

**GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİ
OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ İLE
BULANIK VERİ ANALİZİ**

Nihal YILMAZ
Yüksek Lisans Tezi

İstatistik Anabilim Dalı
Aralık - 2015

**Bu tez çalışması Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri
Komisyonu Başkanlığı tarafından desteklenmiştir. Proje No: 1407F351**

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Nihal YILMAZ'ın "Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Yöntemleri ile Bulanık Veri Analizi" başlıklı İstatistik Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 21.12.2015 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	<u>Adı Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı):	Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV
Üye :	Prof. Dr. Vakıf CAFER
Üye :	Prof. Dr. Veysel YILMAZ

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİ OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ İLE BULANIK VERİ ANALİZİ

Nihal YILMAZ

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı

1. Danışman: Prof. Dr. Aladdin ŞAMILOV

2. Danışman: Doç. Dr. Sevil ŞENTÜRK

2015, 81 sayfa

Bu tez çalışmasında, bulanık veri seti analizi için Maksimum Bulanık Entropi (Max(F)Ent) problemi tanımlanmış ve bu problemin çözümü için MinMax(F)Ent ve MaxMax(F)Ent şeklinde Genelleştirilmiş Maksimum Bulanık Entropi (GMax(F)Ent) yöntemleri geliştirilmiştir. Max(F)Ent probleminin çözümünün varlığı Lagrange çarpanları yöntemi ile ispatlanmıştır. Max(F)Ent probleminin GMax(F)Ent yöntemleri ile elde edilen (MinMax(F)Ent)_m ve (MaxMax(F)Ent)_m dağılımları şeklindeki çözümleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiş ve veriyi modelleme açısından farklı uygulama alanlarında birbirleriyle karşılaştırılmıştır. (MinMax(F)Ent)_m ve (MaxMax(F)Ent)_m dağılımlarının performansı Maksimum Bulanık Entropi ölçümü, Ki-Kare ve RMSE kriterleri yardımıyla belirlenmiştir. Bu yapılara ek olarak, moment kısıt sayıları arttırıldıkça (MinMax(F)Ent)_m ve (MaxMax(F)Ent)_m dağılımlarının veriyi modellemeye etkisi gözlenmiştir. Sonuçlar, MATLAB 7.10.0 (R2010a) programı kullanılarak elde edilmiştir. Bu sonuçlar, bulanık veri analizi için (MinMax(F)Ent)_m ve (MaxMax(F)Ent)_m dağılımlarının veriyi modellemede başarılı bir şekilde uygulanabilir olduğunu göstermiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık Veri Seti, Maksimum Bulanık Entropi Ölçümü, Genelleştirilmiş Maksimum Bulanık Entropi Yöntemleri, MATLAB

ABSTRACT

Master of Science Thesis

GENERALIZED ENTROPY OPTIMIZATION METHODS WITH FUZZY DATA ANALYSIS

Nihal YILMAZ

Anadolu University

Graduate School of Sciences

Department of Statistics

1. Supervisor: Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV

2. Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sevil ŞENTÜRK

2015, 81 pages

In this thesis, it is defined Maximum Fuzzy Entropy (Max(F)Ent) problem for fuzzy data analysis and in order to solve this problem Generalized Maximum Fuzzy Entropy (GMax(F)Ent) methods in the form of MinMax(F)Ent and MaxMax(F)Ent methods are developed. Then, the existence of solution of Max(F)Ent problem is proved by Lagrange multipliers method. Solutions of Max(F)Ent problem obtained by GMax(F)Ent methods in the form of distributions of $(\text{MinMax(F)Ent})_m$, $(\text{MaxMax(F)Ent})_m$ are taken into account in detail and compared with each other in the sense of data modelling in the different application fields. The performances of distributions of $(\text{MinMax(F)Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax(F)Ent})_m$ are determined by Maximum Fuzzy Entropy measure, Chi – Square criteria, RMSE criteria. Additionally, while the moment constraints are increased, the effects of $(\text{MinMax(F)Ent})_m$ and $(\text{MaxMax(F)Ent})_m$ distributions on the data modeling are observed. The results are acquired by using statistical software MATLAB 7.10.0 (R2010a). The obtained results show that $(\text{MinMax(F)Ent})_m$ and $(\text{MaxMax(F)Ent})_m$ distributions give significant results in the data modeling for fuzzy data analysis.

Keywords: Fuzzy Data Set, Maximum Fuzzy Entropy Measure, Generalized Maximum Fuzzy Entropy Methods, MATLAB

TEŞEKKÜR

Hazırlamış olduğum yüksek lisans tezine, bölümümüzde açmış olduğu “Kavramsal Yorumlar ve Uygulamalarla Olasılık Teorisi”, “Ölçüm Teorisi ve Olasılık”, “Entropi ve İnfomasyon Teorisi”, “İstatistiğin Matematiksel Yöntemleri” gibi çok önemli konuları kapsayan lisans, yüksek lisans ve doktora dersleriyle bilgilerini bizlere aktaran, değerli vaktini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, tez konusunun belirlenmesinde olduğu kadar, çalışmanın planlanması ve sonuçlanmasında da büyük emeği geçen sevgi ve saygı duyduğum çok değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Aladdin ŞAMİLOV’a en içten dileklerle teşekkür ederim.

İstatistik bölümünü ve akademisyenliği bana sevdiren, çalışmalarında her zaman beni destekleyen, bana yön veren, hazırlamış olduğum tez çalışmasında ilgi ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen en ufak bir problemimde dahi beni yalnız bırakmayan, güven, sevgi ve saygı duyduğum değerli hocam ve tez danışmanım Doç. Dr. Sevil ŞENTÜRK’e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen, bu günlere emin adımlarla ulaşmamı sağlayan babam Hüseyin YILMAZ’a ve annem Kısmet YILMAZ’a, ayrıca bu çalışma süresince her zaman bana destek olan gösterdiği sabır ve anlayış için kardeşim Nilgün YILMAZ’a tüm samimiyetimle teşekkür ederim.

Nihal YILMAZ

Aralık-2015

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
1.1. Literatürde Yapılan Çalışmalar	3
2. GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİ OPTİMİZASYON	
YÖNTEMLERİ	5
2.1. Maksimum Entropi Yöntemi	5
2.1.1. Kesikli rassal değişkenler için maksimum entropi yöntemi ...	5
2.1.2. Sürekli rassal değişkenler için maksimum entropi yöntemi ..	9
2.2. Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Yöntemleri	13
2.2.1. MinMaxEnt ve MaxMaxEnt yöntemleri.....	14
3. BULANIK MANTIK VE BULANIK KÜMELER TEORİSİ	16
3.1. Bulanık Küme ve Özellikleri	17
3.2. Bulanık Küme İşlemleri.....	23
3.3. Bulanık Mantık Üyelik Fonksiyonu Şekilleri.....	25
3.3.1. Üçgen üyelik fonksiyonu	26
3.3.2. Yamuk üyelik fonksiyonu.....	26
3.3.3. Gauss üyelik fonksiyonu.....	27
3.3.4. Sigmoidal üyelik fonksiyonu	28

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ MAKSİMUM BULANIK ENTROPI	
YÖNTEMLERİ	29
4.1. Bulanık Entropi Ölçümleri	30
4.2. Maksimum Bulanık Entropi Problemi.....	31
4.3. Max(F)Ent Fonksiyonunun Konveksliği	40
4.4. Maksimum Bulanık Entropi Değeri	44
4.5. Sonlu Sayıda Karakterize Edici Momentler Yardımıyla MinMax(F)Ent ve MaxMax(F)Ent Problemleri ve Çözümleri	46
5. UYGULAMA	47
5.1. MinMax(F)Ent ve MaxMax(F)Ent Yöntemlerinin 1999 Yılında Ölçülmüş Rüzgâr Verisinden Elde Edilen Bulanık Veri Setine Uygulanması	48
5.2. MinMax(F)Ent ve MaxMax(F)Ent Yöntemlerinin 2005 Yılında Ölçülmüş Rüzgâr Verisinden Elde Edilen Bulanık Veri Setine Uygulanması	56
5.3. MinMax(F)Ent and MaxMax(F)Ent Yöntemleri ile Sigmoidal Üyelik Fonksiyonundan Elde Edilen Bulanık Veri Setinin Analizi	63
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	71
KAYNAKLAR	73
EKLER	78
EK-1: Sigmoidal Üyelik Fonksiyonundan Elde Edilen Bulanık Veri Seti İçin (Bölüm 5.3) MinMax(F)Ent ve MaxMax(F)Ent Problemlerinin Oluşturulması ve Çözümü için Hazırlanan Programın İki Kısıta Göre MATLAB Kodu.....	78

ŞEKİLLER DİZİNİ

3.1. Sıcaklık değişkeni için klasik kümenin grafik gösterimi.....	18
3.2. Sıcaklık değişkeni için bulanık kümenin grafik gösterimi.....	18
3.3. Konveks bulanık küme (Yıldırım 2009).....	22
3.4. Konkav bulanık küme (Yıldırım 2009).....	23
3.5. Üçgen üyelik fonksiyonunun gösterimi (Gülcan 2012).....	26
3.6. Yamuk üyelik fonksiyonunun gösterimi (Gülcan 2012).....	27
3.7. Gauss üyelik fonksiyonunun gösterimi (Gülcan 2012).....	28
3.8. Sigmoidal üyelik fonksiyonunun gösterimi (Gülcan 2012).....	29

ÇİZELGELER DİZİNİ

5.1. 1999 yılına ait ölçülmüş rüzgâr hızı verilerinden oluşan bulanık veri seti.....	50
5.2. Çizelge 5.1’de verilmiş bulanık veri seti için iki bileşene sahip moment vektörlerine uygun Max(F)Ent değerleri	51
5.3. Çizelge 5.1’de verilmiş bulanık veri seti için üç bileşene sahip moment vektörlerine uygun Max(F)Ent değerleri.....	51
5.4. Çizelge 5.1’de verilmiş bulanık veri seti için (g_0, g) , $g \in K_{0,m}$; $m = 1,2$ moment vektör fonksiyonları yardımıyla elde edilen $(\text{MinMax}(F)\text{Ent})_m$ dağılımları.....	53
5.5. Çizelge 5.1’de verilmiş bulanık veri seti için (g_0, g) , $g \in K_{0,m}$; $m = 1,2$ moment vektör fonksiyonları yardımıyla elde edilen $(\text{MaxMax}(F)\text{Ent})_m$ dağılımları.....	54
5.6. $(\text{MinMax}(F)\text{Ent})_m$; $m = 1,2$ dağılımlarına Uygun Moment Vektör Fonksiyonlar, Max(F)Ent, Ki-Kare ve RMSE değerleri.....	55
5.7. $(\text{MaxMax}(F)\text{Ent})_m$; $m = 1,2$ dağılımlarına Uygun Moment Vektör Fonksiyonlar, Max(F)Ent, Ki-Kare ve RMSE değerleri.....	55
5.8. 2005 yılına ait ölçülmüş rüzgâr hızı verilerinden oluşan bulanık veri seti	56
5.9. Çizelge 5.8’de verilmiş bulanık veri seti için iki bileşene sahip moment vektörlerine uygun Max(F)Ent değerleri	57
5.10. Çizelge 5.8’de verilmiş bulanık veri seti için üç bileşene sahip moment vektörlerine uygun Max(F)Ent değerleri.....	58
5.11. Çizelge 5.8’de verilmiş bulanık veri seti için (g_0, g) , $g \in K_{0,m}$; $m = 1,2$ moment vektör fonksiyonları yardımıyla elde edilen $(\text{MinMax}(F)\text{Ent})_m$ dağılımları.....	60
5.12. Çizelge 5.8’de verilmiş bulanık veri seti için (g_0, g) , $g \in K_{0,m}$; $m = 1,2$ moment vektör fonksiyonları yardımıyla elde edilen $(\text{MaxMax}(F)\text{Ent})_m$ dağılımları.....	61
5.13. $(\text{MinMax}(F)\text{Ent})_m$; $m = 1,2$ dağılımlarına Uygun Moment Vektör Fonksiyonlar, Max(F)Ent, Ki-Kare ve RMSE değerleri.....	62
5.14. $(\text{MaxMax}(F)\text{Ent})_m$; $m = 1,2$ dağılımlarına Uygun Moment Vektör Fonksiyonlar, Max(F)Ent, Ki-Kare ve RMSE değerleri.....	62

5.15. Sigmoidal üyelik fonksiyonundan elde edilen bulanık veri seti.....	64
5.16. Çizelge 5.15’de verilmiş bulanık veri seti için iki bileşene sahip moment vektörlerine uygun Max(F)Ent değerleri	65
5.17. Çizelge 5.15’de verilmiş bulanık veri seti için üç bileşene sahip moment vektörlerine uygun Max(F)Ent değerleri.....	65
5.18. Çizelge 5.15’de verilmiş bulanık veri seti için (g_0, g) , $g \in K_{0,m}$; $m = 1,2$ moment vektör fonksiyonları yardımıyla elde edilen $(\text{MinMax}(F)\text{Ent})_m$ dağılımları.....	67
5.19. Çizelge 5.15’de verilmiş bulanık veri seti için (g_0, g) , $g \in K_{0,m}$; $m = 1,2$ moment vektör fonksiyonları yardımıyla elde edilen $(\text{MaxMax}(F)\text{Ent})_m$ dağılımları.....	68
5.20. $(\text{MinMax}(F)\text{Ent})_m$; $m = 1,2$ dağılımlarına Uygun Moment Vektör Fonksiyonlar, Max(F)Ent, Ki-Kare ve RMSE değerleri.....	69
5.21. $(\text{MaxMax}(F)\text{Ent})_m$; $m = 1,2$ dağılımlarına Uygun Moment Vektör Fonksiyonlar, Max(F)Ent, Ki-Kare ve RMSE değerleri.....	69

1. GİRİŞ

Bir bulanık kümede bulanıklığın nicelik analizi önemli bir problemdir. Bulanıklığın en yaygın ölçütlerinden birisi de “bulanık entropi” dir. Entropi, bir sistem ya da modeldeki belirsizliğin ölçümüdür. Bu durumda, bir bulanık kümeden veya bulanık sistemden elde edilen bulanık bilginin nicelik ölçümü “bulanık entropi” ölçümü olarak tanımlanabilir. Başka bir ifadeyle, bulanık entropi ölçümü bulanık kümenin bulanıklılığının ölçümüdür. Bulanık entropi ölçümünde bulanık kümeye uygun üyelik fonksiyonundan yararlanılmaktadır. Burada, bulanık entropinin klasik Shannon entropisinden çok farklı olduğu unutulmamalıdır. Çünkü, klasik Shannon entropisini tanımlamak için herhangi bir olasılıksal ifadeye ihtiyaç yoktur. Dolayısıyla, bulanık entropi bulanık üyelik fonksiyonuna bağlı belirsizlikleri içerirken, entropi rassal belirsizlikleri içermektedir.

Belli bir problemde yeterli bilgi var olmadığında bulanık değerlerin belirsizlik dağılımlarının belirlenmesi oldukça önemli bir problemdir ve bu bulanık değerler hakkında erişilebilir bilginin tahmin edilmesine ihtiyaç vardır. Bir bulanık küme için, bazı durumlarda, üyelik fonksiyonu açık bir şekilde elde edilemez. Bu noktada, Jaynes (1957) tarafından önerilen Maksimum Entropi Yöntemi, Shannon’un entropi ölçümünü moment fonksiyonları ile elde edilen moment kısıtları ile maksimize ederek söz konusu probleme çözüm sağlamaktadır. Bulanık küme teorisinde, Maksimum Entropi Yöntemi’nden yola çıkarak sadece iki kısıt altında bulanık entropi değerini maksimize eden maksimum bulanık entropi ölçümü tanımlanmış (Parkash ve ark. 2008) ve bu ölçüm yardımıyla üyelik fonksiyonları elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında, Shamilov (2006)’un rassal değişkenlerin dağılımlarını tahmin etmek için önerdiği Maksimum Entropi fonksiyoneline benzer şekilde bulanık entropi ölçümünü $m+1$ moment kısıtı altında maksimize eden bulanık entropi fonksiyoneli elde edilmiştir. Söz konusu fonksiyonel yardımıyla üyelik fonksiyonuna dayalı “Maksimum Bulanık Entropi (Max(F)Ent) problemi” tanımlanmıştır. Max(F)Ent probleminin çözümünün varlığı kapalı fonksiyon teoremi (Zorich 2002) ve Lagrange çarpanları yöntemiyle (Shamilov 2007) ispatlanmıştır. Max(F)Ent probleminin çözümünden ortaya çıkan üyelik

fonksiyonu kullanılarak Maksimum Bulanık Entropi fonksiyoneli elde edilmiştir. Bu fonksiyonele en küçük ve en büyük değerlerini veren Genelleştirilmiş Maksimum Bulanık Entropi Problemleri olan MinMax(F)Ent ve MaxMax(F)Ent problemleri tanımlanmış ve söz konusu problemlerin çözüm yöntemleri ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez çalışmasının konusu ile ilgili literatürde yapılan çalışmalar arasındaki bağlantılar ele alınmıştır.

İkinci bölümde Maksimum Entropi (MaxEnt) Dağılımlarının kesikli ve sürekli rassal değişkenler için elde edilme yöntemleri yorumlanmış ve Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Yöntemleri olan MinMaxEnt ve MaxMaxEnt Yöntemleri anlatılmıştır.

Üçüncü bölümde Bulanık Küme Teorisi yer almaktadır. Bulanık kümelerin kısımları, bulanık küme işlemleri ve bulanık üyelik fonksiyonlarından bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde tez çalışmasında çözülecek problemlerin formülasyonu ve çözüm yöntemleri sunulmuştur. Bu amaçla, literatürde bilinen bulanık entropi ölçümleri dikkate alınarak Maksimum Bulanık Entropi Problemi ve bu problemin çözümü ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Söz konusu problemin çözümü için önemli olan maksimum bulanık entropi ölçüm fonksiyonun konveksliği ispatlanmıştır. Ayrıca, Genelleştirilmiş Maksimum Bulanık Entropi yöntemleri yardımıyla elde edilen $(\text{MinMax(F)Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax(F)Ent})_m$ dağılımları tanımlanmıştır.

Beşinci bölümde rüzgâr verisinden ve Sigmoidal üyelik fonksiyonundan elde edilen bulanık veri setleri için Genelleştirilmiş Maksimum Bulanık Entropi yöntemlerinin uygulamalarına yer verilmiş ve elde edilen $(\text{MinMax(F)Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax(F)Ent})_m$ dağılımlarının performansları bulanık veri setini modelleme açısından hangisinin veriyi daha iyi temsil ettiği Max(F)Ent , Ki-Kare ve RMSE değerleri kullanılarak yorumlanmıştır.

Altıncı bölümde ise yapılan araştırmaların sonuçları ve gereken öneriler verilmiştir.

1.1. Literatürde Yapılan Çalışmalar

Zadeh tarafından bulanık küme teorisinin tanıtılmasından günümüze kadar, bulanık bilgiyi dikkate alan bulanık entropi ölçümleri pek çok bilim dalında başarıyla uygulanmıştır. Bulanık entropi ölçümleri ile yapılan çalışmalar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Zadeh (1968), rassal değişkenler için Shannon'un entropi ölçümünden yola çıkarak bir bulanık olayın entropisini bulanıklığı ölçmek için kullanmıştır. Daha sonra araştırmacılar tarafından bulanık entropi için birçok çalışma yapılmıştır.

De Luca ve Termini (1972), Shannon'un entropi ölçüm fonksiyonunu kullanarak bulanık entropi ölçümünü yeniden tanımlamıştır.

Kaufmann (1975), bulanık küme ve bu kümeye en yakın klasik küme arasındaki mesafeyi ölçmek için bulanık entropi kavramını önermiştir.

Yager (1979), bulanık küme ve onun tümleyeni arasındaki mesafeyi kullanarak yeni bir bulanık entropi ölçümü tanımlamıştır.

Kosko (1986), bir bulanık küme ve bu kümeye en yakın ve en uzak klasik kümeler arasındaki mesafenin bir oranı olarak bulanık entropi ölçümünü önermiştir.

Pal ve Pal (1992), De Luca ve Termini'nin bulanık entropi formülünü kullanarak bulanık kümelerin entropisini hesaplamak için Hibrid entropi ölçümünü tanımlamışlardır ve dijital iletişim sistemleri üzerinde uygulamalarını geliştirmişlerdir.

Bhandari ve Pal (1993), Renyi'nin olasılıksal entropi formülünü bir bulanık kümenin olasılıksal olmayan entropisini tanımlamak için geliştirmiştir.

Al-sharhan ve ark. (2001), bulanık bilgi ölçümlerinin farklı tipleri üzerine bir çalışma sunmuşlardır ve bunu gerçekleştirmek için de bulanıklığın bir ölçümü olan bulanık entropi ölçümünü önermişlerdir.

Fan ve Ma (2002), mesafe ölçümüne dayalı yeni bulanık entropi formülleri tanımlamışlardır ve tanımladıkları özel bulanık entropi formülleri ile De Luca ve Termini (1972) tarafından geliştirilen bulanık entropi formülü arasındaki ilişkiyi ortaya koymuşlardır.

Tao ve ark. (2003), olasılık dağılımı, bulanık dağılımı ve entropi teorisine dayalı görüntü bölütleme (image segmentation) için üç seviyeli eşikleme (three-

level thresholding) yöntemini önermişlerdir ve olasılık analizi sayesinde yeni bir bulanık entropi ölçümü önermişlerdir.

