PARAMETRİK BOOTSTRAP YÖNTEMİNE DAYALI HİPOTEZ TESTLERİ VE GÜVEN ARALIKLARI

Evren ÖZKİP

Doktora Tezi

İstatistik Anabilim Dalı

Nisan-2015

Bu tez çalışması Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu Başkanlığı tarafından desteklenmiştir. Proje No: 1202F038

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Evren ÖZKİP'in **"Parametrik Bootstrap Yöntemine Dayalı Hipotez Testleri ve Güven Aralıkları"** başlıklı **İstatistik** Anabilim Dalındaki, Doktora Tezi 25.02.2015 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	**: Prof. Dr. BERNA YAZICI**	**………………**
(İkinci Danışman)	**: Yrd. Doç. Dr. AHMET SEZER**	**………………**
Üye :	**: Prof. Dr. İLKER ERCAN**	**………………**
Üye :	**: Prof. Dr. EMRAH AKYAR**	**………………**
Üye :	**: Prof. Dr. OLÇAY ARSLAN**	**………………**
Üye :	**: Prof. Dr. MERAL ÇETİN**	**………………**

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun……………… tarih ve ………… sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

PARAMETRİK BOOTSTRAP YÖNTEMİNE DAYALI HİPOTEZ TESTLERİ VE GÜVEN ARALIKLARI

Evren ÖZKİP

Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Berna YAZICI
114 sayfa

Klasik testler, nuisance parametre içeren basit problemler için dahi tam olasılıklı çözüm sağlamayabilirler. Nuisance parametrelerden kaynaklanan problemi gidermek için bir çeşit Monte Carlo metodu olan parametrik bootstrap (PB) yöntemi geliştirilmiştir. PB yöntemi kullanılarak bilinmeyen parametrelerden bağımsız dağılıma sahip test değişkeni elde edilir. Bu test değişkenin dağılımı ile nuisance parametreler içeren problemler için tam olasılıklı çıkarımlar elde edilir. PB yöntemine benzer şekilde genelleştirilmiş *p*-değer (GPD) yöntemi de Monte Carlo metoduna dayanmaktadır. Bu tez çalışmasında hipotez testleri ve güven aralıkları için PB yöntemine dayanan testlerin klasik testlerin alternatifi olarak kullanımı gösterilmiştir. Behrens-Fisher problemi için PB yöntemine dayanan yeni bir test geliştirilmiştir. GPD yöntemine dayanan yeni bir genelleştirilmiş güven aralığı önerilmiştir. Varyansların eşit olmadığı durumlarda tek yönlü ANOVA için PB yöntemine dayanan testler ile literatürdeki diğer testler karşılaştırılmıştır. Ayrıca iki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için PB yöntemine dayanan yeni bir test geliştirilmiştir. Verilen testleri değerlendirmek için farklı senaryolar altında Monte Carlo simülasyon çalışmaları yapılmıştır. Simülasyon çalışmalarının sonuçları, geliştirilen PB yöntemine dayanan testlerin nuisance parametre içeren problemlerin çözümü için iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir. Ayrıca, literatürde yer alan gerçek hayat problemleri üzerinde verilen yöntemler değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş *p*-değer, parametrik bootstrap, Behrens-Fisher problem, tek yönlü ANOVA, lognormal dağılım, nuisance parametre.

ABSTRACT

PhD Dissertation

HYPOTHESES AND CONFIDENCE INTERVALS BASED ON PARAMETRİC BOOTSTRAP METHOD

Evren ÖZKİP

Anadolu University
Graduate School of Sciences
Statistics Program

Supervisor: Prof. Dr. Berna YAZICI

114 pages

Classical tests do not provide exact solutions to even simple problems involving nuisance parameters. To overcome problem caused by nuisance parameter, parametric bootstrap (PB) approach is developed. Test variable that is distribution free of unknown parameters is obtained by using PB approach. Distribution of this test variable can provide exact inferences for problems in the presence of nuisance parameters. Generalized *p*-value (GPV), which looks similar to a PB is also based on Monte Carlo method. In this dissertation, it is shown that tests based on PB approaches may be used as an alternative to classical tests for hypothesis tests and confidence intervals. A new test based on parametric bootstrap and a new generalized confidence intervals based on the GPV are developed for Behrens-Fisher problem. Tests based on PB approaches and the other tests in literature are compared for one-way ANOVA with unequal variance. A new test based on PB approach is also proposed for comparing the means of two lognormal distributions. Monte Carlo simulation studies are conducted to evaluate performances of the proposed tests under different scenarios. The simulations results indicate that the tests based on PB approaches can be applied for solution of problems in the presence of nuisance parameters. Furthermore, proposed methods are applied to the real life problems taken from the literature.

Keywords: Generalized *p*-value, parametric bootstrap, Behrens-Fisher problem, one-way ANOVA, Lognormal distribution, nuisance parameter.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamın her aşamasında sürekli benim yanımda olan, araştırmalarımı yönlendiren, doktora tez konusunu öneren ve beni bu konuda cesaretlendiren, her türlü konuda engin bilgi ve deneyimleri ile desteğini hiç esirgemeyen, benim için bir hocadan daha fazlasını ifade eden değerli danışmanım *Prof. Dr. Berna YAZICI*' ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tezin her aşamasında bilimsel kişiliği ve tecrübelerinden istifade ettiğim, faydalı öneri ve yapıcı eleştiriliyle beni yönlendiren, tezin oluşmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam ve ikince danışmanım *Yrd. Doç. Dr. Ahmet SEZER*'e teşekkürlerimi belirtmek isterim.

Tez çalışmam boyunca tezin ilerlemesinde, şekil almasında ve içeriğinin zenginleşmesinde öneri ve yapıcı eleştirileri ile yardımlarını esirgemeyen çok değerli tez izleme komitesi üyeleri *Prof. Dr. İlker ERCAN* ve *Prof. Dr. Emrah AKYAR*'a teşekkürlerimi sunarım.

Beni bugünlere kadar getiren, hayatımın her aşamasında yanımda olan, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen sevgili *anneme*, *babama* ve *abime* en kalbi teşekkürlerimi ifade etmek isterim.

Yaşamımda iyi ki varlar dediğim çok kıymetli oğullarım *Ahmet Kayra ÖZKİP* ve *Osman Asım ÖZKİP*'e ve tanıştığım günden bu yana bugünlere gelmemde kendisine çok şey borçlu olduğum, hem manen hem de bilgisayar konularında yardımlarını esirgemeyen her daim yanımda olan çok değerli eşim *Elife VURAL ÖZKİP*'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Evren ÖZKİP
Mart-2015

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

KISALTMALAR VE SİMGELER

ANOVA: Varyans analizi

GGA: Genelleştirilmiş güven aralığı

GPVD: Genelleştirilmiş pivot değer

GRB: Genelleştirilmiş red bölgesi

GTD: Genelleştirilmiş test değişkeni

GPD: Genelleştirilmiş *p*-değer

PB: Parametrik bootstrap

BF: Behrens-Fisher

$\xi = (\theta, \eta)$: Bilinmeyen parametre vektörü

θ: İlgilenilen parametre

η: Nuisance parametre

$f_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{x})$: $\boldsymbol{X}$'in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$F_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{X}$'in birikimli dağılım fonksiyonu

$T = t(\boldsymbol{X}; \mathbf{x}, \xi)$: Genelleştirilmiş test değişkeni

$t_{obs} = t(\mathbf{x}; \mathbf{x}, \xi)$: Genelleştirilmiş test değişkenin gözlenen değeri

$R = r(\boldsymbol{X}; \mathbf{x}, \xi)$: Genelleştirilmiş pivot değer

$C_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\xi})$: Genelleştirilmiş red bölgesi

p: Genelleştirilmiş *p*-değer

$\sim$: Olarak dağılmış

χ_r^2: r serbestlik dereceli ki-kare dağılımı

1. GİRİŞ

İstatistiksel sonuç çıkarma pek çok uygulamada kullanılmaktadır. İstatistiksel sonuç çıkarma nokta tahmini, güven aralıkları ve hipotez testleri şeklinde üç ana bölümden oluşur. Dağılımı bilinmeyen parametreye bağlı olmayan, hem ilgilenilen parametrenin hem de bilinmeyen parametrelerin bir fonksiyonuna pivot değer denir. Bir problemde ilgilenilen parametre için uygun pivot değer varsa tam olasılıklı (exact) hipotez testleri kurulabilir ve güven aralıkları elde edilebilir. Ancak ilgilenilen parametre için uygun pivot değer yoksa istatistiksel sonuç çıkarmak için klasik testler kullanılır. Klasik testler ise bilinmeyen parametreler içeren pek çok problem için tam olasılıklı çözüm sağlamazlar. Böyle problemlerde araştırmacılar sadece büyük hacimli örneklemlerde geçerli olan yaklaşık istatistiksel yöntemlere başvururlar. Ancak bu yöntemler de küçük hacimli örneklemlerde zayıf performansa sahiptirler.

İstatistiksel programlardaki hızlı gelişmeler istatistiksel sonuç çıkarma açısından önemli değişimlere neden olmuştur. İstatistiksel programlamaya dayalı testler pek çok istatistiksel çıkarım probleminde kullanılmıştır (Pal ve ark. 2007; Özkip ve ark. 2013b). Parametrik bootstrap (PB) yöntemi istatistiksel programlama tekniklerine dayanmaktadır. Nuisance parametrelerin varlığında klasik testler tam olasılıklı çözümler sağlamazken PB yöntemine dayanan testler kullanılarak tam olasılıklı çözümler elde edilmiştir. Nuisance parametre, ilgili parametrelerin analizi için tahmin edilmesi gereken ama çoğu zaman tahmin edilemeyen parametrelerdir. Örneğin varyansların eşitliği varsayımı sağlanmadığında iki normal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırırken bilinmeyen belki de eşit olmayan varyanslar nuisance parametrelerdir.

PB yöntemi uygulamalı istatistikte yaygın şekilde kullanılmaktadır. PB yöntemi karmaşık matematik formüllerinden uzak, sınırlı varsayımlara sahip, anlaşılması ve kullanılması kolay bir yöntemdir (Simon ve Bruce 1991). Efron (1979) tarafından PB tahmin edicileri kullanılarak test istatistiğinin dağılımını bulmak için PB yöntemi geliştirilmiştir. Hipotez testleri ve güven aralıkları için PB yöntemi ile herhangi bir varsayıma dayanmadan test istatistiğinin dağılımı tam olarak bulunur. PB yönteminde veri setinden rasgele-iadeli örneklemler alınarak PB tahmin edicileri elde edilir. Nuisance parametrelerin yerlerine PB tahmin edicileri kullanılarak bilinmeyen parametrelerden bağımsız test değişkeninin dağılımı bulunur. Test değişkenin dağılımı bulunurken Monte Carlo simülasyon tekniği kullanılır. Dağılımı tam olarak bulunan test değişkeni ile tam olasılıklı hipotez testleri kurulur ve güven aralıkları elde edilir.

Benton ve Krishnamoorthy (2002) küçük hacimli örneklemlerde çeşitli istatistiksel problemler için PB yönteminin performansını değerlendirmişlerdir. Krishnamoorthy ve ark. (2007) PB yöntemini kullanarak varyansların eşit olmadığı durumlarda tek yönlü ANOVA için yeni bir test geliştirmişlerdir. Alvandi ve Malekzadeh (2014) PB yöntemini kullanılarak ikiden fazla lognormal anakütlenin ortalamaları için eşzamanlı güven aralıklarını elde etmişlerdir.

Varyansların eşitliği varsayımı sağlanmadığında ikiden fazla normal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için klasik *F* testini kullanmak araştırmacıları yanlış sonuçlara götürebilmektedir. İkiden fazla anakütlenin ortalamalarını karşılaştırırken bilinmeyen ve belki de eşit olmayan varyanslar nuisance parametrelerdir. Test istatistiği, bilinmeyen varyanslara bağlı olduğu için dağılımı tam olarak bulunamaz. Dolayısıyla klasik test istatistiğine dayanarak tam olasılıklı hipotez testleri kurulamaz ve güven aralıkları elde edilemez.

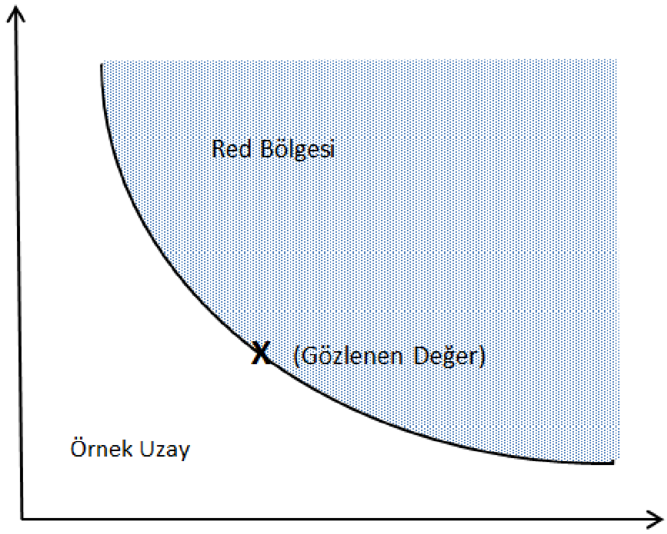
Nuisance parametreden kaynaklanan sıkıntıyı gidermek için Weerahandi (1987) eşit olmayan varyans durumunda iki regresyonun parametrelerini karşılaştırmak için genelleştirilmiş *p*-değeri (GPD) yöntemini kullanmıştır. Bu yönteme göre öncelikle ele alınan hipotezler için iyi tanımlanmış yansız red bölgesi bulundu ve daha sonra bu red bölgesinin olasılığı genelleştirilmiş *p*-değeri verdi. Tsui ve Weerahandi (1989) nuisance parametreden bağımsız elde edilen genelleştirilmiş test değişkeni ve genelleştirilmiş *p*-değeri kavramlarını tanıtmışlardır ve bu kavramları kullanılarak iki üstel dağılımın ortalamasını karşılaştırmışlardır. Weerahandi (1993) genelleştirilmiş pivot değerini ve genelleştirilmiş güven aralığını geliştirmiştir. Genelleştirilmiş test değişkeni, genelleştirilmiş *p*-değeri, genelleştirilmiş pivot değeri ve genelleştirilmiş güven aralığını kullanarak tam olasılıklı çözüm elde etme yöntemine GPD yöntemi denir.

GPD yöntemini kullanmak için öncelikle genelleştirilmiş test değişkeni elde edilir. Bir test değişkeninin genelleştirilmiş test değişkeni olması için aşağıdaki üç özelliği sağlaması gerekir,

i) Test değişkenin gözlenen değeri bilinmeyen parametreye bağlı değildir,

ii) Test değişkenin dağılımı nuisance parametreden bağımsızdır,

iii) Test değişkeninin dağılım fonksiyonu ilgilenilen parametrenin monoton fonksiyonudur.



Şekil 1.1. Hipotez testleri için genelleştirilmiş red bölgesi.

Genelleştirilmiş test değişkenin dağılımı nuisance parametreden bağımsız olarak Monte Carlo simülasyon tekniği ile elde edilir. GPD yöntemindeki asıl amaç genelleştirilmiş test değişkenine dayanarak iyi tanımlanmış red bölgesini elde etmektir. Şekil 1.1'de gösterildiği gibi genelleştirilmiş test değişkenin, test istatistiğinin gözlenen değerinden büyük her değeri genelleştirilmiş red bölgesini oluşturmaktadır. Genelleştirilmiş red bölgesinin olasılığı genelleştirilmiş p-değeri vermektedir ve bu p-değerini kullanarak tam olasılıklı hipotez testleri kurulabilir. T genelleştirilmiş test değişkeni ve t_{obs} test değişkenin gözlenen değeri olmak üzere sıfır hipotezinin doğruluğu altında genelleştirilmiş p-değeri eşitlik (1.1)'deki gibi bulunur,

$$p\text{-değeri} = Pr(T \geq t_{obs}) \quad (1.1)$$

Genelleştirilmiş güven aralıkları için öncelikle genelleştirilmiş pivot değeri elde edilir. Bir pivot değerin genelleştirilmiş pivot değer olması için aşağıdaki iki özelliği sağlaması gerekir,

i) Pivot değerin dağılımı bilinmeyen parametreden bağımsızdır,

ii) Genelleştirilmiş pivot değerin gözlenen değeri nuisance parametresine bağlı değildir.

Güven düzeyi verildiğinde genelleştirilmiş pivot değerin dağılımı tam olarak bilindiğinden tam olasılıklı güven aralıkları elde edilebilir.

GPD yöntemi veriler hakkında istatistiksel sonuç çıkarmak için pek çok alanda kullanılmıştır. Varyansların eşit olmadığı durumlarda iki normal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırma problemine Behrens-Fisher (BF) problemi denir. BF probleminin çözümü için pek çok klasik yöntem geliştirilmiştir. Fakat bu problem nuisance parametreler içerdiğinden dolayı klasik yöntemler kullanılarak tam olasılıklı çözüm elde etmek oldukça zordur. BF problemde normal anakütlenin ortalamaları ile ilgilenirken varyanslar nuisance parametrelerdir. BF problemin çözümü için en fazla kullanılan klasik test Welch (1938) ve Satterhwaite (1946) tarafından geliştirilen Welch-Satterhwaite (WS) testidir. WS testinden sonra en fazla bilinen klasik test Cochran-Cox testidir. Tsui ve Weerahandi (1989) BF problemi için GPD yöntemini kullanarak tam olasılıklı çözüm elde etmişlerdir. Weerahandi (1993) BF problemi için GPD yöntemini kullanarak genelleştirilmiş güven aralığını elde etmiştir. Singh ve ark. (2002) WS testine benzer yeni bir test geliştirmişlerdir. Özkip ve ark. (2014a) BF probleminin çözümü için kullanılan testleri Monte Carlo simülasyon yöntemini kullanarak karşılaştırmışlardır ve GPD yöntemine dayanan testin performansının diğer testler kadar iyi, hatta bazı durumlarda daha iyi olduğunu ifade etmişlerdir.

Varyans analizi (ANOVA) ikiden fazla anakütlenin ortalamaları arasında istatistiksel olarak farklılık olup olmadığını test etmek için kullanılan bir yöntemdir. ANOVA için kullanılan klasik F testi anakütlelerin normal dağıldığı, varyansların eşitliği ve hataların bağımsızlığı varsayımlarına dayanır. Bu varsayımlardan özellikle varyansların eşitliği varsayımı sağlanmadığında klasik F testi ciddi yanlışlıklara sebep olmaktadır. Weerahandi (1995) GPD yöntemini kullanarak eşit olmayan varyans durumunda genelleştirilmiş F (GF) testi geliştirmiştir. Gamage ve Weerahandi (1998) eşit varyans varsayımı sağlanmadığında ANOVA için GF testi ile klasik testleri simülasyon yoluyla karşılaştırmışlardır ve GF testin I. tip hata oranlarının orta ve büyük hacimli örneklemlerde anlam düzeyine daha yakın olduğunu ifade etmişlerdir. Xu ve Wang (2008) ANOVA için GPD yöntemini kullanarak yeni bir test önermişlerdir ve bu yeni testin I. tip hata oranlarının GF testine göre nominal düzeye daha yakın olduğunu göstermişlerdir. Li ve ark. (2011) GPD yöntemi ile Fisher'in fiducial yaklaşımını birleştirerek yeni bir test geliştirmişlerdir. Yiğit ve Gökpınar (2010) eşit olmayan varyans durumunda ANOVA için literatürdeki testleri karşılaştırmışlardır ve GF testin performansının bazı durumlarda diğer testlerden daha yüksek olduğunu ifade etmişlerdir.

Pozitif ve sağa çarpık verilerle karşılaşıldığında lognormal dağılım çok yaygın şekilde kullanılmıştır. Krishnamoorthy ve Mathew (2003) GPD yöntemini kullanarak iki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için yeni bir test geliştirmişlerdir. Chen ve Zhou (2006) iki lognormal anakütlenin ortalamalarının farkı ve oranı için genelleştirilmiş güven aralığı ile literatürdeki diğer testlerin güven aralıklarını karşılaştırmışlardır ve iki lognormal anakütlenin ortalamalarının farkı için genelleştirilmiş güven aralığının performansının diğer testlerden daha iyi olduğunu ifade etmişlerdir. Abdollahnezhad ve ark. (2012) iki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için GPD yöntemini kullanarak yeni bir test önermişlerdir. Özkip ve ark. (2012c) GPD yöntemini ve genelleştirilmiş güven aralıklarını kullanarak örneklem hacimleri farklı olduğu durumlar için lognormal anakütlelerin ortalamaları hakkında istatistiksel çıkarım yapmışlardır.

Bu tezde, nuisance parametrelerin varlığında, özellikle küçük hacimli örneklemlerde klasik testlerin I. tip hata oranları anlam düzeyinden uzaklaşmaktadır ve dolayısıyla bu testler araştırmacıları yanlış sonuçlara götürebilmektedir. Bu çalışmada, varyansların farklı olduğu iki normal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırma problemi için Behrens-Fisher test istatistiğine dayalı yeni bir PB testi geliştirilmiştir. Geliştirilen PB testi ile literatürdeki diğer testlerin I. tip hata oranları, güç değerleri, aralık uzunlukları ve kapsama olasılıkları Monte Carlo simülasyon tekniği kullanılarak karşılaştırılmıştır.

Varyansların farklı olduğu durumlarda iki normal anakütlenin ortalamaları için güven aralıkları elde etmek oldukça zordur. GPD yöntemi kullanılarak Weerahandi (1993) tarafından genelleştirilmiş güven aralığı elde edilmiştir. Bu çalışmada GPD yöntemine dayalı yeni bir genelleştirilmiş güven aralığı geliştirilmiştir. Geliştirilen bu güven aralığı ile Weerahandi (1993)'nin güven aralığının aralık uzunlukları ve kapsama olasılıkları Monte Carlo simülasyon tekniği kullanılarak karşılaştırılmıştır.

Varyansların eşitliği varsayımı sağlanmadığında ANOVA için kullanılan ve çeşitli varsayımlara dayanan yaklaşık yöntemler, özellikle küçük hacimli örneklemlerde yanlış istatistiksel çıkarımlara sebep olmaktadır. Literatürde varyansların eşit olmadığı durumlarda ANOVA için klasik testler geliştirilmiştir. Fakat bu klasik testler her zaman tam olasılıklı çözümler sağlamamıştır. Klasik testlerin alternatifi olarak simülasyon tekniğine dayanan pek çok test geliştirilmiştir. Klasik ve simülasyon tekniğine dayanan testlerin fazla olmasından hangisinin performansının daha iyi olduğunu tespit etmek araştırmacıların işini kolaylaştıracaktır. Bu çalışmada, pratikte karşılaşılabilecek çeşitli senaryolar için Monte Carlo simülasyon tekniği kullanılarak literatürdeki testlerin I. tip hata oranları ve güç değerleri karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda hangi testin daha iyi olduğu değerlendirilmiştir.

İki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için çeşitli testler önerilmiştir. PB yöntemi pek çok nuisance parametre içeren problem için kullanılmıştır. Fakat iki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için

PB yöntemi kullanılmamıştır. Bu çalışmada, PB yöntemine dayanan yeni bir test geliştirilmiş ve farklı senaryolar altında bu testin performansı incelenmiştir. Geliştirilen PB test ile literatürdeki diğer testlerin I. tip hata oranları ve güç değerleri Monte Carlo simülasyon tekniği kullanılarak karşılaştırılmıştır.

Tez aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir. 2. bölümde GPD ve PB yöntemleri için genel bilgiler verilmiştir. 3. bölümde Behrens-Fisher problemi, varyansların eşit olmadığı durumlarda tek yönlü ANOVA ve iki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırma problemi ele alınmıştır. 4. bölümde yukarıda bahsedilen problemler için Monte Carlo simülasyon çalışmaları yapılmıştır. 5. bölümde gerçek veri setleri kullanılarak verilen testlerin uygulamaları yapılmıştır. 6. bölümde simülasyon çalışmasından elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Nuisance parametre içeren problemlerin tam olasılıklı çözümlerini elde etmek oldukça zordur. Pek çok araştırmacı, nuisance parametre içeren problemleri çözmek için büyük hacimli örneklemlerde geçerli olan klasik testlere başvururlar. Klasik yöntemler, nuisance parametre içeren çok basit problemlerde dahi çoğu zaman tam olasılıklı çözüm sağlamazlar ve dahası küçük hacimli örneklemlerde böyle testlerin kullanılması uygulamacıları yanlış sonuçlara götürebilmektedir.

İkiden fazla anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için kullanılan klasik F testi anakütlelerin normal dağıldığı, varyansların eşitliği ve hataların bağımsızlığı varsayımlarına dayanır. Varyansların eşitliği varsayımı sağlanmadığında özellikle küçük hacimli örneklemlerde klasik F testi ciddi yanlışlıklara sebep olmaktadır.

Tsui ve Weerahandi (1989) nuisance parametrenin varlığında hipotez testleri için genelleştirilmiş test değişkeni ve genelleştirilmiş p-değeri kavramlarını tanıtmışlardır. Weerahandi (1993) genelleştirilmiş pivot değer ve genelleştirilmiş güven aralığı geliştirmiştir. Efron (1979) PB tahmin edicilerini kullanarak test istatistiğinin dağılımını bulmak için PB yöntemini önermiştir. Dağılımı nuisance parametreye bağlı klasik test istatistikleri kullanılarak tam olasılıklı çözümler elde edilemezken nuisance parametreden bağımsız dağılıma sahip genelleştirilmiş test değişkeni ve PB test değişkeni kullanılarak tam olasılıklı çözümler elde edilmiştir. GPD ve PB yöntemleri uygulamalı istatistikte pek çok problemin çözümü için kullanılmıştır.

Şimdi GPD ve PB yöntemleri ile ilgili temel tanımlar ve genel notasyon verilecektir (Casella ve Berger 2002; Weerahandi 2003; Öztürk ve ark. 2006).

2.1. Temel Tanımlar

$\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ rassal bir örneklem olsun. Burada n örneklem hacmi ve $X_1, \dots, X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı rassal değişkenlerdir. Örneklem uzayı Ξ

şeklinde ifade edilsin. $\boldsymbol{X}$'in dağılımı $\xi(\boldsymbol{\theta}, \eta)$ bilinmeyen parametrelere bağlı olsun. Burada $\boldsymbol{\theta}$ ilgilenilen parametre ve η bir nuisance parametredir. $f_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{X}$'in olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $F_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{X}$'in birikimli dağılım fonksiyonu olsun. $\boldsymbol{\theta}$'nın aldığı bütün değerlerinin kümesi Θ parametre uzayı olarak adlandırılsın. $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$'in gözlenen değeri $\mathbf{x} = (\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ şeklinde olsun. Bilinmeyen parametreye bağlı olmayan $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$ rassal vektörü istatistik olarak ifade edilsin. $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$ istatistiğinin gözlenen değeri $\boldsymbol{T}(\mathbf{x})$ veya kısaca $\boldsymbol{t}$ harfi ile gösterilecektir.

Yeterli İstatistik

$X_1, \dots, X_n$ dağılımı $\boldsymbol{\theta}$ bilinmeyen parametresine bağlı rassal bir örneklem olsun. Eğer $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{t}$ verildiğinde $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ koşullu dağılımı $\boldsymbol{\theta}$ bilinmeyen parametresine bağlı değil ise $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$ istatistiğine $\boldsymbol{\theta}$ parametresi için yeterli istatistik denir.

Tamlık

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$ istatistiği $\boldsymbol{\theta}$ parametresi için yeterli istatistik olmak üzere,

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta \text{ için } \mathrm{E}\big(h(T)\big) = 0 \Rightarrow P_\theta(h(T) = 0) = 1 \tag{2.1}$$

önermesi sağlanıyorsa $\boldsymbol{T}$'nin olasılık yoğunluk ailesi tamdır denir.

En çok olabilirlik yöntemi

En çok olabilirlik yöntemi, tahmin edicileri bulmak için kullanılan bir yöntemdir. $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ örnekleminin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(\boldsymbol{x}; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$ olmak üzere $\boldsymbol{X} = \mathbf{x}$ olarak gözlendiğinde θ'nın bir fonksiyonu olan,

$$L(\theta; \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}; \theta)\,, \qquad \theta \in \Theta \tag{2.2}$$

olabilirlik fonksiyonunu Θ parametre kümesi üzerinde maksimum yapan $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ değerine, var olması halinde θ'nın en çok olabilirlik tahmini ve $\hat{\theta}(\mathbf{X})$ istatistiğine de θ'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi denir.

Yansızlık

$\hat{\theta}(\boldsymbol{X})$, θ parametresi için bir tahmin edici ve her $\theta \in \Theta$ için,

$$E\left(\hat{\theta}(\boldsymbol{X})\right) = \theta \tag{2.3}$$

oluyorsa $\hat{\theta}(\boldsymbol{X})$ tahmin edicisine θ parametresi için yansız tahmin edici denir.

Düzgün minimum varyanslı yansız tahmin edici

θ parametresinin yansız tahmin edicilerinin sınıfı $\mathcal{T}$ olmak üzere bir $T^* \in \mathcal{T}$ için,

$$Var_\theta(T^*) \leq Var_\theta(T), \quad \forall\theta \in \Theta, T \in \mathcal{T} \tag{2.4}$$

ise T^* tahmin edicisine düzgün minimum varyanslı yansız tahmin edici denir.

Pivot değer

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{\boldsymbol{X}}(\mathbf{x}; \theta), \theta \in \Theta$ olan dağılımdan bir örneklem olsun. $Q(\boldsymbol{X}; \theta)$ rassal değişkeninin dağılımı bilinmeyen parametreye bağlı değil ise $Q(\boldsymbol{X}; \theta)$ rassal değişkenine θ için pivot değer denir.

Güven aralığı

$P_\theta[L(\boldsymbol{X}) \leq \theta \leq U(\boldsymbol{X})] = 1 - \alpha$ eşitliğini sağlayan $\boldsymbol{X}$'in fonksiyonları $L(\boldsymbol{X})$ ve $U(\boldsymbol{X})$ olduğunu varsayalım. $[L(\boldsymbol{X}), U(\boldsymbol{X})]$ aralığına θ parametresi için güven aralığı denir. Burada $1 - \alpha$ güven düzeyidir.

Test değişkeni

θ ve $\boldsymbol{X}$'in fonksiyonuna test değişkeni denir ve $T = T(\boldsymbol{X};\theta)$ şeklinde gösterilir. θ parametresinin değeri θ_0 olarak bilindiğinde $T = T(\boldsymbol{X};\theta_0)$ ifadesi bir test istatistiğidir. $\boldsymbol{X}$'in gözlenen değeri $\mathbf{x}$ ise $t_{obs} = T(\mathbf{x};\theta)$ değerine test değişkenin gözlenen değeri denir.

p-değer

$$H_0\colon \theta \leq \theta_0 \quad , \quad H_1\colon \theta > \theta_0 \tag{2.5}$$

hipotezleri ele alınsın. Burada θ_0, θ parametresinin herhangi bir değeridir. Gözlenen değerlere bağlı olarak H_0 yokluk hipotezinin red edileceği noktaların kümesine test istatistiğinin red bölgesi denir ve $C_{\boldsymbol{X}}$ ile gösterilir.

Sıfır hipotezinin reddedildiği en küçük anlam düzeyine eşit olan olasılık ölçümüne p-değer denir. $C_{\boldsymbol{X}}$ red bölgesi olmak üzere p-değer,

$$p = Sup_{\theta \leq \theta_0} P(\boldsymbol{X} \in C_{\boldsymbol{X}} \setminus \theta) \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır. $T = T(\boldsymbol{X};\theta)$ test değişkeni olmak üzere p-değer,

$$p = P(T \geq t_{obs} \setminus \theta = \theta_0) \tag{2.7}$$

biçiminde hesaplanır.

