın farklı değerleri için MOEWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.14. $\alpha = 1$, $\beta = 2$ olduğunda λ 'nın farklı değerleri için MOEWD'nin hazard fonksiyonunun grafiği

MOEWD'nin hazard fonksiyonu

- $\lambda \geq 1$, $\beta > 1$ veya $\lambda > 1$, $\beta \geq 1$ olduğunda artan,
- $\lambda \leq 1$, $\beta < 1$ veya $\lambda < 1$, $\beta \leq 1$ olduğunda azalan,
- $\lambda < 1$, $\beta > 1$ olduğu durumda hazard fonksiyonu başlangıçta ve sonunda artan fakat azalan olduğu bir aralıkta mevcut olabilir.
- $\lambda > 1$, $\beta < 1$ olduğu durumda ise başlangıçta ve sonunda azalan fakat artan olduğu bir aralıkta mevcut olabilir (Zhang ve Xie, 2007, s. 582).

MOEWD'nin sıfır etrafındaki k . momentini elde etmek için

$$E(T^k) = \int_0^{\infty} \frac{t^{k+\beta-1} \lambda \beta \frac{1}{\alpha^\beta} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}}{\left[1 - (1-\lambda)e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}\right]^2} dt \quad (3.150)$$

(3.150) eşitliğinin paydasındaki ifadeye (1.16)'daki seri açılımı uygulanıp

$$\left[1 - (1 - \lambda)e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}\right]^{-2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2 + j)(1 - \lambda)^j e^{-j\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}}{\Gamma(2)j!} \quad (3.151)$$

$\Gamma(2 + j) = (1 + j)\Gamma(1 + j)$, $\Gamma(1 + j) = j!$ bilgileri ve $y = (j + 1)\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta$ dönüşümüyle

$t = \alpha\left(\frac{y}{j+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}$, $dt = \frac{\alpha y^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta(j+1)^{\frac{1}{\beta}}} dy$ kullanıldığında

$$E(T^k) = \sum_{j=0}^{\infty} (j + 1)(1 - \lambda)^j \int_0^{\infty} \lambda \beta \frac{1}{\alpha^\beta} \left(\alpha\left(\frac{y}{j+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{k+\beta-1} e^{-y} \frac{\alpha y^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta(j+1)^{\frac{1}{\beta}}} dy$$

ve bazı düzenlemeler yapıldığında

$$E(T^k) = \alpha^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda(1 - \lambda)^j}{(j + 1)^{\frac{k}{\beta}}} \quad (3.152)$$

olarak elde edilir (Cordeiro ve Lemonte, 2013, s. 338).

3.7.1. En çok olabilirlik tahmincisi

$\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)'$, $MOEWD(\alpha, \beta, \lambda)$ dağılımından n birimlik rassal bir örneklem olsun. Bu durumda olabilirlik fonksiyonu

$$L(\alpha, \beta, \lambda; \mathbf{t}) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{\left[1 - (1 - \lambda)e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}\right]^2} \quad (3.153)$$

ve log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha, \beta, \lambda; \mathbf{t}) &= n \ln \lambda + n \ln \beta - n\beta \ln \alpha + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta - 2 \sum_{i=1}^n \ln\left(1 - (1 - \lambda)e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}\right) \end{aligned} \quad (3.154)$$

olarak bulunur. $\ln L(\alpha, \beta, \lambda; \mathbf{t})$ fonksiyonunu maksimum yapan noktaları bulmak için (3.154) ifadesinde , α , β ve λ parametrelerine göre türevi alındığında ve

$v = 1 - (1 - \lambda)e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}$ olmak üzere

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, \lambda; \mathbf{t})}{\partial \alpha} = \frac{-n\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta + 2(1 - \lambda) \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{v} \quad (3.155)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, \lambda; \mathbf{t})}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} - n \ln \alpha + \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right) \\ &\quad - 2(1 - \lambda) \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)}{v} \end{aligned} \quad (3.156)$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, \lambda; \mathbf{t})}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{v} \quad (3.157)$$

denklemleri elde edilir. (3.155)-(3.157) denklemlerinin sıfıra eşitlenerek elde edilen çözümü MOEWD'nin en çok olabilirlik tahmincileridir ($\hat{\alpha}_{MLE}, \hat{\beta}_{MLE}, \hat{\lambda}_{MLE}$). Bu denklemlerin çözümü analitik olarak mümkün olmadığı için nümerik yöntemler kullanılarak en çok olabilirlik tahmin edicileri bulunabilir.

3.7.2. En küçük kareler tahmincisi

MOEWD'nin bilinmeyen α, β, λ parametrelerinin en küçük kareler tahmincisi,

$$S(\alpha, \beta, \lambda; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{1 - (1 - \lambda)e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}} - \frac{i}{n + 1} \right)^2 \quad (3.158)$$

fonksiyonunun α, β ve λ parametrelerine göre minimize edilmesiyle bulunur. $S(\alpha, \beta, \lambda; \mathbf{t})$ fonksiyonunu minimum yapan noktaları bulmak için (3.158)'in, α, β ve λ parametrelerine göre türevi alındığında ve $v = 1 - (1 - \lambda)e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\alpha, \beta, \lambda; \mathbf{t})}{\partial \alpha} &= 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{v} - \frac{i}{n + 1} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta (1 - \lambda) \left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{v^2} - \frac{\frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{v} \right) \end{aligned} \quad (3.159)$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta, \lambda; \mathbf{t})}{\partial \beta} = 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{v} - \frac{i}{n+1} \right) \times \left(\frac{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{v} - \frac{(1-\lambda)\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}\right)}{v^2} \right) \quad (3.160)$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta, \lambda; \mathbf{t})}{\partial \lambda} = -2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{v} - \frac{i}{n+1} \right) \left(\frac{\left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{v^2} \right) \quad (3.161)$$

olarak elde edilir. Bu denklemler sıfıra eşitlenerek MOEWD'nin en küçük kareler tahmincileri $\hat{\alpha}_{LSE}, \hat{\beta}_{LSE}, \hat{\lambda}_{LSE}$ elde edilir. Denklemlerin çözümü analitik olarak bulunamadığından nümerik yöntemler kullanılarak tahminciler bulunabilir.

3.7.3. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincisi

MOEWD'nin ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincileri, (3.162) eşitliği α, β, λ bilinmeyen parametrelerine göre minimize edilerek elde edilir.

$$W(\alpha, \beta, \lambda; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{1 - (1-\lambda)e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}} - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.162)$$

$W(\alpha, \beta, \lambda; \mathbf{t})$ fonksiyonunun α, β, λ parametrelerine göre türevi alındığında,

$$v = 1 - (1-\lambda)e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \text{ ve } w = \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \text{ olmak üzere}$$

$$\frac{\partial W(\alpha, \beta, \lambda; \mathbf{t})}{\partial \alpha} = 2 \sum_{i=1}^n w \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{v} - \frac{i}{n+1} \right)$$

$$\times \left(\frac{\frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta (1-\lambda) \left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{v^2} - \frac{\frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{v} \right) \quad (3.163)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\alpha, \beta, \lambda; \mathbf{t})}{\partial \beta} &= 2 \sum_{i=1}^n w \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{v} - \frac{i}{n+1} \right) \\ &\times \left(\frac{\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{v} - \frac{(1-\lambda) \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta} \left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}\right)}{v^2} \right) \end{aligned} \quad (3.164)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\alpha, \beta, \lambda; \mathbf{t})}{\partial \lambda} &= -2 \sum_{i=1}^n w \left(\frac{1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{v} - \frac{i}{n+1} \right) \\ &\times \left(\frac{\left(1 - e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}\right) e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{v^2} \right) \end{aligned} \quad (3.165)$$

(3.163)-(3.165) denklemleri elde edilir. Bu denklemler sıfıra eşitildikten sonra nümerik yöntemler kullanıldığında MOEWD'nin ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincileri bulunur.

3.8. Gamma Weibull Dağılımı

Stacy (1962, s. 1187), Gamma dağılımını kullanarak yeni bir dağılım önermiştir. Bu yeni dağılım Gamma Weibull dağılımı (GammaWD) olarak bilinmektedir. Üç parametreye sahip olan bu dağılım $T \sim \text{GammaWD}(\alpha, \beta, c)$ biçiminde ifade edilir. GammaWD'nin dağılım fonksiyonu

$$F(t) = \Gamma(c)^{-1} \gamma \left(c, \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right) \quad (3.166)$$

olmak üzere (3.166) ifadesindeki $\gamma(a, t)$,

$$\gamma(a, t) = \int_0^t t^{a-1} e^{-t} dt \quad (3.167)$$

tamamlanmamış gamma fonksiyonu olarak adlandırılır. Dağılım fonksiyonunun t 'ye göre türevi alındığında olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(t) = \frac{\beta \alpha^{-\beta c} t^{\beta c - 1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}}{\Gamma(c)} \quad \alpha, \beta, c > 0 \quad (3.168)$$

olarak elde edilir. GammaWD, $\beta = 1$ olduğunda Gamma dağılımına, $c = 1$ olduğunda Weibull dağılımına dönüşmektedir. GammaWD'nin hazard fonksiyonu

$$h(t) = \frac{\beta \alpha^{-\beta c} t^{\beta c - 1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}}{\Gamma(c) - \gamma\left(c, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right)} \quad (3.169)$$

olarak elde edilir (Nadarajah, 2009, s. 861). GammaWD'nin hazard fonksiyonu; $\beta c < 1$ durumu için

- $\beta < 1$ ise azalan,
- $\beta > 1$ ise küvet eğrisi şeklindedir.

$\beta c > 1$ durumu için

- $\beta > 1$ ise artan,
- $\beta < 1$ ise başaşağı küvet eğrisi şeklindedir.

$\beta c = 1$ durumu için

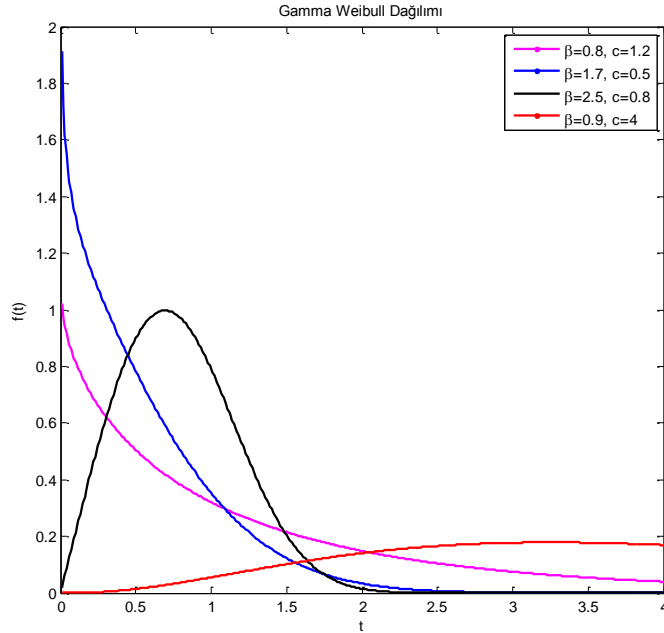
- $\beta = 1$ ve $c = 1$ ise sabit,
- $\beta < 1$ ise azalan,
- $\beta > 1$ ise artan şekillidir (Lai, 2014, s. 33).

Quantile fonksiyonu ise (3.166) eşitliğinde $F(t) = u$ dönüşümü kullanıldığında

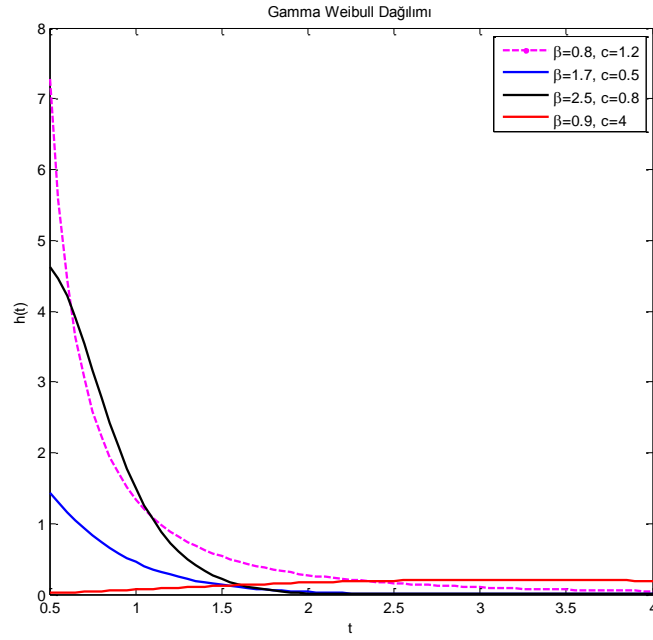
$$F(t) = \Gamma(c)^{-1} \gamma\left(c, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right)$$

$$\begin{aligned}
F^{-1}(t) &= \Gamma(c)\gamma_{(t)}^{-1}\left(c, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right) \\
\gamma_{(t)}^{-1}\left(c, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right) &= \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta \\
\gamma_{(t)}^{-1}\left(c, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} &= \frac{t}{\alpha} \\
\alpha\gamma_{(t)}^{-1}\left(c, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} &= t
\end{aligned} \tag{3.170}$$

olarak elde edilir. GammaWD'nin parametrelerinin farklı değerleri için olasılık yoğunluk ve hazard fonksiyonlarının grafikleri Şekil 3.15 ve Şekil 3.16'da verilmiştir.



Şekil 3.15. $\alpha = 1$ olduğunda β ve c 'nin farklı değerleri için GammaWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.16. $\alpha = 1$ olduğunda β ve c 'nin farklı değerleri için GammaWD'nin hazard fonksiyonunun grafiği

GammaWD'nin sıfır etrafındaki k . momenti

$$E(T^k) = \int_0^{\infty} \frac{\beta \alpha^{-\beta c} t^{k+\beta c-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}}{\Gamma(c)} dt \quad (3.171)$$

$y = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta$ dönüşümü kullanıldığında

$$E(T^k) = \frac{1}{\Gamma(c)} \beta \alpha^{-\beta c+k-\beta c+1} \frac{\alpha}{\beta} \int_0^{\infty} y^{\frac{k+\beta c}{\beta}-1} e^{-y} dy$$

ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$E(T^k) = \frac{1}{\Gamma(c)} \alpha^k \Gamma\left(c + \frac{k}{\beta}\right) \quad (3.172)$$

olarak bulunur.

3.8.1. En çok olabilirlik tahmincisi

$\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)'$, $\text{GammaWD}(\alpha, \beta, c)$ dağılımından n birimlik rassal bir örneklem olsun. Bu durumda olabilirlik fonksiyonu

$$L(\alpha, \beta, c; \mathbf{t}) = \prod_{i=1}^n \frac{\beta \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\beta c - 1} e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{\Gamma(c)} \quad (3.173)$$

ve log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha, \beta, c; \mathbf{t}) &= -n \ln\{\Gamma(c)\} + n \ln \beta - n\beta c \ln \alpha + (\beta c - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \end{aligned} \quad (3.174)$$

biçiminde elde edilir. (3.174) ifadesinde α, β ve c parametrelerine göre türev alınıp sıfıra eşitlendiğinde

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, c; \mathbf{t})}{\partial \alpha} = -\frac{n\beta c}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta = 0 \quad (3.175)$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, c; \mathbf{t})}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - nc \ln \alpha + c \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_i}{\alpha}\right) = 0 \quad (3.176)$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta, c; \mathbf{t})}{\partial c} = -n\beta \ln \alpha + \beta \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - n\psi(c) = 0 \quad (3.177)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümü GammaWD'nin en çok olabilirlik tahmincileri $(\hat{\alpha}_{MLE}, \hat{\beta}_{MLE}, \hat{c}_{MLE})$ dir. Denklemlerin çözümü analitik olarak mümkün olmadığı için Newton-Raphson gibi nümerik yöntemler kullanılarak en çok olabilirlik tahmin edicileri bulunabilir.

3.8.2. En küçük kareler tahmincisi

GammaWD'nin en küçük kareler tahmincileri,

$$S(\alpha, \beta, c; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \left(\Gamma(c)^{-1} \gamma \left(c, \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.178)$$

fonksiyonunun α, β, c parametrelerine göre minimize edilmesiyle elde edilir. $S(\alpha, \beta, c; \mathbf{t})$ fonksiyonunu minimum yapan noktalar (3.178) eşitliğinde α, β, c parametrelerine göre türev alınıp

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta, c; \mathbf{t})}{\partial \alpha} = 2 \sum_{i=1}^n \left(\Gamma(c)^{-1} \gamma \left(c, \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right) - \frac{i}{n+1} \right) \Gamma(c)^{-1} \frac{\partial \gamma \left(c, \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right)}{\partial \alpha} \quad (3.179)$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta, c; \mathbf{t})}{\partial \beta} = 2 \sum_{i=1}^n \left(\Gamma(c)^{-1} \gamma \left(c, \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right) - \frac{i}{n+1} \right) \Gamma(c)^{-1} \frac{\partial \gamma \left(c, \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right)}{\partial \beta} \quad (3.180)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\alpha, \beta, c; \mathbf{t})}{\partial c} &= -2 \sum_{i=1}^n \left(\Gamma(c)^{-1} \gamma \left(c, \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right) - \frac{i}{n+1} \right) \\ &\quad \times \left(\gamma \left(c, \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right) \frac{\partial \Gamma(c)^{-1}}{\partial c} + \Gamma(c)^{-1} \frac{\partial \gamma \left(c, \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right)}{\partial c} \right) \end{aligned} \quad (3.181)$$

(3.179)-(3.181) denklemleri sıfıra eşitlenerek elde edilir. Bu denklemlerin çözümü GammaWD'nin en küçük kareler tahmincileridir. Denklemlerin çözümü analitik olarak bulunamamaktadır. Nümerik yöntemler kullanılarak GammaWD'nin en küçük kareler tahmincileri $\hat{\alpha}_{LSE}, \hat{\beta}_{LSE}, \hat{c}_{LSE}$ elde edilebilir.

3.8.3. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincisi

GammaWD'nin ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincisi, (3.182) eşitliği α, β, c bilinmeyen parametrelerine göre minimize edilerek elde edilir.

$$W(\alpha, \beta, c; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(\Gamma(c)^{-1} \gamma \left(c, \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.182)$$

$W(\alpha, \beta, c; \mathbf{t})$ fonksiyonunu minimum yapan noktaları bulmak için α, β, c parametrelerine göre türev alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\alpha, \beta, c; \mathbf{t})}{\partial \alpha} &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(\Gamma(c)^{-1} \gamma \left(c, \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right) - \frac{i}{n+1} \right) \\ &\quad \times \Gamma(c)^{-1} \frac{\partial \gamma \left(c, \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right)}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (3.183)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\alpha, \beta, c; \mathbf{t})}{\partial \beta} &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(\Gamma(c)^{-1} \gamma \left(c, \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right) - \frac{i}{n+1} \right) \\ &\quad \times \Gamma(c)^{-1} \frac{\partial \gamma \left(c, \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right)}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (3.184)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\alpha, \beta, c; \mathbf{t})}{\partial c} &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(\Gamma(c)^{-1} \gamma \left(c, \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right) - \frac{i}{n+1} \right) \\ &\quad \times \left(\gamma \left(c, \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right) \frac{\partial \Gamma(c)^{-1}}{\partial c} + \Gamma(c)^{-1} \frac{\partial \gamma \left(c, \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right)}{\partial c} \right) \end{aligned} \quad (3.185)$$

denkmleri elde edilir. Bu denklemlerin sıfıra eşitlenip elde edilen çözümü GammaWD'nin ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincileridir. Denklemlerin çözümü analitik olarak bulunamadığından nümerik yöntemler kullanılarak ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmincileri elde edilebilir.

3.8.4. Momentler tahmincisi

T_1, T_2, \dots, T_n , $GammaWD(\alpha, \beta, c)$ dağılımından n birimlik rassal bir örneklem olsun. Kitlenin üç parametresi olup, $GammaWD(\alpha, \beta, c)$ dağılımının sıfır etrafındaki ilk üç momentini

$$\mu'_1 = E(T) = \frac{1}{\Gamma(c)} \alpha \Gamma \left(c + \frac{1}{\beta} \right) \quad (3.186)$$

$$\mu'_2 = E(T^2) = \frac{1}{\Gamma(c)} \alpha^2 \Gamma \left(c + \frac{2}{\beta} \right) \quad (3.187)$$

$$\mu'_3 = E(T^3) = \frac{1}{\Gamma(c)} \alpha^3 \Gamma \left(c + \frac{3}{\beta} \right) \quad (3.188)$$

biçiminde elde edilir. (3.186)-(3.188) ifadelerindeki kitle momentleri örneklem momentleriyle eşitlendiğinde ve gerekli düzenlemeler yapıldığında GammaWD'nin momentler tahmin edicileri

$$\frac{1}{\Gamma(c)} \alpha \Gamma\left(c + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \quad (3.189)$$

$$\frac{1}{\Gamma(c)} \alpha^2 \Gamma\left(c + \frac{2}{\beta}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^2 \quad (3.190)$$

$$\frac{1}{\Gamma(c)} \alpha^3 \Gamma\left(c + \frac{3}{\beta}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^3 \quad (3.191)$$

denklemlerinin çözümüyle elde edilir. Bu tahminciler sırasıyla $\hat{\alpha}_{ME}$, $\hat{\beta}_{ME}$, \hat{c}_{ME} olarak ifade edilir. Denklemlerin çözümü için diğer tahmincilerde olduğu gibi nümerik yöntemler kullanılmaktadır.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ WEIBULL DAĞILIMLARININ PARAMETRE TAHMİNCİLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ

4.1. Simülasyon Düzeni

Bu bölümde, önceki bölümde önerilen farklı tahmin edicilerin performansını karşılaştırmak için bazı sayısal hesaplamalar sunulmuştur. Simülasyon çalışması, farklı örneklem büyüklükleri ve farklı parametre değerleri için tahmin edicilerin performanslarını; göreceli yan (relative bias), göreceli hata kareler ortalaması (relative mean square error) ve göreceli hata kareler ortalaması toplamı (relative deficiency) açısından karşılaştırmaktadır. Simülasyon için bütün çalışmalar Matlab'da yapılmıştır. Simülasyon çalışmasının basamakları aşağıdaki gibidir;

- i. α, β ve diğer parametreler verildiğinde $X = F^{-1}(U)$ dönüşümü aracılığıyla genelleştirilmiş veya değiştirilmiş Weibull dağılımından n büyüklüğünde (X_1, X_2, \dots, X_n) örneklem çekildi. ($X = F^{-1}(U)$, Inverse Weibull, Log Weibull, Weibull Geometrik, Üstelleştirilmiş Weibull, Esnek Weibull, Odd Weibull, Marshal Olkin Extended Weibull ve Gamma Weibull dağılımlarından elde edilmiştir). Burada U , uniform dağılıma sahiptir $U \sim Uniform(0,1)$.
- ii. Bir önceki bölümde ele alınan en çok olabilirlik (MLE), en küçük kareler (LSE), ağırlıklandırılmış en küçük kareler (WLSE) ve eğer varsa momentler (ME) tahmincileri kullanılarak örneklemin çekildiği dağılımların parametrelerine uygun tahminler yapılmıştır. $n = 10, 20$ (küçük örneklem), 30, 50 (orta büyüklükte örneklem), 100, 200 (büyük örneklem) olarak alındı, i. ve ii. basamakları N defa tekrar edildi. $N = 100000/n$
- iii. $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ ve diğer parametre tahminleri, aşağıda formülleri verilen göreceli bias (R.Bias), göreceli hata kareler ortalaması (R.MSE) ve göreceli hata kareler ortalaması toplamı (R.Def) gerçek değerlerle karşılaştırılarak elde edildi.

$$R. Bias(\hat{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{\theta}_i - \theta}{\theta} \right) \quad (4.1)$$

$$R.MSE(\hat{\theta}) = \frac{1}{N\theta^2} \sum_{i=1}^N \left(\hat{\theta}_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\theta}_i \right)^2 + \left(R.Bias(\hat{\theta}) \right)^2 \quad (4.2)$$

$$R.Def(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = R.MSE(\hat{\alpha}) + R.MSE(\hat{\beta}) \quad (4.3)$$

$\hat{\theta}$, θ 'nin tahmincisi, $\hat{\theta}_i$, $i = 1, \dots, N$ θ 'nin tahminleri ve N simülasyon tekrarlarının sayısıdır (Alkasasbeh ve Raqab, 2009, s. 271).