Qing ve Li (2004), bir bulanık kümeden veya sistemden kaynaklanan belirsizliği ölçmek için yeni bir bulanık entropi formülü önermişlerdir ve diğer bulanık entropi formülleri ile farklarını incelemişlerdir.

Guo ve Xin (2006), bulanık kümeler için yeni geliştirilmiş entropi formüllerini geliştirmek için Zadeh (1978)'in önerdiği bulanık entropi ölçümünden yararlanmışlardır.

Fan ve Zhao (2007) bulanık entropi ölçümünü kullanarak görüntü bölütleme problemlerinin çözümü için yeni geliştirilmiş bulanık entropi formülleri önermişlerdir ve pirinç, devre kartı ve araba plakaları üzerine bir uygulama gerçekleştirmişlerdir.

Parkash ve ark. (2008), iki reel parametreye sahip yeni bir geliştirilmiş bulanık entropi ölçümünü tanımlamışlardır ve bu bulanık entropi ölçümünün özelliklerini incelemişlerdir.

Li ve Liu (2008), bulanık değişkenlerin belirsizlik derecesini ölçmek için yeni bir bulanık entropi ölçümü önermişler ve bunun üzerine de ayrıntılı bir çalışma gerçekleştirmişlerdir.

You ve Wen (2008), bulanık vektörler için entropinin benzer bir tanımını önermişlerdir.

Chen ve Dai (2011), bulanık değişkenler için maksimum entropi ilkesini önermişlerdir ve bu yöntemle göre de bulanık değişkenlerin bulanıklılığını ölçmek için yeni bulanık entropi ölçümü önermişlerdir.

Kumar ve ark. (2011), bulanık bilginin var olan ölçümlerinin iki parametrik geliştirilmesini tanımlamışlardır ve bu geliştirme için de bulanık entropinin geliştirilmiş parametrik ölçümlerinden yararlanmışlardır.

Dhar ve ark. (2012), bulanık entropi ölçümünün bulanık kümelerdeki belirsizliğin ölçümünde ne kadar başarılı olduğuna dair bir çalışma yapmışlardır ve bu çalışma için de Shannon'un entropi ölçümünü kullanmışlardır.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİ OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİ

Bu bölümde, maksimum entropi yöntemi ve bu yöntemin hem kesikli hem de sürekli rassal değişkenler için uygulaması verilmiştir. Ayrıca Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon yöntemlerinden kısaca bahsedilmiştir.

2.1. Maksimum Entropi Yöntemi

Rassal değişkenin karakterize edici moment fonksiyonları verildiğinde, Shannon'un entropi ölçüsünü maksimize ederek sistemin dağılımını belirleme yöntemine Maksimum Entropi (MaxEnt) yöntemi, elde edilen dağılıma da MaxEnt dağılımı denilmektedir (Jaynes 1948). MaxEnt yöntemi, maksimum belirsizlik prensibi veya Jaynes'in formülü olarak da bilinir (Kapur ve Kesevan 1992).

Şimdi sırasıyla kesikli rassal değişkenler için maksimum entropi yöntemi ve sürekli rassal değişkenler için Maksimum Entropi yöntemi ele alınacaktır.

2.1.1. Kesikli rassal değişkenler için maksimum entropi yöntemi

n değere sahip X kesikli rassal değişkeninin veya n duruma sahip X kesikli fiziksel sistemin entropisi

$$H(x) = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad (2.1)$$

fonksiyonu ile ifade edilmektedir. (2.1) fonksiyonunu,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i &= 1 ; p_i > 0 \\ \sum_{i=1}^n p_i g_j(x_i) &= \mu_j ; j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

koşulları altında maksimum yapan (p_1, p_2, \dots, p_n) dağılımının bulunması bir optimizasyon problemidir. X rassal değişkeninin dağılımının bu optimizasyon

probleminin çözümü olarak bulunmasını öneren yönteme “Maksimum Entropi (MaxEnt) yöntemi” denir. İlk kez Jaynes (1957) tarafından önerilen bu yöntem, Jaynes’in maksimum entropi yöntemi olarak da bilinir.

(2.2) sisteminde $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ ’ler karakterize edici moment fonksiyonları olarak ifade edilir. Bu sistem n sayıda p_1, p_2, \dots, p_n bilinmeyenlerine sahiptir. Bu sistemin çözüme sahip olabilmesi için bazı koşulların sağlanması gerekmektedir. Öncelikle, $1, g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ fonksiyonları lineer bağımsız olduğunda, bu fonksiyonların beklenen değerleri olan $1, \mu_1, \dots, \mu_m$ sayıları (2.2) sistemi çözüme sahip olacak şekilde verilmelidir. İkinci olarak, $m + 1$ koşul sayısı ile n durum sayısı arasında $m + 1 < n$ bağıntısı bulunmalıdır. $m + 1 < n$ eşitsizliği sağlandığında, n bilinmeyenli $m + 1$ denklem oluşacağından, bu değişkenlerden $n - (m + 1)$ kadarı bağımsız olacaktır. Bu durumda, p_1, p_2, \dots, p_n değişkenleri sonsuz sayıda değerlere sahip olur ve böylelikle (2.1) fonksiyonunu maksimize eden (p_1, p_2, \dots, p_n) ’lerin seçilmesi anlamlı olacaktır. Eğer $m + 1 = n$ koşulu sağlanmazsa, bir başka ifade ile, $m + 1 = n$ veya $m + 1 > n$ olursa, birinci halde genellikle (2.1) fonksiyonunu maksimize etmek için bağımsız değişken kalmaz, ikinci halde ise (2.2) koşullarını sağlayan p_i ’ler olmayabilir.

(2.1) fonksiyonunun (2.2) koşulları altında maksimize edilmesi, kısaca (2.1),(2.2) problemi olarak ifade edilecektir. Burada (2.1) amaç fonksiyonu, (2.2) ise lineer koşullardır. Bu durumda, (2.1),(2.2) problemi koşullu ekstremum problemidir ve bilindiği gibi bu problem Lagrange çarpanları yöntemleri ile çözülebilmektedir (Şamilov 2009).

(2.1),(2.2) problemi Lagrange çarpanları yöntemi ile ele alındığında, (2.2) koşullarında ortaya çıkan μ_j sayıları keyfi verilemez. Pratik olarak, X rassal değişkenine ait istatistiksel frekans dağılımından $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$ ve verilmiş $g_j(x)$ moment fonksiyonlarından yola çıkarak μ_j ’ler hesaplandığında,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ g_1(x_0) & g_1(x_1) & g_1(x_2) & \cdots & g_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m(x_0) & g_m(x_1) & g_m(x_2) & \cdots & g_m(x_n) \end{bmatrix}$$

matrisinin rankı, genişletilmiş

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ g_1(x_0) & g_1(x_1) & g_1(x_2) & \cdots & g_1(x_n) & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_m(x_0) & g_m(x_1) & g_m(x_2) & \cdots & g_m(x_n) & \mu_m \end{bmatrix}$$

matrisinin rankına $g_j(x_1)\tilde{p}_1 + \dots + g_j(x_n)\tilde{p}_n = \tilde{\mu}_j; j = 0, 1, \dots, m;$
 $g_0(x) = 1; \mu_0 = 1$ eşitlikleri sağlandığında birbirine eşit olur. Bu nedenle de Kronecker-Capelli teoremine göre (2.2) koşullarını sağlayan p_1, p_2, \dots, p_n 'ler vardır. Başka bir ifadeyle, (2.2) eşitlikleri şeklinde verilmiş homojen olmayan lineer sistemi p_1, p_2, \dots, p_n 'ye göre çözümü vardır.

(2.1) fonksiyonunu (2.2) koşulları altında maksimize etme problemine “Maksimum Entropi (MaxEnt) problemi” denir. MaxEnt problemi yardımıyla $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$ istatistiksel dağılımına entropi ölçümü açısından yakın olan (p_1, p_2, \dots, p_n) dağılımı bulunur. Burada, p_1, p_2, \dots, p_n 'ler (2.1) fonksiyonuna (2.2) koşulları altında maksimum değer veren olasılıklardır. (2.1) fonksiyonunu (2.2) koşulları altında maksimize etmek için $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ Lagrange çarpanları yöntemiyle,

$$U = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i + \lambda_0 \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1 \right) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n p_i g_j(x_i) - \mu_j \right) \quad (2.3)$$

veya

$$U = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i - \sum_{j=0}^m \lambda_j (p_i g_j(x_i) - \mu_j)$$

yardımcı fonksiyonu kurulur ve bu fonksiyonun $p_1, p_2, \dots, p_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ değişkenlerine göre mutlak ekstremumu aranır. Ekstremin varlık teoremine göre yardımcı (2.3) fonksiyonunun p_i 'lere göre kısmi türevlerinin sıfıra eşit olması gerekir. Böylelikle p_1, p_2, \dots, p_n olasılıkları $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ Lagrange çarpanlarına bağlı olarak elde edilir. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ çarpanları da (2.2) eşitliği yardımıyla bulunur.

U yardımcı fonksiyonunun p_i 'lere göre kısmi türevleri;

$$\frac{\partial U}{\partial p_i} = -\ln p_i - \lambda_0 - 1 - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i) \quad (2.4)$$

elde edilir. (2.4) eşitliğinin sağ tarafı sıfıra eşitlenerek,

$$\begin{aligned} \ln p_i &= -\left(\lambda_0 + 1 + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i) \right) \\ p_i &= e^{-(\lambda_0+1) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)} \\ p_i &= e^{-\lambda^0 - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)}, \lambda^0 = \lambda_0 + 1, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.5)$$

sonucuna varılır. (2.5) formülü ile p_1, p_2, \dots, p_n 'ler $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ Lagrange çarpanlarına bağlı olarak ifade edilmiş olur.

Lagrange çarpanlarını bulmak için (2.5) ile ifade edilen p_1, p_2, \dots, p_n 'lerin (2.2) koşullarında yerine yazılmasıyla,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n e^{-\lambda^0 - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)} &= 1 \\ \sum_{i=1}^n e^{-\lambda^0 - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)} g_j(x_i) &= \mu_j \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

sistemi elde edilir. (2.6) sisteminin birinci denklemden

$$e^{\lambda^0} = \sum_{i=1}^n e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)}$$

$$\lambda^0 = \ln \sum_{i=1}^n e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)}$$

λ^0 bulunur. λ^0 'ın bu değeri (2.6) sisteminin diğer denklemlerde yerine yazıldığında,

$$f_j(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i) \frac{e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)}}{\sum_{i=1}^n e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_i)}} = \mu_j, j = 1, 2, \dots, m \quad (2.7)$$

sistemi elde edilir. $j = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere, (2.7) eşitliğinden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ değerlerinin $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ değerlerine bağlı olduğu görülmektedir. (2.7) sisteminden λ 'yı bulmak için ardışık yaklaşımlar yöntemlerinin hepsi kullanılabilir. Fakat, söz konusu bu yöntemlerden, Newton yöntemi diğer yöntemlerden daha büyük bir yakınsama hızına sahip olduğu için tercih edilir.

2.1.2. Sürekli rassal değişkenler için maksimum entropi yöntemi

X sürekli rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olduğunda, bu sistemin entropisi,

$$H = -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır. İstatistiksel veriyi (2.8) fonksiyoneline

$$\int_a^b f(x) g_j(x) dx = \mu_j, j = 0, 1, \dots, m \quad (2.9)$$

koşulları altında maksimum değer veren dağılım ile modelleme yöntemine “Maksimum Entropi (MaxEnt) yöntemi” denir. (2.8) fonksiyoneli X rassal değişkeninin veya fiziksel sisteminin entropisini, (2.9) koşulları ise sistem hakkında ek bilgiyi ifade etmektedir. Böylece (2.8) fonksiyonelinin (2.9) koşulları altında maksimumunun bulunması, (2.9) koşulları yardımıyla sistemin sahip olduğu entropinin maksimum değerinin bulunması anlamına gelmektedir. Ayrıca ifade etmek gerekir ki (2.9)’a ait olan her koşul sistem hakkında belli miktarda bilgi verdiği için, koşul sayısının artmasıyla entropi azalacaktır.

(2.8) fonksiyonelinin (2.9) koşulları altında maksimumu Lagrange çarpanları yöntemiyle bulunabilir. Bu durumda $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ ’ler Lagrange çarpanları olmak üzere, U Lagrange fonksiyoneli,

$$U = -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx - \sum_{j=0}^m \lambda_j \left(\int_a^b f(x) g_j(x) dx - \mu_j \right) \quad (2.10)$$

şeklindedir. (2.10) fonksiyoneli

$$U = \left\{ \int_a^b (-f(x)) \ln f(x) - \sum_{j=0}^m \lambda_j f(x) g_j(x) \right\} - \sum_{j=0}^m \lambda_j \mu_j$$

veya

$$U = \int_a^b F(f, \lambda) dx - \sum_{j=0}^m \lambda_j \mu_j \quad (2.11)$$

olarak yazılabilir, burada $F(f, \lambda) = -f(x) \ln f(x) - \sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x) f(x)$ 'dir.

(2.11) fonksiyonelinin ekstremumunun varlığı için gerek koşul, bu fonksiyonele ekstremum değer veren f fonksiyonunun

$$F_f - \frac{d}{dx} F_{f'} = 0 \quad (2.12)$$

Euler denklemini sağlamasıdır. (2.12) denkleminde $F_{f'} = 0$ olduğundan, bu denklem $F_f = 0$ denkleminde dönüşür. F 'nin ifadesinden yola çıkarak Euler denkleminin

$$F_f = -\ln f(x) - 1 - \sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x) = 0$$

olduğu sonucuna varılır. Buradan,

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= -1 - \sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x) \\ f(x) &= e^{-1 - \sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x)} \\ f(x) &= e^{-\tilde{\lambda}_0 - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)}, \quad \tilde{\lambda}_0 = 1 + \lambda_0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

elde edilir. (2.13) fonksiyonu (2.9) koşullarında yerine yazılarak λ 'lar bulunabilir:

$$\int_a^b e^{-\tilde{\lambda}_0 - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} g_k(x) dx = \mu_k, \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (2.14)$$

formülünde $g_0(x) = 1$; $\mu_0 = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{-\tilde{\lambda}_0 - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} dx &= 1 \\
e^{-\tilde{\lambda}_0} &= \frac{1}{\int_a^b e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} dx} \\
\tilde{\lambda}_0 &= \ln \left\{ \int_a^b e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} dx \right\} \tag{2.15}
\end{aligned}$$

elde edilir ve $\tilde{\lambda}_0$ 'ın bu değeri (2.15)'in diğer eşitliklerinde yerine yazılıp k . eşitliğin sol tarafı F_k ile gösterildiğinde,

$$F_k(\lambda) = \frac{\int_a^b e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} g_k(x) dx}{\int_a^b e^{-\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)} dx} = \mu_k, k = 1, 2, \dots, m \tag{2.16}$$

sistemine ulaşılır. Burada $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

(2.16) sistemi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ bilinmeyenlerine göre lineer olmayan denklemler sistemidir. (2.16) sisteminin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 'lere göre çözüme sahip olabilmesi için

$$\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(\lambda_1, \dots, \lambda_m)} \neq 0 \tag{2.17}$$

koşulunun sağlanması gerekir. Bu koşulun sağlandığını göstermek için (2.17)'deki Jacobian'ın $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ rassal değişkenlerinin varyans-kovaryans matrisinin determinantı olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaçla (2.16)'dan $\frac{\partial F_k}{\partial \lambda_l}$

, $k = 1, 2, \dots, m; l = 1, 2, \dots, m$ türevleri bulunmuştur ve $\left[\frac{\partial F_k}{\partial \lambda_l} \right]$ matrisinin varyans-kovaryans matrisi olduğu gösterilmiştir:

$$\frac{\partial F_k}{\partial \lambda_l} = -\{E[g_l(x)g_k(x)] - E[g_k(x)]E[g_l(x)]\}.$$

Buradan $\left[\frac{\partial F_k}{\partial \lambda_l} \right]$ 'nin varyans-kovaryans matrisinin negatif işaretlisine eşit

olduğu görülür. Varyans-kovaryans matrisinin pozitif tanımlı olduğu bilindiğinden, (2.16) sisteminin Jacobi determinantının sıfırdan farklı olduğu, dolayısıyla (2.16) denklemler sisteminin tek çözüme sahip olduğu sonucuna varılır.

2.2. Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Yöntemleri

Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Yöntemi (GEOY) denildiğinde istatistiksel veriyi Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Problemi (GEOP)'un çözümü şeklinde modellemeyi öneren yöntem anlaşılmaktadır. Bu genelleştirmede amaç, ele alınan istatistiksel veriyi en iyi şekilde temsil eden dağılımın bulunmasıdır. Fonksiyonel analizin bazı uygulamalarına dayalı olarak Shamilov (2006,2007) tarafından önerilen MaxMaxEnt, MinMaxEnt, MaxMinxEnt ve MinMinxEnt Yöntemleri, Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Yöntemleri (GEOY) olarak tanımlanmıştır. GEOY verilmiş moment fonksiyonları kümesinden istatistiksel veriye entropi optimizasyon ölçümüne göre en yakın ve en uzak olan dağılımları belirleyen moment fonksiyonlarının bulunmasını gerçekleştirecek istatistiksel veriyi kriterler açısından daha kesin modellemeyi sağlar (Şamilov 2009).

EOP: X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f^{(0)}(x)$, L entropi optimizasyon ölçümü, g ise m sayıda moment kısıtı üreten bir moment vektör fonksiyonu olsun. Verilen g moment fonksiyonuna uygun olan ve L 'ye ekstremum değer veren dağılımın bulunması problemidir.

GEOP: X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f^{(0)}(x)$, L entropi optimizasyon ölçümü, K ise verilen moment vektör fonksiyonlar kümesi olsun. Verilen K kümesinden öyle $g^{(1)}, g^{(2)} \in K$ moment vektör fonksiyonlarının bulunması gerekir ki $g^{(1)}$ 'in belirlediği entropi optimizasyon yoğunluk fonksiyonu $f^{(1)}(x)$ verilmiş $f^{(0)}(x)$ yoğunluk fonksiyonuna L ölçümüne göre en yakın, $g^{(2)}$ 'nin belirlediği entropi optimizasyon yoğunluk fonksiyonu $f^{(2)}(x)$ verilmiş $f^{(0)}(x)$ yoğunluk fonksiyonuna L ölçümüne göre en uzak olsun. Burada L Shannon'un entropi ölçümü olarak seçilirse $f^{(1)}(x)$ "MinMaxEnt Dağılımı", $f^{(2)}(x)$ "MaxMaxEnt Dağılımı" olarak; eğer L Kullback - Leibler ölçümü olarak seçilirse $f^{(1)}(x)$ "MinMinxEnt Dağılımı", $f^{(2)}(x)$ "MaxMinxEnt Dağılımı" olarak adlandırılır (Şamilov 2009).

2.2.1. MinMaxEnt ve MaxMaxEnt yöntemleri

Verilen entropi optimizasyon ölçümünü

$$\int_a^b f(x)g_j(x)dx = \mu_j; j = 0, 1, \dots, m \quad (2.18)$$

kısıtları altında optimize etme problemi ele alınsın. Burada $\mu_0 = 1, g_0(x) = 1$ ve $1, g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ lineer bağımsız karakterize edici moment fonksiyonlarıdır.

$f^{(0)}(x)$ yoğunluk fonksiyonu ve K moment vektör fonksiyonlar kümesinden keyfi seçildiğinde, bu moment vektör fonksiyonuna uygun olarak $\mu = (1, \mu_1, \dots, \mu_m)$ değerleri elde edilir ve L 'ye optimum değer veren bir $f(x)$ entropi optimizasyon dağılımı bulunur. Bu durumda, seçilen her keyfi $g(x)$ vektör fonksiyonuna karşılık L 'nin bir optimum değeri elde edilmiş olur. Bu değer $g(x)$

vektör fonksiyonlarına veya uygun $f(x)$ dağılım fonksiyonlarına bağlı bir entropi optimizasyon fonksiyoneli olup $U(g)$ ile gösterilmiştir.

Eğer $U(g)$, K sürekli moment vektör fonksiyonları kümesinde sürekli ise, bu küme üzerinde en küçük değerini alır. $U(g)$ fonksiyoneline en küçük değer veren $g^{(1)}$ ve en büyük değer veren $g^{(2)}$ moment vektör fonksiyonları olmakla,

$$\min_{g \in K} U(g) = U(g^{(1)}) \quad ; \quad \max_{g \in K} U(g) = U(g^{(2)}) \quad (2.19)$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada, $g^{(1)}$ ve $g^{(2)}$ moment vektör fonksiyonları, L ölçümünü optimize eden $f^{(1)}(x), f^{(2)}(x)$ özel olasılık yoğunluk fonksiyonlarını tanımlar. $L = H = -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx$ (veya $H = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$), olduğunda bu dağılımların entropileri arasında

$$H(f^{(0)}(x)) \leq U(f^{(1)}(x)) \leq U(f^{(2)}(x)) \quad (2.20)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada $U(g), g(x)$ moment vektör fonksiyonu ile üretilen moment koşulları altında, entropi fonksiyoneli H 'ın maksimum değeridir. Bu sebeple, $f^{(1)}(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun belirlediği dağılıma “MinMaxEnt dağılımı”, $f^{(2)}(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun belirlediği dağılıma ise “MaxMaxEnt dağılımı” denir. Lagrange çarpanları yöntemiyle elde edilen $f^{(1)}(x), f^{(2)}(x)$ yoğunluk fonksiyonları

$$f^{(1)}(x) = e^{-\sum_{j=0}^m \lambda^{(1)}_j g_j(x_j)} \quad (2.21)$$

$$f^{(2)}(x) = e^{-\sum_{j=0}^m \lambda^{(2)}_j g_j(x_j)} \quad (2.22)$$

şeklindedir (Şamilov 2009).