Lognormal dağılım

Pozitif ve sağa çarpık verilerle karşılaşıldığında lognormal dağılım çok sık kullanılır. Lognormal dağılım genellikle normal dağılımla ilişkilendirilir. X lognormal dağılan rassal bir değişken olsun. X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(lnx-\mu)^2}{2\sigma^2}\right);\ x > 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0 \quad (2.8)$$

biçiminde ifade edilir. Örneklem ortalaması μ ve örneklem varyansı σ^2 olan $Y = lnX{\sim}N(\mu,\sigma^2)$ şeklindeki rassal değişken ele alınsın. X rassal değişkeninin ortalaması aşağıdaki eşitlikte ifade edildiği gibi hem μ'ye hem de σ^2'ye bağlıdır.

$$E(X) = E\big(exp(Y)\big) = exp(\psi) \qquad \text{burada } \psi = \mu + \frac{\sigma^2}{2} \qquad (2.9)$$

t dağılım

$X{\sim}N(0,1)$ ve $Y{\sim}\chi_p^2$ olsun. Ayrıca X ve Y rassal değişkenleri bağımsız olduğu kabul edilsin. Bu durumda $T = X/\sqrt{Y/p}$ rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)(p\pi)^{1/2}} \frac{1}{(1+t^2/p)^{(p+1)/2}}, t \in \mathbb{R} \qquad (2.10)$$

biçimindedir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonu serbestlik derecesi p olan t dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

F dağılım

$X_1,\dots,X_n \sim N(\mu_X,\sigma_X^2)$ ve $Y_1,\dots,Y_n \sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$ şeklinde iki örneklem alınsın.

$$F=\frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} \tag{2.11}$$

rassal değişkeni $n-1$ ve $m-1$ serbestlik derecesi ile F dağılımına sahiptir denir. F rassal değişkeni p ve q serbestlik derecesi olmak üzere olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_F(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\left(\frac{p}{q}\right)^{p/2}\frac{x^{(p-2)/2}}{\left(1+\frac{p}{q}x\right)^{(p+q)/2}},x\in\mathbb{R}^+ \tag{2.12}$$

şeklinde olur.

2.2. Genelleştirilmiş Çıkarım

Pivot değer, güven aralığı, test değişkeni ve p-değerin genelleştirilmesine genelleştirilmiş çıkarım denir.

2.2.1. Genelleştirilmiş red bölgesi (GRB)

$T(\boldsymbol{X};\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ genelleştirilmiş test değişkeni olmak üzere,

$$C_X(\boldsymbol{\xi}) = \{\boldsymbol{X} \in \Xi : \ T(\boldsymbol{X}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \geq T(\mathbf{x}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\} \tag{2.13}$$

şeklindeki örneklem uzayının alt kümesine genelleştirilmiş red bölgesi denir.

2.2.2. Genelleştirilmiş test değişkeni (GTD)

Aşağıdaki üç özelliği sağlayan $T = T(\boldsymbol{X}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ rassal değişkenine genelleştirilmiş test değişkeni denir.

i) $t_{obs} = t(\mathbf{x}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ bilinmeyen parametre$y$e bağlı değildir.

ii) $T = T(\boldsymbol{X}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$'nin dağılımı nuisance parametreden bağımsızdır.

iii) $Pr(T \leq t; \theta)$ ifadesi θ'nın monoton fonksiyonudur. Burada t verilen herhangi bir değerdir.

2.2.3. Genelleştirilmiş *p*-değeri (GPD)

$H_0: \theta \leq \theta_0$ ve $H_a: \theta > \theta_0$ hipotezleri ele alınsın. Burada θ_0, θ'nın herhangi bir değeridir. Varsayalım ki $T(\mathbf{X}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ yukarıdaki hipotezler için genelleştirilmiş test değişkeni olsun. C_X genelleştirilmiş red bölgesi olmak üzere,

$$p = Sup_{\theta \leq \theta_0} P(X \in C_X(\xi) \setminus \theta) \tag{2.14}$$

ifadesine genelleştirilmiş p-değeri denir. Genelleştirilmiş p-değeri şu şekilde hesaplanır:

- Eğer $T(\boldsymbol{X}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ stokastik artan ise GPD= $Pr[\, T(\boldsymbol{X}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \geq t_{obs} \setminus \theta = \theta_0]$.
- Eğer $T(\boldsymbol{X}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ stokastik azalan ise GPD= $Pr[\, T(\boldsymbol{X}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq t_{obs} \setminus \theta = \theta_0]$.

$H_0: \theta \geq \theta_0$ ve $H_a: \theta < \theta_0$ hipotezleri ele alınsın. Burada θ_0, θ'nın herhangi bir değeridir. Varsayalım ki $T(\boldsymbol{X}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ yukarıdaki hipotezler için genelleştirilmiş test değişkeni olsun. Burada genelleştirilmiş p-değeri şu şekilde hesaplanır:

- Eğer $T(\boldsymbol{X};\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ stokastik artan ise GPD= $Pr[\,T(\boldsymbol{X};\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) \leq t_{obs} \setminus \theta = \theta_0]$.
- Eğer $T(\boldsymbol{X};\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ stokastik azalan ise GPD= $Pr[\,T(\boldsymbol{X};\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) \geq t_{obs} \setminus \theta = \theta_0]$.

2.2.4. Genelleştirilmiş pivot değeri (GPVD)

$\boldsymbol{X}$'in bir fonksiyonu $R = r(\boldsymbol{X};\mathbf{x},\xi)$ aşağıdaki iki özelliği sağlıyorsa genelleştirilmiş pivot değer denir.

iii) R, bilinmeyen parametreden bağımsız bir olasılık dağılımına sahiptir.

iv) Genelleştirilmiş pivot değerin gözlenen değeri $r_{obs} = r(\mathbf{x};\mathbf{x},\xi)$, nuisance parametresine bağlı değildir.

2.2.5. Genelleştirilmiş güven aralıkları (GGA)

$R = r(\boldsymbol{X};\mathbf{x},\xi)$ genelleştirilmiş pivot değeri ve γ güven düzeyi verildiğinde örnek uzayın alt kümesi C_γ;

$$P\left(R \in C_\gamma\right) = \gamma \tag{2.15}$$

eşitliğini sağlasın. Parametre uzayının alt kümesi Θ_C,

$$\Theta_C(r) = \left\{\theta \in \Theta \setminus\ r(\mathbf{x};\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) \in C_\gamma\right\} \tag{2.16}$$

şeklinde olsun. $\Theta_C(r)$ ifadesine θ için $\%100\gamma$'ıncı genelleştirilmiş güven aralığı denir.

3. VARYANSLARIN EŞİTLİĞİ VARSAYIMI SAĞLANMADIĞINDA ORTALAMALAR HAKKINDA İSTATİSTİKSEL ÇIKARIMLAR

İki normal anakütlenin ortalamalarının karşılaştırılması için kullanılan klasik *t* testi, ikiden fazla normal anakütlenin ortalamalarının karşılaştırılması için kullanılan klasik *F* testi gibi klasik testler varyansların eşitliği varsayımına dayanmaktadır. Bu varsayım sağlanmadığında klasik testler çoğu zaman araştırmacıları yanlış istatistiksel sonuçlara götürebilmektedir. Bu bölümde varyansların eşitliği varsayımı sağlanmadığında iki normal anakütlenin ortalamaları hakkında istatistiksel çıkarımlar, ikiden fazla normal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırma problemi ve iki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırma problemi ele alınacaktır.

3.1. İki Normal Anakütlenin Ortalamaları Hakkında İstatistiksel Çıkarımlar

İki normal anakütlenin ortalamaları hakkında sonuç çıkarmak için varyanslar eşit ve biliniyorsa istatistiksel çıkarım klasik yöntemlerle kolayca yapılır. Varyansların bilinmediği ve belki de eşit olmadığı durumlarda klasik yöntemlerle tam olasılıksal çıkarım yapmak oldukça zordur. Varyansların eşit olmadığı durumlarda iki normal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırma problemine Behrens-Fisher (BF) problemi denir. BF problemde iki normal anakütlenin ortalamaları hakkında istatistiksel sonuç çıkarma ile ilgilenirken bilinmeyen varyanslar nuisance parametrelerdir. Varyansların eşitliği varsayımı sağlanmadığında test istatistiğinin dağılımı hem ilgilenilen parametreye hem de nuisance parametrelere bağlıdır. Dolayısıyla klasik yöntemler kullanılarak test istatistiğinin dağılımını yaklaşık olarak bulunabilir. BF problemi 1930'lardan beri uygulamacılar tarafından çok karşılaşılan bir problemdir. Bu problem için tam olasılıklı çözüm elde etmek oldukça zor olduğundan literatürde çok sayıda klasik yöntem geliştirilmiştir. (Fisher 1935 ve 1941; Welch 1947; Aspin 1948; Cochran ve Cox 1950; Jing 1995). Klasik yaklaşımların çoğu zaman araştırmacıları yanlış sonuçlara götürdüğünden BF problemin çözümü için istatistiksel programlamaya dayalı çeşitli testler geliştirilmiştir. Tsui ve Weerahandi (1989) bu problem için Monte Carlo simülasyon tekniğine dayalı GPD yöntemini ileri sürmüştür. Chang ve Pal (2008) BF problem için parametrik bootstrap yöntemine benzer matematiksel hesaplamalara dayalı yeni bir test geliştirmişlerdir. Sezer ve ark. (2014) BF probleminin çözümü için verilen testleri üç örneklem için genişletmişler ve bu testleri kullanarak ikili karşılaştırmalar yapmışlardır.

$X_{i1}, \dots, X_{in_i}$ iid $N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1{,}2$ şeklinde normal anakütleden varyansları eşit olmayan ve birbirinden bağımsız iki örneklem alınsın. Burada $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ parametreleri bilinmeyen parametrelerdir.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \ , \ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \tag{3.1}$$

hipotezleri ele alınsın. $\bar{X}_1, \bar{X}_2, S_1^2$ ve S_2^2 tahminleri sırasıyla μ_1, μ_2, σ_1^2 ve σ_2^2'nin en çok olabilirlik tahmin edicileridir ve birbirlerinden bağımsızdırlar. Bu dört tahminci yeterli istatistik olduğu için bu tahmincilere dayanarak parametreler hakkında istatistiksel çıkarımlar yapılabilir. Burada aşağıdaki gibi iki örneklem ortalaması normal olarak dağılırken, iki örneklem varyansı ki-kare olarak dağılır,

$$\bar{X}_1 \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right), \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \tag{3.2}$$

ve

$$\frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n_1 - 1}, \frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n_2 - 1} \tag{3.3}$$

olur. $\bar{X}_1, \bar{X}_2, S_1^2, S_2^2$ tahmincilerinin gözlenen değerleri sırasıyla $\bar{x}_1, \bar{x}_2, s_1^2, s_2^2$ şeklindedir (Weerahandi 2002).

3.1.1. BF problemi için GPD yöntemi

Tsui ve Weerahandi (1989) tarafından nuisance parametrelerin varlığında BF probleminin çözümü için GPD yöntemi geliştirildi. Nuisance parametrenin varlığında klasik yaklaşımda test istatistiğinin dağılımı bilinmeyen parametrelere bağlıdır. Dolayısıyla klasik yaklaşımlar kullanılarak ancak yaklaşık çözümler elde edilir. Fakat nuisance parametrelerden bağımsız elde edilen genelleştirilmiş test değişkeni kullanılarak tam olasılıklı çözümler elde edilir. GPD yöntemi kullanılarak BF problemin çözümü için aşağıdaki şekilde tam olasılıklı çözüm elde edilir. $\theta = \mu_1 - \mu_2$ parametresi için genelleştirilmiş pivot değer,

$$\begin{aligned}
\theta &= \mu_1 - \mu_2 \\
&= \bar{x}_2 - \bar{x}_1 - \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1 - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \\
&= \bar{x}_2 - \bar{x}_1 - \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1 - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2 s_1^2}{n_1 S_1^2} + \frac{\sigma_2^2 s_2^2}{n_2 S_2^2}} \\
&= \bar{x}_2 - \bar{x}_1 - Z\sqrt{\frac{s_1^2}{U_1} + \frac{s_2^2}{U_2}} \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada Z, U_1 ve U_2,

$$Z = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1 - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1), \quad U_i = \frac{n_i S_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi^2_{(n_i-1)}, \qquad i = 1,2$$

biçiminde dağılan bağımsız rassal değişkenlerdir. Dikkat edilirse bu pivot değerin dağılımı bilinmeyen parametrelere bağlı değildir. Potansiyel genelleştirilmiş test değişkeni,

$$T = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 - Z\sqrt{\frac{s_1^2}{U_1} + \frac{s_2^2}{U_2}} - \theta \tag{3.5}$$

şeklinde olur. Bu potansiyel test değişkeni tanım 2.2.2'deki üç özelliği sağladığından genelleştirilmiş test değişkenidir. Genelleştirilmiş test değişkenin dağılımı H_0 hipotezinin doğruluğu altında Monte Carlo simülasyon tekniği ile bulunur. Bulunan bu dağılımın red bölgesinin olasılığı genelleştirilmiş p-değeri verir ve

$$p = P(T > t_{obs} \ \backslash \theta = 0) \tag{3.6}$$

şeklinde hesaplanır. Burada t_{obs}, T'nin gözlenen değeridir. Eğer α anlam düzeyi için $p < \alpha$ ise (3.1)'deki H_0 hipotezi reddedilir.

BF problemi için GPD yöntemine dayanan genelleştirilmiş güven aralığı Weerahandi (1993) tarafından geliştirildi. Eşitlik (3.5)'deki T'nin dağılımı bilinmektedir. Dolayısıyla $T(1-\alpha)$ değeri T'nin $\%100(1-\alpha)$ inci değeri olarak ifade edilirse θ parametresi için genelleştirilmiş üst güven sınırı $T(1-\alpha)$ ve genelleştirilmiş alt güven sınırı $T(\alpha)$ olur. θ parametresi için $\%100(1-\alpha)$ inci genelleştirilmiş güven aralığı $\big(T(\alpha/2), T(1-\alpha/2)\big)$ şeklinde ifade edilir.

3.1.2. BF probleminin çözümü için kullanılan testler

BF problemi çok yaygın olduğu için literatürde pek çok klasik çözüm geliştirilmiştir. Behrens (1929) ve Fisher (1935) BF problemi için eşitlik

(3.7)'deki test istatistiğini önermişlerdir ve bu istatistiğin Behrens-Fisher dağılımına sahip olduğunu ifade etmişlerdir,

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \tag{3.7}$$

Bu test istatistiği, örneklem varyansları S_1^2 ve S_2^2 farklı ve örneklem hacimleri n_1 ve n_2 küçük olduğu durumlarda dayanıklı değildir (Özkip ve ark. 2014a). Bu bölümde BF probleminin çözümü için sık kullanılan testler verilecektir.

Klasik t testi

Varyansların eşitliği $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma)$ varsayımı altında iki normal örneklemin ortalamalarını test etmek için klasik *t* testi çok sık kullanılır. Bu varsayım altında test istatistiği,

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S^2}} \tag{3.8}$$

şeklinde ifade edilir. Bu test istatistiği $n_1 + n_2 - 2$ serbestlik derecesi ile *t*-dağılımına sahiptir. Burada,

$$S^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1}\left(X_{1j} - \bar{X}_1\right) + \sum_{j=1}^{n_2}\left(X_{2j} - \bar{X}_2\right)}{n_1 + n_2 - 2}$$

ifadesi σ^2'nin yansız tahmincisidir. Varyansların eşitliği varsayımı bozulduğunda özellikle örneklem hacimleri faklı ise bu testin I. tip hata oranları anlam düzeyinden uzaklaşmaktadır.

Welch-Satterhwaite (WS) Testi

BF problemin çözümü için en fazla kullanılan test Welch (1938) ve Satterhwaite (1946) tarafından geliştirilen Welch-Satterhwaite (WS) testidir. Welch ve Satterhwaite eşitlik (3.7)'deki test istatistiğinin t dağıldığını ifade etmişlerdir. Fakat bu test istatistiğinin serbestlik derecesini eşitlik (3.9)'daki gibi önermişlerdir:

$$df = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_1}\right)^2}{n_2 - 1}} \tag{3.9}$$

Bu serbestlik derecesine dayanan WS güven aralığı;

$$I_{WS} = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{df}^* \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \tag{3.10}$$

biçiminde olur. Burada t_{df}^*, df serbestlik dereceli t dağılımın $(1-\alpha)$. değerine karşılık gelir.

Cochran-Cox (CC) Testi

WS testinden sonra en fazla bilinen test Cochran-Cox (1950) tarafından geliştirilen Cochran-Cox (CC) testidir. CC testi, WS testi gibi eşitlik (3.7)'deki test istatistiğine dayanmaktadır. Fakat bu test için kritik değer,

$$t_{CC} = \frac{t_1 \frac{S_1^2}{n_1} + t_2 \frac{S_2^2}{n_2}}{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \tag{3.11}$$

şeklinde olur. Burada t_1 ve t_2 sırasıyla $n_1 - 1$ ve $n_2 - 1$ serbestlik dereceli *t* dağılımının değerleridir. CC güven aralığı:

$$I_{CC} = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{CC} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \tag{3.12}$$

biçiminde ifade edilir.

Singh-Saxena-Srivastava (SSS) Testi

Singh ve ark. (2002) tarafından BF probleminin çözümü için yeni bir test istatistiği geliştirilmiştir. Bu test istatistiği,

$$t_{SSS} = nt_{m,(\alpha/2)} \tag{3.13}$$

biçiminde ifade edilmiştir. Burada t_m, m serbestlik dereceli t-dağılımını ifade eder ve

$$n = \left((s_1^2/n_1) + (s_2^2/n_2)\right)/\left((s_1^2/n_2) + (s_2^2/n_1)\right), \qquad m = \left((s_1^2/n_1) + (s_2^2/n_2)\right)^2/((s_1^2/n_2)^2/(n_1-1) + (s_2^2/n_1)^2/(n_2-1))$$

şeklinde olur. Bu testin, WS testinden farkı sadece örneklem hacimlerinin yerlerinin değiştirilmiş olmasıdır. SSS güven aralığı:

$$I_{SSS} = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{SSS}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_2} + \frac{S_2^2}{n_1}} \tag{3.14}$$

biçiminde ifade edilir.

3.1.3. PB yöntemine dayanan yeni bir test (PY)

PB yöntemi test istatistiğinin kolayca bulunamadığı durumlarda sıkça kullanılmıştır. Burada BF probleminin çözümü için PB yöntemine dayanan yeni bir test geliştirilmiştir. $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$ iid $N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1,2$ şeklinde normal anakütleden varyansları eşit olmayan ve birbirinden bağımsız iki örneklem alınsın. Burada $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ parametreleri bilinmeyen parametrelerdir.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2\ ,\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

şeklindeki eşitlik (3.1)' deki hipotezler ele alınsın. H_0 hipotezinin doğruluğu varsayımı altında $\bar{X}_{Bi} \sim N(0, S_i^2/n_i)$ ve $S_{Bi}^2 \sim S_i^2 \chi_{n_i-1}^2/(n_i-1)$, $i = 1,2$ şeklinde olsun. Eşitlik (3.7)'deki test istatistiğine dayanan PB pivot değişkeni,

$$T_{PY} = \frac{\bar{X}_{B1} - \bar{X}_{B2}}{\sqrt{\frac{S_{B1}^2}{n_1} + \frac{S_{B2}^2}{n_2}}} \tag{3.15}$$

biçiminde olur. Burada $\bar{X}_{Bi}$ ve S_{Bi}^2 sırasıyla $Z_i\left(S_i/\sqrt{n_i}\right)$ ve $\frac{S_i^2}{n_i-1}\chi_{n_i-1}^2$, $i = 1,2$ olarak dağıldığından PB pivot değişkeni,

$$\frac{Z_1\left(\frac{S_1}{\sqrt{n_1}}\right) - Z_2\left(\frac{S_2}{\sqrt{n_2}}\right)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1(n_1-1)}\chi_{n_1-1}^2 + \frac{S_2^2}{n_2(n_2-1)}\chi_{n_2-1}^2}} \tag{3.16}$$

şeklinde dağılır. (S_1^2, S_2^2)'in gözlenen değerleri (s_1^2, s_2^2) ve α anlam düzeyi verildiğinde,

$$P(T_{PY} > t_{obs}) < \alpha \tag{3.17}$$

ise (3.1)'deki H_0 hipotezi reddedilir. Burada t_{obs} eşitlik (3.7)'deki T'nin gözlenen değeridir. PB pivot değişkenin dağılımı, herhangi bir bilinmeyen parametreye bağlı değildir ve Monte Carlo simülasyon tekniği kullanılarak elde edilir. Bu pivot değişkene dayanan *p*-değeri aşağıdaki algoritma ile elde edilir.

Algoritma 1

Verilen (n_1, n_2), $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ve (s_1^2, s_2^2) değerleri için

Eşitlik (3.7)'deki $T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$ hesaplansın ve bu değer t_{obs} olarak ifade edilsin

Tekrar $j = 1, m$

Eşitlik (3.15)'deki $T_{PY} = \frac{\bar{X}_{B1}-\bar{X}_{B2}}{\sqrt{\frac{S_{B1}^2}{n_1}+\frac{S_{B2}^2}{n_2}}}$ değeri hesaplansın,

Eğer $T_{PY} > t_{obs}$ ise $K_j = 1$

(Tekrarı bitir)

$(1/m)\sum_{j=1}^{m} K_j$ ifadesinin sonucu p-değeri verir.

PB pivot değere dayanan PY güven aralığı,

$$I_{PY} = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm q_\alpha \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \quad (3.18)$$

şeklinde bulunur. Burada q_α, eşitlik (3.15)'deki PB pivot değişkeninin $(1 - \alpha)$'ıncı değerine karşılık gelir.

3.1.4. BF problemi için yeni bir genelleştirilmiş güven aralığı

Bu bölümde BF problemi için genelleştirilmiş çıkarıma dayanan yeni bir genelleştirilmiş güven aralığı verilecektir. $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$ iid $N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1,2$ şeklinde normal anakütleden varyansları eşit olmayan ve birbirinden bağımsız iki örneklem alınsın. Burada $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ parametreleri bilinmeyen parametrelerdir.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \ , \ H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

şeklindeki eşitlik (3.1)' deki hipotezler ele alınsın. Genelleştirilmiş güven aralıklarını bulmak için ilk önce genelleştirilmiş pivot değeri bulunur. Genelleştirilmiş pivot değeri bilinmeyen parametreye bağlı olmaması gerektiğinden,

$$Z_1 = \frac{\sqrt{n_1}(\bar{X}_1 - \mu_1)}{\sigma_1} \sim N(0,1), \qquad Z_2 = \frac{\sqrt{n_2}(\bar{X}_2 - \mu_2)}{\sigma_2} \sim N(0,1)$$

$$U_1 = \frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n_1-1} \text{ ve } U_2 = \frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n_2-1} \tag{3.19}$$

şeklindeki dağılan bağımsız rassal değişkenler kullanılır. Bu rassal değişkenler kullanılarak genelleştirilmiş pivot değeri R,

$$\begin{aligned} R = \mu_1 - \mu_2 &= \bar{x}_2 - \bar{x}_1 - \left(\frac{\bar{X}_2 - \mu_2}{\sqrt{\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sqrt{\frac{\sigma_2^2 s_2^2}{n_2 S_2^2}} - \frac{\bar{X}_1 - \mu_1}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2 s_1^2}{n_1 S_1^2}} \right) \\ &= \bar{x}_2 - \bar{x}_1 - \left(Z_2 \sqrt{\frac{s_2^2}{U_2}} - Z_1 \sqrt{\frac{s_1^2}{U_1}} \right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

biçimindedir. Burada

$$Z_i = \frac{\bar{X}_i - \mu_i}{\sqrt{\frac{\sigma_i^2}{n_i}}} \sim N(0,1) \quad , \quad U_i = \frac{n_i S_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi^2_{(n_i-1)}, \qquad i = 1,2$$

şeklindedir. Bu genelleştirilmiş pivot değerinin dağılımı bilinmeyen parametreden bağımsızdır. Eğer $R\,(1-\alpha)$ ifadesi R'nin $\%100(1-\alpha)$'ıncı değeri olarak alınırsa θ parametresi için genelleştirilmiş alt güven sınırı $R(1-\alpha)$ ve genelleştirilmiş üst güven sınırı $R\,(\alpha)$ olur. θ parametresi için $\%100(1-\alpha)$'ıncı genelleştirilmiş güven aralığı $\left(R\,(\alpha/2), R\,(1-\alpha/2)\right)$ biçiminde olur.

Eşitlik (3.20)'de ifade edilen genelleştirilmiş pivot değere dayanan genelleştirilmiş güven aralığı aşağıdaki algoritma kullanarak bulunur,

Algoritma 2

Verilen (n_1, n_2), $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ve (s_1^2, s_2^2) değerleri için

Tekrar $i = 1{:}\ m$

$Z_i \sim N(0,1), U_i \sim \chi^2_{(n_i-1)},\ i = 1,2$ değerleri üredilsin,

Eşitlik (3.20)'deki $R = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 - \left(Z_2 \sqrt{\frac{s_2^2}{U_2}} - Z_1 \sqrt{\frac{s_1^2}{U_1}} \right)$ hesaplansın,

(Tekrarı bitir)

Yukarıdaki algoritmada bulunan R değerleri sıralansın. Bu sıralamada R' nin $\%100(\alpha/2\,)$'ıncı ve $\%100(1-\alpha/2)$'ıncı değerleri bulunsun. Bu değerler sırasıyla alt sınır ve üst sınır $R_{(l)}$ ve $R_{(u)}$ şeklinde ifade edilsin. θ için genelleştirilmiş güven aralığı $\left[R_{(l)}, R_{(u)}\right]$ şeklinde olur.

3.2. Tek Yönlü Varyans Analizi (ANOVA)

Varyansların eşitliği varsayımı sağlanmadığında ikiden fazla normal anakütlenin ortalamalarının eşitliğini test etme problemi çok sık karşılaşılan bir problemdir. Anakütlelerin normal dağıldığı, varyansların eşitliği ve hataların bağımsızlığı varsayımları sağlandığında ANOVA için klasik F testi kullanılır. Bu varsayımlardan özellikle varyansların eşitliği varsayımı sağlanmadığında klasik F testi araştırmacıları yanlış sonuçlara götürür. Yapılan simülasyon çalışmalarına göre varyansların ve örneklem hacimlerinin eşit olmadığı durumlarda klasik F testinin I. tip hata oranları anlam düzeyinin ya çok altında ya da çok üstündedir (Krutchkoff 1988; Lee ve Ahn 2003; Weerahandi 2003). Örneklem hacimleri eşit olsa dahi varyansların eşit olmadığı durumlarda klasik F testi dayanıklı değildir (Rogan ve Keselman 1977).

Varyansların eşit olmadığı durumda klasik F testinin yerine çeşitli testler önerilmiştir. Örneğin Welch (1951) BF problemi için sunduğu testi k tane normal anakütlenin ortalamalarının eşitliğini test etmek için genelleştirmiştir. Scott ve Smith (1971) klasik bir test önermişlerdir. Brown ve Forsythe (1974) klasik F testi modifiye ederek yeni bir test geliştirmişlerdir. Fakat bu testler nuisance parametrelerin varlığından dolayı özellikle küçük hacimli örneklemlerde tam olasılıklı çözüm sağlamazlar.

Nuisance parametrelerden kaynaklanan problemi gidermek için Weerahandi (1995) tarafından GPD yöntemine dayanan genelleştirilmiş F (GF) testi geliştirilmiştir. GF testi için öncelikle nuisance parametreden bağımsız genelleştirilmiş test değişkeni elde edilir. Simülasyon yardımı ile bu genelleştirilmiş test değişkenin red bölgesi bulunur. Bu red bölgesinin olasılığı genelleştirilmiş p-değerini verir. Gamage ve Weerahandi (1998) GF testi ile literatürdeki diğer testlerin I. tip hata oranlarını bir simülasyon çalışmasıyla karşılaştırmışlardır. Simülasyon sonuçlarına göre orta ve büyük hacimli örneklemlerde Welch ve GF testlerinin I. tip hata oranları diğer testlere göre anlam düzeyine daha yakın olduğu ortaya çıkmıştır. Krishnamoorthy ve ark. (2007) tarafından PB testi geliştirilmiştir ve bu test diğer testlerle bir simülasyon çalışmasıyla karşılaştırılmıştır. Özellikle küçük hacimli örneklemlerde PB testin I. tip hata oranlarının anlam düzeyine daha yakın olduğu ifade edilmiştir. Xu ve Wang (2008) yeni bir GPD yöntemi elde etmişlerdir ve bu yeni GPD yönteminin I. tip hatalarının GF testinden anlam düzeyine daha yakın olduğunu ileri sürmüşlerdir. Li ve ark. (2011) Fisher'in fiducial yaklaşımı ile GPD yöntemini birleştirerek yeni bir test istatistiği geliştirmişlerdir. Chang ve Pal (2010) ANOVA için matematiksel hesaplamaya dayalı yeni bir test geliştirmişlerdir. Varyansların farklı olduğu durumda tek yönlü ANOVA için GPD ve PB yöntemleri ile ilgili çeşitli simülasyon çalışmaları yapılmıştır (Yiğit ve Gökpınar 2010; Yazıcı ve ark. 2012b; Özkip ve ark. 2014b). Bu simülasyon çalışmasına göre GPD ve PB yöntemlerinin performansının diğer testlerden çoğu durumda daha yüksek olduğu ifade edilmiştir. Yazıcı ve ark. (2012a) GPD yöntemine dayanan testler ile bazı klasik testleri kullanarak varyansların farklı olduğu durumda Türkiye'nin farklı bölgelerinin sıcaklık verileri ile ilgili bir uygulama çalışması yapmışlardır. Özkip ve ark. (2013a) anakütleler çarpık dağıldığında ANOVA için uygulanan testlerin performansını incelemişlerdir.

3.2.1. Tek yönlü ANOVA problemi

$X_{i1},\dots,X_{in_i}$ iid $N(\mu_i,\sigma_i^2), 1 \le i \le k,\ i = 1,\dots,k$ şeklinde normal dağılan k tane örneklem ele alınsın. $\bar{X}_i$ ve S_i^2 sırasıyla örneklem ortalaması ve örneklem varyansı,

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{i=1}^{n_i} X_{ij} \ \text{ ve } \ S_i^2 = \frac{1}{(n_i-1)}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij}-\bar{X}_i\right)^2, i = 1,\dots,k$$

şeklinde olsun. Burada $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\dots,\mu_k), \boldsymbol{\sigma^2} = (\sigma_1^2,\dots,\sigma_k^2), \overline{\boldsymbol{X}} = (\bar{X}_1,\dots,\bar{X}_k)$ ve $\boldsymbol{S^2} = (S_1^2,\dots,S_k^2)$ şeklinde ifade edilsin. İlgilenilen hipotezler,

$$H_0\colon \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k \text{ ve } H_1\colon\ \mu_i \ne \mu_j \text{ En az bir çift } (i,j) \text{ için} \quad (3.21)$$

biçimindedir. σ_i^2 bilindiği zaman,

$$T(\overline{\boldsymbol{X}};\sigma^2) = \sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{\sigma_i^2}\left\{(\bar{X}_i-\mu_i) - \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{X}_i-\mu_i)/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i/\sigma_i^2}\right\}^2 \sim\chi^2_{(k-1)} \quad (3.22)$$

test istatistiği kullanılabilir ve p-değer kolayca bulunur. Fakat σ_i^2 bilinmediği zaman σ_i^2 yerine tahmincisi S_i^2 yerleştirilirse test istatistiği,

$$T(\overline{\boldsymbol{X}};\boldsymbol{S^2}) = \sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{S_i^2}\left\{(\bar{X}_i-\mu_i) - \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{X}_i-\mu_i)/S_i^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i/S_i^2}\right\}^2 \quad (3.23)$$

biçiminde olur. H_0 hipotezinin doğruluğu varsayımı altında test istatistiği,

$$T(\bar{\boldsymbol{X}};\boldsymbol{S}^2)=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{S_i^2}\left\{(\bar{X}_i)-\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{X}_i)/S_i^2}{\sum_{i=1}^{k}n_i/S_i^2}\right\}^2 \qquad (3.24)$$

şeklinde ifade edilir. Aşağıdaki bölümlerde varyansların eşitliği varsayımı sağlanmadığında tek yönlü ANOVA için GPD ve PB yöntemlerine dayanan testler ile literatürdeki diğer testler ele alınacaktır.