4.2. Simülasyon Sonuçları

Bu bölümde tezde ele alınan IWD, LogWD, FWD, EWD, WGD, OddWD, MOEWD ve GammaWD'nin parametre tahminlerini elde etmek için kullanılan tahmin yöntemlerinin (MLE, LSE, WLSE ve ME) performansını saptamak amacıyla yapılan simülasyon çalışmasının sonuçları her dağılımın farklı örneklem ve parametre değerleri açısından ayrı ayrı sunulmuştur.

4.2.1. Inverse Weibull dağılımı için simülasyon sonuçları

IWD için $\alpha = 1$, $\beta = 0,5$ olarak alındığında R.Bias, R.MSE ve R.Def için elde edilen sonuçlar Tablo 4.1'de verilmiştir.

Tablo 4.1. $\alpha = 1, \beta = 0,5$ için IWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE		LSE		WLSE		ME	
n=10								
	α	β	α	β	α	β	α	β
Ortalama	1,3986	0,5842	1,3110	0,5069	1,3101	0,5080	–	–
R.Bias	0,3986	0,1683	0,3110	0,0137	0,3101	0,0159	–	–
R.MSE	1,6998	0,1501	1,7539	0,1672	1,6618	0,1453	–	–
R.Def	1,8499		1,9211		1,8071			
n=20								
Ortalama	1,1709	0,5334	1,1380	0,4964	1,1413	0,5009	–	–
R.Bias	0,1709	0,0668	0,1380	-0,0071	0,1413	0,0018	–	–
R.MSE	0,4148	0,0434	0,4433	0,0545	0,4238	0,0479	–	–
R.Def	0,4582		0,4978		0,4717			
n=30								
Ortalama	1,1043	0,5241	1,0790	0,4988	1,0833	0,5030	–	–
R.Bias	0,1043	0,0483	0,0790	-0,0025	0,0833	0,0060	–	–
R.MSE	0,2083	0,0272	0,2159	0,0336	0,2071	0,0293	–	–
R.Def	0,2354		0,2495		0,2364			
n=50								
Ortalama	1,0595	0,5150	1,0450	0,5016	1,0491	0,5047	–	–
R.Bias	0,0595	0,0300	0,0450	0,0031	0,0491	0,0094	–	–
R.MSE	0,1182	0,0140	0,1263	0,0192	0,1207	0,0162	–	–
R.Def	0,1322		0,1455		0,1368			
n=100								
Ortalama	1,0353	0,5085	1,0314	0,5013	1,0323	0,5039	–	–
R.Bias	0,0353	0,0170	0,0314	0,0026	0,0323	0,0078	–	–
R.MSE	0,0513	0,0074	0,0576	0,0103	0,0536	0,0087	–	–
R.Def	0,0587		0,0679		0,0623			
n=200								
Ortalama	1,0207	0,5027	1,0200	0,4992	1,0203	0,5008	–	–
R.Bias	0,0207	0,0054	0,0200	-0,0016	0,0203	0,0016	–	–
R.MSE	0,0218	0,0031	0,0254	0,0046	0,0235	0,0037	–	–
R.Def	0,0250		0,0300		0,0272			

Not: En iyi tahminçileri belirlemede α 'nın **R.Bias**'i, β 'nin **R.Bias**'i, α 'nın **R.MSE**'si, β 'nin **R.MSE**'si ve **R.Def** için vurgulanan renkler kullanılmıştır.

Tablo 4.1'deki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 1, \beta = 0,5$ için α parametresi ele alındığında, örneklem büyüklüğü arttıkça R.Bias, R.MSE ve R.Def değerinin azaldığı görülmektedir. α parametresi için R.Bias değeri karşılaştırıldığında $n = 10$ için en iyi performansı WLSE sergilerken $n = 20, 30, 50, 100, 200$ olduğunda en iyi performansı LSE sergilemektedir. β parametresi ele alındığında ise $n = 20, 200$ dışındaki tüm örneklem büyüklükleri için en iyi tahminci LSE'dir. α parametresi R.MSE ölçütüne göre karşılaştırıldığında $n = 20, 50, 100, 200$ için en iyi performansı MLE sergilerken $n = 10, 30$ için WLSE sergilemiştir. β parametresi ele alındığında $n = 10$ için en iyi performansı WLSE, diğer örneklem büyüklüklerinde MLE sergilemektedir. R.Def ölçütüne göre $n = 10$ için en iyi tahminci WLSE iken $n \geq 20$ olduğunda MLE'dir. IWD

dağılımında β parametresi için $\beta < 1$ durumunda sıfır etrafındaki momentleri tanımlı olmadığından dolayı momentler tahminçileri elde edilmemiştir.

Tablo 4.2. $\alpha = 1$, $\beta = 1,5$ için IWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE		LSE		WLSE		ME	
n=10								
	α	β	α	β	α	β	α	β
Ortalama	1,0520	1,7493	1,0224	1,5170	1,0251	1,5186	1,7639	2,8436
R.Bias	0,0520	0,1662	0,0224	0,0113	0,0251	0,0124	0,7639	0,8957
R.MSE	0,0628	0,1475	0,0624	0,1634	0,0606	0,1404	4,5231	0,9561
R.Def	0,2103		0,2258		0,2010		5,4792	
n=20								
Ortalama	1,0237	1,6148	1,0096	1,5045	1,0124	1,5165	1,7168	2,5639
R.Bias	0,0237	0,0765	0,0113	0,0030	0,0124	0,0110	0,7168	0,7093
R.MSE	0,0272	0,0475	0,0283	0,0568	0,0273	0,0503	4,2286	0,5655
R.Def	0,0747		0,0851		0,0776		4,7941	
n=30								
Ortalama	1,0183	1,5623	1,0106	1,4899	1,0123	1,5013	1,6579	2,4617
R.Bias	0,0183	0,0416	0,0106	-0,0067	0,0123	0,0009	0,6579	0,6411
R.MSE	0,0177	0,0253	0,0189	0,0336	0,0179	0,0283	1,4707	0,4498
R.Def	0,0429		0,0525		0,0462		1,9205	
n=50								
Ortalama	1,0123	1,5497	1,0071	1,5040	1,0090	1,5148	1,6261	2,3743
R.Bias	0,0123	0,0331	0,0071	0,0027	0,0090	0,0099	0,6261	0,5829
R.MSE	0,0102	0,0146	0,0111	0,0191	0,0105	0,0162	1,0252	0,3644
R.Def	0,0248		0,0302		0,0267		1,3897	
n=100								
Ortalama	1,0067	1,5254	1,0047	1,5039	1,0055	1,5118	1,6121	2,2836
R.Bias	0,0067	0,0169	0,0047	0,0026	0,0055	0,0078	0,6121	0,5224
R.MSE	0,0050	0,0072	0,0056	0,0100	0,0052	0,0083	0,7446	0,2867
R.Def	0,0121		0,0156		0,0136		1,0313	
n=200								
Ortalama	1,0046	1,5082	1,0039	1,4975	1,0043	1,5023	1,5927	2,2067
R.Bias	0,0046	0,0054	0,0039	-0,0017	0,0043	0,0016	0,5927	0,4711
R.MSE	0,0024	0,0032	0,0027	0,0046	0,0026	0,0038	0,5592	0,2297
R.Def	0,0056		0,0073		0,0063		0,7888	

Tablo 4.2'deki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 1$, $\beta = 1,5$ için α parametresi ele alındığında, R.Bias, R.MSE ve R.Def değerlerinin örneklem büyüklüğü arttıkça azaldığı görülmektedir. α parametresi R.Bias ölçütüne göre karşılaştırıldığında tüm örneklem büyüklüklerinde en iyi performansı LSE'nin sergilediği görülmektedir. β parametresi göz önüne alındığında $n = 30, 200$ dışındaki örneklem büyüklükleri için en iyi performansı LSE sergilemiştir. Her iki parametre bir diğer ölçüt olan R.MSE'ye göre karşılaştırıldığında $n = 10$ için en iyi tahminci WLSE iken diğer örneklem büyüklükleri için MLE 'dir. R.Def için $n = 10$ olduğunda en iyi tahminci WLSE iken $n \geq 20$ için MLE en iyi tahmincidir.

Tablo 4.3. $\alpha = 1, \beta = 2,5$ için IWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE		LSE		WLSE		ME	
n=10								
	α	β	α	β	α	β	α	β
Ortalama	1,0262	2,9306	1,0089	2,5471	1,0106	2,5508	1,1516	3,8368
R.Bias	0,0262	0,1722	0,0089	0,0189	0,0106	0,0203	0,1516	0,5347
R.MSE	0,0210	0,1508	0,0214	0,1658	0,0207	0,1461	0,0836	0,4604
R.Def	0,1718		0,1872		0,1668		0,5441	
n=20								
Ortalama	1,0115	2,6925	1,0040	2,5046	1,0057	2,5287	1,1211	3,4228
R.Bias	0,0115	0,0770	0,0040	0,0019	0,0057	0,0115	0,1211	0,3691
R.MSE	0,0094	0,0474	0,0102	0,0579	0,0098	0,0512	0,0511	0,2166
R.Def	0,0568		0,0681		0,0609		0,2677	
n=30								
Ortalama	1,0081	2,6186	1,0022	2,4889	1,0038	2,5130	1,1078	3,2394
R.Bias	0,0081	0,0474	0,0022	-0,0045	0,0038	0,0052	0,1078	0,2957
R.MSE	0,0060	0,0286	0,0066	0,0361	0,0063	0,0314	0,0258	0,1407
R.Def	0,0347		0,0427		0,0377		0,1665	
n=50								
Ortalama	1,0054	2,5665	1,0024	2,4959	1,0035	2,5156	1,0937	3,0904
R.Bias	0,0054	0,0266	0,0024	-0,0016	0,0035	0,0062	0,0937	0,2362
R.MSE	0,0037	0,0139	0,0040	0,0200	0,0038	0,0167	0,0202	0,0912
R.Def	0,0176		0,0240		0,0205		0,1113	
n=100								
Ortalama	1,0001	2,5351	0,9984	2,4971	0,9992	2,5127	1,0726	2,9308
R.Bias	0,0001	0,0140	-0,0016	-0,0012	-0,0008	0,0051	0,0726	0,1723
R.MSE	0,0018	0,0066	0,0019	0,0095	0,0018	0,0080	0,0101	0,0522
R.Def	0,0084		0,0114		0,0098		0,0623	
n=200								
Ortalama	1,0013	2,5131	1,0011	2,4944	1,0013	2,5032	1,0639	2,8522
R.Bias	0,0013	0,0052	0,0011	-0,0022	0,0013	0,0013	0,0639	0,1409
R.MSE	0,0009	0,0034	0,0010	0,0048	0,0009	0,0039	0,0067	0,0368
R.Def	0,0043		0,0058		0,0048		0,0435	

Tablo 4.3'deki simülasyon sonuçlarına $\alpha = 1, \beta = 2,5$ değerleri için α parametresi R.Bias ölçütüne karşılaştırıldığında $n = 100$ dışındaki tüm örneklem büyüklüklerinde, β parametresi ele alındığında ise $n = 200$ dışındaki tüm örneklem büyüklüklerinde en iyi tahminci LSE'dir. R.MSE ölçütüne göre α için $n = 10$ durumunda en iyi performansı WLSE, $n = 20,30,50$ durumunda MLE sergilerken, $n = 100,200$ için MLE ve WLSE aynı performansı sergilemiştir. β parametresi için $n = 10$ olduğunda WLSE, $n \geq 20$ olduğunda MLE diğer tahmincilere göre daha iyi bir performans göstermiştir. R.Def ölçütüne göre bakıldığında ise $n = 10$ için en iyi tahminci WLSE iken örneklem sayısı arttığında en iyi tahminci MLE olmaktadır.

Tablo 4.4. $\alpha = 2$, $\beta = 2,5$ için IWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE		LSE		WLSE		ME	
n=10								
	α	β	α	β	α	β	α	β
Ortalama	2,0502	2,9265	2,0152	2,5231	2,0185	2,5303	2,2983	3,8387
R.Bias	0,0251	0,1706	0,0076	0,0093	0,0092	0,0121	0,1492	0,5355
R.MSE	0,0205	0,1496	0,0209	0,1514	0,0202	0,1347	0,0764	0,4635
R.Def	0,1701		0,1722		0,1549		0,5398	
n=20								
Ortalama	2,0242	2,6869	2,0074	2,4976	2,0107	2,5188	2,2470	3,4135
R.Bias	0,0121	0,0748	0,0037	-0,0009	0,0054	0,0075	0,1235	0,3654
R.MSE	0,0096	0,0478	0,0101	0,0595	0,0097	0,0513	0,0543	0,2104
R.Def	0,0573		0,0695		0,0610		0,2647	
n=30								
Ortalama	2,0157	2,6193	2,0037	2,4945	2,0069	2,5181	2,2152	3,2350
R.Bias	0,0078	0,0477	0,0019	-0,0022	0,0035	0,0072	0,1076	0,2940
R.MSE	0,0060	0,0269	0,0064	0,0339	0,0061	0,0297	0,0266	0,1410
R.Def	0,0329		0,0403		0,0359		0,1676	
n=50								
Ortalama	2,0101	2,5687	2,0034	2,4941	2,0057	2,5142	2,1849	3,0720
R.Bias	0,0050	0,0275	0,0017	-0,0023	0,0028	0,0057	0,0924	0,2288
R.MSE	0,0038	0,0135	0,0041	0,0177	0,0039	0,0152	0,0183	0,0874
R.Def	0,0174		0,0218		0,0191		0,1057	
n=100								
Ortalama	2,0062	2,5368	2,0025	2,5040	2,0039	2,5149	2,1537	2,9378
R.Bias	0,0031	0,0147	0,0012	0,0016	0,0020	0,0060	0,0769	0,1751
R.MSE	0,0019	0,0067	0,0021	0,0095	0,0020	0,0079	0,0113	0,0532
R.Def	0,0086		0,0116		0,0098		0,0644	
n=200								
Ortalama	2,0009	2,5227	1,9988	2,5118	1,9998	2,5154	2,1225	2,8402
R.Bias	0,0004	0,0091	-0,0006	0,0047	-0,0001	0,0062	0,0613	0,1361
R.MSE	0,0009	0,0033	0,0010	0,0048	0,0009	0,0038	0,0058	0,0328
R.Def	0,0042		0,0057		0,0047		0,0386	

Tablo 4.4'deki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 2$, $\beta = 2,5$ için α parametresi ele alındığında, örneklem büyüklüğü arttıkça R.Bias, R.MSE ve R.Def değerlerinin azaldığı görülmektedir. α parametresi R.Bias ölçütüne göre karşılaştırıldığında $n = 200$ dışındaki örneklem büyüklüklerinde, β parametresi ele alındığında ise tüm örneklem büyüklüklerinde LSE iyi bir tahmincidir. R.MSE ölçütüne göre α parametresi için sonuçlar karşılaştırıldığında $n = 10$ için en iyi performansı WLSE, $n = 20, 30, 50, 100$ için MLE sergilerken, $n = 200$ için MLE ve WLSE aynı performansı sergilemiştir. β parametresi ele alındığında $n = 10$ iken en iyi performansı WLSE, $n \geq 20$ iken MLE sergilemektedir. R.Def değerlerine bakıldığında $n = 10$ için en iyi tahminci WLSE, diğer ele alınan tüm örneklem büyüklükleri için MLE en iyi tahmincidir. R.Def değerleri göstermektedir ki örneklem büyüklüğü arttığında en iyi tahminci MLE olmaktadır.

Sonuç olarak, IWD'nin her iki parametresi R.Bias ölçütüne göre karşılaştırıldığında LSE'nin, R.MSE açısından ele alındığında MLE'nin genel olarak en iyi tahminci olduğu

gözlenmiştir. Benzer şekilde R.Def ölçütlerine göre bakıldığında ise $n \geq 20$ için MLE'nin diğer tahmincilerle göre daha iyi bir performans sergilediği söylenebilir.

4.2.2. Log Weibull dağılımı için simülasyon sonuçları

LogWD için $\vartheta = 1$, $b = 2$ olarak alındığında R.Bias, R.MSE ve R.Def için elde edilen sonuçlar Tablo 4.5'de verilmiştir.

Tablo 4.5. $\vartheta = 1$, $b = 2$ için LogWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE		LSE		WLSE		ME	
n=10								
	ϑ	b	ϑ	b	ϑ	b	ϑ	b
Ortalama	0,8652	1,8580	0,9313	2,1994	0,9263	2,1821	0,8390	1,8084
R.Bias	-0,1348	-0,0710	-0,0687	0,0997	-0,0737	0,0911	-0,1610	-0,0958
R.MSE	0,4094	0,0639	0,4029	0,1193	0,3944	0,1089	0,4314	0,0840
R.Def	0,4733		0,5221		0,5033		0,5155	
n=20								
Ortalama	0,9532	1,9264	0,9893	2,1058	0,9838	2,0737	0,9330	1,9029
R.Bias	-0,0468	-0,0368	-0,0107	0,0529	-0,0162	0,0368	-0,0670	-0,0486
R.MSE	0,2206	0,0317	0,2285	0,0545	0,2216	0,0457	0,2275	0,0482
R.Def	0,2523		0,2830		0,2673		0,2757	
n=30								
Ortalama	0,9697	1,9511	0,9918	2,0663	0,9860	2,0400	0,9546	1,9308
R.Bias	-0,0303	-0,0244	-0,0082	0,0331	-0,0140	0,0200	-0,0454	-0,0346
R.MSE	0,1473	0,0205	0,1601	0,0334	0,1529	0,0279	0,1541	0,0320
R.Def	0,1678		0,1935		0,1808		0,1861	
n=50								
Ortalama	0,9877	1,9685	1,0024	2,0370	0,9972	2,0157	0,9780	1,9546
R.Bias	-0,0123	-0,0158	0,0024	0,0185	-0,0028	0,0078	-0,0220	-0,0227
R.MSE	0,0887	0,0126	0,0991	0,0198	0,0931	0,0162	0,0929	0,0206
R.Def	0,1013		0,1189		0,1093		0,1134	
n=100								
Ortalama	0,9937	1,9868	1,0018	2,0193	0,9985	2,0059	0,9899	1,9823
R.Bias	-0,0063	-0,0066	0,0018	0,0097	-0,0015	0,0029	-0,0101	-0,0089
R.MSE	0,0433	0,0066	0,0468	0,0097	0,0446	0,0079	0,0454	0,0106
R.Def	0,0499		0,0565		0,0525		0,0560	
n=200								
Ortalama	0,9966	1,9938	0,9995	2,0125	0,9977	2,0030	0,9935	1,9880
R.Bias	-0,0034	-0,0031	-0,0005	0,0062	-0,0023	0,0015	-0,0065	-0,0060
R.MSE	0,0217	0,0033	0,0234	0,0050	0,0221	0,0039	0,0220	0,0058
R.Def	0,0249		0,0284		0,0261		0,0278	

Not: En iyi tahmincileri belirlemede ϑ 'nın **R.Bias**'i, β 'nin **R.Bias**'i, ϑ 'nın **R.MSE**'si, β 'nin **R.MSE**'si ve **R.Def** için vurgulanan renkler kullanılmıştır.

Tablo 4.5'deki simülasyon sonuçlarına göre $\vartheta = 1$, $b = 2$ için ϑ parametresi ele alındığında, örneklem büyüklüğü arttıkça R.Bias, R.MSE ve R.Def değerlerinin azaldığı görülmektedir. R.Bias ölçütüne göre ϑ parametresinin değerleri karşılaştırıldığında,

$n = 100$ dışındaki tüm örneklem büyüklükleri için en iyi performansı LSE sergilerken, $n = 100$ için WLSE sergilemektedir. b parametresi ele alındığında $n = 10$ için diğer tahmincilerle karşılaştırıldığında en iyi performansı MLE, $n = 30, 50, 100, 200$ için WLSE sergilemiş, $n = 20$ olduğunda MLE tahmincisi alttan tahminlemiş, WLSE ise üstten tahminlemiştir. ϑ parametresinin değerleri R.MSE'ye göre karşılaştırıldığında $n = 10$ için WLSE, $n \geq 20$ için MLE en iyi performansı sergilemiştir. b için MLE tüm örneklem büyüklüklerinde en iyi sonucu vermiştir. R.Def açısından tüm örneklem büyüklüklerinde MLE en iyi tahmincidir.

Tablo 4.6. $\vartheta = -2$, $b = 3$ için LogWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE		LSE		WLSE		ME	
	n=10							
	ϑ	b	ϑ	b	ϑ	b	ϑ	b
Ortalama	-2,0130	2,7359	-1,8709	3,2546	-1,8913	3,2237	-2,0514	2,6785
R.Bias	0,0065	-0,0880	-0,0646	0,0849	-0,0543	0,0746	0,0257	-0,1072
R.MSE	0,2016	0,0650	0,2204	0,1145	0,2125	0,1035	0,2042	0,0875
R.Def	0,2666		0,3349		0,3160		0,2917	
	n=20							
Ortalama	-2,0440	2,8816	-1,9778	3,1515	-1,9935	3,1045	-2,0715	2,8437
R.Bias	0,0220	-0,0395	-0,0111	0,0505	-0,0033	0,0348	0,0358	-0,0521
R.MSE	0,1200	0,0316	0,1302	0,0549	0,1249	0,0459	0,1248	0,0474
R.Def	0,1516		0,1851		0,1708		0,1723	
	n=30							
Ortalama	-2,0262	2,9187	-1,9793	3,1001	-1,9943	3,0584	-2,0470	2,8946
R.Bias	0,0131	-0,0271	-0,0104	0,0334	-0,0029	0,0195	0,0235	-0,0351
R.MSE	0,0806	0,0224	0,0859	0,0365	0,0832	0,0301	0,0839	0,0346
R.Def	0,1030		0,1224		0,1133		0,1184	
	n=50							
Ortalama	-2,0290	2,9560	-2,0098	3,0563	-2,0160	3,0265	-2,0441	2,9328
R.Bias	0,0145	-0,0147	0,0049	0,0188	0,0080	0,0088	0,0220	-0,0224
R.MSE	0,0513	0,0125	0,0566	0,0188	0,0534	0,0157	0,0540	0,0202
R.Def	0,0638		0,0754		0,0692		0,0742	
	n=100							
Ortalama	-1,9989	2,9794	-1,9803	3,0327	-1,9873	3,0133	-2,0012	2,9863
R.Bias	-0,0006	-0,0069	-0,0098	0,0109	-0,0064	0,0044	0,0006	-0,0046
R.MSE	0,0247	0,0056	0,0273	0,0090	0,0257	0,0071	0,0263	0,0101
R.Def	0,0303		0,0364		0,0328		0,0364	
	n=200							
Ortalama	-2,0016	2,9743	-1,9959	3,0033	-1,9988	2,9910	-2,0066	2,9676
R.Bias	0,0008	-0,0086	-0,0021	0,0011	-0,0006	-0,0030	0,0033	-0,0108
R.MSE	0,0121	0,0032	0,0131	0,0052	0,0124	0,0041	0,0127	0,0049
R.Def	0,0153		0,0183		0,0165		0,0176	

Tablo 4.6'daki simülasyon sonuçlarına göre $\vartheta = -2$, $b = 3$ olarak alındığında ve ϑ parametresi için R.Bias değerleri karşılaştırıldığında $n = 10$ için MLE, $n = 20, 30, 200$ için WLSE, $n = 50$ için LSE en iyi tahmincidir ve $n = 100$ olduğunda MLE alttan

tahminlemiş, ME üstten tahminlemiştir. b parametresi ele alındığında $n = 200$ için en iyi performansı LSE, $n \leq 100$ olduğunda ise WLSE sergilemiştir. R.MSE değeri her iki parametre için karşılaştırıldığında, en iyi performansı MLE sergilemiştir. R.Def değerleri göstermektedir ki tüm örneklem büyüklükleri için en iyi tahminci MLE'dir.