3. BULANIK MANTIK VE BULANIK KÜMELER TEORİSİ

Klasik mantık teorisinde sınıflandırmalar kesindir, yani bir eleman bir kümenin ya elemanıdır veya değildir, kısmi üyelik olamaz. Kısaca, klasik kümelerde 0 ve 1 mantığı vardır. Öte yandan bulanık mantık, Aristo mantığından farklı olarak insan mantığını taklit ederek belirsiz ve yaklaşık durumlarda işlem yapabilme yeteneğine sahiptir. Bulanık mantıkta bir eleman birden fazla kümenin elemanı olabilir (Kazan ve Eğrisöğüt Tiryaki 2007).

Bulanık mantık kavramı ile ilgili olarak ilk ciddi adım 1965 yılında California Berkeley Üniversitesinden Prof. Lotfi A.Zadeh'in makalesini yayınlamasıyla atılmıştır. O tarihten sonra önemi gittikçe artan bulanık mantık, belirsizliklerin anlatımı ve belirsizliklerle çalışabilmesi için kurulmuş bir matematiksel düzen olarak tanımlanabilir. İstatistikte ve olasılık kuramında kesin değerler ile çalışılır fakat yaşadığımız ortam daha çok belirsizliklerle dolu olduğundan sonuç çıkarabilme yeteneğini anlayabilmek için bulanık mantıkta çalışma ihtiyacı ortaya çıkmıştır (Yanartaş 2009).

Bulanık mantığın genel özellikleri Zadeh tarafından aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

- Bulanık mantıkta, kesin değerlere dayanan düşünme yerine, yaklaşık düşünme kullanılmaktadır.
- Bulanık mantıkta her şey $[0,1]$ aralığında belirli bir derece ile gösterilmektedir.
- Bulanık mantıkta, bilgi büyük, küçük, çok, az gibi dilsel ifadeler şeklindedir.
- Bulanık çıkarım işlemi dilsel ifadeler arasında tanımlanan kurallar ile yapılmaktadır.
- Her mantıksal sistem bulanık olarak ifade edilebilir.
- Bulanık mantık matematiksel modeli çok zor elde edilen sistemler için çok uygundur (Elmas 2003; Şanlı 2005).

Sonuç olarak, bulanık mantık doğrusal olmayan, karmaşık, modellenmesi güç ve bilgilerin niteliklerinin belirsiz veya kesin olmadığı durumlarda sürecin kontrolünde oldukça başarılı bir yöntemdir. İnsan mantığında olduğu gibi çok uzun-uzun-orta- kısa-çok kısa vb. gibi ara değerlere göre işlemektedir (Kazan ve Eğrisöğüt Tiryaki 2007).

Bu bölümde öncelikle bulanık küme ve kavramları açıklanmıştır. Sonrasında bulanık kümeler üzerindeki işlemler ve bulanık üyelik fonksiyonları tanımlanmıştır.

3.1. Bulanık Küme ve Özellikleri

Zadeh (1965) bulanık kümeyi, sürekli dizi halindeki üyelik derecelerine sahip nesnelere oluşan bir sınıf olarak tanımlamıştır. Bu tip bir küme, her bir nesneye 0 ile 1 arasında bir üyelik derecesi atayan bir üyelik fonksiyonu ile tanımlanmaktadır. Burada 0 sayısı, ilgili nesnenin bulanık kümenin üyesi olmadığını; 1 sayısı, ilgili nesnenin bulanık kümenin tam üyesi olduğunu ve bu iki değer arasındaki herhangi bir sayı ilgili nesnenin bulanık kümeye üyelik derecesini veya kısmi üyeliğini göstermektedir (Özkan 2003; Uçal Sarı 2012).

Klasik küme kavramında, A kümesi X evrensel kümesinde klasik bir kümeyi temsil etmekte iken A kümesinin karakteristik fonksiyonu μ_A ile ifade edilmektedir. Klasik bir A kümesini karakteristik fonksiyon yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir (Klir ve Yuan 1995).

$$\forall x \in X, \quad \mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (3.1)$$

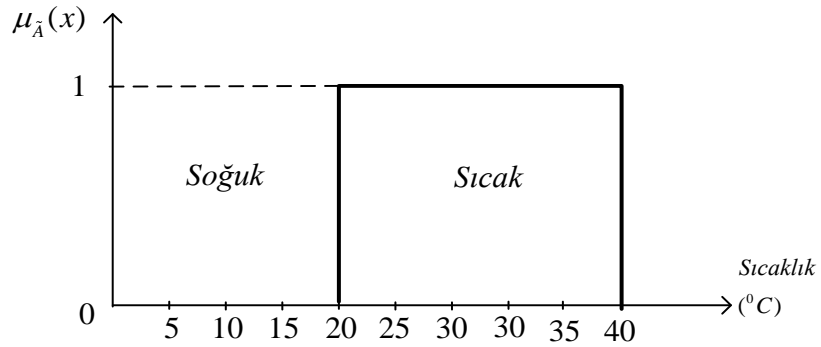
(3.1) fonksiyonunda görüldüğü üzere A kümesine ait elemanlar 1 değerini alırken, ait olmayan elemanlar ise 0 değerini almaktadır. Burada, $\mu_A(x): X \rightarrow \{0,1\}$ klasik kümeler için üyelik fonksiyonu ya da üyelik derecesini göstermektedir. Eğer $A \subseteq X$ kümesinin üyelik derecesi $[0,1]$ aralığı kabul edilirse A kümesi “bulanık

küme” olarak adlandırılır ve \tilde{A} ile gösterilir. Zadeh (1965) tarafından ifade edilen \tilde{A} bulanık kümesi,

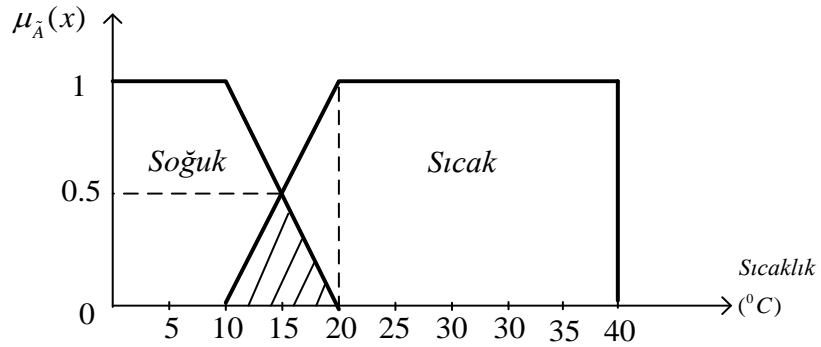
$$\tilde{A} = \{x, \mu_A(x) | x \in X\} \quad (3.2)$$

biçiminde tanımlanır ve $\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$ üyelik derecesine sahiptir. (Yapıcı Pehlivan 2005; Yanartaş 2009). Üyelik fonksiyonu, X evrensel kümesine ait bir x elemanın \tilde{A} bulanık kümesine ait olma derecesini gösteren fonksiyondur (Yanartaş 2009).

Şekil 3.1 ve Şekil 3.2’de sıcaklık değişkeni için klasik ve bulanık küme örneğine yer verilmiştir.



Şekil 3.1. Sıcaklık değişkeni için klasik kümenin grafik gösterimi



Şekil 3.2. Sıcaklık değişkeni için bulanık kümenin grafik gösterimi

Şekil 3.1.' de klasik küme örneğinde, $20^{\circ}C$ ile $40^{\circ}C$ arasındaki değerler 1 üyelik derecesi ile sıcak kümesine ait olmaktadır. Eğer sıcaklık $20^{\circ}C$ 'nin altına düşerse söz konusu değerler sıcak kümesine ait olmayacaklardır.

Şekil 3.2.'de bulanık küme örneğinde ise, $20^{\circ}C$ ile $40^{\circ}C$ arasındaki değerler 1 üyelik derecesi ile sıcak kümesine ait olmaktadır. $0^{\circ}C$ ile $10^{\circ}C$ arasındaki değerler 1 üyelik derecesi ile soğuk kümesine aittirler. $10^{\circ}C$ ile $20^{\circ}C$ arasındaki değerler ise hem sıcak kümesine hem de soğuk kümesine ait olmaktadır (Şen 2001; Elmas 2003).

Bulanık bir küme, bir nesneyi ve bu nesnenin ilgili kümeye üyelik derecesini gösteren sıralı çiftler

$$A = (x, \mu_A(x)), \quad \forall x \in X \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilir.

Bulanık bir A kümesi, evrensel kümenin sonlu olması halinde (3.4)'deki biçimde gösterilir.

$$A = \sum_i^n \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \quad (3.4)$$

Evrensel kümenin sonsuz olması halinde ise bulanık A kümesi (3.5)'de gösterildiği gibi ifade edilir.

$$A = \int \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} \quad (3.5)$$

Yukarıdaki eşitliklerde kullanılan \sum , \int ve $+$ işaretleri cebirsel anlamlarını ifade etmemektedir. Toplam ve integral işaretleri, bulanık çiftlerin sırasıyla kesikli ve sürekli evrenlerde bir araya getirilmesini ifade eder. $+$ simgesi ise bulanık sayı çiftlerinin birleşimini gösteren bir simgedir (Özkan 2003; Uçal Sarı 2012).

Bulanık sayılar ve bu sayılar üzerinde tanımlı işlemlerin daha iyi anlaşılabilmesi için öncelikle bulanık küme kavramlarından bahsedilmesi gerekmektedir. Bulanık kümenin kavramları olan öz, destek (dayanak), yükseklik, normallik, α -kesim, seviye kümesi, konvekslik (dışbükeylik) ve konkavlık (içbükeylik) kavramlarından oluşmaktadır. Şimdi bu kısımlardan sırasıyla kısaca bahsedilecektir.

Öz: Bulanık kümenin tam üyeliğe sahip elemanlarının oluşturduğu topluluğa üyelik fonksiyonunun özü (çekirdeği) denir. Yani öz, \tilde{A} bulanık kümesine üyeliği $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ olan evrensel kümedeki x elemanlarından oluşur (Ross 2010; Gülcan 2012).

Destek (dayanak): \tilde{A} kümesi bir bulanık küme olsun. Bir \tilde{A} alt kümesinin tüm elemanlarını içeren o alt kümenin dayanağı denmektedir. Dayanakta bulunan her bir eleman 0 ile 1 arasında üyelik derecesine sahiptir. Dayanak matematiksel olarak,

$$Destek(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edilir.

Yükseklik: \tilde{A} bulanık kümesinin yüksekliği maksimum üyelik derecesine sahip değerdir ve matematiksel olarak,

$$Yük(\tilde{A}) = \text{Max} \mu_{\tilde{A}}(x), x \in X \quad (3.7)$$

şeklinde gösterilmektedir.

Normallik: \tilde{A} bulanık kümesinin yüksekliği 1 ise \tilde{A} bulanık kümesine normaldir denir ve matematiksel olarak,

$$\text{Max} \mu_{\tilde{A}}(x) = 1, x \in X \quad (3.8)$$

şeklinde gösterilir.

α -kesim: α -kesim kümesi \tilde{A}_α ile gösterilir. X evrensel kümesinin \tilde{A} kümesindeki bütün elemanlarından üyelik derecesi α özel değerinden büyük ya da eşit olanları içermektedir. Burada α , $[0,1]$ aralığında keyfi bir değerdir. Matematiksel gösterimi,

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad (3.9)$$

şeklindedir.

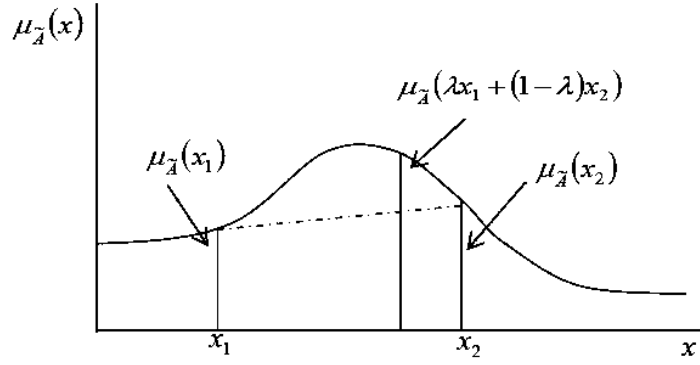
Seviye kümesi: Seviye kümeleri α 'lar aracılığıyla elde edilir. Dolayısıyla seviye kümesi (3.10)'da gösterildiği gibi ifade edilir.

$$\Lambda_{\tilde{A}} = \{\alpha \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha, \alpha \geq 0, x \in X\} \quad (3.10)$$

Konvekslik (Dışbükeylik) ve Konkavlık (İçbükeylik): Konvekslik kavramı, klasik kümelerde taşıdığı özelliklerin birçoğunu koruyacak şekilde bulanık kümelere genişletilebilir. Bunun için, evrensel kümenin boyutu öklitsel uzay R^n de tanımlı olması gerekir. Bulanık kümelere konvekslik kavramı, özellikle optimizasyon ile ilgili uygulamalarda oldukça yararlı olup α -kesimlerine veya üyelik fonksiyonlarına göre tanımlanabilir. Konvekslik kavramı α -kesimlerine göre şöyle tanımlanır: Eğer, α -kesim kümelerinin her biri dışbükey kümeler ise, bulanık küme \tilde{A} da dışbükey bir kümedir. Üyelik fonksiyonlarına göre dışbükeylik kavramı $x_1, x_2 \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $A \subset R$ kümesi için

$$\mu_{\tilde{A}}[\lambda x_1 + [1-\lambda]x_2] \geq \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)] \quad (3.11)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa \tilde{A} kümesi dışbükeydir (Zimmerman 1991).



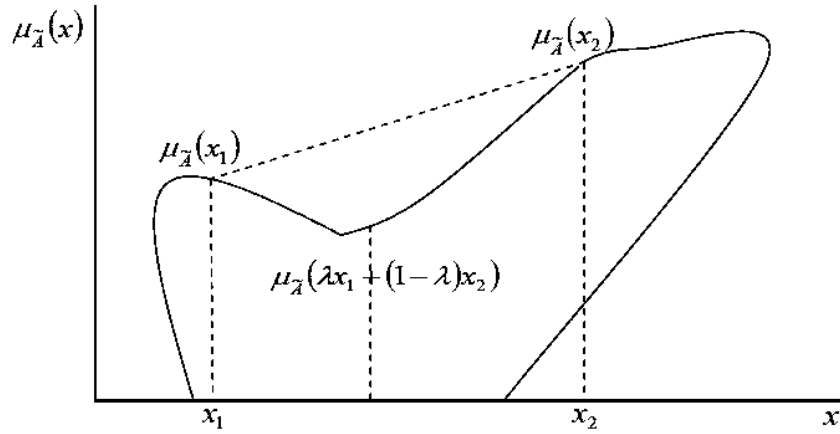
Şekil 3.3. Konveks bulanık küme (Yıldırım 2009)

Şekil 3.3.'e göre, $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + [1-\lambda]x_2)$, $\lambda x_1 + [1-\lambda]x_2$ noktasının üyelik fonksiyonu değerini verirken; $\lambda\mu_{\tilde{A}}(x_1) + (1-\lambda)\mu_{\tilde{A}}(x_2)$, $\mu_{\tilde{A}}(x_1)$ ve $\mu_{\tilde{A}}(x_2)$ değerlerinin ağırlıklı ortalamasını verir. Dolayısıyla bir konveks üyelik fonksiyonu için $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ doğru parçası üzerinde yer alan noktalardaki $\mu_{\tilde{A}}(x)$ değeri, $[x_1, \mu_{\tilde{A}}(x_1)]$ ve $[x_2, \mu_{\tilde{A}}(x_2)]$ noktalarını birleştiren eğrinin yüksekliğinden küçük ya da eşit olur. Konkav bir fonksiyon için ise, eğrinin yüksekliğinden büyük ya da eşit olur (Seçme 2005; Yıldırım 2009).

Evrensel küme öklitsel uzay R^n de tanımlı olarak kabul edilirse; eğer evrensel kümede tanımlı olan \tilde{A} bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu evrensel kümede yarı konkav (içbükey) halde bulunuyorsa; \tilde{A} kümesi de yarı içbükeydir. Eğer, \tilde{A} kümesinin üyelik fonksiyonu $(0,1)$ aralığında, tam içbükeylik özelliği gösteriyorsa; \tilde{A} kümesi de tam içbükey bir kümedir (Inuiguchi 2003; Yıldırım 2009). Üyelik fonksiyonlarına göre bulanık bir kümenin konkavlığı $x_1, x_2 \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ koşulları sağlanıyorsa

$$\mu_{\tilde{A}}[\lambda x_1 + [1-\lambda]x_2] \leq \max[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)] \quad (3.12)$$

eşitsizliği ile ifade edilir.



Şekil 3.4. Konkav bulanık küme (Yıldırım 2009)

Yukarıda verilen bulanık kümenin kısımlarından yola çıkarak bulanık sayının tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Normal ve dışbükey bir bulanık kümenin α -kesimi kapalı bir küme ise **bulanık sayı** olarak adlandırılmaktadır. Matematiksel olarak ifade edilecek olursa; \tilde{A} bulanık bir küme ve $x \in \tilde{A}$ olmak üzere

- i. $Max \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$
- ii. $\tilde{A}_{\alpha} \in [0, 1]$
- iii. $\mu_{\tilde{A}}[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)]$

koşullarını sağlayan x sayısına “bulanık sayı” denir. Bu eşitlikler sırasıyla, bulanık sayının normal olmasını, bulanık kümenin α -kesiminin kapalı olmasını ve bulanık kümenin dış bükey olmasını ifade etmektedir (Atalık 2014).

3.2. Bulanık Küme İşlemleri

Üyelik fonksiyonu, bulanık kümelerin önemli bir parçasıdır. Bulanık kümelerde işlemler üyelik fonksiyonu yardımıyla tanımlanmıştır. Bulanık küme teorisinde kullanılan ve Zadeh (1965) tarafından tanımlanan temel işlemler aşağıda verilmiştir.

\tilde{A} ve \tilde{B} bulanık kümelerine ait üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve $\mu_{\tilde{B}}(x)$ olsun.

Birleşim: \tilde{A} ve \tilde{B} bulanık kümelerinin birleşiminin üyelik fonksiyonu, bireysel üyelik fonksiyonlarının maksimumu olarak tanımlanır ve matematiksel olarak,

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in X \quad (3.13)$$

şeklinde gösterilir.

Kesişim: \tilde{A} ve \tilde{B} bulanık kümelerinin birleşiminin üyelik fonksiyonu, bireysel üyelik fonksiyonlarının minimumu olarak tanımlanır ve matematiksel olarak,

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in X \quad (3.14)$$

şeklinde gösterilir.

Tümleyen: $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve $\mu_{\tilde{B}}(x)$ üyelik fonksiyonlarına sahip \tilde{A} ve \tilde{B} bulanık kümeleri için,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in X \quad (3.15)$$

koşulu sağlanıyorsa, \tilde{A} ve \tilde{B} için tümleyendir denir ve $\tilde{B} = \tilde{A}^c$ ve $\tilde{A} = \tilde{B}^c$ ile gösterilir.

Kapsama: $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve $\mu_{\tilde{B}}(x)$ üyelik fonksiyonlarına sahip \tilde{A} ve \tilde{B} bulanık kümeleri için,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (3.16)$$

koşulu sağlanıyorsa \tilde{A} , \tilde{B} 'nin alt kümesi ($\tilde{A} \subset \tilde{B}$) veya \tilde{B} , \tilde{A} 'yı kapsar ($\tilde{B} \supset \tilde{A}$) denir (Paksoy ve ark. 2013).

Eşitlik: \tilde{A} ve \tilde{B} bulanık kümeleri eşit ise $\tilde{A} = \tilde{B}$ şeklinde gösterilir ve üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (3.17)$$

eşitliği ile ifade edilir.

Cebirsel Toplam: $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve $\mu_{\tilde{B}}(x)$ üyelik fonksiyonlarına sahip \tilde{A} ve \tilde{B} bulanık kümelerinin cebirsel toplamları,

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (3.18)$$

eşitliği ile ifade edilir.

Cebirsel Fark: $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve $\mu_{\tilde{B}}(x)$ üyelik fonksiyonlarına sahip \tilde{A} ve \tilde{B} bulanık kümelerinin cebirsel farkları,

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}^c}(x)\} = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad (3.19)$$

eşitliği ile ifade edilir.

Cebirsel Çarpım: $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve $\mu_{\tilde{B}}(x)$ üyelik fonksiyonlarına sahip \tilde{A} ve \tilde{B} bulanık kümelerinin cebirsel çarpımları,

$$\mu_{\tilde{A} \cdot \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (3.20)$$

eşitliği ile ifade edilir (Yanartaş 2009).