3.2.2. GPD yöntemine dayanan test

Varyansların eşitliği varsayımı sağlanmadığında ANOVA için Weerahandi (1995) GPD yöntemini kullanarak GF testi geliştirmiştir. Varyansların farklı olduğu durumlarda (3.21)'deki hipotezleri test etmek için klasik testler kullanarak tam olasılıklı çözüm elde edilemezken nuisance parametreden bağımsız elde edilen genelleşmiş test değişkenine dayanan GF testi kullanılarak tam olasılıklı çözüm elde edilir. Weerahandi (1995) nuisance parametrenin varlığından dolayı oluşan problemi gidermek için öncelikle eşitlik (3.25)'deki gibi gruplar arası kareler toplamını standartlaştırmıştır,

$$T_N=T_N(\bar{X}_1,\dots,\bar{X}_k;\sigma_1^2,\dots,\sigma_k^2)=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i\bar{X}_i^2}{\sigma_i^2}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i\bar{X}_i^2}{\sigma_i^2}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{\sigma_i^2}}\sim\chi^2_{(k-1)} \qquad (3.25)$$

$V_i=(n_i-1)S_i^2$ olsun. σ_i^2 varyansının tahmincisi S_i^2 kullanılarak genelleştirilmiş test değişkeni,

$$T_{GF}=\frac{T(\bar{\boldsymbol{X}};\sigma^2)}{T(\bar{\mathbf{x}};s_1^2\sigma_1^2/S_1^2,\dots,s_k^2\sigma_k^2/S_k^2)}$$

$$=\frac{T_N(\bar{X}_1,\dots,\bar{X}_k;\sigma_1^2,\dots,\sigma_k^2)}{T_N(\bar{\mathrm{x}}_1,\dots,\bar{\mathrm{x}}_\mathrm{k};(n_1-1)s_1^2/U_1,\dots,(n_k-1)s_k^2/U_k)}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n_i\bar{X}_i}{\sigma_i^2}\right)-\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n_i\bar{X}_i}{\sigma_i^2}\right)\right]^2\Big/\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n_i}{\sigma_i^2}\right)}{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n_iU_i}{v_i^2}\right)\bar{x}_i^2-\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n_iU_i}{v_i^2}\right)\bar{x}_i^2\right]^2\Big/\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n_iU_i}{v_i^2}\right)} \qquad (3.26)$$

şeklindedir. Burada $U_i=(n_i-1)S_i^2/\sigma_i^2\sim\chi^2_{(k-1)}$, $i=1,\dots,k$ birbirinden bağımsız rassal değişkenlerdir ve $\bar{\mathrm{x}}_i$, $\bar{X}_i$ örneklem ortalamasının gözlenen değeridir. Buna göre genelleştirilmiş p-değer,

$$p=Pr(T_{GF}\geq t_{obs})$$

$$=Pr[(\bar{\boldsymbol{X}};\sigma^2)\geq T\{\bar{\mathbf{x}};(n_1-1)s_1^2/U_1,\dots,(n_k-1)s_k^2/U_k\}]$$

$$=1-E\left[\chi^2_{(k-1)}\left[T\left\{\bar{\mathbf{x}};\frac{(n_1-1)s_1^2}{U_1},\dots,\frac{(n_k-1)s_k^2}{U_k}\right\}\right]\setminus U_1,\dots,U_k\right] \qquad (3.27)$$

biçiminde bulunur. Burada t_{obs} eşitlik (3.26)'daki T_{GF}'nin gözlenen değeridir ve $\chi^2_{(k-1)}$, $k-1$ serbestlik dereceli χ^2 dağılımının birikimli dağılım fonksiyonudur. Eşitlik (3.27)'deki p-değeri Monte Carlo simülasyon tekniği kullanılarak bulunur. Buna göre α anlam düzeyi olmak üzere $p<\alpha$ olduğunda H_0 hipotezi reddedilir.

3.2.3. PB yöntemine dayanan test

PB yöntemi karmaşık matematik formüllerden uzak, sınırlı varsayımlara dayalı, anlaşılması ve kullanılması kolay bir yöntemdir (Simon ve Bruce 1991). Bu yöntem özellikle örneklem istatistiklerinin kolay bulunamadığı durumlarda kullanılır. Krishnamoorthy ve ark. (2007) tarafından varyansların eşit olmadığı durumlarda k tane normal anakütlenin ortalamalarının eşitliğini test etmek için PB testi geliştirilmiştir. Bu yönteme göre sıfır hipotezinin doğruluğu altında eşitlik (3.22)' deki σ_i^2 yerine S_i^2 kullanılırsa,

$$\tilde{S}_b = \tilde{S}_b(\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2) = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i \bar{X}_i^2}{S_i^2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i \bar{X}_i^2}{S_i^2}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{S_i^2}} \qquad (3.28)$$

şeklinde olur. PB değişkenleri,

$$\bar{X}_{Bi} \sim N\left(0, \frac{S_i^2}{n_i}\right) \quad \text{ve} \quad S_{Bi}^2 \sim \frac{\chi_{n_i-1}^2}{(n_i-1)}, i = 1, \dots, k$$

şeklinde tanımlanır. (3.28) eşitliğinde $\bar{X}_i$ ve S_i^2'nin yerine $\bar{X}_{Bi}$ ve S_{Bi}^2 değişkenleri yazılırsa PB test değişkeni,

$$\tilde{S}_{PB} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i \bar{X}_{Bi}^2}{S_{Bi}^2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i \bar{X}_{Bi}^2}{S_{Bi}^2}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{S_{Bi}^2}} \qquad (3.29)$$

şeklinde olur. Burada Z_i standart normal dağılan rassal değişken olmak üzere $\bar{X}_{Bi} \sim Z_i \left(\frac{S_i}{\sqrt{n_i}}\right)$ biçiminde olur. Eşitlik (3.29)'de gerekli düzenlemeler yapıldığında PB test değişkeni,

$$\tilde{S}_{PB}\left(Z_i, \chi_{n_i-1}^2; S_i^2\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{Z_i^2(n_i-1)}{\chi_{n_i-1}^2} - \frac{\left[\sum_{i=1}^{k} \frac{\sqrt{n_i} Z_i (n_i-1)}{S_i^2 \chi_{n_i-1}^2}\right]^2}{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(n_i-1)}{S_i^2 \chi_{n_i-1}^2}} \qquad (3.30)$$

biçiminde dağılır ve anlam düzeyi α olmak üzere,

$$P\{\tilde{S}_{PB}(Z_i, \chi^2_{n_i-1}; s_i^2) > \tilde{s}_{PB}\} < \alpha \tag{3.31}$$

ise ortalamaların eşitliği hipotezi, H_0 reddedilir. Burada $\tilde{s}_{PB}$, $\tilde{S}_{PB}$' nin gözlem değeridir.

3.2.4. Tek yönlü ANOVA problemi için kullanılan testler

Varyansların farklı olduğu durumda ikiden fazla normal anakütlenin ortalamalarının eşitliğini test etmek için pek çok test geliştirilmiştir. Bu bölümde tek yönlü ANOVA için kullanılan bazı testler verilecektir.

Welch (W) Testi

Welch (1951) BF probleminin çözümü için geliştirdiği testi, k tane örneklem için genelleştirmiştir. Bu test pratik olduğu için pek çok uygulamada sıklıkla kullanılmıştır. Welch test istatistiği,

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i[(\bar{X}_i - \bar{X})^2/(k-1)]}{1 + \frac{2(k-2)}{k^2-1}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i-1}\left(1 - \frac{w_i}{\sum w_j}\right)^2} \tag{3.32}$$

şeklindedir. Burada $w_i = \frac{n_i}{S_i^2}$ biçiminde ifade edilir. Sıfır hipotezinin doğruluğu altında W test istatistiğinin dağılımı $k-1$ ve f serbestlik dereceli F dağılımına yakınsamaktadır. Burada f,

$$f = \frac{1}{\frac{3}{k^2 - 1} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i - 1} \left(1 - \frac{w_i}{\sum w_j}\right)^2} \tag{3.33}$$

olarak ifade edilir. W test istatistiğinin gözlenen değeri w ve anlam düzeyi α olmak üzere,

$$P\left(F_{k-1,f} > w\right) < \alpha \tag{3.34}$$

ise ortalamaların eşitliği hipotezi, H_0 reddedilir.

Scott-Smith (SS) Testi

Scott ve Smith (1971) tarafından varyansların eşit olmadığı durumlarda k tane normal anakütlenin ortalamalarının eşitliğini test etmek için,

$$F_s = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2}{S_i^{*2}} \tag{3.35}$$

test istatistiği önerilmiştir. Burada $S_i^{*2} = \frac{n_i - 1}{n_i - 3} S_i^2$ olarak tanımlanır. Sıfır hipotezinin doğruluğu altında F_s istatistiği k serbestlik dereceli χ^2 dağılımına yakınsamaktadır. Buna göre F_s istatistiğinin gözlenen değeri f_s ve anlam düzeyi α olmak üzere,

$$P(F_s > f_s) < \alpha \tag{3.36}$$

ise ortalamaların eşitliği hipotezi, H_0 reddedilir.

Brown-Forsythe (BF) Testi

Brown ve Forsythe (1974) varyansların eşit olmadığı durumlarda k tane normal anakütlenin ortalamalarının eşitliğini test etmek için klasik F testi modifiye ederek,

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{n_i}{n}\right) S_i^2} \tag{3.37}$$

test istatistiğini önermişlerdir. Sıfır hipotezinin doğruluğu altında B istatistiği $k-1$ ve v serbestlik dereceli F dağılımına yakınsamaktadır. Burada v,

$$v = \frac{\left[\sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{n_i}{n}\right) S_i^2\right]^2}{\sum_{i=1}^{k} \frac{\left(1 - \frac{n_i}{n}\right)^2 S_i^4}{n_i - 1}} \tag{3.38}$$

şeklinde tanımlanır. B istatistiğinin gözlenen değeri b ve anlam düzeyi α olmak üzere,

$$P\left(F_{k-1,v} > b\right) < \alpha \tag{3.39}$$

ise ortalamaların eşitliği hipotezi, H_0 reddedilir.

GPD Yöntemine Dayanan Fiducial Yaklaşım (FY)

Li ve ark. (2011) varyansların eşit olmadığı durumlarda k tane normal anakütlenin ortalamalarının eşitliğini test etmek için Fisher'in fiducial yaklaşımı ile GPD yöntemini birleştirerek yeni bir test istatistiği geliştirmişlerdir. Bunun için,

$$U_{1i} \sim N(0,1) \text{ ve } U_{2i} \sim \chi^2_{n_i-1}, \quad i = 1, \dots, k$$

şeklinde birbirinden bağımsız rassal değişkenler ele alınsın.

$$\bar{X}_i \sim N\left(\mu_i, \frac{\sigma_i^2}{n_i}\right) \text{ ve } (n_i - 1)\, S_i^2 \sim \chi^2_{n_i-1}\sigma_i^2$$

istatistikleri U_{1i} ve U_{2i} fonksiyonları cinsinden ifade edilirse,

$$\bar{X}_i = \mu_i + \frac{\sigma_i^2}{n_i} U_{1i} \text{ ve } (n_i - 1) S_i^2 = \sigma_i^2 U_{2i}, \quad i = 1,2, \dots, k \tag{3.40}$$

şeklinde olur. Bu iki eşitlik ortak çözüldüğünde,

$$\mu_i = \bar{X}_i - \frac{U_{1i}}{\sqrt{U_{2i}/(n_i - 1)}} \sqrt{\frac{S_i^2}{n_i}} \text{ ve } \sigma_i^2 = \frac{(n_i - 1) S_i^2}{U_{2i}} \tag{3.41}$$

biçiminde olur. $(\bar{X}_i, S_i^2)$ gözlenen değeri $(\bar{x}_i, s_i^2)$ verildiğinde μ_i'nin fiducial dağılımı,

$$T_{\mu_i} = \bar{x}_i - t_i\sqrt{s_i^2/n_i} \quad i = 1,2,\dots,k \tag{3.42}$$

şeklinde elde edilir. Burada $t_i \sim t(n_i - 1),\ i = 1,2,\dots,k$ biçimindedir. Eşitlik (3.22)'deki test istatistiğinin fiducial dağılımı,

$$T_F(t; s^2) = \sum_{i=1}^{k} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\sqrt{n_i}}{s_i} t_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{s_i^2}} \tag{3.43}$$

şeklinde olur. T_F'nin gözlenen değeri $T(x; s^2)$ olmak üzere sıfır hipotezinin doğruluğu altında p-değer,

$$p = Pr\{T_F \geq T(x; s^2)\} \tag{3.44}$$

biçiminde bulunur. Buna göre anlam düzeyi α olmak üzere $p < \alpha$ ise ortalamaların eşitliği hipotezi, H_0 reddedilir.

3.3. İki Lognormal Anakütlenin Ortalamalarının Karşılaştırılması

Pozitif ve sağa çarpık verilerle karşılaşıldığında lognormal dağılım çok sık kullanılır. Lognormal dağılım genellikle normal dağılımla ilişkilendirilir ve uygulamalarda çok sık karşılaşılır. İki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için Zhou ve ark. (1997) parametrik bootstrap ve likelihood yaklaşımlarına dayanan iki yeni yöntem geliştirmişlerdir. Wu ve ark. (2002) iki yeni likelihood yaklaşımı önermişleridir. Krisnamoorthy ve Mathew (2003) GPD yöntemini kullanarak iki lognormal anakütlenin ortalamaları hakkında tam olasılıklı çözümler ve güven aralıkları elde etmişlerdir. Abdollahnezhad ve ark. (2012) genelleştirilmiş yaklaşımını kullanarak yeni bir GPD yöntemi geliştirmişlerdir. Özkip ve ark. (2012a) örneklem hacimlerinin ve varyansların farklı ve eşit olduğu durumlarda GPD yöntemini kullanarak lognormal anakütlelerin ortalamaları hakkında çeşitli istatistiksel çıkarımlar yapmışlardır. Jafari ve Abdollahnezhad (2014) simülasyon yardımı ile matematiksel hesaplamalara dayalı yeni bir yöntem önermişlerdir. Özkip ve ark. (2012b) varyansların farklı olduğu durumlarda ikiden fazla lognormal dağılan anakülenin ortalamalarının eşitliğini test etme problemi ile ilgili bir simülasyon çalışması yapmışlardır.

X lognormal dağılan rassal bir değişken olsun. X rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(lnx-\mu)^2}{2\sigma^2}\right); x > 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0 \quad (3.45)$$

biçiminde olur. Örneklem ortalaması μ ve örneklem varyansı σ^2 olan $Y = lnX \sim N(\mu, \sigma^2)$ şeklindeki rassal değişken ele alınsın. X rassal değişkenin ortalaması,

$$E(X) = E\big(exp(Y)\big) = exp(\psi) \qquad \text{burada } \psi = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$$

şeklinde ifade edilir. Hem μ'ye hem de σ^2'ye bağlı olan lognormal dağılımın ortalaması hakkında tam olasılıklı çözüm üredmek ve güven aralıkları elde etmek oldukça zordur. X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız iki lognormal dağılan rassal değişkenler olsun. Bu iki rassal değişkenin logaritması alınarak,

$$Y_1 = In(X_1) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \quad \text{ve} \quad Y_2 = In(X_2) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

şeklinde iki normal dağılan rassal değişkenler elde edilir. $E(X_1) = exp(\psi_1)$ ve $E(X_2) = exp(\psi_2)$ olacak şekilde

$$\psi_1 = \mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2} \quad \text{ve} \quad \psi_2 = \mu_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}$$

parametreleri ele alınsın. Bu parametreler hakkındaki hipotezler,

$$H_0: \psi_1 \leq \psi_2, \;\; H_1: \psi_1 > \psi_2 \tag{3.46}$$

biçiminde olsun. Y_1 ve Y_2 rassal değişkenlerinin sırasıyla örneklem ortalaması ve örneklem varyansları,

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}, \qquad S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_i\right)^2, \qquad i = 1,2$$

şeklinde olsun. Burada $\bar{Y}_i$ ve S_i^2 rassal değişkenleri bağımsız ve

$$\bar{Y}_i \sim N\left(\mu_i, \frac{\sigma_i^2}{n_i}\right), \qquad \frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi^2_{(n_i-1)}, \qquad i = 1,2$$

biçiminde dağılır. ψ_1 ve ψ_2 parametreleri için yansız tahminciler,

$$\hat{\psi}_1 = \bar{Y}_1 + \frac{S_1^2}{2} \qquad \text{ve} \qquad \hat{\psi}_2 = \bar{Y}_2 + \frac{S_2^2}{2}$$

şeklinde olur. $\hat{\psi}_1 - \hat{\psi}_2$ için varyans,

$$\mathrm{var}\left(\hat{\psi}_1 - \hat{\psi}_2 \right) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1^4}{(n_1 - 1)} + \frac{\sigma_2^4}{(n_2 - 1)} \right) \tag{3.47}$$

biçimindedir ve bu varyansın yansız tahmincisi,

$$\mathrm{var}\left(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 + \frac{S_1^2}{2} - \frac{S_2^2}{2} \right) = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{S_1^4}{(n_1 + 1)} + \frac{S_2^4}{(n_2 + 1)} \right) \tag{3.48}$$

şeklinde olur.

3.3.1. İki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için kullanılan testler

Bu bölümde iki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için Zhou ve ark. (1997)'nın büyük örneklem testi, Krisnamoorthy ve Mathew (2003) tarafından geliştirilen test, Abdollahnezhad ve ark. (2012) tarafından önerilen test verilecektir.

Büyük Örneklem (Z) Testi

Zhou ve ark. (1997) iki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için büyük örneklem testi geliştirmişlerdir. Bu klasik yönteme göre σ_1^2 ve σ_2^2 varyanslarının yansız tahmincileri S_1^2 ve S_2^2 kullanılarak test istatistiği,

$$T_Z = \frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1 + \frac{1}{2}(S_2^2 - S_1^2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{S_1^4}{(n_1 - 1)} + \frac{S_2^4}{(n_2 - 1)}\right)}} \tag{3.49}$$

biçiminde ifade edilir. Bu test istatistiği H_0 hipotezinin doğruluğu altında yaklaşık olarak normal dağılır. Buna göre *p*-değer,

$$p_Z = \Phi(T_Z) \tag{3.50}$$

şeklinde bulunur. Burada $\Phi(.)$, $N(0,1)$ dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonudur. Buna göre α anlam düzeyi olmak üzere $p < \alpha$ ise ortalamaların eşitliği hipotezi, H_0 reddedilir.

Krishnamoorthy ve Mathew (KM) Testi

Krishnamoorthy ve Mathew (2003) iki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için GPD yöntemine dayanan yeni bir test geliştirmişlerdir. Buna göre,

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{i=1}^{n} Y_{ij}, \qquad S_i^2 = \frac{1}{(n_i - 1)}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_i\right)^2, \qquad i = 1,2$$

yeterli istatistiklerine dayanan pivot değer,

$$\begin{aligned} T_i &= \bar{y}_i - \frac{\bar{Y}_i - \mu_i}{S_i/\sqrt{n_i}}\frac{s_i}{\sqrt{n_i}} + \frac{1}{2}\frac{\sigma_i^2}{S_i^2}s_i^2 \\ &= \bar{y}_i - \frac{Z_i}{U_i/\sqrt{n_i - 1}}\frac{s_i}{\sqrt{n_i}} + \frac{1}{2}\frac{s_i^2}{U_i^2/(n_i - 1)}, \qquad i = 1,2 \end{aligned} \tag{3.51}$$

şeklinde olsun. Burada Z_i ve U_i^2,

$$Z_i = \frac{\sqrt{n_i}(\bar{Y}_i - \mu_i)}{\sigma_i} \sim N(0,1)$$

$$U_i^2 = (n_i - 1)S_i^2/\sigma_i^2 \sim \chi^2_{n_i-1}, \quad i = 1,2$$

şeklinde dağılan bağımsız rassal değişkenlerdir. Dikkat edilirse bu pivot değerin dağılımı bilinmeyen parametreye bağlı değildir. $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ ve (s_1^2, s_2^2) sırasıyla $(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2)$ ve (S_1^2, S_2^2)'nin gözlenen değerleridir. Buna göre (3.46)'daki hipotezler için genelleştirilmiş test değişkeni,

$$T_{KM} = T_1 - T_2 - (\psi_1 - \psi_2) \tag{3.52}$$

şeklinde olur. Bu genelleştirilmiş test değişkenine dayanan genelleştirilmiş p-değer;

$$p = P(T_{KM} \leq 0 \setminus \psi_1 - \psi_2 = 0) \tag{3.53}$$

biçiminde bulunur. Buna göre α anlam düzeyi olmak üzere $p < \alpha$ ise ortalamaların eşitliği hipotezi, H_0 reddedilir.

Abdollahnezhad ve Ark. (AB) Testi

Abdollahnezhad ve ark. (2012) iki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için GPD yöntemini kullanarak yeni bir genelleştirilmiş test değişkeni önerdiler. μ_i ve $\sigma_i^2 (i = 1,2)$ parametreleri için maksimum olabilirlik tahmincileri sırasıyla,

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{i=1}^{n} Y_{ij}, \qquad S_i^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{i=1}^{n} \left(Y_{ij} - \bar{Y}_i\right)^2, \; i = 1,2$$

şeklinde olsun. Bu tahmincileri kullanarak genelleştirilmiş pivot değer,

$$\begin{aligned}
R_{AB} &= \mu_1 - \mu_2 + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \\
&= \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{2.} + \frac{\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{1.} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} + \frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2}} \\
&= \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{2.} + \frac{\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{1.} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2 s_1^2}{n_1 S_1^2} + \frac{\sigma_2^2 s_1^2}{n_2 S_2^2} + \frac{\sigma_1^2 s_1^2}{2 S_1^2} - \frac{\sigma_2^2 s_1^2}{2 S_2^2}} \\
&= \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{2.} + Z \sqrt{\frac{s_1^2}{U_1} + \frac{s_2^2}{U_2} + \frac{n_1 s_1^2}{2U_1} - \frac{n_2 s_2^2}{2U_2}} \qquad (3.54)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada Z ve U_i,

$$Z = \frac{\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{1.} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \;, \qquad U_i = \frac{n_i S_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi^2_{(n_i - 1)}, i = 1,2$$

şeklinde dağılan birbirinden bağımsız rassal değişkenlerdir. Bu pivot değerin dağılımı bilinmeyen parametrelere bağlı değildir. Potansiyel genelleştirilmiş test değişkeni,

$$T_{AB} = R_{AB} - (\psi_1 - \psi_2) \tag{3.55}$$

biçiminde ifade edilir. Bu test değişkeni tanım 2.2.2' deki üç özelliği sağladığından genelleştirilmiş test değişkenidir. Buna göre (3.46)'daki hipotezler için genelleştirilmiş p-değeri,

$$\begin{aligned} p &= P(T \leq t_{obs} \setminus \psi_1 - \psi_2 = 0) \\ &= E\left(\Phi\left(\frac{\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{1.} + \frac{n_2 s_2^2}{2U_2} - \frac{n_1 s_1^2}{2U_1}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{U_1} + \frac{s_2^2}{U_2}}}\right)\right) \end{aligned} \tag{3.56}$$

şeklinde bulunur. Burada $\Phi(.)$, $N(0,1)$ dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonudur Buna göre α anlam düzeyi olmak üzere $p < \alpha$ ise ortalamaların eşitliği hipotezi, H_0 reddedilir.

3.3.2. PB yöntemine (PBY) dayanan yeni bir test

Nuisance parametrenin varlığında hipotez testleri ve güven aralıkları için PB yöntemi başarılı bir şekilde kullanıldı (Krishnamoorthy ve ark. 2007, Ma ve Tian 2009, Alvandi ve Malekzadeh 2014). Bu bölümde iki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için yeni bir PB yöntemi gösterilecektir. σ_i^2 nuisance parametresinin yerine yansız tahmincisi S_i^2 yazıldığında iki lognormal dağılımın ortalamasını karşılaştırmak için H_0 hipotezinin doğruluğu altında doğal test istatistiği,

$$T = \frac{\left(\hat{\psi}_1 - \hat{\psi}_2\right)}{\sqrt{\operatorname{var}\left(\hat{\psi}_1 - \hat{\psi}_2\right)}}$$

$$= \frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1 + \frac{1}{2}(S_2^2 - S_1^2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{S_1^4}{(n_1 - 1)} + \frac{S_2^4}{(n_2 - 1)}\right)}} \tag{3.57}$$

biçiminde bulunur. PB yöntemini kullanmak için genel ortalama sıfır alındığında PB test değişkeni,

$$T_{PBY} = \frac{\left(\hat{\psi}_1 - \hat{\psi}_2\right) - (\psi_1 - \psi_2)}{\sqrt{\operatorname{var}\left(\hat{\psi}_1 - \hat{\psi}_2\right)}}$$

$$= \frac{\bar{Y}_1^B - \bar{Y}_2^B + \frac{1}{2}(S_1^{2B} - S_2^{2B}) - \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2^2)}{\sqrt{\operatorname{var}^B\left(\hat{\psi}_1 - \hat{\psi}_2\right)}} \tag{3.58}$$

Biçiminde ifade edilir. Burada,

$$\bar{Y}_i^B \sim N\left(0, \frac{S_i^2}{n_i}\right), \quad S_i^{2B} \sim \frac{S_i^2 \chi^2_{(n_i - 1)}}{n_i - 1},$$

$$\operatorname{var}^B\left(\hat{\psi}_1 - \hat{\psi}_2\right) = \frac{S_1^{2B}}{n_1} + \frac{S_2^{2B}}{n_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{(S_1^{2B})^2}{(n_1 + 1)} + \frac{(S_2^{2B})^2}{(n_2 + 1)}\right), \quad i = 1{,}2$$

şeklindedir. S_1^2 ve S_2^2'nin gözlenen değerleri s_1^2 ve s_2^2 ve α anlam düzeyi verildiğinde,

$$P\left(T_{PBY}\left(s_i^2; \chi^2_{(n_i - 1)}\right) > t_{obs}\right) < \alpha \tag{3.59}$$

ise (3.46)'deki H_0 hipotezi reddedilir. Burada t_{obs} eşitlik (3.57)'daki test istatistiğinin gözlenen değeridir. PB test değişkeni herhangi bir nuisance parametreye bağlı değildir. Dolayısıyla PB yöntemine dayanan testin p-değeri Monte Carlo simülasyon tekniği kullanılarak aşağıdaki algoritma ile elde edilir,

Algoritma 3

Verilen (n_1, n_2), $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ve (s_1^2, s_2^2) değerleri için

Eşitlik (3.57)'deki $T = \frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1 + \frac{1}{2}(S_2^2 - S_1^2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{S_1^4}{(n_1-1)} + \frac{S_2^4}{(n_2-1)}\right)}}$ test istatistiği hesaplansın ve bu değer t_{obs} olarak ifade edilsin

Tekrar $j = 1, m$

Eşitlik (3.58)'deki $T_{PBY} = \frac{\bar{Y}_1^B - \bar{Y}_2^B + \frac{1}{2}(S_1^{2B} - S_2^{2B}) - \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2^2)}{\sqrt{\mathrm{var}^B(\hat{\psi}_1 - \hat{\psi}_2)}}$ değeri hesaplansın,

Eğer $T_{PBY} > t_{obs}$ ise $K_j = 1$

(Tekrarı bitir)

$(1/m)\sum_{j=1}^{m} K_j$ ifadesi p-değeri verir.

4. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde bir önceki bölümde gösterilen testleri karşılaştırmak amacıyla simülasyon çalışmaları yapılmıştır.

4.1. BF Problemi için Simülasyon Çalışması

BF problemi için genelleştirilmiş p-değeri (GP), klasik t, Welch-Satterhwaite (WS), Cochran-Cox (CC), Singh-Saxena-Srivastava (SSS) ve parametrik bootstrap (PY) testlerinin I. tip hata oranları, güç değerleri, aralık uzunlukları ve kapsama olasılıkları karşılaştırılmıştır.

Verilen testler karşılaştırılırken örneklem hacimlerinin ve varyansların eşit ve farklı olduğu durumlar ele alınmıştır. Testlerin I. tip hata oranları ve güç değerleri bulunurken anlam düzeyi $\alpha = 0.05$ olarak belirlenmiştir. Verilen testlerin aralık uzunlukları ve kapsama olasılıkları için güven düzeyi 0.95 olarak alınmıştır. Simülasyon çalışması yapılırken önce normal dağılımdan veri üredilmiş ve üredilen veriler belirtilen testler kullanılarak analiz edilmiştir.

Verilen testlerin kodları R programında yazıldı. Simülasyon çalışması yapılırken klasik t, WS, CC ve SSS testler için tekrar sayısı 50000 olarak alınmıştır. GP ve PY testleri için simülasyon çalışması iki aşamadan oluşmaktadır. Birinci aşamada 2500 tekrar yapılarak $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, s_1^2, s_2^2)$ gözlem değerleri üredilmiştir. İkinci aşamada 2500 tekrar yapılarak GP ve PY testlerin p-değerleri hesaplanmıştır. Bu testlerin I. tip hata oranları Çizelge 4.1'de, güç değerleri Çizelge 4.2'de ve aralık uzunlukları ve kapsama olasılıkları Çizelge 4.3'de gösterilmiştir.

BF problemi için Weerahandi (1993) tarafından önerilen genelleştirilmiş güven aralığı ile GPD yöntemine dayanan yeni güven aralığının uzunlukları ve kapsama olasılıkları Çizelge 4.4'te gösterilmiştir.

Çizelge 4.1. BF problemi için verilen testlerin I. tip hata oranları.