Tablo 4.7. $\vartheta = -1$, $b = 4$ için LogWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE		LSE		WLSE		ME	
n=10								
	ϑ	b	ϑ	b	ϑ	b	ϑ	b
Ortalama	-0,5824	3,5498	-0,4529	4,3137	-0,4777	4,2569	-0,6054	3,4836
R.Bias	-0,4176	-0,1126	-0,5471	0,0784	-0,5223	0,0642	-0,3946	-0,1291
R.MSE	0,9624	0,0640	1,1544	0,1088	1,1027	0,0971	0,9412	0,0883
R.Def	1,0264		1,2632		1,1998		1,0294	
n=20								
Ortalama	-0,7776	3,7716	-0,6911	4,1643	-0,7187	4,0893	-0,7930	3,7460
R.Bias	-0,2224	-0,0571	-0,3089	0,0411	-0,2813	0,0223	-0,2070	-0,0635
R.MSE	0,5741	0,0321	0,6653	0,0532	0,6334	0,0442	0,5728	0,0489
R.Def	0,6062		0,7184		0,6776		0,6217	
n=30								
Ortalama	-0,8633	3,8615	-0,8137	4,1282	-0,8310	4,0623	-0,8826	3,8365
R.Bias	-0,1367	-0,0346	-0,1863	0,0320	-0,1690	0,0156	-0,1174	-0,0409
R.MSE	0,4165	0,0206	0,4758	0,0334	0,4463	0,0271	0,4160	0,0349
R.Def	0,4371		0,5092		0,4735		0,4509	
n=50								
Ortalama	-0,9474	3,9276	-0,8972	4,0728	-0,9165	4,0298	-0,9478	3,9324
R.Bias	-0,0526	-0,0181	-0,1028	0,0182	-0,0835	0,0075	-0,0522	-0,0169
R.MSE	0,2716	0,0118	0,2973	0,0194	0,2829	0,0153	0,2759	0,0202
R.Def	0,2833		0,3167		0,2982		0,2962	
n=100								
Ortalama	-1,0092	3,9544	-0,9843	4,0329	-0,9922	4,0028	-1,0142	3,9538
R.Bias	0,0092	-0,0114	-0,0157	0,0082	-0,0078	0,0007	0,0142	-0,0116
R.MSE	0,1566	0,0064	0,1687	0,0095	0,1580	0,0076	0,1614	0,0105
R.Def	0,1630		0,1783		0,1656		0,1720	
n=200								
Ortalama	-1,0001	3,9599	-0,9947	3,9952	-0,9983	3,9820	-1,0098	3,9411
R.Bias	0,0001	-0,0100	-0,0053	-0,0012	-0,0017	-0,0045	0,0098	-0,0147
R.MSE	0,0827	0,0028	0,0925	0,0042	0,0873	0,0034	0,0881	0,0054
R.Def	0,0855		0,0967		0,0907		0,0934	

Tablo 4.7'deki $\vartheta = -1$, $b = 4$ değerleri içinsimülasyon sonuçlarına göre ϑ parametresi için R.Bias değeri karşılaştırıldığında $n \leq 50$ örneklem büyüklükleri için en iyi performansı ME sergilerken $n = 100$ için WLSE, $n = 200$ için de MLE en iyi performansı sergilemiştir. b parametresi $n = 200$ dışındaki diğer örneklem büyüklükleri için WLSE iyi bir tahmincidir. ϑ parametresi R.MSE'ye göre karşılaştırıldığında $n = 10,20,30$ için en iyi performansı ME sergilerken $n = 50,100,200$ için MLE sergilemiştir. b parametresi için diğer tahmincilerle karşılaştırıldığında tüm örneklem

büyükliklerinde en iyi sonucu MLE sunmaktadır. R.Def değerleri göstermektedir ki tüm örneklem büyüklikleri için MLE en iyi tahmincidir.

Tablo 4.8. $\vartheta = 5$, $b = 4$ için LogWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE		LSE		WLSE		ME	
n=10								
	ϑ	b	ϑ	b	ϑ	b	ϑ	b
Ortalama	4,8531	3,7039	5,0450	4,4036	5,0240	4,3674	4,7867	3,6110
R.Bias	-0,0294	-0,0740	0,0090	0,1009	0,0048	0,0918	-0,0427	-0,0973
R.MSE	0,0718	0,0663	0,0761	0,1194	0,0733	0,1089	0,0747	0,0873
R.Def	0,1382		0,1955		0,1822		0,1620	
n=20								
Ortalama	4,9313	3,8476	5,0163	4,2149	4,9986	4,1486	4,8917	3,7919
R.Bias	-0,0137	-0,0381	0,0033	0,0537	-0,0003	0,0372	-0,0217	-0,0520
R.MSE	0,0376	0,0319	0,0406	0,0559	0,0390	0,0463	0,0391	0,0480
R.Def	0,0695		0,0966		0,0853		0,0871	
n=30								
Ortalama	4,9550	3,8938	5,0160	4,1316	4,9988	4,0713	4,9317	3,8742
R.Bias	-0,0090	-0,0266	0,0032	0,0329	-0,0002	0,0178	-0,0137	-0,0315
R.MSE	0,0247	0,0207	0,0265	0,0344	0,0254	0,0280	0,0255	0,0345
R.Def	0,0453		0,0609		0,0534		0,0600	
n=50								
Ortalama	4,9623	3,9263	5,0012	4,0728	4,9873	4,0272	4,9476	3,9172
R.Bias	-0,0075	-0,0184	0,0002	0,0182	-0,0025	0,0068	-0,0105	-0,0207
R.MSE	0,0141	0,0127	0,0154	0,0203	0,0146	0,0161	0,0148	0,0204
R.Def	0,0268		0,0356		0,0307		0,0352	
n=100								
Ortalama	4,9656	3,9835	4,9845	4,0565	4,9759	4,0248	4,9580	3,9759
R.Bias	-0,0069	-0,0041	-0,0031	0,0141	-0,0048	0,0062	-0,0084	-0,0060
R.MSE	0,0070	0,0064	0,0077	0,0097	0,0073	0,0077	0,0073	0,0112
R.Def	0,0134		0,0173		0,0150		0,0185	
n=200								
Ortalama	4,9981	3,9903	5,0088	4,0366	5,0043	4,0176	4,9921	3,9852
R.Bias	-0,0004	-0,0024	0,0018	0,0091	0,0009	0,0044	-0,0016	-0,0037
R.MSE	0,0029	0,0029	0,0033	0,0045	0,0031	0,0034	0,0031	0,0053
R.Def	0,0058		0,0078		0,0065		0,0084	

Tablo 4.8'deki simülasyon sonuçlarına göre $\vartheta = 5$, $b = 4$ olarak alındığında ϑ parametresi için R.Bias değeri karşılaştırılırsa $n \leq 30$ için en iyi tahminci WLSE, $n = 50,100$ olduğunda LSE, $n = 200$ için de MLE en iyi tahmincidir. b parametresi için $n = 10, 100, 200$ olarak alındığında ve diğer tahmincilerle karşılaştırıldığında en iyi performansı MLE sunarken, $n = 20,30,50$ için WLSE sunmuştur. Her iki parametre R.MSE ölçütüne göre karşılaştırıldığında tüm örneklem değerleri için en iyi performansı MLE sergilemiştir. R.Def değerleri göstermektedir ki MLE tüm örneklem büyükliklerinde en iyi performansı göstermektedir.

LogWD'nin sonuçlarına R.Bias ölçütüne göre bakıldığında ϑ için farklı tahminciler iyi performans gösterirken, b için çoğunlukla WLSE'nin diğer tahmincilerden daha iyi

performans sergilediği görülmüştür. R.MSE açısından sonuçlar karşılaştırıldığında çoğunlukla MLE diğer tahmincilerden üstün bir performans sunmuştur. R.Def açısından bakıldığında tüm örneklem büyüklüklerinde MLE'nin iyi bir performansı sergilediği söylenebilir.

4.2.3. Esnek Weibull dağılımı için simülasyon sonuçları

FWD için $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,5$ olarak alındığında R.Bias, R.MSE ve R.Def için elde edilen sonuçlar Tablo 4.9'da verilmiştir.

Tablo 4.9. $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,5$ için FWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE		LSE		WLSE	
n=10						
	α	β	α	β	α	β
Ortalama	0,6157	0,5831	0,5099	0,5225	0,5145	0,5239
R.Bias	0,2315	0,1662	0,0199	0,0450	0,0289	0,0477
R.MSE	0,2403	0,2260	0,2298	0,2099	0,2103	0,2009
R.Def	0,4663		0,4397		0,4113	
n=20						
Ortalama	0,5590	0,5431	0,5220	0,5182	0,5258	0,5203
R.Bias	0,1180	0,0862	0,0439	0,0365	0,0516	0,0407
R.MSE	0,0894	0,0941	0,1430	0,1062	0,1238	0,0988
R.Def	0,1835		0,2492		0,2225	
n=30						
Ortalama	0,5367	0,5280	0,5123	0,5152	0,5161	0,5170
R.Bias	0,0734	0,0560	0,0246	0,0303	0,0322	0,0339
R.MSE	0,0482	0,0546	0,0772	0,0701	0,0655	0,0634
R.Def	0,1028		0,1473		0,1290	
n=50						
Ortalama	0,5219	0,5156	0,5093	0,5080	0,5119	0,5100
R.Bias	0,0438	0,0312	0,0185	0,0161	0,0238	0,0199
R.MSE	0,0233	0,0302	0,0462	0,0391	0,0366	0,0350
R.Def	0,0535		0,0853		0,0716	
n=100						
Ortalama	0,5074	0,5050	0,5027	0,4990	0,5043	0,5008
R.Bias	0,0149	0,0100	0,0055	-0,0017	0,0086	0,0019
R.MSE	0,0091	0,0127	0,0196	0,0164	0,0142	0,0144
R.Def	0,0218		0,0360		0,0287	
n=200						
Ortalama	0,5049	0,5026	0,5031	0,4996	0,5042	0,5009
R.Bias	0,0099	0,0051	0,0062	-0,0009	0,0084	0,0018
R.MSE	0,0044	0,0060	0,0101	0,0082	0,0073	0,0071
R.Def	0,0104		0,0182		0,0143	

Not: En iyi tahmincileri belirlemede α 'nın **R.Bias**'i, β 'nin **R.Bias**'i, α 'nın **R.MSE**'si, β 'nin **R.MSE**'si ve **R.Def** için vurgulanan renkler kullanılmıştır.

Tablo 4.9'daki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,5$ için R.Bias açısından α ve β parametresi için tüm örneklem büyüklüklerinde iyi performansı LSE'nin

sergilediği görülmüştür. Her iki parametre için R.MSE'ye göre $n = 10$ durumunda WLSE, $n \geq 20$ için MLE en iyi performansı göstermiştir. Hesaplanan R.Def değerleri göstermektedir ki $n = 10$ için WLSE en iyi tahminci iken örneklem büyüklüğü arttıkça en iyi tahminci MLE olmaktadır.

Tablo 4.10. $\alpha = 1, \beta = 0,3$ için FWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE		LSE		WLSE	
n=10						
	α	β	α	β	α	β
Ortalama	1,2297	0,3509	1,0228	0,3139	1,0314	0,3143
R.Bias	0,2297	0,1696	0,0228	0,0464	0,0314	0,0475
R.MSE	0,2369	0,2219	0,2206	0,2011	0,2040	0,1913
R.Def	0,4587		0,4217		0,3953	
n=20						
Ortalama	1,1108	0,3252	1,0326	0,3098	1,0379	0,3111
R.Bias	0,1108	0,0839	0,0326	0,0328	0,0379	0,0370
R.MSE	0,0803	0,0895	0,1220	0,1011	0,1028	0,0936
R.Def	0,1698		0,2232		0,1963	
n=30						
Ortalama	1,0689	0,3148	1,0186	0,3054	1,0273	0,3072
R.Bias	0,0689	0,0494	0,0186	0,0181	0,0273	0,0240
R.MSE	0,0444	0,0491	0,0792	0,0630	0,0665	0,0574
R.Def	0,0935		0,1422		0,1239	
n=50						
Ortalama	1,0402	0,3104	1,0152	0,3038	1,0220	0,3055
R.Bias	0,0402	0,0347	0,0152	0,0128	0,0220	0,0184
R.MSE	0,0217	0,0272	0,0441	0,0335	0,0356	0,0299
R.Def	0,0489		0,0777		0,0656	
n=100						
Ortalama	1,0215	0,3039	1,0031	0,3010	1,0095	0,3021
R.Bias	0,0215	0,0129	0,0031	0,0034	0,0095	0,0070
R.MSE	0,0097	0,0139	0,0185	0,0173	0,0137	0,0155
R.Def	0,0236		0,0358		0,0293	
n=200						
Ortalama	1,0177	0,3033	1,0108	0,3016	1,0125	0,3021
R.Bias	0,0177	0,0110	0,0108	0,0052	0,0125	0,0070
R.MSE	0,0045	0,0062	0,0085	0,0082	0,0062	0,0072
R.Def	0,0108		0,0167		0,0134	

Tablo 4.10'daki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 1, \beta = 0,3$ olarak alındığında α ve β için, R.Bias açısından tüm örneklem büyüklüklerinde en iyi performansı LSE sergilemiştir. R.MSE ölçütüne göre karşılaştırıldığında tüm parametreler için $n = 10$ olduğunda WLSE iyi bir tahminciyken, diğer örneklem büyüklüklerinde ise MLE de iyi bir tahmincidir. R.Def açısından değerlendirildiğinde R.MSE ile benzer sonuçlar gözlenmiştir.

Tablo 4.11. $\alpha = 0,5$, $\beta = 1$ için FWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE		LSE		WLSE	
n=10						
	α	β	α	β	α	β
Ortalama	0,6078	1,1732	0,5115	1,0403	0,5139	1,0422
R.Bias	0,2157	0,1732	0,0230	0,0403	0,0279	0,0422
R.MSE	0,1983	0,2083	0,1885	0,1832	0,1707	0,1745
R.Def	0,4066		0,3717		0,3452	
n=20						
Ortalama	0,5513	1,0825	0,5110	1,0222	0,5153	1,0292
R.Bias	0,1027	0,0825	0,0220	0,0222	0,0306	0,0292
R.MSE	0,0695	0,0803	0,0950	0,0862	0,0825	0,0816
R.Def	0,1498		0,1812		0,1641	
n=30						
Ortalama	0,5338	1,0561	0,5094	1,0161	0,5134	1,0225
R.Bias	0,0676	0,0561	0,0188	0,0161	0,0268	0,0225
R.MSE	0,0364	0,0490	0,0577	0,0531	0,0480	0,0492
R.Def	0,0854		0,1108		0,0972	
n=50						
Ortalama	0,5176	1,0348	0,5010	1,0120	0,5052	1,0182
R.Bias	0,0352	0,0348	0,0021	0,0120	0,0105	0,0182
R.MSE	0,0185	0,0272	0,0308	0,0324	0,0247	0,0297
R.Def	0,0458		0,0632		0,0544	
n=100						
Ortalama	0,5094	1,0122	0,5028	1,0006	0,5051	1,0050
R.Bias	0,0189	0,0122	0,0055	0,0006	0,0103	0,0050
R.MSE	0,0086	0,0111	0,0154	0,0142	0,0119	0,0126
R.Def	0,0196		0,0296		0,0245	
n=200						
Ortalama	0,5036	1,0069	0,5006	0,9992	0,5020	1,0025
R.Bias	0,0072	0,0069	0,0011	-0,0008	0,0040	0,0025
R.MSE	0,0039	0,0061	0,0076	0,0074	0,0056	0,0065
R.Def	0,0100		0,0151		0,0121	

Tablo 4.11'deki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 0,5$, $\beta = 1$ için R.Bias ölçütüne göre α ve β ele alındığında tüm örneklem büyüklükleri için tüm tahminciler arasında en iyi performansı LSE sergilemiştir. R.MSE açısından α ve β ele alındığında $n \geq 20$ durumunda MLE'nin en iyi performansı sergilediği gözlemlenmiştir. R.Def ile ilgili olarak elde edilen sonuçlara göre $n = 10$ için WLSE en iyi tahminci iken, diğer örneklem büyüklükleri için MLE olmaktadır.

Tablo 4.12. $\alpha = 1, \beta = 2$ için FWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE		LSE		WLSE	
n=10						
	α	β	α	β	α	β
Ortalama	1,1772	2,3165	1,0006	2,0102	1,0055	2,0181
R.Bias	0,1772	0,1582	0,0006	0,0051	0,0055	0,0091
R.MSE	0,1429	0,1617	0,1389	0,1382	0,1259	0,1299
R.Def	0,3046		0,2771		0,2557	
n=20						
Ortalama	1,0866	2,1586	1,0033	2,0139	1,0135	2,0310
R.Bias	0,0866	0,0793	0,0033	0,0070	0,0135	0,0155
R.MSE	0,0486	0,0605	0,0610	0,0649	0,0524	0,0591
R.Def	0,1091		0,1258		0,1115	
n=30						
Ortalama	1,0616	2,1101	1,0084	2,0191	1,0172	2,0339
R.Bias	0,0616	0,0551	0,0084	0,0095	0,0172	0,0169
R.MSE	0,0284	0,0383	0,0389	0,0439	0,0325	0,0398
R.Def	0,0667		0,0828		0,0723	
n=50						
Ortalama	1,0297	2,0567	0,9982	2,0008	1,0066	2,0155
R.Bias	0,0297	0,0283	-0,0018	0,0004	0,0066	0,0077
R.MSE	0,0142	0,0208	0,0212	0,0247	0,0174	0,0220
R.Def	0,0350		0,0459		0,0394	
n=100						
Ortalama	1,0153	2,0265	0,9968	1,9967	1,0033	2,0068
R.Bias	0,0153	0,0133	-0,0032	-0,0016	0,0033	0,0034
R.MSE	0,0064	0,0101	0,0102	0,0120	0,0079	0,0107
R.Def	0,0165		0,0223		0,0186	
n=200						
Ortalama	1,0120	2,0204	0,9998	1,9994	1,0041	2,0066
R.Bias	0,0120	0,0102	-0,0002	-0,0003	0,0041	0,0033
R.MSE	0,0030	0,0041	0,0045	0,0049	0,0034	0,0042
R.Def	0,0070		0,0093		0,0076	

Tablo 4.12'deki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 1, \beta = 2$ olarak alındığında, R.Bias ölçütüne göre LSE, α ve β için tüm örneklem büyüklüklerinde diğer tahmincilere göre daha küçük bias sonuçları sergilemiştir. R.MSE göz önüne alındığında, α için en iyi tahminci $n = 10$ olduğunda WLSE, diğer örneklem değerleri için MLE'dir. β ele alındığında ise $n = 10, 20$ dışındaki diğer örneklem değerleri için MLE en iyi performansı sergilemiştir. Benzer şekilde R.Def değerleri göstermektedir ki $n = 10$ için WLSE, $n \geq 20$ olduğunda MLE en iyi sonuçları sunmuştur.

Sonuç olarak, FWD'nin her iki parametresinin sonuçlarına R.Bias ölçütüne göre bakıldığında, LSE'nin neredeyse tüm örneklem büyüklüklerinde en iyi performansı sergilediği görülmüştür. R.MSE'yle ilgili olarak $n = 10$ için WLSE'nin, diğer örneklem büyüklükleri için MLE'nin tatmin edici sonuçlar verdiği gözlenmiştir. R.Def açısından ise R.MSE'yle benzer sonuçlar sergilenmektedir.

4.2.4. Üstelleştirilmiş Weibull dağılımı için simülasyon sonuçları

EWD için $\alpha = 1$, $\beta = 0,8$, $v = 2$ olarak alındığında R.Bias, R.MSE ve R.Def için elde edilen sonuçlar Tablo 4.13'de verilmiştir.

Tablo 4.13. $\alpha = 1$, $\beta = 0,8$, $v = 2$ için EWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE		
n=10									
	α	β	v	α	β	v	α	β	v
Ortalama	1,2528	1,0457	2,2594	1,3665	0,9791	1,9693	1,3783	0,9756	1,9263
R.Bias	0,2528	0,3071	0,1297	0,3665	0,2239	-0,0153	0,3783	0,2195	-0,0368
R.MSE	0,6040	0,4170	0,6122	0,7894	0,4077	0,5020	0,7838	0,3874	0,4740
R.Def	1,6332			1,6991			1,6452		
n=20									
Ortalama	1,2740	1,0125	2,1387	1,3884	1,0059	1,9588	1,3750	0,9909	1,9470
R.Bias	0,2740	0,2656	0,0694	0,3884	0,2573	-0,0206	0,3750	0,2386	-0,0265
R.MSE	0,5892	0,3374	0,4905	0,7609	0,3749	0,4887	0,7243	0,3428	0,4558
R.Def	1,4172			1,6245			1,5230		
n=30									
Ortalama	1,2477	0,9680	2,1483	1,4005	1,0102	1,9309	1,3416	0,9766	2,0007
R.Bias	0,2477	0,2100	0,0741	0,4005	0,2628	-0,0345	0,3416	0,2208	0,0004
R.MSE	0,5404	0,2571	0,4560	0,7536	0,3440	0,4646	0,6798	0,3039	0,4449
R.Def	1,2536			1,5622			1,4285		
n=50									
Ortalama	1,1768	0,9107	2,2010	1,3239	0,9730	2,0242	1,2699	0,9376	2,0740
R.Bias	0,1768	0,1384	0,1005	0,3239	0,2162	0,0121	0,2699	0,1720	0,0370
R.MSE	0,4270	0,1648	0,4013	0,6362	0,2807	0,4436	0,5641	0,2228	0,4137
R.Def	0,9932			1,3606			1,2006		
n=100									
Ortalama	1,1278	0,8782	2,1504	1,2196	0,9264	2,1369	1,1624	0,8901	2,1558
R.Bias	0,1278	0,0977	0,0752	0,2196	0,1580	0,0684	0,1624	0,1126	0,0779
R.MSE	0,3060	0,1062	0,2892	0,4961	0,2084	0,4188	0,3933	0,1474	0,3560
R.Def	0,7015			1,1233			0,8967		
n=200									
Ortalama	1,0357	0,8217	2,1897	1,0937	0,8465	2,2345	1,0528	0,8251	2,2348
R.Bias	0,0357	0,0271	0,0949	0,0937	0,0581	0,1173	0,0528	0,0313	0,1174
R.MSE	0,1635	0,0403	0,1914	0,2871	0,0838	0,3392	0,2159	0,0544	0,2765
R.Def	0,3952			0,7102			0,5467		

Not: En iyi tahminçileri belirlemede α 'nın **R.Bias**'i, β 'nin **R.Bias**'i, v 'nin **R.Bias**'i, α 'nın **R.MSE**'si, β 'nin **R.MSE**'si, v 'nin **R.MSE**'si ve **R.Def** için vurgulanan renkler kullanılmıştır.

Tablo 4.13'deki sonuçlara göre $\alpha = 1$, $\beta = 0,8$, $v = 2$ için, α parametresi ele alındığında R.Bias ölçütüne göre tüm örneklem büyüklüklerinde en iyi performansı MLE göstermiştir. β parametresi için ise küçük örneklerde WLSE, orta ve büyük örneklerde MLE iyi bir performans göstermiştir. v parametresi ele alındığında $n = 30,200$ dışındaki örneklem büyüklükleri için LSE en iyi tahmincidir. R.MSE ölçütüne göre α parametresi için tahminçiler karşılaştırıldığında tüm örneklem büyüklüklerinde en iyi performansı MLE'nin sergilediği gözlenmiştir. β parametresi ele alındığında $n = 10$ için WLSE en iyi tahminciyken, $n \geq 20$ olduğunda MLE en iyi

tahmincidir. v parametresi ele alındığında $n = 10, 20, 30$ için WLSE, diğer örneklem büyüklüklerinde MLE iyi bir tahmincidir. R.Def değerleri açısından tüm örneklem büyüklüklerinde MLE diğer tahmin edicilerden daha iyi bir performans sergilemiştir.