3.3. Bulanık Mantık Üyelik Fonksiyonu Şekilleri

Üyelik fonksiyonları denetlenen sürecin özelliklerine göre uygulamalarda en sık kullanılan fonksiyonlar olan, Üçgen üyelik fonksiyonu, Yamuk üyelik

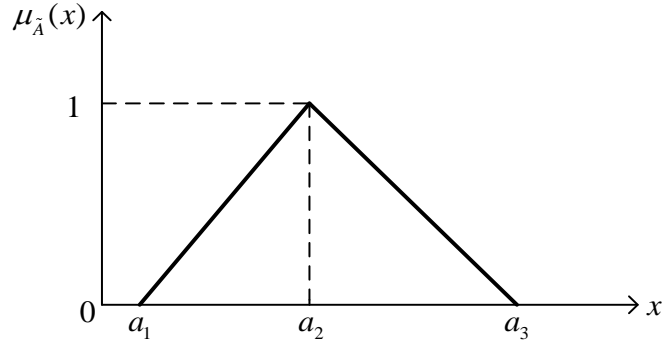
fonksiyonu, Gauss üyelik fonksiyonu, Sigmoidal üyelik fonksiyonu olmak üzere karşımıza çıkmaktadır.

3.3.1. Üçgen üyelik fonksiyonu

En sık kullanılan üyelik fonksiyonlarından biri olan üçgen üyelik fonksiyonları a_1, a_2 ve a_3 olmak üzere üç parametre ile tanımlanır. Söz konusu üyelik fonksiyonu ise

$$\mu_{\tilde{A}}(x; a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2}, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0, & x > a_3 \end{cases} \quad (3.21)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Şekil 3.5.'de görüldüğü üzere, a_2 fonksiyonun özünü oluştururken a_1 ve a_3 arasındaki değerler desteği oluşturur.



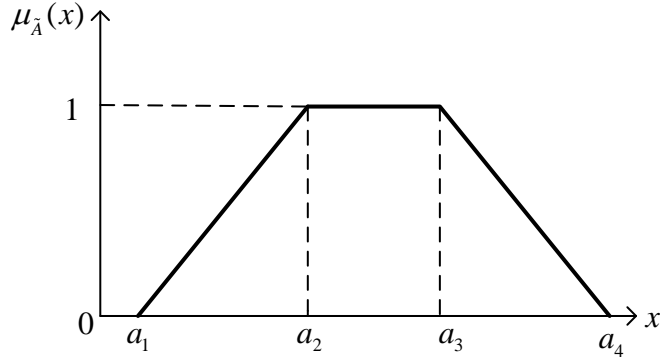
Şekil 3.5. Üçgen üyelik fonksiyonunun gösterimi (Gülcan 2012)

3.3.2. Yamuk üyelik fonksiyonu

Yamuk üyelik fonksiyonları a_1, a_2, a_3 ve a_4 olmak üzere dört parametre ile tanımlanır. Şekil 3.6.'dan görüleceği gibi $a_2 - a_3$ aralığı fonksiyonun özünü oluştururken ve $a_1 - a_4$ arasındaki değerler fonksiyonun desteğini oluşturur. Yamuk

üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\mu_{\bar{A}}(x; a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4 - x}{a_4 - a_3}, & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0, & x > a_4 \end{cases} \quad (3.22)$$



Şekil 3.6. Yamuk üyelik fonksiyonunun gösterimi (Gülcan 2012)

Üçgen ve yamuk bulanık üyelik fonksiyonlarının anlaşılır olmaları ve formüllerinin basit oluşu hesaplamalarında kolaylık sağlamakta ve dolayısıyla bulanık mantık uygulamalarında sıkça kullanılmaktadırlar.

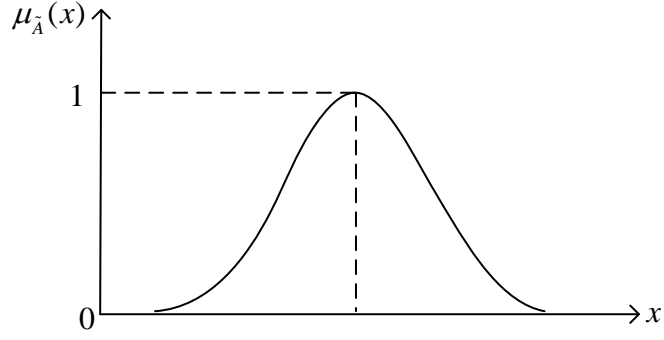
3.3.3. Gauss üyelik fonksiyonu

Gauss üyelik fonksiyonu, aşağıda verilen m ve σ parametreleri ile ifade edilebilir ve Şekil 3.7.'deki gibi gösterilir (Şen 2004; Gülcan 2012).

$$\mu_{\bar{A}}(x; m, \sigma) = \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.23)$$

Aslında bilindiği üzere standart normal dağılımda yukarıdaki fonksiyonun katsayısı $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ 'dir. Fakat normal dağılımdan üyelik fonksiyonuna geçişte

fonksiyonun maksimumununun $(m,1)$ olması gerektiği için $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ olmalıdır.



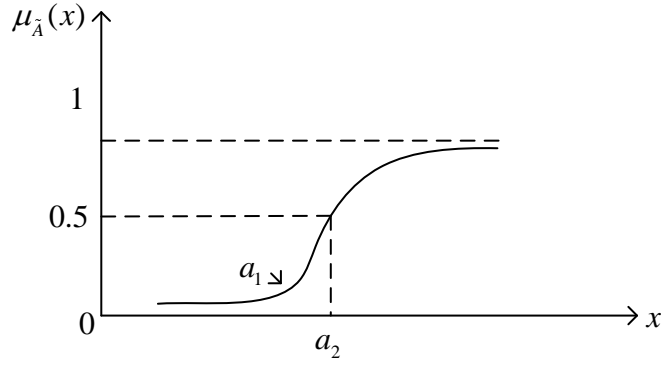
Şekil 3.7. Gauss üyelik fonksiyonunun gösterimi (Gülcan 2012)

Bu fonksiyonda m , fonksiyona ait dağılımın merkezini ve σ merkez etrafında fonksiyonun dağılımını yani genişliğini ve şeklini belirler. σ küçüldükçe üyelik fonksiyonu daha sivri ve ince olurken, bu değer büyüdükçe üyelik fonksiyonu gittikçe yayvanlaşacaktır (Yen ve Langari 1999; Gülcan 2012).

3.3.4. Sigmoidal üyelik fonksiyonu

Sigmoidal üyelik fonksiyonu a_1 ve a_2 olmak üzere iki parametre ile (3.24) fonksiyonu ile tanımlanır ve Şekil 3.8.'de gösterildiği gibidir (Dombi ve Gera 2005; Gülcan 2012).

$$\mu_A(x; a_1, a_2) = \left(\frac{1}{1 + e^{-a_1(x-a_2)}} \right) \quad (3.24)$$



Şekil 3.8. Sigmoidal üyelik fonksiyonunun gösterimi (Gülcan 2012)

Burada a_1 parametresi eğrinin eğimini gösterirken a_2 parametresi 0.5 üyelik fonksiyon değeri ile fonksiyonun geçiş noktasını göstermektedir.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ MAKSİMUM BULANIK ENTROPİ YÖNTEMLERİ

Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Yöntemleri (GEOY) mühendislik, ekonomi ve çeşitli alanlarda ve istatistikte önemli uygulamalara sahiptir. Özellikle istatistiğin bilim dallarından birisi olan bulanık veri analizi için bu yöntemin uygulanabilirliği oldukça önem taşımaktadır. Bu sebeple, bu bölümde bulanık entropi ölçümünden yararlanarak sonlu bulanık kümeler için Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon Yöntemleri'nin yeni bir modifikasyonu önerilmiştir. Önerilen bu yöntem Genelleştirilmiş Maksimum Bulanık Entropi (GMax(F)Ent) yöntemleri olarak adlandırılmıştır. GMax(F)Ent yöntemlerinden MinMax(F)Ent ve MaxMax(F)Ent yöntemleri ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır.

Bu bölümde, Maksimum Bulanık Entropi (Max(F)Ent) problemi ve bu problemin çözümü olarak yeni bir yöntem olan sonlu sayıda bulanık kümeler için Max(F)Ent yöntemi yardımıyla karakterize edici moment fonksiyonlarına bağlı özel bir fonksiyonel tanımlanmıştır. Daha sonra bu problemin çözümü için söz konusu fonksiyonele minimum ve maksimum değer veren (MinMax(F)Ent)_m ve (MaxMax(F)Ent)_m şeklindeki Genelleştirilmiş Maksimum Bulanık Entropi (GMax(F)Ent) dağılımları tanımlanmıştır ve bu dağılımların nümerik yöntemlerle bulunması problemi ortaya konmuştur. Ayrıca, problemlerin çözümünün varlığı

matematiksel olarak kanıtlanmıştır. Ortaya konan problemlerin oluşturulması ve nümerik çözümleri için MATLAB 7.10.0 (R2010a) programı kullanılmıştır. Bunlara ek olarak moment kısıt sayısı arttırıldıkça, $(\text{MinMax}(F)\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(F)\text{Ent})_m$ dağılımlarının modellemeye etkisi incelenmiştir.

4.1. Bulanık Entropi Ölçümleri

Bulanık entropi bulanık kümelerin bulanıklığının matematiksel değerlerini ifade etmede kullanılır. Bulanık entropi ölçümü klasik entropi tanımından ve bulanık kümenin özellikleriyle birleştirildiğinde birçok farklı bulanık entropi ölçüm tanımlamaları yapılmıştır.

Zadeh ilk olarak 1965 yılında Shannon'un ağırlıklı entropisini kullanarak $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ olasılık dağılımına sahip $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ sonlu sayıda elamana sahip bir A bulanık kümesinin entropisini matematiksel olarak

$$H_{fuzzy}(A) = - \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) P(x_i) \log P(x_i) \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada, A bulanık küme, $\mu_A(x_i)$ A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonunun değerleridir.

De Luca ve Termini (1972) ise bulanık küme için Shannon'un fonksiyonundan yararlanarak oldukça farklı bir şekilde bulanık entropi ölçümünü

$$H(A) = - \sum_{i=1}^n \left[\mu_A(x_i) \log \mu_A(x_i) + (1 - \mu_A(x_i)) \log (1 - \mu_A(x_i)) \right] \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada bulanık entropi ölçümü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- i. $H(A) = 0$ ancak ve ancak A klasik küme ise,
- ii. $\mu_A(x_i) = 0.5, \forall x_i \in A$ ise $H(A)$ maksimum değerini alır.

Bhandari ve Pal (1993), Renyi entropisine uygun olarak bulanık entropi ölçümünü matematiksel olarak

$$H_{\alpha}(A) = -\frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^n \log \left[\mu_A^{\alpha}(x_i) + (1-\mu_A(x_i))^{\alpha} \right], \alpha \neq 1, \alpha > 0 \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlamıştır.

Parkash ve ark. (2008), iki reel parametre için bulanık entropinin yeni bir genelleştirilmiş ölçümünü matematiksel olarak

$$H_{\alpha}^{\beta}(A) = [(1-\alpha)\beta]^{-1} \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \mu_A^{\alpha}(x_i) + (1-\mu_A(x_i))^{\alpha} \right\}^{\beta} - 1 \right], \alpha > 0, \alpha \neq 1, \beta \neq 0 \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlamıştır (Kumar ve ark. 2011).

Biz bu tez çalışmasında De Luca ve Termini (1972) tarafından geliştirilen (4.2) bulanık entropi ölçümünden yararlanarak Maksimum Bulanık Entropi problemini ve çözüm yöntemlerini inceleyeceğiz.

4.2. Maksimum Bulanık Entropi Problemi

A bulanık küme olsun. A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_A(x_i): X \rightarrow [0,1]$ şeklindedir.

$$H(A) = -\sum_{i=0}^n \left[\mu_A(x_i) \log \mu_A(x_i) + (1-\mu_A(x_i)) \log (1-\mu_A(x_i)) \right] \quad (4.5)$$

$$\sum_{i=0}^n \mu_A(x_i) g_j(x_i) = \mu_j, j = 0, 1, \dots, m \quad (4.6)$$

Burada $g_j(x_i), i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m, g_0(x) = 1$ verilmiş karakterize edici moment fonksiyonlarıdır.

(4.5) fonksiyonuna (4.6) koşulları altında maksimum değer veren $(\mu_A(x_0), \mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \dots, \mu_A(x_n))$ dağılımının bulunma problemi “Maksimum Bulanık Entropi Problemi” veya kısaca “Max(F)Ent problemi” olarak ve bu problemin çözümüne ise “Maksimum Bulanık Entropi Dağılımı” veya “Max(F)Ent dağılımı” olarak tanımlanmıştır. Max(F)Ent dağılımının bulunması bir optimizasyon problemidir. Söz konusu problemin çözüm yöntemi “Maksimum Bulanık Entropi (Max(F)Ent) Yöntemi” olarak adlandırılmıştır.

(4.6) sistemindeki $g_j(x); j = 0, 1, \dots, m$ fonksiyonları lineer bağımsız rassal değişkenlerdir. Başka bir ifadeyle,

$$0 < E \left\{ \left| a_0 g_0 + a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots + a_m g_m \right|^2 \right\} = a^T R a, a \neq 0, a = (a_0, a_1, \dots, a_m) \quad (4.7)$$

R -korelasyon matrisi olmakla bu kuadratik formun sıfırdan farklı olması ancak $a \neq 0$ olduğunda gerçekleşiyorsa $g_j(x); j = 0, 1, \dots, m$ rassal değişkenleri lineer bağımsızdır. Bu durumda, R -korelasyon matrisi pozitif tanımlıdır ve bu nedenle öz değerleri pozitiftir.

NOT: $(g_0(x), g_1(x), \dots, g_m(x)) = (g_0, g_1, \dots, g_m)$ m boyutlu rassal değişken için $E\{g_j(x)\} = m_j; j = 0, 1, \dots, m$ ve $\dot{g}_j = g_j - m_j$ olmakla $(\dot{g}_0, \dot{g}_1, \dots, \dot{g}_m)$ merkezleştirilmiş rassal değişkeni ele alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 0 &\leq E \left\{ \left| a_0 \dot{g}_0 + a_1 \dot{g}_1 + a_2 \dot{g}_2 + \dots + a_m \dot{g}_m \right|^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left| a_0 (g_0 - m_0) + a_1 (g_1 - m_1) + a_2 (g_2 - m_2) + \dots + a_m (g_m - m_m) \right|^2 \right\} = \\ &= E \left\{ \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^m \alpha_j \alpha_i (g_j - m_j)(g_i - m_i) \right\} = \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^m \alpha_j \alpha_i E \left\{ (g_j - m_j)(g_i - m_i) \right\} \end{aligned}$$

ve

$$E \left\{ (g_j - m_j)(g_i - m_i) \right\} = E \{ g_j g_i \} - E \{ g_j \} E \{ g_i \}$$

olduğu görülmektedir. $E\{(g_j - m_j)(g_i - m_i)\} = a_{ji}$ olsun. $\{a_{ji}\} = A$ matrisi varyans-kovaryans matrisidir. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ olmakla (4.7) eşitliği geçerlidir.

Maksimum Entropi (MaxEnt) yönteminde olduğu gibi $n > m$ bağıntısı sağlanmalıdır. Bu bağıntı sağlanmazsa ekstremum nokta söz konusu olamaz. Bu koşullar da sağlandıktan sonra (4.5),(4.6) problemi koşullu ekstremum problemidir ve bu problem Lagrange çarpanları yöntemiyle çözülebilmektedir.

(4.5),(4.6) koşullu ekstremum problemi Lagrange çarpanları yöntemiyle ele alındığında μ_j ; $j = 0, 1, \dots, m$ değerleri keyfi verilemez. Çünkü X rassal değişkenine ait istatistiksel $(\mu_A(x_0), \mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \dots, \mu_A(x_n))$ dağılımı ve $g_j(x_i)$ 'ler yardımıyla μ_j 'ler hesaplandığında

$$M = \begin{bmatrix} g_0(x_0) & g_0(x_1) & g_0(x_2) & \cdots & g_0(x_n) \\ g_1(x_0) & g_1(x_1) & g_1(x_2) & \cdots & g_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m(x_0) & g_m(x_1) & g_m(x_2) & \cdots & g_m(x_n) \end{bmatrix}$$

matrisinin rankı, genişletilmiş

$$N = \begin{bmatrix} g_0(x_0) & g_0(x_1) & g_0(x_2) & \cdots & g_0(x_n) & \mu_0 \\ g_1(x_0) & g_1(x_1) & g_1(x_2) & \cdots & g_1(x_n) & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_m(x_0) & g_m(x_1) & g_m(x_2) & \cdots & g_m(x_n) & \mu_m \end{bmatrix}$$

matrisine rankına eşit olmasının nedeni,

$$g_j(x_0)\tilde{\mu}_A(x_0) + g_j(x_1)\tilde{\mu}_A(x_1) + \dots + g_j(x_n)\tilde{\mu}_A(x_n) = \tilde{\mu}_j \quad (4.8)$$

koşulları sağlandığında başka bir ifadeyle N matrisindeki son sütunun geride kalan diğer sütunlarla lineer bağımlı olmasıdır. Bu durumda, $rank(M) = rank(N)$

($rank(M) = m+1$) olur ve Kronecker-Capelli teoremine göre (4.6) koşullarını sağlayan sistemin çözümü vardır. Başka bir ifadeyle, (4.6) homojen olmayan denklemler sisteminin $\mu_A(x_0), \mu_A(x_1), \dots, \mu_A(x_n)$ bulanık değerlerine göre çözümü vardır.

(4.6) koşullarında $g_j(x_i)$ 'ler keyfi verilebilir. Bu koşullar sağlandıktan sonra (4.5) fonksiyonunu (4.6) koşulları altında maksimize etmek amacıyla Lagrange çarpanları yöntemini uygulamak için aşağıdaki gibi U yardımcı fonksiyonu tanımlansın:

$$U = -\sum_{i=0}^n \left[\mu_A(x_i) \log \mu_A(x_i) + (1 - \mu_A(x_i)) \log (1 - \mu_A(x_i)) \right] - \sum_{j=0}^m \lambda_j \left(\sum_{i=0}^n \mu_A(x_i) g_j(x_i) - \mu_j \right). \quad (4.9)$$

U yardımcı fonksiyonundan λ 'lara ve $\mu_A(x_i)$ 'lere göre kısmi türevleri alınsın ve sıfıra eşitlensin:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \mu_A(x_i)} &= \left[-\log \mu_A(x_i) + \mu_A(x_i) \frac{1}{\mu_A(x_i)} - \log (1 - \mu_A(x_i)) + (1 - \mu_A(x_i)) \frac{1}{\mu_A(x_i)} (-1) \right] \\ &\quad - \sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i) = 0 \\ &= \left[-\log \mu_A(x_i) + 1 - \log (1 - \mu_A(x_i)) - 1 \right] - \sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i) = 0 \\ &= -\log \frac{\mu_A(x_i)}{(1 - \mu_A(x_i))} = \sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i) \\ \frac{1 - \mu_A(x_i)}{\mu_A(x_i)} &= e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)} \\ \frac{1}{\mu_A(x_i)} &= 1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)} \end{aligned}$$

Buradan,

$$\mu_A(x_i) = \frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}}, i = 0, 1, \dots, n \quad (4.10)$$

şeklinde bulunur. Diğer yandan,

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_j} = - \left(\sum_{i=0}^n \mu_A(x_i) g_j(x_i) - \mu_j \right) = 0, j = 0, 1, \dots, m; i = 0, 1, \dots, n \quad (4.11)$$

sistemi (4.6) sistemini ifade etmektedir. (4.10) fonksiyonu (4.6) sisteminde dikkate alınır;

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} g_j(x_i) = \mu_j; j = 0, 1, \dots, m \quad (4.12)$$

sistemi elde edilir. Buradan (4.12) sisteminde $i = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere

$$f_j(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} g_j(x_i) - \mu_j = 0, j = 0, 1, \dots, m \quad (4.13)$$

şeklinde veya $f_j(\lambda) - \mu_j = 0, j = 0, 1, \dots, m; \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ şeklinde lineer olmayan denklemler sistemi elde edilir. (4.13) sisteminin çözüme sahip olması için yeter koşullardan biri Jacobi determinantının sıfırdan farklı olmasıdır. Başka bir ifadeyle,

$$\frac{D(f_0, f_1, \dots, f_m)}{D(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)} \neq 0 \quad (4.14)$$

koşulu (4.13) sisteminin çözüme sahip olması için yeter koşullardan biridir. (Bu determinant (4.13) sisteminin lineerleştirilmiş baş (esas) kısmıdır.) Jacobi determinantının tanımına göre,

$$J = \frac{D(f_0, f_1, \dots, f_m)}{D(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial \lambda_0} & \frac{\partial f_0}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_0}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial \lambda_m} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_0} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \lambda_0} & \frac{\partial f_m}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_m}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial \lambda_m} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4.15)$$

şeklindedir. Burada $\frac{\partial f_j}{\partial \lambda_k}$, $j = 0, 1, \dots, m; k = 0, 1, \dots, m$ olmakla,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial \lambda_k} &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} g_j(x_i) e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)} (g_k(x_i)) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} g_j(x_i) g_k(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1 - \mu_A(x_i)}{\left(\frac{1}{\mu_A(x_i)} \right)^2} g_j(x_i) g_k(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^n \mu_A(x_i) (1 - \mu_A(x_i)) g_j(x_i) g_k(x_i) \\ \frac{\partial f_j}{\partial \lambda_k} &= \sum_{i=0}^n \mu_A(x_i) (1 - \mu_A(x_i)) g_j(x_i) g_k(x_i) \\ \frac{\partial f_j}{\partial \lambda_k} &= \sum_{i=0}^n \mu_A(x_i) (1 - \mu_A(x_i)) g_j(x_i) g_k(x_i) \\ &= K \frac{\sum_{i=0}^n \mu_A(x_i) (1 - \mu_A(x_i))}{K} g_j(x_i) g_k(x_i) = KE[g_j g_k] \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Diğer yandan,

$$\frac{\partial f_j}{\partial \lambda_k} = KE[g_j g_k], \quad j = 0, 1, \dots, m; k = 0, 1, \dots, m \quad (4.16)$$

olduğu elde edilir. Burada $\sum_{i=0}^n \mu_A(x_i)(1 - \mu_A(x_i)) = K$ olsun. Bu durumda;

$$\sum_{i=0}^n \frac{\mu_A(x_i)(1 - \mu_A(x_i))}{K} = 1 \quad (4.17)$$

olur.

$$R = \left(\frac{\partial f_j}{\partial \lambda_k} \right) = K \begin{pmatrix} E[g_0 g_0] & E[g_0 g_1] \dots E[g_0 g_m] \\ E[g_1 g_0] & E[g_1 g_1] \dots E[g_1 g_m] \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ E[g_m g_0] & E[g_m g_1] \dots E[g_m g_m] \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

Burada R - Korelasyon matrisi $j = 0, 1, \dots, m; k = 0, 1, \dots, m$ olmakla

$$J = \frac{D(f_0, f_1, \dots, f_m)}{D(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)} = \det(R) \neq 0 \quad (4.19)$$

elde edilir. (4.19) eşitliği gösteriyor ki $f_j(\lambda) - \mu_j = 0; j = 0, 1, \dots, m$ lineer olmayan (4.13) denklemler sisteminin çözüme sahip olması için kapalı fonksiyonların varlık teoreminin koşullarını sağlamak zorundadır. f_0, f_1, \dots, f_m 'in $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ 'a göre Jacobi determinanti sıfırdan farklı olduğu gösterildi. Kapalı fonksiyonun varlık teoreminin (Zorich 2002) diğer koşullarının da sağlandığı aşağıda gösterilmiştir.

$$(4.10)'da \quad \tilde{\mu}_A(x_i) = \frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} \quad \text{olmakla} \quad \tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m \quad \text{seçilebilir.}$$

Buradaysa, $\tilde{\mu}_A(x_i)$ verilmiş (veya deneysel olarak elde edilmiş) bulanık değerlerdir. (4.13)'de λ yerine $\tilde{\lambda}$ yazıldığında da (4.13) sağlanacaktır. Bu nedenle, $f_j(\tilde{\lambda}) - \mu_j = 0; j = 0, 1, \dots, m$ eşitlikleri sağlanacaktır.