(n_1, n_2)	(σ_1^2, σ_2^2)	t-test	WS	CC	SSS	GP	PY
	(1,1)	0.050	0.045	0.023	0.072	0.026	0.044
	(1,2)	0.051	0.044	0.025	0.069	0.026	0.050
(5,5)	(1,3)	0.053	0.046	0.027	0.066	0.024	0.056
	(1,4)	0.055	0.047	0.029	0.065	0.026	0.058
	(1,5)	0.057	0.049	0.031	0.063	0.028	0.056
	(1,1)	0.050	0.052	0.032	0.093	0.024	0.055
	(1,2)	0.035	0.049	0.030	0.100	0.022	0.046
(5,10)	(1,3)	0.029	0.048	0.030	0.103	0.026	0.046
	(1,4)	0.026	0.048	0.031	0.103	0.030	0.048
	(1,5)	0.024	0.049	0.031	0.100	0.030	0.050
	(1,1)	0.050	0.047	0.031	0.094	0.034	0.055
	(1,2)	0.071	0.049	0.036	0.080	0.030	0.056
(10,5)	(1,3)	0.085	0.049	0.038	0.074	0.034	0.062
	(1,4)	0.095	0.049	0.041	0.069	0.036	0.060
	(1,5)	0.101	0.050	0.042	0.066	0.034	0.060
	(1,1)	0.051	0.048	0.036	0.063	0.030	0.042
	(1,2)	0.052	0.049	0.037	0.063	0.032	0.050
(10,10)	(1,3)	0.053	0.050	0.039	0.062	0.036	0.056
	(1,4)	0.054	0.050	0.040	0.061	0.036	0.060
	(1,5)	0.055	0.050	0.041	0.060	0.036	0.054
	(1,1)	0.050	0.049	0.042	0.080	0.040	0.056
	(1,2)	0.030	0.050	0.041	0.108	0.044	0.054
(10,25)	(1,3)	0.022	0.049	0.041	0.126	0.044	0.054
	(1,4)	0.018	0.050	0.041	0.136	0.044	0.058
	(1,5)	0.015	0.051	0.041	0.144	0.048	0.058
	(1,1)	0.050	0.052	0.042	0.078	0.044	0.054
	(1,2)	0.077	0.051	0.044	0.054	0.046	0.062
(25,10)	(1,3)	0.094	0.051	0.045	0.043	0.040	0.060
	(1,4)	0.105	0.051	0.045	0.036	0.044	0.058
	(1,5)	0.113	0.051	0.046	0.032	0.046	0.060
	(1,1)	0.050	0.050	0.045	0.057	0.050	0.054
	(1,2)	0.050	0.051	0.046	0.057	0.046	0.052
(25,25)	(1,3)	0.051	0.051	0.046	0.057	0.050	0.048
	(1,4)	0.052	0.051	0.047	0.056	0.044	0.048
	(1,5)	0.052	0.051	0.047	0.057	0.046	0.046
	(1,1)	0.049	0.050	0.048	0.060	0.054	0.058
	(1,2)	0.033	0.050	0.047	0.085	0.058	0.054
(25,50)	(1,3)	0.026	0.050	0.047	0.101	0.048	0.050
	(1,4)	0.023	0.050	0.047	0.111	0.042	0.048
	(1,5)	0.020	0.050	0.047	0.119	0.040	0.040

Çizelge 4.1. (Devam) BF problemi için verilen testlerin I. tip hata oranları.

(n_1, n_2)	(σ_1^2, σ_2^2)	t-test	WS	CC	SSS	GP	PY
$(50,25)$	(1,1)	0.050	0.051	0.047	0.059	0.048	0.050
	(1,2)	0.071	0.050	0.047	0.038	0.054	0.056
	(1,3)	0.084	0.051	0.048	0.029	0.054	0.054
	(1,4)	0.092	0.051	0.048	0.025	0.052	0.056
	(1,5)	0.097	0.051	0.049	0.022	0.052	0.054
$(50,50)$	(1,1)	0.050	0.051	0.048	0.053	0.038	0.042
	(1,2)	0.049	0.050	0.048	0.054	0.034	0.030
	(1,3)	0.050	0.050	0.049	0.054	0.030	0.034
	(1,4)	0.049	0.050	0.049	0.054	0.032	0.034
	(1,5)	0.050	0.050	0.049	0.056	0.034	0.036
$(50,100)$	(1,1)	0.050	0.051	0.050	0.056	0.040	0.050
	(1,2)	0.034	0.052	0.049	0.082	0.042	0.048
	(1,3)	0.026	0.053	0.050	0.099	0.048	0.048
	(1,4)	0.022	0.052	0.049	0.109	0.050	0.048
	(1,5)	0.020	0.052	0.049	0.118	0.052	0.050
$(100,50)$	(1,1)	0.051	0.049	0.049	0.055	0.050	0.054
	(1,2)	0.072	0.051	0.050	0.034	0.050	0.054
	(1,3)	0.083	0.050	0.050	0.025	0.052	0.054
	(1,4)	0.091	0.050	0.050	0.020	0.052	0.052
	(1,5)	0.096	0.050	0.050	0.018	0.050	0.052
$(100,100)$	(1,1)	0.050	0.050	0.050	0.052	0.048	0.048
	(1,2)	0.051	0.049	0.050	0.052	0.044	0.046
	(1,3)	0.051	0.049	0.050	0.052	0.044	0.048
	(1,4)	0.051	0.049	0.050	0.053	0.046	0.046
	(1,5)	0.051	0.049	0.050	0.053	0.048	0.050
$(100,200)$	(1,1)	0.051	0.050	0.051	0.054	0.052	0.048
	(1,2)	0.033	0.049	0.051	0.081	0.052	0.056
	(1,3)	0.026	0.049	0.051	0.099	0.048	0.054
	(1,4)	0.022	0.049	0.050	0.109	0.046	0.048
	(1,5)	0.020	0.049	0.050	0.118	0.046	0.048
$(200,100)$	(1,1)	0.050	0.048	0.050	0.053	0.050	0.048
	(1,2)	0.070	0.049	0.050	0.031	0.050	0.044
	(1,3)	0.082	0.049	0.050	0.023	0.048	0.048
	(1,4)	0.089	0.049	0.050	0.018	0.048	0.048
	(1,5)	0.094	0.049	0.051	0.015	0.048	0.048
$(200,200)$	(1,1)	0.050	0.048	0.051	0.052	0.050	0.050
	(1,2)	0.051	0.049	0.051	0.052	0.044	0.040
	(1,3)	0.050	0.049	0.051	0.052	0.032	0.032
	(1,4)	0.050	0.049	0.051	0.052	0.030	0.032
	(1,5)	0.051	0.049	0.051	0.052	0.030	0.030

WS-Welch-Satterthwaite testi; CC-Cochran-Cox testi; SSS- Singh-Saxena-Srivastava testi; GP-Genelleştirilmiş p-değeri yöntemi; PY-Parametric bootstrap yöntemi.

Çizelge 4.2. BF problemi için verilen testlerin güç değerleri.

(n_1, n_2)	(σ_1^2, σ_2^2)	(μ_1, μ_2)	t-test	WS	CC	SSS	GP	PY
(5,5)	(1,1)	(0.3,0)	0.114	0.108	0.032	0.099	0.047	0.111
		(0.6,0)	0.219	0.208	0.075	0.176	0.113	0.208
		(0.9,0)	0.366	0.351	0.150	0.297	0.207	0.351
		(1.2,0)	0.533	0.517	0.260	0.448	0.349	0.513
		(1.5,0)	0.696	0.680	0.403	0.608	0.500	0.670
	(1,0.5)	(0.3,0)	0.129	0.121	0.039	0.114	0.063	0.123
		(0.6,0)	0.264	0.248	0.098	0.219	0.136	0.243
		(0.9,0)	0.445	0.425	0.202	0.380	0.269	0.431
		(1.2,0)	0.637	0.614	0.351	0.561	0.449	0.614
		(1.5,0)	0.800	0.779	0.523	0.730	0.625	0.777
(5,10)	(1,1)	(0.3,0)	0.129	0.127	0.049	0.132	0.080	0.134
		(0.6,0)	0.272	0.259	0.119	0.239	0.167	0.268
		(0.9,0)	0.464	0.441	0.238	0.400	0.323	0.455
		(1.2,0)	0.663	0.631	0.401	0.578	0.503	0.645
		(1.5,0)	0.825	0.795	0.580	0.737	0.675	0.797
	(1,0.5)	(0.3,0)	0.186	0.136	0.057	0.125	0.091	0.149
		(0.6,0)	0.375	0.284	0.140	0.238	0.193	0.296
		(0.9,0)	0.599	0.480	0.280	0.403	0.364	0.505
		(1.2,0)	0.791	0.679	0.460	0.584	0.562	0.697
		(1.5,0)	0.918	0.833	0.642	0.742	0.741	0.851
(10,5)	(1,1)	(0.3,0)	0.129	0.124	0.050	0.130	0.087	0.142
		(0.6,0)	0.271	0.259	0.121	0.241	0.181	0.258
		(0.9,0)	0.468	0.442	0.239	0.400	0.305	0.464
		(1.2,0)	0.665	0.635	0.401	0.580	0.515	0.668
		(1.5,0)	0.826	0.795	0.582	0.738	0.695	0.810
	(1,0.5)	(0.3,0)	0.116	0.150	0.059	0.175	0.105	0.155
		(0.6,0)	0.285	0.344	0.168	0.355	0.224	0.342
		(0.9,0)	0.525	0.588	0.355	0.588	0.462	0.616
		(1.2,0)	0.749	0.798	0.583	0.790	0.692	0.808
		(1.5,0)	0.901	0.926	0.784	0.915	0.857	0.929
(10,10)	(1,1)	(0.3,0)	0.158	0.152	0.072	0.117	0.122	0.190
		(0.6,0)	0.362	0.357	0.206	0.281	0.314	0.372
		(0.9,0)	0.613	0.604	0.423	0.522	0.536	0.594
		(1.2,0)	0.824	0.820	0.666	0.754	0.776	0.816
		(1.5,0)	0.942	0.939	0.853	0.905	0.918	0.938
	(1,0.5)	(0.3,0)	0.184	0.181	0.089	0.139	0.146	0.190
		(0.6,0)	0.441	0.432	0.265	0.356	0.360	0.426
		(0.9,0)	0.721	0.714	0.538	0.638	0.668	0.714
		(1.2,0)	0.907	0.904	0.793	0.859	0.870	0.904
		(1.5,0)	0.981	0.978	0.936	0.963	0.966	0.974

Çizelge 4.2. (Devam) BF problemi için verilen testlerin güç değerleri.

(n_1,n_2)	(σ_1^2,σ_2^2)	(μ_1,μ_2)	t-test	WS	CC	SSS	GP	PY
(10,20)	(1,1)	(0.3,0)	0.187	0.182	0.095	0.147	0.160	0.210
		(0.6,0)	0.444	0.437	0.281	0.360	0.388	0.434
		(0.9,0)	0.732	0.717	0.558	0.636	0.686	0.744
		(1.2,0)	0.915	0.905	0.808	0.851	0.894	0.920
		(1.5,0)	0.984	0.980	0.943	0.957	0.974	0.982
	(1,0.5)	(0.3,0)	0.262	0.203	0.110	0.128	0.186	0.226
		(0.6,0)	0.575	0.490	0.329	0.345	0.440	0.500
		(0.9,0)	0.845	0.774	0.632	0.635	0.762	0.822
		(1.2,0)	0.968	0.940	0.866	0.858	0.932	0.946
		(1.5,0)	0.996	0.991	0.969	0.963	0.990	0.992
(20,10)	(1,1)	(0.3,0)	0.189	0.188	0.098	0.151	0.156	0.200
		(0.6,0)	0.447	0.439	0.284	0.362	0.418	0.474
		(0.9,0)	0.732	0.722	0.557	0.636	0.700	0.746
		(1.2,0)	0.915	0.904	0.808	0.850	0.884	0.910
		(1.5,0)	0.983	0.977	0.942	0.956	0.966	0.974
	(1,0.5)	(0.3,0)	0.183	0.233	0.128	0.231	0.210	0.254
		(0.6,0)	0.501	0.578	0.406	0.557	0.556	0.614
		(0.9,0)	0.820	0.865	0.746	0.848	0.844	0.872
		(1.2,0)	0.966	0.977	0.940	0.970	0.966	0.980
		(1.5,0)	0.996	0.998	0.993	0.997	0.996	0.996
(25,25)	(1,1)	(0.3,0)	0.275	0.272	0.169	0.194	0.250	0.268
		(0.6,0)	0.672	0.672	0.529	0.568	0.634	0.658
		(0.9,0)	0.932	0.933	0.865	0.885	0.932	0.940
		(1.2,0)	0.993	0.994	0.983	0.987	0.996	0.998
		(1.5,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(1,0.5)	(0.3,0)	0.331	0.330	0.211	0.240	0.306	0.320
		(0.6,0)	0.778	0.778	0.653	0.688	0.776	0.790
		(0.9,0)	0.976	0.977	0.942	0.952	0.978	0.978
		(1.2,0)	0.999	1.00	0.998	0.998	1.00	1.00
		(1.5,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(25,50)	(1,1)	(0.3,0)	0.331	0.334	0.216	0.243	0.310	0.332
		(0.6,0)	0.784	0.782	0.660	0.685	0.780	0.810
		(0.9,0)	0.976	0.978	0.945	0.950	0.978	0.980
		(1.2,0)	0.999	1.00	0.998	0.998	1.00	1.00
		(1.5,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(1,0.5)	(0.3,0)	0.444	0.466	0.250	0.215	0.360	0.376
		(0.6,0)	0.884	0.922	0.735	0.685	0.848	0.846
		(0.9,0)	0.993	0.998	0.972	0.958	0.990	0.990
		(1.2,0)	1.00	1.00	0.999	0.999	1.00	1.00
		(1.5,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Çizelge 4.2. (Devam) BF problemi için verilen testlerin güç değerleri.

(n_1,n_2)	(σ_1^2,σ_2^2)	(μ_1,μ_2)	*t*-test	WS	CC	SSS	GP	PY
(50,25)	(1,1)	(0.3,0)	0.337	0.344	0.219	0.246	0.306	0.342
		(0.6,0)	0.784	0.790	0.659	0.686	0.786	0.802
		(0.9,0)	0.977	0.976	0.944	0.949	0.970	0.974
		(1.2,0)	1.00	1.00	0.998	0.998	1.00	1.00
		(1.5,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(1,0.5)	(0.3,0)	0.365	0.456	0.305	0.406	0.448	0.374
		(0.6,0)	0.871	0.910	0.832	0.888	0.916	0.842
		(0.9,0)	0.995	0.997	0.992	0.997	0.998	0.989
		(1.2,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(1.5,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(50,50)	(1,1)	(0.3,0)	0.440	0.453	0.312	0.329	0.444	0.458
		(0.6,0)	0.910	0.913	0.838	0.849	0.904	0.912
		(0.9,0)	0.997	0.997	0.994	0.994	1.00	1.00
		(1.2,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(1.5,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(1,0.5)	(0.3,0)	0.533	0.545	0.396	0.415	0.524	0.536
		(0.6,0)	0.963	0.961	0.924	0.931	0.966	0.970
		(0.9,0)	0.999	1.00	0.999	0.999	1.00	1.00
		(1.2,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(1.5,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(50,100)	(1,1)	(0.3,0)	0.533	0.543	0.400	0.415	0.560	0.552
		(0.6,0)	0.964	0.961	0.926	0.929	0.960	0.962
		(0.9,0)	1.00	1.00	0.999	0.999	1.00	1.00
		(1.2,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(1.5,0)	1.00	1.00	1.00	100	1.00	1.00
	(1,0.5)	(0.3,0)	0.661	0.602	0.464	0.393	0.612	0.618
		(0.6,0)	0.990	0.982	0.960	0.940	0.986	0.986
		(0.9,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(1.2,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(1.5,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(100,50)	(1,1)	(0.3,0)	0.531	0.531	0.399	0.416	0.522	0.522
		(0.6,0)	0.963	0.964	0.925	0.928	0.962	0.962
		(0.9,0)	1.00	1.00	1.00	0.999	1.00	1.00
		(1.2,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(1.5,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(1,0.5)	(0.3,0)	0.606	0.678	0.553	0.645	0.684	0.684
		(0.6,0)	0.991	0.994	0.986	0.993	0.990	0.990
		(0.9,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(1.2,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(1.5,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Çizelge 4.2. (Devam) BF problemi için verilen testlerin güç değerleri.

(n_1,n_2)	(σ_1^2,σ_2^2)	(μ_1,μ_2)	t-test	WS	CC	SSS	GP	PY
$(100,100)$	$(1,1)$	(0.3,0)	0.682	0.682	0.558	0.567	0.685	0.687
		(0.6,0)	0.995	0.995	0.987	0.988	0.992	0.993
		(0.9,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(1.2,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(1.5,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(1,0.5)$	(0.3,0)	0.787	0.787	0.681	0.690	0.790	0.788
		(0.6,0)	0.999	0.999	0.999	0.999	0.997	0.997
		(0.9,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(1.2,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(1.5,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$(200,200)$	$(1,1)$	(0.3,0)	0.911	0.911	0.847	0.850	0.934	0.931
		(0.6,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(0.9,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(1.2,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(1.5,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(1,0.5)$	(0.3,0)	0.965	0.965	0.930	0.932	0.975	0.975
		(0.6,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(0.9,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(1.2,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		(1.5,0)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

WS-Welch-Satterthwaite testi; CC-Cochran-Cox testi; SSS- Singh-Saxena-Srivastavatest testi; GP-Genelleştirilmiş p-değeri yöntemi; PY-Parametric bootstrap yöntemi.

Çizelge 4.3. Güven düzeyi 0.95 ve $\mu_1 = \mu_2 = 0$ iken BF problemi için PY, GP, WS, CC ve SSS güven aralıklarının uzunlukları (EL) ve kapsama olasılıkları (CP).

(σ_1^2, σ_2^2)	I_{PY}		I_{GP}		I_{WS}		I_{CC}		I_{SSS}	
	EL	CP	EL	CP	EL	CP	EL	CP	EL	CP
$n = (5,5)$										
(1,1)	1.748	0.955	3.823	0.988	2.930	0.956	3.401	0.976	2.628	0.928
(1,5)	3.113	0.949	6.509	0.980	5.282	0.949	5.819	0.968	6.685	0.936
(1,10)	4.350	0.954	8.740	0.973	7.337	0.947	7.824	0.962	21.10	0.947
$n = (10,10)$										
(1,1)	1.091	0.948	2.097	0.971	1.865	0.950	1.625	0.963	1.463	0.938
(1,5)	1.832	0.944	3.610	0.967	3.296	0.950	3.401	0.958	1.850	0.940
(1,10)	2.628	0.947	4.874	0.965	3.301	0.949	5.819	0.956	2.618	0.946
$n = (10,20)$										
(1,1)	0.939	0.952	1.759	0.969	1.607	0.948	1.683	0.958	1.463	0.922
(1,5)	1.409	0.958	2.589	0.969	2.407	0.950	2.509	0.958	1.638	0.855
(1,10)	1.852	0.950	3.348	0.964	3.158	0.950	3.252	0.955	2.433	0.874
$n = (20,10)$										
(1,1)	0.947	0.956	1.758	0.966	1.606	0.049	1.682	0.959	1.465	0.922
(1,5)	1.905	0.945	3.426	0.962	3.188	0.950	3.251	0.954	3.856	0.967
(1,10)	2.670	0.949	4.748	0.960	4.448	0.950	4.497	0.952	4.672	0.972
$n = (25,25)$										
(1,1)	0.744	0.959	1.184	0.960	1.132	0.949	1.160	0.955	1.105	0.944
(1,5)	1.312	0.960	2.047	0.954	1.976	0.950	2.005	0.952	1.924	0.942
(1,10)	1.790	0.960	2.769	0.954	2.688	0.950	2.712	0.951	5.519	0.943
$n = (25,50)$										
(1,1)	0.569	0.962	1.014	0.956	0.979	0.949	0.996	0.952	0.958	0.940
(1,5)	0.862	0.948	1.528	0.954	1.486	0.950	1.509	0.952	1.174	0.879
(1,10)	1.130	0.955	1.991	0.949	1.948	0.950	1.969	0.951	1.461	0.861
$n = (50,25)$										
(1,1)	0.567	0.935	1.013	0.958	0.979	0.950	0.996	0.953	0.958	0.941
(1,5)	1.102	0.950	1.951	0.954	1.900	0.950	1.913	0.951	2.291	0.976
(1,10)	1.529	0.949	2.699	0.950	2.634	0.950	2.644	0.951	3.350	0.983
$n = (50,50)$										
(1,1)	0.459	0.964	0.809	0.951	0.791	0.949	0.801	0.951	0.782	0.947
(1,5)	0.801	0.958	1.399	0.949	1.376	0.950	1.386	0.951	1.356	0.945
(1,10)	1.088	0.967	1.893	0.947	1.868	0.949	1.876	0.951	1.838	0.945
$n = (50,100)$										
(1,1)	0.397	0.951	0.698	0.954	0.685	0.949	0.691	0.950	0.678	0.944
(1,5)	0.604	0.957	1.058	0.952	1.043	0.949	1.051	0.950	0.827	0.880
(1,10)	0.792	0.953	1.382	0.950	1.367	0.948	1.374	0.950	1.027	0.861
$n = (100,50)$										
(1,1)	0.397	0.946	0.696	0.951	0.685	0.949	0.691	0.950	0.678	0.944
(1,5)	0.767	0.948	1.335	0.949	1.321	0.949	1.325	0.950	1.623	0.980
(1,10)	1.060	0.953	1.846	0.948	1.828	0.949	1.831	0.951	2.367	0.987

Çizelge 4.3. (Devam) Güven düzeyi 0.95 ve $\mu_1 = \mu_2 = 0$ iken BF problemi için PY, GP, WS, CC ve SSS güven aralıklarının uzunlukları (EL) ve kapsama olasılıkları (CP).

(σ_1^2, σ_2^2)	I_{PY}		I_{GP}		I_{WS}		I_{CC}		I_{SSS}	
	EL	CP	EL	CP	EL	CP	EL	CP	EL	CP
					$n = (100{,}100)$					
(1,1)	0.322	0.946	0.562	0.954	0.556	0.949	0.560	0.950	0.553	0.947
(1,5)	0.560	0.947	0.974	0.953	0.966	0.949	0.969	0.950	0.959	0.946
(1,10)	0.759	0.948	1.318	0.950	1.310	0.949	1.312	0.950	1.298	0.946
					$n = (100{,}200)$					
(1,1)	0.279	0.947	0.487	0.953	0.482	0.950	0.484	0.950	0.479	0.946
(1,5)	0.426	0.942	0.741	0.950	0.735	0.949	0.738	0.950	0.585	0.879
(1,10)	0.558	0.949	0.969	0.951	0.963	0.949	0.965	0.949	0.725	0.862
					$n = (200{,}100)$					
(1,1)	0.279	0.952	0.486	0.956	0.482	0.949	0.484	0.950	0.479	0.947
(1,5)	0.537	0.951	0.931	0.949	0.926	0.950	0.927	0.950	1.149	0.983
(1,10)	0.743	0.951	1.287	0.948	1.280	0.949	1.281	0.950	1.675	0.989
					$n = (200{,}200)$					
(1,1)	0.227	0.953	0.395	0.952	0.392	0.950	0.394	0.950	0.391	0.948
(1,5)	0.394	0.954	0.684	0.949	0.681	0.950	0.682	0.950	0.678	0.946
(1,10)	0.534	0.954	0.926	0.948	0.922	0.949	0.923	0.950	0.918	0.947

WS-Welch-Satterthwaite testi; CC-Cochran-Cox testi; SSS- Singh-Saxena-Srivastavatest testi; GP-Genelleştirilmiş *p*-değeri yöntemi; PY-Parametric bootstrap yöntemi.

Çizelge 4.4. Güven düzeyi 0.95 ve $\mu_1 = \mu_2 = 0$ iken BF problemi için GPD yöntemine dayanan yeni güven aralığı ile Weerahandi (1993)'nin genelleştirilmiş güven aralığının (GGA) uzunlukları (EL) ve kapsama olasılıkları (CP).

(n_1, n_2)	(σ_1^2, σ_2^2)	Yeni yöntem		GGA	
		EL	CP	EL	CP
(5,5)	(1,1)	3.828	0.985	3.823	0.988
	(1,5)	6.520	0.981	6.509	0.980
	(1,10)	8.754	0.975	8.740	0.973
(10,10)	(1,1)	2.096	0.975	2.097	0.971
	(1,5)	3.606	0.969	3.610	0.967
	(1,10)	4.869	0.966	4.874	0.965
(10,20)	(1,1)	2.102	0.990	1.759	0.969
	(1,5)	3.636	0.996	2.589	0.969
	(1,10)	4.920	0.998	3.348	0.964
(20,10)	(1,1)	1.340	0.905	1.758	0.966
	(1,5)	2.301	0.859	3.426	0.962
	(1,10)	3.105	0.846	4.748	0.960
(25,25)	(1,1)	1.182	0.956	1.184	0.960
	(1,5)	2.041	0.957	2.047	0.954
	(1,10)	2.761	0.954	2.769	0.954
(25,50)	(1,1)	1.183	0.982	1.014	0.956
	(1,5)	2.049	0.993	1.528	0.954
	(1,10)	2.773	0.994	1.991	0.949
(50,25)	(1,1)	0.807	0.900	1.013	0.958
	(1,5)	1.392	0.867	1.951	0.954
	(1,10)	1.882	0.854	2.699	0.950
(50,50)	(1,1)	0.808	0.953	0.809	0.951
	(1,5)	1.398	0.952	1.399	0.949
	(1,10)	1.890	0.950	1.893	0.947
(50,100)	(1,1)	0.809	0.976	0.698	0.954
	(1,5)	1.400	0.991	1.058	0.952
	(1,10)	1.894	0.993	1.382	0.950
(100,50)	(1,1)	0.562	0.890	0.696	0.951
	(1,5)	0.971	0.868	1.335	0.949
	(1,10)	1.314	0.853	1.846	0.948
(100,100)	(1,1)	0.562	0.953	0.562	0.954
	(1,5)	0.973	0.951	0.974	0.953
	(1,10)	1.317	0.948	1.318	0.948
(100,200)	(1,1)	0.561	0.977	0.487	0.955
	(1,5)	0.974	0.990	0.741	0.950
	(1,10)	1.319	0.992	0.969	0.951
(200,100)	(1,1)	0.394	0.883	0.486	0.956
	(1,5)	0.682	0.851	0.931	0.948
	(1,10)	0.922	0.849	1.287	0.946
(200,200)	(1,1)	0.394	0.952	0.395	0.952
	(1,5)	0.683	0.950	0.684	0.949
	(1,10)	0.924	0.946	0.926	0.947

Çizelge 4.1'de BF problemi için verilen altı testin I. tip hata oranları incelendiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. Varyanslar ve örneklem hacimleri eşit olduğu durumlarda klasik t testinin I. tip hata oranları $\alpha = 0.05$ anlam düzeyine oldukça yakındır. Fakat varyanslar ve örneklem hacimleri farklı olduğu durumlarda bu testin I. tip hata oranları $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinden oldukça uzaklaşmaktadır.
2. Küçük hacimli örneklemlerde veya örneklem hacimleri eşit olmadığı durumlarda SSS testinin I. tip hata oranları $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinden oldukça uzaktadır. Fakat eşit ve büyük hacimli örneklemlerde bu testin I. tip hata oranları $\alpha = 0.05$ anlam düzeyine yakındır.
3. CC ve GP testlerinin I. tip hata oranları küçük hacimli örneklemlerde anlam düzeyinin altındadır.
4. CC ve WS testlerinin I. tip hata oranları büyük hacimli örneklemlerde birbirlerine yakındır.
5. Örneklem hacimleri orta ve büyük olduğu durumlarda GP ve PY testlerinin I. hata oranları birbirlerine yakın değerler almaktadır.

Çizelge 4.2'de BF problemi için verilen testlerin güç değerleri incelendiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. Varyanslar eşit olsun veya olmasın küçük hacimli örneklemlerde klasik t testinin güç değerleri diğer testlerden genel olarak daha yüksektir. Yine küçük hacimli örneklemlerde bu testten sonra genel olarak PY testinin güç değerleri diğer testlerden daha yüksektir.
2. Küçük hacimli örneklemlerde GP testinin güç değerleri düşüktür. Örneklem hacimleri arttıkça PY ve GP testlerinin güç değerleri birbirine yaklaşmaktadır. Büyük hacimli örneklemlerde PY ve GP testlerinin güç değerleri genel olarak diğer testlerden daha yüksektir.
3. Özellikle orta hacimli örneklemlerde WS testinin güç değerleri yüksektir.
4. Varyanslar eşit olsun veya olmasın CC testinin güç değerleri diğer testlere göre daha düşüktür.

5. SSS testinin güç değerleri örneklem hacimleri artıkça CC testinden sonra en düşük güç değerlerine sahiptir.

Çizelge 4.3’de BF problemi için verilen PY, GP, WS, CC ve SSS testlerinin aralık uzunlukları ve kapsama olasılıkları incelendiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. PY testin aralık uzunlukları diğer testlerden daha kısa ve kapsama olasılıkları 0.95 güven düzeyine daha yakındır.
2. Varyansların eşit olduğu durumlarda PY testinden sonra aralık uzunluğu en kısa olan SSS testidir. Fakat varyansların heterojenliğinden SSS testi etkilenmektedir. $n_1 < n_2$ ve varyanslar farklı olduğu durumlarda SSS testinin aralık uzunlukları kısayken kapsama olasılığı 0.95 güven düzeyinin altında kalmaktadır. $n_1 > n_2$ ve varyanslar farklı olduğu durumlarda ise SSS testinin aralık uzunlukları uzunken kapsama olasılıkları 0.95 güven düzeyini geçmektedir.
3. Küçük hacimli örneklemlerde GP testinin kapsama olasılıkları 0.95 güven düzeyinden uzaktayken örneklem hacimleri arttıkça bu testin kapsama olasılıkları 0.95 güven düzeyine yaklaşmaktadır. Bu testin aralık uzunlukları PY, WS ve CC testlerinin aralık uzunluklarından daha uzundur.
4. Özellikle orta ve büyük hacimli örneklemlerde WS testinin kapsama olasılıkları 0.95 güven düzeyine yakındır. Küçük hacimli örneklemlerde CC testinin kapsama olasılıkları 0.95 güven düzeyini geçmektedir. Fakat orta ve büyük hacimli örneklemlerde CC testinin kapsama olasılıkları 0.95 güven düzeyine yakındır. Bu test, GP testinden sonra en uzun aralık uzunluklarına sahiptir.

Çizelge 4.4’de BF problemi için verilen genelleştirilmiş güven aralıklarının uzunlukları ve kapsama olasılıkları incelendiğinde aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır;

1. Geliştirilen yeni yöntemin aralık uzunlukları örneklem hacimleri $n_1 > n_2$ olduğu durumlarda GGA'ya göre daha kısadır. Fakat örneklem hacimleri $n_1 < n_2$ olduğu durumlarda yeni yöntemin aralık uzunlukları GGA'ya göre daha uzundur.
2. Örneklem hacimleri $n_1 > n_2$ olduğu durumlarda yeni yöntemin kapsama olasılıkları 0.95 güven düzeyinin oldukça altında iken, örneklem hacimleri $n_1 < n_2$ olduğu durumlarda 0.95 güven düzeyinin oldukça üstündedir. Örneklem hacimleri eşit iken bu yöntemin kapsama olasılıkları 0.95 güven düzeyine yakın değerler almaktadır.
3. GGA' nın kapsama olasılıkları küçük hacimli örneklemlerde 0.95 güven düzeyini geçmektedir. Örneklem hacimleri artıkça GGA' nın kapsama olasılıkları 0.95 güven düzeyine yaklaşmaktadır.

4.2. Tek Yönlü ANOVA için Simülasyon Çalışması

Bu bölümde genelleştirilmiş F (GF), Welch (W), Scott-Smith (SS), Brown-Forsythe (BF), parametrik bootstrap (PB) ve fiducial yaklaşım (FY) testlerinin I. tip hata oranlarını ve güç değerlerini karşılaştırmak için simülasyon çalışması yapılmıştır.

Verilen testlerin I. tip hata oranları ve güç değerleri karşılaştırılırken örneklem hacimlerinin ve varyansların eşit ve farklı olduğu durumlar dikkate alınmıştır. k grup sayısı olmak üzere 3, 5 ve 7 grup için karşılaştırmalar yapılmıştır. Testlerin I. tip hata oranları ve güç değerleri bulunurken anlam düzeyi $\alpha = 0.05$ olarak alınmıştır. Simülasyon çalışması yapılırken önce normal dağılımdan veri üredilmiş ve üredilen veriler belirtilen testler kullanılarak analiz edilmiştir.