Tablo 4.14. $\alpha = 1, \beta = 1,5, v = 2,5$ için EWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE		
	n=10								
	α	β	v	α	β	v	α	β	v
Ortalama	1,1656	2,1009	2,5885	1,3464	2,1273	1,9751	1,3353	2,0924	1,9946
R.Bias	0,1656	0,4006	0,0354	0,3464	0,4182	-0,2100	0,3353	0,3949	-0,2021
R.MSE	0,2178	0,5316	0,5480	0,4144	0,6272	0,5263	0,3977	0,5854	0,5179
R.Def	1,2974			1,5680			1,5011		
	n=20								
Ortalama	1,1465	1,9857	2,5622	1,2703	2,1056	2,1241	1,2486	2,0459	2,1979
R.Bias	0,1465	0,3238	0,0249	0,2703	0,4037	-0,1504	0,2486	0,3639	-0,1208
R.MSE	0,1776	0,4191	0,4959	0,2815	0,5624	0,5056	0,2693	0,5101	0,5112
R.Def	1,0926			1,3495			1,2905		
	n=30								
Ortalama	1,1327	1,9112	2,5382	1,2261	2,0366	2,2489	1,2071	1,9891	2,2755
R.Bias	0,1327	0,2742	0,0153	0,2261	0,3578	-0,1004	0,2071	0,3261	-0,0898
R.MSE	0,1536	0,3326	0,4599	0,2350	0,4824	0,4939	0,2145	0,4339	0,4618
R.Def	0,9462			1,2113			1,1101		
	n=50								
Ortalama	1,0563	1,7099	2,7785	1,1736	1,9281	2,3732	1,1300	1,8235	2,5000
R.Bias	0,0563	0,1399	0,1114	0,1736	0,2854	-0,0507	0,1300	0,2157	0,0000
R.MSE	0,1075	0,1701	0,4371	0,1856	0,3676	0,4594	0,1554	0,2757	0,4371
R.Def	0,7146			1,0126			0,8682		
	n=100								
Ortalama	1,0334	1,6303	2,7896	1,0975	1,7657	2,5961	1,0584	1,6727	2,7123
R.Bias	0,0334	0,0869	0,1158	0,0975	0,1771	0,0384	0,0584	0,1151	0,0849
R.MSE	0,0834	0,1050	0,3651	0,1282	0,2250	0,4307	0,1035	0,1514	0,3982
R.Def	0,5535			0,7839			0,6530		
	n=200								
Ortalama	0,9945	1,5327	2,8151	1,0319	1,6022	2,7673	1,0093	1,5521	2,7894
R.Bias	-0,0055	0,0218	0,1261	0,0319	0,0681	0,1069	0,0093	0,0348	0,1158
R.MSE	0,0473	0,0388	0,2554	0,0779	0,0848	0,3633	0,0587	0,0522	0,2976
R.Def	0,3415			0,5260			0,4085		

Tablo 4.14'deki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 1, \beta = 1,5, v = 2,5$ için α parametresi ele alındığında, örneklem büyüklüğü arttığında R.Bias, R.MSE ve R.Def değerlerinin azaldığı görülmektedir. R.Bias açısından α parametresi karşılaştırıldığında MLE tüm örneklem büyüklüklerinde en iyi tahmincidir. β parametresi ele alındığında $n = 10$ için en iyi performansı WLSE, $n \geq 20$ için MLE sergilemiştir. v parametresi R.Bias ölçütüne göre karşılaştırıldığında $n = 10, 20, 30$ olduğunda MLE, büyük örneklem için LSE, $n = 50$ için WLSE en iyi performansı sergilemiştir. R.MSE ölçütüne göre α ve β için tüm örneklem büyüklüklerinde MLE iyi bir tahmincidir. v için $n = 50$ olduğunda MLE ve WLSE aynı performansı gösterirken, $n = 10$ için WLSE,

bunlar dışındaki örneklem büyüklüklerinde MLE iyi bir performans göstermiştir. R.Def değerleri karşılaştırıldığında MLE'nin tüm örneklem büyüklüklerinde en iyi tahminci olduğu gözlenmiştir.

Tablo 4.15. $\alpha = 1, \beta = 0,7, v = 0,8$ için EWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE		
	n=10								
	α	β	v	α	β	v	α	β	v
Ortalama	1,3573	0,9879	0,8177	1,2020	0,8303	0,8933	1,1708	0,7975	0,9109
R.Bias	0,3573	0,4112	0,0221	0,2020	0,1861	0,1167	0,1708	0,1392	0,1386
R.MSE	0,7376	0,6136	0,4988	0,6896	0,4419	0,5156	0,6550	0,3788	0,4889
R.Def	1,8499			1,6471			1,5226		
	n=20								
Ortalama	1,2681	0,9218	0,8476	1,2039	0,8419	0,8867	1,1904	0,8093	0,9022
R.Bias	0,2681	0,3169	0,0595	0,2039	0,2027	0,1083	0,1904	0,1561	0,1278
R.MSE	0,6731	0,4668	0,4616	0,6341	0,3926	0,4661	0,6259	0,3300	0,4675
R.Def	1,6016			1,4928			1,4234		
	n=30								
Ortalama	1,2409	0,9019	0,8453	1,2088	0,8392	0,8801	1,1909	0,8092	0,8859
R.Bias	0,2409	0,2884	0,0566	0,2088	0,1989	0,1001	0,1909	0,1560	0,1074
R.MSE	0,6117	0,4247	0,4178	0,6075	0,3639	0,4426	0,5768	0,2898	0,4221
R.Def	1,4542			1,4140			1,2887		
	n=50								
Ortalama	1,1985	0,8372	0,8590	1,2098	0,8335	0,8752	1,1722	0,7991	0,8923
R.Bias	0,1985	0,1960	0,0737	0,2098	0,1908	0,0940	0,1722	0,1416	0,1154
R.MSE	0,5385	0,2745	0,3692	0,5892	0,3193	0,4305	0,5454	0,2527	0,4040
R.Def	1,1823			1,3389			1,2022		
	n=100								
Ortalama	1,1563	0,7817	0,8257	1,1628	0,7912	0,8766	1,1235	0,7595	0,8719
R.Bias	0,1563	0,1168	0,0321	0,1628	0,1303	0,0957	0,1235	0,0850	0,0898
R.MSE	0,3647	0,1314	0,2148	0,4622	0,2191	0,3663	0,3782	0,1413	0,2872
R.Def	0,7109			1,0477			0,8066		
	n=200								
Ortalama	1,0690	0,7327	0,8231	1,0905	0,7493	0,8731	1,0572	0,7276	0,8551
R.Bias	0,0690	0,0467	0,0289	0,0905	0,0704	0,0914	0,0572	0,0394	0,0689
R.MSE	0,1671	0,0443	0,1099	0,2975	0,1048	0,2668	0,2068	0,0613	0,1693
R.Def	0,3213			0,6692			0,4373		

Tablo 4.15'deki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 1, \beta = 0,7, v = 0,8$ için R.Bias ölçütüne göre α ve β için tüm örneklem büyüklüklerinde WLSE'nin, v için MLE'nin iyi bir performans sergilediği söylenebilir. α parametresi için R.MSE değeri karşılaştırıldığında $n \leq 30$ için WLSE, $n \geq 50$ için MLE iyi bir performans sergilemiştir. β parametresi ele alındığında $n = 100, 200$ dışındaki tüm örneklem büyüklüklerinde WLSE'nin, v için $n = 10$ dışındaki tüm örneklem büyüklüklerinde MLE'nin en iyi tahminci olduğu gözlenmiştir. R.Def değerleri karşılaştırıldığında $n \geq 50$ için MLE, $n \leq 30$ için WLSE, en iyi tahmincidir.

Tablo 4.16. $\alpha = 1, \beta = 1,2, v = 0,9$ için EWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE		
n=10									
	α	β	v	α	β	v	α	β	v
Ortalama	1,2476	1,7989	0,8740	1,2603	1,5427	0,8911	1,2451	1,4903	0,9101
R.Bias	0,2476	0,4991	-0,0289	0,2603	0,2856	-0,0099	0,2451	0,2419	0,0113
R.MSE	0,4268	0,7512	0,5115	0,4692	0,5296	0,4910	0,4680	0,4676	0,4881
R.Def	1,6895			1,4898			1,4236		
n=20									
Ortalama	1,1696	1,6640	0,9233	1,1850	1,5342	0,9145	1,1812	1,5066	0,9351
R.Bias	0,1696	0,3867	0,0259	0,1850	0,2785	0,0161	0,1812	0,2555	0,0390
R.MSE	0,3154	0,5724	0,4966	0,3365	0,4630	0,4583	0,3454	0,4414	0,4847
R.Def	1,3844			1,2579			1,2715		
n=30									
Ortalama	1,1438	1,6009	0,9250	1,1547	1,5260	0,9264	1,1342	1,4754	0,9460
R.Bias	0,1438	0,3341	0,0278	0,1547	0,2717	0,0293	0,1342	0,2295	0,0511
R.MSE	0,2543	0,4869	0,4353	0,2670	0,4324	0,4485	0,2488	0,3751	0,4362
R.Def	1,1765			1,1479			1,0601		
n=50									
Ortalama	1,0988	1,4706	0,9493	1,1208	1,4798	0,9387	1,0992	1,4237	0,9625
R.Bias	0,0988	0,2255	0,0547	0,1208	0,2332	0,0430	0,0992	0,1865	0,0695
R.MSE	0,1973	0,3206	0,3813	0,2095	0,3595	0,4288	0,2016	0,2962	0,4131
R.Def	0,8991			0,9977			0,9109		
n=100									
Ortalama	1,0379	1,3194	0,9688	1,0668	1,3747	0,9563	1,0340	1,3063	0,9847
R.Bias	0,0379	0,0995	0,0764	0,0668	0,1456	0,0625	0,0340	0,0886	0,0941
R.MSE	0,1130	0,1264	0,2584	0,1421	0,2241	0,3160	0,1190	0,1471	0,2939
R.Def	0,4978			0,6823			0,5600		
n=200									
Ortalama	1,0157	1,2614	0,9414	1,0089	1,2818	0,9971	1,0054	1,2485	0,9674
R.Bias	0,0157	0,0511	0,0459	0,0089	0,0682	0,1079	0,0054	0,0404	0,0749
R.MSE	0,0601	0,0525	0,1350	0,0966	0,1192	0,2788	0,0692	0,0647	0,1720
R.Def	0,2477			0,4945			0,3059		

Tablo 4.16'daki $\alpha = 1, \beta = 1,2, v = 0,9$ değerleri için simülasyon sonuçlarına göre, α parametresi için R.Bias açısından $n = 20,50$ için MLE iyi bir performans sergilerken, diğer örneklem büyüklüklerinde WLSE sergilemiştir. β parametresi için tüm örneklem büyüklüklerinde WLSE'nin, v parametresi için $n = 30,200$ dışındaki tüm örneklem büyüklüklerinde LSE'nin iyi bir tahminci olduğu gözlenmiştir. α parametresi için R.MSE değeri karşılaştırıldığında $n = 30$ dışında tüm örneklem büyüklükleri için MLE diğer tahmincilere göre daha iyi bir performans sergilemiştir. β parametresi ele alındığında küçük ve orta büyüklükteki örneklemelerde WLSE'nin, büyük örneklemelerde MLE'nin iyi bir tahminci olduğu görülmüştür. v parametresi için orta ve büyük örneklemelerde en iyi performansı MLE sergilemiştir. R.Def değerleri karşılaştırıldığında $n = 10,30$ için en iyi tahminci WLSE, $n = 20$ için LSE, diğer örneklem büyüklükleri için MLE olmaktadır. Genel olarak EWD'nin sonuçlarına R.Bias ve R.MSE ölçütüne göre bakıldığında, değişen parametre değerleri için farklı

tahmincilerin iyi bir performans sergilediği gözlenmiştir. R.Def ile ilgili olarak özellikle $n \geq 50$ durumunda MLE'nin diğer tahmincilere göre daha iyi sonuç verdiği söylenebilir.

4.2.5. Weibull Geometrik dağılımı için simülasyon sonuçları

WGD için $\alpha = 1$, $\beta = 0,8$, $p = 0,3$ olarak alındığında R.Bias, R.MSE ve R.Def için elde edilen sonuçlar Tablo 4.17'de verilmiştir.

Tablo 4.17. $\alpha = 1$, $\beta = 0,8$, $p = 0,3$ için WGD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE		
n=10									
	α	β	p	α	β	p	α	β	p
Ortalama	1,7427	1,1267	0,6314	1,9465	0,8807	0,5650	1,9309	0,8796	0,5681
R.Bias	0,7427	0,4084	1,1046	0,9465	0,1009	0,8835	0,9309	0,0994	0,8936
R.MSE	1,4645	0,3952	2,0006	1,9222	0,2361	1,5074	1,9253	0,1978	1,5490
R.Def	3,8603			3,6656			3,6305		
n=20									
Ortalama	1,7099	1,0020	0,5960	1,8704	0,8554	0,5667	1,8991	0,8733	0,5763
R.Bias	0,7099	0,2525	0,9865	0,8704	0,0692	0,8891	0,8991	0,0916	0,9211
R.MSE	1,2151	0,1475	1,6962	1,5450	0,0775	1,4605	1,6525	0,0750	1,5387
R.Def	3,0588			3,0829			3,2662		
n=30									
Ortalama	1,6792	0,9590	0,5798	1,8209	0,8670	0,5583	1,7795	0,8775	0,5563
R.Bias	0,6792	0,1987	0,9327	0,8209	0,0837	0,8609	0,7795	0,0969	0,8543
R.MSE	1,0423	0,0957	1,5522	1,3180	0,0638	1,4342	1,2699	0,0592	1,4327
R.Def	2,6902			2,8161			2,7617		
n=50									
Ortalama	1,5363	0,9184	0,5330	1,6571	0,8723	0,5334	1,6570	0,8798	0,5365
R.Bias	0,5363	0,1480	0,7766	0,6571	0,0903	0,7780	0,6570	0,0997	0,7883
R.MSE	0,7247	0,0541	1,2960	0,9768	0,0446	1,2887	0,9816	0,0424	1,3331
R.Def	2,0749			2,3101			2,3571		
n=100									
Ortalama	1,4191	0,8813	0,4885	1,5445	0,8687	0,5207	1,4689	0,8674	0,4966
R.Bias	0,4191	0,1016	0,6283	0,5445	0,0858	0,7356	0,4689	0,0842	0,6552
R.MSE	0,4884	0,0289	1,0247	0,6605	0,0275	1,1392	0,5657	0,0261	1,0576
R.Def	1,5420			1,8272			1,6494		
n=200									
Ortalama	1,2422	0,8447	0,4211	1,4115	0,8465	0,4710	1,3003	0,8386	0,4347
R.Bias	0,2422	0,0559	0,4037	0,4115	0,0581	0,5699	0,3003	0,0483	0,4490
R.MSE	0,2049	0,0125	0,6067	0,4143	0,0150	0,8499	0,2777	0,0121	0,6844
R.Def	0,8241			1,2793			0,9742		

Not: En iyi tahmincileri belirlemede α 'nın **R.Bias**'i, β 'nin **R.Bias**'i, p 'nin **R.Bias**'i, α 'nın **R.MSE**'si, β 'nin **R.MSE**'si, p 'nin **R.MSE**'si ve **R.Def** için vurgulanan renkler kullanılmıştır.

Tablo 4.17'deki simülasyon sonuçları göstermektedir ki $\alpha = 1$, $\beta = 0,8$, $p = 0,3$ için R.Bias ölçütüne göre α parametresinin sonuçları karşılaştırıldığında tüm örneklem büyüklükleri için MLE en iyi sonucu vermiştir. β için $n = 20, 30, 50$ durumunda LSE'nin, diğer örneklem büyüklüklerinde WLSE'nin en iyi tahminci olduğu gözlenmiştir. p için küçük örneklemelerde LSE en iyi performansı gösterirken, $n = 30$ için WLSE, $n \geq 50$ için en iyi performansı MLE göstermiştir. R.MSE açısından α ve β ele

alındığında tüm örneklem büyüklüklerinde sırasıyla MLE ve WLSE en iyi tahmincidir. p parametresi ele alındığında $n = 10, 20, 50$ için LSE, büyük örneklerde MLE iyi bir tahminciyken, $n = 30$ durumunda WLSE iyi bir tahmincidir. R.Def için $n = 10$ dışındaki örneklem büyüklüklerinde diğer tahmincilerle karşılaştırıldığında MLE en iyi tahmincidir.

Tablo 4.18. $\alpha = 1, \beta = 1,5, p = 0,5$ için WGD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE		
n=10									
	α	β	p	α	β	p	α	β	p
Ortalama	1,3082	2,0096	0,6739	1,4899	1,5703	0,6364	1,4667	1,5887	0,6338
R.Bias	0,3082	0,3397	0,3478	0,4899	0,0469	0,2727	0,4667	0,0591	0,2677
R.MSE	0,3849	0,2854	0,4058	0,6133	0,1551	0,3547	0,5979	0,1407	0,3554
R.Def	1,0762			1,1231			1,0940		
n=20									
Ortalama	1,3118	1,8189	0,6562	1,4816	1,5626	0,6489	1,4699	1,5860	0,6531
R.Bias	0,3118	0,2126	0,3123	0,4816	0,0418	0,2978	0,4699	0,0574	0,3062
R.MSE	0,3399	0,1256	0,3703	0,5724	0,0729	0,3468	0,5473	0,0657	0,3509
R.Def	0,8358			0,9920			0,9638		
n=30									
Ortalama	1,3058	1,7455	0,6438	1,4463	1,5701	0,6397	1,4304	1,5970	0,6464
R.Bias	0,3058	0,1637	0,2876	0,4463	0,0467	0,2794	0,4304	0,0647	0,2928
R.MSE	0,3170	0,0797	0,3517	0,5352	0,0484	0,3423	0,5056	0,0470	0,3467
R.Def	0,7483			0,9260			0,8993		
n=50									
Ortalama	1,2332	1,6821	0,6151	1,3837	1,6055	0,6398	1,3627	1,6191	0,6379
R.Bias	0,2332	0,1214	0,2302	0,3837	0,0704	0,2797	0,3627	0,0794	0,2757
R.MSE	0,2054	0,0495	0,3018	0,4162	0,0420	0,3409	0,3835	0,0401	0,3381
R.Def	0,5567			0,7991			0,7617		
n=100									
Ortalama	1,1356	1,6054	0,5591	1,2837	1,5895	0,6004	1,2174	1,5931	0,5888
R.Bias	0,1356	0,0703	0,1183	0,2837	0,0597	0,2009	0,2174	0,0621	0,1776
R.MSE	0,1057	0,0219	0,2479	0,2788	0,0255	0,3118	0,1850	0,0230	0,2714
R.Def	0,3755			0,6161			0,4794		
n=200									
Ortalama	1,0789	1,5541	0,5307	1,1482	1,5487	0,5400	1,0986	1,5448	0,5334
R.Bias	0,0789	0,0361	0,0614	10,1482	0,0325	0,0800	0,0986	0,0299	0,0669
R.MSE	0,0542	0,0109	0,1662	0,1432	0,0147	0,2293	0,0706	0,0117	0,1866
R.Def	0,2313			0,3871			0,2689		

Tablo 4.18'deki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 1, \beta = 1,5, p = 0,5$ için α parametresinin R.Bias değerleri karşılaştırıldığında örneklem büyüklüğüne bakılmaksızın en iyi performansı MLE sergilemiştir. β parametresi ele alındığında $n = 200$ için WLSE iyi bir tahminciyken, diğer örneklem büyüklüklerinde ise LSE'nin iyi bir tahminci olduğu gözlenmiştir. p parametresi için sonuçlar karşılaştırıldığında $n = 10$ için en iyi performansı WLSE gösterirken, $n = 20, 30$ için LSE, diğer örneklem büyüklükleri için MLE göstermiştir. α parametresi, R.MSE açısından karşılaştırıldığında tüm örneklem büyüklüklerinde en iyi performansı MLE sergilemiştir. β parametresi için küçük ve orta

örneklerde WLSE, $n \geq 100$ olduğunda ise MLE iyi bir tahmincidir. p için $n \leq 30$ olduğunda LSE'nin, $n \geq 50$ olduğunda ise MLE'nin iyi bir performans gösterdiği gözlenmiştir. R.Def değerleri göstermektedir ki tüm örneklem büyüklüklerinde MLE üstün bir performans göstermiştir.

Tablo 4.19. $\alpha = 1, \beta = 2, p = 0,9$ için WGD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE		
n=10									
	α	β	p	α	β	p	α	β	p
Ortalama	1,5507	2,4655	0,8806	1,2209	2,0384	0,7430	1,1553	1,9630	0,7358
R.Bias	0,5507	0,2327	-0,0215	0,2209	0,0192	-0,1744	0,1553	-0,0185	-0,1825
R.MSE	0,8197	0,1937	0,0482	0,5638	0,2250	0,1177	0,4829	0,1886	0,1146
R.Def	1,0615			0,9065			0,7861		
n=20									
Ortalama	1,4374	2,2245	0,8627	1,1401	1,9014	0,7418	1,0857	1,8754	0,7460
R.Bias	0,4374	0,1123	-0,0414	0,1401	-0,0493	-0,1757	0,0857	-0,0623	-0,1711
R.MSE	0,7335	0,0795	0,0473	0,4790	0,0935	0,1109	0,3611	0,0699	0,1047
R.Def	0,8603			0,6834			0,5357		
n=30									
Ortalama	1,3400	2,1313	0,8528	1,0840	1,8529	0,7453	1,0876	1,8608	0,7651
R.Bias	0,3400	0,0657	-0,0525	0,0840	-0,0735	-0,1719	0,0876	-0,0696	-0,1499
R.MSE	0,6138	0,0491	0,0456	0,3821	0,0523	0,1031	0,3445	0,0424	0,0879
R.Def	0,7084			0,5375			0,4747		
n=50									
Ortalama	1,2356	2,0653	0,8549	1,0708	1,8809	0,7683	1,0824	1,8971	0,7903
R.Bias	0,2356	0,0327	-0,0501	0,0708	-0,0596	-0,1463	0,0824	-0,0515	-0,1219
R.MSE	0,4505	0,0281	0,0362	0,3328	0,0312	0,0882	0,2924	0,0248	0,0720
R.Def	0,5148			0,4522			0,3891		
n=100									
Ortalama	1,0948	2,0190	0,8634	1,0538	1,9057	0,7813	1,1209	1,9505	0,8283
R.Bias	0,0948	0,0095	-0,0407	0,0538	-0,0471	-0,1319	0,1209	-0,0247	-0,0796
R.MSE	0,2191	0,0141	0,0216	0,2895	0,0181	0,0775	0,2813	0,0143	0,0472
R.Def	0,2548			0,3851			0,3427		
n=200									
Ortalama	1,0395	2,0071	0,8747	1,1035	1,9584	0,8462	1,0970	1,9852	0,8664
R.Bias	0,0395	0,0036	-0,0281	0,1035	-0,0208	-0,0597	0,0970	-0,0074	-0,0374
R.MSE	0,1089	0,0083	0,0111	0,2449	0,0097	0,0293	0,1662	0,0088	0,0198
R.Def	0,1283			0,2839			0,1947		

Tablo 4.19'deki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 1, \beta = 2, p = 0,9$ olduğunda α parametresi için R.Bias değeri karşılaştırıldığında küçük örneklerde en iyi performansı WLSE, $n = 30, 50, 100$ için LSE, $n = 200$ için MLE sergilemiştir. β parametresi ele alındığında, $n = 10$ için WLSE, $n = 20$ için LSE, diğer örneklem büyüklükleri için MLE'nin iyi bir tahminci olduğu gözlenmiştir. p parametresi için sonuçlar diğer tahmincilerle karşılaştırılmış ve tüm örneklem büyüklüklerinde en iyi performansı MLE göstermiştir. R.MSE açısından α ve β parametresinin sonuçları karşılaştırıldığında küçük ve orta büyüklükteki örnekler için WLSE, $n \geq 100$ için MLE iyi bir tahminciyken, p için tüm örneklem büyüklüklerinde en iyi tahmincinin MLE

olduğu gözlenmiştir. R.Def değerleri göstermektedir ki $n \leq 50$ için en iyi tahminci WLSE, $n = 100, 200$ için MLE'dir.