(4.6) koşullarından $j = 0, 1, \dots, m$ olmakla

$$\sum_{i=0}^m \mu_A(x_i) g_j(x_i) + \sum_{i=m+1}^n \mu_A(x_i) g_j(x_i) = \mu_j \quad (4.20)$$

veya

$$\sum_{i=0}^m \tilde{\mu}_A(x_i) g_j(x_i) = \tilde{\mu}_j - \sum_{i=m+1}^n \tilde{\mu}_A(x_i) g_j(x_i) \quad (4.21)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.21) eşitliklerinden yola çıkarak $\tilde{\mu}_A(x_i)$ 'ler $g_j(x_i)$ yardımıyla verilerden elde edilirken (4.20) eşitliğinin sağ tarafı ile $\tilde{\mu}_j$ belirlenmiş olduğu için $\text{rank}M = \text{rank}N$ koşulu sağlandığından Lagrange çarpanları yönteminin uygulanması durumunda $\det(g_j(x_i)) \neq 0; j = 0, 1, \dots, m; i = 0, 1, \dots, m$ olduğu kabul edilir. (4.13) eşitliği için

$$f_j(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m) = \tilde{\mu}_j; j = 0, 1, \dots, m$$

koşulunu sağlayan $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m$ 'lerin varlığı gerekir.

NOT: Sonuçta λ 'ların bulunması için sabit nokta metotları uygulanırken başlangıç yaklaşımın $\tilde{\lambda}$ 'lardan seçilmesi gerekir. Aksi takdirde süreç yakınsak olmayabilir. Bu ise kapalı fonksiyon teoreminin $f_j(\tilde{\lambda}) - \tilde{\mu}_j = 0; j = 0, 1, \dots, m$ koşulunun sağlanmadığı anlamına gelir. (4.14) eşitliklerinde $\det(g_j(x_i)) \neq 0; j = 0, 1, \dots, m; i = 0, 1, \dots, m$ olduğu kabul edildiği için (4.10) eşitliğinden yola çıkarak

$$\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i) = \ln\left(\frac{1 - \mu_A(x_i)}{\mu_A(x_i)}\right), i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, m \quad (4.22)$$

eşitliklerinden çarpanları bulunur. Bu şekilde bulunmuş λ 'lar $f_j(\tilde{\lambda}) - \tilde{\mu}_j = 0; j = 0, 1, \dots, m$ koşullarının sağlanması için gereklidir. Kapalı fonksiyonun varlık teoreminde $\det R \neq 0$ koşulunun yanı sıra (4.13) koşullarının $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m$ değerleri için sağlanması da önemlidir. Bu nedenle (4.22) eşitliklerini

$$\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i) = \ln \left(\frac{1 - \mu_A(x_i)}{\mu_A(x_i)} \right), i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, m \quad (4.23)$$

şeklinde ifade etmekle (4.14) eşitliğinden $\tilde{\mu}_A(x_0), \tilde{\mu}_A(x_1), \dots, \tilde{\mu}_A(x_m)$ 'ler homojen olmayan lineer denklemler sistemi olarak $\tilde{\mu}_j, \tilde{\mu}_A(x_{m+1}), \dots, \tilde{\mu}_A(x_n)$ 'ler yardımıyla ifade edilebilir. Bir başka ifadeyle, (4.14)'den Cramer yöntemiyle $\tilde{\mu}_A(x_i), i = 0, 1, \dots, m$ 'ler bulunabilir. Bu durumda,

$$\tilde{\mu}_A(x_i) = F(\tilde{\mu}_0, \tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_m, \tilde{\mu}_A(x_{m+1}), \dots, \tilde{\mu}_A(x_n)), i = 0, 1, \dots, m \quad (4.24)$$

şeklinde bulunur. Bu ise $\tilde{\mu}_A(x_i)$ 'lerin serbest değişkenler olarak bakılabilen $\tilde{\mu}_A(x_i); i = m+1, \dots, n$ değişkenler yardımıyla ifade edildiğini gösterir. Böylece, (4.21)'de $\tilde{\mu}_A(x_i); i = 0, 1, \dots, m$ yerine (4.20) ile ifade edilen formüller yazılabilir ve (4.23)'de (4.24) eşitliği dikkate alınırsa $\tilde{\lambda}_j$ 'ler $j = 0, 1, \dots, m$ bulunur. Kapalı fonksiyonun varlık teoremi uygulanırken $f_j(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m) - \tilde{\mu}_j = 0; j = 0, 1, \dots, m$ eşitliği (4.23)'de dikkate alınmakla elde edilmiş $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m$ 'ların yardımıyla sağlanır.

Buradan da $g_j(x_i)$ ve $g_k(x_i), j = 0, 1, \dots, m; k = 0, 1, \dots, m$ karakterize edici moment fonksiyonları lineer bağımsız olduğu için bunların korelasyon matrisi pozitif tanımlıdır. Bu nedenle de, uygun korelasyon matrisinin öz değerleri pozitifdir.

(4.13) sisteminden λ 'ları bulmak için değişik yöntemler uygulanabilir. Söz konusu yöntemlerden Newton yöntemi, diğer yöntemlerden daha büyük bir yakınsama hızına sahip olduğu için tercih edilir.

(4.13) sisteminin çözümünden elde edilen sonuçlar aşağıdaki teorem yardımıyla ifade edilebilir.

Teorem 5.1 (Varlık Teoremi). Aşağıdaki I, II ve III koşullarının sağlandığı varsayılın.

- I. $g_j(x); j = 0, 1, \dots, m$ karakterize edici moment fonksiyonları lineer bağımsız olsun;
- II. $n > m$ eşitsizliği sağlansın;
- III. $\tilde{\mu}_A(x_i), i = 0, 1, \dots, m$ verilmiş üyelik değerleri ve $g_j(x); j = 0, 1, \dots, m$ $\tilde{\mu}_j; j = 0, 1, \dots, m$ karakterize edici moment fonksiyonları yardımıyla $\tilde{\mu}_j; j = 0, 1, \dots, m$ moment değerleri

$$\sum_{i=0}^n g_j(x_i) \tilde{\mu}_A(x_i) = \tilde{\mu}_j; j = 0, 1, \dots, m$$

şeklinde elde edilsin.

Bu durumda, sonlu sayıda elemana sahip $\mu_A(x_i), i = 0, 1, \dots, m$ bulanık değerlerini (4.6) kısıtları altında maksimize edilmesini sağlayan Max(F)Ent problemi $(\mu_A(x_0), \mu_A(x_1), \dots, \mu_A(x_n))$ şeklinde çözüme sahiptir.

4.3. Max(F)Ent Fonksiyonunun Konveksliği

A bulanık küme olsun. A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_A(x_i): X \rightarrow [0, 1]$ şeklindedir.

$$H(A) = - \sum_{i=0}^n [\mu_A(x_i) \log \mu_A(x_i) + (1 - \mu_A(x_i)) \log (1 - \mu_A(x_i))] \quad (4.25)$$

maksimum bulanık entropi fonksiyonunun $\mu_A(x_i); i = 0, 1, \dots, n$ değişkenlerine göre konveks fonksiyon olduğu gösterilsin. Bu nedenle, işlem kolaylığı sağlamak amacıyla $\mu_A(x_i); i = 0, 1, \dots, n$ değişkenleri yerine uygun olarak $X_i; i = 0, 1, \dots, n$ değişkenleri ele alınacaktır. Böylece (4.25) formülü,

$$H = -\sum_{i=0}^n [X_i \ln X_i + (1 - X_i) \ln(1 - X_i)] \quad (4.26)$$

şeklinde ele alınacaktır. (4.26) fonksiyonunun Hessian matrisi (\mathcal{H}) oluşturulsun. Söz konusu fonksiyonun ekstremum değere (maksimum değere) sahip olması için gereken koşulların sağlanıp sağlanmadığını belirtmek gerekmektedir. Bu amaçla fonksiyonun birinci mertebeden kısmi türevlerinin sifıra eşit olduğu kritik noktayı bulmak daha sonra ise bu kritik noktada fonksiyonun maksimum değer aldığını belirtmek için ikinci mertebeden karma türevlerin oluşturduğu kuadratik formun pozitif tanımlandığını göstermek gerekir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial X_i} &= \left[\ln X_i + X_i \frac{1}{X_i} - \ln(1 - X_i) + (1 - X_i) \frac{1}{X_i} (-1) \right] \\ &= -\left[\ln X_i + 1 - \ln(1 - X_i) - 1 \right] \\ &= \ln \left(\frac{1 - X_i}{X_i} \right) \end{aligned}$$

Buradan;

$$\frac{\partial H}{\partial X_i} = \ln \left(\frac{1 - X_i}{X_i} \right) \quad (4.27)$$

elde edilir. $\frac{\partial H}{\partial X_i} = 0$ olduğunda kritik nokta $X_i^0 = \frac{1}{2}$; $i = 0, 1, \dots, n$ olur.

$$i = j \text{ iken } \frac{\partial^2 H}{\partial X_i \partial X_j} = \frac{1}{1 - X_j} \left(-\frac{1}{X_j^2} \right) = -\frac{1}{X_j(1 - X_j)}$$

veya

$$\frac{\partial^2 H}{\partial X_i \partial X_j} = \begin{cases} -\frac{1}{X_j(1 - X_j)} & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases} \quad (4.28)$$

olduğundan \mathcal{H} Hessian matrisi aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur.

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial X_i \partial X_j} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{X_0(1 - X_0)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{X_1(1 - X_1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\frac{1}{X_n(1 - X_n)} \end{pmatrix} = -\mathcal{H} \quad (4.29)$$

Burada, \mathcal{H} Hessian matrisi olmakla pozitif tanımlı bir matristir. Görüldüğü gibi \mathcal{H} Hessian matrisinin öz değerleri olan $\frac{1}{X_j(1 - X_j)}$; $j = 0, 1, \dots, n$ sayıları pozitifdir.

$$\det(\mathcal{H}) = \frac{1}{X_0 X_1 X_2 \dots X_n (1 - X_0)(1 - X_1)(1 - X_2) \dots (1 - X_n)} \neq 0. \quad (4.30)$$

Bu sonuç $H(X)$ fonksiyonunun konveks olduğunun kanıtıdır. Geometrik olarak $z = H(x_0, x_1, \dots, x_n)$ yüzeyinin noktaları her bir $X^o = (x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o)$ noktasının komşuluğunda bu noktadan geçen teğet düzleminin (hiperdüzlem) altında bulunduğunu göstermektedir.

$$X = (X_0, X_1, \dots, X_n) ; X^o = (X_0^o, X_1^o, \dots, X_n^o) ; \rho = \sqrt{h_0^2 + h_1^2 + \dots + h_n^2} \quad (4.31)$$

$h = (h_0, h_1, \dots, h_n)^T$ olmakla $H(X)$ maksimum bulanık entropi fonksiyonu için Taylor formülü aşağıdaki şekildedir.

$$H(X^o + h) = H(X^o) + \frac{\partial H}{\partial X_0} h_0 + \frac{\partial H}{\partial X_1} h_1 + \dots + \frac{\partial H}{\partial X_n} h_n + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 H(X^o)}{\partial X_0^2} h_0 + \frac{\partial^2 H(X^o)}{\partial X_1^2} h_1 + \dots + \frac{\partial^2 H(X^o)}{\partial X_n^2} h_n \right) + o(\rho^2) \quad (4.32)$$

$X = X^o$ olduğunda ekstremum varlığı için gerek koşul $\frac{\partial H}{\partial X_i} = 0; i = 0, 1, \dots, n$ olduğundan

$$\Delta H = H(X^o + h) - H(X^o) = \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{X_0^o(1-X_0^o)} h_0^2 - \frac{1}{X_1^o(1-X_1^o)} h_1^2 - \dots - \frac{1}{X_n^o(1-X_n^o)} h_n^2 \right) + o(\rho^2) \quad (4.33)$$

formülü elde edilir. Buradan

$$\Delta H = H(X^o + h) - H(X^o) = \frac{1}{2!} h^T \mathcal{H} h + o(\rho^2) \quad (4.34)$$

formülündeki $o(\rho^2)$ ifadesi ρ^2 'ya nazaran $\rho \rightarrow 0$ koşulu altında daha yüksek mertebeden sonsuz küçülendir. Başka bir ifadeyle, $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho^2)}{\rho^2} = 0$ şeklindedir. Bu nedenle de, ΔH 'ın işareti $-\frac{1}{2!} h^T \mathcal{H} h$ kuadratik formunun işaretiyle belirlenir. \mathcal{H} Hessian matrisi pozitif tanımlı bir matris olduğundan (4.34) formülünden

görüldüğü gibi ρ 'nun küçük değerlerinde ($\rho \rightarrow 0$) $\Delta H < 0$ olur. Başka bir ifadeyle,

$$\begin{aligned}\Delta H &= H(X^o + h) - H(X^o) \\ &= H(X_0^o + h_0, X_1^o + h_1, \dots, X_n^o + h_n) - H(X_0^o, X_1^o, \dots, X_n^o) < 0\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\Delta H &= H(X^o + h) - H(X^o) < 0 \\ H(X^o + h) &< H(X^o)\end{aligned}$$

olur. Bu ise $X = X^o$ 'da $H(X)$ Maksimum Bulanık Entropi fonksiyonunun maksimum değer aldığını göstermektedir. Buradan yola çıkarak bulanık değerler için Maksimum Bulanık Entropi yöntemi ele alınacaktır.

4.4. Maksimum Bulanık Entropi Değeri

Maksimum bulanık entropi (Max(F)Ent) ölçümü bulanık küme teorisinde üyelik fonksiyonu elde etmek için geliştirilmiş yeni bir yöntemdir. Bu yönetime göre, verilen sonlu sayıdaki bir bulanık küme için karakterize edici moment vektör fonksiyonlarına bağlı olarak özel bir fonksiyonel matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

(4.5) bulanık entropi ölçümünün maksimizasyonu Lagrange çarpanları yöntemi ile gerçekleştirilmiştir ve (4.5) ölçümüne maksimum değer veren $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu (4.10) formülü ile ifade edilmiştir. (4.10) formülü (4.5) ölçümünde dikkate alınırsa maksimum bulanık entropi değeri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$H_{max}(A) = - \sum_{i=0}^n \left[\frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} \ln \frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} + \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1 - \frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} \right) \\
= & - \sum_{i=0}^n \left[\frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} \ln \frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} + \frac{e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} \ln \left(\frac{e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} \right) \right] \\
= & - \sum_{i=0}^n \left[\frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} \ln \frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} + \frac{e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} \ln \left(\frac{e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} \right) \right] \\
= & - \sum_{i=0}^n \left[\frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} \ln \frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} + \right. \\
& \left. + \frac{e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} \left(\ln e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)} + \ln \left(\frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} \right) \right) \right] \\
= & - \sum_{i=0}^n \left[\frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} \ln \frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} + \right. \\
& \left. + \frac{e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} \left(\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i) + \ln \left(\frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} \right) \right) \right] \\
= & - \sum_{i=0}^n \left[\ln \frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} + \frac{e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)} + 1 - 1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} \sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i) \right] \\
= & - \sum_{i=0}^n \left[\ln \frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} + \sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i) - \frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} \sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i) \right] \\
= & - \sum_{i=0}^n \left[\ln \frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} + \sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i) \right] + \sum_{i=0}^n \lambda_j \sum_{j=0}^m \mu_A(x_i) g_j(x_i) \\
= & - \sum_{i=0}^n \left[\ln \frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} + \sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i) \right] + \sum_{i=0}^n \lambda_j \mu_j \\
= & - \sum_{i=0}^n \left[\ln \mu_A(x_i) + \ln \left(\frac{1 - \mu_A(x_i)}{\mu_A(x_i)} \right) \right] + \sum_{i=0}^n \lambda_j \mu_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{i=0}^n \ln(1 - \mu_A(x_i)) + \sum_{i=0}^n \lambda_j \mu_j \\
&= -\sum_{i=0}^n \ln\left(1 - \frac{1}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}}\right) + \sum_{i=0}^n \lambda_j \mu_j
\end{aligned}$$

veya

$$H_{max}(A) = -\sum_{i=0}^n \ln \frac{e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} + \sum_{i=0}^n \lambda_j \mu_j \quad (4.35)$$

formülü elde edilir.

(4.35) formülü $H(A)$ bulanık entropi ölçümünün maksimum değerini göstermektedir. Burada $H_{max}(A)$ değeri $g_0(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ karakterize edici moment fonksiyonlarına bağlı bir fonksiyonel olarak

$$U(g) = H_{max}(A) = -\sum_{i=0}^n \ln \frac{e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}}{1 + e^{\sum_{j=0}^m \lambda_j g_j(x_i)}} + \sum_{i=0}^n \lambda_j \mu_j \quad (4.36)$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir. (4.36) formülü ile ifade edilen $U(g)$ fonksiyoneli Max(F)Ent fonksiyoneli olarak tanımlanmaktadır.

4.5. Sonlu Sayıda Karakterize Edici Momentler Yardımıyla MinMax(F)Ent ve MaxMax(F)Ent Problemleri ve Çözümleri

$K_0 = \{g_1, \dots, g_r\}$ r elemanlı karakterize edici moment fonksiyonlar kümesi olsun. K_0 'ın tüm m elemanlı kombinasyonlarının oluşturduğu küme $K_{0,m}$ ile gösterilsin, burada $K_{0,m}$ 'nin her bir elemanı m bileşenli bir g vektörüdür.

MinMax(F)Ent ve MaxMax(F)Ent problemleri aşağıdaki şekilde tanımlanır. $g_0(x) = 1, g(x), g \in K_{0,m}$ olmak üzere (4.36) ile tanımlanmış $U(g)$ fonksiyoneline minimum değer veren $(g_0, g^{(1)}(x)), g^{(1)}(x) \in K_{0,m}; (m = m_0)$ karakterize edici moment vektör fonksiyonuna uygun (4.5),(4.6) koşullu ekstremum probleminin

çözümü olan $\mu^{(1)} = (\mu^{(1)}(x_0), \mu^{(1)}(x_1), \dots, \mu^{(1)}(x_n))$ dağılımının bulunması problemine “MinMax(F)Ent Problemi” denir. Bu problemin çözümü olan $\mu^{(1)} = (\mu^{(1)}(x_0), \mu^{(1)}(x_1), \dots, \mu^{(1)}(x_n))$ dağılımı “(MinMax(F)Ent)_m dağılımı” olarak gösterilmektedir. Bir başka ifadeyle, (MinMax(F)Ent)_m dağılımı $g(x), g \in K_{0,m}$ karakterize edici moment vektör fonksiyonlarının $\binom{r}{m}; m=1,2,\dots,r$ sayısı kadar türetilen tüm Max(F)Ent dağılımları arasından $U(g)$ ’ye minimum değer veren dağılımdır.