Verilen testlerin kodları R programında yazıldı. W, SS, BF testlerinin I. tip hata oranları ve güç değerlerini bulmak için tekrar sayısı 50000 olarak belirlenmiştir. GF, PB ve FY testleri için simülasyon çalışması iki aşamadan oluşmuştur. Birinci aşamada 2500 tekrar yapılarak $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, s_1^2, s_2^2)$ gözlem değerleri üredilmiş daha sonra ikinci aşamada 2500 tekrar yapılarak GF, PB ve FY testlerin *p*-değerleri hesaplanmıştır. Bu testlerin 3,5 ve 7 grup için I. tip hata oranları Çizelge 4.5,4.6 ve 4.7'de ve güç değerleri Çizelge 4.8,4.9 ve 4.10'da gösterilmiştir.

Çizelge 4.5. $k = 3$ için verilen testlerin I. tip hata oranları.

$k = 3$			n=(5,5,5)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	0.052	0.037	0.045	0.075	0.044	0.030
(1,1,3)	0.054	0.049	0.051	0.072	0.047	0.023
(0.5,1,1.5)	0.054	0.045	0.054	0.076	0.048	0.023
(1,2,4)	0.055	0.051	0.057	0.078	0.049	0.018
			n=(10,10,10)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	0.054	0.030	0.049	0.072	0.054	0.038
(1,1,3)	0.055	0.044	0.055	0.064	0.051	0.041
(0.5,1,1.5)	0.054	0.040	0.053	0.064	0.054	0.030
(1,2,4)	0.055	0.047	0.055	0.066	0.057	0.028
			n=(10,15,20)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	0.054	0.028	0.050	0.058	0.054	0.049
(1,1,3)	0.053	0.044	0.054	0.060	0.052	0.041
(0.5,1,1.5)	0.053	0.037	0.053	0.058	0.049	0.047
(1,2,4)	0.053	0.044	0.054	0.060	0.052	0.039
			n=(20,15,10)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	0.054	0.027	0.050	0.054	0.045	0.039
(1,1,3)	0.055	0.036	0.056	0.060	0.049	0.039
(0.5,1,1.5)	0.055	0.036	0.052	0.061	0.046	0.041
(1,2,4)	0.055	0.042	0.054	0.060	0.046	0.042
			n=(25,25,25)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	0.051	0.023	0.049	0.056	0.053	0.046
(1,1,3)	0.051	0.036	0.054	0.055	0.053	0.047
(0.5,1,1.5)	0.051	0.033	0.052	0.054	0.049	0.046
(1,2,4)	0.051	0.040	0.054	0.056	0.049	0.045
			n=(50,50,50)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	0.051	0.022	0.050	0.055	0.050	0.047
(1,1,3)	0.052	0.036	0.057	0.049	0.046	0.045
(0.5,1,1.5)	0.052	0.032	0.053	0.056	0.052	0.050
(1,2,4)	0.052	0.040	0.056	0.050	0.048	0.047

Çizelge 4.5. (Devam) $k = 3$ için verilen testlerin I. tip hata oranları.

$k = 3$			n=(25,50,75)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	0.051	0.021	0.050	0.054	0.046	0.046
(1,1,3)	0.051	0.038	0.055	0.054	0.053	0.051
(0.5,1,1.5)	0.051	0.029	0.055	0.053	0.048	0.048
(1,2,4)	0.051	0.036	0.056	0.053	0.051	0.049
			n=(75,50,25)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	0.051	0.021	0.049	0.058	0.056	0.054
(1,1,3)	0.052	0.029	0.051	0.059	0.053	0.053
(0.5,1,1.5)	0.051	0.030	0.053	0.062	0.055	0.053
(1,2,4)	0.051	0.034	0.051	0.063	0.054	0.053
			n=(100,100,100)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	0.051	0.021	0.051	0.042	0.041	0.040
(1,1,3)	0.052	0.035	0.056	0.045	0.043	0.043
(0.5,1,1.5)	0.051	0.030	0.053	0.045	0.045	0.043
(1,2,4)	0.051	0.037	0.055	0.047	0.046	0.044
			n=(50,100,150)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	0.050	0.020	0.049	0.041	0.041	0.041
(1,1,3)	0.050	0.036	0.053	0.043	0.044	0.042
(0.5,1,1.5)	0.050	0.027	0.053	0.037	0.037	0.036
(1,2,4)	0.049	0.034	0.055	0.037	0.038	0.036
			n=(150,100,50)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	0.050	0.021	0.049	0.047	0.042	0.040
(1,1,3)	0.050	0.027	0.056	0.048	0.044	0.042
(0.5,1,1.5)	0.050	0.029	0.051	0.045	0.043	0.043
(1,2,4)	0.050	0.034	0.054	0.046	0.042	0.041
			n=(200,200,200)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	0.051	0.021	0.050	0.044	0.046	0.043
(1,1,3)	0.051	0.035	0.056	0.048	0.049	0.049
(0.5,1,1.5)	0.051	0.031	0.053	0.048	0.049	0.049
(1,2,4)	0.051	0.037	0.056	0.050	0.049	0.049

Çizelge 4.6. $k = 5$ için verilen testlerin I. tip hata oranları.

$k = 5$			n=(5,5,5,5,5)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \sigma_5^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	0.076	0.055	0.039	0.094	0.046	0.025
(1,1,2,3,3)	0.079	0.062	0.047	0.105	0.054	0.030
(0.5,1,1.5,2,2.5,3)	0.080	0.067	0.046	0.104	0.053	0.030
(1,2,4,6,8)	0.082	0.078	0.050	0.106	0.051	0.032
			n=(10,10,10,10,10)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \sigma_5^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	0.066	0.042	0.048	0.079	0.055	0.046
(1,1,2,3,3)	0.067	0.051	0.054	0.073	0.048	0.040
(0.5,1,1.5,2,2.5,3)	0.068	0.055	0.055	0.077	0.044	0.037
(1,2,4,6,8)	0.068	0.069	0.060	0.073	0.042	0.037
			n=(10,15,20,25,30)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \sigma_5^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	0.063	0.034	0.049	0.074	0.056	0.052
(1,1,2,3,3)	0.058	0.043	0.057	0.071	0.055	0.052
(0.5,1,1.5,2,2.5,3)	0.058	0.045	0.058	0.067	0.053	0.048
(1,2,4,6,8)	0.058	0.056	0.062	0.065	0.051	0.045
			n=(30,25,20,15,10)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \sigma_5^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	0.061	0.034	0.050	0.066	0.046	0.040
(1,1,2,3,3)	0.062	0.042	0.056	0.068	0.049	0.041
(0.5,1,1.5,2,2.5,3)	0.062	0.047	0.057	0.066	0.046	0.045
(1,2,4,6,8)	0.062	0.061	0.060	0.066	0.049	0.043
			n=(25,25,25,25,25)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \sigma_5^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	0.055	0.031	0.050	0.051	0.039	0.034
(1,1,2,3,3)	0.055	0.041	0.057	0.051	0.036	0.034
(0.5,1,1.5,2,2.5,3)	0.055	0.044	0.058	0.052	0.039	0.037
(1,2,4,6,8)	0.056	0.060	0.062	0.055	0.036	0.037
			n=(50,50,50,50,50)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \sigma_5^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	0.055	0.030	0.051	0.055	0.051	0.051
(1,1,2,3,3)	0.055	0.039	0.058	0.055	0.050	0.047
(0.5,1,1.5,2,2.5,3)	0.055	0.043	0.059	0.052	0.049	0.048
(1,2,4,6,8)	0.055	0.059	0.064	0.054	0.047	0.047

Çizelge 4.6. (Devam) $k = 5$ için verilen testlerin I. tip hata oranları.

$k = 5$			n=(25,50,75,100,125)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \sigma_5^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	0.053	0.028	0.050	0.052	0.045	0.043
(1,1,2,3,3)	0.051	0.034	0.060	0.047	0.046	0.045
(0.5,1,1.5,2,2.5,3)	0.052	0.035	0.060	0.046	0.045	0.040
(1,2,4,6,8)	0.052	0.045	0.066	0.046	0.047	0.044
			n=(125,100,75,50,25)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \sigma_5^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	0.053	0.029	0.050	0.065	0.054	0.053
(1,1,2,3,3)	0.053	0.036	0.056	0.058	0.054	0.053
(0.5,1,1.5,2,2.5,3)	0.053	0.041	0.056	0.065	0.060	0.060
(1,2,4,6,8)	0.053	0.053	0.061	0.068	0.061	0.059
			n=(100,100,100,100,100)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \sigma_5^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	0.052	0.027	0.050	0.045	0.041	0.041
(1,1,2,3,3)	0.052	0.037	0.059	0.044	0.042	0.042
(0.5,1,1.5,2,2.5,3)	0.051	0.040	0.060	0.043	0.040	0.040
(1,2,4,6,8)	0.051	0.057	0.065	0.042	0.040	0.040
			n=(50,100,150,200,250)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \sigma_5^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	0.052	0.026	0.049	0.053	0.051	0.051
(1,1,2,3,3)	0.051	0.034	0.058	0.050	0.048	0.047
(0.5,1,1.5,2,2.5,3)	0.051	0.034	0.060	0.049	0.047	0.046
(1,2,4,6,8)	0.052	0.044	0.066	0.048	0.048	0.048
			n=(250,200,150,100,50)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \sigma_5^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	0.052	0.026	0.050	0.045	0.043	0.041
(1,1,2,3,3)	0.052	0.034	0.058	0.048	0.045	0.044
(0.5,1,1.5,2,2.5,3)	0.052	0.040	0.059	0.051	0.046	0.046
(1,2,4,6,8)	0.052	0.053	0.064	0.052	0.045	0.045
			n=(200,200,200,200,200)			
$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2, \sigma_5^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	0.050	0.026	0.050	0.050	0.042	0.041
(1,1,2,3,3)	0.050	0.036	0.058	0.052	0.046	0.046
(0.5,1,1.5,2,2.5,3)	0.050	0.039	0.058	0.052	0.047	0.044
(1,2,4,6,8)	0.050	0.056	0.064	0.055	0.049	0.048

Çizelge 4.7. $k = 7$ için verilen testlerin I. tip hata oranları.

$k = 7$	n=(5,5,5,5,5,5,5)					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1,1,1)	0.103	0.065	0.040	0.117	0.059	0.030
(1,1,2,2,2,3,3)	0.104	0.070	0.044	0.114	0.059	0.030
(0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5)	0.106	0.078	0.048	0.126	0.060	0.037
(1,2,4,6,8,10,12)	0.108	0.091	0.052	0.129	0.060	0.039
	n=(10,10,10,10,10,10,10)					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1,1,1)	0.078	0.048	0.049	0.090	0.060	0.043
(1,1,2,2,2,3,3)	0.078	0.054	0.054	0.094	0.057	0.048
(0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4)	0.079	0.064	0.059	0.094	0.053	0.046
(1,2,4,6,8,10,12)	0.079	0.081	0.062	0.095	0.054	0.046
	n=(10,15,20,25,30,35,40)					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1,1,1)	0.065	0.038	0.050	0.074	0.051	0.041
(1,1,2,2,2,3,3)	0.064	0.042	0.058	0.070	0.043	0.041
(0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4)	0.063	0.048	0.063	0.070	0.051	0.040
(1,2,4,6,8,10,12)	0.063	0.060	0.069	0.069	0.045	0.040
	n=(40,35,30,25,20,15,10)					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1,1,1)	0.064	0.037	0.049	0.075	0.053	0.049
(1,1,2,2,2,3,3)	0.065	0.042	0.056	0.080	0.054	0.051
(0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4)	0.066	0.053	0.060	0.083	0.056	0.053
(1,2,4,6,8,10,12)	0.067	0.072	0.064	0.087	0.058	0.054
	n=(25,25,25,25,25,25,25)					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1,1,1)	0.059	0.035	0.050	0.064	0.049	0.047
(1,1,2,2,2,3,3)	0.060	0.040	0.057	0.068	0.050	0.048
(0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4)	0.061	0.051	0.061	0.072	0.051	0.048
(1,2,4,6,8,10,12)	0.061	0.070	0.066	0.070	0.052	0.049
	n=(50,50,50,50,50,50,50)					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1,1,1)	0.056	0.032	0.050	0.047	0.045	0.044
(1,1,2,2,2,3,3)	0.056	0.037	0.068	0.049	0.043	0.043
(0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4)	0.056	0.047	0.062	0.050	0.045	0.043
(1,2,4,6,8,10,12)	0.056	0.067	0.068	0.051	0.042	0.041

Çizelge 4.7. (Devam) $k = 7$ için verilen testlerin I. tip hata oranları.

$k = 7$	n=(25,50,75,100,125,150,175)					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1,1,1)	0.054	0.031	0.050	0.042	0.038	0.038
(1,1,2,2,2,3,3)	0.054	0.035	0.057	0.043	0.040	0.040
(0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4)	0.054	0.038	0.064	0.042	0.041	0.040
(1,2,4,6,8,10,12)	0.054	0.047	0.070	0.045	0.042	0.040
	n=(175,150,125,100,75,50,25)					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1,1,1)	0.054	0.031	0.050	0.049	0.043	0.043
(1,1,2,2,2,3,3)	0.054	0.035	0.057	0.047	0.041	0.040
(0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4)	0.054	0.046	0.062	0.048	0.042	0.042
(1,2,4,6,8,10,12)	0.054	0.066	0.067	0.048	0.043	0.038
	n=(100,100,100,100,100,100,100)					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1,1,1)	0.052	0.031	0.050	0.044	0.042	0.041
(1,1,2,2,2,3,3)	0.052	0.036	0.056	0.043	0.041	0.041
(0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4)	0.052	0.046	0.060	0.042	0.042	0.042
(1,2,4,6,8,10,12)	0.052	0.066	0.066	0.044	0.041	0.040
	n=(50,100,150,200,250,300,350)					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1,1,1)	0.051	0.030	0.050	0.044	0.042	0.041
(1,1,2,2,2,3,3)	0.052	0.033	0.058	0.043	0.041	0.041
(0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4)	0.052	0.037	0.064	0.041	0.039	0.040
(1,2,4,6,8,10,12)	0.052	0.047	0.070	0.042	0.040	0.040
	n=(350,300,250,200,150,100,50)					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1,1,1)	0.052	0.030	0.050	0.039	0.037	0.037
(1,1,2,2,2,3,3)	0.053	0.034	0.057	0.041	0.037	0.037
(0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4)	0.053	0.045	0.060	0.044	0.040	0.039
(1,2,4,6,8,10,12)	0.053	0.064	0.067	0.045	0.037	0.037
	n=(200,200,200,200,200,200,200)					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1,1,1)	0.050	0.028	0.049	0.051	0.051	0.048
(1,1,2,2,2,3,3)	0.050	0.034	0.056	0.055	0.052	0.051
(0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4)	0.050	0.044	0.061	0.055	0.052	0.050
(1,2,4,6,8,10,12)	0.050	0.063	0.066	0.056	0.051	0.050

Çizelge 4.8. $k = 3$ için verilen testlerin güç değerleri.

$k = 3$				$n = (5,5,5)$			
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_3^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_3)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	(0,0,0.3)	0.068	0.047	0.057	0.087	0.043	0.027
	(0,0,0.6)	0.123	0.081	0.111	0.156	0.090	0.048
	(0,0,0.9)	0.221	0.145	0.209	0.263	0.177	0.102
	(0,0,1.2)	0.359	0.247	0.352	0.428	0.306	0.213
	(0,0,1.5)	0.524	0.376	0.528	0.627	0.496	0.339
(0.2,0.4,0.6)	(0,0,0.3)	0.090	0.072	0.088	0.119	0.060	0.036
	(0,0,0.6)	0.209	0.168	0.228	0.248	0.168	0.104
	(0,0,0.9)	0.404	0.337	0.458	0.476	0.353	0.247
	(0,0,1.2)	0.628	0.557	0.706	0.723	0.599	0.350
	(0,0,1.5)	0.814	0.762	0.881	0.879	0.798	0.684
				$n = (10,10,10)$			
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_3^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_3)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	(0,0,0.3)	0.095	0.057	0.090	0.115	0.094	0.084
	(0,0,0.6)	0.239	0.156	0.232	0.254	0.226	0.189
	(0,0,0.9)	0.478	0.353	0.480	0.500	0.455	0.400
	(0,0,1.2)	0.730	0.609	0.739	0.726	0.690	0.653
	(0,0,1.5)	0.903	0.825	0.911	0.903	0.884	0.849
(0.2,0.4,0.6)	(0,0,0.3)	0.146	0.114	0.163	0.157	0.138	0.121
	(0,0,0.6)	0.438	0.385	0.498	0.453	0.408	0.367
	(0,0,0.9)	0.784	0.747	0.843	0.778	0.746	0.714
	(0,0,1.2)	0.957	0.950	0.979	0.958	0.946	0.932
	(0,0,1.5)	0.996	0.996	0.999	0.999	0.998	0.998
				$n = (10,20,30)$			
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_3^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_3)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	(0,0,0.3)	0.154	0.091	0.151	0.177	0.153	0.139
	(0,0,0.6)	0.498	0.378	0.502	0.534	0.493	0.472
	(0,0,0.9)	0.857	0.776	0.855	0.868	0.839	0.818
	(0,0,1.2)	0.983	0.966	0.983	0.991	0.986	0.982
	(0,0,1.5)	0.999	0.998	0.999	1.00	1.00	1.00
(0.2,0.4,0.6)	(0,0,0.3)	0.301	0.236	0.357	0.325	0.295	0.268
	(0,0,0.6)	0.858	0.804	0.896	0.869	0.839	0.820
	(0,0,0.9)	0.996	0.993	0.998	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
				$n = (30,20,10)$			
		W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	(0,0,0.3)	0.112	0.061	0.106	0.126	0.118	0.027
	(0,0,0.6)	0.305	0.191	0.299	0.330	0.318	0.048
	(0,0,0.9)	0.588	0.435	0.596	0.601	0.589	0.102
	(0,0,1.2)	0.834	0.713	0.849	0.832	0.826	0.213
	(0,0,1.5)	0.957	0.903	0.966	0.958	0.954	0.339
(0.2,0.4,0.6)	(0,0,0.3)	0.166	0.117	0.187	0.184	0.165	0.036
	(0,0,0.6)	0.498	0.422	0.563	0.516	0.494	0.104
	(0,0,0.9)	0.839	0.796	0.890	0.842	0.832	0.247
	(0,0,1.2)	0.975	0.969	0.988	0.971	0.973	0.464
	(0,0,1.5)	0.998	0.998	0.999	0.998	0.997	0.684

Çizelge 4.8. (Devam) $k = 3$ için verilen testlerin güç değerleri.

$k = 3$				$n = (25{,}25{,}25)$			
$(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_3^2)$	$(\mu_1, \ldots \mu_3)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	(0,0,0.3)	0.173	0.099	0.171	0.186	0.177	0.167
	(0,0,0.6)	0.559	0.423	0.563	0.576	0.562	0.544
	(0,0,0.9)	0.902	0.824	0.905	0.916	0.905	0.903
	(0,0,1.2)	0.992	0.982	0.993	0.989	0.988	0.986
	(0,0,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(0.2,0.4,0.6)	(0,0,0.3)	0.316	0.260	0.366	0.331	0.316	0.306
	(0,0,0.6)	0.868	0.834	0.906	0.883	0.866	0.861
	(0,0,0.9)	0.997	0.995	0.998	0.997	0.997	0.997
	(0,0,1.2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
				$n = (50{,}50{,}50)$			
$(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_3^2)$	$(\mu_1, \ldots \mu_3)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	(0,0,0.3)	0.313	0.203	0.314	0.328	0.315	0.308
	(0,0,0.6)	0.874	0.785	0.876	0.888	0.882	0.879
	(0,0,0.9)	0.997	0.992	0.997	0.999	0.998	0.998
	(0,0,1.2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(0.2,0.4,0.6)	(0,0,0.3)	0.583	0.516	0.646	0.603	0.584	0.586
	(0,0,0.6)	0.994	0.991	0.997	0.995	0.995	0.994
	(0,0,0.9)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
				$n = (25{,}50{,}75)$			
$(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_3^2)$	$(\mu_1, \ldots \mu_3)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	(0,0,0.3)	0.345	0.231	0.347	0.353	0.334	0.325
	(0,0,0.6)	0.907	0.837	0.907	0.924	0.921	0.912
	(0,0,0.9)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(0.2,0.4,0.6)	(0,0,0.3)	0.673	0.596	0.732	0.687	0.671	0.663
	(0,0,0.6)	0.998	0.998	0.999	1.00	1.00	1.00
	(0,0,0.9)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
				$n = (75{,}50{,}25)$			
		W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	(0,0,0.3)	0.211	0.123	0.207	0.207	0.204	0.197
	(0,0,0.6)	0.669	0.527	0.671	0.667	0.666	0.655
	(0,0,0.9)	0.957	0.907	0.960	0.961	0.955	0.953
	(0,0,1.2)	1.00	1.00	1.00	0.999	0.999	0.999
	(0,0,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(0.2,0.4,0.6)	(0,0,0.3)	0.356	0.280	0.415	0.340	0.336	0.328
	(0,0,0.6)	0.907	0.871	0.940	0.901	0.898	0.896
	(0,0,0.9)	0.999	0.998	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Çizelge 4.8. (Devam) $k = 3$ için verilen testlerin güç değerleri.

$k = 3$		$n = (100,100,100)$					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_3^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_3)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	(0,0,0.3)	0.579	0.436	0.580	0.579	0.569	0.565
	(0,0,0.6)	0.994	0.986	0.994	0.991	0.990	0.990
	(0,0,0.9)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(0.2,0.4,0.6)	(0,0,0.3)	0.886	0.851	0.917	0.889	0.890	0.890
	(0,0,0.6)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,0.9)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		$n = (50,100,150)$					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_3^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_3)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	(0,0,0.3)	0.630	0.492	0.631	0.644	0.637	0.634
	(0,0,0.6)	0.997	0.994	0.997	0.996	0.997	0.996
	(0,0,0.9)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(0.2,0.4,0.6)	(0,0,0.3)	0.941	0.913	0.959	0.940	0.934	0.932
	(0,0,0.6)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,0.9)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		$n = (150,100,50)$					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_3^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_3)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	(0,0,0.3)	0.389	0.259	0.387	0.380	0.373	0.373
	(0,0,0.6)	0.936	0.879	0.939	0.933	0.930	0.926
	(0,0,0.9)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(0.2,0.4,0.6)	(0,0,0.3)	0.642	0.560	0.707	0.613	0.612	0.614
	(0,0,0.6)	0.998	0.996	0.999	1.00	1.00	0.996
	(0,0,0.9)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		$n = (200,200,200)$					
		W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1)	(0,0,0.3)	0.880	0.794	0.880	0.876	0.882	0.882
	(0,0,0.6)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,0.9)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(0.2,0.4,0.6)	(0,0,0.3)	0.995	0.992	0.997	0.998	0.998	0.998
	(0,0,0.6)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,0.9)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Çizelge 4.9. $k = 5$ için verilen testlerin güç değerleri.

$k = 5$				$n = (5,5,5,5,5)$			
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_5^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_5)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	(0,0, … ,0.3)	0.092	0.064	0.051	0.146	0.053	0.034
	(0,0, … ,0.6)	0.143	0.097	0.095	0.227	0.086	0.053
	(0,0, … ,0.9)	0.237	0.157	0.183	0.331	0.148	0.094
	(0,0, … ,1.2)	0.366	0.252	0.325	0.456	0.254	0.170
	(0,0, … ,1.5)	0.516	0.374	0.507	0.606	0.375	0.273
(0.2,0.4,0.6,0.8,1)	(0,0, … ,0.3)	0.099	0.080	0.070	0.160	0.061	0.041
	(0,0, … ,0.6)	0.160	0.127	0.150	0.257	0.097	0.065
	(0,0, … ,0.9)	0.267	0.215	0.295	0.356	0.167	0.120
	(0,0, … ,1.2)	0.408	0.346	0.492	0.488	0.277	0.200
	(0,0, … ,1.5)	0.563	0.507	0.692	0.656	0.404	0.308
				$n = (10,10,10,10,10)$			
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_5^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_5)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	(0,0, … ,0.3)	0.101	0.065	0.081	0.128	0.081	0.063
	(0,0, … ,0.6)	0.231	0.162	0.206	0.254	0.188	0.165
	(0,0, … ,0.9)	0.457	0.352	0.449	0.518	0.417	0.366
	(0,0, … ,1.2)	0.711	0.606	0.725	0.745	0.660	0.613
	(0,0, … ,1.5)	0.891	0.826	0.911	0.909	0.870	0.840
(0.2,0.4,0.6,0.8,1)	(0,0, … ,0.3)	0.109	0.091	0.116	0.131	0.083	0.067
	(0,0, … ,0.6)	0.259	0.233	0.324	0.285	0.204	0.181
	(0,0, … ,0.9)	0.508	0.485	0.633	0.563	0.464	0.424
	(0,0, … ,1.2)	0.763	0.759	0.877	0.789	0.709	0.677
	(0,0, … ,1.5)	0.920	0.926	0.977	0.925	0.902	0.874
				$n = (10,20,30,40,50)$			
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_5^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_5)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	(0,0, … ,0.3)	0.236	0.169	0.233	0.291	0.146	0.221
	(0,0, … ,0.6)	0.768	0.698	0.772	0.791	0.493	0.734
	(0,0, … ,0.9)	0.989	0.982	0.990	0.990	0.877	0.985
	(0,0, … ,1.2)	1.00	1.00	1.00	1.00	0.985	1.00
	(0,0, … ,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(0.2,0.4,0.6,0.8,1)	(0,0, … ,0.3)	0.280	0.243	0.389	0.325	0.160	0.257
	(0,0, … ,0.6)	0.850	0.831	0.929	0.863	0.548	0.818
	(0,0, … ,0.9)	0.997	0.996	0.999	0.998	0.917	0.996
	(0,0, … ,1.2)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(0,0, … ,1.5)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
				$n = (50,40,30,20,10)$			
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_5^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_5)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	(0,0, … ,0.3)	0.111	0.065	0.093	0.122	0.106	0.099
	(0,0, … ,0.6)	0.282	0.180	0.258	0.288	0.265	0.253
	(0,0, … ,0.9)	0.555	0.409	0.550	0.562	0.549	0.536
	(0,0, … ,1.2)	0.803	0.678	0.827	0.790	0.794	0.784
	(0,0, … ,1.5)	0.942	0.876	0.962	0.937	0.941	0.935
(0.2,0.4,0.6,0.8,1)	(0,0, … ,0.3)	0.115	0.085	0.131	0.123	0.105	0.141
	(0,0, … ,0.6)	0.293	0.229	0.371	0.300	0.277	0.509
	(0,0, … ,0.9)	0.571	0.490	0.698	0.588	0.564	0.880
	(0,0, … ,1.2)	0.818	0.761	0.915	0.804	0.802	0.986
	(0,0, … ,1.5)	0.949	0.927	0.987	0.949	0.944	0.944

Çizelge 4.9. (Devam) $k = 5$ için verilen testlerin güç değerleri.

$k = 5$		$n = (25,25,25,25,25)$					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_5^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_5)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	$(0,0, \dots ,0.3)$	0.161	0.105	0.152	0.165	0.145	0.141
	$(0,0, \dots ,0.6)$	0.534	0.428	0.533	0.562	0.526	0.509
	$(0,0, \dots ,0.9)$	0.896	0.838	0.903	0.898	0.885	0.880
	$(0,0, \dots ,1.2)$	0.992	0.984	0.994	0.989	0.987	0.986
	$(0,0, \dots ,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(0.2,0.4,0.6,0.8,1)	$(0,0, \dots ,0.3)$	0.178	0.159	0.240	0.181	0.152	0.148
	$(0,0, \dots ,0.6)$	0.593	0.573	0.723	0.628	0.587	0.574
	$(0,0, \dots ,0.9)$	0.929	0.927	0.972	0.937	0.927	0.924
	$(0,0, \dots ,1.2)$	1.00	1.00	1.00	0.995	1.00	0.993
	$(0,0, \dots ,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		$n = (50,50,50,50,50)$					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_5^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_5)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	$(0,0, \dots ,0.3)$	0.287	0.202	0.284	0.284	0.274	0.268
	$(0,0, \dots ,0.6)$	0.864	0.798	0.869	0.869	0.856	0.856
	$(0,0, \dots ,0.9)$	1.00	0.990	1.00	0.996	0.996	0.996
	$(0,0, \dots ,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(0.2,0.4,0.6,0.8,1)	$(0,0, \dots ,0.3)$	0.325	0.303	0.439	0.331	0.314	0.307
	$(0,0, \dots ,0.6)$	0.907	0.902	0.959	0.909	0.902	0.898
	$(0,0, \dots ,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		$n = (25,50,75,100,125)$					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_5^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_5)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	$(0,0, \dots ,0.3)$	0.560	0.462	0.564	0.571	0.547	0.541
	$(0,0, \dots ,0.6)$	0.996	0.993	0.996	0.998	0.998	0.998
	$(0,0, \dots ,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(0.2,0.4,0.6,0.8,1)	$(0,0, \dots ,0.3)$	0.651	0.612	0.777	0.645	0.635	0.626
	$(0,0, \dots ,0.6)$	0.999	0.999	1.00	1.00	0.999	0.999
	$(0,0, \dots ,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		$n = (125,100,75,50,25)$					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_5^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_5)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
(1,1,1,1,1)	$(0,0, \dots ,0.3)$	0.182	0.116	0.260	0.182	0.170	0.173
	$(0,0, \dots ,0.6)$	0.615	0.492	0.769	0.602	0.583	0.597
	$(0,0, \dots ,0.9)$	0.940	0.892	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
(0.2,0.4,0.6,0.8,1)	$(0,0, \dots ,0.3)$	0.190	0.153	0.174	0.200	0.193	0.191
	$(0,0, \dots ,0.6)$	0.635	0.576	0.616	0.623	0.613	0.609
	$(0,0, \dots ,0.9)$	0.949	0.933	0.949	0.938	0.944	0.943
	$(0,0, \dots ,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Çizelge 4.9. (Devam) $k = 5$ verilen testlerin güç değerleri.

$k = 5$				$n = (100,100,100,100,100)$			
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_5^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_5)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
$(1,1,1,1,1)$	$(0,0, \dots ,0.3)$	0.549	0.442	0.550	0.562	0.555	0.551
	$(0,0, \dots ,0.6)$	0.995	0.990	0.995	0.997	0.996	0.996
	$(0,0, \dots ,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$(0.2,0.4,0.6,0.8,1)$	$(0,0, \dots ,0.3)$	0.612	0.591	0.737	0.627	0.619	0.618
	$(0,0, \dots ,0.6)$	0.998	0.998	1.00	1.00	0.999	0.999
	$(0,0, \dots ,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
				$n = (50,100,150,200,250)$			
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_5^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_5)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
$(1,1,1,1,1)$	$(0,0, \dots ,0.3)$	0.885	0.829	0.887	0.889	0.884	0.882
	$(0,0, \dots ,0.6)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$(0.2,0.4,0.6,0.8,1)$	$(0,0, \dots ,0.3)$	0.939	0.925	0.974	0.942	0.939	0.938
	$(0,0, \dots ,0.6)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
				$n = (250,200,150,100,50)$			
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_5^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_5)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
$(1,1,1,1,1)$	$(0,0, \dots ,0.3)$	0.341	0.245	0.334	0.325	0.322	0.318
	$(0,0, \dots ,0.6)$	0.918	0.864	0.922	0.900	0.900	0.900
	$(0,0, \dots ,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$(0.2,0.4,0.6,0.8,1)$	$(0,0, \dots ,0.3)$	0.355	0.304	0.479	0.349	0.342	0.339
	$(0,0, \dots ,0.6)$	0.929	0.908	0.972	0.914	0.919	0.917
	$(0,0, \dots ,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
				$n = (200,200,200,200,200)$			
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_5^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_5)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
$(1,1,1,1,1)$	$(0,0, \dots ,0.3)$	0.874	0.811	0.875	0.874	0.868	0.866
	$(0,0, \dots ,0.6)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$(0.2,0.4,0.6,0.8,1)$	$(0,0, \dots ,0.3)$	0.916	0.909	0.962	0.916	0.916	0.917
	$(0,0, \dots ,0.6)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots ,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Çizelge 4.10. $k = 7$ için verilen testlerin güç değerleri.