Tablo 4.20. $\alpha = 1, \beta = 4, p = 0,4$ için WGD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE		
n=10									
	α	β	p	α	β	p	α	β	p
Ortalama	1,1341	5,5549	0,6844	1,7197	5,1483	0,8081	1,6455	5,1006	0,7854
R.Bias	0,1341	0,3887	0,7110	0,7197	0,2871	1,0203	0,6455	0,2752	0,9635
R.MSE	0,0559	0,3328	0,9588	0,9282	0,2944	1,4722	0,8172	0,2786	1,3787
R.Def	1,3474			2,6947			2,4745		
n=20									
Ortalama	1,1265	5,0332	0,6604	1,5921	4,8974	0,7899	1,4982	4,8551	0,7632
R.Bias	0,1265	0,2583	0,6509	0,5921	0,2243	0,9748	0,4982	0,2138	0,9081
R.MSE	0,0432	0,1541	0,8605	0,7022	0,1658	1,3589	0,5711	0,1497	1,2580
R.Def	1,0578			2,2269			1,9788		
n=30									
Ortalama	1,1035	4,7832	0,6243	1,4478	4,7241	0,7351	1,3536	4,6842	0,7028
R.Bias	0,1035	0,1958	0,5608	0,4478	0,1810	0,8378	0,3536	0,1711	0,7570
R.MSE	0,0313	0,0964	0,7405	0,4985	0,1110	1,1573	0,3650	0,1021	1,0571
R.Def	0,8682			1,7668			1,5242		
n=50									
Ortalama	1,0924	4,5862	0,5960	1,2954	4,5746	0,6810	1,2098	4,5424	0,6521
R.Bias	0,0924	0,1466	0,4901	0,2954	0,1437	0,7026	0,2098	0,1356	0,6303
R.MSE	0,0255	0,0576	0,6437	0,2639	0,0721	0,9762	0,1546	0,0636	0,8485
R.Def	0,7268			1,3123			1,0667		
n=100									
Ortalama	1,0585	4,3525	0,5341	1,1286	4,3473	0,5789	1,0828	4,3142	0,5503
R.Bias	0,0585	0,0881	0,3353	0,1286	0,0868	0,4474	0,0828	0,0785	0,3756
R.MSE	0,0118	0,0271	0,4623	0,0686	0,0351	0,6342	0,0239	0,0297	0,5450
R.Def	0,5012			0,7379			0,5985		
n=200									
Ortalama	1,0427	4,2508	0,5061	1,0855	4,3136	0,5666	1,0564	4,2506	0,5239
R.Bias	0,0427	0,0627	0,2653	0,0855	0,0784	0,4165	0,0564	0,0627	0,3098
R.MSE	0,0069	0,0144	0,3678	0,0224	0,0221	0,5340	0,0106	0,0167	0,4362
R.Def	0,3891			0,5785			0,4635		

Tablo 4.20'deki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 1, \beta = 4, p = 0,4$ için α parametresi ele alındığında, örneklem büyüklüğü arttıkça R.Bias, R.MSE ve R.Def değerinin azaldığı görülmektedir. α ve p parametresi R.Bias ölçütüne göre ele alındığında MLE'nin tüm örneklem büyüklüklerinde en iyi tahminci olduğu gözlenmiştir. β parametresi ele alındığında $n \leq 100$ için en iyi performansı WLSE gösterirken, $n = 200$ için MLE ve WLSE aynı performansı göstermiştir. R.MSE açısından sonuçlar karşılaştırıldığında β için $n = 10, 20$ olduğunda WLSE, orta ve büyük örneklerde MLE, α ve p için tüm örneklem değerlerinde MLE diğer tahmincilere göre daha iyi bir performans sergilemiştir. Ele alınan parametre değerlerine ilişkin olarak R.Def değerleri göstermektedir ki tüm örneklem büyüklüklerinde MLE iyi bir performans sergilemektedir.

Weibull Geometrik dağılımı için sonuçlar genel olarak ele alındığında, R.Bias ölçütüne göre α ve p parametresi için genellikle tüm örneklem büyüklüklerinde MLE iyi bir performans sergilerken, β için farklı tahminciler iyi bir performans sergilemiştir. R.MSE değerleri karşılaştırıldığında genellikle büyük örneklemelerde MLE'nin diğer tahmincilere göre iyi performans sergilediği gözlenmiş, R.Def ele alındığında da benzer şekilde MLE tatmin edici sonuçlar vermiştir.

4.2.6. Odd Weibull dağılımı için simülasyon sonuçları

OddWD için $\alpha = 1$, $\beta = 1,5$, $\theta = 1,3$ olarak alındığında R.Bias, R.MSE ve R.Def için elde edilen sonuçlar Tablo 4.21'de verilmiştir.

Tablo 4.21. $\alpha = 1$, $\beta = 1,5$, $\theta = 1,3$ için OddWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE		
	n=10								
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
Ortalama	1,0034	2,1658	1,2004	1,0383	2,0580	1,1467	1,0411	2,0206	1,1601
R.Bias	0,0034	0,4439	-0,0766	0,0383	0,3720	-0,1179	0,0411	0,3471	-0,1076
R.MSE	0,0376	0,6091	0,2925	0,0631	0,6298	0,3850	0,0629	0,6156	0,3942
R.Def	0,9392			1,0778			1,0727		
	n=20								
Ortalama	1,0090	1,9732	1,2829	1,0319	1,9862	1,2563	1,0432	1,8197	1,3342
R.Bias	0,0090	0,3155	-0,0131	0,0319	0,3241	-0,0336	0,0432	0,2131	0,0263
R.MSE	0,0240	0,4384	0,2877	0,0378	0,5463	0,3828	0,0372	0,4308	0,3714
R.Def	0,7501			0,9669			0,8394		
	n=30								
Ortalama	1,0080	1,8546	1,2941	1,0245	1,9266	1,2631	1,0429	1,6956	1,4067
R.Bias	0,0080	0,2364	-0,0046	0,0245	0,2844	-0,0284	0,0429	0,1304	0,0821
R.MSE	0,0168	0,3019	0,2456	0,0285	0,4549	0,3408	0,0285	0,3144	0,3522
R.Def	0,5643			0,8243			0,6951		
	n=50								
Ortalama	1,0120	1,7176	1,3329	1,0292	1,8136	1,3341	1,0445	1,6033	1,4643
R.Bias	0,0120	0,1450	0,0253	0,0292	0,2091	0,0263	0,0445	0,0689	0,1264
R.MSE	0,0121	0,1951	0,1980	0,0235	0,3552	0,3288	0,0235	0,2258	0,3356
R.Def	0,4053			0,7075			0,5848		
	n=100								
Ortalama	1,0133	1,5676	1,3688	1,0337	1,6177	1,4232	1,0384	1,4746	1,5024
R.Bias	0,0133	0,0451	0,0529	0,0337	0,0785	0,0948	0,0384	-0,0169	0,1557
R.MSE	0,0075	0,0819	0,1285	0,0168	0,1965	0,2606	0,0136	0,1083	0,2403
R.Def	0,2179			0,4740			0,3622		
	n=200								
Ortalama	1,0066	1,5402	1,3352	1,0341	1,5189	1,4495	1,0182	1,4787	1,4068
R.Bias	0,0066	0,0268	0,0271	0,0341	0,0126	0,1150	0,0182	-0,0142	0,0821
R.MSE	0,0039	0,0433	0,0724	0,0139	0,1104	0,2192	0,0053	0,0504	0,1006
R.Def	0,1196			0,3435			0,1564		

Not: En iyi tahmincileri belirlemede α 'nın **R.Bias**'i, β 'nin **R.Bias**'i, θ 'nin **R.Bias**'i, α 'nın **R.MSE**'si, β 'nin **R.MSE**'si, θ 'nin **R.MSE**'si ve **R.Def** için vurgulanan renkler kullanılmıştır.

Tablo 4.21'deki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 1$, $\beta = 1,5$, $\theta = 1,3$ olarak alındığında R.Bias açısından $n = 200$ dışındaki diğer örneklem büyüklüklerinde β parametresi için en iyi performansı WLSE gösterirken, α ve θ parametresi ele alındığında, tüm örneklem büyüklüklerinde MLE diğer tahmincilerden üstün bir performans göstermiştir. R.MSE'ye göre α ve θ için sonuçlar karşılaştırıldığında tüm örneklem büyüklüklerinde, β için $n = 20$ dışındaki diğer örneklem büyüklüklerinde en iyi performansı MLE sergilemiştir. Ele alınan parametre değerleri için R.Def değerleri göz önüne alındığında tüm örneklem büyüklüklerinde en iyi tahminci MLE'dir.

Tablo 4.22. $\alpha = 1, \beta = 1,3, \theta = 0,7$ için *OddWD*'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE		
	n=10								
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
Ortalama	1,1308	1,7451	0,6943	1,0871	1,6246	0,6764	1,0869	1,5747	0,6971
R.Bias	0,1308	0,3424	-0,0081	0,0871	0,2497	-0,0337	0,0869	0,2113	-0,0042
R.MSE	0,1297	0,4813	0,3107	0,1454	0,4830	0,3817	0,1444	0,4564	0,4108
R.Def	0,9217			1,0102			1,0163		
	n=20								
Ortalama	1,0776	1,5849	0,7239	1,0717	1,5539	0,7303	1,0724	1,4080	0,7838
R.Bias	0,0776	0,2192	0,0341	0,0717	0,1953	0,0434	0,0724	0,0831	0,1198
R.MSE	0,0665	0,3068	0,2546	0,0764	0,3959	0,3745	0,0747	0,2847	0,3670
R.Def	0,6280			0,8469			0,7264		
	n=30								
Ortalama	1,0518	1,5016	0,7226	1,0594	1,4563	0,7581	1,0551	1,3469	0,7979
R.Bias	0,0518	0,1551	0,0323	0,0594	0,1202	0,0830	0,0551	0,0361	0,1398
R.MSE	0,0416	0,2027	0,1968	0,0503	0,2811	0,3300	0,0459	0,1923	0,3178
R.Def	0,4411			0,6614			0,5560		
	n=50								
Ortalama	1,0327	1,4213	0,7160	1,0453	1,3788	0,7597	1,0402	1,2910	0,7940
R.Bias	0,0327	0,0933	0,0229	0,0453	0,0606	0,0853	0,0402	-0,0069	0,1343
R.MSE	0,0280	0,1049	0,1316	0,0335	0,1660	0,2545	0,0298	0,1033	0,2244
R.Def	0,2645			0,4541			0,3574		
	n=100								
Ortalama	1,0149	1,3598	0,7114	1,0312	1,3153	0,7669	1,0197	1,2874	0,7587
R.Bias	0,0149	0,0460	0,0163	0,0312	0,0118	0,0956	0,0197	-0,0097	0,0839
R.MSE	0,0115	0,0436	0,0619	0,0152	0,0879	0,1682	0,0118	0,0470	0,0975
R.Def	0,1170			0,2713			0,1563		
	n=200								
Ortalama	1,0089	1,3419	0,6919	1,0172	1,3182	0,7221	1,0110	1,3027	0,7166
R.Bias	0,0089	0,0322	-0,0115	0,0172	0,0140	0,0316	0,0110	0,0020	0,0237
R.MSE	0,0063	0,0189	0,0253	0,0074	0,0430	0,0670	0,0064	0,0196	0,0334
R.Def	0,0504			0,1175			0,0594		

Tablo 4.22'deki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 1, \beta = 1,3, \theta = 0,7$ değerleri için R.Bias açısından α ele alındığında, $n = 10$ ve $n = 20$ için sırasıyla WLSE ve LSE iyi bir performans gösterirken, diğer örneklem büyüklüklerinde MLE göstermiştir. β parametresi ele alındığında tüm örneklem büyüklükleri için WLSE'nin, θ parametresi ele alındığında ise $n = 10$ için WLSE'nin, $n \geq 20$ için MLE'nin iyi bir tahminci olduğu gözlenmiştir. α ve θ parametresi R.MSE ölçütüne göre karşılaştırıldığında tüm örneklem büyüklüklerinde diğer tahminciler arasında en iyi performansı MLE sergilemiştir. β ele alındığında $n \leq 50$ için WLSE, $n = 100, 200$ için MLE en iyi tahmincidir. R.Def ile ilgili olarak, sonuçlar tüm örneklem büyüklüklerinde MLE 'nin iyi bir performans sergilediğini vurgulamaktadır.

Tablo 4.23. $\alpha = 1, \beta = 0,8, \theta = 0,5$ için OddWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE		
	n=10								
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
Ortalama	1,4636	1,1104	0,4840	1,1644	0,9550	0,5061	1,1701	0,9305	0,5111
R.Bias	0,4636	0,3880	-0,0321	0,1644	0,1937	0,0121	0,1701	0,1631	0,0222
R.MSE	0,6378	0,5279	0,3139	0,4675	0,4422	0,3958	0,4736	0,3995	0,3929
R.Def	1,4795			1,3055			1,2661		
	n=20								
Ortalama	1,2862	0,9958	0,5005	1,1674	0,9226	0,5294	1,1513	0,8478	0,5621
R.Bias	0,2862	0,2448	0,0009	0,1674	0,1532	0,0588	0,1513	0,0597	0,1242
R.MSE	0,3794	0,3060	0,2385	0,3281	0,3317	0,3338	0,3155	0,2307	0,3391
R.Def	0,9239			0,9936			0,8853		
	n=30								
Ortalama	1,1774	0,9136	0,5150	1,1375	0,8801	0,5414	1,1205	0,8112	0,5779
R.Bias	0,1774	0,1420	0,0299	0,1375	0,1001	0,0829	0,1205	0,0141	0,1558
R.MSE	0,2409	0,1702	0,1805	0,2343	0,2390	0,2947	0,2181	0,1605	0,3069
R.Def	0,5916			0,7680			0,6855		
	n=50								
Ortalama	1,0903	0,8628	0,5109	1,0904	0,8327	0,5525	1,0664	0,7928	0,5596
R.Bias	0,0903	0,0785	0,0218	0,0904	0,0408	0,1049	0,0664	-0,0089	0,1192
R.MSE	0,1218	0,0832	0,1086	0,1318	0,1507	0,2469	0,1172	0,0850	0,1818
R.Def	0,3136			0,5293			0,3840		
	n=100								
Ortalama	1,0388	0,8306	0,5032	1,0452	0,8118	0,5301	1,0313	0,7959	0,5284
R.Bias	0,0388	0,0382	0,0065	0,0452	0,0148	0,0601	0,0313	-0,0052	0,0569
R.MSE	0,0577	0,0349	0,0437	0,0646	0,0685	0,1124	0,0568	0,0374	0,0635
R.Def	0,1362			0,2455			0,1576		
	n=200								
Ortalama	1,0212	0,8149	0,5028	1,0195	0,8027	0,5154	1,0165	0,7964	0,5176
R.Bias	0,0212	0,0187	0,0056	0,0195	0,0034	0,0308	0,0165	-0,0046	0,0352
R.MSE	0,0275	0,0168	0,0248	0,0292	0,0321	0,0479	0,0275	0,0183	0,0336
R.Def	0,0692			0,1092			0,0795		

Tablo 4.23'deki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 1, \beta = 0,8, \theta = 0,5$ olduğunda ve R.Bias ölçütüne göre α için, $n = 10$ dışındaki örneklem büyüklüklerinde en iyi performansı WLSE göstermiştir. β parametresi ele alındığında $n \leq 100$ için WLSE iyi bir performans gösterirken, $n = 200$ için LSE en iyi tahmincidir. θ parametresi ele alındığında $n = 10$ için LSE, diğer örneklem büyüklükleri için MLE en iyi sonuçları vermiştir. R.MSE'ye göre sonuçlar karşılaştırıldığında α için en iyi performansı $n = 10$ olduğunda LSE, $n = 20, 30, 50, 100$ için WLSE sergilerken $n = 200$ için MLE ve WLSE aynı performansı sergilemiştir. β için $n \leq 30$ olduğunda WLSE, $n = 50, 100, 200$ için MLE, θ parametresi ele alındığında ise tüm örneklem büyüklüklerinde diğer tahminciler arasında en iyi sonucu MLE vermiştir. R.Def değerleri göstermektedir ki küçük örneklemelerde en iyi tahminci WLSE iken, örneklem büyüklüğü arttıkça en iyi tahminci MLE olmaktadır.

Tablo 4.24. $\alpha = 1, \beta = -2, \theta = -2$ için OddWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE		
	n=10								
	α	β	θ	α	β	θ	α	β	θ
Ortalama	0,9973	-2,7883	-2,2494	1,0161	-2,9648	-1,6373	1,0114	-2,8998	-1,6578
R.Bias	-0,0027	0,3941	0,1247	0,0161	0,4824	-0,1814	0,0114	0,4499	-0,1711
R.MSE	0,0208	0,7179	0,6340	0,0206	0,7762	0,3769	0,0216	0,7721	0,3935
R.Def	1,3728			1,1737			1,1872		
	n=20								
Ortalama	1,0059	-2,7964	-2,0251	1,0152	-2,9486	-1,7537	1,0022	-2,6887	-1,8910
R.Bias	0,0059	0,3982	0,0125	0,0152	0,4743	-0,1232	0,0022	0,3443	-0,0545
R.MSE	0,0129	0,6366	0,4503	0,0139	0,7508	0,3709	0,0147	0,5968	0,3787
R.Def	1,0998			1,1356			0,9902		
	n=30								
Ortalama	1,0084	-2,7071	-1,9652	1,0114	-2,8914	-1,8139	0,9915	-2,4955	-2,0483
R.Bias	0,0084	0,3535	-0,0174	0,0114	0,4457	-0,0930	-0,0085	0,2478	0,0242
R.MSE	0,0094	0,5094	0,3557	0,0122	0,6890	0,3594	0,0123	0,4658	0,3699
R.Def	0,8746			1,0606			0,8480		
	n=50								
Ortalama	0,9991	-2,4457	-2,0474	1,0072	-2,7401	-1,8861	0,9857	-2,3146	-2,1598
R.Bias	-0,0009	0,2229	0,0237	0,0072	0,3700	-0,0569	-0,0143	0,1573	0,0799
R.MSE	0,0080	0,3367	0,3017	0,0105	0,5800	0,3447	0,0103	0,3431	0,3526
R.Def	0,6463			0,9352			0,7061		
	n=100								
Ortalama	0,9980	-2,2757	-2,0651	0,9926	-2,3909	-2,0879	0,9797	-2,1249	-2,2638
R.Bias	-0,0020	0,1378	0,0325	-0,0074	0,1954	0,0439	-0,0203	0,0624	0,1319
R.MSE	0,0054	0,1931	0,2296	0,0086	0,3444	0,3200	0,0083	0,1977	0,3322
R.Def	0,4281			0,6730			0,5382		
	n=200								
Ortalama	0,9942	-2,0928	-2,1121	0,9851	-2,2136	-2,2007	0,9813	-1,9848	-2,2724
R.Bias	-0,0058	0,0464	0,0561	-0,0149	0,1068	0,1004	-0,0187	-0,0076	0,1362
R.MSE	0,0032	0,0865	0,1345	0,0080	0,2241	0,3176	0,0046	0,0958	0,2074
R.Def	0,2241			0,5498			0,3078		

Tablo 4.24'deki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 1, \beta = -2, \theta = -2$ olarak alındığında R.Bias açısından α parametresi için, $n = 20$ dışındaki örneklem büyüklüklerinde MLE iyi bir performans göstermiştir. β parametresi ele alındığında $n = 10$ için en iyi tahminci MLE iken, diğer örneklem büyüklüklerinde WLSE'dir. θ için MLE'nin tüm örneklem büyüklüklerinde diğer tahminciler arasında en iyi performansı sergilediği gözlenmiştir. R.MSE ölçütüne göre α için sonuçlar karşılaştırıldığında $n = 10$ için en iyi performansı LSE, $n \geq 20$ için MLE sergilemiştir. β parametresi için $n = 20,30$ olduğunda WLSE, $n = 10,50,100,200$ için MLE diğer tahmincilere göre iyi bir performans göstermiştir. θ parametresi ele alındığında küçük örneklemelerde LSE, $n \geq 30$ için MLE en iyi performansı sergilemiştir. Göz önüne alınan parametre değerleri için R.Def ile ilgili olarak, $n > 30$ için en iyi tahmincinin MLE olduğu görülmektedir.

OddWD'nin sonuçları genel olarak R.Bias açısından karşılaştırıldığında α ve θ parametresi için MLE'nin, β için WLSE'nin diğer tahmincilere göre daha iyi sonuçlar

verdiği görülmüştür. R.MSE sonuçları karşılaştırıldığında β için özellikle $n = 20$ durumunda WLSE, diğer örneklem büyüklüklerinde MLE, α ve θ için de çoğunlukla MLE diğer tahmincilerden üstün bir performans sunmuştur. R.Def ölçütüne göre bakıldığında MLE özellikle $n \geq 50$ için en iyi sonucu vermiştir.

4.2.7. Marshall Olkin Extended Weibull dağılımı için simülasyon sonuçları

MOEWD için $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\lambda = 0,7$ olarak alındığında R.Bias, R.MSE ve R.Def için elde edilen sonuçlar Tablo 4.25'de verilmiştir.

Tablo 4.25. $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\lambda = 0,7$ için MOEWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE		
	α	β	λ	α	β	λ	α	β	λ
n=10									
Ortalama	1,2948	1,2949	0,6409	1,3340	0,9766	0,7299	1,3625	1,0014	0,7113
R.Bias	0,2948	0,2949	-0,0844	0,3340	-0,0234	0,0427	0,3625	0,0014	0,0162
R.MSE	0,5251	0,2712	0,6061	0,6158	0,1372	0,5520	0,6585	0,1295	0,5634
R.Def	1,4024			1,3050			1,3515		
n=20									
Ortalama	1,3096	1,1781	0,6522	1,3825	1,0059	0,6824	1,3683	1,0243	0,6831
R.Bias	0,3096	0,1781	-0,0683	0,3825	0,0059	-0,0252	0,3683	0,0243	-0,0242
R.MSE	0,4994	0,1216	0,5698	0,6070	0,0814	0,5345	0,6078	0,0754	0,5496
R.Def	1,1908			1,2229			1,2329		
n=30									
Ortalama	1,3066	1,1319	0,6636	1,3818	1,0231	0,6697	1,3852	1,0375	0,6585
R.Bias	0,3066	0,1319	-0,0520	0,3818	0,0231	-0,0433	0,3852	0,0375	-0,0593
R.MSE	0,4812	0,0761	0,5479	0,5981	0,0579	0,5288	0,5931	0,0530	0,5106
R.Def	1,1052			1,1849			1,1567		
n=50									
Ortalama	1,2794	1,0933	0,6696	1,3626	1,0332	0,6670	1,3446	1,0461	0,6647
R.Bias	0,2794	0,0933	-0,0434	0,3626	0,0332	-0,0471	0,3446	0,0461	-0,0505
R.MSE	0,4144	0,0485	0,4961	0,5611	0,0452	0,5073	0,5167	0,0432	0,5091
R.Def	0,9589			1,1136			1,0691		
n=100									
Ortalama	1,1865	1,0537	0,7122	1,2962	1,0363	0,6810	1,2399	1,0351	0,7114
R.Bias	0,1865	0,0537	0,0174	0,2962	0,0363	-0,0272	0,2399	0,0351	0,0162
R.MSE	0,2769	0,0272	0,4290	0,4480	0,0317	0,4579	0,3719	0,0278	0,4709
R.Def	0,7330			0,9376			0,8705		
n=200									
Ortalama	1,0761	1,0178	0,7628	1,1717	1,0174	0,7347	1,1105	1,0140	0,7472
R.Bias	0,0761	0,0178	0,0897	0,1717	0,0174	0,0496	0,1105	0,0140	0,0675
R.MSE	0,1375	0,0155	0,3685	0,2737	0,0202	0,4236	0,1797	0,0176	0,3696
R.Def	0,5215			0,7175			0,5668		

Not: En iyi tahmincileri belirlemede α 'nın **R.Bias**'i, β 'nin **R.Bias**'i, λ 'nin **R.Bias**'i, α 'nın **R.MSE**'si, β 'nin **R.MSE**'si, λ 'nin **R.MSE**'si ve **R.Def** için vurgulanan renkler kullanılmıştır.

Tablo 4.25'deki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\lambda = 0,7$ olduğunda ve R.Bias açısından α parametresi ele alındığında, tüm örneklem değerleri için en iyi performansı MLE göstermiştir. β parametresi ele alındığında $n = 10, 100, 200$ için en

iyi performansı WLSE sergilerken, $n = 20, 30, 50$ için LSE sergilemiştir. λ parametresi ele alındığında $n = 50$ için en iyi tahmincinin MLE, $n = 30, 200$ için LSE diğer örneklem büyüklükleri için WLSE olduğu gözlenmiştir. R.MSE'ye göre α parametresi için sonuçlar karşılaştırıldığında tüm örneklem büyüklükleri için diğer tahmin ediciler arasında en iyi performansı MLE sergilerken, β parametresi ele alındığında küçük ve orta örneklem için WLSE, $n \geq 100$ için MLE sergilemiştir. λ parametresi ele alındığında $n = 10, 20$ için LSE, $n = 30$ için WLSE, $n \geq 50$ için MLE en iyi tahmincidir. R.Def değerleri göstermektedir ki $n = 10$ dışındaki örneklem büyüklükleri için MLE iyi bir tahmincidir.