Benzer şekilde, $g_0(x) = 1, g(x), g \in K_{0,m}$ olmak üzere (4.36) ile tanımlanmış $U(g)$ fonksiyoneline maksimum değer veren $(g_0, g^{(2)}(x)), g^{(2)}(x) \in K_{0,m}; (m = m_0)$ vektör fonksiyonuna uygun (4.5),(4.6) koşullu ekstremum probleminin çözümü olan $\mu^{(2)} = (\mu^{(2)}(x_0), \mu^{(2)}(x_1), \dots, \mu^{(2)}(x_n))$ dağılımının bulunması problemine “MaxMax(F)Ent problemi” denir. Bu problemin çözümü olan $\mu^{(2)} = (\mu^{(2)}(x_0), \mu^{(2)}(x_1), \dots, \mu^{(2)}(x_n))$ dağılımı “(MaxMax(F)Ent)_m dağılımı” olarak gösterilmektedir. Bir başka ifadeyle, (MaxMax(F)Ent)_m dağılımı $g(x), g \in K_{0,m}$ karakterize edici moment vektör fonksiyonlarının $\binom{r}{m}; m=1,2,\dots,r$ sayısı kadar türetilen tüm dağılımlar arasından $U(g)$ ’ye maksimum değer veren dağılımdır.

Vurgulamak gerekir ki, Genelleştirilmiş Entropi Optimizasyon problemleri Shamilov (2006,2007) tarafından verilmiştir.

5. UYGULAMA

Bu bölümde, 1999 ve 2005 yıllarına ait ölçülmüş rüzgâr verilerinden ve Sigmoidal üyelik fonksiyonundan elde edilen bulanık veri setleri için Genelleştirilmiş Maksimum Bulanık Entropi (GMax(F)Ent) yöntemlerinin uygulanabilirliği gösterilmiştir. Bu amaçla, sonlu sayıda karakterize edici moment

fonksiyonları yardımıyla Max(F)Ent ölçüm değerleri hesaplanmıştır. Genelleştirilmiş Maksimum Bulanık Entropi dağılımları belirlenirken iki ve üç moment kısıtları altında elde edilmiş GMax(F)Ent dağılımları arasından bulanık entropi ölçümü en küçük olan (MinMax(F)Ent)_m ve en büyük olan (MaxMax(F)Ent)_m dağılımları seçilmiştir. Söz konusu dağılımların performansı istatistikteki Hata Kareler Ortalaması (Root Mean Square Error) RMSE ve Ki – Kare (χ^2) kriterleri ve Max(F)Ent değeri yardımıyla incelenmiştir. Bu incelemenin sonucu olarak, sırasıyla elde edilen tüm (MinMax(F)Ent)_m ve (MaxMax(F)Ent)_m; $m = 1,2$ dağılımlarının verilmiş bulanık veri setinin $\tilde{\mu}_A(x_i); i = 0,1,\dots,18$ dağılımına uyumu Max(F)Ent, RMSE ve Ki – Kare (χ^2) kriterleri yardımıyla ortaya konulmuştur. Elde edilen sonuçlar MATLAB 7.10.0 (R2010a) istatistiksel programı ile gerçekleştirilmiştir.

GMax(F)Ent dağılımlarının performansında kullanılan Ki-Kare ve RMSE değerleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - x_i)^2}{N - n}, \quad RMSE = \left(\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - x_i)^2}{N} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Burada y_i gerçek verideki i . üyelik fonksiyonu değeri ($\tilde{\mu}_A(x_i)$), x_i tahmin edilmiş i . üyelik fonksiyonu değeri veya GMax(F)Ent yöntemlerinden elde edilmiş (MinMax(F)Ent)_m ve (MaxMax(F)Ent)_m dağılımları, N bulanık veri setindeki tüm gözlemlerin sayısı, n ise moment kısıt sayılarıdır. Ki-Kare testi uygulanırken kullanılan serbestlik derecesi sayısı $N - n$ ve α anlamlılık düzeyi ise 0.05 olarak kabul edilmiştir.

5.1. MinMax(F)Ent ve MaxMax(F)Ent Yöntemlerinin 1999 Yılında Ölçülmüş Rüzgâr Verisinden Elde Edilen Bulanık Veri Setine Uygulanması

Son yıllarda dünyadaki en önemli ve hızla gelişen yenilenebilir enerji kaynaklarından birisi de rüzgar enerjisidir. Bu sebeple, rüzgâr hızının olasılık

dağılımı rüzgâr enerji potansiyelinin değerlendirilmesi ve rüzgâr enerjisini başka enerji türlerine dönüştüren sistemlerin performansı için en önemli rüzgâr karakteristiklerinden birisidir. Bu bölümde, bulanık veri analizi, MinMax(F)Ent ve MaxMax(F)Ent şeklindeki Genelleştirilmiş Maksimum Bulanık Entropi (GMax(F)Ent) yöntemleri uygulanarak gerçekleştirilmiştir.

Bu uygulamada veri seti olarak Türkiye'nin Akşehir bölgesine ait 1999 yılı tüm aylarına ilişkin rüzgâr hızı dikkate alınmış (Genç ve ark. 2005) ve bu veri setinden elde edilen bulanık değerler Çizelge 5.1'de gösterilmiştir. Uygulamada X rassal değişkeni, 1999 yılı tüm aylara ilişkin rüzgâr hızıdır. Bu bölümde, GMax(F)Ent yöntemiyle elde edilen $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımlarının rüzgâr hızı veri setinden elde edilen bulanık veri setinin değerlendirilmesinde ne kadar uygun olduğu gösterilecektir. $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımları şeklinde elde edilen Genelleştirilmiş Maksimum Bulanık Entropi (GMax(F)Ent) dağılımlarının performans değerlendirmeleri ise Ki – Kare ve RMSE kriterleri ile Maksimum Bulanık Entropi (Max(F)Ent) ölçümü yardımıyla karşılaştırılmış ve sonuçlar yorumlanmıştır. Burada Max(F)Ent ölçümünü kullanmadaki amaç, GMax(F)Ent yöntemi ile elde edilmiş her bir dağılımın, Çizelge 5.1.'deki $\tilde{\mu}_A(x_i); i = 0,1,\dots,18$ dağılımına Max(F)Ent ölçümü açısından ne kadar yakın olduklarını ifade etmektir.

Çizelge 5.1. 1999 yılına ait ölçülmüş rüzgâr hızı verilerinden oluşan bulanık veri seti

X(m/s)	Frekanslar (h)	$\tilde{\mu}_A(x_i)$
0-1	2681	0.3061
1-2	3410	0.3893
2-3	1558	0.1779
3-4	565	0.0645
4-5	247	0.0282
5-6	138	0.0158
6-7	63	0.0072
7-8	32	0.0037
8-9	23	0.0026
9-10	14	0.0016
10-11	14	0.0016
11-12	9	0.0010
12-13	2	0.0002
13-14	1	0.0001
14-15	2	0.0002
15-16	1	0.0001

$(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımlarını elde etmek için aşağıdaki aşamalar gerçekleştirilmelidir.

1. Bulanık veri setine uygun moment fonksiyonları ile üretilen $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ karakterize edici momentleri belirlenir. Bu uygulamada

$$E\{x^2\}, E\{\ln x\}, E\{\ln(1+x)\}, E\{\ln(1+x^2)\}$$

$\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ karakterize edici momentleri kullanılmıştır.

2. Her bir moment vektör fonksiyonuna uygun $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ değerleri elde edilir.
3. Seçilen moment vektör fonksiyonlarına uygun $\text{GMax}(\text{F})\text{Ent}$ yöntemleri yardımıyla $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımları belirlenir.

$\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ yöntemi için karakterize edici momentlerin seçilmesi önemlidir. Bu uygulamada bulanık veri setinin dağılımına uygun karakterize edici momentler entropi optimizasyon (istatistiksel) dağılımlarının karakterize edici momentleri arasından deneme yoluyla seçilmiştir. Söz konusu karakterize edici moment fonksiyonları olarak

$$g_0(x)=1, g_1(x)=x^2, g_2(x)=\ln x, g_3(x)=\ln(1+x), g_4(x)=\ln(1+x^2)$$

fonksiyonlarından yararlanılmıştır.

(MinMax(F)Ent)_m ve (MaxMax(F)Ent)_m dağılımlarının belirlenmesinde kullanılan, iki ve üç kısıta uygun GMax(F)Ent dağılımlarının entropileri Çizelge 5.2. ve Çizelge 5.3.'de listelenmektedir.

Çizelge 5.2. Çizelge 5.1'de verilmiş bulanık veri seti için iki bileşene sahip moment vektörlerine uygun Max(F)Ent değerleri

Moment Vektör Fonksiyonları	Max(F)Ent Değeri
$(1, x^2)$	1.1872
$(1, \ln x)$	0.4771
$(1, \ln(1+x))$	0.1685
$(1, \ln(1+x^2))$	0.3766

Çizelge 5.3. Çizelge 5.1'de verilmiş bulanık veri seti için üç bileşene sahip moment vektörlerine uygun Max(F)Ent değerleri

Moment Vektör Fonksiyonları	Max(F)Ent Değeri
$(1, x^2, \ln x)$	0.0075
$(1, x^2, \ln(1+x))$	0.0089
$(1, x^2, \ln(1+x^2))$	0.0016
$(1, \ln x, \ln(1+x))$	0.0691
$(1, \ln x, \ln(1+x^2))$	0.0008
$(1, \ln(1+x), \ln(1+x^2))$	0.0066

Bu uygulama için Bölüm 4'de geliştirilmiş olan Genelleştirilmiş Maksimum Bulanık Entropi yöntemlerine uygun K_0 karakterize edici moment vektör fonksiyonlar kümesi $K_0 = \{x^2, \ln x, \ln(1+x), \ln(1+x^2)\}$ şeklinde belirlenmiştir. m elemana sahip K_0 'ın r sayıda elemanlarının tüm kombinasyonları $K_{0,m}$ olmak üzere $m=1$ için

$$K_{0,1} = \{(1, x^2), (1, \ln x), (1, \ln(1+x)), (1, \ln(1+x^2))\}$$

şeklinde tanımlanır.

Çizelge 5.2.'den görüldüğü üzere $(g_0, g^{(1)}) = (1, \ln(1+x))$, $g^{(1)} \in K_{0,1}$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım $U(g)$ fonksiyoneline en küçük değer veren $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_1$ dağılımı Çizelge 5.4.'de gösterilmiştir. Benzer şekilde, $(g_0, g^{(2)}) = (1, x^2)$, $g^{(2)} \in K_{0,1}$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım $U(g)$ fonksiyoneline en büyük değer veren $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_1$ dağılımı Çizelge 5.5.'de gösterilmiştir.

Benzer şekilde, m elemana sahip K_0 'ın r sayıda elemanlarının tüm kombinasyonları $K_{0,m}$ olmak üzere $m = 2$ için

$$K_{0,2} = \left\{ (1, x^2, \ln x), (1, x^2, \ln(1+x)), (1, x^2, \ln(1+x^2)), (1, \ln x, \ln(1+x)), \right. \\ \left. (1, \ln x, \ln(1+x^2)), (1, \ln(1+x), \ln(1+x^2)) \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Çizelge 5.3.'den görüldüğü üzere $(g_0, g^{(1)}) = (1, \ln x, \ln(1+x^2))$, $g^{(1)} \in K_{0,2}$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım $U(g)$ fonksiyoneline en küçük değer veren $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_2$ dağılımı Çizelge 5.4.'de gösterilmiştir. Benzer şekilde, $(g_0, g^{(2)}) = (1, \ln x, \ln(1+x))$, $g^{(2)} \in K_{0,2}$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım $U(g)$ fonksiyoneline en büyük değer veren $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_2$ dağılımı Çizelge 5.5.'de gösterilmiştir.

Belirlenen $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$; $m = 1, 2$ dağılımlarından elde edilen teorik bulanık değerler Çizelge 5.4. ve Çizelge 5.5.'de gösterilmektedir.

Çizelge 5.4. Çizelge 5.1’de verilmiş bulanık veri seti için (g_0, g) , $g \in K_{0,m}$; $m = 1,2$ moment vektör fonksiyonları yardımıyla elde edilen $(\text{MinMax(F)Ent})_m$ dağılımları

$\mu^{(1)}$ Dağılımı	$(\text{MinMax(F)Ent})_1$ $(1, \ln(1+x))$	$(\text{MinMax(F)Ent})_2$ $(1, \ln x, \ln(1+x^2))$
$\mu^{(1)}(x_0)$	0.0077	0.0000
$\mu^{(1)}(x_1)$	0.0031	0.0000
$\mu^{(1)}(x_2)$	0.0017	0.0000
$\mu^{(1)}(x_3)$	0.0011	0.0000
$\mu^{(1)}(x_4)$	0.0242	0.0000
$\mu^{(1)}(x_5)$	0.0007	0.0000
$\mu^{(1)}(x_6)$	0.0005	0.0000
$\mu^{(1)}(x_7)$	0.0004	0.0000
$\mu^{(1)}(x_8)$	0.0003	0.0000
$\mu^{(1)}(x_9)$	0.0003	0.0000
$\mu^{(1)}(x_{10})$	0.0002	0.0000
$\mu^{(1)}(x_{11})$	0.0002	0.0000
$\mu^{(1)}(x_{12})$	0.0002	0.0000
$\mu^{(1)}(x_{13})$	0.0001	0.0000
$\mu^{(1)}(x_{14})$	0.0001	0.0000
$\mu^{(1)}(x_{15})$	0.0001	0.0000

Çizelge 5.5. Çizelge 5.1’de verilmiş bulanık veri seti için (g_0, g) , $g \in K_{0,m}$; $m = 1,2$ moment vektör fonksiyonları yardımıyla elde edilen $(\text{MaxMax(F)Ent})_m$ dağılımları

$\mu^{(2)}$ Dağılımı	$(\text{MaxMax(F)Ent})_1$ $(1, x^2)$	$(\text{MaxMax(F)Ent})_2$ $(1, \ln x, \ln(1+x))$
$\mu^{(2)}(x_0)$	1.0000	0.0056
$\mu^{(2)}(x_1)$	1.0000	0.0008
$\mu^{(2)}(x_2)$	1.0000	0.0003
$\mu^{(2)}(x_3)$	1.0000	0.0001
$\mu^{(2)}(x_4)$	1.0000	0.0001
$\mu^{(2)}(x_5)$	1.0000	0.0000
$\mu^{(2)}(x_6)$	1.0000	0.0000
$\mu^{(2)}(x_7)$	1.0000	0.0000
$\mu^{(2)}(x_8)$	1.0000	0.0000
$\mu^{(2)}(x_9)$	1.0000	0.0000
$\mu^{(2)}(x_{10})$	1.0000	0.0000
$\mu^{(2)}(x_{11})$	0.9998	0.0000
$\mu^{(2)}(x_{12})$	0.9884	0.0000
$\mu^{(2)}(x_{13})$	0.5546	0.0000
$\mu^{(2)}(x_{14})$	0.0130	0.0000
$\mu^{(2)}(x_{15})$	0.0001	0.0000

Bu sonuçlardan yola çıkarak $(\text{MinMax(F)Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax(F)Ent})_m$ şeklindeki GMax(F)Ent dağılımlarının veriye uygunluk performansını belirlemek için RMSE, Ki-Kare kriterlerinin en küçük değerleri dikkate alınmıştır. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda $(\text{MinMax(F)Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax(F)Ent})_m$ dağılımları veriyi modelleme açısından birbirleriyle karşılaştırılmışlardır. Elde edilen sonuçlar Çizelge 5.6. ve Çizelge 5.7.’de gösterilmiştir.

NOT: Bölüm 5.1’deki dağılım performans belirleme süreci Bölüm 5.2 ve Bölüm 5.3’de uygulanmıştır.

Çizelge 5.6. $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$; $m = 1,2$ dağılımlarına Uygun Moment Vektör Fonksiyonlar, $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$, Ki-Kare ve RMSE değerleri

$(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ Dağılımları	Uygun Moment Vektör Fonksiyonları	$\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ Değeri	Ki-Kare Hesap Değeri	Ki-Kare Tablo Değeri	RMSE
$(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_1$	$(1, \ln(1+x))$	0.1685	0.0171	$\chi_{14,0.05}^2$ =23.68	0.1201
$(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_2$	$(1, \ln x, \ln(1+x^2))$	0.0008	0.0176	$\chi_{13,0.05}^2$ =22.36	0.1218

Çizelge 5.7. $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$; $m = 1,2$ dağılımlarına Uygun Moment Vektör Fonksiyonlar, $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$, Ki-Kare ve RMSE değerleri

$(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ Dağılımları	Uygun Moment Vektör Fonksiyonları	$\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ Değeri	Ki-Kare Hesap Değeri	Ki-Kare Tablo Değeri	RMSE
$(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_1$	$(1, x^2)$	1.1872	0.7229	$\chi_{14,0.05}^2$ =23.68	0.7802
$(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_2$	$(1, \ln x, \ln(1+x))$	0.0691	0.0173	$\chi_{13,0.05}^2$ =22.36	0.1209

Çizelge 5.6. ve Çizelge 5.7.'den görüldüğü üzere Ki – Kare ve RMSE kriterleri açısından $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_1$ dağılımı $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_1$ dağılımından daha iyi bir performans göstermiştir. Moment kısıt sayısı artırıldığında ise $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_2$ dağılımının veriyi modelleme açısından $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_2$ dağılımına göre daha iyi performansı gösterdiği söylenebilir.

Çizelge 5.6. ve Çizelge 5.7.'den görüldüğü üzere moment kısıt sayısı arttıkça her bir $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımın uygun $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ değerlerinin azaldığı görülmektedir. Bu durumda herhangi bir m için

$$H((\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m) > H((\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m) ; m = 1,2$$

eşitsizliği elde edilir. Ancak karakterize edici momentler değişirken $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ değerleri değişiklik gösterebilir. Örneğin bu uygulamada

$$H((\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_1) = 0.1685 > H((\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_2) = 0.0691$$

eşitsizliği geçerlidir.

5.2. MinMax(F)Ent ve MaxMax(F)Ent Yöntemlerinin 2005 Yılında Ölçülmüş Rüzgâr Verisinden Elde Edilen Bulanık Veri Setine Uygulanması

Bu uygulamada veri seti olarak 2005 yılının Aralık ayına ilişkin rüzgâr ölçümleri dikkate alınmış (Shamilov ve ark. 2006) ve söz konusu veri seti için genelleştirilmiş MinMax(F)Ent ve MaxMax(F)Ent yöntemlerinin uygulamaları yapılmıştır. Elde edilen bulanık değerler Çizelge 5.8.'de gösterilmiştir. GMax(F)Ent yöntemiyle elde edilen $(\text{MinMax(F)Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax(F)Ent})_m$ dağılımlarının söz konusu bulanık veri setinin dağılımına uyumu Max(F)Ent, RMSE ve Ki-Kare değerleri ile belirlenmiş ve sonuçlar yorumlanmıştır.

Çizelge 5.8. 2005 yılına ait ölçülmüş rüzgâr hızı verilerinden oluşan bulanık veri seti

V(m/s)	Frekanslar	$\tilde{\mu}_A(x_i)$
0-1	47	0.0672
1-2	40	0.0572
2-3	38	0.0544
3-4	57	0.0815
4-5	57	0.0815
5-6	48	0.0687
6-7	62	0.0887
7-8	49	0.0701
8-9	41	0.0587
9-10	54	0.0773
10-11	48	0.0687
11-12	39	0.0558
12-13	35	0.0501
13-14	33	0.0472
14-15	20	0.0286
15-16	18	0.0258
16-17	6	0.0086
17-18	4	0.0057
18-19	3	0.0043

$(\text{MinMax(F)Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax(F)Ent})_m$ dağılımlarını elde etmek için aşağıdaki aşamalar gerçekleştirilmelidir:

1. Bulanık veri setine uygun moment fonksiyonları ile üretilen Max(F)Ent karakterize edici momentleri belirlenir. Bu uygulamada

$$E\{\sqrt{x}\}, E\{\ln x\}, E\{\ln(1+x)\}, E\{\ln(1+x^2)\}$$

Max(F)Ent karakterize edici momentleri kullanılmıştır.

2. Her bir moment vektör fonksiyonuna uygun Max(F)Ent değerleri elde edilir.
3. Seçilen moment vektör fonksiyonlarına uygun GMax(F)Ent yöntemleri yardımıyla $(\text{MinMax(F)Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax(F)Ent})_m$ dağılımları belirlenir.

Max(F)Ent yöntemi için karakterize edici momentlerin seçilmesi önemlidir. Burada bulanık veri setinin dağılımına uygun karakterize edici momentler entropi optimizasyon (istatistiksel) dağılımlarının karakterize edici momentleri arasından deneme yoluyla seçilmiştir. Söz konusu karakterize edici moment fonksiyonları olarak

$$g_0(x) = 1, g_1(x) = \sqrt{x}, g_2(x) = \ln x, g_3(x) = \ln(1+x), g_4(x) = \ln(1+x^2)$$

fonksiyonlarından yararlanılmıştır.