$k = 7$				$n = (5,5,5,5,5,5,5)$			
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_7)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
	$(0,0, \dots, 0.3)$	0.119	0.075	0.050	0.225	0.060	0.034
	$(0,0, \dots, 0.6)$	0.170	0.106	0.089	0.289	0.086	0.052
$(1,1,1,1,1,1,1)$	$(0,0, \dots, 0.9)$	0.258	0.162	0.167	0.403	0.145	0.090
	$(0,0, \dots, 1.2)$	0.380	0.248	0.300	0.534	0.221	0.149
	$(0,0, \dots, 1.5)$	0.521	0.358	0.479	0.654	0.334	0.238
	$(0,0, \dots, 0.3)$	0.119	0.087	0.065	0.217	0.060	0.043
	$(0,0, \dots, 0.6)$	0.160	0.117	0.116	0.276	0.081	0.055
$\begin{pmatrix} 0.2,0.4,0.6,0.8,1 \\ 1.2,1.4 \end{pmatrix}$	$(0,0, \dots, 0.9)$	0.231	0.170	0.213	0.356	0.119	0.079
	$(0,0, \dots, 1.2)$	0.328	0.250	0.357	0.468	0.186	0.123
	$(0,0, \dots, 1.5)$	0.441	0.355	0.532	0.579	0.267	0.194
				$n = (10,10,10,10,10,10,10)$			
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_7)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
	$(0,0, \dots, 0.3)$	0.111	0.071	0.076	0.171	0.090	0.078
	$(0,0, \dots, 0.6)$	0.230	0.160	0.187	0.314	0.192	0.167
$(1,1,1,1,1,1,1)$	$(0,0, \dots, 0.9)$	0.443	0.340	0.414	0.525	0.389	0.349
	$(0,0, \dots, 1.2)$	0.690	0.582	0.692	0.748	0.626	0.585
	$(0,0, \dots, 1.5)$	0.873	0.802	0.896	0.895	0.831	0.798
	$(0,0, \dots, 0.3)$	0.105	0.086	0.097	0.157	0.085	0.070
	$(0,0, \dots, 0.6)$	0.198	0.171	0.237	0.267	0.168	0.148
$\begin{pmatrix} 0.2,0.4,0.6,0.8,1 \\ 1.2,1.4 \end{pmatrix}$	$(0,0, \dots, 0.9)$	0.367	0.337	0.475	0.450	0.313	0.285
	$(0,0, \dots, 1.2)$	0.579	0.558	0.731	0.643	0.512	0.481
	$(0,0, \dots, 1.5)$	0.776	0.769	0.904	0.812	0.714	0.685
				$n = (10,20,30,40,50,60,70)$			
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_7)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
	$(0,0, \dots, 0.3)$	0.312	0.240	0.305	0.348	0.278	0.270
	$(0,0, \dots, 0.6)$	0.911	0.876	0.912	0.906	0.875	0.871
$(1,1,1,1,1,1,1)$	$(0,0, \dots, 0.9)$	1.00	0.999	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots, 1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots, 1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots, 0.3)$	0.258	0.228	0.390	0.284	0.233	0.219
	$(0,0, \dots, 0.6)$	0.837	0.821	0.936	0.833	0.795	0.782
$\begin{pmatrix} 0.2,0.4,0.6,0.8,1 \\ 1.2,1.4 \end{pmatrix}$	$(0,0, \dots, 0.9)$	0.996	0.996	1.00	0.998	0.996	0.996
	$(0,0, \dots, 1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0, \dots, 1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
				$n = (70,60,50,40,30,20,10)$			
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_7)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
	$(0,0, \dots, 0.3)$	0.106	0.062	0.084	0.097	0.079	0.075
	$(0,0, \dots, 0.6)$	0.265	0.169	0.228	0.258	0.227	0.223
$(1,1,1,1,1,1,1)$	$(0,0, \dots, 0.9)$	0.521	0.374	0.500	0.480	0.466	0.454
	$(0,0, \dots, 1.2)$	0.771	0.634	0.789	0.714	0.722	0.718
	$(0,0, \dots, 1.5)$	0.925	0.842	0.949	0.884	0.889	0.887
	$(0,0, \dots, 0.3)$	0.094	0.072	0.107	0.094	0.070	0.070
	$(0,0, \dots, 0.6)$	0.208	0.158	0.269	0.195	0.167	0.163
$\begin{pmatrix} 0.2,0.4,0.6,0.8,1 \\ 1.2,1.4 \end{pmatrix}$	$(0,0, \dots, 0.9)$	0.403	0.320	0.531	0.376	0.340	0.341
	$(0,0, \dots, 1.2)$	0.633	0.543	0.785	0.584	0.583	0.581
	$(0,0, \dots, 1.5)$	0.753	0.753	0.936	0.776	0.781	0.780

Çizelge 4.10. (Devam) $k = 7$ için verilen testlerin güç değerleri.

$k = 7$							
		$n = (25,25,25,25,25,25,25)$					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_7)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
$(1,1,1,1,1,1,1)$	$(0,0,\dots,0.3)$	0.154	0.104	0.139	0.171	0.138	0.129
	$(0,0,\dots,0.6)$	0.500	0.403	0.492	0.508	0.46	0.448
	$(0,0,\dots,0.9)$	0.876	0.816	0.884	0.887	0.856	0.851
	$(0,0,\dots,1.2)$	0.990	0.981	0.993	0.991	0.987	0.986
	$(0,0,\dots,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$\binom{0.2,0.4,0.6,0.8,1}{1.2,1.4}$	$(0,0,\dots,0.3)$	0.133	0.119	0.181	0.149	0.110	0.105
	$(0,0,\dots,0.6)$	0.403	0.388	0.553	0.406	0.366	0.358
	$(0,0,\dots,0.9)$	0.772	0.771	0.896	0.762	0.723	0.72
	$(0,0,\dots,1.2)$	0.962	0.964	0.992	0.973	0.959	0.958
	$(0,0,\dots,1.5)$	0.997	0.997	1.00	1.00	1.00	0.998
		$n = (50,50,50,50,50,50,50)$					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_7)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
$(1,1,1,1,1,1,1)$	$(0,0,\dots,0.3)$	0.263	0.192	0.256	0.285	0.259	0.257
	$(0,0,\dots,0.6)$	0.840	0.780	0.846	0.835	0.819	0.817
	$(0,0,\dots,0.9)$	0.997	0.994	0.997	0.998	0.997	0.997
	$(0,0,\dots,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$\binom{0.2,0.4,0.6,0.8,1}{1.2,1.4}$	$(0,0,\dots,0.3)$	0.212	0.203	0.318	0.224	0.202	0.196
	$(0,0,\dots,0.6)$	0.728	0.726	0.864	0.744	0.717	0.712
	$(0,0,\dots,0.9)$	0.984	0.985	0.997	0.980	0.979	0.977
	$(0,0,\dots,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		$n = (25,50,75,100,125,150,175)$					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_7)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
$(1,1,1,1,1,1,1)$	$(0,0,\dots,0.3)$	0.720	0.643	0.718	0.738	0.714	0.71
	$(0,0,\dots,0.6)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$\binom{0.2,0.4,0.6,0.8,1}{1.2,1.4}$	$(0,0,\dots,0.3)$	0.616	0.586	0.776	0.647	0.616	0.612
	$(0,0,\dots,0.6)$	0.998	0.998	1.00	1.00	0.998	0.998
	$(0,0,\dots,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		$n = (175,150,125,100,75,50,25)$					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_7)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
$(1,1,1,1,1,1,1)$	$(0,0,\dots,0.3)$	0.169	0.110	0.154	0.156	0.149	0.147
	$(0,0,\dots,0.6)$	0.568	0.456	0.562	0.543	0.541	0.536
	$(0,0,\dots,0.9)$	0.917	0.864	0.927	0.921	0.921	0.920
	$(0,0,\dots,1.2)$	0.996	0.990	0.997	0.996	0.998	0.998
	$(0,0,\dots,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$\binom{0.2,0.4,0.6,0.8,1}{1.2,1.4}$	$(0,0,\dots,0.3)$	0.134	0.112	0.193	0.127	0.122	0.123
	$(0,0,\dots,0.6)$	0.432	0.379	0.593	0.420	0.418	0.418
	$(0,0,\dots,0.9)$	0.804	0.761	0.919	0.785	0.791	0.787
	$(0,0,\dots,1.2)$	0.971	0.960	0.995	0.973	0.973	0.973
	$(0,0,\dots,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Çizelge 4.10. (Devam) $k = 7$ için verilen testlerin güç değerleri.

$k = 7$		$n = (100,100,100,100,100,100,100)$					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_7)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
	$(0,0,\dots,0.3)$	0.507	0.416	0.506	0.520	0.513	0.513
	$(0,0,\dots,0.6)$	0.993	0.988	0.994	0.996	0.513	0.996
$(1,1,1,1,1,1,1)$	$(0,0,\dots,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,0.3)$	0.406	0.397	0.568	0.423	0.409	0.408
	$(0,0,\dots,0.6)$	0.973	0.973	0.993	0.974	0.972	0.971
$\begin{pmatrix}0.2,0.4,0.6,0.8,1\\1.2,1.4\end{pmatrix}$	$(0,0,\dots,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		$n = (50,100,150,200,250,300,350)$					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_7)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
	$(0,0,\dots,0.3)$	0.970	0.953	0.970	0.972	0.970	0.970
	$(0,0,\dots,0.6)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$(1,1,1,1,1,1,1)$	$(0,0,\dots,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,0.3)$	0.928	0.918	0.975	0.935	0.930	] 0.93
	$(0,0,\dots,0.6)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$\begin{pmatrix}0.2,0.4,0.6,0.8,1\\1.2,1.4\end{pmatrix}$	$(0,0,\dots,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		$n = (350,300,250,200,150,100,50)$					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_7)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
	$(0,0,\dots,0.3)$	0.300	0.219	0.291	0.266	0.266	0.266
	$(0,0,\dots,0.6)$	0.889	0.834	0.895	0.862	0.862	0.862
$(1,1,1,1,1,1,1)$	$(0,0,\dots,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,0.3)$	0.226	0.196	0.344	0.205	0.207	0.208
	$(0,0,\dots,0.6)$	0.760	0.723	0.890	0.716	0.724	0.723
$\begin{pmatrix}0.2,0.4,0.6,0.8,1\\1.2,1.4\end{pmatrix}$	$(0,0,\dots,0.9)$	0.989	0.984	0.998	0.984	0.984	0.984
	$(0,0,\dots,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
		$n = (200,200,200,200,200,200,200)$					
$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_7^2)$	$(\mu_1, \dots \mu_7)$	W	SS	BF	GF	PB	FY
	$(0,0,\dots,0.3)$	0.851	0.793	0.851	0.848	0.845	0.844
	$(0,0,\dots,0.6)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$(1,1,1,1,1,1,1)$	$(0,0,\dots,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,0.3)$	0.740	0.738	0.869	0.722	0.717	0.716
	$(0,0,\dots,0.6)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$\begin{pmatrix}0.2,0.4,0.6,0.8,1\\1.2,1.4\end{pmatrix}$	$(0,0,\dots,0.9)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.2)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$(0,0,\dots,1.5)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Çizelge 4.5, 4.6 ve 4.7’de verilen testlerin I. tip hata oranları incelendiğinde aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır;

1. Küçük hacimli örneklemlerde GF ve W testlerinin özellikle $k = 5$ ve 7 için I. tip hata oranları $\alpha = 0.05$ anlam düzeyini geçmektedir. Örneklem hacmi artıkça bu testlerin I. tip hata oranları anlam düzeyine yaklaşmaktadır.
2. FY testinin I. tip hata oranları özellikle küçük hacimli örneklemlerde $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinin altındadır.
3. Küçük hacimli örneklemlerde W, SS ve BF testlerinin I. tip hata oranları varyansların heterojenliğinden etkilenmektedir. SS testinin I. tip hata oranları büyük hacimli örneklemlerde dahi $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinin oldukça altındadır.
4. Küçük hacimli örneklemlerde PB testinin I. tip hata oranları FY testine göre $\alpha = 0.05$ anlam düzeyine daha yakındır. Orta ve büyük hacimli örneklemlerde ise PB ve FY testlerinin I. tip hata oranları birbirilerine yakındır.
5. Varyansların eşit olduğu durumlarda küçük hacimli örneklemlerde BF testinin I. tip hata oranları anlam düzeyinin altında iken orta ve büyük hacimli örneklemlerde BF testinin I. tip hata oranları diğer testlere göre $\alpha = 0.05$ anlam düzeyine daha yakındır.

Çizelge 4.8,4.9 ve 4.10’ da verilen testlerin güç değerleri incelendiğinde aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır;

1. Bütün gruplar için varyanslar eşit iken, küçük ve orta hacimli örneklemlerde genel olarak GF testinin güç değerleri diğer testlere göre daha yüksektir. Büyük hacimli örneklemlerde ise BF testinin güç değerleri diğer testlere göre daha yüksektir.
2. Varyanslar eşit iken büyük hacimli örneklemlerde W ve BF testlerinin güç değerleri birbirlerine yakındır.
3. Varyanslar farklı iken BF testinin güç değerleri diğer testlere göre daha yüksektir.

4. Verilen testler arasında SS ve FY testlerinin güç değerleri diğer testlere göre daha düşüktür.
5. Örneklem hacmi artıkça testlerin güç değerleri beklenildiği gibi 1'e yaklaşmaktadır.

4.3. İki Lognormal Anakütlenin Ortalamalarını Karşılaştırmak için Simülasyon Çalışması

Bu bölümde büyük örneklem (Z) testi, Krisnamoorthy ve Mathew (KM) tarafından geliştirilen test, Abdollahnezhad ve ark. (AB) tarafından geliştirilen test ve parametrik bootstrap yöntemine (PBY) dayanan testi karşılaştırmak için simülasyon çalışması yapılmıştır.

Testleri karşılaştırırken örneklem hacimlerinin ve varyansların eşit ve farklı olduğu durumlar dikkate alınmıştır. Testlerin I. tip hata oranları ve güç değerleri bulunurken anlam düzeyi $\alpha = 0.05$ olarak belirlenmiştir.

Verilen testlerin kodları R programında yazıldı. Z testinin I. tip hata oranlarını ve güç değerlerini bulmak için tekrar sayısı 50000 olarak belirlenmiştir. Genelleştirilmiş yaklaşıma dayanan KM, AB ve PBY testleri için yapılan simülasyon çalışması iki aşamadan oluşmuştur. Birinci aşamada 2500 tekrar yapılarak $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, s_1^2, s_2^2)$ gözlem değerleri üredilmiştir. İkinci aşamada 2500 tekrar yapılarak KM, AB ve PBY testlerin p-değerleri hesaplanmıştır. Bu dört testin I. tip hata oranları, varyanslar eşit iken Çizelge 4.11'de, varyanslar farklı iken Çizelge 4.12'de ve güç değerleri Çizelge 4.13'te gösterilmiştir.

Çizelge 4.11. Varyanslar eşit iken iki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için verilen testlerin I. tip hata oranları.

(n_1, n_2)	(μ_1, μ_2)	(σ_1^2, σ_2^2)	Z	KM	AB	PBY
(5,5)	(0,0)	(2,2)	0.049	0.046	0.042	0.091
		(4,4)	0.032	0.046	0.044	0.124
		(6,6)	0.023	0.046	0.046	0.130
		(8,8)	0.019	0.048	0.046	0.136
		(10,10)	0.015	0.047	0.045	0.142
(10,10)	(0,0)	(2,2)	0.043	0.044	0.046	0.069
		(4,4)	0.032	0.044	0.045	0.068
		(6,6)	0.025	0.039	0.048	0.077
		(8,8)	0.020	0.040	0.048	0.079
		(10,10)	0.018	0.041	0.048	0.081
(25,25)	(0,0)	(2,2)	0.045	0.041	0.045	0.059
		(4,4)	0.041	0.049	0.049	0.060
		(6,6)	0.037	0.045	0.049	0.064
		(8,8)	0.035	0.045	0.047	0.065
		(10,10)	0.034	0.046	0.048	0.064
(50,50)	(0,0)	(2,2)	0.047	0.043	0.045	0.055
		(4,4)	0.045	0.043	0.042	0.055
		(6,6)	0.042	0.044	0.045	0.053
		(8,8)	0.043	0.043	0.046	0.055
		(10,10)	0.042	0.046	0.047	0.056
(100,100)	(0,0)	(2,2)	0.049	0.046	0.042	0.052
		(4,4)	0.048	0.046	0.049	0.056
		(6,6)	0.047	0.046	0.050	0.054
		(8,8)	0.045	0.043	0.050	0.057
		(10,10)	0.046	0.042	0.049	0.060
(200,200)	(0,0)	(2,2)	0.049	0.046	0.052	0.056
		(4,4)	0.047	0.046	0.052	0.050
		(6,6)	0.050	0.044	0.054	0.052
		(8,8)	0.048	0.044	0.056	0.055
		(10,10)	0.049	0.044	0.052	0.053
(10,20)	(0,0)	(2,2)	0.051	0.043	0.047	0.054
		(4,4)	0.045	0.044	0.051	0.056
		(6,6)	0.043	0.042	0.050	0.059
		(8,8)	0.042	0.044	0.050	0.059
		(10,10)	0.041	0.045	0.051	0.059

Çizelge 4.11. (Devam) Varyanslar eşit iken iki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için verilen testlerin I. tip hata oranları.

(n_1, n_2)	(μ_1, μ_2)	(σ_1^2, σ_2^2)	Z	KM	AB	PBY
		(2,2)	0.074	0.049	0.046	0.072
		(4,4)	0.075	0.048	0.045	0.090
$(20,10)$	$(0,0)$	(6,6)	0.076	0.046	0.044	0.091
		(8,8)	0.076	0.044	0.043	0.091
		(10,10)	0.077	0.045	0.044	0.092
		(2,2)	0.050	0.047	0.054	0.060
		(4,4)	0.046	0.047	0.059	0.059
$(25,50)$	$(0,0)$	(6,6)	0.046	0.046	0.055	0.060
		(8,8)	0.044	0.048	0.054	0.062
		(10,10)	0.044	0.048	0.053	0.063
		(2,2)	0.066	0.046	0.057	0.068
		(4,4)	0.069	0.051	0.058	0.066
$(50,25)$	$(0,0)$	(6,6)	0.069	0.051	0.058	0.069
		(8,8)	0.070	0.052	0.058	0.072
		(10,10)	0.070	0.052	0.059	0.071
		(2,2)	0.028	0.058	0.055	0.051
		(4,4)	0.021	0.051	0.051	0.053
$(25,100)$	$(0,0)$	(6,6)	0.018	0.050	0.050	0.048
		(8,8)	0.016	0.047	0.052	0.046
		(10,10)	0.015	0.045	0.053	0.051
		(2,2)	0.056	0.046	0.040	0.050
		(4,4)	0.056	0.052	0.039	0.048
$(100,25)$	$(0,0)$	(6,6)	0.057	0.050	0.038	0.057
		(8,8)	0.059	0.049	0.040	0.059
		(10,10)	0.058	0.049	0.040	0.061
		(2,2)	0.060	0.042	0.051	0.059
		(4,4)	0.064	0.046	0.052	0.054
$(100,50)$	$(0,0)$	(6,6)	0.065	0.045	0.049	0.056
		(8,8)	0.066	0.045	0.050	0.062
		(10,10)	0.066	0.049	0.050	0.062
		(2,2)	0.050	0.049	0.041	0.047
		(4,4)	0.047	0.050	0.041	0.051
$(50,100)$	$(0,0)$	(6,6)	0.048	0.052	0.043	0.054
		(8,8)	0.046	0.052	0.043	0.054
		(10,10)	0.048	0.049	0.045	0.054

Çizelge 4.12. Varyanslar farklı iken iki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için verilen testlerin I. tip hata oranları.

(n_1,n_2)	(μ_1,μ_2)	(σ_1^2,σ_2^2)	Z	KM	AB	PBY
(5,5)	(1,0)	(2,4)	0.101	0.056	0.097	0.128
	(1,0)	(6,8)	0.053	0.055	0.091	0.148
	(1,0)	(12,14)	0.029	0.053	0.086	0.119
	(2,0)	(2,6)	0.142	0.061	0.173	0.124
	(2,0)	(10,14)	0.053	0.058	0.141	0.132
	(2,0)	(16,20)	0.033	0.057	0.129	0.128
(10,10)	(1,0)	(2,4)	0.089	0.056	0.168	0.091
	(1,0)	(6,8)	0.059	0.047	0.147	0.109
	(1,0)	(12,14)	0.042	0.048	0.125	0.090
	(2,0)	(2,6)	0.115	0.052	0.330	0.086
	(2,0)	(10,14)	0.062	0.054	0.259	0.101
	(2,0)	(16,20)	0.048	0.052	0.226	0.094
(25,25)	(1,0)	(2,4)	0.076	0.054	0.332	0.069
	(1,0)	(6,8)	0.060	0.051	0.284	0.077
	(1,0)	(12,14)	0.052	0.050	0.227	0.069
	(2,0)	(2,6)	0.092	0.055	0.694	0.065
	(2,0)	(10,14)	0.064	0.055	0.511	0.065
	(2,0)	(16,20)	0.056	0.053	0.443	0.072
(50,50)	(1,0)	(2,4)	0.068	0.054	0.549	0.053
	(1,0)	(6,8)	0.059	0.047	0.455	0.057
	(1,0)	(12,14)	0.053	0.051	0.346	0.053
	(2,0)	(2,6)	0.080	0.055	0.945	0.048
	(2,0)	(10,14)	0.061	0.051	0.799	0.054
	(2,0)	(16,20)	0.056	0.052	0.713	0.055
(100,100)	(1,0)	(2,4)	0.063	0.051	0.836	0.043
	(1,0)	(6,8)	0.057	0.047	0.712	0.052
	(1,0)	(12,14)	0.053	0.046	0.567	0.059
	(2,0)	(2,6)	0.072	0.054	0.997	0.051
	(2,0)	(10,14)	0.059	0.048	0.980	0.053
	(2,0)	(16,20)	0.055	0.048	0.941	0.059
(5,25)	(1,0)	(2,4)	0.025	0.050	0.264	0.054
	(1,0)	(6,8)	0.004	0.050	0.218	0.051
	(1,0)	(12,14)	0.001	0.049	0.176	0.040
	(2,0)	(2,6)	0.040	0.061	0.590	0.066
	(2,0)	(10,14)	0.002	0.051	0.405	0.052
	(2,0)	(16,20)	0.001	0.051	0.354	0.039

Çizelge 4.12. (Devam) Varyanslar farklı iken iki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için verilen testlerin I. tip hata oranları.

(n_1, n_2)	(μ_1, μ_2)	(σ_1^2, σ_2^2)	Z	KM	AB	PBY
(10,25)	(1,0)	(2,4)	0.047	0.050	0.294	0.055
	(1,0)	(6,8)	0.020	0.048	0.243	0.061
	(1,0)	(12,14)	0.010	0.048	0.198	0.055
	(2,0)	(2,6)	0.068	0.056	0.626	0.066
	(2,0)	(10,14)	0.018	0.049	0.472	0.066
	(2,0)	(16,20)	0.011	0.047	0.401	0.058
(50,25)	(1,0)	(2,4)	0.090	0.051	0.362	0.070
	(1,0)	(6,8)	0.083	0.053	0.304	0.072
	(1,0)	(12,14)	0.080	0.052	0.255	0.073
	(2,0)	(2,6)	0.102	0.056	0.724	0.066
	(2,0)	(10,14)	0.088	0.052	0.569	0.075
	(2,0)	(16,20)	0.084	0.054	0.489	0.076
(100,25)	(1,0)	(2,4)	0.097	0.052	0.372	0.052
	(1,0)	(6,8)	0.097	0.052	0.292	0.055
	(1,0)	(12,14)	0.097	0.049	0.232	0.062
	(2,0)	(2,6)	0.106	0.057	0.747	0.054
	(2,0)	(10,14)	0.102	0.051	0.585	0.059
	(2,0)	(16,20)	0.101	0.051	0.509	0.061
(10,100)	(1,0)	(2,4)	0.019	0.060	0.475	0.053
	(1,0)	(6,8)	0.003	0.053	0.359	0.042
	(1,0)	(12,14)	0.001	0.045	0.282	0.037
	(2,0)	(2,6)	0.028	0.056	0.930	0.055
	(2,0)	(10,14)	0.002	0.046	0.702	0.042
	(2,0)	(16,20)	0.001	0.045	0.595	0.033
(25,100)	(1,0)	(2,4)	0.040	0.049	0.621	0.049
	(1,0)	(6,8)	0.024	0.046	0.478	0.048
	(1,0)	(12,14)	0.017	0.048	0.377	0.051
	(2,0)	(2,6)	0.052	0.058	0.989	0.042
	(2,0)	(10,14)	0.023	0.052	0.893	0.049
	(2,0)	(16,20)	0.018	0.048	0.801	0.050
(50,100)	(1,0)	(2,4)	0.054	0.051	0.758	0.047
	(1,0)	(6,8)	0.042	0.048	0.623	0.054
	(1,0)	(12,14)	0.037	0.049	0.486	0.058
	(2,0)	(2,6)	0.064	0.055	0.996	0.044
	(2,0)	(10,14)	0.043	0.047	0.949	0.056
	(2,0)	(16,20)	0.038	0.049	0.893	0.058

Çizelge 4.13. İki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için verilen testlerin güç değerleri.

(n_1, n_2)	(μ_1, μ_2)	(σ_1^2, σ_2^2)	Z	KM	AB	PBY
(5,5)	(0,0)	(4,2)	0.060	0.106	0.067	0.240
		(6,2)	0.069	0.166	0.086	0.367
		(8,2)	0.078	0.232	0.100	0.482
		(10,2)	0.082	0.354	0.116	0.557
		(12,2)	0.085	0.380	0.129	0.620
(10,10)	(0,0)	(4,2)	0.125	0.190	0.085	0.285
		(6,2)	0.219	0.352	0.126	0.472
		(8,2)	0.311	0.498	0.171	0.621
		(10,2)	0.394	0.602	0.200	0.714
		(12,2)	0.462	0.668	0.249	0.781
(10,20)	(0,0)	(4,2)	0.111	0.256	0.109	0.267
		(6,2)	0.218	0.446	0.170	0.459
		(8,2)	0.317	0.610	0.226	0.596
		(10,2)	0.405	0.706	0.281	0.709
		(12,2)	0.477	0.762	0.321	0.779
(25,25)	(0,0)	(4,2)	0.312	0.360	0.134	0.390
		(6,2)	0.608	0.684	0.241	0.707
		(8,2)	0.793	0.876	0.317	0.879
		(10,2)	0.890	0.958	0.392	0.941
		(12,2)	0.940	0.976	0.462	0.972
(25,50)	(0,0)	(4,2)	0.335	0.456	0.166	0.441
		(6,2)	0.648	0.782	0.285	0.772
		(8,2)	0.826	0.932	0.394	0.908
		(10,2)	0.912	0.968	0.474	0.956
		(12,2)	0.953	0.986	0.553	0.982

Çizelge 4.13. (Devam) İki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için verilen testlerin güç değerleri.

(n_1, n_2)	(μ_1, μ_2)	(σ_1^2, σ_2^2)	Z	KM	AB	PBY
(50,50)	(0,0)	(4,2)	0.545	0.592	0.194	0.606
		(6,2)	0.890	0.932	0.371	0.914
		(8,2)	0.978	0.982	0.515	0.982
		(10,2)	0.995	1.00	0.644	0.998
		(12,2)	0.998	1.00	0.719	1.00
(100,25)	(0,0)	(4,2)	0.593	0.512	0.148	0.564
		(6,2)	0.928	0.880	0.323	0.914
		(8,2)	0.991	0.982	0.467	0.991
		(10,2)	0.999	1.00	0.570	1.00
		(12,2)	1.00	1.00	0.650	1.00
(50,100)	(0,0)	(4,2)	0.602	0.692	0.240	0.676
		(6,2)	0.921	0.968	0.447	0.954
		(8,2)	0.986	0.994	0.608	0.990
		(10,2)	0.997	1.00	0.733	0.999
		(12,2)	0.999	1.00	0.809	1.00
(100,100)	(0,0)	(4,2)	0.820	0.854	0.310	0.853
		(6,2)	0.993	0.998	0.602	0.997
		(8,2)	0.999	1.00	0.785	1.00
		(10,2)	1.00	1.00	0.892	1.00
		(12,2)	1.00	1.00	0.939	1.00
(200,200)	(0,0)	(4,2)	0.977	0.988	0.487	0.988
		(6,2)	1.00	1.00	0.860	1.00
		(8,2)	1.00	1.00	0.973	1.00
		(10,2)	1.00	1.00	0.996	1.00
		(12,2)	1.00	1.00	0.998	1.00

Çizelge 4.11'de varyansların eşit olduğu durumlarda verilen dört testin I. tip hata oranları incelendiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir,

1. Örneklem hacimlerinden bağımsız olarak varyanslar büyüdükçe Z testinin I. tip hata oranları $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinden uzaklaşmaktadır.
2. AB testinin I. tip hata oranları özellikle örneklem hacimleri farklı iken $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinin ya çok altında ya da çok üstündedir.
3. Örneklem hacimleri küçükken PBY testinin I. tip hata oranları $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinin üstündedir fakat örneklem hacimleri arttıkça bu oranlar $\alpha = 0.05$ anlam düzeyine yaklaşmaktadır.
4. Örneklem hacimleri eşit iken KM testinin I. tip hata oranları $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinin altındadır. Örneklem hacimleri farklı iken bu oranlar $\alpha = 0.05$ anlam düzeyine yakındır.

Çizelge 4.12'de varyansların eşit olmadığı durumlarda verilen dört testin I. tip hata oranları incelendiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edildi;

1. Z testinin I. tip hata oranları $n_1 > n_2$ olduğu durumlarda $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinin çok üstünde, $n_1 < n_2$ olduğu durumlarda $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinin çok altındadır. Z testi varyansların heterojenliğinden ve örneklem hacimlerinin farklı olmasından oldukça etkilenmektedir.
2. Varyanslar eşit iken AB testinin I. tip hata oranları $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinine yakındır. Fakat varyansların eşit olmadığı durumlarda $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinden oldukça uzaklaşmaktadır.
3. Örneklem hacimleri küçük ve eşit olduğu durumlarda PBY testinin I. tip hata oranları $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinin üstünde iken bu oran örnek hacmi büyük veya eşit olmadığı durumlarda $\alpha = 0.05$ anlam düzeyine yaklaşmaktadır.
4. Genel olarak KM testinin I. tip hata oranları diğer testlere göre $\alpha = 0.05$ anlam düzeyine daha yakındır.