Tablo 4.26. $\alpha = 1, \beta = 1,5, \lambda = 0,7$ için MOEWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE		
n=10									
	α	β	λ	α	β	λ	α	β	λ
Ortalama	1,2885	2,0012	0,5720	1,3778	1,5146	0,6494	1,3720	1,5365	0,6381
R.Bias	0,2885	0,3342	-0,1828	0,3778	0,0098	-0,0723	0,3720	0,0243	-0,0884
R.MSE	0,3829	0,3108	0,6192	0,5412	0,1561	0,5950	0,5258	0,1411	0,5855
R.Def	1,3130			1,2923			1,2525		
n=20									
Ortalama	1,2701	1,8032	0,6087	1,3909	1,5464	0,6120	1,3929	1,5800	0,5951
R.Bias	0,2701	0,2022	-0,1304	0,3909	0,0309	-0,1257	0,3929	0,0533	-0,1498
R.MSE	0,3290	0,1401	0,5944	0,5159	0,0823	0,5919	0,5185	0,0769	0,5721
R.Def	1,0635			1,1901			1,1675		
n=30									
Ortalama	1,2412	1,7382	0,6176	1,3715	1,5767	0,6065	1,3714	1,6094	0,5971
R.Bias	0,2412	0,1588	-0,1177	0,3715	0,0511	-0,1335	0,3714	0,0729	-0,1470
R.MSE	0,2723	0,0927	0,5465	0,4789	0,0689	0,5620	0,4780	0,0685	0,5698
R.Def	0,9115			1,1098			1,1163		
n=50									
Ortalama	1,1829	1,6416	0,6634	1,3326	1,5790	0,6109	1,2912	1,5929	0,6333
R.Bias	0,1829	0,0944	-0,0522	0,3326	0,0527	-0,1272	0,2912	0,0619	-0,0953
R.MSE	0,1988	0,0504	0,5058	0,4074	0,0484	0,5243	0,3419	0,0473	0,5571
R.Def	0,7550			0,9801			0,9463		
n=100									
Ortalama	1,1163	1,5906	0,6996	1,1965	1,5592	0,6734	1,1531	1,5595	0,6912
R.Bias	0,1163	0,0604	-0,0006	0,1965	0,0394	-0,0380	0,1531	0,0397	-0,0126
R.MSE	0,1136	0,0292	0,4509	0,2218	0,0327	0,4785	0,1632	0,0297	0,4501
R.Def	0,5937			0,7329			0,6430		
n=200									
Ortalama	1,0493	1,5434	0,7381	1,1154	1,5416	0,7208	1,0571	1,5269	0,7544
R.Bias	0,0493	0,0289	0,0544	0,1154	0,0278	0,0297	0,0571	0,0180	0,0778
R.MSE	0,0581	0,0154	0,3246	0,1281	0,0217	0,4356	0,0717	0,0175	0,3856
R.Def	0,3981			0,5854			0,4748		

Tablo 4.26'daki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 1, \beta = 1,5, \lambda = 0,7$ için R.Bias ölçütü ele alındığında α parametresi için en iyi tahmincinin MLE olduğu gözlenmiştir. β parametresi için $n \leq 100$ olduğunda LSE iyi bir tahminciyken, $n = 200$ için WLSE iyi bir tahmincidir. λ parametresi ele alındığında $n = 10, 20, 200$ için en iyi performansı

LSE, $n = 30, 50, 100$ için MLE göstermiştir. R.MSE açısından α parametresi ele alındığında, tüm örneklem büyüklüklerinde MLE diğer tahminciler arasında en iyi performansı göstermiştir. β parametresinin sonuçları karşılaştırıldığında $n \leq 50$ için en iyi performansı WLSE, büyük örneklem için MLE sergilemiştir. λ parametresi ele alındığında $n = 10, 20, 100$ için WLSE, diğer örneklem büyüklükleri için MLE iyi bir performans göstermiştir. Hesaplanan R.Def değerleri göstermektedir ki $n = 10$ için WLSE en iyi tahminci iken, örneklem büyüklüğü arttıkça MLE olmaktadır.

Tablo 4.27. $\alpha = 1, \beta = 2,5, \lambda = 4$ için MOEWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE		
	n=10								
	α	β	λ	α	β	λ	α	β	λ
Ortalama	1,3059	3,9724	2,2647	1,1288	2,6398	4,7164	1,1265	2,7017	4,6924
R.Bias	0,3059	0,5889	-0,4338	0,1288	0,0559	0,1791	0,1265	0,0807	0,1731
R.MSE	0,1986	0,6761	0,6218	0,2709	0,2767	0,8063	0,2539	0,2797	0,8778
R.Def	1,4964			1,3540			1,4114		
	n=20								
Ortalama	1,2731	3,6421	2,4443	1,1710	2,8354	4,2739	1,1718	2,9144	4,1993
R.Bias	0,2731	0,4568	-0,3889	0,1710	0,1342	0,0685	0,1718	0,1658	0,0498
R.MSE	0,1666	0,4509	0,6038	0,2407	0,2568	0,7663	0,2235	0,2656	0,8126
R.Def	1,2213			1,2638			1,3017		
	n=30								
Ortalama	1,2332	3,4268	2,6898	1,1763	2,9090	4,0673	1,1653	2,9551	4,0581
R.Bias	0,2332	0,3707	-0,3276	0,1763	0,1636	0,0168	0,1653	0,1820	0,0145
R.MSE	0,1364	0,3315	0,5875	0,2208	0,2512	0,7164	0,1936	0,2545	0,7534
R.Def	1,0554			1,1883			1,2015		
	n=50								
Ortalama	1,1881	3,1890	2,9860	1,1648	2,9000	3,8915	1,1569	2,9514	3,7820
R.Bias	0,1881	0,2756	-0,2535	0,1648	0,1600	-0,0271	0,1569	0,1805	-0,0545
R.MSE	0,1012	0,2086	0,5657	0,1738	0,2019	0,6603	0,1412	0,2013	0,6668
R.Def	0,8755			1,0359			1,0093		
	n=100								
Ortalama	1,1248	2,9468	3,3789	1,1169	2,8479	3,9501	1,0961	2,8161	4,0070
R.Bias	0,1248	0,1787	-0,1553	0,1169	0,1392	-0,0125	0,0961	0,1264	0,0017
R.MSE	0,0606	0,1068	0,5039	0,0967	0,1397	0,6088	0,0732	0,1132	0,6161
R.Def	0,6713			0,8453			0,8025		
	n=200								
Ortalama	1,0901	2,7974	3,5613	1,0933	2,7827	3,7959	1,0856	2,7708	3,7582
R.Bias	0,0901	0,1190	-0,1097	0,0933	0,1131	-0,0510	0,0856	0,1083	-0,0604
R.MSE	0,0415	0,0610	0,3986	0,0603	0,0905	0,4959	0,0511	0,0761	0,4865
R.Def	0,5012			0,6466			0,6137		

Tablo 4.27'deki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 1, \beta = 2,5, \lambda = 4$ için R.Bias ölçütü ele alındığında α parametresi için $n = 20$ durumunda en iyi performansı LSE gösterirken, diğer örneklem büyüklükleri için WLSE göstermiştir. β parametresi ele alındığında $n \leq 50$ için LSE'nin, $n = 100, 200$ için WLSE'nin iyi bir tahminci olduğu görülmektedir. λ parametresi için $n = 50, 200$ olduğunda en iyi performansı LSE, diğer örneklem büyüklüklerinde WLSE göstermiştir. α ve λ parametresi için sonuçlar R. MSE

açısından karşılaştırıldığında tüm örneklem büyüklüklerinde MLE diğer tahmincilerden daha iyi performans sergilemiştir. β parametresi ele alındığında $n \leq 30$ için en iyi tahminci LSE, $n = 50$ için WLSE, $n \geq 100$ için MLE'dir. R.Def ölçütü ele alındığında $n = 10$ için en iyi tahmincinin LSE, örneklem büyüklüğü arttıkça MLE olduğu gözlenmiştir.

Tablo 4.28. $\alpha = 1, \beta = 0,7, \lambda = 4$ için MOEWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE		
n=10									
	α	β	λ	α	β	λ	α	β	λ
Ortalama	1,4154	0,8620	5,4212	0,9335	0,6139	6,8307	0,9696	0,6286	6,8529
R.Bias	0,4154	0,2314	0,3553	-0,0665	-0,1229	0,7077	-0,0304	-0,1019	0,7132
R.MSE	1,2639	0,2960	1,3857	0,8494	0,1518	1,5787	0,9445	0,1636	1,6549
R.Def	2,9457			2,5799			2,7631		
n=20									
Ortalama	1,3618	0,7993	5,1123	1,0501	0,6541	6,1443	1,0728	0,6656	6,2926
R.Bias	0,3618	0,1419	0,2781	0,0501	-0,0656	0,5361	0,0728	-0,0492	0,5731
R.MSE	1,0429	0,1470	1,1122	0,8227	0,0880	1,1955	0,9026	0,0976	1,3795
R.Def	2,3021			2,1062			2,3798		
n=30									
Ortalama	1,3130	0,7709	4,9671	1,0646	0,6631	5,7286	1,1020	0,6765	5,8348
R.Bias	0,3130	0,1013	0,2418	0,0646	-0,0528	0,4322	0,1020	-0,0336	0,4587
R.MSE	0,8657	0,1020	0,9651	0,7566	0,0700	0,9633	0,8583	0,0792	1,1072
R.Def	1,9327			1,7898			2,0247		
n=50									
Ortalama	1,2687	0,7503	4,9631	1,1900	0,6896	5,0896	1,2325	0,7080	4,9889
R.Bias	0,2687	0,0719	0,2408	0,1900	-0,0149	0,2724	0,2325	0,0115	0,2472
R.MSE	0,7618	0,0733	0,8934	0,7349	0,0575	0,7847	0,8394	0,0658	0,8027
R.Def	1,7285			1,5771			1,7079		
n=100									
Ortalama	1,2389	0,7351	4,6655	1,1998	0,7089	4,7405	1,2407	0,7203	4,6293
R.Bias	0,2389	0,0502	0,1664	0,1998	0,0128	0,1851	0,2407	0,0290	0,1573
R.MSE	0,6146	0,0494	0,6593	0,6381	0,0492	0,6021	0,6845	0,0512	0,6360
R.Def	1,3233			1,2894			1,3717		
n=200									
Ortalama	1,1547	0,7230	4,7815	1,1943	0,7152	4,5574	1,2656	0,7349	4,2962
R.Bias	0,1547	0,0328	0,1954	0,1943	0,0217	0,1393	0,2656	0,0499	0,0741
R.MSE	0,4168	0,0339	0,6216	0,5133	0,0360	0,4723	0,5660	0,0401	0,4662
R.Def	1,0724			1,0216			1,0723		

Tablo 4.28'deki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 1, \beta = 0,7, \lambda = 4$ için R.Bias ölçütüne göre α parametresi ele alındığında, $n = 20, 30, 50, 100$ için LSE en iyi tahminciyken $n = 10$ WLSE, $n = 200$ için MLE, en iyi tahmincidir. β parametresi ele alındığında küçük ve orta örneklemelerde WLSE, $n \geq 100$ için LSE diğer tahmincilerden daha iyi bir performans göstermiştir. λ parametresi ele alındığında $n \leq 50$ için MLE, diğer örneklem büyüklüklerinde WLSE iyi bir tahmincidir. α parametresi için sonuçlar R.MSE açısından ele alındığında küçük ve orta örneklemelerde LSE, büyük örneklemelerde MLE iyi bir tahmincidir. β için $n = 200$ dışındaki örneklem büyüklüklerinde LSE iyi bir

performans sergilemiştir. λ için küçük örneklerde MLE iyi bir performans sergilerken, $n = 30, 50, 100$ için LSE, $n = 200$ için WLSE iyi bir performans sergilemiştir. R.Def açısından sonuçlar karşılaştırıldığında tüm örneklem büyüklüklerinde LSE diğer tahmincilerle karşılaştırıldığında en iyi tahmincidir.

MOEWD'nin sonuçlarına göre, R.Bias açısından sonuçlar karşılaştırıldığında farklı tahmincilerin iyi sonuç verdiği görülmüştür. R.MSE'ye göre α için MLE çoğunlukla diğer tahmincilerden üstün bir performans sunarken, β için $n = 200$ olduğunda MLE iken, diğer örneklem büyüklüklerinde ve λ için farklı tahmin ediciler iyi bir performans sunmuştur. R.Def sonuçlarına bakıldığında $n = 10$ için genellikle LSE, $n \geq 20$ için MLE, diğer tahmincilere göre iyi bir performans sergilemiştir.

4.2.8. Gamma Weibull dağılımı için simülasyon sonuçları

GammaWD için $\alpha = 1$, $\beta = 1,7$, $c = 0,5$ olarak alındığında R.Bias, R.MSE ve R.Def için elde edilen sonuçlar Tablo 4.29'da verilmiştir.

Tablo 4.29. $\alpha = 1$, $\beta = 1,7$, $c = 0,5$ için GammaWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE			ME		
n=10												
	α	β	c	α	β	c	α	β	c	α	β	c
Ortalama	0,9373	2,1963	0,5922	1,1489	2,1762	0,5134	1,1382	2,0679	0,5328	1,1540	2,6711	0,4130
R.Bias	-0,0627	0,2919	0,1843	0,1489	0,2801	0,0267	0,1382	0,2164	0,0656	0,1540	0,5713	-0,1740
R.MSE	0,1733	0,4668	0,5376	0,2983	0,5448	0,4624	0,2922	0,4709	0,4589	0,2357	0,7241	0,3668
R.Def	1,1777			1,3056			1,2221			1,3266		
n=20												
Ortalama	0,9765	2,1608	0,5617	1,0617	2,1384	0,5290	1,0617	2,0804	0,5367	1,1415	2,5110	0,4158
R.Bias	-0,0235	0,2710	0,1233	0,0617	0,2579	0,0580	0,0617	0,2238	0,0734	0,1415	0,4771	-0,1685
R.MSE	0,1439	0,4570	0,4955	0,1775	0,4756	0,4534	0,1771	0,4346	0,4503	0,1662	0,5977	0,3283
R.Def	1,0965			1,1065			1,0620			1,0922		
n=30												
Ortalama	0,9830	2,1123	0,5521	1,0351	2,1206	0,5368	1,0284	2,0627	0,5460	1,1390	2,4678	0,4182
R.Bias	-0,0170	0,2425	0,1042	0,0351	0,2474	0,0736	0,0284	0,2134	0,0919	0,1390	0,4516	-0,1637
R.MSE	0,1217	0,3850	0,4233	0,1442	0,4485	0,4314	0,1440	0,4026	0,4462	0,1421	0,5429	0,3152
R.Def	0,9299			1,0240			0,9927			1,0002		
n=50												
Ortalama	0,9820	2,0131	0,5512	1,0059	2,0577	0,5447	1,0020	1,9805	0,5487	1,1116	2,2920	0,4411
R.Bias	-0,0180	0,1842	0,1024	0,0059	0,2104	0,0893	0,0020	0,1650	0,0973	0,1116	0,3482	-0,1178
R.MSE	0,1010	0,3065	0,3817	0,1129	0,3843	0,4179	0,1067	0,3036	0,3844	0,1098	0,4082	0,2929
R.Def	0,7892			0,9151			0,7947			0,8109		
n=100												
Ortalama	0,9964	1,9000	0,5309	0,9825	1,9097	0,5572	0,9833	1,8519	0,5534	1,0789	2,0746	0,4658
R.Bias	-0,0036	0,1176	0,0618	-0,0175	0,1234	0,1143	-0,0167	0,0893	0,1068	0,0789	0,2204	-0,0683
R.MSE	0,0703	0,1663	0,2442	0,0868	0,2377	0,3574	0,0766	0,1822	0,2912	0,0796	0,2134	0,2356
R.Def	0,4809			0,6819			0,5499			0,5287		
n=200												
Ortalama	0,9923	1,7916	0,5199	0,9798	1,8384	0,5436	0,9801	1,7817	0,5379	1,0244	1,8788	0,5055
R.Bias	-0,0077	0,0539	0,0399	-0,0202	0,0814	0,0873	-0,0199	0,0480	0,0757	0,0244	0,1052	0,0110
R.MSE	0,0365	0,0705	0,1238	0,0557	0,1407	0,2626	0,0452	0,0873	0,1863	0,0546	0,1004	0,1979
R.Def	0,2308			0,4589			0,3189			0,3529		

Tablo 4.30. $\alpha = 1$, $\beta = 2,5$, $c = 0,8$ için GammaWD'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE			ME		
n=10												
	α	β	c	α	β	c	α	β	c	α	β	c
Ortalama	0,9938	3,4166	0,8783	1,1263	3,4024	0,7347	1,1132	3,2417	0,7567	1,0393	3,4999	0,7954
R.Bias	-0,0062	0,3667	0,0979	0,1263	0,3610	-0,0816	0,1132	0,2967	-0,0541	0,0393	0,4000	-0,0057
R.MSE	0,0961	0,5431	0,5256	0,1498	0,5971	0,4539	0,1438	0,5106	0,4462	0,0944	0,5403	0,4336
R.Def	1,1648			1,2008			1,1007			1,0683		
n=20												
Ortalama	1,0170	3,3340	0,8377	1,0737	3,3542	0,7688	1,0680	3,2571	0,7817	1,0468	3,3736	0,7870
R.Bias	0,0170	0,3336	0,0471	0,0737	0,3417	-0,0389	0,0680	0,3028	-0,0228	0,0468	0,3494	-0,0162
R.MSE	0,0802	0,4895	0,4588	0,1013	0,5445	0,4425	0,0985	0,4881	0,4232	0,0785	0,4623	0,4136
R.Def	1,0285			1,0882			1,0098			0,9545		
n=30												
Ortalama	1,0225	3,2657	0,8297	1,0533	3,2750	0,7898	1,0518	3,2010	0,7927	1,0428	3,2502	0,7869
R.Bias	0,0225	0,3063	0,0372	0,0533	0,3100	-0,0128	0,0518	0,2804	-0,0091	0,0428	0,3001	-0,0164
R.MSE	0,0787	0,4503	0,4446	0,0857	0,4922	0,4417	0,0828	0,4320	0,4154	0,0699	0,3861	0,3805
R.Def	0,9736			1,0196			0,9302			0,8365		
n=50												
Ortalama	1,0096	3,0508	0,8476	1,0222	3,0891	0,8345	1,0125	2,9679	0,8537	1,0266	3,0373	0,8123
R.Bias	0,0096	0,2203	0,0595	0,0222	0,2356	0,0431	0,0125	0,1872	0,0672	0,0266	0,2149	0,0153
R.MSE	0,0652	0,3154	0,3912	0,0738	0,3850	0,4253	0,0702	0,3082	0,4095	0,0590	0,2649	0,3340
R.Def	0,7719			0,8842			0,7879			0,6578		
n=100												
Ortalama	0,9817	2,7420	0,8818	0,9913	2,8838	0,8774	0,9740	2,7182	0,9046	0,9989	2,7638	0,8431
R.Bias	-0,0183	0,0968	0,1022	-0,0087	0,1535	0,0967	-0,0260	0,0873	0,1307	-0,0011	0,1055	0,0539
R.MSE	0,0465	0,1458	0,2901	0,0593	0,2547	0,3985	0,0533	0,1735	0,3529	0,0405	0,1250	0,2373
R.Def	0,4824			0,7124			0,5797			0,4028		
n=200												
Ortalama	1,0104	2,6641	0,8081	0,9995	2,7646	0,8467	1,0000	2,6618	0,8355	1,0150	2,6789	0,8043
R.Bias	0,0104	0,0656	0,0101	-0,0005	0,1058	0,0583	0,0000	0,0647	0,0444	0,0150	0,0715	0,0053
R.MSE	0,0228	0,0602	0,1147	0,0422	0,1535	0,2567	0,0305	0,0851	0,1778	0,0244	0,0591	0,1319
R.Def	0,1978			0,4525			0,2934			0,2154		

Tablo 4.31. $\alpha = 1$, $\beta = 0,9$, $c = 4$ için *GammaWD*'nin Simülasyon Sonuçları

	MLE			LSE			WLSE			ME		
n=10												
	α	β	c	α	β	c	α	β	c	α	β	c
Ortalama	1,2520	1,0173	4,9678	0,4892	0,6173	7,6931	0,6717	0,6775	7,0281	1,2836	1,0220	4,9770
R.Bias	0,2520	0,1303	0,2419	-0,5108	-0,3141	0,9233	-0,3283	-0,2473	0,7570	0,2836	0,1355	0,2443
R.MSE	0,9320	0,1855	0,5277	0,9028	0,2079	1,5130	0,9439	0,2000	1,3304	0,9895	0,1915	0,5889
R.Def	1,6452			2,6238			2,4743			1,7699		
n=20												
Ortalama	1,1995	0,9565	4,9318	0,6430	0,6981	7,2883	0,8518	0,7684	6,3383	1,2355	0,9504	4,9712
R.Bias	0,1995	0,0628	0,2330	-0,3570	-0,2244	0,8221	-0,1482	-0,1463	0,5846	0,2355	0,0560	0,2428
R.MSE	0,8814	0,1089	0,4936	0,8850	0,1499	1,4091	0,9037	0,1276	1,0832	0,9705	0,1145	0,5828
R.Def	1,4839			2,4439			2,1145			1,6677		
n=30												
Ortalama	1,1804	0,9341	4,8923	0,7153	0,7366	6,9887	0,9593	0,8166	5,9460	1,2282	0,9302	4,9403
R.Bias	0,1804	0,0379	0,2231	-0,2847	-0,1815	0,7472	-0,0407	-0,0927	0,4865	0,2282	0,0335	0,2351
R.MSE	0,8666	0,0902	0,4749	0,8724	0,1313	1,3102	0,8999	0,1121	0,9411	0,9444	0,0924	0,5756
R.Def	1,4317			2,3139			1,9531			1,6124		
n=50												
Ortalama	1,1909	0,9273	4,7982	0,7479	0,7576	6,8779	1,0106	0,8426	5,7391	1,2187	0,9212	4,8350
R.Bias	0,1909	0,0303	0,1996	-0,2521	-0,1582	0,7195	0,0106	-0,0638	0,4348	0,2187	0,0236	0,2088
R.MSE	0,8538	0,0789	0,4503	0,8708	0,1180	1,2573	0,8975	0,0981	0,8658	0,9005	0,0788	0,5164
R.Def	1,3830			2,2461			1,8614			1,4956		
n=100												
Ortalama	1,1467	0,9090	4,8198	0,7859	0,7785	6,6843	1,0022	0,8512	5,6115	1,2084	0,9156	4,8169
R.Bias	0,1467	0,0100	0,2049	-0,2141	-0,1350	0,6711	0,0022	-0,0543	0,4029	0,2084	0,0174	0,2042
R.MSE	0,7696	0,0675	0,4319	0,8672	0,1062	1,1557	0,8027	0,0845	0,7760	0,8765	0,0739	0,4960
R.Def	1,2690			2,1291			1,6632			1,4465		
n=200												
Ortalama	1,1635	0,9108	4,6949	0,9020	0,8199	6,0569	1,1084	0,8856	5,0814	1,3157	0,9474	4,3723
R.Bias	0,1635	0,0120	0,1737	-0,0980	-0,0890	0,5142	0,1084	-0,0160	0,2704	0,3157	0,0527	0,0931
R.MSE	0,7405	0,0600	0,3850	0,8001	0,0880	0,9094	0,7969	0,0722	0,5558	0,8570	0,0636	0,3488
R.Def	1,1855			1,7975			1,4249			1,2694		

Tablo 4.29'daki $\alpha = 1$, $\beta = 1,7$, $c = 0,5$ değerleri için simülasyon sonuçlarına göre R.Bias açısından α parametresi ele alındığında $n = 50$ hariç bütün örneklem için en iyi performansı MLE göstermiştir. β için tüm örneklem büyüklüklerinde WLSE'nin en iyi tahminci olduğu görülmektedir. c parametresi ele alındığında küçük ve orta örneklem için LSE, $n = 100$ ve $n = 200$ için sırasıyla MLE ve ME en iyi performansı sergilemiştir. α parametresi için R.MSE dikkate alındığında tüm örneklem büyüklüklerinde en iyi performansı MLE, β parametresi ele alındığında $n = 10, 30, 100, 200$ için MLE, $n = 20, 50$ için WLSE sergilemiştir. c parametresi için $n \leq 100$ durumunda ME'nin, $n = 200$ durumunda MLE'nin iyi bir tahminci olduğu gözlenmiştir. Ayrıca R.Def değerleri göstermektedir ki $n = 20$ dışındaki tüm örneklem büyüklükleri için en iyi tahminci MLE'dir.