$(\text{MinMax(F)Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax(F)Ent})_m$ dağılımlarının belirlenmesinde kullanılan, iki ve üç kısıta uygun Max(F)Ent dağılımlarının entropileri Çizelge 5.9. ve Çizelge 5.10.'da listelenmektedir.

Çizelge 5.9. Çizelge 5.8'de verilmiş bulanık veri seti için iki bileşene sahip moment vektörlerine uygun Max(F)Ent değerleri

Moment Vektör Fonksiyonları	Max(F)Ent Değeri
$(1, \sqrt{x})$	3.3698
$(1, \ln x)$	3.1008
$(1, \ln(1+x))$	2.5656
$(1, \ln(1+x^2))$	3.1160

Çizelge 5.10. Çizelge 5.8’de verilmiş bulanık veri seti için üç bileşene sahip moment vektörlerine uygun Max(F)Ent değerleri

Moment Vektör Fonksiyonları	Max(F)Ent Değeri
$(1, \sqrt{x}, \ln x)$	0.3744
$(1, \sqrt{x}, \ln(1+x))$	2.5473
$(1, \sqrt{x}, \ln(1+x^2))$	1.1207
$(1, \ln x, \ln(1+x))$	0.7500
$(1, \ln x, \ln(1+x^2))$	2.1394
$(1, \ln(1+x), \ln(1+x^2))$	1.7731

Bu uygulama için de Bölüm 4’de geliştirilmiş olan Genelleştirilmiş Maksimum Bulanık Entropi yöntemlerine uygun K_0 karakterize edici moment vektör fonksiyonlar kümesi $K_0 = \{ \sqrt{x}, \ln x, \ln(1+x), \ln(1+x^2) \}$ şeklinde belirlenmiştir. m elemana sahip K_0 ’ın r sayıda elemanlarının tüm kombinasyonları $K_{0,m}$ olmak üzere $m=1$ için

$$K_{0,1} = \{ (1, \sqrt{x}), (1, \ln x), (1, \ln(1+x)), (1, \ln(1+x^2)) \}$$

şeklinde tanımlanır.

Çizelge 5.9.’dan görüldüğü üzere $(g_0, g^{(1)}) = (1, \ln(1+x)), g^{(1)} \in K_{0,1}$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım $U(g)$ fonksiyoneline en küçük değer veren $(\text{MinMax(F)Ent})_1$ dağılımı Çizelge 5.11.’de gösterilmiştir. Benzer şekilde, $(g_0, g^{(2)}) = (1, \sqrt{x}), g^{(2)} \in K_{0,1}$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım $U(g)$ fonksiyoneline en büyük değer veren $(\text{MaxMax(F)Ent})_1$ dağılımı Çizelge 5.12.’de gösterilmiştir.

Benzer şekilde, m elemana sahip K_0 ’ın r sayıda elemanlarının tüm kombinasyonları $K_{0,m}$ olmak üzere $m=2$ için

$$K_{0,2} = \{ (1, \sqrt{x}, \ln x), (1, \sqrt{x}, \ln(1+x)), (1, \sqrt{x}, \ln(1+x^2)), (1, \ln x, \ln(1+x)), \\ (1, \ln x, \ln(1+x^2)), (1, \ln(1+x), \ln(1+x^2)) \}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Çizelge 5.10.'dan görüldüğü üzere $(g_0, g^{(1)}) = (1, \sqrt{x}, \ln x), g^{(1)} \in K_{0,2}$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım $U(g)$ fonksiyoneline en küçük değer veren $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_2$ dağılımı Çizelge 5.11.'de gösterilmiştir. Benzer şekilde, $(g_0, g^{(2)}) = (1, \sqrt{x}, \ln(1+x)), g^{(2)} \in K_{0,2}$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım $U(g)$ fonksiyoneline en büyük değer veren $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_2$ dağılımı Çizelge 5.12.'de gösterilmiştir.

Belirlenen $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m ; m = 1,2$ dağılımlarından elde edilen teorik bulanık değerler Çizelge 5.11 ve Çizelge 5.12'de gösterilmektedir.

Çizelge 5.11. Çizelge 5.8’de verilmiş bulanık veri seti için (g_0, g) , $g \in K_{0,m}$; $m = 1,2$ moment vektör fonksiyonları yardımıyla elde edilen $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımları

$\mu^{(1)}$ Dağılımı	$(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_1$ $(1, \ln(1+x))$	$(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_2$ $(1, \sqrt{x}, \ln x)$
$\mu^{(1)}(x_0)$	0.1303	0.0125
$\mu^{(1)}(x_1)$	0.0688	0.0060
$\mu^{(1)}(x_2)$	0.0444	0.0039
$\mu^{(1)}(x_3)$	0.0318	0.0029
$\mu^{(1)}(x_4)$	0.0242	0.0023
$\mu^{(1)}(x_5)$	0.0193	0.0018
$\mu^{(1)}(x_6)$	0.0159	0.0015
$\mu^{(1)}(x_7)$	0.0134	0.0013
$\mu^{(1)}(x_8)$	0.0115	0.0011
$\mu^{(1)}(x_9)$	0.0101	0.0010
$\mu^{(1)}(x_{10})$	0.0089	0.0008
$\mu^{(1)}(x_{11})$	0.0079	0.0007
$\mu^{(1)}(x_{12})$	0.0071	0.0007
$\mu^{(1)}(x_{13})$	0.0065	0.0006
$\mu^{(1)}(x_{14})$	0.0059	0.0005
$\mu^{(1)}(x_{15})$	0.0054	0.0005
$\mu^{(1)}(x_{16})$	0.0050	0.0004
$\mu^{(1)}(x_{17})$	0.0046	0.0004
$\mu^{(1)}(x_{18})$	0.0043	0.0004

Çizelge 5.12. Çizelge 5.8’de verilmiş bulanık veri seti için (g_0, g) , $g \in K_{0,m}$; $m = 1,2$ moment vektör fonksiyonları yardımıyla elde edilen $(\text{MaxMax(F)Ent})_m$ dağılımları

$\mu^{(2)}$ Dağılımı	$(\text{MaxMax(F)Ent})_1$ $(1, \sqrt{x})$	$(\text{MaxMax(F)Ent})_2$ $(1, \sqrt{x}, \ln(1+x))$
$\mu^{(2)}(x_0)$	0.1585	0.1183
$\mu^{(2)}(x_1)$	0.0985	0.0644
$\mu^{(2)}(x_2)$	0.0699	0.0425
$\mu^{(2)}(x_3)$	0.0525	0.0310
$\mu^{(2)}(x_4)$	0.0409	0.0240
$\mu^{(2)}(x_5)$	0.0326	0.0195
$\mu^{(2)}(x_6)$	0.0265	0.0162
$\mu^{(2)}(x_7)$	0.0218	0.0138
$\mu^{(2)}(x_8)$	0.0182	0.0120
$\mu^{(2)}(x_9)$	0.0153	0.0106
$\mu^{(2)}(x_{10})$	0.0130	0.0094
$\mu^{(2)}(x_{11})$	0.0111	0.0085
$\mu^{(2)}(x_{12})$	0.0096	0.0077
$\mu^{(2)}(x_{13})$	0.0083	0.0070
$\mu^{(2)}(x_{14})$	0.0072	0.0064
$\mu^{(2)}(x_{15})$	0.0063	0.0059
$\mu^{(2)}(x_{16})$	0.0055	0.0055
$\mu^{(2)}(x_{17})$	0.0049	0.0051
$\mu^{(2)}(x_{18})$	0.0043	0.0048

Bu sonuçlardan yola çıkarak $(\text{MinMax(F)Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax(F)Ent})_m$ şeklindeki GMax(F)Ent dağılımlarının veriye uygunluk performansını belirlemek için RMSE, Ki-Kare kriterleri ve dağılımların Max(F)Ent ölçüm değerleri kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar Çizelge 5.13. ve Çizelge 5.14.’de gösterilmiştir.

Çizelge 5.13. $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$; $m = 1,2$ dağılımlarına Uygun Moment Vektör Fonksiyonlar, $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$, Ki-Kare ve RMSE değerleri

$(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ Dağılımları	Uygun Moment Vektör Fonksiyonlar	$\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ Değeri	Ki-Kare Hesap Değeri	Ki-Kare Tablo Değeri	RMSE
$(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_1$	$(1, \ln(1+x))$	2.5656	0.0025	$\chi^2_{17,0.05}$ =27.58	0.0447
$(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_2$	$(1, \sqrt{x}, \ln x)$	0.3744	0.0040	$\chi^2_{16,0.05}$ =26.29	0.0563

Çizelge 5.14. $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$; $m = 1,2$ dağılımlarına Uygun Moment Vektör Fonksiyonlar, $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$, Ki-Kare ve RMSE değerleri

$(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ Dağılımları	Uygun Moment Vektör Fonksiyonlar	$\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ Değeri	Ki-Kare Hesap Değeri	Ki-Kare Tablo Değeri	RMSE
$(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_1$	$(1, \sqrt{x})$	3.3698	0.0023	$\chi^2_{17,0.05}$ =27.58	0.0428
$(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_2$	$(1, \sqrt{x}, \ln(1+x))$	2.5473	0.0024	$\chi^2_{16,0.05}$ =26.29	0.0436

Çizelge 5.13. ve Çizelge 5.14.'den görüldüğü üzere Ki – Kare ve RMSE kriterleri açısından her bir $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımı her bir $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımından daha iyi bir performans göstermiştir. Özellikle, $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_1$ dağılımı veriyi modelleme açısından $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$; $m = 1,2$ dağılımları arasından en iyi performansı göstermiştir.

Çizelge 5.13. ve Çizelge 5.14.'den görüldüğü üzere moment kısıt sayısı arttıkça her bir $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımına uygun $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ değerlerinin azaldığı görülmektedir. Bu durumda herhangi bir m için

$$H((\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m) > H((\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m) ; m = 1,2$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülmektedir.

Bölüm 5.2 ve Bölüm 5.1.'deki uygulamalardan görüldüğü üzere, rüzgâr hızı verilerine ait bulanık veri seti için ilk defa Maksimum Bulanık Entropi ($\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$)

ölçümünden yararlanarak $G\text{Max}(F)\text{Ent}$ yöntemleriyle belirlenen $\text{MinMax}(F)\text{Ent}_m$ ve $\text{MaxMax}(F)\text{Ent}_m$ dağılımlarının bulanık veri analizinde uygulanabilirliği gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda, rüzgâr hızı verisinden elde edilen bulanık veri seti için $\text{MinMax}(F)\text{Ent}_m$ ve $\text{MaxMax}(F)\text{Ent}_m$ dağılımlarının performansları $\text{Max}(F)\text{Ent}$, Ki - Kare ve RMSE değerleri kullanılarak karşılaştırılmıştır. Rüzgâr hızı verileri verilerine ait bulanık veri seti için $\text{MaxMax}(F)\text{Ent}_m; m = 1,2$ dağılımlarının daha iyi bir sonuç gösterdiği ortaya konulmuştur. Sonuç olarak, $\text{MinMax}(F)\text{Ent}_m$ ve $\text{MaxMax}(F)\text{Ent}_m$ dağılımları rüzgâr enerji potansiyeli değerlendirilmesinde kullanılabilir.

5.3. $\text{MinMax}(F)\text{Ent}$ and $\text{MaxMax}(F)\text{Ent}$ Yöntemleri ile Sigmoidal Üyelik Fonksiyonundan Elde Edilen Bulanık Veri Setinin Analizi

Bulanık veri setleri için Üçgen, Yamuk, Gauss, Sigmoidal vs. gibi birçok üyelik fonksiyonu mevcuttur. Bu uygulamada Sigmoidal üyelik fonksiyonundan elde edilen bulanık bir veri seti için $\text{MinMax}(F)\text{Ent}$ ve $\text{MaxMax}(F)\text{Ent}$ şeklindeki Genelleştirilmiş Maksimum Bulanık Entropi ($G\text{Max}(F)\text{Ent}$) yöntemleri kullanılmıştır. Çizelge 5.15'deki üyelik değerlerinin dağılımına uygun en yakın dağılımın bulunması problemi $G\text{Max}(F)\text{Ent}$ yöntemi ile çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar $\text{Max}(F)\text{Ent}$, RMSE ve Ki-Kare değerlerine göre incelenmiştir ve yorumlanmıştır.

Çizelge 5.15. Sigmoidal üyelik fonksiyonundan elde edilen bulanık veri seti

x_i	$\tilde{\mu}_A(x_i)$
0.1000	0.0004
0.6000	0.0011
1.1000	0.0030
1.6000	0.0082
2.1000	0.0219
2.6000	0.0573
3.1000	0.1419
3.6000	0.3100
4.1000	0.5498
4.6000	0.7685
5.1000	0.9002
5.6000	0.9608
6.1000	0.9852
6.6000	0.9945
7.1000	0.9980
7.6000	0.9993
8.1000	0.9997
8.6000	0.9999

$(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımlarını elde etmek için önceki uygulamalarda olduğu gibi aşağıdaki süreç takip edilecektir.

1. Bulanık veri setine uygun moment fonksiyonları ile üretilen $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ karakterize edici momentleri belirlenir. Bu uygulamada

$$E\{\sqrt{x}\}, E\{\ln x\}, E\{\ln(1+x)\}, E\{\ln(1+x^2)\}$$

$\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ karakterize edici momentleri kullanılmıştır.

2. Her bir moment vektör fonksiyonuna uygun $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ değerleri elde edilir.
3. Seçilen moment vektör fonksiyonlarına uygun $\text{GMax}(\text{F})\text{Ent}$ yöntemleri yardımıyla $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımları belirlenir.

$\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ yöntemi için karakterize edici momentlerin seçilmesi önemlidir. Burada bulanık veri setinin dağılımına uygun karakterize edici momentler entropi optimizasyon (istatistiksel) dağılımlarının karakterize edici momentleri arasından deneme yoluyla seçilmiştir. Söz konusu karakterize edici moment fonksiyonları olarak

$$g_0(x)=1, g_1(x)=\sqrt{x}, g_2(x)=\ln x, g_3(x)=\ln(1+x), g_4(x)=\ln(1+x^2)$$

fonksiyonlarından yararlanılmıştır.

$(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımlarının belirlenmesinde kullanılan, iki ve üç kısıta uygun $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ dağılımlarının entropileri Çizelge 5.16. ve Çizelge 5.17.'de listelenmektedir.

Çizelge 5.16. Çizelge 5.15'de verilmiş bulanık veri seti için iki bileşene sahip moment vektörlerine uygun $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ değerleri

Moment Vektör Fonksiyonları	Max(F)Ent Değeri
$(1, \sqrt{x})$	0.0375
$(1, \ln x)$	0.0896
$(1, \ln(1+x))$	0.0379
$(1, \ln(1+x^2))$	0.0464

Çizelge 5.17. Çizelge 5.15'de verilmiş bulanık veri seti için üç bileşene sahip moment vektörlerine uygun $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ değerleri

Moment Vektör Fonksiyonları	Max(F)Ent Değeri
$(1, \sqrt{x}, \ln x)$	0.0351
$(1, \sqrt{x}, \ln(1+x))$	0.0182
$(1, \sqrt{x}, \ln(1+x^2))$	0.0277
$(1, \ln x, \ln(1+x))$	0.0268
$(1, \ln x, \ln(1+x^2))$	0.0281
$(1, \ln(1+x), \ln(1+x^2))$	0.0280

Bu uygulama için Bölüm 4'de geliştirilmiş olan Genelleştirilmiş Maksimum Bulanık Entropi yöntemlerine uygun K_0 karakterize edici moment vektör fonksiyonlar kümesi $K_0 = \{\sqrt{x}, \ln x, \ln(1+x), \ln(1+x^2)\}$ şeklinde belirlenmiştir. m elemana sahip K_0 'ın r sayıda elemanlarının tüm kombinasyonları $K_{0,m}$ olmak üzere $m = 1$ için

$$K_{0,1} = \left\{ (1, \sqrt{x}), (1, \ln x), (1, \ln(1+x)), (1, \ln(1+x^2)) \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Çizelge 5.16'den görüldüğü gibi $(g_0, g^{(1)}) = (1, \sqrt{x}), g^{(1)} \in K_{0,1}$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım $U(g)$ fonksiyoneline en küçük değer veren $(\text{MinMax}(F)\text{Ent})_1$ dağılımı Çizelge 5.18.'de gösterilmektedir. Benzer şekilde, $(g_0, g^{(2)}) = (1, \ln x), g^{(2)} \in K_{0,1}$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım $U(g)$ fonksiyoneline en büyük değer veren $(\text{MaxMax}(F)\text{Ent})_1$ dağılımı Çizelge 5.19.'da gösterilmektedir.

Benzer şekilde, m elemana sahip K_0 'ın r sayıda elemanlarının tüm kombinasyonları $K_{0,m}$ olmak üzere $m = 2$ için

$$K_{0,2} = \left\{ (1, x^2, \ln x), (1, x^2, \ln(1+x)), (1, x^2, \ln(1+x^2)), (1, \ln x, \ln(1+x)), \right. \\ \left. (1, \ln x, \ln(1+x^2)), (1, \ln(1+x), \ln(1+x^2)) \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Çizelge 5.17.'den görüldüğü gibi $(g_0, g^{(1)}) = (1, \sqrt{x}, \ln(1+x)), g^{(1)} \in K_{0,2}$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım $U(g)$ fonksiyoneline en küçük değer veren $(\text{MinMax}(F)\text{Ent})_2$ dağılımı Çizelge 5.18.'de gösterilmektedir. Benzer şekilde, $(g_0, g^{(2)}) = (1, \sqrt{x}, \ln x), g^{(2)} \in K_{0,2}$ moment vektörüne karşılık gelen dağılım $U(g)$ fonksiyoneline en büyük değer veren $(\text{MaxMax}(F)\text{Ent})_2$ dağılımı Çizelge 5.19.'da gösterilmektedir.

Belirlenen $(\text{MinMax}(F)\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(F)\text{Ent})_m$ $m = 1, 2$ dağılımlarından elde edilen bulanık değerler, Çizelge 5.18. ve Çizelge 5.19.'da gösterilmektedir.

Çizelge 5.18. Çizelge 5.15’de verilmiş bulanık veri seti için (g_0, g) , $g \in K_{0,m}$; $m = 1,2$ moment vektör fonksiyonları yardımıyla elde edilen $(\text{MinMax}(\mathbf{F})\text{Ent})_m$ dağılımları

$\mu^{(1)}$ Dağılımı	$(\text{MinMax}(\mathbf{F})\text{Ent})_1$ $(1, \sqrt{x})$	$(\text{MinMax}(\mathbf{F})\text{Ent})_2$ $(1, \sqrt{x}, \ln(1+x))$
$\mu^{(1)}(x_0)$	0.9997	0.9998
$\mu^{(1)}(x_1)$	0.9998	0.9999
$\mu^{(1)}(x_2)$	0.9998	0.9999
$\mu^{(1)}(x_3)$	0.9998	0.9999
$\mu^{(1)}(x_4)$	0.9998	0.9999
$\mu^{(1)}(x_5)$	0.9998	0.9999
$\mu^{(1)}(x_6)$	0.9998	0.9999
$\mu^{(1)}(x_7)$	0.9999	0.9999
$\mu^{(1)}(x_8)$	0.9999	0.9999
$\mu^{(1)}(x_9)$	0.9999	0.9999
$\mu^{(1)}(x_{10})$	0.9999	1.0000
$\mu^{(1)}(x_{11})$	0.9999	1.0000
$\mu^{(1)}(x_{12})$	0.9999	1.0000
$\mu^{(1)}(x_{13})$	0.9999	1.0000
$\mu^{(1)}(x_{14})$	0.9999	1.0000
$\mu^{(1)}(x_{15})$	0.9999	1.0000
$\mu^{(1)}(x_{16})$	0.9999	1.0000
$\mu^{(1)}(x_{17})$	0.9999	1.0000

Çizelge 5.19. Çizelge 5.15’de verilmiş bulanık veri seti için (g_0, g) , $g \in K_{0,m}$; $m = 1,2$ moment vektör fonksiyonları yardımıyla elde edilen $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımları

$\mu^{(2)}$ Dağılımı	$(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_1$ $(1, \ln x)$	$(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_2$ $(1, \sqrt{x}, \ln x)$
$\mu^{(2)}(x_0)$	0.9963	0.9982
$\mu^{(2)}(x_1)$	0.9991	0.9996
$\mu^{(2)}(x_2)$	0.9995	0.9998
$\mu^{(2)}(x_3)$	0.9996	0.9999
$\mu^{(2)}(x_4)$	0.9997	0.9999
$\mu^{(2)}(x_5)$	0.9997	0.9999
$\mu^{(2)}(x_6)$	0.9998	1.0000
$\mu^{(2)}(x_7)$	0.9998	1.0000
$\mu^{(2)}(x_8)$	0.9998	1.0000
$\mu^{(2)}(x_9)$	0.9998	1.0000
$\mu^{(2)}(x_{10})$	0.9998	1.0000
$\mu^{(2)}(x_{11})$	0.9999	1.0000
$\mu^{(2)}(x_{12})$	0.9999	1.0000
$\mu^{(2)}(x_{13})$	0.9999	1.0000
$\mu^{(2)}(x_{14})$	0.9999	1.0000
$\mu^{(2)}(x_{15})$	0.9999	1.0000
$\mu^{(2)}(x_{16})$	0.9999	1.0000
$\mu^{(2)}(x_{17})$	0.9999	1.0000

Bu sonuçlardan yola çıkarak $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ şeklindeki $\text{GMax}(\text{F})\text{Ent}$ dağılımlarının veriye uygunluk performanslarını değerlendirmek için $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ Ki-Kare ve RMSE değerleri kullanılmış ve elde edilen sonuçlar Çizelge 5.20. ve Çizelge 5.21.’de gösterilmiştir.