Çizelge 4.13’de verilen dört testin güç değerleri incelendiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edildi.

1. Örneklem hacimleri $(5,5)$ iken Z testinin güç değerleri diğer testlere göre daha düşükken örneklem hacimleri arttıkça AB testinin güç değerleri diğer testlere göre daha düşüktür.
2. Varyansların farklı olduğu durumlarda AB testinin I. tip hata oranları $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinin çok üstünde ve güç değerlerinin de diğer testlere göre düşük olmasından bu testi pratikte kullanmak araştırmacıları yanlış sonuçlara götürebilir.
3. Küçük hacimli örneklemlerde PBY testinin güç değerleri diğer testlere göre daha yüksektir. Fakat örneklem hacmi arttıkça genel olarak KM testinin güç değerleri diğer testlere göre daha yüksektir.

5. UYGULAMALAR

Bu bölümde literatürde yer alan gerçek veri setleri kullanılarak önceki bölümlerde verilen testlerin uygulaması yapılmıştır.

5.1. BF Problemi için Uygulamalar

Varyansların farklı olduğu durumda iki normal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırma problemi için bu bölümde gerçek veri setleri ile uygulama çalışması ele alınmıştır (Weerahandi 2003).

5.1.1. Gübre markalarının karşılaştırılması

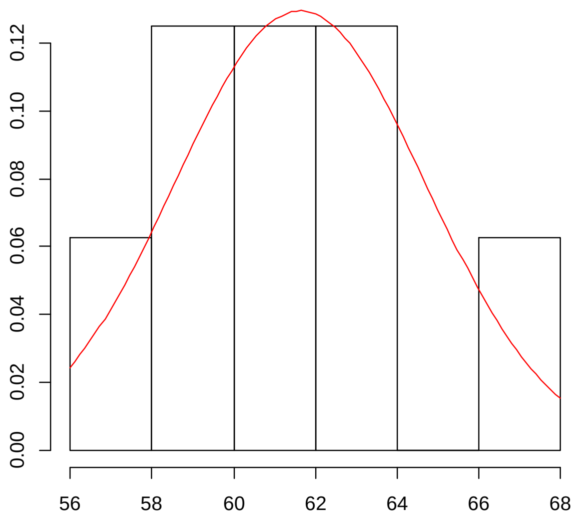
Bir çiftçi mısır tarlalarında A ve B gibi iki gübre markasını karşılaştırmak istiyor. Aynı şartlar altında A markası 8 tarlada B markası 7 tarlada kullanılıyor. Bu tarlalardan alınan ürün miktarları ile ilgili veri seti çizelge 5.1' de ve veri setinin özet bilgileri çizelge 5.2' de verilmiştir.

Çizelge 5.1. A ve B markalarından elde edilen ürün miktarları.

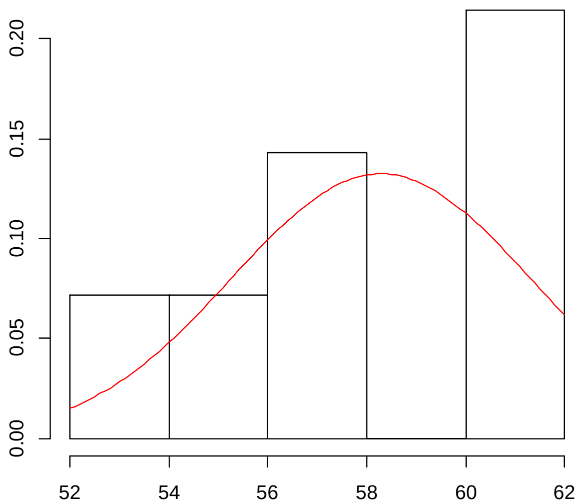
Marka	Elde edilen ürün miktarları							
A	63	59	62	68	63	60	57	61
B	56	61	58	62	61	63	57	

Çizelge 5.2. A ve B markalarından elde edilen ürün miktarları için özet bilgiler.

Marka	Örneklem Hacmi (n_i)	Örneklem Ortalaması ($\bar{x}_i$)	Örneklem Varyansı (s_i^2)
A	8	61.625	10.839
B	7	59.714	7.238

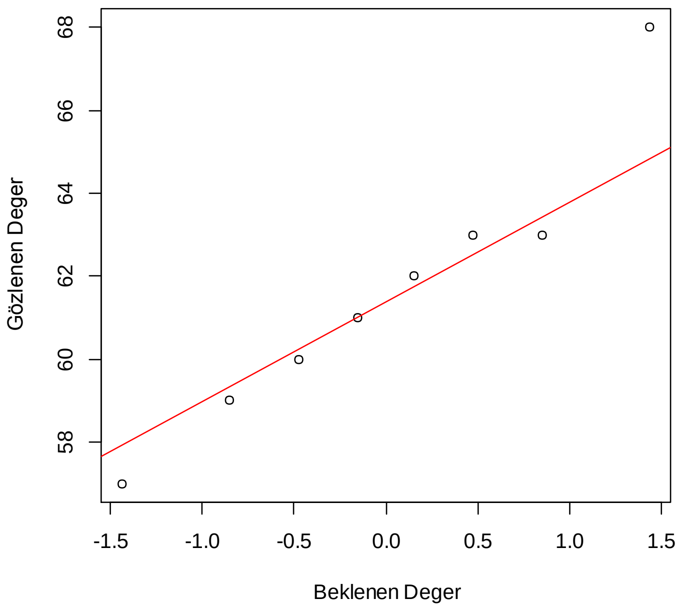


Şekil 5.1. A markasının verilerinin normal olasılık yoğunluk fonksiyonu ile histogram grafiği.

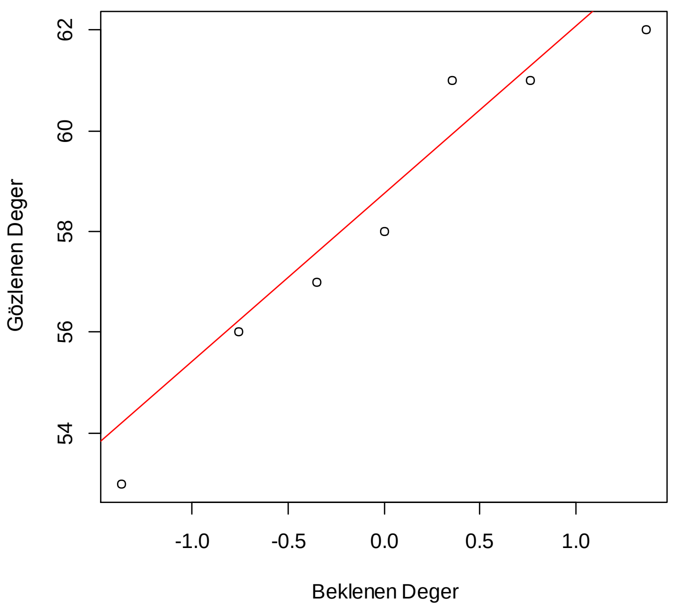


Şekil 5.2. B markasının verilerinin normal olasılık yoğunluk fonksiyonu ile histogram grafiği.

Gözlenen örneklem dağılımları, normal veya lognormal gibi kuramsal dağılımlarla karşılaştırmak için Kolmogorov-Smirnov (K-S) uyum iyiliği testi çok sık kullanılır.



Şekil 5.3. A markasının verileri için normallik grafiği.



Şekil 5.4. B markasının verileri için normallik grafiği.

İki markanın verilerinin normal dağılıma uygunluğunu test etmek için,

H_0: Veriler normal dağılıma uygundur

H_1: Veriler normal dağılıma uygun değildir şeklindeki hipotezler ele alınsın. Bu hipotezleri test etmek için K-S uyum iyiliği testi kullanıldığında A ve B markalarının verilerinin p-değerleri sırasıyla 0.897 ve 0.794 şeklinde bulunur. Bu p-değerlerine göre 0.05 anlam düzeyi için H_0 hipotezi doğrudur dolayısıyla iki markanın verisi de normal dağılıma uygundur. A ve B markalarının verilerinin normal olasılık yoğunluk fonksiyonu ile histogram grafiği sırasıyla şekil 5.1 ve şekil 5.2' de ve normallik grafikleri (normal probability plot) şekil 5.3 ve şekil 5.4' de gösterilmiştir.

İki normal dağılan A ve B markalarının verilerinden elde edilen ortalama ürün miktarlarını karşılaştırmak için,

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \text{ ve } H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \tag{5.1}$$

şeklindeki hipotezler ele alınsın. Burada μ_1 ve μ_2 sırasıyla A ve B markalarından elde edilen ortalama ürün miktarlarıdır. Bu hipotezler için verilen testlerin p-değerleri, güven aralıkları ve aralık uzunlukları çizelge 5.3' de gösterilmiştir.

Çizelge 5.3. Verilen testlerin p-değerleri, güven aralıkları ve aralık uzunlukları.

Test	p-değeri	Güven Aralığı	Aralık uzunlukları
Klasik-t	0.123	(-1.428,5.250)	6.678
PY	0.121	(-1.961,2.040)	4.001
GP	0.153	(-1.993,5.777)	7.770
WS	0.119	(-1.429,5.251)	6.680
CC	0.161	(-1.798,5.621)	7.419
SSS	0.186	(-1.981,5.803)	7.784

Çizelge 5.3' deki sonuçlar incelendiğinde 0.05 anlam düzeyi için bütün testler, iki gübre markasının arasında istatistiksel olarak anlamlı fark yoktur sonucunu bulmaktadır. Bu testlerin aralık uzunlukları incelendiğinde PY testin aralık uzunluğu diğer testlere göre daha kısadır.

5.1.2. İki işçinin iş tamamlama sürelerinin karşılaştırılması

Bir dikiş fabrikasındaki A ve B işçilerinin aynı şartlardaki 10 elbiseyi dikiş süreleri karşılaştırılmak isteniyor. Bu işçilerin dikiş süreleri ile ilgili veri seti çizelge 5.4' de ve veri setinin özet bilgileri çizelge 5.5' de gösterilmiştir. İki işçinin verilerinin normal dağılıma uygunluğunu test etmek için,

H_0: Veriler normal dağılıma uygundur

H_1: Veriler normal dağılıma uygun değildir

şeklindeki hipotezler ele alınsın. Bu hipotezleri test etmek için K-S testi kullanıldığında A ve B işçilerinin verilerinin p-değerleri sırasıyla 0.904 ve 0.198 şeklinde bulunur. Bu p-değerlerine göre iki grubun verileri de normal dağılıma uygundur.

Çizelge 5.4. A ve B işçilerinin 10 elbiseyi dikiş süreleri.

İşçi	Dikiş süreleri (dk.)									
A	3.71	3.35	3.78	4.85	4.05	3.55	3.04	2.62	3.65	3.24
B	3.95	3.70	3.73	4.29	3.58	3.74	3.54	4.65	1.53	4.23

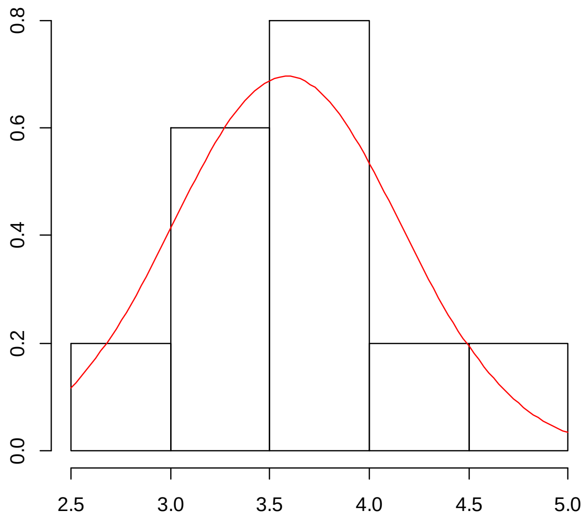
Çizelge 5.5. A ve B işçilerinin 10 elbiseyi dikiş sürelerinin özet bilgileri.

İşçi	Örneklem Hacmi (n_i)	Örneklem Ortalaması ($\bar{x}_i$)	Örneklem Varyansı (s_i^2)
A	10	3.584	0.328
B	10	3.694	0.635

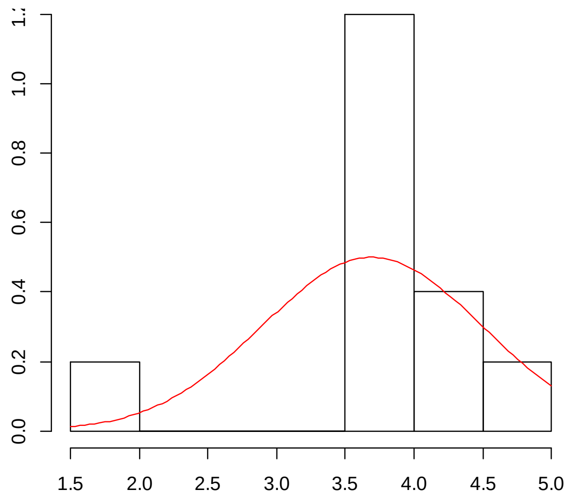
A ve B işçilerinin verilerinin normal olasılık yoğunluk fonksiyonu ile histogram grafiği sırasıyla şekil 5.5 ve şekil 5.6' de ve normallik grafikleri şekil 5.7 ve şekil 5.8' de gösterilmiştir. İki işçinin ortalama işi tamamlama sürelerini karşılaştırmak için aşağıdaki hipotezler ele alınsın,

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \text{ ve } H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \tag{5.2}$$

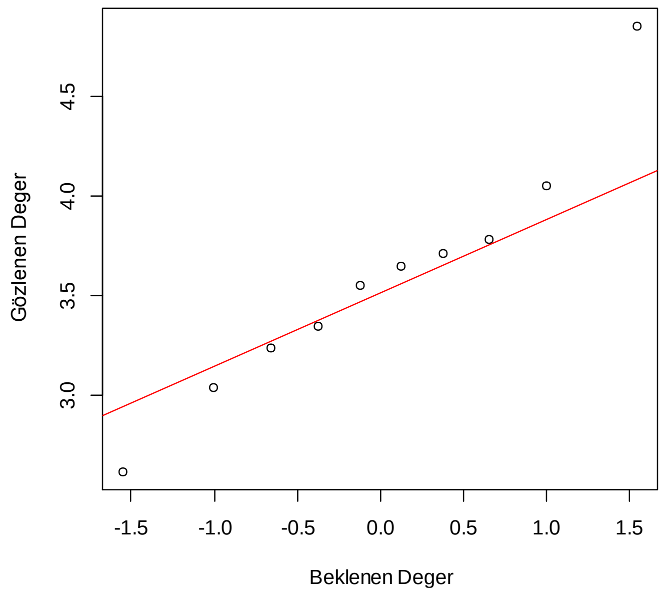
Burada μ_1 ve μ_2 sırasıyla A ve B işçilerinin ortalama işi tamamlama süreleridir. Bu hipotezler için verilen testlerin p-değerleri, güven aralıkları ve aralık uzunlukları çizelge 5.6' da gösterilmiştir.



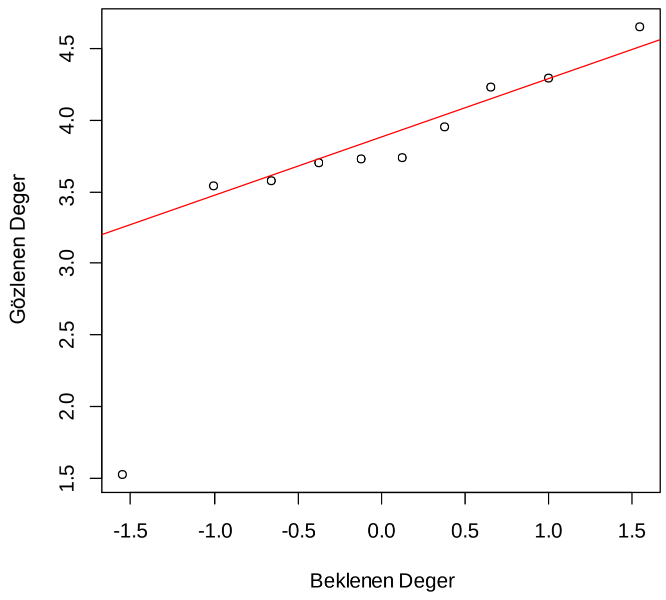
Şekil 5.5. A işçisinin verilerinin normal olasılık yoğunluk fonksiyonu ile histogram grafiği.



Şekil 5.6. B işçisinin verilerinin normal olasılık yoğunluk fonksiyonu ile histogram grafiği.



Şekil 5.7. A işçisinin verileri için normallik grafiği.



Şekil 5.8. B işçisinin verileri için normallik grafiği.

Çizelge 5.6' daki sonuçlar incelendiğinde 0.05 anlam düzeyi için bütün testler, iki işçinin işi tamamlama sürelerinin arasında istatistiksel olarak anlamlı fark yoktur sonucunu bulmaktadır. Bu testlerin aralık uzunlukları incelendiğinde PY testin aralık uzunluğu diğer testlere göre daha kısadır.

Çizelge 5.6. Verilen testlerin p-değerleri, güven aralıkları ve aralık uzunlukları.

Test	p-değeri	Güven Aralığı	Aralık uzunlukları
Klasik-t	0.727	(-0.541,0.761)	1.302
PY	0.633	(-0.119,0.655)	0.774
GP	0.623	(-0.609,0.841)	1.455
WS	0.636	(-0.546,0.767)	1.313
CC	0.623	(-0.591,0.812)	1.403
SSS	0.834	(-0.502,0.722)	1.224

5.2. Tek Yönlü ANOVA için Uygulamalar

Bu bölümde tek yönlü ANOVA için gerçek veri setleri ile uygulama çalışması ele alınmıştır (Weerahandi 2003).

5.2.1. Mısır hibritlerin karşılaştırılması

Bir araştırmacı A, B, C ve D mısır hibriti markalarının ortalama ürün miktarlarını karşılaştırmak istiyor. Aynı şartlar altında 22 arsaya ekilen dört markadan alınan ürün miktarı ile ilgili veri seti çizelge 5.7' de ve veri setinin özet bilgileri çizelge 5.8 verilmiştir. Bu veri setinin dağılımını bulmak için,

H_0: Veriler normal dağılıma uygundur

H_1: Veriler normal dağılıma uygun değildir

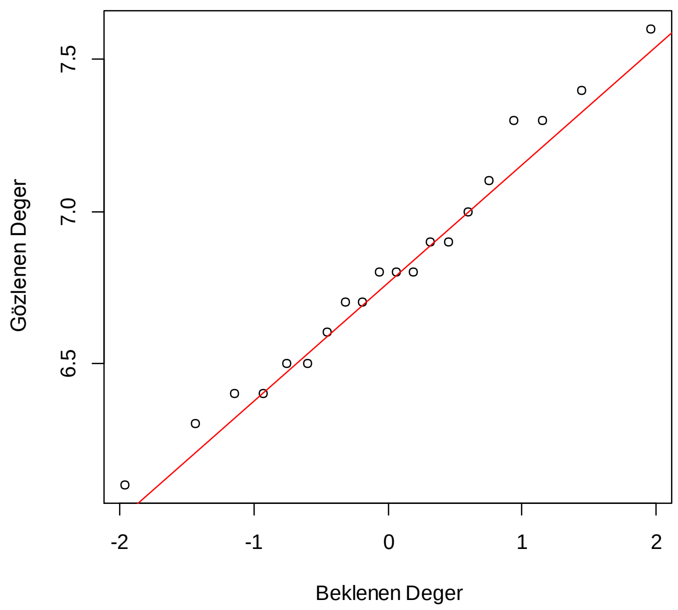
şeklindeki hipotezler ele alınsın. Bu hipotezleri test etmek için K-S uyum iyiliği testi kullanıldığında p-değeri 0.980 olarak bulunmuştur. Bu p-değerine göre 0.05 anlam düzeyi için H_0 hipotezi kabul edilir dolayısıyla veri seti normal dağılıma uygundur. Veri setinin normallik grafiği şekil 5.9'da gösterilmiştir.

Çizelge 5.7. Dört markadan elde edilen ürün miktarları.

Marka	Arsa başına düşen verim					
A	7.4	6.6	6.7	6.1	6.5	7.2
B	7.1	7.3	6.8	6.9	7.0	
C	6.8	6.3	6.4	6.7	6.5	6.8
D	6.4	6.9	7.6	6.8	7.3	

Çizelge 5.8. Dört markadan elde edilen ürün miktarları için özet bilgiler.

Marka	Örneklem Hacmi (n_i)	Örneklem Ortalaması ($\bar{x}_i$)	Örneklem Varyansı (s_i^2)
A	6	6.750	0.435
B	5	7.020	0.172
C	6	6.583	0.195
D	5	7.000	0.415



Şekil 5.9. Mısır hibriti veri seti için normallik grafiği.

Normal dağılan dört grubun ortalamasını karşılaştırmak için,

$$H_0 : \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D$$
$$H_1 : \text{En az bir ortalama diğerinden farklıdır} \qquad (5.3)$$

hipotezleri ele alınsın. Burada μ_A, μ_B, μ_C ve μ_D sırasıyla A, B, C ve D markalarının ortalama ürün miktarlarıdır. Bu hipotezler için, verilen testlerin *p*-değerleri çizelge 5.9' da ifade edilmiştir.

Çizelge 5.9. Verilen testlerin *p*-değerleri.

Testler	*p*-değeri
Klasik *F*	0.179
W	0.020
SS	0.054
BF	0.132
GF	0.011
PB	0.029
FP	0.048

Çizelge 5.9' daki sonuçlar incelendiğinde anlam düzeyi 0.05 için klasik *F* ve BF testleri dört marka arasında istatistiksel olarak anlamlı fark yoktur sonucunu bulurken diğer testler dört marka arasında istatistiksel olarak anlamlı fark vardır sunucunu bulmaktadır.

5.2.2. Beton demirlerin dayanıklılığının karşılaştırılması

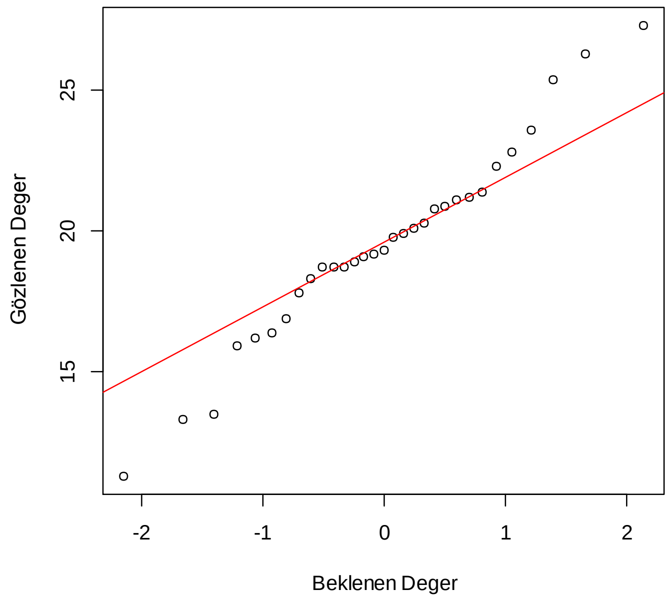
Bir mühendis dört beton demiri markasının dayanıklılığını karşılaştırmak istiyor. Aynı şartlar altında A, B, C ve D markalarının dayanıklılık değerleri ile ilgili veri seti çizelge 5.10'da, veri setinin özet bilgiler çizelge 5.11'de verilmiştir.

Çizelge 5.10. Dört demir markasının dayanıklılık değerleri.

Marka	Dayanıklılık değerleri								
A	21.4	13.5	21.1	13.3	18.9	19.2	18.3		
B	27.3	22.3	16.9	11.3	26.3	19.8	16.2	25.4	
C	18.7	19.1	16.4	15.9	18.7	20.1	17.8		
D	19.9	19.3	18.7	20.3	22.8	20.8	20.9	23.6	21.2

Çizelge 5.11. Dört markanın dayanıklılık değerleri için özet bilgiler.

Anakütle	Örneklem Hacmi (n_i)	Örneklem Ortalaması $(\bar{x}_i)$	Örneklem Varyansı (s_i^2)
A Markası	7	17.96	10.956
B Markası	8	20.69	31.922
C Markası	7	18.10	2.250
D Markası	9	20.83	2.465



Şekil 5.10. Beton demirlerinin dayanıklılık değerleri için normallik grafiği.

Bu veri setinin dağılımını bulmak için,

H_0: Veriler normal dağılıma uygundur

H_1: Veriler normal dağılıma uygun değildir

şeklindeki hipotezler ele alınsın. Bu hipotezleri test etmek için K-S uyum iyiliği testi kullanıldığında p-değeri 0.785 olarak bulunmuştur. Bu p-değerine göre 0.05 anlam düzeyi için H_0 hipotezi kabul edilir dolayısıyla veri seti normal dağılıma uygundur. Veri setinin normallik grafiği şekil 5.10'da gösterilmiştir. Normal dağılan dört grubun ortalamasını karşılaştırmak için,

$$H_0: \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D$$
$$H_1: \text{En az bir ortalama diğerinden farklıdır} \qquad (5.4)$$

şeklindeki hipotezler ele alınsın. Burada μ_A, μ_B, μ_C ve μ_D sırasıyla A, B, C ve D markalarının ortalama dayanıklılık değerleridir. Bu hipotezler için sunulan testlerin p-değerleri çizelge 5.12' de gösterilmiştir.

Çizelge 5.12. Verilen testlerin p-değerleri.

Testler	p-değeri
Klasik *F*	0.211
W	0.018
SS	0.037
BF	0.232
GF	0.010
PB	0.025
FP	0.035

Çizelge 5.12' deki sonuçlar incelendiğinde anlam düzeyi 0.05 için klasik *F* ve BF testleri dört marka arasında istatistiksel olarak anlamlı fark yoktur

sonucunu bulurken diğer testler, dört marka arasında istatistiksel olarak anlamlı fark vardır sunucunu bulmaktadır.

5.3. İki Lognormal Anakütlenin Ortalamalarını Karşılaştırma Problemi için Uygulamalar

Bu bölümde iki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için gerçek veri setleri ile uygulama çalışması ele alınmıştır (Krishnamoorthy ve Mathew 2003).

5.3.1. Karbon monoksit ölçüm verileri

San Fransisco şehrinin kuzeyindeki petrol rafinerisinin bir bacasından çıkan karbon monoksit miktarı değerlendirmek isteniyor. Bunun için rafineri personeli tarafından 16 Nisan-16 Mayıs 1993 tarihleri arasında 31 günlük rafinerinin bir bacasından yükselen karbon monoksit miktarları ölçülmüştür. Ayrıca körfez alanı hava kalitesi yönetim bölgesi (KAHKYB) tarafından 11 Eylül 1990-30 Mart 1993 tarihleri arasında aynı bacadan farklı zamanlarda 9 bağımsız karbon monoksit ölçümü yapılmıştır.

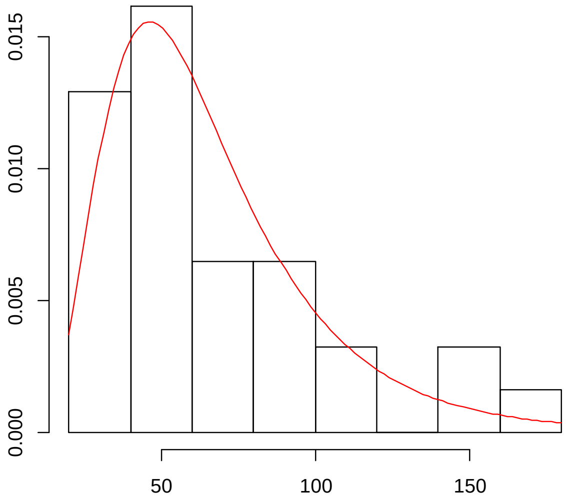
Çizelge 5.13. Rafineri personeli ve KAHKYB tarafından ölçülen karbon monoksit miktarları.

Rafineri personeli tarafından ölçülen karbon monoksit miktarları (1. Grup)												
45	30	38	42	63	43	102	86	99	63	58	34	37
55	58	153	75	58	36	59	43	102	52	30	21	40
141	85	161	86	71								
KAHKYB tarafından ölçülen karbon monoksit miktarları (2. Grup)												
12.5	20	4	20	25	170	15	20	15				

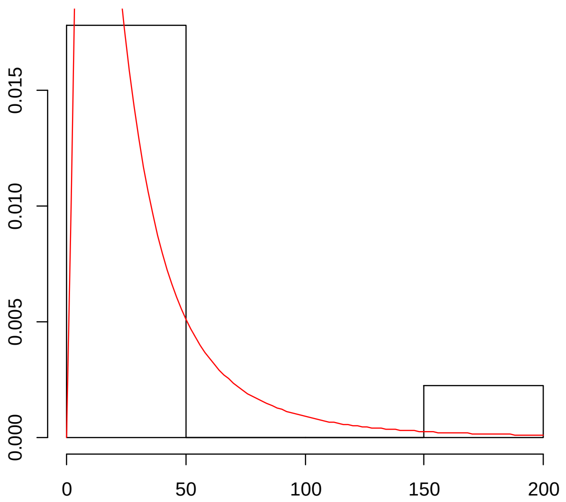
Karbon monoksit ölçümü ile ilgili veri seti çizelge 5.13'da verilmiştir. İki grubun verisinin dağılımını elde etmek için,

H_0: Veriler lognormal dağılıma uygundur

H_1: Veriler lognormal dağılıma uygun değildir



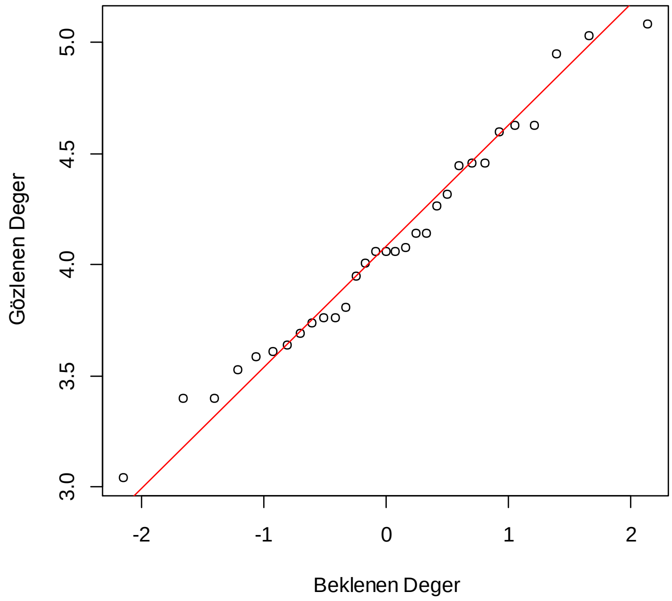
Şekil 5.11. 1. grubun lognormal olasılık dağılım fonksiyonu ile histogram grafiği.



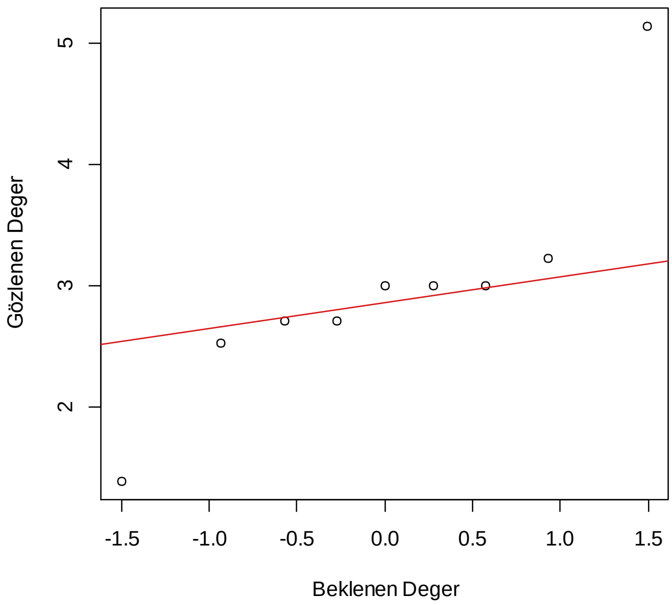
Şekil 5.12. 2. grubun lognormal olasılık dağılım fonksiyonu ile histogram grafiği.