Tablo 4.30'daki simülasyon sonuçlarına göre $\alpha = 1$, $\beta = 2,5$, $c = 0,8$ olduğunda, R.Bias ölçütüne göre α için, $n \leq 50$ durumunda en iyi tahminci MLE iken, $n = 100$ ve $n = 200$ için sırasıyla ME ve WLSE'dir. β parametresi için sonuçlar karşılaştırıldığında, tüm örneklem büyüklüklerinde en iyi performansı WLSE, c için ise $n = 30$ dışındaki örneklem büyüklüklerinde ME göstermiştir. R.MSE açısından α ve c parametreleri ele alındığında $n \leq 100$ için, β parametresi ele alındığında $n \geq 20$ için diğer tahminciler arasında en iyi performansı ME sergilemiştir. R.Def değerleri açısından sonuçlar karşılaştırıldığında $n = 200$ dışındaki tüm örneklem büyüklüklerinde en iyi tahmincinin ME olduğu gözlemlenmiştir.

Tablo 4.31'deki $\alpha = 1$, $\beta = 0,9$, $c = 4$ değerleri için elde edilen simülasyon sonuçlarına göre, R.Bias açısından α parametresi ele alındığında $n = 10$ için en iyi performansı MLE, $n = 200$ için LSE, diğer örneklem büyüklüklerinde WLSE göstermiştir. β parametresi ele alındığında $n = 10, 100, 200$ için MLE, diğer örneklem büyüklüklerinde ME diğer tahmincilere göre daha iyi performans sergilemiştir. c için sonuçlar karşılaştırıldığında $n \leq 50$ için MLE, $n \geq 100$ için ME en iyi tahmincidir. R.MSE'ye göre sonuçlar karşılaştırıldığında α için $n = 10$, β için $n = 50$, c için $n = 200$ dışındaki tüm örneklem büyüklüklerinde MLE üstün bir performans göstermiştir. Hesaplanan R.Def değerleri göstermektedir ki tüm örneklem büyüklükleri için en iyi tahminci MLE'dir.

GammaWD'nin sonuçları R.Bias'a göre karşılaştırıldığında genel olarak α için MLE, β için WLSE daha iyi sonuç verirken c için farklı tahmincilerin iyi sonuç verdiği

görülmüştür. R.MSE açısından α ve β parametresi ele alındığında MLE, c parametresi ele alındığında ME çoğunlukla diğer tahmincilerden üstün bir performans sunmuştur. R.Def değerleri açısından sonuçlar karşılaştırıldığında MLE'nin genellikle iyi bir performans sergilediği gözlenmiştir.

5. UYGULAMA

Bu bölümde, üçüncü bölümde ele alınan tahmincilerin performanslarını incelemek amacıyla iki ayrı gerçek veri seti üzerinde uygulama yapılmıştır. İlk uygulamanın verileri Aarset (1987)'deki çalışmadan, ikinci uygulamanın verileri Usta ve Kantar (2012)'deki çalışmadan alınmıştır. Uygulamanın ilk aşamasında tezde kullanılan dağılımların parametreleri (α, β ve diğer parametreler), MLE, LSE, WLSE ve ME yöntemleri kullanılarak tahmin edilmiştir. Sonrasında ele alınan modelleri değerlendirmek amacıyla Akaike bilgi kriteri (AIC), Kolmogorov-Smirnov (K-S) ve Ki-kare (χ^2) test istatistikleri ve belirlilik katsayısı (R^2) kullanılmıştır. Gerçek veri seti için ele alınan dağılımların hangisinin en uygun model olduğuna karar verilmesinde R^2 'nin en yüksek olduğu, AIC, χ^2 , (K-S)'nin en düşük olduğu değerlere bakılmıştır.

5.1. Akaike Kriteri

AIC, uygun modeli seçmek için yaygın olarak kullanılan bilgi kriterlerinden biridir ve $\ln L(\hat{\theta})$, model parametrelerinin log-olabilirlik fonksiyonu ve k parametre sayısı olmak üzere

$$AIC = -2 \ln (L(\hat{\theta})) + 2k \quad (5.1)$$

olarak tanımlanmaktadır. En küçük AIC değerine sahip olan model, kullanılan veri seti için en uygun model olarak alınmaktadır (Almalki, 2014, s. 83).

5.2. Kolmogorov-Smirnov Testi

Kolmogorov-Smirnov testi, teorik (beklenen) ve ampirik kümülatif dağılım fonksiyonu arasındaki maksimum mutlak farka dayanmaktadır ve

$$D = \max |F_n(t) - F_0(t)| \quad (5.2)$$

ifadesine göre hesaplanmaktadır. Burada, $F_n(t)$, T rassal değişkeninin (ampirik) birikimli dağılım fonksiyonu iken, $F_0(t)$, teorik dağılım fonksiyonudur (Özer, 2007, s. 14).

5.3. Ki-kare Testi

Ki-kare (χ^2) testinin uygulanması kolay ve pratik olmasından dolayı araştırmacılar tarafından yaygın olarak kullanılmaktadır. Gözlenen ve beklenen veri frekansları arasındaki farkları temel alan ki-kare testinde, c sınıf sayısı, g_i i . sınıftaki örnek birimlerin sayısı yani gözlenen frekans ve b_i beklenen frekans olmak üzere Ki-kare test istatistiği

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^c \frac{(g_i - b_i)^2}{b_i} \quad (5.3)$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Yıldırım, 2013, s. 6).

5.4. Belirlilik Katsayısı (R^2)

Bağımsız değişken X 'in regresyon modeli ile bağımlı değişken Y 'yi ne kadar açıklayabildiğini görmek için R^2 (belirlilik katsayısı) kullanılmaktadır. Belirlilik katsayısı

$$R^2 = \frac{\text{Açıklanabilir değişme}}{\text{Toplam değişme}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (5.4)$$

ile hesaplanır ve $0 \leq R^2 \leq 1$ aralığında değerler alabilir. R^2 değeri 1'e ne kadar yakınsa model o kadar anlamlıdır (Usta ve Kantar, 2012, s. 357).

5.5. Aarset Verisi İçin Uygulama

Aarset verisi için elde edilen sonuçlar Tablo 5.1.-5.3.'de sunulmuştur.

Tablo 5.1. *Aarset Verisinin Tanımlayıcı İstatistikleri*

Aarset Verisi				
N	Ortalama	Std. Sapma	Çarpıklık	Basıklık
50	45,686	32,8353	-0,1378	1,4139

50 birimlik Aarset verisi için elde edilen ortalama, standart sapma, çarpıklık ve basıklık değerleri Tablo 5.1'de verilmiştir. Bu tabloya göre çarpıklık değeri ($-0,1378 < 0$) olduğundan veri setinin sola çarpık olduğu ve basıklık değeri ($1,4139 < 3$) olduğu için veri setinin dağılımının normal dağılımdan daha basık olduğu söylenebilir.

Tablo 5.2. Aarset Verisi için IWD, LogWD, FWD, EWD, WGD, OddWD, MOEWD ve GammaWD'nin Parametre Tahminleri

	MLE			LSE		
	1. par.	2. par.	3. par.	1. par.	2. par.	3. par.
WD	44,9125	0,9490	–	55,4760	0,9521	–
IWD	8,1939	0,4634	–	21,6822	0,8933	–
LogWD	61,5776	27,2672	–	63,0237	35,5074	–
FWD	0,0123	0,7003	–	0,0082	22,9844	–
EWD	91,0445	4,7254	0,1453	115,1929	4,6810	0,1420
WGD	13,9376	0,6992	-5,6973	10,3184	0,5719	-6,5699
OddWD	53,2065	6,2402	0,1056	54,7837	7,0437	0,0893
MOEWD	13,9376	0,6992	6,6973	10,3184	0,5719	7,5699
GammaWD	87,9054	109,998	0,0065	117,0427	36,6152	0,0184
	WLSE			ME		
	1. par.	2. par.	3. par.	1. par.	2. par.	3. par.
WD	48,2540	1,1710	–	50,2663	1,4260	–
IWD	21,8463	1,2546	–	33,3776	2,9290	–
LogWD	61,7072	28,2083	–	60,3151	25,3442	–
FWD	0,0118	26,0827	–	–	–	–
EWD	97,7576	4,9942	0,1452	–	–	–
WGD	12,3668	0,6941	-6,3862	–	–	–
OddWD	48,8878	5,9236	0,1063	–	–	–
MOEWD	12,3667	0,6941	7,3863	–	–	–
GammaWD	100,8483	76,5493	0,0097	89,6170	177,4823	0,0083

Tablo 5.2.'de birinci parametre olarak belirtilen parametre LogWD dışındaki dağılımlarda (α) ölçek parametresi olup, LogWD'de konum parametresiyken (ϑ), ikinci parametre olarak belirtilen parametre LogWD dışındaki dağılımlarda (β) şekil parametresi olup, LogWD'de ölçek parametresi (b)'dir. Üçüncü parametre ise şekil parametresidir. WD'nin MLE ve LSE'ye göre sonuçlarına bakıldığında, tahmin edilen β parametresinin 1'e, dolayısıyla üstel dağılıma yaklaştığı görülmektedir.

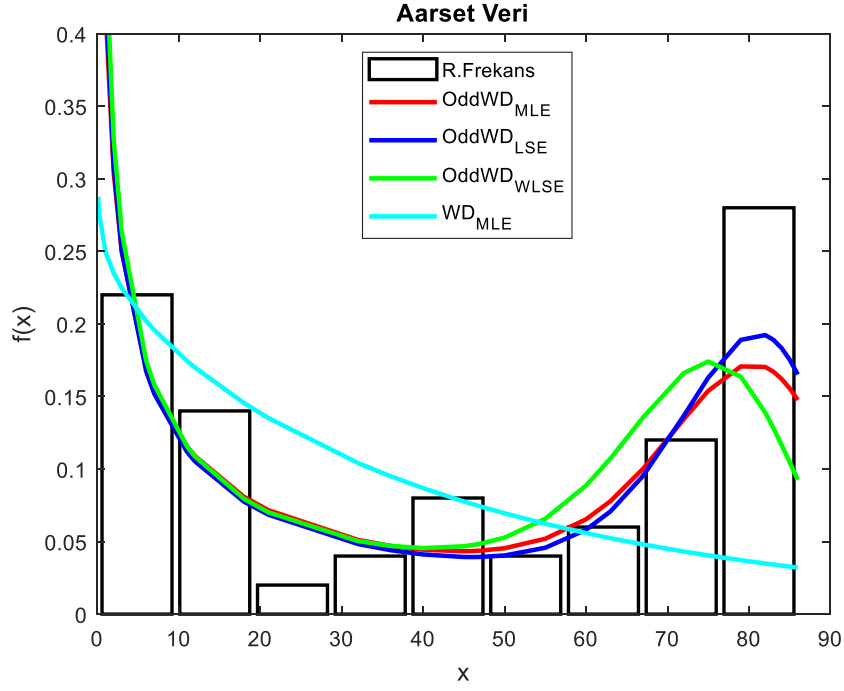
Tablo 5.3. Aarset Verisi için Model Seçim Kriterlerinin Uygulama Sonuçları

	MLE					LSE			
	<i>AIC</i>	<i>KS</i>	<i>p</i>	<i>R</i> ²	χ^2	<i>KS</i>	<i>p</i>	<i>R</i> ²	χ^2
WD	486,00	0,1928	0,0421	0,4116	19,4737	0,2191	0,0137	0,5570	14,838*
IWD	534,03	0,2857	0,0004	–	79,6247	0,2533	0,0026	–	37,0362
LogWD	492,85	0,1779	0,0743	0,3440	20,6599	0,1563	0,1560	0,7056	12,762*
FWD	505,62	0,4386	0,0000	–	68,1729	0,2123	0,0186	–	68,1757
EWD	464,16	0,2069	0,0235	0,4257	16,1415	0,1910	0,0451	0,7672	8,4606*
WGD	481,45	0,1626	0,1269	0,4199	16,2784	0,2136	0,0176	0,5793	13,707*
OddWD	437,72	0,1078	0,5691	0,8969	4,7346*	0,1053	0,5989	0,8909	5,2515*
MOEWD	481,45	0,1626	0,1269	0,4199	16,2784	0,2136	0,0176	0,5793	13,707*
GammaWD	447,63	0,2301	0,0082	0,1603	27,8180	0,1794	0,0703	0,7667	8,0620*
	WLSE					ME			
		<i>KS</i>	<i>p</i>	<i>R</i> ²	χ^2	<i>KS</i>	<i>p</i>	<i>R</i> ²	χ^2
WD		0,1850	0,0570	0,2829	19,7675	0,1884	0,0500	0,0092	27,7862
IWD		0,2277	0,0092	–	61,5458	0,3595	0,0000	–	67,2758
LogWD		0,1696	0,0999	0,4090	19,0399	0,1890	0,0489	0,1458	25,4936
FWD		0,1942	0,0398	0,2310	24,6453	–	–	–	33,6351
EWD		0,1613	0,1324	0,5846	11,4430*	–	–	–	–
WGD		0,1808	0,0667	0,3235	18,6865	–	–	–	–
OddWD		0,1667	0,1104	0,6883	8,4648*	–	–	–	–
MOEWD		0,1808	0,0667	0,3235	18,6865	–	–	–	–
GammaWD		0,1499	0,1909	0,5874	10,9453*	0,2664	0,0013	0,0000	60,0493

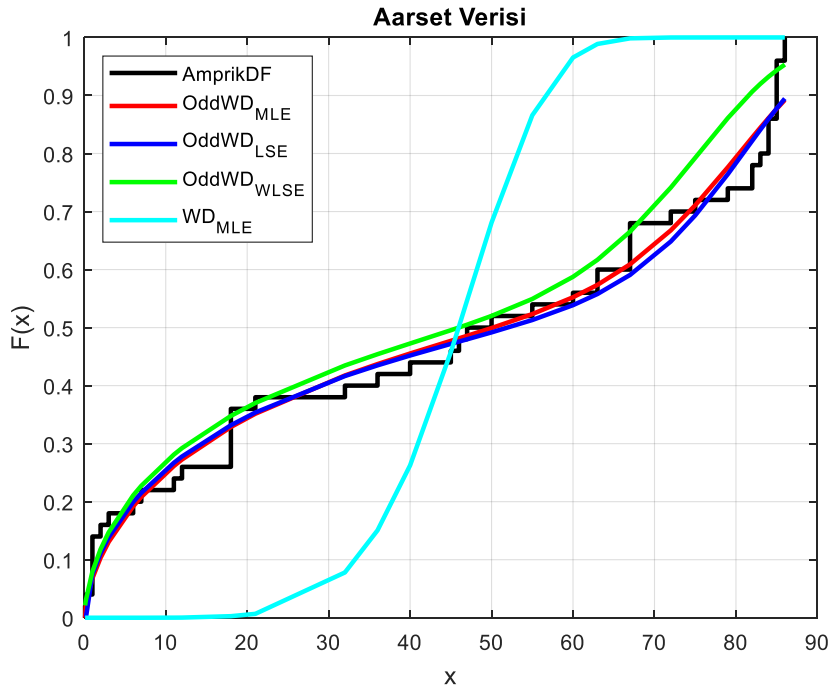
Not: En iyi modeli belirlemede **AIC**, **R²**, **χ^2** ve **K-S** için vurgulanan renkler kullanılmıştır. Ki-kare kritik değerleri $\chi^2_{0,99;6} = 16,8119$, $\chi^2_{0,99;5} = 15,0863$ 'dir ve bu kritik değerlerden küçük olan uygun ki-kare değerleri Tablo 5.3'de * ile gösterilmiştir.

Tablo 5.3'deki sonuçlar göstermektedir ki, AIC kriterine göre en iyi model OddWD'dir. OddWD'de, R^2 ve χ^2 test istatistiği açısından MLE tahmincisi en iyi performansı sergilerken, K-S için diğer tahmincilerle karşılaştırıldığında LSE tahmincisi en iyi sonucu vermiştir.

Aarset verisi için OddWD'nin modele uyumluluğu görsel olarak Şekil 5.1'deki histogram grafiği ve Şekil 5.2'deki ampirik dağılım fonksiyonu grafiklerinde verilmiştir. Buna göre Şekil 5.1'de WD üstel dağılıma yaklaşırken, OddWD'nin MLE ve LSE tahmincilerinin Aarset verisi için en uygun model olduğu ve Şekil 5.2'deki grafiğe bakıldığında OddWD'nin dağılım fonksiyonunun ampirik dağılım fonksiyonuna uyum sağladığı görülmektedir.



Şekil 5.1. Aarset verisi için göreceli frekansların histogramı ve OddWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 5.2. Aarset verisi için ampirik dağılım fonksiyonu ve buna uygun OddWD'nin teorik dağılım fonksiyonunun grafiği

5.6. Rüzgar Verisi İçin Uygulama

Rüzgar verisi için elde edilen sonuçlar Tablo 5.4.- 5.6.' da sunulmuştur.

Tablo 5.4. Rüzgar Verisinin Tanımlayıcı İstatistikleri

Rüzgar Verisi				
N	Ortalama	Varyans	Çarpıklık	Basıklık
720	5,4404	3,5809	0,4419	2,4783

720 birimlik rüzgar verisi için elde edilen ortalama, varyans, çarpıklık ve basıklık değerleri Tablo 5.4'de verilmiştir. Bu tabloya göre çarpıklık değeri ($0,4419 > 0$) olduğundan dolayı veri setinin sağa çarpık olduğu ve basıklık değeri ($2,4783 < 3$) olduğu için veri setinin dağılımının normal dağılımdan daha basık olduğu görülmüştür.

Tablo 5.5. Rüzgar Verisi için IWD, LogWD, FWD, EWD, WGD, OddWD, MOEWD ve GammaWD'nin Parametre Tahminleri

	MLE			LSE		
	1. par.	2. par.	3. par.	1. par.	2. par.	3. par.
WD	5,9026	1,3893	–	6,3269	1,3471	–
IWD	1,9036	0,5586	–	3,2393	1,2903	–
LogWD	7,2922	3,7777	–	6,8453	3,5208	–
FWD	0,1074	0,1542	–	0,0972	3,7370	–
EWD	10,2585	3,6862	0,2571	11,2170	7,9300	0,1120
WGD	2,5716	0,9604	-4,4515	3,1060	0,9675	-2,7588
OddWD	5,6519	2,5847	0,4530	5,8103	3,0833	0,3908
MOEWD	2,5716	0,9604	5,4516	3,1060	0,9675	3,7588
GammaWD	11,4617	4,0872	0,2303	11,8879	9,5440	0,0926
	WLSE			ME		
	1. par.	2. par.	3. par.	1. par.	2. par.	3. par.
WD	6,0959	1,4335	–	6,0501	1,5527	–
IWD	3,2734	1,6981	–	4,0470	3,0508	–
LogWD	7,0124	2,8022	–	7,0509	2,7901	–
FWD	0,1070	3,7622	–	–	–	–
EWD	10,8125	5,3580	0,1728	–	–	–
WGD	3,1086	1,0248	-2,8608	–	–	–
OddWD	5,7083	2,4672	0,4969	–	–	–
MOEWD	3,1086	1,0248	3,8607	–	–	–
GammaWD	11,7562	6,0029	0,1534	11,5194	4,2724	0,2219

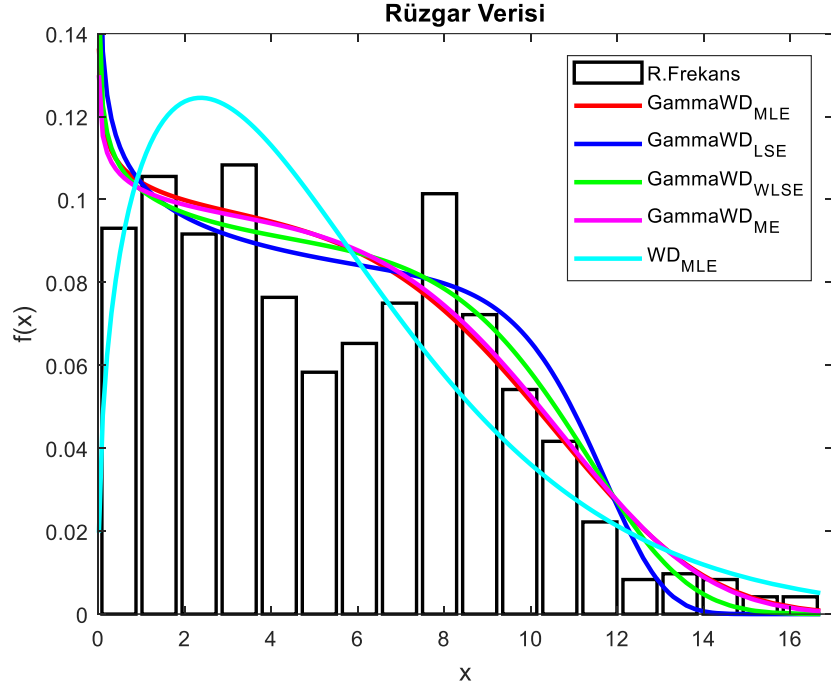
Tablo 5.6. Rüzgar Verisi için Model Seçim Kriterlerinin Uygulama Sonuçları

	MLE					LSE			
	AIC	KS	p	R ²	χ ²	KS	p	R ²	χ ²
WD	3785,16	0,0956	0,0000	0,7252	88,8901	0,0670	0,0030	0,7446	90,7484
IWD	4716,30	0,2671	0,0000	–	843,6007	0,1355	0,0000	–	–
LogWD	4063,81	0,1354	0,0000	0,3471	348,4528	0,1337	0,0000	0,3792	–
FWD	4788,11	0,5228	0,0000	–	975,7080	0,0777	0,0003	0,4224	300,5734
EWD	3708,21	0,0504	0,0499	0,8732	36,1414	0,0321	0,4397	0,8802	37,9527
WGD	3750,20	0,0745	0,0006	0,7518	69,4191	0,0603	0,0102	0,7831	75,5987
OddWD	3710,16	0,0441	0,1173	0,9002	31,5172	0,0256	0,7220	0,9245	31,9237
MOEWD	3750,20	0,0745	0,0006	0,7518	69,4193	0,0603	0,0102	0,7831	75,5986
GammaWD	3707,18	0,0490	0,0608	0,8748	35,3185	0,0309	0,4859	0,8796	38,0934
	WLSE					ME			
	KS	p	R ²	χ ²	KS	p	R ²	χ ²	
WD	0,0812	0,0001	0,7256	85,3173	0,0902	0,0000	0,6630	91,7768	
IWD	0,1408	0,0000	–	–	0,2650	0,0000	–	–	
LogWD	0,1389	0,0000	0,3613	–	0,1432	0,0000	0,3529	–	
FWD	0,0876	0,0000	0,4131	292,0762	–	–	–	–	
EWD	0,0381	0,2411	0,8850	37,2487	–	–	–	–	
WGD	0,0743	0,0007	0,7697	68,9862	–	–	–	–	
OddWD	0,0476	0,0739	0,9031	28,9301*	–	–	–	–	
MOEWD	0,0743	0,0007	0,7697	68,9861	–	–	–	–	
GammaWD	0,0369	0,2741	0,8851	36,1282	0,0441	0,1186	0,8781	35,9058	

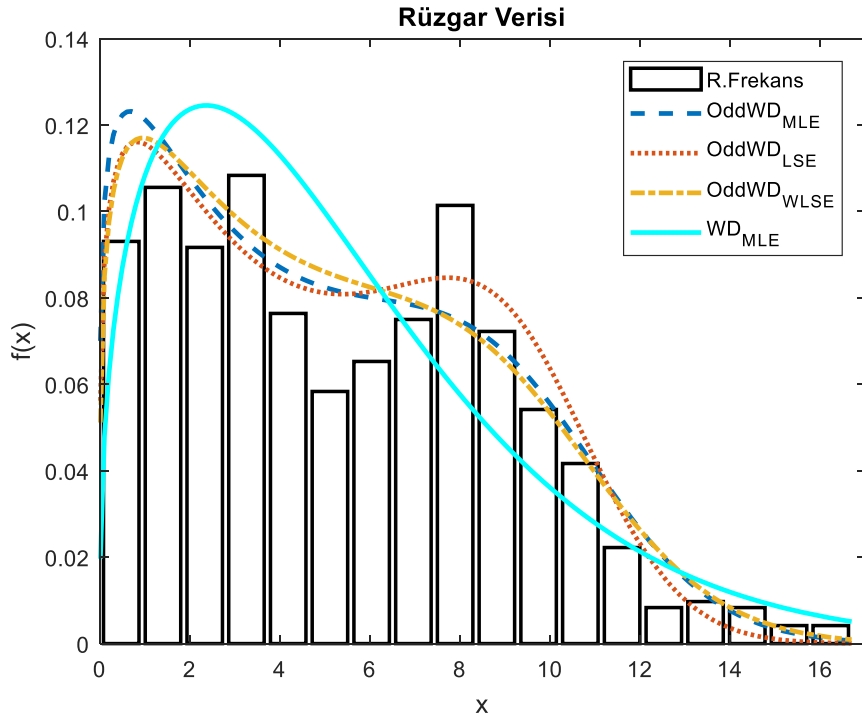
Not1: En iyi modeli belirlemede AIC, R², χ² ve K-S için vurgulanan renkler kullanılmıştır. Ki-kare kritik değerleri χ_{0,99;15}² = 30,5779, χ_{0,99;14}² = 29,1412'dir ve bu kritik değerlerden küçük olan uygun ki-kare değerleri Tablo 5.6'da * ile gösterilmiştir.