Çizelge 5.20. $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$; $m = 1,2$ dağılımlarına Uygun Moment Vektör Fonksiyonlar, $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$, Ki-Kare ve RMSE değerleri

$(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ Dağılımları	Uygun Moment Vektör Fonksiyonlar	$\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ Değeri	Ki-Kare Hesap Değeri	Ki-Kare Tablo Değeri	RMSE
$(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_1$	$(1, \sqrt{x})$	0.0375	0.6367	$\chi_{16,0.05}^2$ =26.29	0.5212
$(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_2$	$(1, \sqrt{x}, \ln(1+x))$	0.0182	0.6368	$\chi_{15,0.05}^2$ =24.99	0.5213

Çizelge 5.21. $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$; $m = 1,2$ dağılımlarına Uygun Moment Vektör Fonksiyonlar, $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$, Ki-Kare ve RMSE değerleri

$(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ Dağılımları	Uygun Moment Vektör Fonksiyonlar	$\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ Değeri	Ki-Kare Hesap Değeri	Ki-Kare Tablo Değeri	RMSE
$(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_1$	$(1, \ln x)$	0.0896	0.6363	$\chi_{16,0.05}^2$ =26.29	0.5205
$(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_2$	$(1, \sqrt{x}, \ln x)$	0.0351	0.6366	$\chi_{15,0.05}^2$ =24.99	0.5211

Çizelge 5.20. ve Çizelge 5.21.'den görüldüğü üzere Ki – Kare ve RMSE kriterleri açısından her bir $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımı veriyi modelleme açısından her bir $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımından daha iyi bir performans göstermiştir. Özellikle, $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_1$ dağılımı $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$; $m = 1,2$ dağılımları arasından en iyi performansı göstermiştir.

Çizelge 5.20. ve Çizelge 5.21.'den görüldüğü üzere moment kısıt sayısı arttıkça her bir $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımına uygun $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ değerlerinin azaldığı görülmektedir. Bu durumda herhangi bir m için

$$H((\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m) > H((\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m) ; m = 1,2$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülmektedir. Ancak karakterize edici momentler değişirken $\text{Max}(\text{F})\text{Ent}$ değerleri değişiklik gösterebilir. Örneğin bu uygulamada

$$H((\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_1) = 0.0375 > H((\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_2) = 0.0351$$

eşitsizliği geçerlidir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, bulanık veri seti analizi için Maksimum Bulanık Entropi (Max(F)Ent) problemi tanımlanmış ve bu problemin çözümünün varlığı yeterli koşullar sağlanmakla Lagrange çarpanları yöntemi ile ispatlanmıştır. Ayrıca elde edilen Max(F)Ent ölçümünün konveks fonksiyon olduğu ispatlanmıştır. Önerilen Max(F)Ent probleminin çözümünden yola çıkarak Lagrange çarpanları yöntemi ile $g_j(x); j = 0, 1, \dots, m$ karakterize edici moment fonksiyonlarına bağlı özel bir Max(F)Ent fonksiyoneli ($U(g)$) elde edilmiştir. Söz konusu problemin çözümü için MinMax(F)Ent ve MaxMax(F)Ent şeklinde Genelleştirilmiş Maksimum Bulanık Entropi (GMax(F)Ent) yöntemleri geliştirilmiştir. GMax(F)Ent yöntemleri ile elde edilen Max(F)Ent fonksiyoneline minimum değer veren $(\text{MinMax(F)Ent})_m$ ve Max(F)Ent fonksiyoneline maksimum değer veren $(\text{MaxMax(F)Ent})_m$ dağılımları tanımlanmıştır. Söz konusu dağılımların veriyi modelleme açısından performansı farklı uygulama alanlarında birbirleriyle karşılaştırılmıştır.

Uygulama olarak, rüzgâr verilerinden ve Sigmoidal üyelik fonksiyonundan elde edilen bulanık veri setlerine ait $\tilde{\mu}_A(x_i); i = 0, 1, \dots, n$ dağılımları için Max(F)Ent yöntemi yardımıyla seçilen karakterize edici moment fonksiyonlarına bağlı özel Max(F)Ent fonksiyoneli belirlenmiştir. Bu fonksiyonele minimum değer veren $(\text{MinMax(F)Ent})_m$ ve maksimum değer veren $(\text{MaxMax(F)Ent})_m$ dağılımları şeklindeki Genelleştirilmiş Maksimum Bulanık Entropi (GMax(F)Ent) dağılımları elde edilmiştir. $(\text{MinMax(F)Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax(F)Ent})_m$ dağılımlarının nümerik yöntemlerle bulunması, entropi optimizasyon problemleri şeklinde ortaya konmuş ve bu problemlerin çözümleri için MATLAB 7.10.0 (R2010a) programı kullanılmış ve elde edilen sonuçlar Max(F)Ent, Ki – Kare ve RMSE değerleri kullanılarak yorumlanmıştır ve bu dağılımların performansları veriyi modelleme açısından birbirleriyle karşılaştırılmıştır.

Birinci uygulamada, 1999 yılının tüm aylarına ilişkin ölçülmüş rüzgâr verisinden elde edilen bulanık veri seti için GMax(F)Ent dağılımları arasından $m =$

1,2 olmakla $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımları ele alınırsa RMSE ve Ki-Kare kriterlerine göre $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_2$ dağılımının bulanık veri seti için en uygun dağılım olduğu sonucuna varılmıştır.

İkinci uygulamada, 2005 yılının Aralık ilişkin ölçülmüş rüzgâr verisinden elde edilen bulanık veri seti için $\text{GMax}(\text{F})\text{Ent}$ dağılımları arasından $m = 1,2$ olmakla $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımları ele alınırsa RMSE ve Ki-Kare kriterlerine göre $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_1$ dağılımının bulanık veri seti için en uygun dağılım olduğu sonucuna varılmıştır.

Üçüncü uygulamada ise Sigmoidal üyelik fonksiyonundan elde edilen bulanık veri seti için $\text{GMax}(\text{F})\text{Ent}$ dağılımları arasından $m = 1,2$ olmak üzere $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımları incelendiğinde ise RMSE ve Ki-Kare kriterlerine göre $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_1$ dağılımının bulanık veri seti için en uygun dağılım olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Ayrıca, moment kısıt sayıları arttıkça, $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımlarının da veriyi modellemede etkilerinin arttığı gözlenmiştir.

Sonuç olarak, genelleştirilmiş $\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent}$ ve $\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent}$ yöntemleri bulanık veri seti analizindeki çeşitli problemlerin çözümünde başarılı bir şekilde uygulanabilir. Bu sebeple, $\text{GMax}(\text{F})\text{Ent}$ yöntemlerinin çözümünden elde edilen $(\text{MinMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ ve $(\text{MaxMax}(\text{F})\text{Ent})_m$ dağılımlarının bulanık veri setini modellemede etkili sonuçlar verdiği elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- Al-sharhan, S., Karray, F., Gueaieb, W. ve Basir, O. (2001), "Fuzzy Entropy: a Brief Survey", *2001 IEEE International Fuzzy Systems Conference*, 3, 1135-1139.
- Atalık, G. (2014), *Bulanık Lojistik Regresyonda Parametre Tahminleri İçin Yeni Bir Yaklaşım ve Bir Uygulama*, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Baykal, N. ve Beyan, T. (2004), *Bulanık Mantık İlke ve Temelleri*, Bıçaklar Kitabevi, Ankara.
- Bhandari, D. ve Pal, N.R. (1993), "Some new information measures for fuzzy sets", *Information Sciences*, 67, 209-228.
- Chen, S. J., Hwang, C. L. ve Hwang, F. P. (1992), *Fuzzy multiple attribute decision making: methods and applications*, Springer-Verlag, Berlin, Almanya.
- Chen, X. ve Dai, W. (2011), "Maximum Entropy Principle for Uncertain Variables", *International Journal of Fuzzy Systems*, (13)3, 232-236.
- Dhar, M., Chutia, R. ve Mahanta, S. (2012), "A Note on the Existing Definition of Fuzzy Entropy", *International Journal of Energy, Information and Communications*, 3(1), 17-21.
- De Luca, A. ve Termini, S. (1971), "A definition of non-probabilistic entropy in setting of fuzzy set theory", *Information and Control*, 20, 301-312.
- Dombi, J., ve Gera, Z. (2005), "The Approximation of Piecewise Linear Membership Functions and Lukasiewicz Operators", *Fuzzy Sets and Systems*, 154, 275-286.
- Dubois, D. ve Prade, H. (1978), "Operation on fuzzy numbers", *International Journal of System Science*, 9(6), 613-626.
- Dubois, D. ve Prade, H. (1980), *Fuzzy Sets and System: Theory and Applications*, Academic Press Inc., New York, A.B.D..
- Dubois, D. ve Prade, H. M. (1988), *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*, Plenum Press, New York, A.B.D..
- Elmas, Ç. (2003), *Bulanık mantık denetleyiciler*, Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- Fan, J. ve Zhao, F. (2007), "A Generalized Fuzzy Entropy-Based Image

- Segmentation Method”, *Proceedings of the International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering*, DOI:10.2991/iske.2007.220.
- Fan, J. ve Ma, Y. (2002), “Some new fuzzy entropy formulas”, *Fuzzy Sets and Systems*, 128, 277–284.
- Genç, A., Erişoğlu, M., Pekgör, A., Oturanç, G., Hepbaşlı, A. ve Ulgen, K. (2005), “Estimation of wind power using weibull distribution”, *Energy Sources*, 27(9), 809-822.
- Guo, X. Z. ve Xin, X. L. (2006), “Some new generalized entropy formulas of fuzzy sets”, *J. Northwest University*, 36, 529-532.
- Gülcan, B. (2012), *Bulanık Doğrusal Programlama Ve Bir Bisküvi İşletmesinde Optimum Ürün Formülü Oluşturma*, Yüksek Lisans Tezi, Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Karaman.
- Inuiguchi, M., Ramik, J., Tanino, T. ve Vlach, M.(2003), “Satisficing Solutions and Duality in Interval Fuzzy Linear Programming”, *Fuzzy Sets and Systems*, 135, 151-177.
- Jaynes, E.T (1957), “Information theory and statistical mechanics”, *Phys. Rev.*, 106, 620-630.
- Kaufmann, A. (1975), *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets*, Academic Press, New York.
- Kapur, J.N. ve Kesavan, H.K. (1992), *Entropy Optimization Principles with Applications*, Academic Press, New York.
- Kazan, R. ve Eğrisöğüt Tiryaki, A. (2007), *Bulaşık Makinesinin Bulanık Mantık ile Modellenmesi*, *Mühendis ve Makine*, 48(565), 3-8.
- Klir, G. J. ve Yuan, B. (1995), *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Applications*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, A.B.D..
- Kosko, B. (1986), “Fuzzy entropy and conditioning”, *Information Sciences*, 40, 165-174.
- Kumar, T., Bajaj, R. K. ve Gupta, N. (2011), “On Some Parametric Generalized Measures of Fuzzy Information Directed Divergence and Information Improvement”, *International Journal of Computer Applications*, 30(9), 5-10.

- Kumar, A., Mahajan, S. ve Kumar, R. (2011), “Some Generalized Measures of Fuzzy Entropy”, *International Journal of Mathematical Sciences and Applications*, 1(2), 821-829.
- Li, P. ve Liu, B. (2008), “Entropy of credibility distributions for fuzzy variables”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16 (1), 123–129.
- Özkan, M. M. (2003), *Bulanık Hedef Programlama*, Ekin Kitabevi, Bursa.
- Pal, N.R. ve Pal, S.K. (1992), “Higher order fuzzy entropy and hybrid entropy of a set”, *Information Sciences*, 61, 211–231.
- Parkash, O., Sharma, P.K. ve Mahajan, R. (2008), “New measures of weighted fuzzy entropy and their applications for the study of maximum weighted fuzzy entropy principle”, *Information Sciences*, 178, 2389-2395.
- Paksoy, T., Yapıcı Pehlivan, N. ve Özceylan, E. (2013), *Bulanık küme Teorisi*, Nobel Yayınevi, Türkiye.
- Pal, N. ve Pal, K. (1989), “Object background segmentation using a new definition of entropy”, *IEE Proceedings E (Computers and Digital Techniques)*, 136, 284-295.
- Qing, M. ve Li, T. (2004),”Some Properties and New Formula of Fuzzy Entropy”, *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Networking, Sensing & Control Taipei, Taiwm*, 21-23.
- Ross, T. J. (2010), *Fuzzy Logic with Engineering Applications*, Wiley Publication, Chichester.
- Seçme, N. (2005), *Klasik Doğrusal Programlama ve Bulanık Doğrusal Programlamanın Karşılaştırılmalı Bir Analizi: Üretim Planlama Örneği*, Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Kayseri.
- Shamilov, A. (2006), “A development of entropy optimization methods”, *WSEAS Transactions on Mathematics*, 5, 568–575.
- Shamilov A., Usta İ. ve Mert Kantar, Y. (2006), “The Distribution of Minimizing Maximum Entropy: Alternative to Weibull distribution for wind speed”, *Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Applied Mathematics*, 605-610.
- Shamilov, A. (2007), “Generalized entropy optimization problems and the

- existence of their solutions”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 382, 465–472.
- Shamilov, A. (2010), “Generalized entropy optimization problems with finite moment function sets”, *Journal of Statistics and Management Systems*, 13, 595-603.
- Shamilov, A., Özdemir, S. ve Yılmaz, N. (2014), “Generalized Entropy Optimization Methods for Survival Data”, *ALT2014: 5th International Conference on Accelerated Life Testing and Degradation Models*, Pau, Fransa, 174-183.
- Shamilov, A., Şentürk, S. ve Yılmaz, N. (2016), “Generalized Maximum Fuzzy Entropy Methods with Applications on Wind Speed Data”, *Journal of Mathematics and System Science* (ISSN 2159-5291, USA).
- Shamilov, A., Şentürk, S. ve Yılmaz, N. (2015), “Generalized Maximum Fuzzy Entropy Methods with Applications”, *The 4th International Fuzzy Systems Symposium*, İstanbul, 87-92.
- Shamilov, A., Şentürk, S. ve Yılmaz, N. (2015), “Generalized Maximum Fuzzy Entropy Methods with Applications on Wind Speed Data”, *The 5th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications*, Bakü, Azerbaycan, 217-220.
- Shannon, C.E. (1948), “A mathematical theory of communications”, *Bell System Technical Journal*, 27, 379–623.
- Şamilov, A. (2009), *Entropi, İnfomasyon ve Entropi Optimizasyon*, T.C Anadolu Üniversitesi Yayınları, Türkiye.
- Şanlı, K. (2005), *Bulanık Robust Regresyon Çözümlemesi*, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Şenol, F. (2000), *Bulanık mantık kontrolcüsü*, Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara.
- Şen, Z. (2001), *Bulanık Mantık ve Modelleme İlkeleri*, Bilge Kültür Yayınevi, İstanbul.
- Şen, Z. (2004), *Mühendislikte Bulanık Mantık ile Modelleme Prensipleri*, Su Vakfı Yayınları, İstanbul.
- Tao, W., Tian, J. ve Liu, J. (2003), “Image segmentation by three-level thresholding

- based on maximum fuzzy entropy and genetic algorithm”, *Pattern Recognition Letters*, 24, 3069–3078
- Uçal Sarı, İ. (2012), *Yatırım Analizinde Bulanık Model Önerileri*, Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Yager, R.R. (1979), “On measures of fuzziness and negation, Part I: Membership in the unit interval”, *International Journal of General Systems*, 5, 221-229.
- Yanartaş, S.S. (2009), *Bulanık Regresyonda Kullanılan Yöntemler*, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Yen, J. ve Langari, R. (1999), *Fuzzy Logic, Intelligence, Control and Information*, Prentice Hall, New Jersey.
- Yıldırım, Y. (2009), *Bulanık doğrusal programlama ve bir uygulama*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Osman Paşa Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Tokat.
- You, C. ve Wen, M. (2008), “The entropy of fuzzy vectors”, *Computers and Mathematics with Applications*, 56, 1626–1633.
- Zadeh, L. (1968), “Probability measures of fuzzy events”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 23, 421-427.
- Zadeh, L. A. (1965), “Fuzzy Sets”, *Information and Control*, 8, 338-353.
- Zimmermann, H.J. (1991), *Fuzzy Set Theory and its applications*, Kluwer Academic, Dordrecht.
- Zorich, V. A. (2002), *Mathematical Analysis I*, Springer, Moscow.

EKLER

EK 1- Sigmoidal Üyelik Fonksiyonundan Elde Edilen Bulanık Veri Seti İçin (Bölüm 5.3) MinMax(F)Ent ve MaxMax(F)Ent Problemlerinin Oluşturulması ve Çözümü için Hazırlanan Programın İki Kısıta Göre MATLAB Kodu

```
1. clear all
2. g1=inline('sqrt(x)');
3. g2=inline('log(x)');
4. g3=inline('log(1+x)');
5. g4=inline('log(1+x.^2)');
6. mu= [0.0004 0.0011 0.0030 0.0082 0.0219 0.0573 0.1419 0.3100
        0.5498 0.7685 0.9002 0.9608 0.9852 0.9945 0.9980 0.9993
        0.9997 0.9999];
7. veri=[0.1000 0.6000 1.1000 1.6000 2.1000 2.6000 3.1000 3.6000
        4.1000 4.6000 5.1000 5.6000 6.1000 6.6000 7.1000 7.6000
        8.1000 8.6000];
8. syms w1 w2 w3 w4;
9. H=[w1,w2,w3,w3,w4];
10. syms T1 T2 T3 T;
11. Topmu=sum(mu);
12.
13. v=length(veri);
14. b(1:v)=1;
15. G=[b;g1(veri);g2(veri);g3(veri);g4(veri)];
16. [str,stn]=size(G);
17. moment(1:str)=0;
18. moment(1)=Topmu;
19. for j=2:str
20. for i=1:stn
21. moment(j)=moment(j)+mu(i)*G(j,i);
22. end
23. end
24. kombinasyon=1;
```



```

25. combos=combntns(1:(str-1),kombinasyon);
26. [c,e]=size(combos);
27. for m=1:c
28. T1=0;
29. T2=0;
30. T3=0;
31. for i=1:stn
32. for j=1:e
33. T3=T3+(H(j)*G(combos(m,j)+1,i)) ;
34. end
35. for j=1:e
36. T1=T1+(1/(1+exp(T3)))*G(combos(m,j)+1,i);
37. end
38. T3=0;
39. end
40. for j=1:e
41. sonuc1(j)=T1-moment(combos(m,j)+1);
42. end
43. for i=1:e
44. x0(i,1)=0;
45. end
46. fid=fopen('uyelik.m', 'w');
47. fprintf(fid,'function fu=uyelik(y)\n');
48. if kombinasyon==1
49. fprintf(fid,'w1=y(1)\n');
50. end
51. if kombinasyon==2
52. fprintf(fid,'w1=y(1)\n');
53. fprintf(fid,'w2=y(2)\n');
54. end
55. if kombinasyon==3
56. fprintf(fid,'w1=y(1)\n');

```

```

57. fprintf(fid,'w2=y(2)\n');
58. fprintf(fid,'w3=y(3)\n');
59. end
60. if kombinasyon==4
61. fprintf(fid,'w1=y(1)\n');
62. fprintf(fid,'w2=y(2)\n');
63. fprintf(fid,'w3=y(3)\n');
64. fprintf(fid,'w4=y(4)\n');
65. end
66. if kombinasyon==5
67. fprintf(fid,'w1=y(1)\n');
68. fprintf(fid,'w2=y(2)\n');
69. fprintf(fid,'w3=y(3)\n');
70. fprintf(fid,'w4=y(4)\n');
71. fprintf(fid,'w5=y(5)\n');
72. end
73. s = char(sonuc1);
74. fprintf(fid,'fu=-(%s);\n', s);
75. fprintf(fid,'return;\n\n');
76. fclose(fid);
77. [x1,fval]=fsolve(@uyelik,x0);
78. clear uyelik.m ;
79. clear(s);
80. for i=1:stn
81. for j=1:e
82. Lamda0=log((1-mu(i))/mu(i))-(x1(j)*G(combos(m,j)+1,i));
83. end
84. end
85. for i=1:stn
86. for j=1:e
87. m(m,i)=1/(1+exp(Lamda0+x1(j)*G(combos(m,j)+1,i)));
88. end

```

```

89. end
90. max(f)ent=zeros(m,1);
91. for i=1:stn
92. max(f)ent(m)=max(f)ent(m)-(m(m,i)*log2(m(m,i))+(1-m(m,i))*log2(1-
    m(m,i)));
93. end
94. Max(F)Ent(m)=max(f)ent(m);
95. end
96. [C,I] = max(Max(F)Ent);%min(Max(F)Ent)
97. switch I
98. case 1
99. disp('moment x^1/2 dir')
100. case 2
101. disp('moment log(x) dir')
102. case 3
103. disp('moment log(1+x) dir')
104. case 4
105. disp('moment(log(1+x.^2) dir')
106. otherwise
107. disp('Bu işte bi iş var')
108. end

```