Çizelge 5.14. Logaritması alınmış iki grup için özet bilgiler.

	Örneklem Hacmi (n_i)	Örneklem Ortalaması $(\bar{x}_i)$	Örneklem Varyansı (s_i^2)
1. Grup	31	4.074	0.252
2. Grup	9	2.963	0.945



Şekil 5.13. Logaritması alınmış 1. grup için normallik grafiği.



Şekil 5.14. Logaritması alınmış 2. grup için normallik grafiği.

hipotezleri ele alınsın. Bu hipotezler için K-S testi uygulandığında iki grubun sırasıyla p-değerleri 0.949 ve 0.484 şeklinde bulunmuştur. Bu p-değerlerine göre 0.05 anlam düzeyi için H_0 hipotezi kabul edilir dolayısıyla iki grubun verisi de lognormal dağılıma uygundur. İki grubun lognormal olasılık yoğunluk fonksiyonu ile histogram grafiği şekil 5.11 ve şekil 5.12'de gösterilmiştir. Logaritması alınmış ölçüm verilerinin normallik grafikleri şekil 5.11 ve şekil 5.12'de ve özet bilgileri çizelge 5.14' de verilmiştir.

İki lognormal grubun ortalamasını karşılaştırmak için,

$$H_0: \psi_1 \leq \psi_2 \;\; ve \;\; H_1: \psi_1 > \psi_2 \tag{5.5}$$

hipotezleri ele alınsın. Burada $exp(\psi_1) = exp(\mu_1 + \sigma_1^2/2)$ ve $exp(\psi_2) = exp(\mu_2 + \sigma_2^2/2)$ sırasıyla rafineri personeli ve KAHKYB tarafından ölçülen miktarların ortalamalarıdır. (5.5)' deki hipotezler için dört testin p-değeri çizelge 5.15.'de ifade edilmiştir.

Çizelge 5.15. Verilen testlerin *p*-değerleri.

Testler	*p*-değeri
Z	0.037
KM	0.119
AB	0.154
PBY	0.087

Çizelge 5.15' deki sonuçlar incelendiğinde Z testi iki grup arasında istatistiksel olarak anlamlı fark vardır sonucunu bulurken KM, AB ve PBY testleri iki grup arasında istatistiksel olarak anlamlı fark yoktur sonucunu bulmaktadır.

5.3.2. Yağış miktarı verileri

26 tanesi rassal ve 26 tanesi gümüş nitrat içeren toplam 52 tane buluttan yağan yağmur miktarının ortalaması karşılaştırılmak isteniyor. 52 buluttan elde edilen yağmur miktarları çizelge 5.16' da gösterilmiştir.

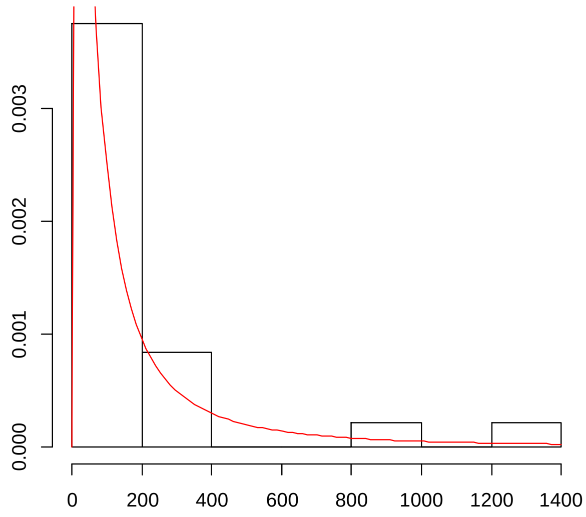
İki grubun verisinin dağılımını elde etmek için,

H_0: Veriler lognormal dağılıma uygundur

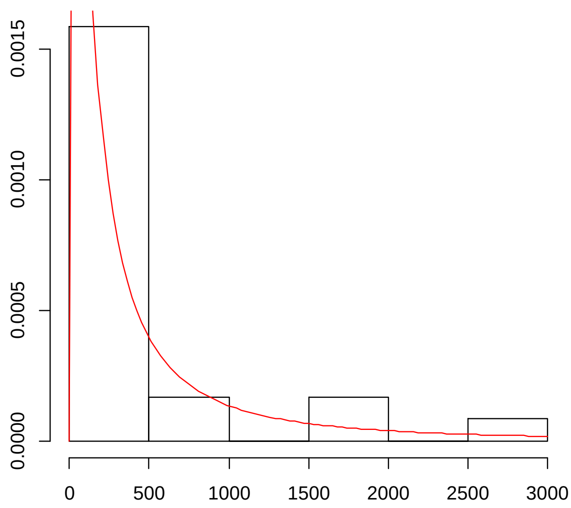
H_1: Veriler lognormal dağılıma uygun değildir.

Çizelge 5.16. 56 tane buluttan yağan yağmur miktarları.

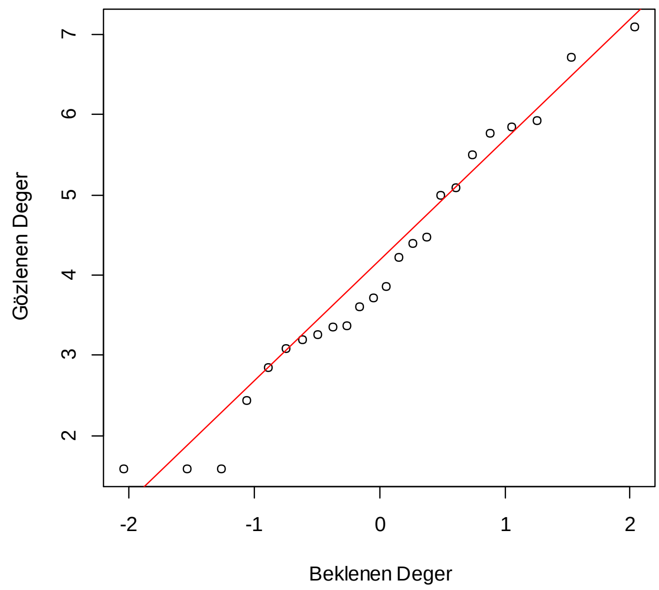
Rassal seçilmiş bulutlardan elde edilen yağış miktarları (1. Grup)								
1202.6	830.1	372.4	345.5	321.2	244.3	163.0	147.8	95.0
87.0	81.2	68.5	47.3	41.1	36.6	29.0	28.6	26.3
26.1	24.4	21.7	17.3	11.5	4.9	4.9	4.9	
Gümüş nitrat içeren bulutlardan elde edilen yağış miktarları (2. Grup)								
2745.6	1697.8	1656.0	978.0	703.4	489.1	430.0	334.1	302.8
274.7	274.7	255.0	242.5	200.7	198.6	129.6	119.0	118.3
115.3	92.4	40.6	32.7	31.4	17.5	7.7	4.1	



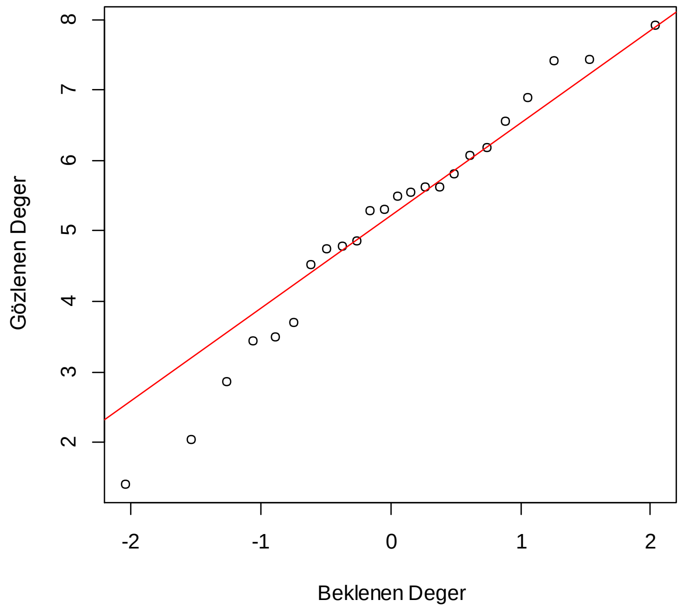
Şekil 5.15. 1. grubun lognormal olasılık dağılım fonksiyonu ve histogram grafiği.



Şekil 5.16. 2. grubun lognormal olasılık dağılım fonksiyonu ile histogram grafiği.



Şekil 5.17. Logaritması alınmış 1. grup için normallik grafiği.



Şekil 5.18. Logaritması alınmış 2. Grup için normallik grafiği.

Çizelge 5.17. Logaritması alınmış iki grup için özet bilgiler.

	Örneklem Hacmi (n_i)	Örneklem Ortalaması $(\bar{x}_i)$	Örneklem Varyansı (s_i^2)
1. Grup	26	5.134	2.560
2. Grup	26	3.990	2.696

hipotezleri ele alınsın. Bu hipotezler için K-S testi uygulandığında iki grubun sırasıyla p-değerleri 0.981 ve 0.854 şeklinde bulunmuştur. Bu p-değerlerine göre 0.05 anlam düzeyi için H_0 hipotezi kabul edilir dolayısıyla iki grubun verisi de lognormal dağılıma uygundur.

İki grubun lognormal olasılık yoğunluk fonksiyonu ile histogram grafiği şekil 5.15 ve şekil 5.16' da gösterilmiştir. Logaritması alınmış verilerin normallik grafikleri şekil 5.17 ve şekil 5.18'de özet bilgileri çizelge 5.17' de ifade edilmiştir.

Bu iki lognormal grubun ortalamasını karşılaştırmak için,

$$H_0: \psi_1 \leq \psi_2 \;\; ve \;\; H_1: \psi_1 > \psi_2 \tag{5.6}$$

hipotezleri ele alınsın. Burada $exp(\psi_1) = exp(\mu_1 + \sigma_1^2/2)$ ve $exp(\psi_2) = exp(\mu_2 + \sigma_2^2/2)$ sırasıyla rassal seçilmiş bulutlardan elde edilen yağış miktarları ve gümüş nitrat içeren bulutlardan elde edilen yağış miktarlarının ortalamasıdır. (5.6)' daki hipotezler için dört testin p-değeri çizelge 5.18'de ifade edilmiştir.

Çizelge 5.18. Verilen testlerin p-değerleri.

Testler	p-değeri
Z	0.059
KM	0.076
AB	0.079
PBY	0.058

Çizelge 5.18'deki sonuçlar incelendiğinde verilen testlerin hepsi iki grup arasında istatistiksel olarak anlamlı fark yoktur sonucunu bulmaktadır.

6. TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

İki veya ikiden fazla normal anakütlenin ortalamalarının eşitliğini test etme problemi için kullanılan klasik testler anakütlelerin normal dağıldığı, varyansların eşitliği ve hataların bağımsızlığı varsayımlarına dayanır. Bu varsayımların geçerli olduğu durumlarda test istatistiğinin dağılımı kolayca bulunur ve ANOVA için kullanılan F testi gibi klasik testler güvenilir şekilde kullanılabilir. Ancak varyansların eşitliği varsayımı sağlanmadığında test istatistiğinin dağılımı bilinmeyen parametrelere bağlıdır. Klasik yöntemler kullanılarak nuisance parametreye bağlı test istatistiğinin dağılımı ancak yaklaşık olarak bulunabilir. Dağılımı yaklaşık olarak bulunan test istatistiğine dayanarak tam olasılıklı hipotez testleri kurmak ve güven aralıklarını elde etmek çoğu zaman mümkün değildir. Dolayısıyla nuisance parametre içeren problemler için kullanılan klasik testler özellikle küçük hacimli örneklemlerde araştırmacıları yanlış sonuçlara götürebilir.

İstatistiksel programlardaki hızlı gelişmeler istatistiksel sonuç çıkarma açısından önemli değişimlere neden olmuştur. Klasik yöntemlerle tam olasılıklı çözümü elde edilemeyen problemler için simülasyon tekniğine dayalı GPD ve PB yöntemleri kullanılarak tam olasılıklı çözümler elde edilmiştir. Bu yöntemler ile nuisance parametrelerin varlığında dahi test değişkenin dağılımı Monte Carlo simülasyon yoluyla elde edilir. Böylece dağılımı bilinmeyen parametrelerden bağımsız elde edilen test değişkeninin red bölgesinin olasılığı p-değeri verir. GPD ve PB yöntemleri veriler hakkında istatistiksel sonuç çıkarmak için pek çok alanda kullanılmıştır.

BF problemi uygulamalarda çok sık karşılaşılan bir problemdir ve bu problemin çözümü için literatürde pek çok klasik yöntem geliştirilmiştir. Ancak klasik yöntemler kullanılarak BF problemi için tam olasılıklı çözümler elde edilememiştir. Özkip ve ark. (2014a) tarafından BF problemi için bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Bu simülasyon çalışmasına göre GPD yöntemine dayanan testin performansının çoğu durumlarda iyi olduğu ortaya çıkmıştır.

Bu çalışmada BF probleminin çözümü için yeni bir parametrik bootstrap yöntemine dayanan PY testi geliştirilmiştir. Geliştirilen bu yöntem literatürdeki klasik *t*, WS, CC, SSS ve GP testleri ile karşılaştırılmıştır. Yapılan simülasyon çalışmasına göre varyansların eşit olduğu durumlarda *t* testinin performansı diğer testlerden daha yüksekken varyansların ve örneklem hacimlerin farklı olduğu durumlarda bu testin I. tip hata oranları anlam düzeyinden uzaklaşmaktadır. CC testinin performansı diğer testlere göre daha düşüktür. SSS testinin güç değerleri CC testinden sonra en düşük güç değerlerine sahip ve örneklem hacimleri farklı olduğu durumlarda bu testin I. tip hata oranları anlam düzeyinden uzaklaşmaktadır. Özellikle orta ve büyük hacimli örneklemlerde WS testinin güç değerleri yüksek ve I. tip hata oranları anlam düzeyine yakındır. Küçük hacimli örneklemlerde GP testinin güç değerleri düşük ve I. tip hata oranları anlam düzeyinin altındadır. Orta ve büyük hacimli örneklemlerde GP ve PY testlerinin güç değerleri yüksek ve I. tip hata oranları anlam düzeyine yakındır.

BF problemi için PY, WS, CC, SSS ve GP testlerinin aralık uzunlukları ve kapsama olasılıkları incelendiğinde PY testinin aralık uzunlukları diğer testlerden daha kısa ve bu testin kapsama olasılıkları diğer testlere göre güven düzeyine daha yakındır. Varyanslar eşit olduğu durumlarda SSS testinin aralık uzunlukları kısa fakat kapsama olasılıkları güven düzeyinden uzaklaşmaktadır. GP testinin kapsama olasılıkları özellikle küçük hacimli örneklemlerde güven düzeyini geçmektedir. Bu testin aralık uzunlukları PY, WS ve CC testlerinin aralık uzunluklarına göre daha uzundur. WS ve CC testlerinin kapsama olasılıkları özellikle orta ve büyük hacimli örneklemlerde güven düzeyine yakındır.

BF problemi için ayrıca GPD yöntemi kullanılarak yeni bir güven aralığı geliştirilmiştir. Geliştirilen bu güven aralığı Weerahandi (1993) tarafından geliştirilen GGA ile karşılaştırılmıştır. Yapılan simülasyon çalışmasına göre GPD yöntemine dayanan yeni yöntemin aralık uzunlukları örneklem hacimleri $n_1 > n_2$ olduğu durumlarda GGA' ya göre daha kısadır. Fakat örneklem hacimleri $n_1 < n_2$ olduğu durumlarda yeni yöntemin aralık uzunlukları GGA' ya göre daha uzundur. Örneklem hacimleri eşit iken yeni yöntemin aralık uzunlukları GGA' ya göre daha kısa ve bu yöntemin kapsama olasılıkları 0.95 güven düzeyine yakın değerler almaktadır.

Varyansların eşitliği varsayımı sağlanmadığında tek yönlü ANOVA için kullanılan klasik *F* testi dayanıklı değildir. Varyansların farklı olduğu durumlarda ANOVA için literatürde pek çok klasik test önerilmiştir. Klasik testler kullanılarak varyansların eşitliği varsayımı sağlanmadığında ANOVA için tam olasılıklı çözüm elde edilemezken GF ve PB testleri kullanılarak tam olasılıklı çözüm elde edilmiştir. Gamage ve Weerahandi (1998) ve Yiğit ve Gökpınar (2010) tarafından yapılan simülasyon çalışmalarına göre PB testi küçük hacimli örneklemlerde daha iyi performans sergilerken orta ve büyük hacimli örneklemlerde GF testi daha iyi performans göstermektedir. Bu çalışmada Varyansların eşitliği varsayımı sağlanmadığında ANOVA için W, SS, BF, PB, FY ve GF testlerinin I. tip hata oranları ve güç değerleri karşılaştırılmıştır. Yapılan simülasyon çalışmasına göre küçük hacimli örneklemlerde SS ve FY testlerinin I. tip hata oranları anlam düzeyinden uzakta ve bu testlerin güç değerleri diğer testlere göre daha düşüktür. Küçük hacimli örneklemlerde W ve GP testlerinin I. tip hata oranları anlam düzeyini geçmektedir. Varyansların eşit olduğu durumlarda bu testlerin güç değerleri diğer testlere göre daha yüksektir. Varyansların farklı olduğu durumlarda BF testin güç değerleri yüksektir fakat bu testin I. tip hata oranları anlam düzeyini geçmektedir. Orta ve büyük hacimli örneklemlerde PB ve FY testlerinin hem I. tip hata oranları hem de güç değerleri birbirlerine yakındır. Örneklem hacmi artıkça testlerin güç değerleri beklenildiği gibi 1'e yaklaşmaktadır.

Pozitif ve sağa çarpık verilerle karşılaşıldığında lognormal dağılım çok yaygın şekilde kullanılır. Lognormal dağılımın ortalaması hem μ'ye hemde σ^2'ye bağlıdır. Dolayısıyla lognormal anakütlenin ortalaması hakkında tam olasılıklı testler kurmak ve güven aralıkları elde etmek oldukça zordur. İki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için likelihood ve GPD yöntemine dayanan çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bu çalışmada iki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için PB yöntemine dayanan yeni bir PBY testi geliştirilmiştir. Geliştirilen bu test Z, KM, AB testleri ile karşılaştırılmıştır. Yapılan simülasyon çalışmasına göre Z testinin I. tip hata oranları varyansların veya örneklem hacimlerinin farklı olduğu durumlarda anlam düzeyinden uzaklaşmaktadır. Varyansların farklı olduğu durumlarda AB testinin I. tip hata oranları anlam düzeyinin çok üstünde ve güç değerlerinin de diğer testlere göre düşük olmasından bu testi pratikte kullanmak araştırmacıları yanlış sonuçlara götürebilir. Küçük hacimli örneklemlerde PBY testinin I. tip hata oranları anlam düzeyini geçmektedir. Fakat örneklem hacmi artıkça bu testin I. tip hata oranları anlam düzeyine yaklaşmaktadır. Küçük hacimli örneklemlerde PBY testinin güç değerleri diğer testlere göre daha yüksekken orta ve büyük hacimli örneklemler de KM testinin güç değerleri diğer testlere göre daha yüksektir.

Sonuç olarak nuisance parametre içeren problemler için klasik testler kullanılarak tam olasılıklı çözümler elde etmek oldukça zordur. Dolayısıyla varyansların eşitliği varsayımı sağlanmadığında normal veya lognormal anakütle ortalamalarını karşılaştırma problemi için kullanılan klasik testler özellikle küçük hacimli örneklemlerde araştırmacıları yanlış sonuçlara götürür. GPD ve PB yöntemleri kullanılarak test istatistiğinin dağılımı simülasyon yoluyla bulunur ve böylece nuisance parametre içeren problemler için tam olasılıklı çözümler elde edilir. Bu tezde nuisance parametrenin varlığında tam olasılıklı çözüm elde etmek için GPD ve PB yöntemleri gösterilmiştir. BF probleminin çözümü için PB yöntemine dayanan yeni bir test geliştirilmiştir. Yapılan simülasyon çalışmasına göre orta ve büyük hacimli örneklemlerde geliştirilen bu testin performansı diğer testlerden daha yüksek olduğu sonucuna ulaşılmıştır. BF problemi için GPD yöntemi kullanılarak yeni bir güven aralığı geliştirilmiştir. Yapılan simülasyon çalışmasına göre örneklem hacimlerinin eşit olduğu durumlarda geliştirilen güven aralığının performansı GGA' nın performansından daha yüksek olduğu sonucu elde edilmiştir. Tek yönlü ANOVA için GPD ve PB yöntemleri ile literatürdeki diğer testler karşılaştırılmıştır. Yapılan simülasyon çalışmasına göre küçük hacimli örneklemler için PB testinin performansı daha iyiyken orta ve büyük hacimli örneklemlerde W ve GP testlerinin performansı daha iyi olduğu anlaşılmıştır. İki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için PB yöntemine dayanan yeni bir test geliştirilmiştir. Yapılan simülasyon çalışmasına göre iki lognormal anakütlenin ortalamalarını karşılaştırmak için GPD yöntemine dayanan KM testinin performansı diğer testlerden daha yüksektir ve KM testinden sonra PBY testinin performansı diğer testlerden daha iyi olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

KAYNAKLAR

Abdollahnezhad, K., Babanezhad, M. ve Jafari A.A. (2012), "Inference on difference of means of two log-normal distributions a generalized approach", *Journal of Statisical and Econemtric Methods*, 1, 125-131.

Alvandi, S.M. ve Malekzadeh, A. (2014), "Simultaneous confidence intervals for ratios of means of several lognormal distributions: A parametric bootstrap approach", *Computational Statistics and Data Analysis*, 69, 133-140.

Aspin, A.A. (1948), "An Examination and Further Development of a formula Arising in the Problem of Comparing Two Mean Values", *Biometrika*, 35, 88-96.

Benton, D. ve Krishnamoorthy, K. (2002), "Performance of the parametric bootstrap methods in small sample interval estimates", *Adv. & Appl. in Stat.,* 2(3), 269- 285.

Behrens, W.V. (1929), "Ein bei trag zur fehlerbere-Chung bei wenigen beobachtungen", *Landwirtschaftliches, Jahrbuch*, 68,807-837.

Brown, M.B. ve Forsythe, A.B. (1974), "The small sample behavior of some statistics which test the equality of several means", *Technometrics*, 16, 129-132.

Casella, B. ve Berger R.L., *Statistical Inference*, Duxbury, A.B.D., 2002

Chang, C. H. ve Pal, N. (2008), "A Revisit to the Behrens–Fisher Problem: Comparison of Five Test Methods", *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 37, 1064-1085.

Chang, C. H. ve Pal, N. (2010), "Comparing several population means: a parametric bootstrap method, and its comparison with usual ANOVA *F* test as well as ANOM", *Comput. Stat.,* 25,71–95

Chen, Y.H. ve Zhou, X.H. (2006), “Interval estimates for the ratio and difference of two lognormal means”, *Statistics in Medicine*, 25, 4099-4113.

Cochran, W.G. ve Cox, G.M. (1950), “Completely Randomized, Randomized Block and Latin Square Designs”, *Experiment Designs*, (Ed: Bradley, R.) John Wiley and Sons: New York, A.B.D., 95-107.

Efron, B. (1979), “Bootstrap methods: Another look at the jackknife”, *Ann. Stat.*, 7, 1-26.

Fisher, R.A. (1935), “The fiducial argument in statistical inference”, *Annals of Eugenics,* 6,391–398.

Fisher, R.A. (1941), “The asymptotic approach to Behrens’ integral with further tables for the d test of significance”, *Annals of Eugenics*, 11,141-172.

Gamage, J. ve Weerahandi, S. (1998), “Size performance of some tests in one-way ANOVA”, *Communications in Statistics and Simulations*, 27(3), 625-640.

Hannig, J. (2009), “On generalized fiducial inference”, *Statistica Sinica*, 19, 491-544.

Hannig, J., Iyer, H. ve Patterson, P. (2006), “Fiducial generalized confidence intervals”, *Journal of the American Statistical Association*, 101, 254-269.

Jafari, A. A. ve Abdollahnezhad, K. (2014), “Inferences on the Means of Two Log-Normal Distributions; A Computational Approach Test”, *Communications in Statistics-Simulation and Computation,* Accepted manuscript.

James, G.S. (1951), “The comparison of several groups of observations when the rations of population variances are unknown”, *Biometrika*, 38, 324-329.

Krishnamoorthy, K. ve Mathew, T. (2003), “Inferences on the means of lognormal distributions using generalized *p*-values and generalized confidence intervals”, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 115,103-121.

Krishnamoorthy, K., Lu, F. ve Mathew, T. (2007), “A parametric bootstrap approach for ANOVA with unequal variances: Fixed and random models”, *Computational Statistics and Data Analysis*, 51, 5731-5742.

Krutchkoff, R.G. (1988), “One-way analysis of variance when the error variances may be unequal”, *Journal of Statistical Computational and Simulations*, 30, 259-271.

Lee, S. ve Ahn, C.H. (2003), “Modified ANOVA for unequal variances”, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 32, 987-1004.

Li, X., Wang, J. ve Liang, H. (2011), “Comparison of several means: A fiducial based approach”, *Computational Statistics and Data Analysis*, 55,1993-2002.

Ma, C.X. ve Tian, L.L. (2009), “A parametric bootstrap approach for testing equality of inverse Gaussian means under heterogeneity”, *Communications in Statistics, Simulation and Computation*, 38, 1153-1160.

Özkip, E., Yazıcı, B., Sezer, A. ve Kan, B., (2012a), “Comparison of Population Means for Skewed Data With Unequal Variances”, In JSM Proceedings-Section on Statistical Computing 2012, *Joint Statistical Meeting (JSM)*, San Diego, ABD, 2524-2529.

Özkip, E., Yazıcı, B. ve Sezer, A., (2012b), “Comparing the Means for Unbalanced Several Skewed Data with Unequal Variances”, Abstracts book, *5th International Conference of the ERCIM Working Group on Computing and Statistics*, Oviedo, İSPANYA.

Özkip, E., Yazıcı, B. ve Sezer, A., (2012c) “Inference on the Mean of Unbalanced Several Lognormal Population Using Generalized *p*-value and Generalized Confidence Intervals”, *8th International Symposium of Statistics (IGS2012)*, Eskişehir, TÜRKİYE, 298-299.

Özkip E., Yazıcı, B. ve Sezer, A., (2013a), “Performance of Some Tests Compares for Equality of Means in Skewed Distribution Data”, In JSM Proceedings JSM-Section on Statistical Computing 2013, *Joint Statistical Meeting (JSM2013)*, Montreal, KANADA, 4650-4662.

Özkip, E., Yazıcı, B. ve Sezer, A., (2013b), "A simulation study for testing equality of unbalanced several gamma means", Abstracts book, *6th International Conference of the ERCIM Working Group on Computing and Statistics*, London, İNGİLTERE.

Özkip, E., Yazıcı, B. ve Sezer, A. (2014a), "A simulation study on tests for the Behrens-Fisher problem", *Türkiye Klinikleri Journal of Biostatistics*, 6(2), 59-66.

Özkip E., Yazıcı, B. ve Sezer, A., (2014b), "Comparison of tests for the ANOVA with Unequal variance", In JSM Proceedings-Section on Statistical Computing 2014, *Joint Statistical Meeting (JSM2014)*, Boston, ABD, 2437-2443.

Öztürk, F., Akdi, Y., Aydoğdu, H., Karabulut, İ., *Parametre Tahmini ve Hipotez Testleri*, Bıçaklar Kitapevi, Ankara, 2006.

Pal, N., Lim, W.K., Ling, C. H. (2007), "A computational approach to statistical inferences" *Journal of Applied Probability & Statistics*, 2(1),13–35.

Rogan, J.C. ve Keselman, H.J. (1977), "Is the ANOVA *F*-test robust variance heterogeneity when sample sizes are equal? An investigation via a coefficient of variation", *Journal of the American Educational Research*, 14, 493-498.

Satterthwaite, F.E. (1946), "An approximate distribution of estimates of variance components", *Biometrics Bull*, 2(6), 110–14.

Scott, A.J. ve Smith, T.M.F. (1971), "Interval estimates for linear combinations of means", Applied Statistics, 20(3), 276-285.

Singh, P., Saxena, K.K. ve Srivastava, O.P. (2002), "Power comparisons of solutions to the Behrens-Fisher problem", *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, 22, 233-250.

Simon, J. L. ve Bruce, P. (1991), "Resampling: A tool for everyday statistical work", *Chance*, 4(1), 22-32.

Sezer, A., Yazıcı, B. ve Özkip, E., (2014), "Pairwise comparisons of 3 normal population means by the Bonferroni correction factor", Abstracts book, 7*th International Conference of the ERCIM Working Group on Computing and Statistics*, Pisa, İTALYA.

Tsui, K.W. ve Weerahandi, S. (1989), "Generalized *p*-values in significance testing of hypotheses in the presence of nuisance parameters", *Journal of the American Statistical Association*, 84,602–607.

Weerahandi, W. (1987), "Testing regression equality with unequal variances", *Econometrica*, 55, 1211-1215.

Weerahandi, S. (1993), "Generalized confidence intervals", *Journal of the American Statistical Association*, 88,899–905.

Weerahandi, S. (1995), "ANOVA under unequal error variances", *Biometrica*, 38, 330-336.

Weerahandi, S., *Exact statistical method for data analysis*, Springer-Verlag, NewYork, ABD, 2002.

Welch, B.L. (1938), "The significance of the difference between two means when the population variances are unequal", *Biometrika*, 29, 350–362.

Welch, B.L. (1947), "The Generalization of 'Student's' Problem When Several Different Population Variances Are Involved", *Biometrika*, 34, 28-35.

Welch, B.L. (1951), "On the comparison of several mean values: An alternative approach", *Biometrica*, 38, 330-336.

Wu, J., Jiang, G., Wong, A. C. M. ve Sun, X. (2002), "Likelihood analysis for the ratio of means of two independent log-normal distributions", *Biometrics*, 58, 463-469.

Xu, L. ve Wang, S. (2008). "A new generalized *p*-value and its upper bound for ANOVA under unequal erros variances", *Communications in Statistics Theory and Methods*, 37, 1002-1010.

Yazıcı B., Sezer A., Özkip E., (2012a) “Generalized p Value Test to Compare Several Population Means for Unequal Variances”, *Joint Statistical Meeting (JSM)*, In JSM Proceedings, San Diego, ABD, 3124-3134.

Yazıcı B., Sezer A. ve Özkip E., (2012b), “A Simulation Study to Compare Several Population Means Under Heteroscedasticity”, Abstracts book, *5th International conference of the ERCIM Working Group on Computing and Statistics*, Oviedo, İSPANYA.

Yiğit E. ve Gökpınar F. (2010), “A simulation study on tests for one-way ANOVA under the unequal variance assumption”, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1*, 15-34.

Zhou, X.H., Gao, S. ve Hui, S.L. (1997), *Methods for comparing the means of two independent lognormal samples*, *Biometrics*, 53, 1129-1135.