Tablo 5.6'daki sonuçlara göre AIC kriteri açısından en iyi performansı GammaWD göstermesine rağmen, R² kriteri ve K-S, χ² test istatistiklerine göre OddWD iyi performans gösterdiğinden dolayı rüzgar verisinin modellenmesinde OddWD de kullanılabilir. Ayrıca OddWD'nin 3710,16 olan AIC değeri, GammaWD'nin değeri olan 3707,18'e yakındır. Buna göre, OddWD'de K-S test istatistiğine ve R² kriterine göre LSE tahmincisi, χ² test istatistiğine göre de WLSE tahmincisi en iyi performansı sergilemiştir.

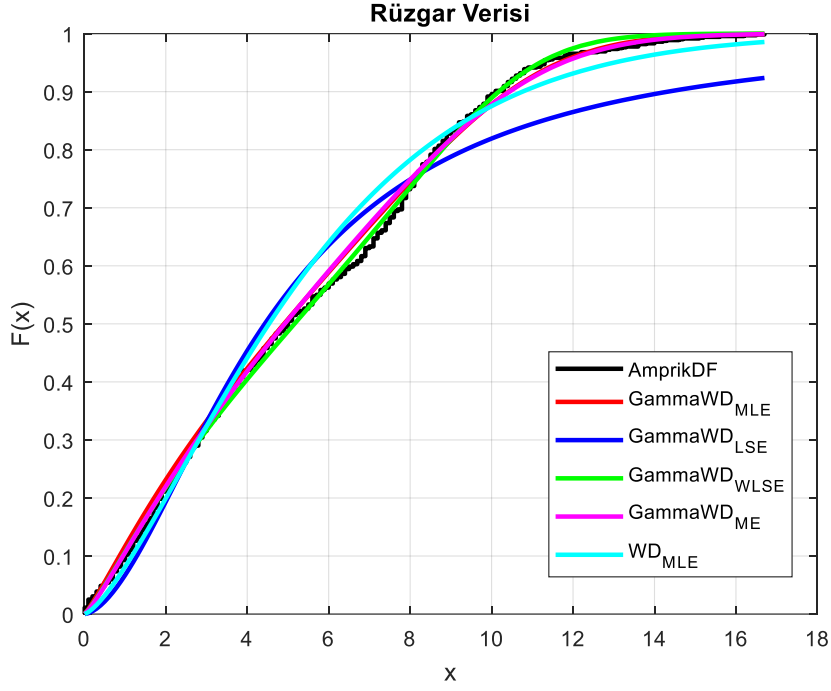
Rüzgar verisi için GammaWD ve OddWD'nin modele uyumluluğu görsel olarak sırasıyla Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'deki histogram grafiklerinde verilmiştir. Bu histogram grafikleri incelendiğinde, WD tek bir tepe noktasını modellerken, GammaWD'nin iyi bir modelleme yaptığı, OddWD'nin ise iki tepeli de modelleyen daha iyi bir uyum sergilediği görülmektedir. Buna göre OddWD'nin rüzgar verisine uygun bir model olduğu sonucuna varılabilir. Bu sonuç sırasıyla Şekil 5.5 ve Şekil 5.6'da verilen GammaWD'nin ve OddWD'nin ampirik dağılım fonksiyonu grafiklerinde de desteklenmektedir.



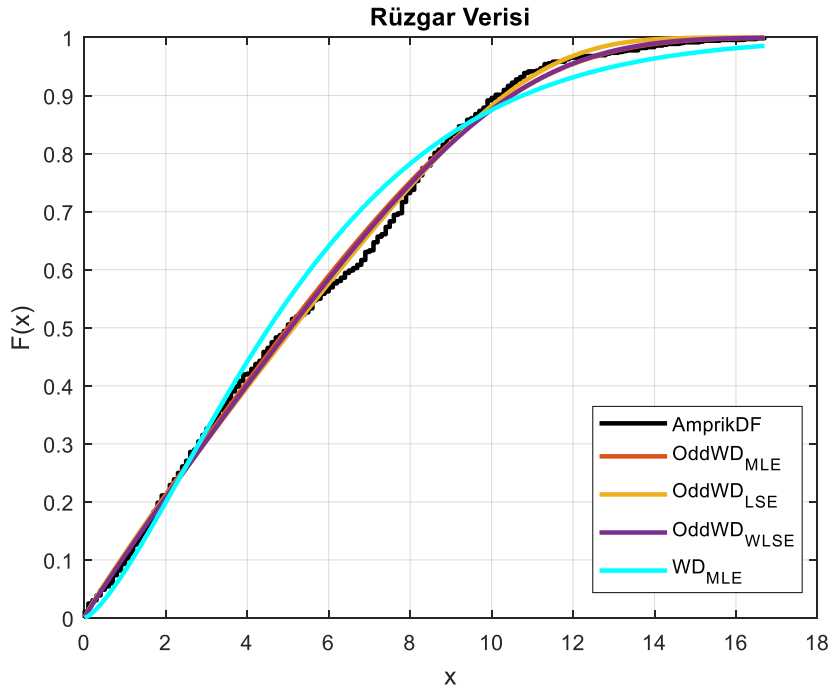
Şekil 5.3. Rüzgar verisi için göreceli frekansların histogramı ve GammaWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 5.4. Rüzgar verisi için göreceli frekansların histogramı ve OddWD'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 5.5. Rüzgar verisi için ampirik dağılım fonksiyonu ve buna uygun GammaWD'nin teorik dağılım fonsiyonunun grafiği



Şekil 5.6. Rüzgar verisi için ampirik dağılım fonksiyonu ve buna uygun OddWD'nin teorik dağılım fonsiyonunun grafiği

6. SONUÇ ve ÖNERİLER

Güvenilirlik ve yaşam analizi çalışmalarında oldukça popüler olan Weibull dağılımı, monoton bozulma oranına sahip verileri modellemede kullanışlı olmasına rağmen, bu çalışmalarda yaygın olarak karşılaşılan tek modlu (unimodal) veya banyo küveti eğrisi (bathtub-shaped) şeklindeki bozulma oranları gibi monoton olmayan bozulma oranlarına (hazard fonksiyonuna) sahip verileri modellemede yetersiz kalmaktadır. Bu durum araştırmacıları Weibull dağılımını genelleştirerek veya değiştirerek uygun bir model aramaya yönlendirmiştir.

Bu tez çalışmasında Weibull dağılımından türetilen bazı dağılımların (Inverse Weibull, Log Weibull, esnek Weibull, üstelleştirilmiş Weibull, Weibull Geometrik, Odd Weibull, Marshall Olkin extended Weibull ve Gamma Weibull) istatistiksel özellikleri tanıtılmış ve en çok olabilirlik, en küçük kareler, ağırlıklandırılmış en küçük kareler ve varsa momentler tahmincileri elde edilmiştir.

Simülasyon çalışmasında tezde ele alınan farklı tahmin edicilerin performansını karşılaştırmak amacıyla bazı sayısal hesaplamalar sunulmuş, farklı örneklem büyüklükleri ve farklı parametre değerleri için tahmin edicilerin performansları karşılaştırılmıştır. Bu sonuçlara göre;

- IWD için R.bias açısından LSE, R.MSE ve R.def açısından $n = 10$ için WLSE, $n \geq 20$ için MLE tatmin edici sonuçlar vermiştir.
- LogWD'nin b parametresi R.bias açısından ele alındığında WLSE, ϑ parametresi ele alındığında ise farklı tahminciler iyi bir performans göstermiştir. R.MSE ve R.def açısından MLE'nin iyi bir tahminci olduğu gözlenmiştir.
- FWD için R.bias ölçütüne göre LSE'nin, R.MSE'yle ilgili olarak $n = 10$ için WLSE'nin, diğer örneklem büyüklükleri için MLE'nin tatmin edici sonuçlar verdiği gözlenmiştir. R.Def açısından ise R.MSE'yle benzer sonuçlar sergilenmektedir.
- EWD için R.Bias ölçütüne göre farklı tahminciler iyi bir performans gösterirken, R.MSE açısından α ve β için genellikle MLE, v için $n = 10$ durumunda WLSE, diğer örneklem büyüklüklerinde çoğunlukla MLE iyi bir performans göstermiştir. R.Def ile ilgili olarak özellikle $n \geq 50$ durumunda MLE'nin diğer tahmincilere göre daha iyi sonuç verdiği söylenebilir.

- WGD'nin α ve p parametresinin sonuçları R.bias ölçütüne göre karşılaştırıldığında genellikle tüm örneklem büyüklüklerinde MLE iyi bir performans sergilerken, β için farklı tahminciler iyi bir performans sergilemiştir. R.MSE değerleri karşılaştırıldığında genellikle büyük örneklemelerde en iyi tahminci MLE iken, β için özellikle $n \leq 20$ durumunda WLSE'nin, genellikle diğer tahmincilere göre iyi performans sergilediği gözlenmiş, R.Def ele alındığında da benzer şekilde MLE tatmin edici sonuçlar vermiştir.
- OddWD'nin β parametresi R.bias açısından ele alındığında WLSE iyi bir performans sunarken, α, θ için MLE iyi bir performans sunmuştur. R.MSE sonuçları karşılaştırıldığında β için özellikle $n = 20$ durumunda WLSE, diğer örneklem büyüklüklerinde MLE, α ve θ için de çoğunlukla MLE diğer tahmincilerden üstün bir performans sunmuştur. R.Def ölçütüne göre bakıldığında özellikle $n \geq 50$ için MLE en iyi sonucu vermiştir.
- MOEWD için R.bias ölçütüne göre farklı tahminciler iyi bir performans sunarken, R.MSE'ye göre α için MLE çoğunlukla diğer tahmincilerden üstün bir performans sunarken, β için $n = 200$ olduğunda MLE, diğer örneklem büyüklüklerinde ve λ için farklı tahmin ediciler iyi bir performans sunmuştur. R.Def sonuçlarına bakıldığında $n = 10$ için genellikle LSE, $n \geq 20$ için MLE, diğer tahmincilere göre iyi bir performans sergilemiştir.
- GammaWD için R.bias sonuçlarına göre α parametresi için MLE, β parametresi için WLSE iyi performans gösterirken, c parametresi için farklı tahminciler iyi sonuçlar vermektedir. R.MSE açısından sonuçlar ele alındığında α ve β için MLE, c için ME tatmin edici sonuçlar vermiştir. R.def açısından MLE genellikle iyi bir tahmincidir.

Uygulama bölümünde iki farklı veri seti kullanılmış (Aarset ve rüzgar verisi) ve bu verilere uygun modelin seçimi Akaike bilgi kriteri (AIC), Kolmogorov-Smirnov (K-S) ve Ki-kare (χ^2) test istatistikleri ve belirlilik katsayısına (R^2) göre yapılmıştır. Uygulama sonuçları incelendiğinde;

- Aarset verisi için AIC kriterine göre en uygun modelin OddWD olduğu, OddWD'de, R^2 ve χ^2 test istatistiği açısından MLE tahmincisinin en iyi performansı sergilerken, K-S için diğer tahmincilerle karşılaştırıldığında LSE tahmincisinin en iyi sonucu verdiği söylenebilir.

- Rüzgar verisi için; AIC kriteri açısından en iyi performansı GammaWD göstermesine rağmen, R^2 kriteri ve K-S, χ^2 test istatistiklerine göre OddWD iyi performans gösterdiğinden dolayı rüzgar verisinin modellenmesinde OddWD de kullanılabilir. OddWD'de K-S test istatistiğine ve R^2 kriterine göre LSE tahmincisi, χ^2 test istatistiğine göre de WLSE tahmincisi en iyi performansı sergilemiştir.

Gelecek çalışmalara yönelik, bu çalışmanın kapsamı genişletilebilir, dört parametrelili Weibull modelleri ele alınabilir, sansürlü veriler için genelleştirilmiş veya değiştirilmiş Weibull dağılımının parametre tahminleri yapılabilir.

KAYNAKÇA

- Aarset, M.V. (1987). How to Identify a Bathtub Hazard Rate. *IEEE Transactions on Reliability*, 36 (1), 106-108.
- Akdeniz, F. (1976). *Olasılık ve İstatistik*. Ankara: Nobel kitabevi.
- Akdi, Y. (2011). *Matematiksel İstatistiğe Giriş*. (3). Ankara: Gazi Kitabevi.
- Alkasasbeh, M.R. ve Raqab, M.Z. (2009). Estimation of the generalized logistic distribution parameters: Comparative study. *Statistical Methodology*, 6, 262-279.
- Almalki, S.J. (2014). *Statistical Analysis of Lifetime Data Using New Modified Weibull Distributions*. Doctor of Philosophy. England: The University of Manchester.
- Almalki, S.J. ve Nadarajah, S. (2014). Modifications of the Weibull Distribution: A Review. *Reliability Engineering and System Safety*, 124, 32-55.
- Almalki, S. J. ve Yuan, J. (2013). A new modified Weibull distribution. *Reliability Engineering and System Safety*, 111, 164-170.
- Balakrishnan, N. ve Kocherlakota, S. (1985). *On the Double Weibull Distribution: Order Statistics and Estimation*, *Sankhyā: The Indian Journal of Statistic.*, 47(2), 161-178.
- Barreto-Souza, W., de Morais, A. L. ve Cordeiro, G. M. (2011). The Weibull-geometric distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81 (5), 645-657.
- Bebbington, M., Lai, C. D., ve Zitikis, R. (2007). A flexible Weibull extension. *Reliability Engineering & System Safety*, 92, 719-726.
- Calabria, R. ve Pulcini, G. (1990). On the maximum likelihood and least-squares estimation in the inverse Weibull distribution. *Statistica Applicata*, 2 (1), 53-66.
- Carrasco, M., Ortega, E. M. ve Cordeiro, G. M. (2008). A generalized modified Weibull distribution for lifetime modeling. *Computational Statistics and Data Analysis*, 53, 450-462.
- Casella, G. ve Berger, R.L. (2002). *Statistical Inference*. (2). A.B.D. : Duxbury.
- Cohen, A.C. (1973). The Reflected Weibull Distribution. *Technometrics*, 15 (4), 867-873.
- Cordeiro, G.M., Ortega, E.M. ve Nadarajah, S. (2010). The Kumaraswamy Weibull Distribution with Application to Failure Data. *Journal of the Franklin Institute*, 347, 1399-1429.
- Cordeiro, G.M. ve Lemonte, A.J. (2013). On the Marshall Olkin extended Weibull distribution. *Stat Papers*, 54, 333-353.

- Cordeiro, G.M., Ortega, E.M. ve Silva, G.O. (2012). The Kumaraswamy modified Weibull distribution: theory and applications. *J. Stat. Comput. Simul.*, 84 (7), 1387-1411.
- Cooray, K. (2012). Analyzing Grouped, Censored and Truncated Data Using the Odd Weibull Family. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 41, 2661-2680.
- Cooray, K. (2015). A study of moments and likelihood estimators of the odd Weibull distribution. *Statistical Methodology*, 26, 72-83.
- Çelik, Ş. (2006). *Normal dağılım ve normal dağılımla ilgili çıkarımlar*. Yüksek Lisans Tezi. Ankara: Ankara Üniversitesi.
- Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F.G. (1953). *Higher Transcendental Functions*. A.B.D: McGraw-Hill.
- Famoye, F., Lee, C. ve Olumolade, O. (2005). The Beta-Weibull distribution. *Journal of Statistical Theory and Applications*, 4(2), 121-136.
- Gradshteyn, I. S. ve Ryzhik, I. M. (2007). *Table of Integrals, Series and Products*. (7).A.B.D.: Academic Press.
- Gumbel, E. J. (1958). *Statistics of extremes*. New York: Columbia University Press.
- Gurvich, M.R., Dibenedetto, A.T. ve Ranade, S.V. (1997). A new statistical distribution for characterizing the random strength of brittle materials. *Journal of Materials Science*, 32, 2559-2564.
- Günel, P. (2009). *Ters Normal Dağılım (Inverse Gaussian Distribution) ve Sağlık Analizi İle Bir Uygulama*. Yüksek Lisans Tezi. İstanbul: Marmara Üniversitesi.
- Hougaard, P. (1986). Survival models for heterogeneous populations derived from stable distributions. *Biometrika*, 73, 387-396.
- Huntsberger, D.V. (1961). *Elements of statistical inference*. Boston: Allyn & Bacon.
- Jeong J. H. (2006). A new parametric family for modelling cumulative incidence function: application to breast cancer data. *Journal of the Royal Statistical Society*, 169 (2), 289-303.
- Jiang, H., Xie, M. ve Tang, L.C. (2010). On MLEs of the parameters of a modified Weibull distribution for progressively type-2 censored samples. *J. Appl. Stat.*, 37 (4), 617-627.
- Johnson, N.L., Kotz, S. ve Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions*. (2). New York: John Wiley & Sons.

- Kaya, M.F. (1998). *Dağılımlar ailesi için esas kitleyi kapsayan invaryant güven aralıkları ve bunlara bağlı olarak oluşturulan hipotez testleri*. Doktora Tezi. Ankara: Ankara Üniversitesi.
- Kies, J.A. (1958), *The strength of glass*. Washington: Naval Research Laboratory.
- Krishnamoorthy, K. (2006). *Handbook of Statistical Distributions with Applications*. A.B.D.: Taylor & Francis Group.
- Lai, C.D. (2014). *Generalized Weibull Distributions*. New York: SpringerBriefs in Statistics.
- Lai, C.D., Xie, M. ve Murthy, D.N.P. (2003). A Modified Weibull Distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, 52 (1), 33-37.
- Lai, C.D., Murthy, D.N.P. ve Xie, M. (2011). Weibull distributions. *Wiley Interdisciplinary Reviews*, 3(3), 282–287.
- Lawless, J.F. (2003). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. (2). A.B.D: John Wiley & Sons.
- Lüküslü, D. (2005). *Modelleme sürecinde Weibull dağılımının kullanılması*. Yüksek Lisans Tezi. İstanbul: Marmara Üniversitesi.
- Mahmoud, R.M. ve Mandouh, R.M. (2012). Parameter estimation of beta-Weibull distribution based on censored samples. *J. Appl. Sci. Res.*, 8 (1), 390-400.
- Marshall, A.W. ve Olkin, I. (1997). A New Method of Adding a Parameter to a Family of Distributions with Application to the Exponential and Weibull Families. *Biometrika*, 84 (3), 641-652.
- Mudholkar, G.S. ve Hutson, A.D. (1996). The exponentiated Weibull family: Some properties and a flood data application. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 25, 3059-3083.
- Mudholkar, G.S. ve Srivastava, D.K. (1993). Exponentiated Weibull Family for Analyzing Bathtub Failure-Rate Data. *IEEE Transactions on Reliability*, 42 (2), 299-302.
- Mudholkar G.S., Srivastava D.K. ve Kollia G.D. (1996). A generalization of the Weibull distribution with application to the analysis of survival data. *Journal of the American Statistical Association*, 91, 1575-1583.
- Murthy, D.N.P., Xie, M. ve Jiang, R. (2004). *Weibull Models*. New Jersey: John Wiley Sons.

- Nadarajah, S. (2009). Bathtub-shaped failure rate functions. *Qual. Quant.*, 43, 855-863.
- Nadarajah, S. ve Gupta, A.K. (2005). On the Moments of the Exponentiated Weibull Distribution. *Communications in Statistics-Theory Methods*, 34, 253-256.
- Nadarajah, S., Cordeiro, G.M. ve Ortega, E.M.M. (2011). General results for the beta modified Weibull distribution. *J. Stat.Comput. Simul.*, 81 (10), 1211-1232.
- Nadarajah, S., Cordeiro, G.M. ve Ortega, E.M.M. (2013). The exponentiated Weibull distribution: a survey. *Stat Papers*, 54, 839-877.
- Nassar, M.M. ve Eissa, F.H. (2003). On The Exponentiated Weibull Distribution. *Communications in Statistics-Theory Methods*, 32 (7), 1317-1336.
- Özer, A. (2007). *Normallik Testlerinin Karşılaştırılması*. Yüksek Lisans Tezi. Ankara: Ankara Üniversitesi.
- Öztürk, F., Akdi, Y., Aydoğdu, H., Karabulut, İ. (2006). *Parametre Tahmini ve Hipotez Testi*. Ankara: Bıçaklar Kitabevi.
- Pham, H. ve Lai, C. D. (2007). On recent generalizations of the Weibull distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, 56 (3), 454-458.
- Phani, K.K. (1987). A New Modified Weibull Distribution Function. *Journal of the American Ceramic Society*, 70 (8), 182-184.
- Rinne, H. (2008). *The Weibull distribution: a handbook*. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC.
- Sarhan, A.M. ve Zaindin, M. (2009). Modified Weibull distribution. *Appl. Sci.*, 11, 123-136.
- Singla, N., Jain, K. ve Kumar S., S. (2012). The beta generalized Weibull distribution: Properties and applications. *Reliability Engineering and System Safety*, 102, 5-15.
- Soliman, A.A., Abd-Allah, A.H., Abou-Elheggag, N.A., Ahmed, E.A. (2012). Modified Weibull model: a Bayes study using MCMC approach based on progressive censoring data. *Reliab. Eng. Syst. Safety.*, 100, 48-57.
- Stacy, E.W. (1962). A Generalization of the Gamma Distribution. *Ann. Math. Statist.*, 33 (3), 1187-1192.
- Swain, J. J., Venkatraman, S. ve Wilson, J. R. (2007). Least-squares estimation of distribution functions in johnson's translation system. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 29(4), 271-297.
- Şamilov, A. (2007). *Ölçüm teorisi, olasılık ve lebesgue integrali*. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi yayınları.

- Usta, I. (2013). Different estimation methods for the parameters of the extended Burr XII distribution. *Journal of Applied Statistics*, 40(2), 397-414.
- Usta, I. ve Kantar, Y. M. (2012). Analysis of some flexible family of distributions for estimation of wind speed distributions. *Applied Energy*, 89(1), 355-367.
- Usta, I. ve Celik, E. (2015). Comparison of different estimation methods for the Marshall-Olkin extended Weibull distribution. *Journal of Scientific Research and Development*, 2(12), 101-107.
- Ünlü, M. (2013). *Pearson dağılış ailesinin güvenilirlik analizinde kullanılması üzerine bir çalışma*. Yüksek Lisans Tezi. İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi.
- White, J. S. (1969). The Moments of Log-Weibull Order Statistics. *Technometrics*, 11 (2), 373-386.
- Xie, M., Tang, Y. ve Goh, T.N. (2002). A Modified Weibull Extension with Bathtub-Shaped Failure Rate Function. *Reliability Engineering and System Safety*, 76, 279-285.
- Xie, M. ve Lai, C.D. (1996). Reliability Analysis Using an Additive Weibull Model with Bathtub Shaped Failure Rate Function. *Reliability Engineering & System Safety*, 52, 87-93.
- Yıldırım, N. (2013). *Normal Dağılım İçin Uyum İyiliği Testleri ve Bir Simülasyon Çalışması*. Yüksek Lisans Tezi. Ankara: Gazi Üniversitesi.
- Zhang, T. ve Xie, M. (2007). Failure Data Analysis with Extended Weibull Distribution. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 36, 579-592.